



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez ”

**Estrellas esféricas newtonianas y relativistas
soportadas por un gas politrópico o campos de
bosones**

Tesis

que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

Presenta:

Emmanuel Chávez Nambo

Director de Tesis:

Dr. Olivier Charles Albert Sarbach

Morelia, Michoacán. Septiembre 2019

DEDICATORIA

A mis padres, Fabiola Nambo Martinez y Jose Luis Chávez Lucio, por darme siempre su apoyo incondicional, por el esfuerzo que siempre hacen día con día para que nunca me falte nada en esta vida y por ser mis guías y ejemplos. Nada de esto hubiera sido posible sin ellos y se los dedico con todo mi corazón.

Agradecimientos

- A mi asesor, Dr. Olivier Sarbach, por aceptarme para trabajar con él, por apoyarme y dedicar su tiempo en explicarme y ayudarme en mis dudas sobre el proyecto. Por darme consejo acerca de mi formación académica.
- A mis hermanos, Jafet Chávez Nambo y Luis Angel Chávez Nambo, por apoyarme y estar conmigo en este logro que significa mucho para mí.
- A mis tíos, Olga Nambo Martínez y Alejandro Nambo Martínez, por aconsejarme y por su apoyo que siempre fue muy importante para mí.
- A mis abuelitos, Higinia y J. Carmen, que igualmente siempre me apoyaron y se preocuparon por mí. Por darme siempre su sabio consejo.
- A las personas que me acompañaron una gran parte de esta etapa pero que por algunas razones seguimos caminos distintos. Gracias por apoyarme y acompañarme ese tiempo.

Índice general

Resumen	1
Abstract	3
1. Introducción	5
2. Ecuación de Lane-Emden	7
2.1. Deducción de la ecuación de Lane-Emden	7
2.2. Soluciones analíticas de la ecuación de Lane-Emden	10
2.2.1. Solución para $n = 0$	10
2.2.2. Solución para $n = 1$	11
2.2.3. Solución para $n = 5$	12
2.3. Solución de la ecuación de Lane-Emden usando series de potencias	12
2.4. Existencia de soluciones en la vecindad del centro	17
2.5. Existencia de soluciones globales de la ecuación de Lane-Emden con $0 < n < 3$	22
3. Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	27
3.1. Cálculo de la curvatura y del tensor de Einstein	27
3.2. Deducción de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	33
3.3. Solución de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff con densidad de energía constante	35
3.4. Ecuación de estado politrópica	37
3.5. Existencia de soluciones en la vecindad del centro	38
3.6. Existencia de soluciones globales de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para $\gamma > \frac{4}{3}$	44
4. Estrellas de bosones newtonianas	49
4.1. Deducción de las ecuaciones	49
4.2. Existencia de soluciones en la vecindad del centro	52
4.3. Soluciones numéricas	55
5. Conclusiones	61
A. El espacio $(X_R, \ \cdot\ _\infty)$ y su completez	63

Resumen

Se presenta el análisis de ecuaciones que describen el comportamiento de estrellas esféricas y estáticas. Se estudió la ecuación Lane-Emden donde se demuestra la existencia de soluciones locales y las condiciones de la ecuación de estado bajo las cuales existen soluciones globales de esta ecuación. De forma similar se deduce la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) a partir de las ecuaciones de campo de Einstein, se demostró la existencia de soluciones locales de esta ecuación y las condiciones de la ecuación de estado bajo las cuales existen soluciones globales. Se demuestra también de forma rigurosa que el límite de Buchdahl, es decir que $2m(r)/r < 8/9$ siendo $m(r)$ la masa contenida en una esfera de radio r , vale dentro de la estrella. Finalmente se demuestra la existencia de soluciones locales del sistema Schrödinger-Poisson generalizado que describen estrellas de bosones newtonianas formadas por un número impar de campos escalares y se analiza numéricamente las soluciones de este sistema de donde podemos observar que es posible que existan soluciones globales.

Palabras claves: ecuación de Lane-Emden, ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, soluciones locales, soluciones globales, límite de Buchdahl, campo escalar, ecuación de Schrödinger.

Abstract

An analytic study for equations that describe the behavior of spherical and static stars is presented. The Lane-Emden equation is studied where the existence of local solutions and the conditions of the equation of state under which there exist global solutions of this equation are demonstrated. Similarly, the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equation is deduced from the Einstein field equations, the existence of local solutions of this equation and the conditions of the state equation under which there are global solutions are demonstrated. It is also rigorously demonstrated that the Buchdahl limit, that is to say the estimate $2m(r) < 8/9$, $m(r)$ being the mass contained inside a sphere of radius r , is valid inside of the star. Finally, the existence of local solutions of the generalized Schrödinger-Poisson system that describes newtonian boson stars formed by an odd number of scalar fields is demonstrated and, the solutions of this system are analyzed numerically. These results suggest that global solutions might exist.

Capítulo 1

Introducción

Las estrellas nos han causado intriga y curiosidad desde los inicios de la humanidad y debido a esto siempre han sido objeto de estudio de los físicos. Una estrella es un objeto astrofísico sometido a su propia gravedad la cual debido a que es atractiva trata de colapsarla, pero en contraparte a esta, la materia de la que está hecha la estrella ejerce una presión que trata de hacer que esta estalle, por lo tanto una estrella puede existir cuando se presenta un equilibrio entre la gravedad y la presión que soporta la estrella. Una estrella puede estar formada por diferentes tipos de materia como por ejemplo un fluido, como nuestro Sol que esta compuesto de gas o las estrellas de neutrones que, como su nombre lo indica, están compuestas principalmente por neutrones [1]. La ecuación de Lane-Emden puede describir de muy buena manera las estrellas newtonianas esféricas, estáticas y compuestas por un fluido politrópico, tal es el caso de nuestro Sol que puede describirse con buena precisión usando esta ecuación con $n = 3$ donde n es el índice politrópico[1]. Cuando las estrellas son muy masivas pero ocupan un espacio en el universo relativamente pequeño en comparación con su masa, o dicho con mas precision, cuando R/r_s es pequeño (donde R es el radio de la estrella y $r_s = 2GM/c^2$ el radio de Schwarzschild) como es el caso de las estrellas de neutrones, los efectos relativistas empiezan a ser importantes y no se puede usar un modelo newtoniano para describirlas. En este caso la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [2, 3] debe reemplazar la ecuación de Lane-Emden para describir las estrellas esféricas y estáticas.

Además del tipo de estrellas mencionadas anteriormente, en los últimos años, se han estudiado algunos objetos astrofísicos exóticos, como por ejemplo, las estrellas de bosones que son estrellas hipotéticas que en lugar de estar formadas por un fluido o gas, están compuestas por un campo escalar y que fueron propuestas originalmente por Kaup [4] y Ruffini y Bonazzola [5] y que poco a poco se han ido estudiado mas [6, 7]. Este tipo de estrellas exóticas han ido ganando la atención de los físicos debido a que éstas pueden ser imitadoras de agujeros negros y ademas pueden ser consideradas como candidatas a materia oscura (por ejemplo, para describir el halo galáctico de materia oscura)[8].

En el presente trabajo se estudian las estrellas newtonianas y relativistas dotadas de simetría esférica, estáticas y compuestas por un fluido politrópico o campos escalares, y se da respuesta a la pregunta: ¿Existen soluciones de las ecuaciones de Lane-Emden y Tolman-Oppenheimer-Volkoff que describan estrellas de radio y masa finitos?. También se demuestra de manera rigurosa que en el caso relativista el límite de Buchdahl, es decir

que $m(r)/r < 4/9$ siendo $m(r)$ la masa contenida en una esfera de radio r , vale dentro de la estrella. Además se demuestra la existencia de soluciones locales de las ecuaciones que describen estrellas de bosones newtonianas formadas por un número impar N de campos escalares y se hace un estudio numérico de estas ecuaciones el cual da indicios de la existencia de soluciones globales de dichas ecuaciones.

Esta tesis está organizada como sigue. En el capítulo 2 se estudia, como se dijo anteriormente, las estrellas newtonianas con simetría esférica y formadas por un fluido politrópico. Aquí se encuentran las condiciones de la ecuación de estado bajo las cuales pueden existir estas estrellas. En el capítulo 3 se estudian las estrellas relativistas esféricamente simétricas y formadas por un fluido perfecto. En [2] se presenta un estudio más general de estas estrellas usando una ecuación de estado general, aquí nos enfocamos en la caso especial de una ecuación de estado politrópica y se encuentran las condiciones de la ecuación de estado bajo las cuales pueden existir estas estrellas. En el capítulo 4 se demuestra la existencia local de las estrellas de bosones newtonianas formadas por un número impar N de campos escalares y se muestra el comportamiento global de éstas mediante un estudio numérico de las ecuaciones que las describen. Estas estrellas constituyen el análogo newtoniano de las " ℓ -boson stars" discutidas en [7] y constituye un resultado nuevo en la literatura (según estamos enterados). Su particularidad reside en el hecho de que cada campo escalar individual posee momento angular; sin embargo la configuración total es esférica. Terminamos la tesis con algunas conclusiones y una descripción de trabajo futuro. Aspectos técnicos se incluyen en un apéndice al final del trabajo.

Capítulo 2

Ecuación de Lane-Emden

En la primera sección de este capítulo se deduce la ecuación de Lane-Emden la cual se usa para describir la estructura de un cuerpo dotado de simetría esférica y constituido de un fluido politrópico, sometido a su propia gravitación newtoniana, como algunos tipos de estrellas [1]. A continuación se obtienen soluciones analíticas para algunos valores del índice politrópico n . Después se usan series de potencias para resolver la ecuación de Lane-Emden con algunos valores de n para los cuales la ecuación no tiene solución analítica. Luego se demuestra, usando el teorema del punto fijo de Banach, que se puede encontrar soluciones en un intervalo suficientemente pequeño en la vecindad del origen. Finalmente se demuestra que para $0 < n < 3$ existen soluciones globales de la ecuación de Lane-Emden.

2.1. Deducción de la ecuación de Lane-Emden

En la teoría de Newton, una estrella en equilibrio puede describirse por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla P = -\rho\nabla\phi, \quad (2.2)$$

$$P = P(\rho), \quad (2.3)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional, G la constante de gravitación universal, ρ la densidad y P la presión.

La Ec. (2.1) se conoce como la ecuación de Poisson, la Ec. (2.2) como la ecuación de equilibrio hidrostático y la Ec. (2.3) es una ecuación de estado. Si suponemos que la estrella tiene simetría esférica, es decir

$$\phi = \phi(r),$$

$$\rho = \rho(r),$$

entonces

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right), \quad (2.4)$$

por lo que la ecuación (2.1) se transforma en la siguiente

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho, \quad (2.5)$$

y la ecuación (2.2) se puede escribir como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{d\phi}{dr}. \quad (2.6)$$

Sustituyendo la Ec. (2.6) en la Ec. (2.5) queda una ecuación radial diferencial de segundo orden para la presión P y la densidad ρ

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = 4\pi G\rho. \quad (2.7)$$

Ahora se usa la siguiente ecuación de estado politrópica

$$P = K\rho^\Gamma, \quad (2.8)$$

donde K es una constante positiva, $\Gamma = 1 + \frac{1}{n}$ y n es el índice politrópico el cual, en un principio, puede tomar cualquier valor real positivo. Existen algunos valores para n físicamente relevantes, los mas importantes son $n = \frac{3}{2}$ y $n = 3$ ([1]). El valor $n = \frac{3}{2}$ corresponde a una estrella sostenida por la presión de un gas no relativista. El valor $n = 3$ corresponde a una estrella adiabática sostenida por la presión de un gas ultra-relativista. El índice $n = 3$ es un buen modelo para nuestro sol. Entonces, sustituyendo la Ec. (8) en la Ec. (7) se obtiene una ecuación cerrada para ρ :

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 K \Gamma \rho^{\Gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \right) = 4\pi G\rho. \quad (2.9)$$

A continuación se define el radio en función de una variable adimensional,

$$r = a\xi, \quad (2.10)$$

donde a es un parámetro que se elegirá mas adelante y el cual se mide en metros y ξ es una variable adimensional. También se define la densidad de la siguiente forma,

$$\rho = \rho_c \Theta^n, \quad (2.11)$$

donde ρ_c es la densidad central y $\Theta = \Theta(\xi)$ una función adimensional. Entonces la presión queda definida por

$$P = K\rho_c^\Gamma \Theta^{n+1}.$$

Sustituyendo la Ec. (2.10) y (2.11) en la Ec. (2.9) se obtiene la siguiente expresión

$$-\frac{1}{a^3\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(a^2\xi^2K\Gamma\rho_c^{\Gamma-2}\Theta^{n(\Gamma-2)}\frac{\rho_c n}{a}\Theta^{n-1}\frac{d\Theta}{d\xi}\right)=4\pi G\rho_c\Theta^n.$$

Simplificando términos la ecuación anterior queda

$$-\frac{\rho_c^{\Gamma-2}nK\Gamma}{4\pi Ga^2\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\frac{d\Theta}{d\xi}\right]=\Theta^n. \quad (2.12)$$

Ahora se elige $a = \sqrt{\frac{\rho_c^{\Gamma-2}nK\Gamma}{4\pi G}}$, por lo que la ec. (2.12) queda de la siguiente forma

$$-\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\Theta}{d\xi}\right)=\Theta^n. \quad (2.13)$$

La Ec. (2.13) se conoce como la ecuación de Lane-Emden [1], la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal y adimensional con las siguientes condiciones de frontera:

$$\Theta(0) = 1, \quad (2.14)$$

$$\Theta'(0) = 0, \quad (2.15)$$

donde $' := \frac{d}{d\xi}$. La condición de frontera (2.15) es debido a que la estrella debe ser regular en el centro, es decir el perfil de densidad de la estrella no debe de tener un pico en el centro. La densidad la podemos escribir de la siguiente forma

$$\rho = \frac{dM}{dV}, \quad (2.16)$$

donde dV y dM son un diferencial de volumen y un diferencial de masa, respectivamente. Como la estrella es esférica $dV = 4\pi r^2 dr$, y entonces

$$dM = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (2.17)$$

Integrando de ambos lados la Ec. (2.16) se obtiene

$$M = \int_0^{r_1} 4\pi r^2 \rho dr, \quad (2.18)$$

pero $r = a\xi$ y $\rho = \rho_c\Theta^n(\xi)$, entonces

$$M = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \Theta^n(\xi) d\xi. \quad (2.19)$$

Sustituyendo la ecuación de Lane-Emden en la Ec. (2.19) concluimos que la masa de la estrella puede ser encontrada de la siguiente forma

$$M = -4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 \left. \frac{d\Theta}{d\xi} \right|_{\xi_1}, \quad (2.20)$$

donde ξ_1 es el radio de la estrella ($r_1 = a\xi_1$). Además la superficie o radio de la estrella la podemos encontrar buscando el primer cero de $\Theta(\xi)$, ya que en la superficie $P = 0$ y esto

implica que $\Theta(\xi) = 0$. A continuación se presentarán algunas soluciones analíticas de esta ecuación, para valores muy particulares de n .

2.2. Soluciones analíticas de la ecuación de Lane-Emden

Existen soluciones analíticas de la ecuación de Lane-Emden para $n = 0, 1, 5$ (ver [1]). En esta sección discutimos estas soluciones y sus propiedades más importantes.

2.2.1. Solución para $n = 0$

Con $n = 0$ la ecuación de Lane-Emden se transforma en

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\xi^2. \quad (2.21)$$

Integrando de ambos lados de la igualdad en la Ec. (2.21) se obtiene

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = -\frac{1}{3}\xi + \frac{C_1}{\xi^2}.$$

con una constante de integración C_1 que debe ser cero para respetar la regularidad en el centro, ver la Ec. (2.15). Por lo que

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = -\frac{1}{3}\xi. \quad (2.22)$$

Nuevamente, integrando ambos lados de la Ec. (2.22) se obtiene el siguiente resultado para Θ

$$\Theta = -\frac{1}{6}\xi^2 + C_2.$$

Usando ahora la Ec. (2.14) obtenemos que $C_2 = 1$. Entonces la solución de la ecuación de Lane-Emden para $n = 0$ es:

$$\Theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2. \quad (2.23)$$

La superficie de la estrella la podemos encontrar cuando $\Theta(\xi) = 0$, entonces

$$1 - \frac{1}{6}\xi^2 = 0,$$

de donde obtenemos que

$$\xi = \sqrt{6}. \quad (2.24)$$

Notemos que este caso corresponde a una estrella con densidad constante porque si $n = 0$ entonces $\rho = \rho_c \Theta^0(\xi) = \rho_c$.

2.2.2. Solución para $n = 1$

Con $n = 1$ la ecuación de Lane-Emden tiene la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \Theta. \quad (2.25)$$

Se introduce el siguiente cambio de variable

$$\chi(\xi) = \xi \Theta(\xi). \quad (2.26)$$

De la Ec. (2.26) obtenemos

$$\Theta(\xi) = \frac{\chi(\xi)}{\xi}. \quad (2.27)$$

Entonces,

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{\xi \chi' - \chi}{\xi^2}. \quad (2.28)$$

Sustituyendo la Ec. (2.28) en la Ec. (2.25), se obtiene que

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = \xi \chi''. \quad (2.29)$$

Entonces de las Ecs. (2.25), (2.27) y (2.29) obtenemos la siguiente ecuación diferencial,

$$\chi'' + \chi = 0$$

cuya solución es,

$$\chi(\xi) = A \operatorname{sen}(\xi) + B \cos(\xi), \quad (2.30)$$

y usando la Ec. (2.26) se puede encontrar la solución para Θ , la cual es

$$\Theta(\xi) = \frac{A \operatorname{sen}(\xi)}{\xi} + \frac{B \cos(\xi)}{\xi}. \quad (2.31)$$

Usando la condición de regularidad (2.14) se obtiene que $B = 0$ y $A = 1$. Por lo tanto la solución para la ecuación de Lane-Emden con $n = 1$ es

$$\Theta(\xi) = \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi}. \quad (2.32)$$

Se puede verificar que esta solución satisface también la condición inicial (2.15). El radio de la estrella lo podemos encontrar de la siguiente expresión

$$\frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi} = 0,$$

lo que implica que el radio de la estrella está dado por el primer cero de esta expresión, el cual es

$$\xi = \pi. \quad (2.33)$$

2.2.3. Solución para $n = 5$

Con $n = 5$ la ecuación de Lane-Emden es:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\Theta^5. \quad (2.34)$$

La solución analítica a esta ecuación diferencial es

$$\Theta(\xi) = \left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.35)$$

El procedimiento para llegar a esta solución se puede ver en [1]. Es interesante analizar el radio de la estrella en este caso. Para encontrarlo igualamos a 0 nuestra solución, es decir

$$\left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad (2.36)$$

observemos que el lado derecho de la Ec. (33) se hace 0 solo si $\xi \rightarrow \infty$, por lo que el radio de la estrella es infinito. Para que este caso siga siendo físicamente posible debemos verificar que la masa no crece infinitamente también, para eso vemos que

$$\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} = -\frac{\xi^3}{3} \left(1 + \frac{\xi^2}{3} \right)^{-3/2} \rightarrow -\sqrt{3}$$

cuando $\xi \rightarrow \infty$. Por lo tanto sustituyendo en la ec. (18) obtenemos que

$$M = 4\pi a^3 \rho_c \sqrt{3}.$$

Entonces aún si su radio es infinito, la masa de la estrella es finita. Este resultado nos indica que la densidad decae muy rápidamente mientras el radio crece. Por lo tanto tenemos una solución exacta para estos valores de n pero, como se mencionó en la sección anterior, los valores físicamente relevantes no son estos. Entonces debemos buscar métodos para resolver la ecuación de Lane-Emden con $n = \frac{3}{2}$ o $n = 3$.

2.3. Solución de la ecuación de Lane-Emden usando series de potencias

Como se dijo en la sección anterior, solo existen soluciones analíticas de la ecuación de Lane-Emden para $n = 0, 1, 5$. Para otros valores de n se deben de usar métodos de aproximación. En esta sección se intentará resolver la ecuación para valores de $n = 0, 1, 2, 3$ usando series de potencia. Para esto se propone un ansatz de la siguiente forma:

$$\Theta(\xi) = a_0 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi^4 + \dots = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^{2k}, \quad a_0 = 1. \quad (2.37)$$

La razón por la que se eligieron solo potencias pares es que los coeficientes de las potencias impares son siempre 0 debido a la condición de regularidad en el centro. Entonces sustituyendo la Ec.(2.37) en la ecuación de Lane-Emden (Ec. (2.13))

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d}{d\xi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k} \right) \right] = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k} \right)^n.$$

Calculando las derivadas y simplificando obtenemos la siguiente expresión

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (2k+1) 2k \xi^{2k-2} = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k} \right)^n. \quad (2.38)$$

Hacemos el siguiente cambio de variable

$$k = j + 1$$

y sustituyendo en la parte izquierda de la ec.(2.38) obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+3) (2j+2) a_{j+1} \xi^{2j} = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k} \right)^n. \quad (2.39)$$

Notemos que de la Ec. (2.39) el coeficiente de ξ^0 , nos da el siguiente resultado

$$a_1 = -\frac{1}{6}, \quad (2.40)$$

independientemente del valor de n . Luego usando la siguiente expresión

$$\left(1 - \frac{1}{6} \xi^2 + O(\xi^4) \right)^n = 1 - \frac{n}{6} \xi^2 + O(\xi^4),$$

obtenemos que el coeficiente de ξ^2 está dado por

$$20a_2 = \frac{n}{6},$$

por lo que

$$a_2 = \frac{n}{120} \quad (2.41)$$

para cualquier valor de n . Ahora debemos encontrar una ecuación recursiva para obtener los valores de los coeficientes a_j con $j > 2$ arbitrario. Iniciaremos primero encontrando dicha ecuación recursiva para $n = 0$. Para $n = 0$ se tiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+3) (2j+2) a_{j+1} \xi^{2j} = -1, \quad (2.42)$$

y podemos observar en la Ec. (2.42) que el único coeficiente distinto de 0 es a_1 , es decir cuando $j = 0$. El valor de a_1 está dado por la Ec. (2.40). Sustituyendo a_1 en la Ec. (2.37) obtenemos que

$$\Theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2, \quad (2.43)$$

lo cual coincide con la solución analítica obtenida en la Ec. (2.23), basada en integración directa. Ahora para $n = 1$ tenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} (2j+3) (2j+2) \xi^{2j} = - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k},$$

por lo tanto

$$a_{j+1} = \frac{-a_j}{(2j+3)(2j+2)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

De la Ec. (2.44) podemos deducir entonces que

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}. \quad (2.45)$$

Sustituyendo la Ec. (2.45) en la Ec. (2.37) obtenemos lo siguiente

$$\Theta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \xi^{2k}, \quad (2.46)$$

pero se observa que la parte derecha de la Ec. (2.46) es la expansión en serie de Taylor de la función $\frac{\text{sen}(\xi)}{\xi}$, por lo tanto

$$\Theta(\xi) = \frac{\text{sen}(\xi)}{\xi}, \quad (2.47)$$

que coincide nuevamente con la solución analítica obtenida en la Ec. (2.32). Ahora veremos lo que sucede para $n = 2$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} (2j+3) (2j+2) \xi^{2j} = - \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1} \xi^{2k_1} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_2} \xi^{2k_2} \right) \quad (2.48)$$

Por otro lado

$$\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} a_{k_1} \xi^{2k_1} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_2} \xi^{2k_2} \right) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} a_{k_1} a_{k_2} \xi^{2(k_1+k_2)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1+k_2=j}}^j a_{k_1} a_{k_2} \right) \xi^{2j},$$

entonces regresando a la Ec. (2.48), obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} (2j+3) (2j+2) \xi^{2j} = - \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1+k_2=j}}^j a_{k_1} a_{k_2} \right) \xi^{2j}. \quad (2.49)$$

Por lo tanto

$$- \sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1+k_2=j}}^j a_{k_1} a_{k_2} = (2j+3)(2j+2) a_{j+1}. \quad (2.50)$$

Ya que $k_1 + k_2 = j$, entonces $k_2 = j - k_1$. Y sustituyendo en la ec. (2.50) esta se transforma en lo siguiente

$$- \sum_{k_1=0}^j a_{k_1} a_{j-k_1} = (2j+3)(2j+2) a_{j+1}, \quad (2.51)$$

y por lo tanto obtenemos la siguiente expresión recursiva para a_{j+1} ,

$$a_{j+1} = -\frac{1}{(2j+3)(2j+2)} \sum_{k_1=0}^j a_{k_1} a_{j-k_1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

Para $j = 0$ tenemos que

$$a_1 = -\frac{1}{6} a_0^2 = -\frac{1}{6},$$

que coincide con la expresión (2.40). Para $j = 1$ obtenemos

$$a_2 = -\frac{2}{20} a_0 a_1 = \frac{2}{120}.$$

que nuevamente coincide con la expresión (2.41). Debemos analizar ahora la convergencia de la serie de potencias obtenida. Usando inducción en j , notamos primero que $|a_0| \leq 1$. Luego, asumimos que $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_j| \leq 1$. Entonces

$$|a_{j+1}| \leq \frac{1}{(2j+3)(2j+2)} \sum_{k_1=0}^j |a_{k_1}| |a_{j-k_1}| \quad (2.53)$$

como $|a_{k_1}| \leq 1$ y $|a_{j-k_1}| \leq 1$,

$$|a_{j+1}| \leq \frac{j+1}{(2j+3)(2j+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2j+3} \right) < 1, \quad (2.54)$$

por lo tanto

$$|\Theta(\xi)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \xi^{2k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{2k} \quad (2.55)$$

La Ec. (2.55) converge para $0 \leq \xi < 1$ ya que es la serie geométrica. Esto quiere decir que, para $n = 2$, el ansatz propuesto (Ec. (2.37)) funciona para valores de ξ entre 0 y 1. Esto indica que es una solución local cerca del centro, pero no necesariamente una solución global. Ahora para $n = 3$ tenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+3)(2j+2)a_{j+1}\xi^{2j} = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k} \right)^3, \quad (2.56)$$

por otro lado

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k} \right)^3 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2, k_3=0 \\ k_1+k_2+k_3=j}}^j a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \right) \xi^{2j}.$$

Entonces regresando a la Ec. (2.56)

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+3)(2j+2)a_{j+1}\xi^{2j} = - \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2, k_3=0 \\ k_1+k_2+k_3=j}}^j a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \right) \xi^{2j}. \quad (2.57)$$

y concluimos que

$$a_{j+1} = - \frac{1}{(2j+3)(2j+2)} \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3=0 \\ k_1+k_2+k_3=j}}^j a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

Para $j = 0$

$$a_1 = -\frac{1}{6}a_0^3 = -\frac{1}{6}, \quad (2.59)$$

que coincide con la expresión (2.40). Para $j = 1$ la Ec. (2.58) nos da

$$a_2 = -\frac{3}{20}a_0^2 a_1 = \frac{3}{120}, \quad (2.60)$$

que nuevamente coincide con la expresión (2.41). Por lo tanto con la ec. (2.58) podemos obtener los coeficientes para $n = 3$ de la serie de potencias dada por la ec. (2.37). Analicemos ahora la convergencia de la serie de potencias obtenida para $n = 3$. Usando nuevamente inducción en j , notamos primero que $|a_0| \leq 1$. Luego, asumimos que $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_j| \leq 1$. Entonces

$$|a_{j+1}| \leq \frac{1}{(2j+3)(2j+2)} \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3=0 \\ k_1+k_2+k_3=j}}^j |a_{k_1}| |a_{k_2}| |a_{k_3}|, \quad (2.61)$$

como $|a_{k_1}| \leq 1$, $|a_{k_2}| \leq 1$ y $|a_{k_3}| \leq 1$, entonces

$$|a_{j+1}| \leq \frac{(j+1)^2}{(2j+3)(2j+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{j+1}{2j+3} \right) < 1, \quad (2.62)$$

por lo tanto

$$|\Theta(\xi)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \xi^{2k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{2k} \quad (2.63)$$

La Ec. (2.63) converge para $0 \leq \xi < 1$ ya que es la serie geométrica. Lo que significa que, para $n = 3$, el ansatz propuesto (Ec. (2.37)) funciona para valores de ξ entre 0 y 1.

Como pudimos ver, el método de series de potencias considerado en esta sección funciona pero es tardado y laborioso ya que las expresiones para los coeficientes son cada vez más complicadas. Además como n puede ser un número racional (como por ejemplo $n = \frac{3}{2}$ que es un caso físicamente relevante) las expresiones en estos casos serían aún más complicadas. A continuación se usarán otros métodos matemáticos más potentes para encontrar solución local y global a la ecuación de Lane-Emden para todo $0 < n < 3$.

2.4. Existencia de soluciones en la vecindad del centro

En esta sección se transforma la ecuación de Lane-Emden en una ecuación de punto fijo y se demuestra, usando el teorema del punto fijo de Banach, que se puede encontrar solución de dicha ecuación en un intervalo $(0, R]$ con R suficientemente pequeño, lo que a su vez nos garantiza que se puede encontrar solución de la ecuación de Lane-Emden en el mismo intervalo. Luego se muestra que para $0 < n < 3$, existen soluciones globales de la ecuación de Lane-Emden que describen una estrella con radio finito.

Para convertir la ecuación de Lane-Emden

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\xi^2 \Theta^n(\xi), \quad \xi > 0,$$

a una ecuación de punto fijo, integramos ambos lados de $\xi = 0$ a $\xi = y$ y dividimos por y^2 , obteniendo

$$\frac{d\Theta(y)}{dy} = -\frac{1}{y^2} \int_0^y \xi^2 \Theta^n(\xi) d\xi + \frac{C_0}{y^2}.$$

Usando las condiciones de frontera deducimos que $C_0 = 0$. Integrando nuevamente ambos lados

$$\Theta(x) = \int_0^x \left[-\frac{1}{y^2} \int_0^y \xi^2 \Theta^n(\xi) d\xi \right] dy + C_1. \quad (2.64)$$

Usando integración por partes en el lado derecho de la Ec. (2.64) y usando las condiciones de frontera, con las que deducimos que $C_1 = 1$, obtenemos lo siguiente

$$\Theta(x) = 1 + \int_0^x \frac{\xi^2}{x} \Theta^n(\xi) d\xi - \int_0^x \xi \Theta^n(\xi) d\xi,$$

y factorizando se obtiene la siguiente ecuación integral

$$\Theta(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{\xi}{x} - 1 \right) \xi \Theta^n(\xi) d\xi =: T_n \Theta(x). \quad (2.65)$$

Como se puede observar la Ec. (2.65) es de punto fijo, es decir, buscamos puntos fijos del operador T_n o dicho de otra manera buscamos una función $\Theta(x)$ que satisfice $\Theta = T_n \Theta$. Para mostrar la existencia de un único punto fijo usaremos el teorema del punto fijo de Banach. A continuación se enuncia este teorema (ver, por ejemplo [9]).

Teorema 2.4.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea $A = \overline{A} \subset X$ un subconjunto cerrado y no vacío de X . Sea $F : A \rightarrow A$ un mapeo de A en si mismo que constituye una contracción, es decir, existe una constante L satisfaciendo $0 \leq L < 1$ tal que*

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L\|u - v\| \quad (2.66)$$

para todo $u, v \in A$.

Entonces F posee un único punto fijo $u^* \in A$, es decir existe un único $u^* \in A$ tal que $F(u^*) = u^*$. Además, si $u \in A$, entonces la sucesión (u_k) definida por

$$u_1 := F(u), \quad u_2 := F^2(u) = F(F(u)), \quad \dots, \quad u_k := F^k(u),$$

converge a u^* . Más precisamente, vale la desigualdad

$$\|u_k - u^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L} \|u_1 - u\|, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

lo que muestra que la distancia entre u_k y u^* decrece exponencialmente rápido conforme k crece.

Para aplicar el teorema del punto fijo a nuestro problema definimos, para cada $R > 0$, el siguiente espacio vectorial

$$X_R := \{\Theta : (0, R] \rightarrow \mathbb{R} \mid \Theta \text{ continua y acotada}\} \quad (2.67)$$

y la siguiente norma

$$\|\Theta\|_\infty := \sup_{0 < x \leq R} |\Theta(x)|, \quad \Theta \in X_R \quad (2.68)$$

Por lo tanto debemos demostrar que el conjunto definido por la expresión (2.67) con la norma de la expresión (2.68) forman un espacio normado completo (espacio de Banach). Para esto debemos demostrar que (2.68) define una norma sobre X_R y que este es un espacio completo. La demostración se puede ver en el apéndice A o ver [9]. Para analizar si T_n describe una contracción sobre $(X_R, \|\cdot\|)$ lo escribimos de la siguiente forma

$$T_n \Theta = 1 + \int_0^x G(x, \xi) \Theta^n(\xi) d\xi, \quad n \geq 0, \quad (2.69)$$

donde $G(x, \xi) = \left(\frac{\xi}{x} - 1\right) \xi$, $0 \leq \xi < x$, por lo que $G(x, \xi) \leq 0$. Notemos que $T_n \Theta$ no está definido para valores de $\Theta(\xi)$ negativos, ya que n puede ser cualquier valor positivo y si $\Theta(\xi)$ fuera negativo y n racional entonces $T_n \Theta$ no estaría definido en $\mathbb{R}$. Definimos entonces la siguiente función

$$\Theta_+^n := \begin{cases} \Theta^n, & \Theta > 0 \\ 0, & \Theta \leq 0 \end{cases}$$

y reescribimos la Ec. (2.69) de la siguiente forma

$$T_n \Theta(x) = 1 + \int_0^x G(x, \xi) \Theta_+^n(\xi) d\xi, \quad n \geq 0. \quad (2.70)$$

Para poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach tenemos que primero ver que T_n sea un mapeo de X_R en si mismo, para esto $T_n \Theta$ debe ser continuo y acotado para todo $\Theta \in X_R$. Como $G(x, \xi)$ y $\Theta_+^n(\xi)$ son continuas y acotadas, entonces $T_n \Theta$ también. Ahora veamos que

$$\begin{aligned} |T_n \Theta(x)| &= \left| 1 + \int_0^x G(x, \xi) \Theta_+^n(\xi) d\xi \right| \leq 1 + \int_0^x |G(x, \xi) \Theta_+^n(\xi)| d\xi \\ &\leq 1 + \|\Theta_+^n\|_\infty \int_0^x |G(x, \xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Calculemos la siguiente integral

$$\begin{aligned} \int_0^x |G(x, \xi)| d\xi &= \int_0^x \left| \left(\frac{\xi}{x} - 1 \right) \right| \xi d\xi = \int_0^x \left| \left(1 - \frac{\xi}{x} \right) \right| \xi d\xi \\ &= \int_0^x \xi d\xi - \frac{1}{x} \int_0^x \xi^2 d\xi = \frac{1}{6} x^2. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Por lo tanto tenemos que

$$|T_n \Theta(x)| \leq 1 + \frac{1}{6} R^2 \|\Theta_+^n\|_\infty,$$

y entonces $T_n \Theta$ está acotado. Concluimos que $T_n : X_R \rightarrow X_R$ deja a X_R invariante. Definimos ahora $Y_R \subseteq X_R$ un subconjunto de X_R como sigue

$$Y_R := \left\{ \Theta \in X_R : \frac{1}{2} \leq \Theta(x) \leq 1 \quad y \quad 0 < x \leq R \right\}. \quad (2.72)$$

Veamos si $T_n : Y_R \rightarrow Y_R$ deja Y_R invariante. Para esto solo se debe cumplir que $\frac{1}{2} \leq T_n \Theta \leq 1$, es decir

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \int_0^x G(x, \xi) \Theta^n(\xi) d\xi \leq 1. \quad (2.73)$$

Como $G(x, \xi) \leq 0$ y $\Theta^n(\xi) \geq 0$, entonces

$$\int_0^x G(x, \xi) \Theta^n(\xi) d\xi \leq 0. \quad (2.74)$$

También veamos que

$$\int_0^x G(x, \xi) \Theta^n(\xi) d\xi \geq \int_0^x G(x, \xi) d\xi = -\frac{1}{6} x^2, \quad (2.75)$$

por lo tanto se debe cumplir que

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{6}x^2, \quad \text{para todo } 0 < x \leq R \quad (2.76)$$

y entonces de la desigualdad (2.76) obtenemos que $x \leq \sqrt{3}$. Por lo que si $R \leq \sqrt{3}$ entonces $T_n : Y_R \rightarrow Y_R$ deja al subconjunto Y_R invariante. Ahora, para poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach, debemos comprobar que T_n define una contracción en Y_R y además que Y_R es cerrado. Primero veamos que, efectivamente, define una contracción, es decir debemos ver que existe $0 \leq L < 1$ tal que

$$\|T_n \Theta_2 - T_n \Theta_1\|_\infty \leq L \|\Theta_2 - \Theta_1\|_\infty, \quad \text{para todo } \Theta_1, \Theta_2 \in Y_R. \quad (2.77)$$

Entonces estimamos

$$\begin{aligned} |T_n \Theta_2(x) - T_n \Theta_1(x)| &= \left| \int_0^x G(x, \xi) [\Theta_2^n(\xi) - \Theta_1^n(\xi)] dx \right| \\ &\leq \|\Theta_2^n - \Theta_1^n\|_\infty \int_0^x |G(x, \xi)| dx \end{aligned} \quad (2.78)$$

y usando la Ec. (2.71), obtenemos

$$|T_n \Theta_2(x) - T_n \Theta_1(x)| \leq \frac{1}{6}x^2 \|\Theta_2^n - \Theta_1^n\|_\infty, \quad \text{para todo } 0 < x \leq R, \quad (2.79)$$

por lo tanto

$$\|T_n \Theta_2 - T_n \Theta_1\|_\infty \leq \frac{1}{6}R^2 \|\Theta_2^n - \Theta_1^n\|_\infty, \quad \text{para todo } \Theta_1, \Theta_2 \in Y_R \quad (2.80)$$

Por otro lado vale para todo $z_2 > z_1 > 0$

$$\begin{aligned} |z_2^n - z_1^n| &= \left| \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz^n}{dz} dz \right| = \left| \int_{z_1}^{z_2} n z^{n-1} dz \right| \\ &\leq \left(\sup_{z_1 < z \leq z_2} |n z^{n-1}| \right) |z_2 - z_1|. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Si ponemos $z = \Theta(x)$, nos queda

$$|\Theta_2^n(x) - \Theta_1^n(x)| \leq n \left(\sup_{\frac{1}{2} \leq \Theta(x) \leq 1} |\Theta^{n-1}(x)| \right) |\Theta_2(x) - \Theta_1(x)|, \quad (2.82)$$

y tomando el supremo en ambos lados de la desigualdad

$$\|\Theta_2^n - \Theta_1^n\|_\infty \leq n \left(\sup_{\frac{1}{2} \leq \Theta(x) \leq 1} |\Theta^{n-1}(x)| \right) \|\Theta_2 - \Theta_1\|_\infty. \quad (2.83)$$

Ahora vemos que si $n \geq 1$ en la desigualdad (2.83), entonces

$$n \sup_{\frac{1}{2} \leq \Theta(x) \leq 1} |\Theta^{n-1}(x)| = n, \quad (2.84)$$

y si $0 \leq n < 1$, entonces

$$n \sup_{\frac{1}{2} \leq \Theta(x) \leq 1} |\Theta^{n-1}(x)| = 2^{1-n}n. \quad (2.85)$$

Las expresiones a la derecha de las ecuaciones (2.84) y (2.85) son siempre menores a $2n$, por lo que podemos deducir que

$$\|\Theta_2^n - \Theta_1^n\|_\infty \leq 2n\|\Theta_2 - \Theta_1\|_\infty, \quad \text{para todo } \Theta_1, \Theta_2 \in Y_R \text{ y todo } n > 0. \quad (2.86)$$

Ahora regresando a la Ec.(2.80) y usando la desigualdad (2.86), obtenemos que

$$\|T_n\Theta_2 - T_n\Theta_1\|_\infty \leq \frac{1}{3}nR^2\|\Theta_2 - \Theta_1\|_\infty, \quad (2.87)$$

de donde deducimos que $L = \frac{1}{3}nR^2$ y para que T_n defina una contracción se tiene que cumplir que $\frac{1}{3}nR^2 < 1$, esto implica que $R < \sqrt{\frac{3}{n}}$. Por último debemos demostrar que Y_R es un subconjunto cerrado. Para demostrar que Y_R es un subconjunto cerrado se debe probar que toda sucesión convergente definida en Y_R converge a una función dentro del subconjunto. Tomemos $(\Theta_n) \in Y_R$ una sucesión convergente, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n := \Theta \in X_R, \quad (2.88)$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\Theta_n - \Theta\|_\infty < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > N, \quad (2.89)$$

lo que implica que

$$|\Theta_n(x) - \Theta(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > N \text{ y } x \in (0, R]. \quad (2.90)$$

Como $\Theta_n \in Y_R$, se satisface que

$$\frac{1}{2} \leq \Theta_n(x) \leq 1, \quad \text{para todo } x \in (0, R].$$

Tomando el limite, para x fijo, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{2} \leq \Theta(x) \leq 1,$$

por lo tanto $\Theta \in Y_R$ y entonces Y_R es cerrado. Además, como ya se vio, $T_n : Y_R \rightarrow Y_R$ deja invariante a Y_R y define una contracción si

$$R \leq \sqrt{3} \quad \text{y} \quad R < \sqrt{\frac{3}{n}}, \quad (2.91)$$

donde observamos que si $n \geq 0$ con n racional positivo, la condición que se tiene que cumplir es $R < \sqrt{\frac{3}{n}}$, y si $0 < n < 1$ la condición a cumplir es $R \leq \sqrt{3}$. Por lo que concluimos que el teorema del punto fijo de Banach nos garantiza que podemos encontrar

una única solución de la ecuación de punto fijo (2.65) en un intervalo $(0, R]$ donde R debe de satisfacer las desigualdades (2.91). Finalmente demostraremos que Θ también es solución de la ecuación de Lane-Emden. Para esto vemos que de la ec. (2.65) tenemos que

$$\Theta(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_0^x \xi^2 \Theta^n(\xi) d\xi - \int_0^x \xi \Theta^n(\xi) d\xi, \quad (2.92)$$

lo que muestra que Θ es diferenciable, dado que Θ^n es continua y acotada. Derivando de ambos lados

$$x^2 \frac{d\Theta(x)}{dx} = - \int_0^x \xi^2 \Theta^n(\xi) d\xi, \quad (2.93)$$

y entonces $\frac{d\Theta}{dx}$ también es diferenciable y

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta(x)}{dx} \right) = -\Theta^n(x). \quad (2.94)$$

Por lo tanto $\Theta : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución dos veces continuamente diferenciable de la ecuación de Lane-Emden.

2.5. Existencia de soluciones globales de la ecuación de Lane-Emden con $0 < n < 3$

Ahora veremos que podemos extender la solución local que se encontró anteriormente hasta formar la superficie de una estrella. Primero veamos de la Ec. (2.93) que

$$x^2 \frac{d\Theta(x)}{dx} = - \int_0^x \xi^2 \Theta^n(\xi) d\xi \leq 0 \quad \text{mientras } \Theta \geq 0$$

lo que significa que Θ no puede crecer, es decir, es decreciente mientras . Ahora definamos la siguiente cantidad

$$\begin{aligned} \xi_* &= \sup \{ \xi_1 > 0 \mid \Theta : (0, \xi_1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ existe, es continuamente diferenciable,} \\ &\quad \text{es solución de la ec. de Lane-Emden con condiciones de frontera} \\ &\quad \Theta(0) = 1, \Theta'(0) = 0 \text{ y tal que } 0 < \Theta(\xi) \leq 1 \forall 0 < \xi < \xi_1 \}. \end{aligned}$$

Como demostramos en la sección anterior, $\xi_* \geq R > 0$. Luego, existen dos posibilidades para ξ_* :

- a) ξ_* es finito
- b) ξ_* es infinito

La meta de esta sección es demostrar que si $0 < n < 3$, entonces debe ocurrir el caso a), que implica la existencia de una estrella con radio finito ξ_* y una masa finita dada por la Ec. (2.20).

Teorema 2.5.1. Si $0 < n < 3$, entonces ξ_* es finito (caso a)).

Demostración: Se demostrará por contradicción, es decir, se asumirá que $\xi_* = \infty$ y se llegará a una contradicción. La demostración se hará en 3 pasos. Primero se demuestra que $\Theta_\infty := \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Theta(\xi) = 0$. Luego se llega a una contradicción para $0 < n < 1$. Finalmente se llega a una contradicción para $1 < n < 3$. Para $n = 1$ tenemos solución analítica.

Empezamos la demostración notando que debido a que Θ esta acotada y no crece, el caso a) implica

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_*} \Theta(\xi) = 0. \quad (2.95)$$

Para el caso b) definimos el siguiente limite

$$\Theta_\infty := \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Theta(\xi). \quad (2.96)$$

Demostremos que en este caso Θ_∞ también debe ser cero. Procederemos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que $\Theta_\infty > 0$, entonces $\Theta^n \geq \Theta_\infty^n$, lo que implica que

$$\Theta(x) \leq 1 + \int_0^x G(x, \xi) \Theta_\infty^n d\xi$$

por lo tanto obtenemos que

$$0 < \Theta(x) \leq 1 - \Theta_\infty^n \frac{1}{6} x^2 \quad \text{para todo } x > 0 \text{ con } \Theta(x) > 0, \quad (2.97)$$

lo cual es un absurdo, por lo tanto $\Theta_\infty = 0$. Ahora demostraremos que tanto para el caso a) como para el caso b) vale que

$$\Theta(x) \geq 1 - \frac{1}{6} x^2, \quad \text{para todo } 0 < x < \xi_*. \quad (2.98)$$

Usando la expresión (2.75), se tiene que

$$\Theta(x) = 1 + \int_0^x G(x, \xi) \Theta^n(\xi) d\xi \geq 1 + \int_0^x G(x, \xi) d\xi = 1 - \frac{1}{6} x^2,$$

por lo tanto la desigualdad (2.98) se cumple para ambos casos. Tomando el limite cuando $x \rightarrow \xi_*$, obtenemos

$$0 \geq 1 - \frac{1}{6} \xi_*^2, \quad (2.99)$$

lo que implica

$$\xi_* \geq \sqrt{6}. \quad (2.100)$$

Ahora demostramos que $\xi_* = \infty$ no es posible, usando contradicción. Primero veamos que

$$-x^2 \frac{d\Theta}{dx} = \int_0^x \xi^2 \Theta^n(\xi) d\xi := m(x), \quad (2.101)$$

donde $m(x)$ es la función de masa (cf Ec. (2.20)). Notemos que $m(x_2) \geq m(x_1)$ si $x_2 \geq x_1$, esto porque $\Theta^n \geq 0$. También tenemos de (2.101) que

$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = 0.$$

Ahora, sabiendo que $\Theta_\infty = 0$, podemos escribir $\Theta(x)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \Theta(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \Theta(x) = - \int_x^\infty \frac{d\Theta(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= \int_x^\infty \frac{m(\xi)}{\xi^2} d\xi \geq m(x) \int_x^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{m(x)}{x}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Theta(x) \geq \frac{m(x)}{x}. \quad (2.102)$$

Si fijamos $x_1 > 0$ y definimos $m_1 := m(x_1)$, entonces

$$\Theta(x) \geq \frac{m_1}{x} \quad \text{para todo } x \geq x_1. \quad (2.103)$$

Por otro lado

$$m(x) = \int_0^x \xi^2 \Theta^n(\xi) d\xi \geq \frac{1}{3} x^3 \Theta^n(x), \quad (2.104)$$

ya que $\Theta(x)$ no crece. Entonces usando la expresión (2.101) tenemos que

$$- \frac{1}{\Theta^n(x)} \frac{d\Theta}{dx} \geq \frac{1}{3} x. \quad (2.105)$$

Notemos que para $n \neq 1$:

$$- \frac{1}{\Theta^n(x)} \frac{d\Theta}{dx} = \frac{1}{n-1} \frac{d}{dx} \Theta^{1-n}, \quad (2.106)$$

sustituyendo en (2.105) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{n-1} \frac{d}{dx} \Theta^{1-n} \geq \frac{1}{3} x. \quad (2.107)$$

Ahora integramos de $\xi = 0$ a $\xi = x$ ambos lados de la desigualdad obteniendo así lo siguiente

$$\frac{1}{n-1} [\Theta^{1-n}(x) - \Theta^{1-n}(0)] \geq \frac{1}{6} x^2, \quad (2.108)$$

y usando la condición de frontera (2.14) se obtiene la siguiente desigualdad si $0 < n < 1$:

$$\Theta^{1-n}(x) \leq 1 + \frac{n-1}{6} x^2, \quad x \geq 0. \quad (2.109)$$

Lo cual es una contradicción si $\xi_* = \infty$. Para $1 < n < 3$ la desigualdad se invierte, es decir

$$\Theta^{1-n}(x) \geq 1 + \frac{n-1}{6}x^2 \quad \text{para todo } x \geq 0. \quad (2.110)$$

Usando las desigualdades (2.103) y (2.109) llegamos a lo siguiente

$$\left(\frac{m_1}{x}\right)^{1-n} \geq \Theta^{1-n}(x) \geq 1 + \frac{n-1}{6}x^2, \quad (2.111)$$

por lo tanto

$$1 + \frac{n-1}{6}x^2 \leq \frac{x^{n-1}}{m_1^{n-1}}, \quad \text{para todo } x \geq 0 \quad (2.112)$$

lo cual es, nuevamente, un absurdo. Estos absurdos son debido a la suposición de que $\xi_* = \infty$, por lo que deducimos que ξ_* es finito para $0 < n < 3$. $\square$

Capítulo 3

Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

En la primera sección de este se calculan las componentes del tensor de Einstein para una métrica estática y esféricamente simétrica, para después seguir con la deducción de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) la cual describe las fuentes de fluidos interiores de la métrica de Schwarzschild, es decir, describe la estructura de objetos estáticos y fluidos, como las estrellas [3]. A continuación se obtiene la solución para esta ecuación, asumiendo densidad de energía constante. Luego se demuestra, usando el teorema del punto fijo de Banach, que se puede encontrar soluciones en un intervalo suficientemente pequeño en la vecindad del origen. Por último se usa una ecuación de estado politrópica para demostrar bajo que condiciones existen soluciones globales de la ecuación de TOV.

3.1. Cálculo de la curvatura y del tensor de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein están dadas por la siguiente relación tensorial ¹

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, el cual depende del tensor de curvatura del espacio-tiempo $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-impulso que describe las fuentes de materia y energía de la curvatura del espacio-tiempo. Calculemos entonces $G_{\mu\nu}$, el cual está dado por la siguiente ecuación

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

donde $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ es el tensor de Ricci; $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es el escalar de Ricci. Para encontrar las componentes del tensor de Ricci primero debemos calcular el tensor de curvatura de Riemann, el cual está dado por

¹Veamos que las unidades del tensor de Einstein en el Sistema Internacional de Unidades son $[G_{\mu\nu}] = \frac{1}{m^2}$. Por otro lado $[\frac{G}{c^4}] = \frac{1}{N}$ y $[T_{\mu\nu}] = \frac{N}{m^2}$. Entonces $[\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}] = \frac{1}{m^2}$, que coincide con la unidades del tensor de Einstein.

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\beta\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} - (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad (3.3)$$

donde $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ denota los símbolos de Christoffel, que están determinados por las componentes de la métrica como sigue:

$$\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (3.4)$$

Para llevar a cabo este cálculo, asumimos que la métrica es esféricamente simétrica y estática, dada por el elemento de línea,

$$ds^2 = -e^{\frac{2\Phi(r)}{c^2}} c^2 dt^2 + e^{2a(r)} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (3.5)$$

donde $(t, r, \vartheta, \varphi)$ son coordenadas esféricas y donde Φ y a son funciones del radio r que serán determinadas por las ecuaciones de Einstein; además si $\Phi = a = 0$ recuperamos la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas. Notemos que si $\frac{|\Phi|}{c^2} \ll 1$, entonces $g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$ y en este caso Φ coincide con el potencial Newtoniano [10]. Para los cálculos que se realizarán más adelante se tomará $c = 1$. Podemos descomponer la métrica (3.5) en dos partes para facilitar los cálculos. Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2a(r)} dr^2, & (a, b = t, r), \\ \hat{g} &= \hat{g}_{AB} dx^A dx^B = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2, & (A, B = \vartheta, \varphi), \end{aligned}$$

entonces la métrica (3.5) se puede escribir en la forma

$$g = \tilde{g} + r^2 \hat{g}. \quad (3.6)$$

Además también podemos escribir las componentes de la métrica (3.6) y las de su inversa de la siguiente forma:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{ab} & 0 \\ 0 & r^2 \hat{g}_{AB} \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \tilde{g}^{ab} & 0 \\ 0 & r^{-2} \hat{g}^{AB} \end{pmatrix}.$$

Los símbolos de Christoffel se descomponen en 6 grupos: $\Gamma^d{}_{ab}$, $\Gamma^d{}_{aB}$, $\Gamma^D{}_{ab}$, $\Gamma^d{}_{AB}$, $\Gamma^D{}_{AB}$ y $\Gamma^D{}_{aB}$. Usando la expresión (3.4) obtenemos lo siguiente

$$\Gamma^d{}_{ab} = \tilde{\Gamma}^d{}_{ab}, \quad (3.7)$$

$$\Gamma^d{}_{aB} = 0, \quad (3.8)$$

$$\Gamma^D{}_{ab} = 0, \quad (3.9)$$

$$\Gamma^d{}_{AB} = -r r^d \hat{g}_{AB}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma^D{}_{AB} = \hat{\Gamma}^D{}_{AB}, \quad (3.11)$$

$$\Gamma^D{}_{aB} = \frac{r_a}{r} \delta^D{}_B, \quad (3.12)$$

donde $\tilde{\Gamma}^d{}_{ab}$ y $\hat{\Gamma}^D{}_{AB}$ son los símbolos de Christoffel asociados a $\tilde{g}_{ab}$ y $\hat{g}_{AB}$, respectivamente. Además introducimos las notaciones $r_a := \partial_a r$ y $r^d := \tilde{g}^{da} r_a$.

Ahora calculamos los componentes del tensor de curvatura de Riemann usando la fórmula (3.3). Utilizando las expresiones (3.7) y (3.9), obtenemos

$$\begin{aligned} R^c{}_{dab} &= \partial_a \Gamma^c{}_{bd} + \Gamma^\sigma{}_{bd} \Gamma^c{}_{a\sigma} - (a \leftrightarrow b) \\ &= \partial_a \tilde{\Gamma}^c{}_{bd} + \tilde{\Gamma}^e{}_{bd} \tilde{\Gamma}^c{}_{ae} - (a \leftrightarrow b) \\ &= \tilde{R}^c{}_{dab}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{R}^c{}_{dab}$ se refiere a las componentes del tensor de Riemann asociado a la métrica $\tilde{g}$. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} R^c{}_{Dab} &= \partial_a \Gamma^c{}_{bD} + \Gamma^\sigma{}_{bD} \Gamma^c{}_{a\sigma} - (a \leftrightarrow b) \\ &= \partial_a \Gamma^c{}_{bD} + \Gamma^e{}_{bD} \Gamma^c{}_{ae} + \Gamma^E{}_{bD} \Gamma^c{}_{aE} - (a \leftrightarrow b) \\ &= 0, \end{aligned}$$

debido a que todos los símbolos de Christoffel con un único índice angular desvanecen. Luego,

$$\begin{aligned} R^C{}_{Dab} &= \partial_a \Gamma^C{}_{bD} + \Gamma^\sigma{}_{bD} \Gamma^C{}_{a\sigma} - (a \leftrightarrow b) \\ &= \partial_a \Gamma^C{}_{bD} + \Gamma^E{}_{bD} \Gamma^C{}_{aE} - (a \leftrightarrow b) \\ &= \delta^C{}_D \partial_a \left(\frac{r_b}{r} \right) + \frac{r_a}{r} \delta^C{}_E \frac{r_b}{r} \delta^E{}_D - (a \leftrightarrow b) \\ &= \delta^C{}_D \left[\frac{\partial_a \partial_b r}{r} - \frac{r_a r_b}{r^2} + \frac{r_a r_b}{r^2} - (a \leftrightarrow b) \right] = 0, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} R^c{}_{DAB} &= \partial_A \Gamma^c{}_{BD} + \Gamma^\sigma{}_{BD} \Gamma^c{}_{A\sigma} - (A \leftrightarrow B) \\ &= \partial_A \Gamma^c{}_{BD} + \hat{\Gamma}^E{}_{BD} \Gamma^c{}_{AE} - (A \leftrightarrow B) \\ &= \hat{\nabla}_A (\Gamma^c{}_{BD}) - (A \leftrightarrow B) \\ &= \hat{\nabla}_A (-r r^c \hat{g}_{BD}) - (A \leftrightarrow B) = 0, \end{aligned}$$

debido a que $\hat{\nabla}_A (\hat{g}_{BD}) = 0$. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} R^c{}_{DaB} &= \partial_a \Gamma^c{}_{BD} + \Gamma^\sigma{}_{BD} \Gamma^c{}_{a\sigma} - \partial_B \Gamma^c{}_{aD} - \Gamma^\sigma{}_{aD} \Gamma^c{}_{b\sigma} \\ &= \partial_a \Gamma^c{}_{BD} + \Gamma^e{}_{BD} \tilde{\Gamma}^c{}_{ae} - \Gamma^E{}_{aD} \Gamma^c{}_{bE} \\ &= \partial_a (-r r^c) \hat{g}_{BD} - r r^e \hat{g}_{BD} \tilde{\Gamma}^c{}_{ae} + \delta^E{}_D r_a r^c \hat{g}_{BE} \\ &= \partial_a (-r r^c) \hat{g}_{BD} - r r^e \hat{g}_{BD} \tilde{\Gamma}^c{}_{ae} + r_a r^c \hat{g}_{BD} \\ &= [-\tilde{\nabla}_a (r r^c) + r_a r^c] \hat{g}_{BD} = -(r \tilde{\nabla}_a r^c) \\ &= -r (\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_a r) \hat{g}_{BD}. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
 R^C_{DAB} &= \partial_A \Gamma^C_{BD} + \Gamma^\sigma_{BD} \Gamma^C_{A\sigma} - \partial_B \Gamma^C_{AD} - \Gamma^\sigma_{AD} \Gamma^C_{B\sigma} \\
 &= \partial_A \Gamma^C_{BD} + \Gamma^E_{BD} \Gamma^C_{AE} + \Gamma^e_{BD} \Gamma^C_{Ae} - \partial_B \Gamma^C_{AD} - \Gamma^E_{AD} \Gamma^C_{BE} - \Gamma^e_{AD} \Gamma^C_{Be} \\
 &= \hat{R}^C_{DAB} + \Gamma^e_{BD} \Gamma^C_{Ae} - \Gamma^e_{AD} \Gamma^C_{Be} \\
 &= \hat{R}^C_{DAB} - r^e r_e (\delta^C_A \hat{g}_{BD} - \delta^C_B \hat{g}_{AD}).
 \end{aligned}$$

En dos dimensiones el tensor de curvatura tiene la siguiente forma [10]

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}^c_{dab} &= \tilde{\kappa} (\delta^c_a \tilde{g}_{bd} - \delta^c_b \tilde{g}_{ad}), \\
 \hat{R}^C_{DAB} &= \hat{\kappa} (\delta^C_A \hat{g}_{BD} - \delta^C_B \hat{g}_{AD}),
 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\kappa}$ es la curvatura de Gauss asociada a $\tilde{g}$ y $\hat{\kappa}$ es la curvatura de Gauss asociada a $\hat{g}$. Como $\hat{\kappa} = 1$ para la esfera unitaria, concluimos que las componentes del tensor de curvatura son

$$R^c_{dab} = \tilde{\kappa} (\delta^c_a \tilde{g}_{bd} - \delta^c_b \tilde{g}_{ad}), \quad (3.13)$$

$$R^c_{DaB} = -r (\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_a r) \hat{g}_{BD}, \quad (3.14)$$

$$R^C_{DAB} = (1 - r^e r_e) (\delta^C_A \hat{g}_{BD} - \delta^C_B \hat{g}_{AD}), \quad (3.15)$$

las cuales también podemos escribir de la siguiente forma

$$R_{cdab} = \tilde{\kappa} (\tilde{g}_{ac} \tilde{g}_{bd} - \tilde{g}_{bc} \tilde{g}_{ad}), \quad (3.16)$$

$$R_{cDaB} = -r (\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_a r) \hat{g}_{BD}, \quad (3.17)$$

$$R_{CDAB} = r^2 (1 - r^e r_e) (\hat{g}_{AC} \hat{g}_{BD} - \hat{g}_{BC} \hat{g}_{AD}). \quad (3.18)$$

Con estas expresiones podemos calcular las componentes del tensor de Ricci

$$R_{ab} = R^e_{aeb} + R^E_{aEb} = \tilde{\kappa} \tilde{g}_{ab} - \frac{2}{r} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r, \quad (3.19)$$

$$R_{aB} = R^e_{aeB} + R^E_{aEB} = 0, \quad (3.20)$$

$$R_{AB} = (1 - r^e r_e - r \tilde{\Delta} r) \hat{g}_{AB}, \quad (3.21)$$

donde $\tilde{\Delta} r = \tilde{\nabla}^b \tilde{\nabla}_b r = \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r$ es el laplaciano covariante de r . El escalar de Ricci está dado por

$$R = R^a_a + R^A_A = 2\tilde{\kappa} + \frac{2}{r^2} (1 - r^e r_e - 2r \tilde{\Delta} r). \quad (3.22)$$

Por último, calculamos las componentes del tensor de Einstein usando la expresión (3.2), y obtenemos

$$G_{ab} = -\frac{2}{r}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br - \frac{1}{r^2}(1 - r^e r_e - 2r\tilde{\Delta}r)\tilde{g}_{ab}, \quad (3.23)$$

$$G_{aB} = 0, \quad (3.24)$$

$$G_{AB} = (r\tilde{\Delta}r - r^2\tilde{\kappa})\hat{g}_{AB}. \quad (3.25)$$

Estas ecuaciones también se pueden escribir de la siguiente manera

$$G^a{}_b = -\frac{2}{r}\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}_br - \frac{1}{r^2}(1 - r^e r_e - 2r\tilde{\Delta}r)\delta^a{}_b, \quad (3.26)$$

$$G^a{}_B = 0, \quad (3.27)$$

$$G^A{}_B = \left(\frac{\tilde{\Delta}r}{r} - \tilde{\kappa} \right) \delta^A{}_B. \quad (3.28)$$

Además podemos calcular las siguientes expresiones

$$\tilde{\nabla}^t\tilde{\nabla}_tr = \Phi'e^{-2a}, \quad (3.29)$$

$$\tilde{\nabla}^t\tilde{\nabla}_rr = 0, \quad (3.30)$$

$$\tilde{\nabla}^r\tilde{\nabla}_rr = -a'e^{-2a}, \quad (3.31)$$

$$\tilde{\Delta}r = \tilde{\nabla}^t\tilde{\nabla}_tr + \tilde{\nabla}^r\tilde{\nabla}_rr = (\Phi' - a')e^{-2a}, \quad (3.32)$$

$$r^e r_e = e^{-2a}, \quad (3.33)$$

$$\tilde{\kappa} = -e^{-2a}(\Phi'' + \Phi'^2 - a'\Phi'). \quad (3.34)$$

Entonces usando estas cantidades y sustituyéndolas en las Ecs. (3.26 - 3.28) obtenemos las siguientes componentes del tensor de Einstein,

$$G^t{}_t = -\frac{2}{r}\Phi'e^{-2a} - \frac{1}{r^2}[1 - e^{-2a} - 2r(\Phi' - a')e^{-2a}], \quad (3.35)$$

$$G^r{}_r = \frac{2}{r}a'e^{-2a} - \frac{1}{r^2}[1 - e^{-2a} - 2r(\Phi' - a')e^{-2a}], \quad (3.36)$$

$$G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi = \left[\Phi'' + \Phi'(\Phi' - a') + \frac{\Phi' - a'}{r} \right] e^{-2a}. \quad (3.37)$$

Teniendo las componentes del tensor de Einstein podemos deducir la métrica de Schwarzschild. Supongamos que estamos en un espacio-tiempo vacío, es decir no hay fuentes de energía y por lo tanto $T_{\mu\nu} = 0$, entonces las ecuaciones de campo de Einstein (expresión (3.1)) $G_{\mu\nu} = 0$, implican que

$$-\frac{2}{r}\Phi'e^{-2a} - \frac{1}{r^2}[1 - e^{-2a} - 2r(\Phi' - a')e^{-2a}] = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{2}{r}a'e^{-2a} - \frac{1}{r^2}[1 - e^{-2a} - 2r(\Phi' - a')e^{-2a}] = 0, \quad (3.39)$$

$$\left[\Phi'' + \Phi'(\Phi' - a') + \frac{\Phi' - a'}{r} \right] e^{-2a} = 0. \quad (3.40)$$

Restando a (3.38) la Ec. (3.39) obtenemos lo que sigue

$$-\frac{2}{r}(\Phi' + a')e^{-2a} = 0,$$

lo que implica que

$$\Phi' = -a'. \quad (3.41)$$

Integrando de ambos lados de la igualdad se tiene que

$$\Phi = -a, \quad (3.42)$$

donde se eligió la constante de integración igual a 0 ya que esta no afecta debido a que puede ser absorbida por una nueva definición de la coordenada t , esto debido a que la física que describe la teoría de la Relatividad General es invariante ante transformaciones de coordenadas. Sustituyendo (3.41) en (3.39) y después de un poco de álgebra obtenemos

$$1 - e^{-2a} + 2ra'e^{-2a} = 0.$$

Notamos que $1 - e^{-2a} + 2ra'e^{-2a} = [r(1 - e^{-2a})]'$, por lo tanto

$$r(1 - e^{-2a}) = 2m,$$

donde $2m$ es una constante. De esta manera obtenemos que

$$e^{-2a} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (3.43)$$

y entonces usando la igualdad (3.42) tenemos que

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (3.44)$$

Finalmente usando (3.43) y (3.44) obtenemos la métrica de Schwarzschild la cual esta dada por el elemento de línea,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.45)$$

Veamos que cuando $r \gg m$, $\frac{2m}{r} \ll 1$ y entonces la métrica de Schwarzschild puede ser considerada como una pequeña perturbación de la métrica de Minkowski y por lo tanto obtenemos el límite Newtoniano en donde $2\Phi = -\frac{2m}{r}$, es decir, $\Phi = -\frac{m}{r}$ que coincide con el potencial Newtoniano y por lo tanto m puede ser considerada como la masa total. La métrica de Schwarzschild describe la geometría del espacio-tiempo vacío alrededor de un cuerpo esféricamente simétrico. Esta métrica fue la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein que no sea la solución trivial del espacio-tiempo plano. Podemos verificar que esta solución satisface también la Ec. (3.40).

3.2. Deducción de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Para deducir la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff necesitamos calcular las componentes del tensor de energía-impulso. El tensor de energía-impulso de un fluido perfecto isotrópico está dado por [3]

$$T_{\mu\nu} = (P + \varepsilon) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (3.46)$$

donde P es la presión, ε es la densidad de energía y u^μ son las componentes de la cuadrivelocidad del fluido, normalizadas tal que

$$u^\mu u_\mu = -1. \quad (3.47)$$

Debido a que estamos trabajando con una métrica estática y que buscamos una configuración en la cual el fluido se encuentra en reposo $u^r, u^\theta, u^\varphi = 0$ y entonces $u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = u^t \frac{\partial}{\partial t}$. La condición de normalización (3.47) implica que

$$u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{y} \quad u_\mu dx^\mu = -e^\Phi dt.$$

Por lo tanto las únicas componentes del tensor de energía-impulso no triviales son

$$T^t_t = -\varepsilon \quad (3.48)$$

$$T^r_r = T^\vartheta_\vartheta = T^\varphi_\varphi = P. \quad (3.49)$$

Por lo tanto, usando la expresión (3.1) y las Ecs. (3.35 - 3.37) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-\frac{2}{r}\Phi' e^{-2a} - \frac{1}{r^2}[1 - e^{-2a} - 2r(\Phi' - a')e^{-2a}] = -8\pi G\varepsilon, \quad (3.50)$$

$$\frac{2}{r}a' e^{-2a} - \frac{1}{r^2}[1 - e^{-2a} - 2r(\Phi' - a')e^{-2a}] = 8\pi GP, \quad (3.51)$$

$$\left[\Phi'' + \Phi'(\Phi' - a') + \frac{\Phi' - a'}{r} \right] e^{-2a} = 8\pi GP. \quad (3.52)$$

Para resolver este sistema primero restamos a (3.50) la Ec. (3.51) y despejando Φ' obtenemos,

$$\Phi' = 4\pi G r e^{2a}(\varepsilon + P) - a'. \quad (3.53)$$

Usando esta expresión para eliminar Φ' en la Ec. (3.50) obtenemos,

$$\frac{2}{r}a' e^{-2a} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2a}) = 8\pi G\varepsilon. \quad (3.54)$$

A continuación, conviene reemplazar $a(r)$ por la masa de Misner-Sharp $m(r)$, definida a través de la relación [11]

$$e^{-2a} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \quad (3.55)$$

Notamos que para el caso Schwarzschild $m(r) = m$ es la masa total constante; mientras que en el caso con materia $m(r)$ puede ser interpretada como la masa contenida en una esfera con radio r . Usando esta relación observamos que

$$\frac{2}{r}a'e^{-2a} = -\frac{1}{r}[e^{-2a}]' = -\frac{1}{r}\left[1 - \frac{2m}{r}\right]' = \frac{2m'}{r^2} - \frac{2m}{r^3} \quad \text{y}, \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{r^2}(1 - e^{-2a}) = \frac{2m}{r^3}. \quad (3.57)$$

Sustituyendo estas igualdades en la expresión (3.54) se obtiene la siguiente ecuación

$$m' = 4\pi Gr^2\varepsilon. \quad (3.58)$$

Podemos integrar de ambos lados esta igualdad, obteniendo así la siguiente expresión para $m(r)$

$$m(r) = 4\pi G \int_0^r s^2 \varepsilon(s) ds. \quad (3.59)$$

Esta ecuación coincide con la expresión para la masa en el caso Newtoniano, donde en lugar de la densidad de energía $\varepsilon(r)$ tenemos la densidad de masa $\rho(r)$.

Ahora podemos encontrar el valor de a' usando la igualdad (3.56), el cual es

$$a' = \frac{4\pi Gr^3\varepsilon - m}{r(r - 2m)}, \quad (3.60)$$

y sustituyendo este resultado en la expresión (3.53) obtenemos,

$$\Phi' = \frac{m + 4\pi Gr^3P}{r(r - 2m)}. \quad (3.61)$$

Veamos que en el límite Newtoniano, $4\pi Gr^3P \ll m$ y $m \ll r$, entonces la ecuación (3.61) se reduce a

$$\Phi' \approx \frac{m}{r^2},$$

la cual coincide con el potencial gravitacional Newtoniano.

Por último, usando nuevamente la expresión (3.53) para eliminar Φ' en la Ec. (3.52) obtenemos, después de algunas manipulaciones algebraicas:

$$-e^{-2a} \left(a'' - 2a'^2 + \frac{2a'}{r} \right) = 4\pi G [-2\varepsilon - r(\varepsilon + P)' - 4\pi Gr^2 e^{2a} (\varepsilon + P)^2 + ra'(\varepsilon + P)]. \quad (3.62)$$

Luego, derivando de ambos lados la Ec. (3.56) y usando la expresión (3.58) observamos que

$$(a'' - 2a')e^{-2a} = 4\pi Gr\varepsilon' + \frac{2m}{r^3} \quad (3.63)$$

por lo tanto usando las expresiones (3.54), (3.56), (3.57) y (3.63) en la Ec. (3.62) obtenemos lo siguiente

$$-\frac{P'}{\varepsilon + P} - \frac{4\pi Gr^3(\varepsilon + P)}{r(r - 2m)} + a' = 0. \quad (3.64)$$

Ahora sustituyendo el valor de a' obtenido en la Ec. (3.60) en esta expresión, se obtiene la siguiente igualdad

$$P' = -(P + \varepsilon) \frac{m(r) + 4\pi Gr^3 P}{r[r - 2m(r)]}. \quad (3.65)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. En el límite Newtoniano $P \ll \varepsilon$ y $m \ll r$ por lo tanto la ecuación (3.65) se reduce a

$$P' \approx -\frac{\rho m}{r^2}, \quad (3.66)$$

Esta es la ecuación de equilibrio hidrostático de Newton donde se ha cambiado la densidad de energía ε por la densidad de masa ρ . Esta ecuación implica que

$$-\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = m(r),$$

diferenciando de ambos lados y usando la igualdad (2.18) obtenemos lo siguiente

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = 4\pi G\rho,$$

recuperando así la Ec. (2.7).

Resumiendo, las ecuaciones radiales que describen el interior de una estrella estática y esférica relativista compuesta de un fluido perfecto isotrópico están dadas por

$$\Phi' = -\frac{P'}{\varepsilon + P} = \frac{m + 4\pi Gr^3 P}{r(r - 2m)}, \quad (3.67)$$

donde m está dada por la Ec. (3.59). Se requiere además una ecuación de estado $\varepsilon = \varepsilon(P)$ para cerrar el sistema de ecuaciones. En las siguientes secciones analizamos la existencia de soluciones a este sistema de ecuaciones que describe estrellas con radio y masa finita.

3.3. Solución de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff con densidad de energía constante

Como primer ejemplo, consideremos el caso particular de una estrella de densidad de energía constante, es decir $\varepsilon = cte$. En este caso,

$$m(r) = 4\pi G\varepsilon \int_0^r \bar{r}^2 d\bar{r} = \frac{4\pi G}{3} \varepsilon r^3.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (3.65) obtenemos

$$P' = -(P + \varepsilon) \frac{\frac{4}{3}\pi G\varepsilon r^3 + 4\pi G r^3 P}{r^2 \left(1 - \frac{8}{3}\pi G\varepsilon r^2\right)}. \quad (3.68)$$

Para resolver la ecuación usamos el método de separación de variables, de esta forma obtenemos la siguiente ecuación integral

$$\int_{P_c}^{P(r)} \frac{d\bar{P}}{(\bar{P} + \varepsilon)(\varepsilon + 3\bar{P})} = -\frac{4\pi G}{3} \int_0^r \frac{\bar{r} d\bar{r}}{1 - \frac{8}{3}\pi G\varepsilon \bar{r}^2}, \quad (3.69)$$

donde $P_c = P(0)$ denota la presión central. Integrando ambos lados se obtiene

$$\frac{3P + \varepsilon}{P + \varepsilon} = \frac{3P_c + \varepsilon}{P_c + \varepsilon} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}. \quad (3.70)$$

Si denotamos por R al radio de la estrella entonces se debe cumplir que $P(R) = 0$, por lo que de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{P_c + \varepsilon}{3P_c + \varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}, \quad (3.71)$$

donde $M = \frac{4}{3}\pi G\varepsilon R^3$ es la masa total de la estrella. Sustituimos ahora en la Ec. (3.70) y obtenemos lo siguiente

$$\frac{3P + \varepsilon}{P + \varepsilon} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}.$$

Despejando P y usando el hecho que $\frac{2m}{r} = \frac{2Mr^2}{R^3}$ obtenemos la siguiente solución para P :

$$P(r) = \frac{\varepsilon \left(\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \right)}{3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}}, \quad 0 < r < R. \quad (3.72)$$

La expresión para la presión central, se obtiene al sustituir $r = 0$ en esta ecuación:

$$P_c = \frac{\varepsilon \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \right)}{3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - 1}. \quad (3.73)$$

Para que P_c sea positiva se tiene que cumplir que

$$\frac{2M}{R} < 1 \quad \text{y} \quad 3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} > 1,$$

es decir,

$$\frac{2M}{R} < \frac{8}{9}, \quad (3.74)$$

lo que significa que una estrella esférica de densidad constante con $M > \frac{4}{9}R$ no puede existir. Como vamos a ver este resultado también vale para estrellas con una ecuación de estado politrópica que no son necesariamente homogéneas.

3.4. Ecuación de estado politrópica

Como se dijo anteriormente, para resolver el sistema de ecuaciones (3.67) se necesita una ecuación de estado que relacione la densidad de energía con la presión. En esta sección y las siguientes nos enfocamos en la clase importante de ecuaciones de estado politrópicas, y derivamos la relación entre la densidad de energía ε y la presión P basándonos en la primera ley de la termodinámica.

Una ecuación de estado politrópica está dada por la siguiente expresión

$$P = Kn^\gamma, \quad (3.75)$$

donde n es la densidad de partículas, K una constante positiva y $\gamma > 1$ el índice adiabático [1]. Consideremos una pequeña celda de fluido que contiene N partículas de tal forma que esta celda contiene energía $U = \frac{\varepsilon N}{n}$ y ocupa el volumen $V = \frac{N}{n}$. Asumimos equilibrio termodinámico. Dado que N no cambia, la primera ley de la termodinámica $dU = TdS - PdV$ implica ($TdS = 0$ debido a que no hay flujo de calor y por lo tanto la producción de entropía es nula),

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = -Kn^\gamma d\left(\frac{1}{n}\right).$$

Integrando de ambos lados de la igualdad obtenemos la siguiente ecuación de estado

$$\varepsilon(P) = \frac{P}{\gamma - 1} + e_0 \left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.76)$$

donde e_0 es la energía de reposo de una partícula. Conviene introducir también la entalpía específica. La entalpía está dada por

$$H = N \frac{\varepsilon + P}{n}.$$

Dividiendo ambos lados de la igualdad entre el número de partículas N , obtenemos la entalpía específica la cual está dada por

$$h = \frac{\varepsilon + P}{n}. \quad (3.77)$$

Usando nuevamente la primera ley de la termodinámica, vemos que

$$dh = d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + d\left(\frac{P}{n}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{P}{n}\right) = \frac{dP}{n}, \quad (3.78)$$

y entonces usando las Ecs. (3.77) y (3.78) obtenemos el siguiente resultado

$$\frac{dh}{h} = \frac{dP}{\varepsilon + P}. \quad (3.79)$$

Esta ecuación será útil más adelante, cuando demostremos la existencia de soluciones globales de la estrella.

3.5. Existencia de soluciones en la vecindad del centro

En esta sección se demuestra, usando el teorema de punto fijo de Banach, que podemos encontrar soluciones para la ecuación de TOV cerca del centro de simetría, es decir, en un intervalo $(0, R]$ con R suficientemente pequeño. Introducimos primero la cantidad

$$W(r) = \frac{m(r)}{r^3} = \frac{4\pi G}{r^3} \int_0^r \varepsilon(P(\bar{r})) \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (3.80)$$

que representa la densidad promedio (hasta un factor constante) dentro de la esfera de radio r . Notamos que $W(r) \xrightarrow[r \downarrow 0]{} \frac{4\pi G}{3} \varepsilon_c$, donde $\varepsilon_c = \varepsilon|_{r=0}$ es la densidad central. Sustituyendo en la expresión (3.67) se obtiene

$$\Phi' = -\frac{P'}{(P + \varepsilon)} = r \frac{W + 4\pi G P}{1 - 2r^2 W}. \quad (3.81)$$

Para analizar la existencia de soluciones de las Ecs. (3.67) conviene introducir cantidades adimensionales. Por tal motivo, escribimos el radio, la presión, la densidad de energía y W de la siguiente forma

$$\begin{aligned} r &= a\xi, \\ P(r) &= P_c p(\xi), \\ \varepsilon(P) &= \varepsilon_c e(p), \\ W(r) &= W_c w(\xi), \end{aligned}$$

donde P_c es la presión central, ε_c es la densidad de energía central, $W_c = \frac{4\pi G}{3} \varepsilon_c$ y a es un parámetro libre que se va a elegir más adelante. Aquí $e(p)$ representa la ecuación de estado adimensional. Entonces las funciones $p(\xi)$, $w(\xi)$ y $e(p)$ cumplen las siguientes condiciones en el centro,

$$p(0) = 1, \quad (3.82)$$

$$e(1) = 1, \quad (3.83)$$

$$w(0) = 1. \quad (3.84)$$

Ahora introducimos la siguiente cantidad

$$\lambda := \frac{P_c}{\varepsilon_c}. \quad (3.85)$$

Notemos que en el límite Newtoniano $\lambda \rightarrow 0$ ya que en este caso $P_c \ll \varepsilon_c$. Sustituyendo estas cantidades en la Ec. (3.80) obtenemos

$$w(\xi) = \frac{4\pi G}{3W_c} \varepsilon_c \frac{3}{\xi^3} \int_0^\xi e(p(\bar{\xi})) \bar{\xi}^2 d\bar{\xi}. \quad (3.86)$$

Dado que $3W_c = 4\pi G \varepsilon_c$,

$$w(\xi) = \frac{3}{\xi^3} \int_0^\xi e(p(\bar{\xi})) \bar{\xi}^2 d\bar{\xi}. \quad (3.87)$$

Luego, sustituyendo las cantidades adimensionales en (3.81) y dividiendo toda la igualdad entre λ se obtiene

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\Phi}{\lambda} \right) = -\frac{1}{(e + \lambda p)} \frac{dp}{d\xi} = \frac{a^2}{\lambda} W_c \xi \frac{w + 3\lambda p}{1 - 2a^2 W_c \xi^2 w}.$$

Ahora elegimos a tal que $W_c a^2 = \lambda$, es decir, $a = \left(\frac{4\pi G}{3} \frac{\varepsilon_c^2}{P_c} \right)^{-1/2}$ y definimos $\phi = \frac{\Phi}{\lambda}$. De esta forma la ecuación anterior queda de la siguiente manera

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{1}{e + \lambda p} \frac{dp}{d\xi} = \xi \frac{w + 3\lambda p}{1 - 2\lambda \xi^2 w}. \quad (3.88)$$

Veamos que en el límite Newtoniano $\lambda \rightarrow 0$ y entonces la Ec. (3.88) se reduce a

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{1}{e} \frac{dp}{d\xi} = \xi w \quad (3.89)$$

la cual coincide, efectivamente, con las ecuaciones Newtonianas (ver Ecs. (3.66) y (2.6)). Ahora usando las cantidades adimensionales y sustituyéndolas en la expresión (3.76) para la ecuación de estado politrópica, obtenemos

$$e(p) = \frac{\lambda p}{\gamma - 1} + c_0 p^{1/\gamma}, \quad (3.90)$$

donde $c_0 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \left(\frac{P_c}{K} \right)^{1/\gamma}$ y además

$$e(1) = \frac{\lambda}{\gamma - 1} + c_0 = 1, \quad (3.91)$$

lo que nos permite eliminar la constante c_0 ,

$$c_0 = 1 - \frac{\lambda}{\gamma - 1}, \quad (3.92)$$

donde la positividad de c_0 requiere que λ satisfaga la desigualdad $0 < \lambda < \gamma - 1$. Luego sustituyendo esta expresión en la Ec. (3.90) obtenemos la siguiente expresión para la ecuación de estado adimensional politrópica:

$$e(p) = \frac{1}{\gamma - 1} [\lambda p + (\gamma - 1 - \lambda)p^{1/\gamma}]. \quad (3.93)$$

Dado que $0 < \lambda < \gamma - 1$, $e(p)$ crece monotónicamente. En particular,

$$e(p) + \lambda p = \frac{1}{\gamma - 1} [\lambda \gamma p + (\gamma - 1 - \lambda)p^{1/\gamma}]. \quad (3.94)$$

De la Ec. (3.88) tenemos que

$$\frac{dp}{d\xi} = -[e(p(\xi)) + \lambda p(\xi)] \xi \frac{w(\xi) + 3\lambda p(\xi)}{1 - 2\lambda w(\xi)\xi^2}. \quad (3.95)$$

Obteniendo así una ecuación integro-diferencial para $p(\xi)$, con $w(\xi)$ dado por (3.87). Para demostrar que podemos encontrar soluciones en la vecindad del centro para esta ecuación, integramos primero la expresión (3.95) de ambos lados desde $\bar{\xi} = 0$ hasta $\bar{\xi} = \xi$, y tomando en cuenta que $p(0) = 1$, obtenemos la siguiente ecuación integral

$$p(\xi) = 1 - \int_0^\xi [e(p(\bar{\xi})) + \lambda p(\bar{\xi})] \frac{w(\bar{\xi}) + 3\lambda p(\bar{\xi})}{1 - 2\lambda w(\bar{\xi})\bar{\xi}^2} \bar{\xi} d\bar{\xi} := Tp(\xi), \quad (3.96)$$

donde $w(\xi)$ es dado por (3.87). Esta ecuación es de punto fijo, es decir, buscamos una función $p(\xi)$ que satisfice $p = Tp$. Usaremos nuevamente el teorema del punto fijo de Banach para mostrar la existencia de un único punto fijo de T , para una clase de funciones definida sobre el intervalo $(0, R)$ suficientemente pequeño. Para esto introducimos los siguientes conjuntos:

$$X_R := \{p : (0, R] \longrightarrow \mathbb{R} \mid p \text{ continua y acotada}\}, \quad (3.97)$$

con la norma del supremo, y

$$Y_R := \left\{ p \in X_R \mid p(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 1, \quad \frac{1}{2} \leq p(\xi) \leq 1 \quad \text{para todo } 0 < \xi \leq R \right\}. \quad (3.98)$$

Observemos lo siguiente de la expresión (3.87) y de la ecuación (3.93)

$$\frac{3}{\xi^3} \int_0^\xi e(p(\bar{\xi})) \bar{\xi}^2 d\bar{\xi} \leq \frac{3}{\xi^3} \int_0^\xi e(1) \bar{\xi}^2 d\bar{\xi} = 1,$$

también veamos que,

$$\frac{3}{\xi^3} \int_0^\xi e(p(\bar{\xi})) \bar{\xi}^2 d\bar{\xi} \geq \frac{3}{\xi^3} \int_0^\xi e(1/2) \bar{\xi}^2 d\bar{\xi} = e(1/2) =: w_0 > 0,$$

de tal forma que $w_0 \leq w \leq 1$ si $p \in Y_R$. Además, usando el teorema de L'Hopital $w(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 1$ si $p \in Y_R$. Esto motiva la definición del siguiente conjunto:

$$Z_R := \left\{ w \in X_R \mid w(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 1, \quad w_0 \leq w(\xi) \leq 1 \quad \text{para todo } 0 < \xi \leq R \right\}. \quad (3.99)$$

Resumiendo, si $p \in Y_R$, entonces w definido por (3.87) está en Z_R . Para aplicar el Teorema del punto de Banach primero debemos ver que $T : Y_R \rightarrow Y_R$ deja a Y_R invariante. Para esto se debe de cumplir que Tp es una función continua bien definida que satisface $Tp(\xi) \xrightarrow[\xi \rightarrow 0]{} 1$ y tal que $\frac{1}{2} \leq Tp(\xi) \leq 1$ para todo $0 < \xi < R$. Veamos que $1 - 2\lambda w(\bar{\xi})\bar{\xi}^2 > 0$ para $\bar{\xi}$ suficientemente pequeño, por lo tanto T está bien definida. Además observamos que $Tp(\xi) \xrightarrow[\xi \rightarrow 0]{} 1$. También $Tp(\xi)$ es continua porque $p(\xi)$, $e(p(\xi))$ y $w(\xi)$ lo son. Finalmente, verificamos que si $p \in Y_R$, entonces vale

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \int_0^\xi [e(p(\bar{\xi})) + \lambda p(\bar{\xi})] \frac{w(\bar{\xi}) + 3\lambda p(\bar{\xi})}{1 - 2\lambda w(\bar{\xi})\bar{\xi}^2} \bar{\xi} d\bar{\xi} \leq 1.$$

Como $p \geq 0$, $e \geq 0$ y $w \geq 0$, entonces

$$\int_0^\xi [e(p(\bar{\xi})) + \lambda p(\bar{\xi})] \frac{w(\bar{\xi}) + 3\lambda p(\bar{\xi})}{1 - 2\lambda w(\bar{\xi})\bar{\xi}^2} \bar{\xi} d\bar{\xi} \geq 0. \quad (3.100)$$

También dado que $p \leq 1$, $w \leq 1$ y $e(p)$ es monótona creciente

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^\xi [e(p(\bar{\xi})) + \lambda p(\bar{\xi})] \frac{w(\bar{\xi}) + 3\lambda p(\bar{\xi})}{1 - 2\lambda w(\bar{\xi})\bar{\xi}^2} \bar{\xi} d\bar{\xi} &\geq 1 - \int_0^\xi [e(1) + \lambda] \left(\frac{1 + 3\lambda}{1 - 2\lambda \bar{\xi}^2} \right) \bar{\xi} d\bar{\xi} \\ &= 1 + (1 + \lambda) \left(\frac{1 + 3\lambda}{4\lambda} \right) \ln(1 - 2\lambda \xi^2), \end{aligned}$$

por lo tanto se debe cumplir que

$$\frac{1}{2} \leq 1 + (1 + \lambda) \left(\frac{1 + 3\lambda}{4\lambda} \right) \ln(1 - 2\lambda \xi^2), \quad \text{para todo } 0 < \xi \leq R, \quad (3.101)$$

lo que implica que

$$R \leq \sqrt{\frac{1 - e^{-\frac{1}{2A}}}{2\lambda}}, \quad (3.102)$$

donde $A = \frac{1+3\lambda}{4\lambda} (1 + \lambda)$. Por lo que si R cumple la desigualdad (3.102) entonces $T : Y_R \rightarrow Y_R$ deja a Y_R invariante. Ahora se comprobará que T define una contracción en Y_R , si R es suficientemente pequeño, es decir debemos ver que existe $0 \leq L < 1$ tal que

$$\|Tp_2 - Tp_1\|_\infty \leq L\|p_2 - p_1\|_\infty, \quad \text{para todo } p_1, p_2 \in Y_R. \quad (3.103)$$

Podemos escribir $Tp_2 - Tp_1$ en términos de una función continuamente diferenciable F_λ que depende de p , de w y de ξ , y acotarlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |Tp_2(\xi) - Tp_1(\xi)| &= \left| \int_0^\xi [F_\lambda(p_2(\bar{\xi}), w_2(\bar{\xi}), \bar{\xi}) - F_\lambda(p_1(\bar{\xi}), w_1(\bar{\xi}), \bar{\xi})] \bar{\xi} d\bar{\xi} \right| \\ &\leq \int_0^\xi |F_\lambda(p_2(\bar{\xi}), w_2(\bar{\xi}), \bar{\xi}) - F_\lambda(p_1(\bar{\xi}), w_1(\bar{\xi}), \bar{\xi})| \bar{\xi} d\bar{\xi}, \end{aligned}$$

donde

$$F_\lambda : \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times [w_0, 1] \times [0, R] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.104)$$

con

$$F_\lambda(p, w, \xi) = [e(p) + \lambda p] \frac{w + 3\lambda p}{1 - 2\lambda w \xi^2}. \quad (3.105)$$

Usando el teorema del valor medio [12],

$$\begin{aligned} F_\lambda(p_2, w_2, \xi) - F_\lambda(p_1, w_1, \xi) &= \frac{\partial F_\lambda}{\partial p}(p_*, w_*, \xi)(p_2 - p_1) \\ &\quad + \frac{\partial F_\lambda}{\partial w}(p_*, w_*, \xi)(w_2 - w_1), \end{aligned} \quad (3.106)$$

con $p_1 < p_* < p_2$ y $w_1 < w_* < w_2$. Entonces estimamos

$$|Tp_2(\xi) - Tp_1(\xi)| \leq \int_0^\xi \left[\left| \frac{\partial F_\lambda}{\partial p}(p_*, w_*, \xi)(p_2(\bar{\xi}) - p_1(\bar{\xi})) \right| + \left| \frac{\partial F_\lambda}{\partial w}(p_*, w_*, \xi)(w_2(\bar{\xi}) - w_1(\bar{\xi})) \right| \right] \bar{\xi} d\bar{\xi} \quad (3.107)$$

por lo tanto

$$\|Tp_2 - Tp_1\|_\infty \leq \|p_2 - p_1\|_\infty C_1 \frac{R^2}{2} + \|w_2 - w_1\|_\infty C_2 \frac{R^2}{2}. \quad (3.108)$$

donde

$$C_1 = \max_{\substack{\frac{1}{2} \leq p \leq 1 \\ w_0 \leq w \leq 1 \\ 0 \leq \xi \leq R}} \left| \frac{\partial F_\lambda}{\partial p}(p, w, \xi) \right| \quad \text{y} \quad C_2 = \max_{\substack{\frac{1}{2} \leq p \leq 1 \\ w_0 \leq w \leq 1 \\ 0 \leq \xi \leq R}} \left| \frac{\partial F_\lambda}{\partial w}(p, w, \xi) \right|.$$

Además de forma similar tenemos de (3.87) que

$$|w_2(\xi) - w_1(\xi)| \leq \frac{3}{\xi^3} \int_0^\xi |e(p_2(\bar{\xi})) - e(p_1(\bar{\xi}))| \bar{\xi}^2 d\bar{\xi}$$

donde $e : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable dada por la expresión (3.93). Luego, usando nuevamente el teorema del valor medio

$$e(p_2) - e(p_1) = e'(p_*)(p_2 - p_1),$$

con $p_1 < p_* < p_2$. Entonces

$$\|w_2 - w_1\|_\infty \leq C_3 \|p_2 - p_1\|_\infty,$$

con $C_3 = \max_{\frac{1}{2} \leq p \leq 1} |e'(p)|$. Por lo tanto podemos concluir que

$$\|Tp_2 - Tp_1\|_\infty \leq \frac{R^2}{2} C_4 \|p_2 - p_1\|_\infty, \quad (3.109)$$

donde $C_4 = C_1 + C_2 C_3$. Deducimos que $L = \frac{R^2}{2} C_4$ y T define una contracción si se cumple que $\frac{R^2}{2} C_4 < 1$. Podemos ver entonces que si C_4 es muy grande entonces R debe de ser muy pequeño para que se cumpla la desigualdad pero siempre existe tal que $R > 0$. Entonces existe un único punto fijo p de $Tp = p$ sobre Y_R . Finalmente demostraremos que p también es solución de la ecuación de TOV. Observamos de la ecuación (3.96) que p es diferenciable sobre el intervalo $(0, R]$. Derivando de ambos lados esta ecuación obtenemos

$$\frac{dp}{d\xi} = -[e(p) + \lambda p] \xi \frac{w + 3\lambda p}{1 - 2\lambda \xi^2 w},$$

con w dada por (3.87). Por lo tanto $p : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución continuamente diferenciable de la ecuación (3.88). Ahora podemos obtener Φ usando esta ecuación. Se tiene que

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{1}{e + \lambda p} \frac{dp}{d\xi} = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\xi} \log h. \quad (3.110)$$

Primero integramos ambos lados de la igualdad desde $\bar{\xi} = \xi_1$ hasta $\bar{\xi} = \xi_2$, obteniendo lo siguiente

$$\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2) = \int_{p(\xi_1)}^{p(\xi_2)} \frac{dp}{e(p) + \lambda p}, \quad 0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq R, \quad (3.111)$$

Luego escribimos la Ec. (3.79) para la entalpía específica $h(p)$ en términos de las cantidades adimensionales

$$\frac{dh}{h} = \frac{\lambda dp}{e + \lambda p}, \quad (3.112)$$

y usando este resultado obtenemos lo siguiente

$$\int_0^{p(\xi)} \frac{dp}{e(p) + \lambda p} = \frac{1}{\lambda} \int_{h(0)}^{h(p(\xi))} \frac{dh}{h} = \frac{1}{\lambda} \log \left[\frac{h(p(\xi))}{h(0)} \right]. \quad (3.113)$$

Usando las ecuaciones (3.75), (3.90), (3.92) y (3.93) encontramos

$$h(p) = e_0 \left(1 + \frac{\lambda \gamma}{\gamma - 1 - \lambda} p^{1-1/\gamma} \right), \quad (3.114)$$

$$h(0) = e_0, \quad (3.115)$$

por lo que

$$\log \left[\frac{h(p(\xi))}{h(0)} \right] = \log \left[1 + \frac{\lambda \gamma}{\gamma - 1 - \lambda} p^{1-1/\gamma} \right]. \quad (3.116)$$

Entonces usando estos resultados en la ecuación (3.110) y eligiendo $\xi_2 = \xi_*$, $\xi_1 = \xi$ obtenemos la siguiente expresión para ϕ

$$\phi(\xi) - \phi(\xi_*) = -\frac{1}{\lambda} \log \left[1 + \frac{\lambda \gamma}{\gamma - 1 - \lambda} p(\xi)^{1-1/\gamma} \right], \quad 0 \leq \xi \leq \xi_*, \quad (3.117)$$

con ξ_* la superficie de la estrella (si existe), es decir, $p(\xi_*) = 0$. Pero $\Phi = \lambda\phi$, por lo tanto

$$\Phi(\xi) - \Phi(\xi_*) = -\log \left[1 + \frac{\lambda\gamma}{\gamma - 1 - \lambda} p(\xi)^{1-1/\gamma} \right]. \quad (3.118)$$

Notemos que para $\xi > \xi_*$ tenemos la solución de Schwarzschild ya que estamos fuera de la estrella y por lo tanto $\Phi = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{2m}{r} \right)$. Uniendo las dos soluciones para Φ obtenemos que $\Phi(\xi_*) = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{2m}{r_*} \right)$.

3.6. Existencia de soluciones globales de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para $\gamma > \frac{4}{3}$

Ahora se demuestra bajo que condiciones la solución local puede ser extendida hasta que forme la superficie de una estrella, es decir, hasta que $p = 0$. Para esto se usa la misma estrategia que en el caso newtoniano con la diferencia de que para la ecuación de TOV existe una nueva complicación asociada con el denominador de la parte derecha de la Ec. (3.88), el cual debe mantenerse positivo. Comenzaremos definiendo la siguiente cantidad. Sea p una solución local de la ecuación de TOV, entonces definimos el radio de su extensión maximal de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \xi_* = \sup \{ \xi_1 > 0 \mid & \Theta : (0, \xi_1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ existe, es continuamente diferenciable,} \\ & \text{es solución de la ec. de TOV con } p(\xi) \rightarrow 1 \text{ para } \xi \rightarrow 0 \\ & \text{y tal que } 0 < p(\xi) \leq 1 \text{ y } 1 - 2\lambda w(\xi)\xi^2 > 0 \ \forall 0 < \xi < \xi_1 \}. \end{aligned}$$

De acuerdo a los resultados de la sección anterior sabemos que $0 < R < \xi_*$. Existen dos posibilidades para ξ :

- a) ξ_* es finito
- b) ξ_* es infinito

Dado que p decrece monótonicamente, en el caso a) existen 2 posibilidades:

- $a_1) \lim_{\xi \rightarrow \xi_*} [1 - 2\lambda w(\xi)\xi^2] > 0 \text{ y } \lim_{\xi \rightarrow \xi_*} p(\xi) = 0,$
- $a_2) \lim_{\xi \rightarrow \xi_*} [1 - 2\lambda w(\xi)\xi^2] = 0.$

La idea es eliminar los casos b) y a_2). Iniciamos nuestra investigación eliminando el caso b).

Teorema 3.6.1. *Para valores correspondientes a $\gamma > 4/3$ el caso b) no puede ocurrir, es decir $\xi_* < \infty$ es finito.*

Demostración: Se demuestra por contradicción, es decir, se supone que $\xi_* = \infty$ y llegaremos a una contradicción. La demostración se hace en 3 pasos. Primero se demuestra que $p_\infty := \lim_{\xi \rightarrow \infty} p(\xi) = 0$. Luego se llega a una contradicción para $\gamma \geq 2$. Finalmente se llega a una contradicción para $4/3 < \gamma \geq 2$.

Supongamos entonces que $\xi_* = \infty$, entonces definimos

$$p_\infty := \lim_{\xi \rightarrow \infty} p(\xi) \geq 0. \quad (3.119)$$

En un primer paso demostremos que $p_\infty = 0$, donde notamos que el límite existe dado que p decrece y que $0 < p \leq 1$. Lo demostraremos por contradicción: Supongamos que $p_\infty > 0$, entonces $p(\xi) \geq p_\infty$, para todo $\xi > 0$. Definamos ahora la siguiente cantidad

$$e_\infty := e(p_\infty) > 0.$$

Ya que $p \geq p_\infty$, la ec. (3.87) y la monotonía de $e(p)$ implican que $e(p) \geq e_\infty$ y entonces $w(\xi) \geq e_\infty$ para todo $\xi > 0$, lo que implica que $1 - 2\lambda\xi^2 w \leq 1 - 2\lambda\xi^2 e_\infty$ para todo $\xi > 0$ lo cual contradice la definición de ξ_* . Entonces concluimos que p_∞ no puede ser mayor a cero y por lo tanto debe ser cero.

Ahora veamos que

$$\bar{m}(\xi) = \xi^3 w(\xi) = 3 \int_0^\xi e(p(\bar{\xi})) \bar{\xi}^2 d\bar{\xi} \geq \xi^3 e(p(\xi)), \quad (3.120)$$

esto debido a que $e(p(\xi))$ es decreciente. Por lo tanto $w(\xi) \geq e(p(\xi))$, es decir, la densidad promedio es mayor a la densidad. Ahora de (3.88) vemos que

$$-\frac{1}{e + \lambda p} \frac{dp}{d\xi} \geq \xi w. \quad (3.121)$$

Integramos ambos lados desde $\bar{\xi} = \xi$ hasta $\bar{\xi} = \infty$:

$$-\int_\xi^\infty \frac{1}{e + \lambda p} \frac{dp}{d\bar{\xi}} d\bar{\xi} \geq \int_\xi^\infty w(\bar{\xi}) \bar{\xi} d\bar{\xi}, \quad (3.122)$$

usando las expresiones (3.112), (3.113), (3.114) y (3.115) y el hecho de que $p_\infty = 0$ obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{\lambda} \log \left(1 + \frac{\lambda\gamma}{\gamma - 1 - \lambda} p^{1-1/\gamma} \right) \geq \int_\xi^\infty w(\bar{\xi}) \bar{\xi} d\bar{\xi}.$$

Ahora trabajemos con la parte derecha la de desigualdad. Usando el hecho de que $\bar{m}(\xi)$ crece en ξ ,

$$\int_\xi^\infty \bar{\xi} w d\bar{\xi} = \int_\xi^\infty \frac{\bar{m}(\bar{\xi})}{\bar{\xi}^2} d\bar{\xi} \geq \bar{m}(\xi) \int_\xi^\infty \frac{1}{\bar{\xi}^2} d\bar{\xi} = \frac{\bar{m}(\xi)}{\xi} = \xi^2 w(\xi),$$

de tal manera que

$$\int_\xi^\infty \bar{\xi} w d\bar{\xi} \geq \xi^2 w(\xi) \geq \xi^2 e(p(\xi)), \quad (3.123)$$

ya que como se vio anteriormente $w(\xi) \geq e(p(\xi))$. Por lo tanto

$$\frac{1}{\lambda} \log \left(1 + \frac{\lambda\gamma}{\gamma-1-\lambda} p^{1-1/\gamma}(\xi) \right) \geq \xi^2 w(\xi) \geq \xi^2 e(p(\xi)), \quad (3.124)$$

para todo $\xi > 0$. Por otro lado se cumple

$$\frac{\lambda\gamma}{\gamma-1-\lambda} p^{1-1/\gamma}(\xi) \geq \log \left(1 + \frac{\lambda\gamma}{\gamma-1-\lambda} p^{1-1/\gamma}(\xi) \right),$$

entonces

$$\frac{\gamma}{\gamma-1-\lambda} p^{1-1/\gamma}(\xi) \geq \xi^2 w(\xi) \geq \xi^2 e(p(\xi)). \quad (3.125)$$

De la desigualdad (3.125) y usando (3.93) podemos observar que

$$\frac{\gamma}{\gamma-1-\lambda} p^{1-1/\gamma}(\xi) \geq \xi^2 \frac{\gamma-1-\lambda}{\gamma-1} p^{1/\gamma},$$

lo que implica la siguiente desigualdad

$$\frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma-1-\lambda)^2} p^{\frac{\gamma-2}{\gamma}}(\xi) \geq \xi^2 \quad \text{para todo } \xi > 0, \quad (3.126)$$

Para $\gamma \geq 2$ llegamos a una contradicción ya que mientras que la parte izquierda de la desigualdad tiende a 0 (o es constante si $\gamma = 2$), la parte derecha tiende a ∞ en el limite cuando $\xi \rightarrow \infty$.

También vemos que la Ec. (3.93) implica que

$$e(p)^{\gamma-1} = \left(\frac{\lambda p}{\gamma-1} + \frac{\gamma-1-\lambda}{\gamma-1} p^{1/\gamma} \right)^{\gamma-1} \geq \left(\frac{\gamma-1-\lambda}{\gamma-1} \right)^{\gamma-1} p^{1-1/\gamma},$$

Por lo tanto, se obtiene de (3.125) la siguiente desigualdad

$$De(p(\xi))^{\gamma-1} \geq \frac{\gamma}{\gamma-1-\lambda} p^{1-1/\gamma} \geq \xi^2 w(\xi).$$

donde $D = \frac{\gamma(\gamma-1)^{\gamma-1}}{(\gamma-1-\lambda)^\gamma}$. Como sabemos que $w(\xi) \geq e(p(\xi))$, entonces obtenemos

$$Dw^{\gamma-1}(\xi) \geq \xi^2 w(\xi),$$

y sustituyendo $w(\xi) = \bar{m}(\xi)\xi^{-3}$, llegamos a la siguiente desigualdad

$$\bar{m}^{2-\gamma} \leq D\xi^{4-3\gamma} \quad \text{para todo } \xi > 0. \quad (3.127)$$

Si $4/3 < \gamma \leq 2$ la parte derecha de la desigualdad tiende a 0 cuando $\xi \rightarrow \infty$, mientras que la parte izquierda es positiva, dado que $\bar{m} > 0$.

Observemos que las contradicciones obtenidas son el resultado de suponer que ξ_* es infinito, por lo tanto concluimos que debe de ser finito (caso a)). $\square$

Teorema 3.6.1. *El $\lim_{\xi \rightarrow \xi_*} [1 - 2\lambda w(\xi)\xi^2] > 0$, es decir el caso a_2) nunca puede ocurrir. De esta forma obtenemos una estrella de radio finito en función de la masa que satisface $2m(r)/r < 8/9$.*

Demostración: Para demostrar el teorema, comencemos restando (3.51) a la expresión (3.52):

$$\left[\Phi'' + \Phi'(\Phi' - a') + \frac{\Phi' - a'}{r} \right] e^{-2a} - \frac{2}{r} a' e^{-2a} + \frac{1}{r^2} [1 - e^{-2a} - 2r(\Phi' - a')e^{-2a}] = 0. \quad (3.128)$$

Después de algunas manipulaciones y dividiendo toda la expresión entre r obtenemos la siguiente identidad

$$e^{-a(r)-\Phi(r)} \left[\frac{\Phi'(r)}{r} e^{\Phi(r)-a(r)} \right]' - \left[\frac{m(r)}{r^3} \right]' = 0, \quad (3.129)$$

lo que implica que

$$\left[\frac{\Phi'(r)}{r} e^{\Phi(r)-a(r)} \right]' = W'(r) e^{a(r)+\Phi(r)}. \quad (3.130)$$

Notemos que $W'(r) = W_c \frac{dw(\xi)}{d\xi}$, y además usando la Ec. (3.87), tenemos que

$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{3}{\xi} [e(p(\xi)) - w(\xi)] \leq 0, \quad (3.131)$$

debido a que, como se vio anteriormente, $e(p(\xi)) \leq w(\xi)$ para todo $0 < \xi < \xi_*$. Por lo tanto $W' \leq 0$, lo que significa que la densidad de energía promedio decrece. Entonces, volviendo a la Ec. (3.130)

$$\left[\frac{\Phi'(r)}{r} e^{\Phi(r)-a(r)} \right]' \leq 0. \quad (3.132)$$

Usando las cantidades adimensionales, podemos escribir la expresión (3.132) de la siguiente forma.

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} \frac{d\phi}{d\xi} e^{\lambda\phi(\xi)-a(\xi)} \right] \leq 0. \quad (3.133)$$

Ahora tomando $\xi_2 \in (0, \xi_*)$ y usando la Ec. (3.133) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{\phi'(\xi)}{\xi} e^{\lambda\phi(\xi)-a(\xi)} \geq \frac{\phi'(\xi_2)}{\xi_2} e^{\lambda\phi(\xi_2)-a(\xi_2)}, \quad \text{para todo } \xi \in (0, \xi_2]. \quad (3.134)$$

Sustituyendo la ec. (3.88) en la parte derecha de la expresión (3.134) y multiplicando ambos lados de la desigualdad por $\xi e^{a(\xi)}$, obtenemos para todo $\xi \in (0, \xi_2]$:

$$\phi'(\xi) e^{\lambda\phi(\xi)} \geq \xi e^{a(\xi)} \frac{[w(\xi_2) + 3\lambda p(\xi_2)]}{1 - 2\lambda\xi_2^2 w(\xi_2)} e^{\lambda\phi(\xi_2)-a(\xi_2)} \geq \xi e^{a(\xi)} w(\xi_2) e^{\lambda\phi(\xi_2)+a(\xi_2)}. \quad (3.135)$$

donde usamos la expresión (3.55) para concluir

$$1 - 2\lambda\xi_*^2 w(\xi_*) = e^{-2a(\xi_*)} \quad (3.136)$$

Integrando la parte izquierda y derecha de esta expresión desde $\xi = 0$ hasta $\xi = \xi_2$, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{\lambda}[e^{\lambda\phi(\xi_2)} - e^{\lambda\phi(0)}] \geq w(\xi_2)e^{\lambda\phi(\xi_2)+a(\xi_2)} \int_0^{\xi_2} [1 - 2\lambda\xi^2 w(\xi)]^{-1/2} \xi d\xi. \quad (3.137)$$

donde usamos (3.136). Por otro lado sabemos que la densidad promedio de energía decrece (ver (3.131)), es decir, $w(\xi) \geq w(\xi_2)$ entonces $1 - 2\lambda\xi^2 w(\xi) \leq 1 - 2\lambda\xi^2 w(\xi_2)$, y por lo tanto $[1 - 2\lambda\xi^2 w(\xi)]^{-1/2} \geq [1 - 2\lambda\xi^2 w(\xi_2)]^{-1/2}$. Luego, regresando a la desigualdad (3.137), tenemos que

$$\frac{1}{\lambda}[e^{\lambda\phi(\xi_2)} - e^{\lambda\phi(0)}] \geq w(\xi_2)e^{\lambda\phi(\xi_2)+a(\xi_2)} \int_0^{\xi_2} [1 - 2\lambda\xi^2 w(\xi_2)]^{-1/2} \xi d\xi. \quad (3.138)$$

Resolviendo la integral obtenemos la siguiente expresión

$$e^{\lambda\phi(\xi_2)} - e^{\lambda\phi(0)} \geq \frac{1}{2}e^{\lambda\phi(\xi_2)+a(\xi_2)} [1 - e^{-a(\xi_2)}], \quad (3.139)$$

lo que implica la siguiente desigualdad

$$e^{\lambda\phi(0)} \leq e^{\lambda\phi(\xi_2)} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{a(\xi_2)} \right]. \quad (3.140)$$

Debido a que $e^{\lambda\phi(0)} > 0$, entonces

$$e^{\lambda\phi(\xi_2)} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{a(\xi_2)} \right] > 0, \quad (3.141)$$

lo que a su vez implica

$$e^{-2a(\xi_2)} > \frac{1}{9}. \quad (3.142)$$

Dado que $\xi_2 \leq \xi_*$ es arbitrario, concluimos que

$$1 - \frac{2m}{r} = 1 - 2\lambda\xi^2 w(\xi) = e^{-2a} > \frac{1}{9}, \quad \text{para todo } 0 < \xi < \xi_*, \quad (3.143)$$

lo que excluye el caso a_2). A su vez, demostramos que $\frac{2m}{r} < \frac{8}{9}$ vale dentro de la estrella, es decir, para todo $0 \leq r \leq R$.

□

Capítulo 4

Estrellas de bosones newtonianas

Las estrellas de bosones son objetos astrofísicos hipotéticos que, como su nombre lo indica, están formados por partículas llamadas bosones. Fueron propuestos originalmente por Kaup [4] y Ruffini y Bonazzola [5]. En los siguientes años fueron captando el interés de los físicos y fueron exploradas con más detalle. Un tratamiento newtoniano de estas estrellas es posible como se hizo en [13] donde se resolvió numéricamente el sistema Schrödinger-Poisson y en [14] se demostró analíticamente la existencia de soluciones para este sistema. En esta sección se generalizan los resultados de [13] considerando una colección impar de N campos escalares donde todos estos, individualmente, tienen momento angular pero en conjunto siguen siendo esféricamente simétricos. Estas configuraciones constituyen el límite newtoniano de las “ ℓ -boson stars” relativistas obtenidas en [7]. Además para $N = 1$ se recuperan las soluciones de estrellas de bosones newtonianas originales de [13, 14]. En la primera sección primero se deducen las ecuaciones para la colección de estos campos escalares. A continuación se demuestra, usando el teorema del punto fijo de Banach, la existencia de soluciones en la vecindad del centro en un intervalo suficientemente pequeño. Finalmente, presentamos un par de resultados numéricos que dan evidencia para la existencia de soluciones globales.

4.1. Deducción de las ecuaciones

Las estrellas de bosones newtonianas pueden ser descritas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales [14]

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n - \frac{\hbar^2}{2m_b} \Delta \Psi_n + m_b \Phi \Psi_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho, \quad \rho = m \sum_{n=1}^N |\Psi_n|^2. \quad (4.2)$$

Las expresiones (4.1) y (4.2) son las ecuaciones de Schrödinger y Poisson respectivamente, donde Ψ_n representa la función de onda para el n -ésimo campo escalar, m_b es la masa asociada al boson, Φ es el potencial gravitacional y ρ es la densidad de masa. Proponemos

ahora una solución de tipo estacionaria, es decir suponemos que las funciones de onda tienen una dependencia armónica en el tiempo, tal que

$$\Psi_n(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t} u_n(\vec{x}), \quad (4.3)$$

donde ω es la frecuencia angular y $u_n(\vec{x})$ es una función que depende únicamente de $\vec{x} = (x, y, z)$. Sustituyendo la expresión (4.3) en las Ecs. (4.1) y (4.2) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$-\frac{\hbar^2}{2m_b} \Delta u_n + m_b \Phi u_n = E u_n, \quad E = \hbar\omega, \quad (4.4)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G m_b \sum_{n=1}^N |u_n|^2. \quad (4.5)$$

Como en [14] introducimos las siguientes variables para simplificar las Ecs. (4.4) y (4.5)¹

$$S_n = a^{-1} u_n \\ \phi = b^{-1} (m_b \Phi - E),$$

donde

$$a = \left(\frac{\hbar^2}{8\pi G m_b^3} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\hbar^2}{2m_b},$$

entonces las ecuaciones (4.4) y (4.5) se transforman en

$$\Delta S_n = S_n \phi \quad (4.6)$$

$$\Delta \phi = \sum_{n=1}^N |S_n|^2. \quad (4.7)$$

Notamos que S_n y ϕ tienen dimensiones de (longitud)⁻² y que el sistema (4.6, 4.7) es invariante bajo el reescalo $(r, S, \phi) \mapsto (\lambda^{-1}r, \lambda^2 S, \lambda^2 \phi)$ con el parámetro $\lambda > 0$, y también bajo la transformación $S_n \mapsto -S_n$. Además u_n es normalizable si

$$\int |u_n|^2 d^3x < \infty \Leftrightarrow \int |S_n|^2 d^3x < \infty. \quad (4.8)$$

Ahora suponemos soluciones de la forma

$$\phi(r) \quad \text{y} \quad S_n(r, \vartheta, \varphi) = v_\ell(r) Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad (4.9)$$

donde el número de momento angular $\ell = (N-1)/2$ es fijo y m toma valores $m = -\ell, \dots, \ell$, correspondiente a $n = 1 + m + \ell$. Aquí, $Y^{\ell m}$ denota los armónicos esféricos y v_ℓ es una función real que solo depende de r y es la misma para cualquier m , o sea la dependencia

¹Notamos que nuestra cantidad ϕ corresponde a la función $-V$ en [14].

radial es la misma para todos los m . Ahora sustituimos la expresión (4.9) en las Ecs. (4.6), (4.7) y, usando las siguientes relaciones [15]

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi) + \ell(\ell + 1)Y^{\ell m} &= 0, \\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi)|^2 &= \frac{2\ell + 1}{4\pi},\end{aligned}$$

donde $\hat{\Delta}$ es el Laplaciano sobre la esfera, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{1}{r^2}[(r^2 v_\ell')' - \ell(\ell + 1)v_\ell] = v_\ell \phi, \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2 \phi')' = \frac{2\ell + 1}{4\pi} v_\ell^2. \quad (4.11)$$

Notemos que el término $\ell(\ell + 1)/r^2$ en la Ec. (4.10) modifica el comportamiento de la solución cerca del centro. Luego, veamos que cuando r es muy pequeña, es decir cuando analizamos soluciones cerca del centro de la estrella, el lado izquierdo de la expresión (4.10) domina sobre el lado derecho ya que para configuraciones regulares se espera que ϕ es constante para r pequeño, por lo que podemos aproximarla por la siguiente ecuación

$$\frac{1}{r^2}[(r^2 v_\ell')' - \ell(\ell + 1)v_\ell] \approx 0, \quad (4.12)$$

cuyas soluciones son $v_\ell = r^\ell$ y $v_\ell = r^{-\ell-1}$ y de las cuales descartamos la segunda porque queremos que la solución sea regular en el centro. Esto nos motiva a hacer el siguiente cambio de variable

$$v_\ell(r) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} r^\ell w_\ell(r), \quad (4.13)$$

donde $w_\ell(r)$ es constante cuando $r \rightarrow 0$. Entonces sustituyendo la expresión (4.13) en las Ecs. (4.10) y (4.11) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{1}{r^{2(\ell+1)}}[r^{2(\ell+1)} w_\ell']' = \phi w_\ell, \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2 \phi')' = r^{2\ell} w_\ell^2. \quad (4.15)$$

Para $\ell = 0$ este sistema se reduce al sistema de Schrödinger-Poisson estándar (ver Ec. (2.1) en [14] con $w_0 = S$ y $\phi = -V$). En las siguientes secciones nos enfocaremos en demostrar que existen soluciones locales y globales de este sistemas de ecuaciones diferenciales para w_ℓ y ϕ (aunque la parte global se analizó al nivel numérico, hasta el momento).

4.2. Existencia de soluciones en la vecindad del centro

En esta sección se demuestra, usando el teorema del punto fijo de Banach, que podemos encontrar soluciones para el sistema de ecuaciones diferenciales (4.14) y (4.15) cerca del centro de simetría, es decir, en un intervalo $(0, R]$ con R suficientemente pequeño. Comenzamos integrando las expresiones (4.14) y (4.15) de $x = 0$ hasta $x = r$, y obteniendo

$$w'_\ell(r) = \frac{1}{r^{2(\ell+1)}} \int_0^r \phi(x) w_\ell(x) x^{2(\ell+1)} dx, \quad (4.16)$$

$$\phi'(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r w_\ell^2(x) x^{2(\ell+1)} dx \quad (4.17)$$

donde las constantes de integración se eligieron de tal manera para obtener regularidad en el centro de la estrella. Integramos nuevamente estas expresiones para obtener lo siguiente

$$w_\ell(r) = w_\ell(0) + \int_0^r \frac{1}{s^{2(\ell+1)}} \int_0^s \phi(x) w_\ell(x) x^{2(\ell+1)} dx ds,$$

$$\phi(r) = \phi(0) + \int_0^r \frac{1}{s^2} \int_0^s w_\ell^2(x) x^{2(\ell+1)} dx ds.$$

Usando integración por partes en las expresiones anteriores podemos obtener las siguientes ecuaciones integrales

$$w_\ell(r) = 1 + \frac{1}{2\ell+1} \int_0^r \phi(x) w_\ell(x) \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \right] x dx := T_1(w_\ell, \phi)(r), \quad (4.18)$$

$$\phi(r) = \phi_0 + \int_0^r w_\ell^2(x) \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} dx := T_2(w_\ell, \phi)(r), \quad (4.19)$$

donde elegimos $w_\ell(0) = 1$ debido a la invarianza de escala y donde $\phi_0 = \phi(0)$ representa el valor de $\phi(r)$ en el centro. Las Ecs. (4.18) y (4.19) son de punto fijo, es decir, son de la forma $k = Tk$ donde $k = (w_\ell, \phi)$ y $Tk = (T_1k, T_2k)$. Usaremos el teorema del punto fijo de Banach para mostrar la existencia de un único punto fijo de T para una clase de funciones definida sobre el intervalo $(0, R]$ suficientemente pequeño. Para esto introducimos el siguiente conjunto:

$$X_R := \{k = (w_\ell, \phi) : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid k \text{ continua y acotada}\}, \quad (4.20)$$

con la norma

$$\|k\| := \max\{\|w_\ell\|_\infty, \|\phi\|_\infty\}, \quad k = (w_\ell, \phi) \in X_R, \quad (4.21)$$

y el subconjunto cerrado:

$$Y_R := \{k \in X_R \mid |w_\ell| \leq 2 \text{ y } |\phi| \leq |\phi_0| + 1\}. \quad (4.22)$$

Notamos que $(X_R, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado completo, es decir, un espacio de Banach. Para aplicar el teorema del punto fijo de Banach debemos ver que $T : Y_R \rightarrow Y_R$ deja a Y_R invariante. Notemos primero que Tk está bien definida, es continua y está acotada². Luego para que T deje a Y_R invariante se debe cumplir también que $|T_1 k| \leq 2$ y $|T_2 k| \leq |\phi_0| + 1$ para $k \in Y_R$. Entonces veamos que

$$\begin{aligned} |T_1 k(r)| &\leq 1 + \frac{1}{2\ell + 1} \int_0^r \left| \phi(x) w_\ell(x) \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \right] x \right| dx \\ &\leq 1 + \frac{2(|\phi_0| + 1)}{2\ell + 1} \int_0^r \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \right] x dx \\ &\leq 1 + \frac{|\phi_0| + 1}{2\ell + 3} R^2, \end{aligned}$$

para todo $k \in Y_R$. Por lo tanto se debe de cumplir la siguiente desigualdad

$$1 + \frac{|\phi_0| + 1}{2\ell + 3} R^2 \leq 2,$$

es decir, R debe ser suficientemente pequeño, tal que

$$R \leq \left(\frac{2\ell + 3}{|\phi_0| + 1} \right)^{1/2}. \quad (4.23)$$

Ahora veamos que

$$\begin{aligned} |T_2 k(r)| &\leq |\phi_0| + \int_0^r \left| w_\ell^2(x) \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} \right| dx \\ &\leq |\phi_0| + 4 \int_0^r \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} dx \\ &\leq |\phi_0| + \frac{2}{(\ell + 1)(2\ell + 3)} R^{2(\ell+1)}, \end{aligned}$$

para todo $k \in Y_R$. Entonces se debe de cumplir la siguiente desigualdad

$$|\phi_0| + \frac{2}{(\ell + 1)(2\ell + 3)} R^{2(\ell+1)} \leq |\phi_0| + 1,$$

es decir, R debe de ser suficientemente pequeño, tal que

$$R \leq \left[\frac{(\ell + 1)(2\ell + 3)}{2} \right]^{1/2(\ell+1)}. \quad (4.24)$$

²Veamos que $0 \leq 1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \leq 1$ para todo $0 \leq x \leq r$ y para todo $\ell \geq 0$. También notamos que $\int_0^r \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \right] x dx = \frac{2\ell + 1}{2\ell + 3} \frac{r^2}{2}$ y $\int_0^r \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} dx = \frac{r^{2(\ell+1)}}{2(\ell + 1)(2\ell + 3)}$, lo que implica inmediatamente que para $k \in X_R$, $T_1 k(r)$ y $T_2 k(r)$ son funciones continuas y acotadas tales que $T_1 k(r) \rightarrow 1$, $T_2 k(r) \rightarrow \phi_0$ para $r \rightarrow 0$

Luego, si se cumplen las desigualdades (4.23) y (4.24) garantizamos que $T : Y_R \rightarrow Y_R$ deja a Y_R invariante. Queda por demostrar que T define una contracción en Y_R si R es suficientemente pequeño, es decir, debemos ver que existe $0 \leq L < 1$ tal que para todo $k_1, k_2 \in Y_R$,

$$\|Tk_2 - Tk_1\| \leq L\|k_2 - k_1\|. \quad (4.25)$$

Primero veamos que

$$\begin{aligned} |T_1k_2(r) - T_1k_1(r)| &\leq \frac{1}{2\ell+1} \int_0^r \left| [\phi_2(x)w_{\ell 2}(x) - \phi_1(x)w_{\ell 1}(x)] \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \right] x \right| dx \\ &\leq \frac{\|\phi_2w_{\ell 2} - \phi_1w_{\ell 1}\|_\infty}{2\ell+1} \int_0^r \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \right] x dx \\ &\leq \frac{\|\phi_2w_{\ell 2} - \phi_1w_{\ell 1}\|_\infty}{2(2\ell+3)} r^2, \end{aligned}$$

y entonces

$$\|T_1k_2 - T_1k_1\|_\infty \leq \frac{\|\phi_2w_{\ell 2} - \phi_1w_{\ell 1}\|_\infty}{2(2\ell+3)} R^2. \quad (4.26)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|\phi_2w_{\ell 2} - \phi_1w_{\ell 1}\|_\infty &= \|\phi_2(w_{\ell 2} - w_{\ell 1}) + w_{\ell 1}(\phi_2 - \phi_1)\|_\infty \\ &\leq \|\phi_2\|_\infty \|w_{\ell 2} - w_{\ell 1}\|_\infty + \|w_{\ell 1}\|_\infty \|\phi_2 - \phi_1\|_\infty \\ &\leq (1 + |\phi_0|) \|w_{\ell 2} - w_{\ell 1}\|_\infty + 2\|\phi_2 - \phi_1\|_\infty \\ &\leq (3 + |\phi_0|) (\|w_{\ell 2} - w_{\ell 1}\|_\infty + \|\phi_2 - \phi_1\|_\infty) \\ &\leq 2(3 + |\phi_0|) \|(w_{\ell 2}, \phi_2) - (w_{\ell 1}, \phi_1)\| = 2(3 + |\phi_0|) \|k_2 - k_1\|, \end{aligned}$$

entonces regresando a la expresión (4.26) obtenemos

$$\|T_1k_2 - T_1k_1\|_\infty \leq \frac{3 + |\phi_0|}{2\ell+3} R^2 \|k_2 - k_1\|,$$

y si imponemos la condición $\frac{(3+|\phi_0|)}{2\ell+3} R^2 \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$\|T_1k_2 - T_1k_1\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|k_2 - k_1\|. \quad (4.27)$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned} |T_2k_2(r) - T_2k_1(r)| &\leq \int_0^r \left| [w_{\ell 2}^2(x) - w_{\ell 1}^2(x)] \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} \right| dx \\ &\leq \|w_{\ell 2}^2 - w_{\ell 1}^2\|_\infty \int_0^r \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} dx \\ &\leq \frac{r^{2(\ell+1)}}{2(\ell+1)(2\ell+3)} \|w_{\ell 2}^2 - w_{\ell 1}^2\|_\infty, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|T_2 k_2 - T_2 k_1\|_\infty \leq \frac{R^{2(\ell+1)}}{2(\ell+1)(2\ell+3)} \|w_{\ell 2}^2 - w_{\ell 1}^2\|_\infty. \quad (4.28)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|w_{\ell 2}^2 - w_{\ell 1}^2\|_\infty &\leq \|w_{\ell 2} + w_{\ell 1}\|_\infty \|w_{\ell 2} - w_{\ell 1}\|_\infty \\ &\leq (\|w_{\ell 2}\|_\infty + \|w_{\ell 1}\|_\infty) \|w_{\ell 2} - w_{\ell 1}\|_\infty \\ &\leq 4 \|w_{\ell 2} - w_{\ell 1}\|_\infty \\ &\leq 4 \|(w_{\ell 2}, \phi_2) - (w_{\ell 1}, \phi_1)\| = 4 \|k_2 - k_1\|, \end{aligned}$$

entonces regresando a la expresión (4.28) obtenemos

$$\|T_2 k_2 - T_2 k_1\|_\infty \leq \frac{2R^{2(\ell+1)}}{(\ell+1)(2\ell+3)} \|k_2 - k_1\|,$$

nuevamente imponemos la condición $\frac{2R^{2(\ell+1)}}{(\ell+1)(2\ell+3)} \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$\|T_2 k_2 - T_2 k_1\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|k_2 - k_1\|. \quad (4.29)$$

Por lo que de las desigualdades (4.27) y (4.29) concluimos que

$$\|T k_2 - T k_1\| \leq \frac{1}{2} \|k_2 - k_1\|, \quad (4.30)$$

y entonces T define una contracción sobre Y_R . Luego, existe un único punto fijo k de $Tk = k$ sobre Y_R . Por último demostraremos que w_ℓ y ϕ también son solución del sistema formado por las Ecs. (4.14, 4.15). Observemos de las Ecs. (4.18, 4.19) que w_ℓ y ϕ son diferenciables sobre el intervalo $(0, R)$. Derivando dos veces de ambos lados dichas expresiones obtenemos

$$\frac{1}{r^{2(\ell+1)}} [r^{2(\ell+1)} w'_\ell]' = \phi w_\ell,$$

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \phi')' = r^{2\ell} w_\ell^2.$$

Por lo tanto w_ℓ y ϕ son solución dos veces continuamente diferenciables del sistema formado por las Ecs. (4.14, 4.15).

4.3. Soluciones numéricas

En esta sección se estudia brevemente de forma numérica las soluciones del sistema (4.14, 4.15). Para ello se resolvieron dichas ecuaciones de forma numérica, para diferentes valores de ϕ_0 y ℓ , usando el método Runge-Kutta de orden 4 el cual se programó en

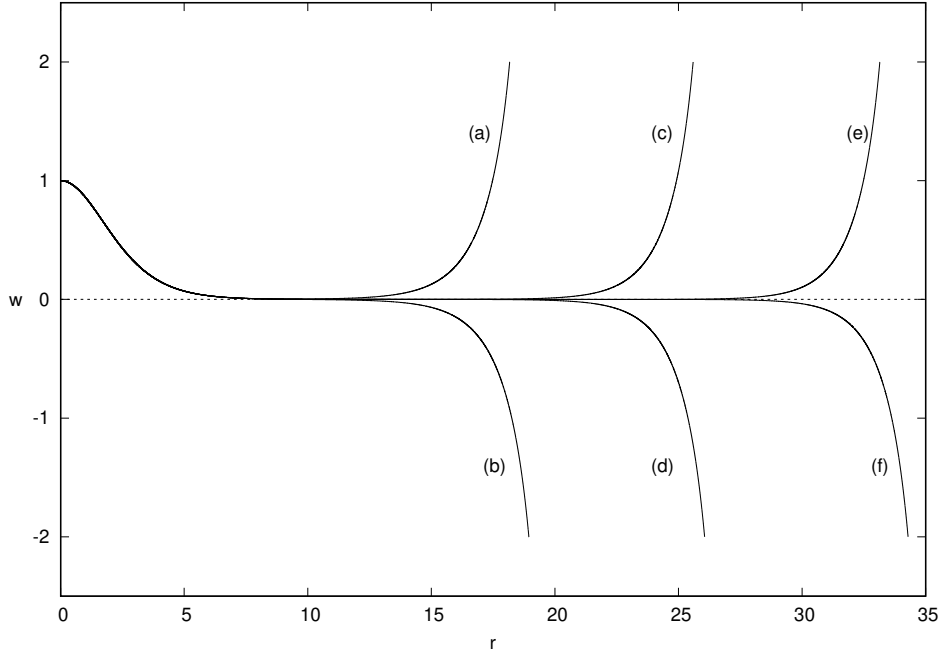


Figura 4.1: Estado base de la función de onda con $\ell = 0$ para varias aproximaciones de ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -0.91849303431872231$, (b) $\phi_0 = -0.91862576452599387$, (c) $\phi_0 = -0.91857962003987215$, (d) $\phi_0 = -0.91857987927855822$, (e) $\phi_0 = -0.91857977548181868$, (f) $\phi_0 = -0.91857977573498140$. El valor (f) corresponde al valor $S_0 = -1/\phi_0 = 1.088637075\dots$ que es consistente (con la precisión 10^{-9} que se usó en nuestro código) con los resultados obtenidos en [13].

FORTTRAN. Se usó un tamaño de paso de $\Delta r = 0.001$ y para tratar la singularidad en el centro, se reemplazaron las Ecs.s (4.14, 4.15) en $r = 0$ por

$$w''_\ell|_{r=0} = \frac{1}{2\ell+3}\phi w_\ell, \quad (4.31)$$

$$\phi''|_{r=0} = \frac{1}{3}\delta_{\ell,0}w_0^2. \quad (4.32)$$

Para aproximar las soluciones globales, se varió el parámetro ϕ_0 , haciendo un ajuste fino para extender lo más posible el dominio de la solución. A continuación se muestran las gráficas de las soluciones con $\ell = 0, 1, 2$ para el estado base (ningún cero de w_ℓ), Figs. 4.1 – 4.3, como para el primero estado excitado (un único cero de w_ℓ), Figs. 4.4 – 4.6.

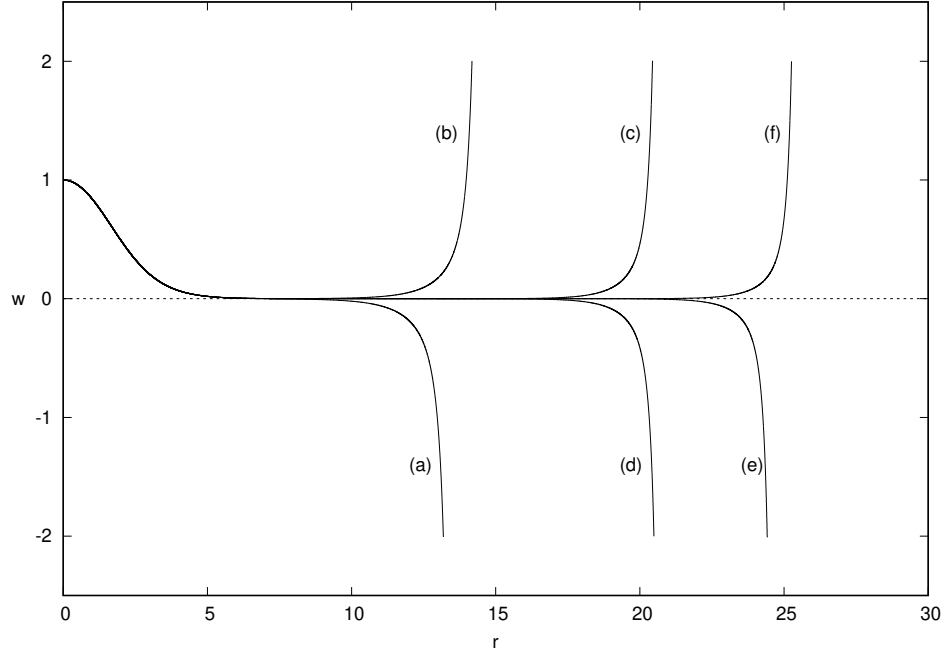


Figura 4.2: Estado base de la función de onda con $\ell = 1$ para varias aproximaciones de ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -1.6953125$, (b) $\phi_0 = -1.69453125$, (c) $\phi_0 = -1.6947108983993533$, (d) $\phi_0 = -1.6947109118103985$, (e) $\phi_0 = -1.6947109125554565$, (f) $\phi_0 = -1.6947109121829276$.

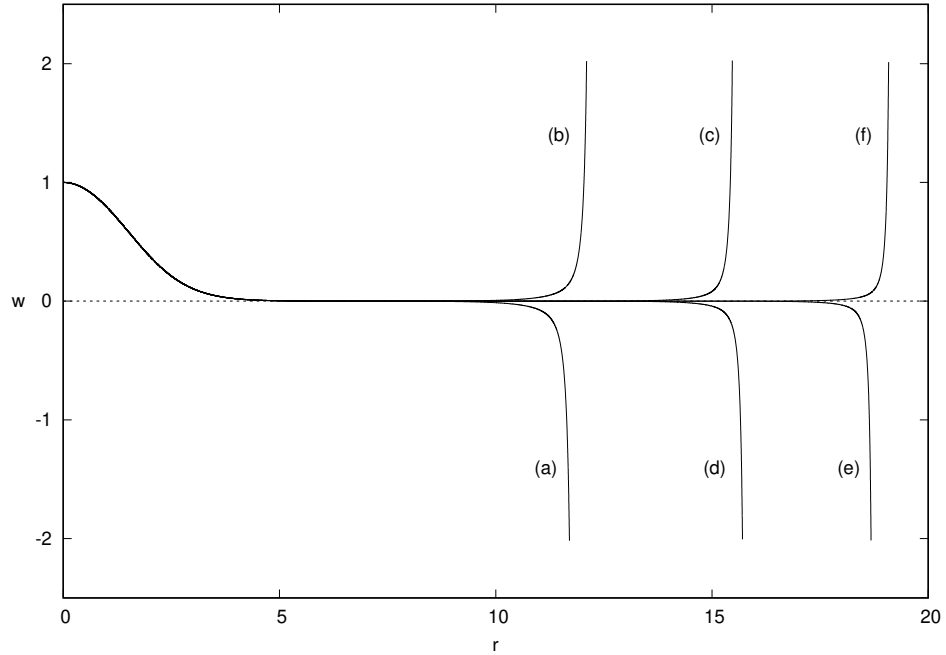


Figura 4.3: Estado base de la función de onda con $\ell = 2$ para varias aproximaciones de ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -3.1343750000000004$, (b) $\phi_0 = -3.1342449188232426$, (c) $\phi_0 = -3.1342447280883796$, (d) $\phi_0 = -3.1342448249459269$, (e) $\phi_0 = -3.1342448256909847$, (f) $\phi_0 = -3.1342448253184561$.

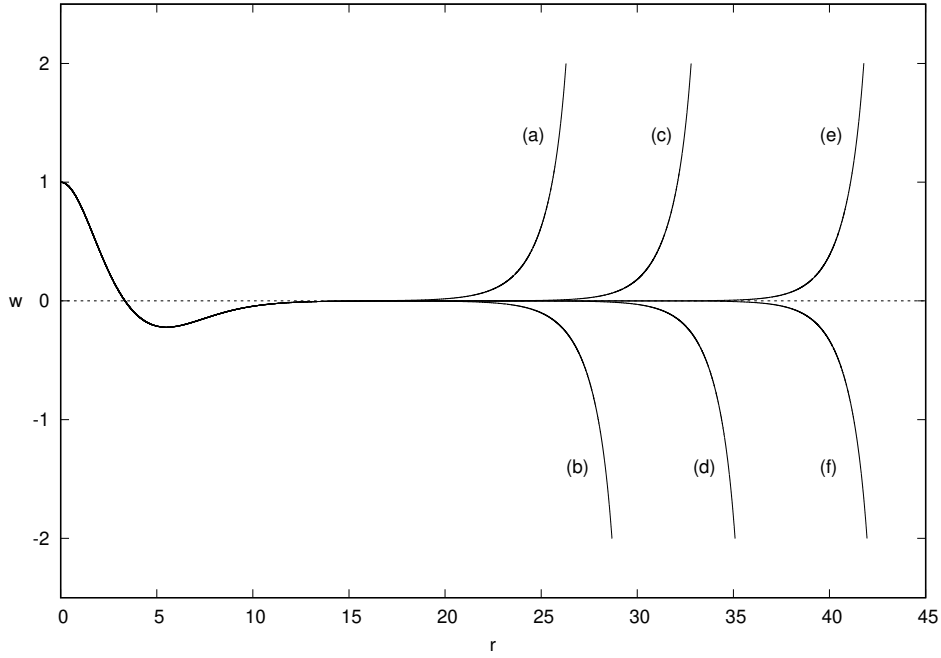


Figura 4.4: Primer estado excitado de la función de onda con $\ell = 0$ para varias aproximaciones de ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -1.2099880642361112$, (b) $\phi_0 = -1.2099541558159723$, (c) $\phi_0 = -1.2099591890970867$, (d) $\phi_0 = -1.2099589573012459$, (e) $\phi_0 = -1.2099589898975360$, (f) $\phi_0 = -1.2099589896388352$. El valor (f) corresponde al valor $S_0 = -1/\phi_0 = 0.82647429\dots$ que es consistente (con la precisión 10^{-8} que se usó en nuestro código) con los resultados obtenidos en [13].

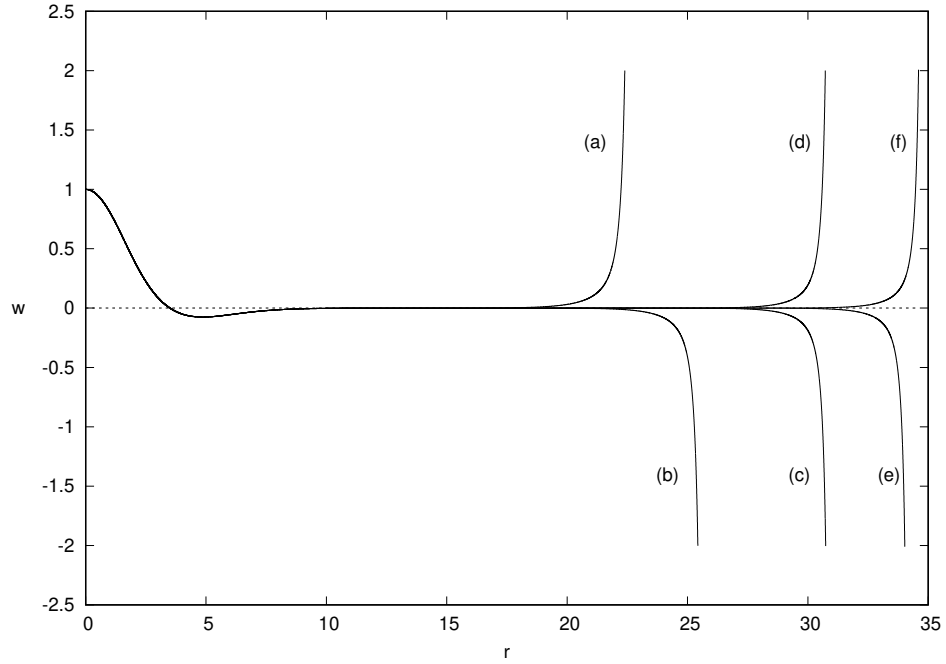


Figura 4.5: Primer estado excitado de la función de onda con $\ell = 1$ para varias aproximaciones de ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -2.0615844726562500$, (b) $\phi_0 = -2.0615783691406251$, (c) $\phi_0 = -2.0615785628557202$, (d) $\phi_0 = -2.0615785636007784$, (e) $\phi_0 = -2.0615785632182430$, (f) $\phi_0 = -2.0615785632282493$.

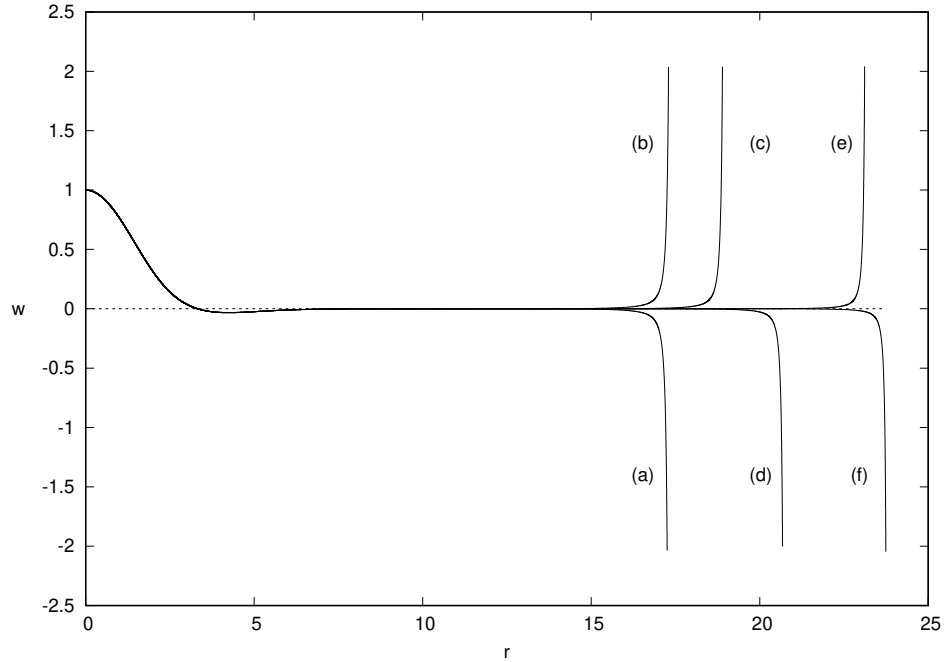


Figura 4.6: Primer estado excitado de la función de onda con $\ell = 2$ para varias aproximaciones de ϕ_0 : (a) $\phi_0 = -3.6303588867187502$, (b) $\phi_0 = -3.6303781250000003$, (c) $\phi_0 = -3.6303695678710941$, (d) $\phi_0 = -3.6303687572479255$, (e) $\phi_0 = -3.6303688010887525$, (f) $\phi_0 = -3.6303688000887635$.

Capítulo 5

Conclusiones

Aunque los resultados del primer y segundo capítulos no son nuevos y ya se han estudiado, estos están repartidos en diferentes artículos y libros. En esta tesis se hizo una recopilación de algunos de los resultados más importantes del estudio de la ecuación de Lane-Emden lo cual puede ser valioso desde el punto de vista pedagógico ya que se estudia desde la deducción de la ecuación hasta una demostración rigurosa de la existencia de soluciones globales para $0 < n < 3$. De forma similar aunque la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff ha sido muy estudiada y ya exista un estudio más general, en este trabajo se hizo también una recopilación de algunos resultados importantes que van desde la deducción de la ecuación hasta una demostración rigurosa de la existencia de soluciones locales y globales usando una ecuación de estado politrópica y en donde se demostró que la desigualdad $2m/r < 8/9$ vale dentro de la estrella.

En el tercer capítulo se demostró la existencia de soluciones locales y se estudió numéricamente de forma breve el comportamiento de las soluciones globales del sistema de ecuaciones que describe las estrellas de bosones newtonianas formadas por N campos escalares, el cual es una generalización del sistema Schrödinger-Poisson el cual describe estrellas de bosones newtonianas pero formadas por un solo campo escalar. En [14] se hace una demostración rigurosa sobre la existencia de soluciones de este sistema para $N = 1$ campos escalares. Queda para futuros trabajos la demostración rigurosa de la existencia de soluciones globales del sistema Schrödinger-Poisson con $N \geq 1$ campos escalares.

Apéndice A

El espacio $(X_R, \|\cdot\|_\infty)$ y su completez

En este apéndice demostraremos que el espacio vectorial $X_R := \{\Theta : (0, R] \rightarrow \mathbb{R} \mid \Theta \text{ continua y acotada}\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ forma un espacio de Banach, es decir, un espacio normado completo. Para esto verificamos primero que $\|\cdot\|_\infty$ cumple los tres postulados de la norma, los cuales son:

- i) $\|\Theta\|_\infty \geq 0$ y es 0 sii $\Theta = 0$,
- ii) $\|\lambda\Theta\|_\infty = |\lambda| \cdot \|\Theta\|_\infty$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\Theta \in X_R$,
- iii) $\|\Theta_1 + \Theta_2\|_\infty \leq \|\Theta_1\|_\infty + \|\Theta_2\|_\infty$, para todo $\Theta_1, \Theta_2 \in X_R$.

Notamos que $|\Theta(x)| \geq 0 \quad \forall x \in (0, R]$, entonces

$$\|\Theta\|_\infty := \sup_{0 < x \leq R} |\Theta(x)| \geq 0$$

y $\|\Theta\|_\infty = 0$ si y sólo si $|\Theta(x)| = 0$ para todo $x \in (0, R]$, lo que a su vez es cierto si y sólo si $\Theta(x) = 0$ para todo $x \in (0, R]$, por lo tanto se cumple la primera condición. Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \|\lambda\Theta\|_\infty &:= \sup_{0 < x \leq R} |\lambda\Theta(x)| = \sup_{0 < x \leq R} |\lambda| \cdot |\Theta(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{0 < x \leq R} |\Theta(x)| = |\lambda| \cdot \|\Theta\|_\infty, \end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la segunda condición. Por último

$$\begin{aligned} \|\Theta_1 + \Theta_2\|_\infty &:= \sup_{0 < x \leq R} |\Theta_1(x) + \Theta_2(x)| \leq \sup_{0 < x \leq R} (|\Theta_1(x)| + |\Theta_2(x)|) \\ &\leq \sup_{0 < x \leq R} |\Theta_1(x)| + \sup_{0 < x \leq R} |\Theta_2(x)| = \|\Theta_1\|_\infty + \|\Theta_2\|_\infty, \end{aligned}$$

por lo que vemos que la tercera condición también se cumple. Concluimos que $\|\cdot\|_\infty$ define una norma. Ahora demostremos que $(X_R, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio completo. Para esto

debemos demostrar que una sucesión de funciones en X_R es convergente si y sólo si es de Cauchy. En cualquier espacio normado se cumple que si una sucesión es convergente entonces es de Cauchy, por lo que solo demostraremos que si la sucesión es de Cauchy entonces es convergente. Si (Θ_k) es una sucesión de Cauchy en $(X_R, \|\cdot\|_\infty)$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{0 < x \leq R} |\Theta_k(x) - \Theta_j(x)| = \|\Theta_k - \Theta_j\|_\infty < \varepsilon \quad (\text{A.1})$$

para todo $k, j > n$. En particular

$$|\Theta_k(x) - \Theta_j(x)| \leq \varepsilon \quad (\text{A.2})$$

para todo $k, j > n$ y todo $x \in (0, R]$. Por lo tanto $(\Theta_k(x))$ es una sucesión de Cauchy en el espacio completo $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, lo que implica que existe el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_k(x) =: \Theta(x) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.3})$$

Queda por demostrar que la función definida de la siguiente forma $\Theta : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y acotada, y que $\Theta_k \rightarrow \Theta$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. Decir que una función es continua significa que si tomamos una sucesión (x_m) en $(0, R]$ que converge a $x \in (0, R]$, entonces $\Theta(x_m) \rightarrow \Theta(x)$. Para demostrarlo probaremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\Theta(x_m) - \Theta(x)| < \varepsilon$$

para todo $m > n_0$. Sea $\varepsilon > 0$, como (Θ_k) es una sucesión de Cauchy entonces existe un número natural $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\Theta_k(x) - \Theta_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $k, j > n_1$ y todo $x \in (0, R]$. Si tomamos el límite $k \rightarrow \infty$ de ambos lados, obtenemos

$$|\Theta(x) - \Theta_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

lo que implica que

$$\sup_{0 < x \leq R} |\Theta(x) - \Theta_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{A.4})$$

para todo $j > n_1$. Dado que Θ_j es continua existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\Theta_j(x_m) - \Theta_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } m > n_1$$

Entonces si tomamos $j = n_1 + 1$ fijo, se cumple que

$$\begin{aligned} |\Theta(x_m) - \Theta(x)| &= |\Theta(x_m) - \Theta_j(x_m) + \Theta_j(x_m) - \Theta_j(x) + \Theta_j(x) - \Theta(x)| \\ &\leq |\Theta(x_m) - \Theta_j(x_m)| + |\Theta_j(x_m) - \Theta_j(x)| + |\Theta_j(x) - \Theta(x)| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

por lo que Θ es continua. Notamos que la desigualdad (A.4) implica que $\|\Theta - \Theta_j\|_\infty < \varepsilon$ para todo $j > n_1$, y por lo tanto $\Theta_k \rightarrow \Theta$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. Vemos de la expresión (A.4) que $\Theta - \Theta_j$ es acotada, por lo tanto $\Theta = \Theta - \Theta_j + \Theta_j$ también es acotada tal que $\Theta \in X_R$. Concluimos que $(X_R, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Bibliografía

- [1] Subrahmanyan Chandrasekhar . *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover Publications Inc., New York, 1958.
- [2] Tobias Ramming and Gerhard Rein. Spherically symmetric equilibria for self-gravitating kinetic or fluid models in the non- relativistic and relativistic case—a simple proof for finite extension. *Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik Universität Bayreuth*, 2018.
- [3] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press., Chicago, 1984.
- [4] David J. Kaup. Klein-Gordon geon. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342, 1968.
- [5] Remo Ruffini and Silvano Bonazzola. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, 1969.
- [6] Piotr Bizoń and Arthur Wasserman. On existence of Mini-Boson Stars. *Communications in Mathematical Physics.*, 215:357–373, 2000.
- [7] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Dario Nunez, and Olivier Sarbach. ℓ -Boson stars. *Class. Quant. Grav.*, 35:19LT01, 2018.
- [8] Palenzuela C. Leibling SL. Dynamical Boson Stars. *Living reviews in relativity.*, 20, 2017.
- [9] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*. Academic Press, San Diego, 1980.
- [10] Olivier Sarbach. La teoría general de la relatividad. <http://www.ifm.umich.mx/~sarbach/teaching/maestria/rg18/RG.pdf>, 2018. Accedido: 07-03-2019.
- [11] Charles W. Misner and David H. Sharp. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Phys. Rev.*, 136:B571, 1964.
- [12] Michael Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, Inc., Houston, Texas 77019, 2008.
- [13] Irene M Moroz, Roger Penrose, and Paul Tod. Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations. *Classical and Quantum Gravity*, 15:2733–2742, 1998.

- [14] Paul Tod and Irene M Moroz. An analytical approach to the Schrödinger-Newton equations. *Nonlinearity*, 12:201–216, 1999.
- [15] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1999.