



UNIVERSIDAD
MICHUACANA DE SAN
NICOLAS DE HIDALGO



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“PATRONES DE MOIRÉ”

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

ALEJANDRA FERREYRA TORRES

ASESOR:

DR. MAURICIO ORTIZ GUTIÉRREZ
PROFESOR INVESTIGADOR DE LA FACULTAD DE CIENCIA FÍSICO
MATEMÁTICAS
U.M.S.N.H

COASESOR:

M.C. EUGENIA TORRES VIDALES
PROFESORA INVESTIGADORA DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
U.M.S.N.H

Morelia, Mich. Octubre del 2019

Dedicada a:

A Dios por permitirme lograr a llegar hasta donde estoy.

Mi mamá y mi papá que han sido un ejemplo para mí y me han ayudado mucho.

A mis hermanos Chava, Angélica, Jorge y Sandi, que me han apoyado y que he aprendido con ellos.

A Hugo por todo este tiempo que llevamos conociéndonos, ayudarme y creer en mí.

Agradecimientos:

A Dios.

A mi asesor de tesis el Dr. Mauricio Ortiz Gutiérrez, una de las personas más maravillosas y trabajadora que he conocido. Gracias por haber aceptado ser mi asesor de tesis. Gracias por la paciencia que me tuvo, por todos los conocimientos nuevamente transmitidos. Gracias sobre todo por su confianza.

Al Dr. Joaquín Estévez Delgado, Dr. Luis Mariano Hernández Ramírez, Dra. Mary Carmen Peña Gomar y Dr. José Vega Cabrera, por ser mis sinodales y por sus valiosas aportaciones a este trabajo.

Quiero agradecer, a cada uno de mis profesores, que contribuyeron en mi formación. Gracias por compartir sus amplios conocimientos, experiencia y compromiso hacia su profesión.

A todos mis compañeros y amigos de la Facultad, por todos los buenos momentos que pasamos.

A Hugo Medina, por su compañía, ayuda, su paciencia y por todo este tiempo que tenemos conociéndonos.

A mi mamá y mi papá al apoyarme en que estudiara y fuera una versión mejor de mí.

A mis hermanos que me ayudaron cuando necesitaba ayuda para avanzar, por su compañía y aunque no lo demuestren mucho su cariño.

A todas las demás personas que han llegado a estar en el trayecto de mi vida ya que aprendí algo de cada persona que estuvo en mi vida.

PATRONES DE MOIRÉ

Por

Alejandra Ferreyra Torres

Resumen

El estudio, desarrollo, aplicación y perfeccionamiento de métodos ópticos se considera un área de investigación muy importante. En la actualidad, se han desarrollado diferentes métodos y técnicas ópticas, utilizadas de forma experimental, estos desarrollos experimentales son tanto teóricos como matemáticos y su importancia radica no solo en su valor teórico sino también en sus aplicaciones prácticas. En esta tesis se mostrarán diferentes técnicas para la aplicación del efecto moiré y sus fundamentos. Este trabajo presenta una aplicación sencilla y simple basada en el efecto moiré empleando métodos ópticos mediante rejillas generadas digitalmente y técnicas de procesado de imágenes basadas en la teoría de Fourier que mediante algoritmos se desarrollarán para tal fin en Matlab.

Palabras clave: efecto moiré, rejillas cosenoidales, rejillas binarias, interferencia, transformada de Fourier, filtraje espacial, animación moiré.

Abstract

The study, development, application and refinement of optical methods is considered a very important area of research. Currently, different methods and optical techniques have been developed, used experimentally, these experimental developments are both theoretical and mathematical and their importance lies not only in their theoretical value but also in their practical applications. In this thesis different techniques will be shown for the application of the moiré effect and its foundations. This work presents a simple and simple application based on the moiré effect using optical methods using digitally generated grids and image processing techniques based on Fourier theory that by algorithms will be developed for this purpose in Matlab.

Keywords: moiré effect, cosenoidal grids, binary grids, interference, Fourier transform, spatial filtering, moiré animation.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes.....	1
1.2. Objetivo general.....	6
1.2.1. Objetivos específicos.....	7
1.3. Organización de tesis.....	7

CAPÍTULO 2. DIFERENTES TIPOS DE REJILLAS EN EFECTO MOIRÉ

2.1. Rejillas cosenoidales.....	9
2.2. Rejillas binarias.....	11
2.3. Rejillas circulares.....	13
2.4. Placa zonal.....	14

CAPÍTULO 3. TÉCNICAS PARA LA FORMACIÓN DEL EFECTO MOIRÉ

3.1. Superposición de rejillas para la formación del efecto moiré	16
3.1.1. Moiré generado por el producto de rejillas	19
3.1.2. Moiré generado por la suma de rejillas	20
3.2. Sombra de moiré	22

CAPÍTULO 4. EXTRACCIÓN DE MOIRÉ EN LAS DIFERENTES REJILLAS

4.1. Extracción de moiré de rejillas cosenoidales.....	25
4.2. Extracción de moiré rejillas binarias.....	37
4.3. Extracción de moiré rejillas circulares.....	51
4.4. Extracción de moiré de placas zonales.....	55

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

5.1. Ensayos de moiré en diferentes patrones de rejillas.....	58
5.2. Animación de figuras.....	93

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.....	101
-------------------------------	-----

APENDICE

A. Transformada de Fourier.....	99
A.1. Teoría de Fourier.....	99
A.2. Transformada de Fourier unidimensional	99
A.3. Transformada de Fourier bidimensional y propiedades.....	103
B. Filtros pasa bandas.....	108
C. Códigos en MATLAB.....	110
C.1. Código para patrón de moiré cosenoidal.....	110
C.2. Código para patrón de moiré binaria.....	114
C.3. Código para patrón de moiré circular.....	118
C.4. Código para patrón de moiré zonal.....	121
C.5. Código para dibujar las rejillas que se generaron.....	124
C.6. Código para obtener la imagen de la transformada de Fourier que se generó.....	124
C.7. Código para normalizar la matriz y crear la imagen de la transformada de Fourier que se generó.....	125
C.8. Código para crear la imagen de la transformada de Fourier inversa que se generó.....	126
C.9. Código para generar la figura de la transformada de Fourier de las rejillas.....	126
C.10. Código para generar la transformada de Fourier de las rejillas.....	127
C.11. Código para generar la transformada de Fourier inversa de las rejillas.....	128
C.12. Código para generar un filtro de tres puntos.....	129
C.13. Código para generar un filtro circular.....	130
C.14. Código para generar un filtro elíptico.....	131

C.15. Código para calcular las distancias.....	131
C.16. Código para calcular el ángulo.....	132
Referencias.....	135

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

En las últimas décadas los métodos y técnicas de diagnóstico y reconocimiento no invasivas han ganado gran importancia a nivel mundial, teniendo como consecuencia innovadoras aplicaciones, entre las cuales, las más sobresalientes se manifiestan en la industria y la medicina. Así mismo, se han desarrollado diferentes métodos y técnicas ópticas utilizadas de forma experimental y su mayor importancia radica en sus aplicaciones prácticas, las cuales han tenido una repercusión significativa en el avance de la investigación en las diferentes áreas de la ingeniería que a su vez han desarrollado los mecanismos para su implementación y aplicación en diversos campos tales como: restauración de imágenes, análisis de documentos, diagnósticos y tratamientos médicos, visión robótica, medidas de la geometría o de desplazamiento de objetos, recreación de efectos visuales, reconstrucción digital de imágenes, inspección visual automática, vigilancia inteligente, investigación geológica y en diversos campos de la industria.

En diferentes campos de investigación e ingeniería se han desarrollado múltiples técnicas con el objetivo de analizar diferentes materiales y estructuras así como los efectos originados al ser sometidas a cargas o temperaturas de diversa naturaleza y la integridad estructural de las mismas así como obtener medidas de los parámetros de daños producidos las cuales se pueden dividir en dos grandes áreas: técnicas destructivas (como la microscopía, metalografía, fractografía, técnica de delaminación) y no destructivas (Rayos X, ultrasonido, espectroscopia, termografía, etc.)

En la actualidad existe una clara tendencia a la medición y análisis de elementos mediante técnicas ópticas debido a que posibilitan ensayos no destructivos o invasivos, con un alto nivel de detalle, en muchos casos en forma más rápida y bastante asequibles con respecto a su costo económico, aunque también pueden presentar algunos limitantes debido a que son sensibles a algunas características que presentan las superficies o materiales a analizar por medios ópticos, tales como reflectividad, variaciones en el color, en la iluminación, transparencias. Sin embargo el desarrollo de las computadoras y la tecnología ha permitido implementar montajes más prácticos y el desarrollo de diferentes técnicas con el fin de estudiar un elemento en su forma, logrando realizar modelos en tres dimensiones en algunos casos con tan solo una cámara y una PC.

Estas técnicas pueden clasificarse en técnicas interferométricas, como holografía interferométrica, speckle interferométrico e interferometría por moiré; y técnicas no interferométricas como las técnicas de correlación digital de imágenes. Algunos de estos sistemas se encuentran disponibles comercialmente (sistemas estereoscópicos, scanner 3D, videogrametría, etc.), sin embargo el costo de estos sistemas en algunos casos resulta considerable y con el desarrollo de la tecnología actual pueden depreciarse en un tiempo cercano.

En el presente trabajo se aborda el uso de un método óptico basado en el efecto de moiré. En este sentido, la palabra moiré no es el nombre de alguna persona, sino que es una palabra de origen francés que es utilizada para denominar a un tipo particular de tela de seda que posee una apariencia ondeante, presentando un efecto visual un tanto peculiar, formado por la estructura misma de su tejido, dando un efecto visual característico como en la figura 1.1.



Figura 1. 1 Tejido de tela. El patrón de moiré está formado por las líneas en color rojo oscuro.

En óptica, un patrón de moiré (pronunciado “muaré”) se refiere a patrones de interferencia producidos por la superposición de dos o más patrones geométricos (rejillas) aproximadamente equi-espaciados (que presentan una apariencia parecida a esta tela). Dependiendo del tipo, forma y ángulo entre rejillas se obtendrá un significado físico respectivo. El uso de las técnicas basadas en los patrones moiré, fue introducido por Lord Raleigh en 1874 [1].

Al usar éstos patrones de interferencia se pueden realizar mediciones de formas de objetos y así mismo defectos que ellos posean, incluso utilizando luz incoherente (blanca), pues esta técnica permite detectar formas y cambios en espacios y dimensiones en centímetros y milímetros.

El efecto moiré es común observarlo en las fotografías digitales. Esto es debido a la propia naturaleza del sensor de la cámara digital, ya que se compone básicamente de una rejilla de pixeles. Este efecto también se puede encontrar en otros lugares como en televisión,

que aparece por ejemplo cuando un personaje viste a rayas o a cuadros o en el teléfono celular cuando se toma una fotografía del televisor o del ordenador. El efecto moiré no es deseado en el campo de la fotografía y se buscan diferentes técnicas a fin de minimizarlo o eliminarlo. Sin embargo dentro del campo de la óptica se han desarrollado diferentes métodos y técnicas de forma experimental a fin de trasladarlo a su aplicación práctica.

Un ejemplo de este efecto es cuando se colocan dos diapositivas con un mismo patrón de figura una sobre de otra, pero con una superposición de diferente ángulo una con respecto a la otra y es lo que puede provocar el efecto moiré, lo cual en su conjunto altera la imagen visual original de las diapositivas por la interferencia de patrones produciendo un aspecto similar al que se presenta en la figura 1.2.

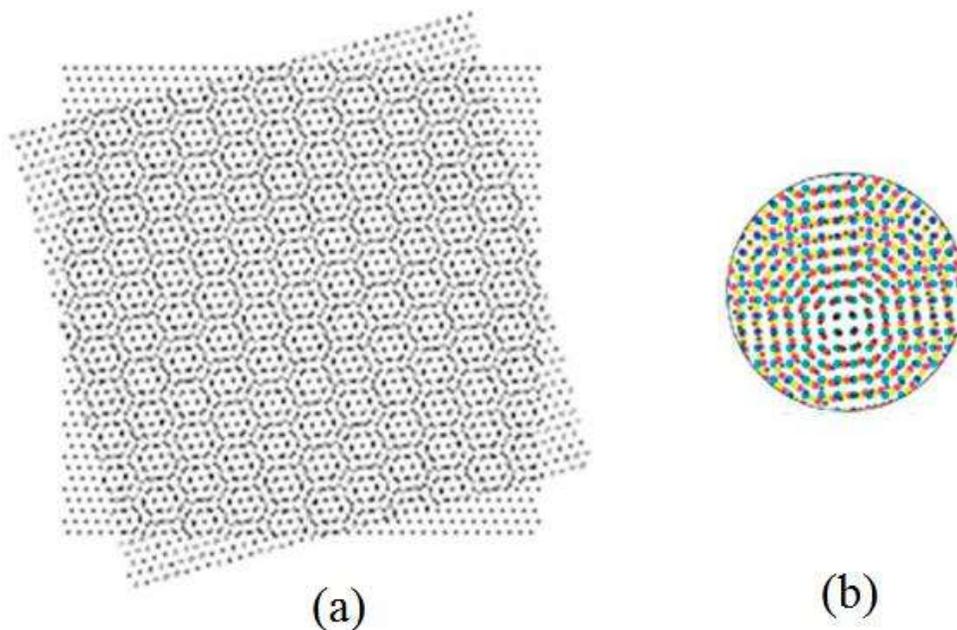


Figura 1. 1 (a) Efecto moiré formado con dos diapositivas con un mismo patrón de figura mediante superposición con diferente ángulo una con respecto a otra, (b) ampliación de una zona del patrón generado.

También se encuentra el moiré en el mundo del arte y del diseño. El diseñador Andrea Minini emplea este efecto visual como principal componente artístico para crear sus obras de animales, como se muestra en la figura 1.3.

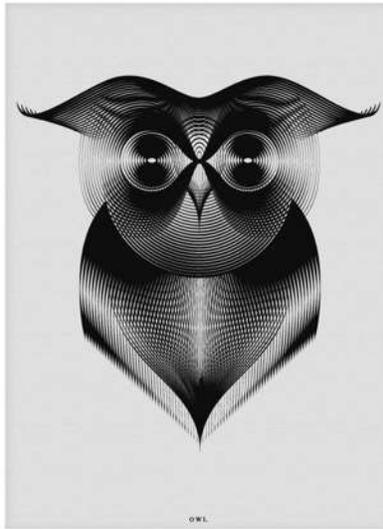


Figura 1. 2 Efecto moiré en el mundo del arte y del diseño (obra de Andrea Minini).

En el área de óptica es común encontrar el término conocido como interferencia que se presenta cuando dos o más ondas de luz se superponen en una misma región del espacio. El resultado del encuentro de las ondas es un patrón de luz cuya forma depende de varios factores como la diferencia de camino óptico que cada onda recorre hasta el punto de encuentro, el estado de polarización de los haces, la amplitud de la onda y el punto de observación respecto de la posición de las fuentes que generan las ondas que interfieren, entre otros. Después que las ondas se encuentran e interfieren, continúan su viaje sin alteraciones como si nunca se hubieran encontrado.

La interferencia es ampliamente tratada en la literatura por lo que sólo se mencionan algunos aspectos relevantes para diferenciar este concepto del que se emplea en esta tesis.

Si bien la idea arriba planteada es aplicable para todos los tipos de ondas electromagnéticas, se denomina interferencia óptica si las ondas que intervienen se encuentran en el rango visible del espectro electromagnético (ver figura 1.4).

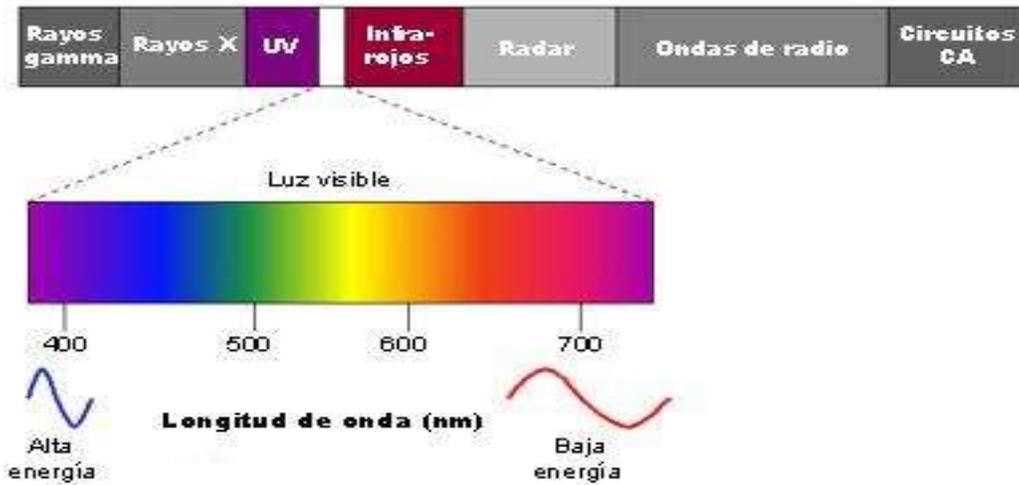


Figura 1. 3 Espectro electromagnético. La región visible del espectro abarca el rango entre 400nm y 700nm.

Sin embargo, no es el único tipo de interferencia que se puede generar, por ejemplo, se puede tener un patrón de interferencia usando rejillas de amplitud. Una rejilla de amplitud es una colección de elementos opacos y transparentes ordenados en forma repetitiva, de tal manera que cuando se iluminan con un haz de luz, el campo óptico transmitido que se forma contiene zonas iluminadas y zonas de sombras, similar al patrón que tiene la rejilla, a esto se le dice que es modulado espacialmente en forma periódica, es decir, existirán zonas del campo que estén iluminadas y por el contrario, habrá zonas en las que no habrá un campo de luz como se ve en la figura 1.5.

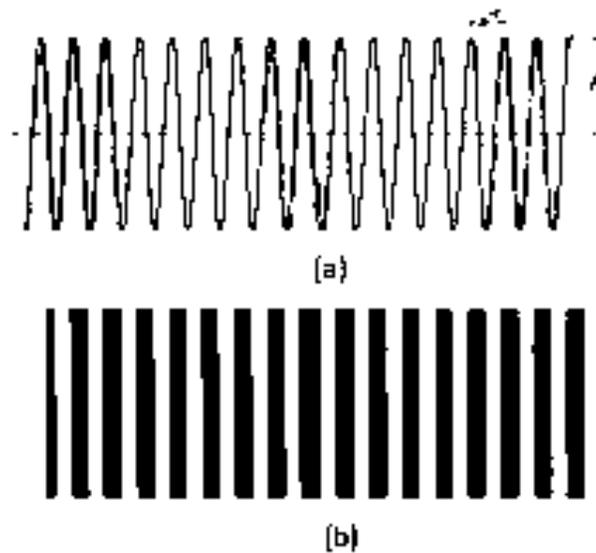


Figura 1. 4 (a) Onda cosenoidal de perfil y (b) patrón cosenoidal asociado.

Este tipo de interferencia es de tipo mecánica y es un concepto ampliamente conocido como efecto moiré [2]. Supóngase que se colocan dos rejillas una sobre la otra con una de ellas rotada un pequeño ángulo respecto de la otra. El patrón que se observa es conocido como patrón de moiré y es similar a los patrones de interferencia formados con ondas electromagnéticas figura 1.6.

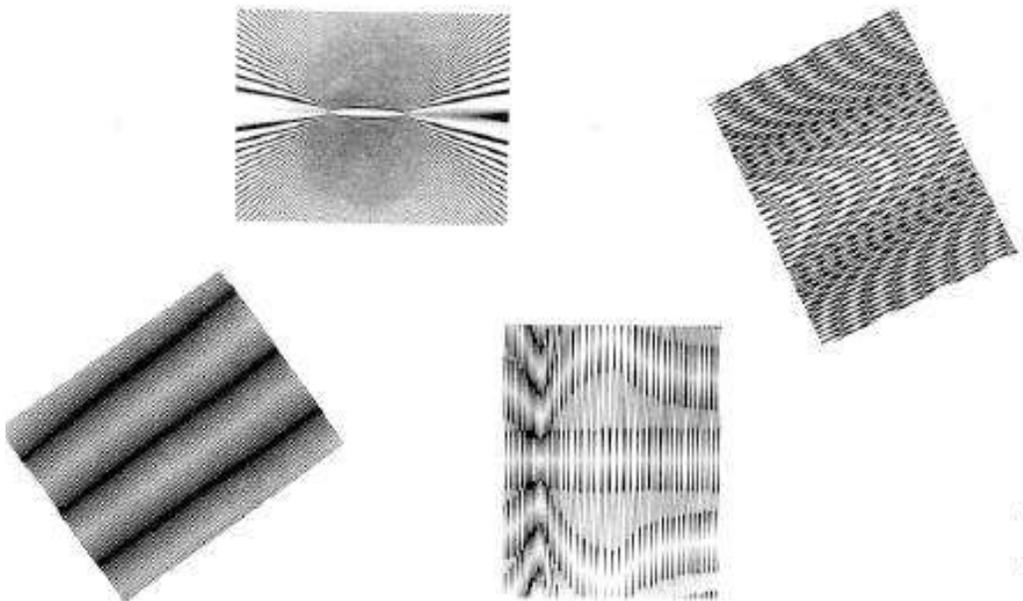


Figura 1. 5 Los diferentes patrones que se observan son conocidos como patrones de moiré y son similares a los patrones de interferencia formados con ondas electromagnéticas.

Sin duda, el efecto moiré tiene diferentes aplicaciones entre las que se pueden mencionar como técnica de medición de esfuerzos mecánicos, desplazamientos relativos de cuerpos, como efecto visual en sistemas de video, etc. Para entender adecuadamente el efecto moiré, ésta tesis tiene el siguiente objetivo general.

1.2. Objetivo general

Aplicar un método sencillo y simple que permita ilustrar la aplicación de métodos ópticos y técnicas de procesamiento de imágenes basado en el método de moiré y así mismo presentar el potencial de este método para analizar formas, dimensiones y/o cambios en objetos.

1.2.1. Objetivos específicos

- Comprender el fenómeno de interferencia óptica de dos ondas
- Conocer los diferentes tipos de rejillas
- Conocer los tipos más comunes de interferencia mecánica de dos rejillas
- Implementar el algoritmo para el procesamiento de imágenes
- Realizar el procesamiento de imágenes mediante efecto moiré
- Evaluar los patrones moiré registrados

1.3 Organización de la tesis

La organización de este trabajo es la siguiente. En el capítulo 1 una introducción al efecto moiré. En el capítulo 2 se muestran diferentes tipos rejillas utilizadas en el efecto moiré. En el capítulo 3 marco teórico del efecto moiré y técnicas basadas en el efecto moiré. En el capítulo 4 se presenta extracción de moiré en las diferentes rejillas analizadas en los capítulos anteriores. En el capítulo 5 se muestra moiré por medio de procesamiento digital con las diferentes rejillas, algunos de los ensayos realizados del método de moiré generado por computadora y conclusiones. Al final se incluyen 3 apéndices que amplían algunos conceptos matemáticos necesarios para comprender los temas de la tesis.

Capítulo 2. Diferentes tipos de rejillas en efecto moiré

Si bien se denomina interferencia óptica cuando las ondas que interfieren se encuentran en el rango visible del espectro electromagnético, éste no es el único tipo de interferencia que se puede generar, como es el caso del patrón de interferencia mecánica usando la superposición de rejillas.

En 1922 se utilizaron por primera vez las rejillas de difracción en los interferómetros [3]. En 1923 el físico italiano Vasco Ronchi descubrió la prueba que lleva su nombre cuando hizo pasar una rejilla consistente en bandas paralelas alternativamente transparentes y opacas cerca del centro de curvatura de un espejo. Este fenómeno inicia la aparición de uno de los métodos más simples y poderosos existentes para evaluar la calidad de sistemas ópticos y ha tenido tradicional importancia en la prueba de superficies ópticas [4].

En óptica una rejilla es una colección de elementos opacos y transparentes ordenados de forma repetitiva de tal manera que cuando se ilumina con un haz de luz, el patrón que se obtiene es similar al patrón de la rejilla, expresado de otra forma sería, el campo óptico transmitido es modulado espacialmente en forma periódica, similar al patrón que tiene la rejilla, por tanto, existirán zonas del campo que estén iluminadas y por el contrario habrá zonas en las que no habrá un campo de luz. Las primeras rejillas de difracción se fabricaban con hebras de alambre, la fabricación de rejillas fue evolucionando a fin de obtener mejores rejillas y que tuviesen mayor calidad y cantidad de líneas o ranuras finas [5], éstas se han elaborado sobre superficies de vidrio, metal o sobre negativos de películas fotográficas, todos estos elementos son valiosas herramientas y se utilizan en sistemas experimentales y en pruebas industriales.

Por simplicidad considérese una rejilla unidimensional y su análisis se restringe al plano xy , la rejilla se colocará a lo largo del eje x en $z=0$, figura 2.1.

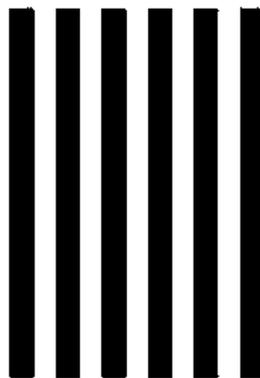


Figura 2. 1 Esquema de una rejilla binaria.

En esta tesis se tratara con efectos de moiré entre imágenes monocromáticas en blanco y negro, cada imagen puede representarse en el dominio de la imagen mediante una función de *reflectancia* que asigna a cualquier punto (x, y) de la imagen un valor entre 0 y 1 que representa su reflectancia de la luz: 0 para el negro, 1 para el blanco (es decir, plena

reflectancia de luz) y valores intermedios para tonos intermedios. En el caso de las rejillas para las transparencias, la función de reflectancia se sustituye por una función de *transmitancia*, que se define de manera similar: 0 para negro (es decir sin transmisión de luz a través de la transparencia), 1 para el blanco (transmitancia de luz completa) y valores intermedios para valores de transmitancia intermedios. La función de transmitancia se define como la razón del campo óptico saliente y el campo incidente. Con objeto de obtener el efecto moiré utilizaremos diferentes pantallas de rejillas.

A fin de explorar el fenómeno de moiré se pueden utilizar varios enfoques matemáticos: el enfoque geométrico, el algebraico puro, el enfoque basado en la teoría del análisis no estándar o el enfoque espectral, que se basa en la teoría de Fourier.

Se trabajara con estructuras periódicas que normalmente serán de naturaleza de valor real y simétricas (rejillas). Por simplicidad también se asume, que trataremos con imágenes (y superposición de imágenes), cuyos espectros son consecuentemente también de valores reales y simétricos.

2.1. Rejillas cosenoidales

Considérese primero el caso de la rejilla con un perfil de intensidad cosenoidal. Dado que las funciones de transmitancia siempre toman valores entre 0 y 1, la función de transmitancia cosenoidal tiene la forma de una onda cosenoidal repetida periódicamente (o rejilla con perfil de intensidad cosenoidal)

$$t(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_1 x). \quad (2.1)$$

De manera similar, la función de transmitancia de una rejilla cosenoidal con una frecuencia de f_2 que es girada un ángulo θ_2 está dada por:

$$t_2(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_2 [x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2]). \quad (2.2)$$

Ahora bien una rejilla cosenoidal que tiene una función periódica con una frecuencia de $f = 1/T$ ciclos por unidad, es decir su periodo es de $T = \frac{1}{f}$ unidades (en la dirección $x, \theta_1 = 0$) con frecuencia constante en su forma general está dada por [2]

$$t_1(x, y) = a + a \cos\left(\frac{2\pi}{T} x\right), \quad (2.3)$$

donde T es el periodo de la rejilla y $0 < a < \frac{1}{2}$, como se muestra en la figura 2.2.

Estas rejillas pueden ser moduladas en fase, esto significa que la rejilla dada por la ecuación (2.3) se puede expresar como

$$t_2(x, y) = a + a \cos 2 \pi \left(\frac{x}{T} + \psi(x) \right), \quad (2.4)$$

donde $\psi(x)$ es la función de modulación y en el caso de desplazamientos es igual al cociente del desplazamiento lateral, $u(x)$, de las líneas de rejilla y su periodo T, esto es:

$$\psi(x) = \frac{u(x)}{T}. \quad (2.5)$$

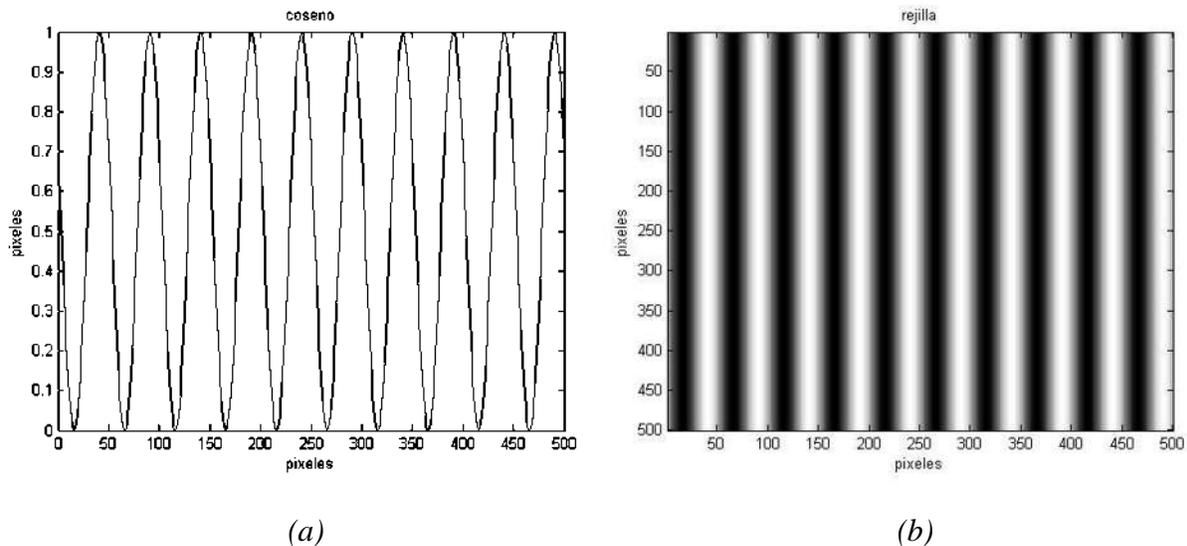


Figura 2. 2 Esquema de una rejilla cosenoidal (a) vista de perfil, (b) vista de frente de esta rejilla.

Cuando las dos rejillas dadas por las ecuaciones (2.3) y (2.4) se ponen en contacto, la *transmitancia* resultante $t(x, y)$ se puede interpretar como un patrón de moiré el cual se analiza en detalle en el siguiente capítulo. Debido a la periodicidad de la rejilla, se conoce, entonces de la teoría de Fourier que toda función periódica, se puede expresar como un desarrollo en serie de funciones armónicas seno o coseno en términos de una serie de Fourier o bien como una exponencial compleja [ver Apéndice A.1].

2.2. Rejillas binarias

Un tipo de rejilla usada comúnmente para generar el efecto moiré es una rejilla binaria tipo Ronchi, que se define como una rejilla con razón de apertura (R. A) de un medio porque la razón entre una franja oscura (o clara) y el periodo de la rejilla es de $1/2$. Esto se puede ver en la figura 2.3.

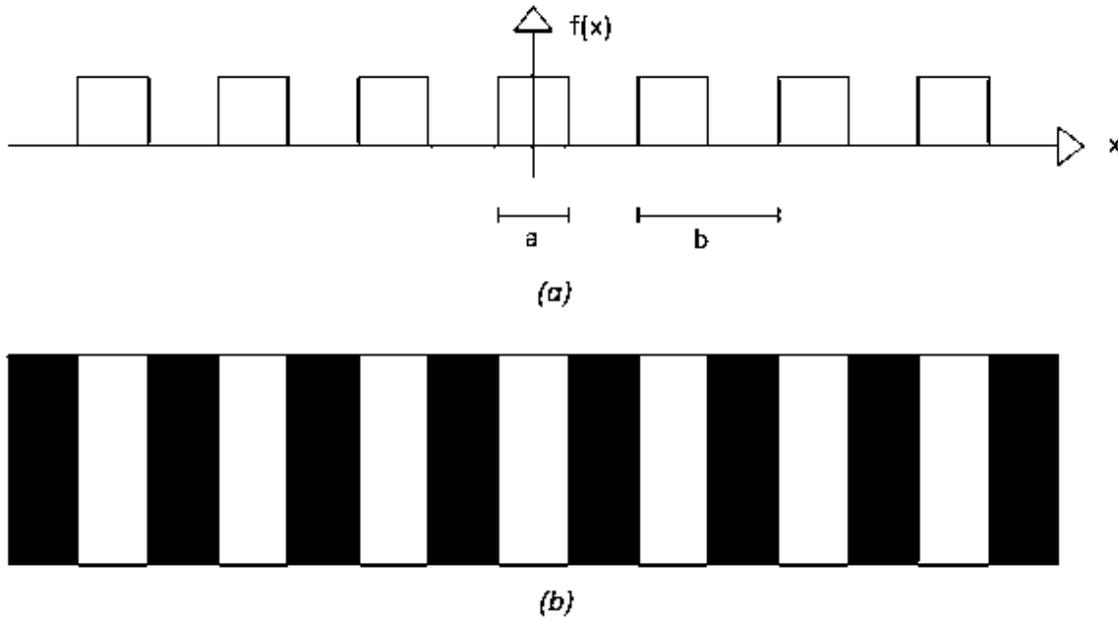


Figura 2.3. Esquema de una rejilla tipo Ronchi (a) vista de perfil (b) vista de frente. Obsérvese que la razón $a/b = 1/2$.

Observando la fig. 2.3(a) se puede notar que la celda básica de la rejilla tipo Ronchi, es una función rectángulo $r(x)$ que se define, si está centrada en el origen como se muestra en la figura 2.3, como una onda cuadrada periódica binaria unidimensional (con valores 0,1) es decir una secuencia de pulsos cuadrados. Denótese el periodo de esta función por b y el ancho (es decir la amplitud de sus pulsos blancos) por a , también se puede asumir que la onda cuadrada está simétricamente centrada alrededor del origen, de modo que tanto la imagen original como su espectro son reales y simétricos. Entonces la onda cuadrada $r(x)$ puede ser expresada matemáticamente por:

$$r(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right), \quad (2.6)$$

donde:

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (2.7)$$

esto significa que para una rejilla infinita múltiple angosta de ancho a paralela al eje y que se encuentra dentro de una mascarilla finita de ancho w ($a \ll w$), la función que describe la rejilla binaria está dada por

$$\begin{aligned} r(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x-b}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x-2b}{a}\right) + \dots + \text{rect}\left(\frac{x+b}{a}\right) \\ + \text{rect}\left(\frac{x+2b}{a}\right) + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Una representación alternativa de las rejillas binaria es por medio de una serie de funciones rectángulo moduladas por la dimensión finita de la mascarilla que es a su vez otra función rectángulo

$$r(x) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x-mb}{a}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{w}\right). \quad (2.9)$$

Otra forma práctica de representar la rejilla es mediante el uso de la función $\text{comb}(x)$, también conocida como peine de Dirac, de la siguiente forma

$$r(x) = \left[\text{comb}(x) * \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{w}\right), \quad (2.10)$$

donde el símbolo $*$ denota la operación de convolución de funciones y la función $\text{comb}(x)$ (peine de Dirac) se define $\text{comb}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mb)$.

Existen diferentes razones de apertura para las rejillas binarias, por ejemplo, una rejilla con razón de apertura $1/3$ se muestra en la figura 2.4.

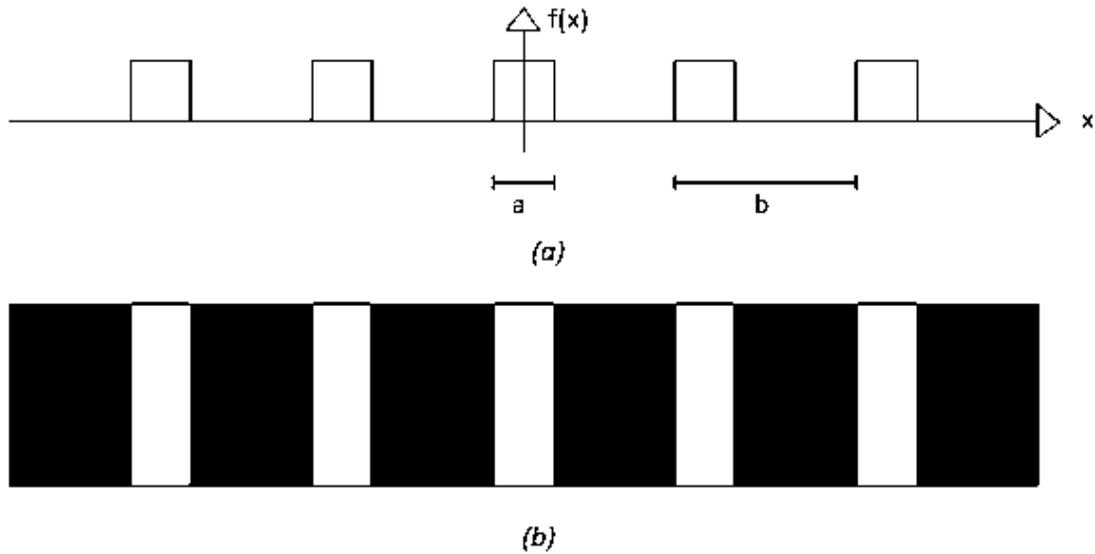


Figura 2.4. Esquemas de una rejilla tipo binaria (a) vista de perfil (b) vista de frente.
 Obsérvese que la razón $a/b = 1/3$.

Otro ejemplo de elementos periódicos que se emplean para observar el efecto moiré, además de las rejillas binarias y cosenoidales ya mostradas, son las placas zonales que se describen enseguida.

2.3. Rejillas circulares

En la técnica de moiré, la rejilla desplazada sirve como portadora de la información de desplazamiento y su frecuencia espacial se modula con el desplazamiento aplicado [6]. Considerando una rejilla circular (la rejilla radial puede ser tratada análogamente) la función de transmisión T_r está dada por:

$$T_r(r, \theta) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{p} r, \quad (2.11)$$

Donde p es el paso de rejilla de referencia, a_0 y a_1 son constantes, como se puede ver en la rejilla circular de la figura 2.5.

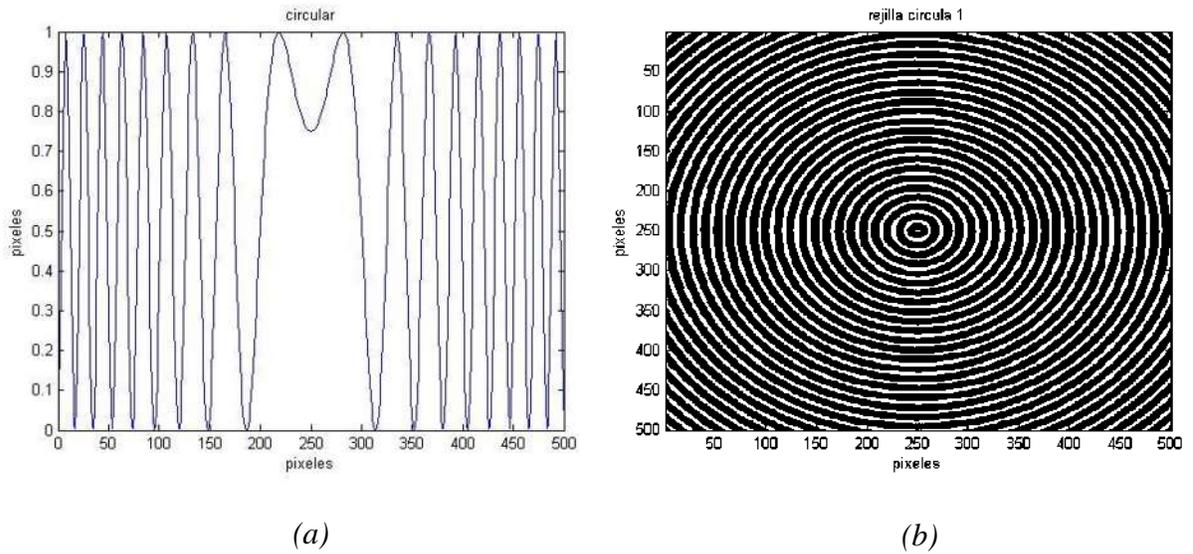


Figura 2.5. Esquema de una rejilla circular (a) vista de perfil (b) vista de frente.

2.4. Placa zonal

Una placa zonal es un elemento óptico difractivo, que consiste de un conjunto de anillos o surcos circulares concéntricos opacos y transparentes. Este sistema funciona como una lente, cada círculo o surco guarda relación con los círculos adyacentes en cuanto al diámetro para que puedan enfocar un haz de luz en un punto central, conocido como punto focal. Cada círculo es considerado como una pequeña lente que enfoca la luz, éste tiene un conjunto de focos a lo largo de su eje óptico, cada uno de los cuales contiene una cierta fracción de energía incidente.

Considérese una abertura dividida en regiones anulares como en la figura 2.6, es decir, una pantalla de rejillas estrechas de círculos concéntricos. Si la pantalla es iluminada por una onda plana monocromática de longitud de onda λ en el punto P enfrente de la pantalla las ondas que emergen de cada una de las ranuras están en fase, si la diferencia de camino óptico es un múltiplo entero n de la longitud de onda, entonces, la placa zonal se puede representar por la ecuación

$$G(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \cos \left[\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f} \right] > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad (2.12)$$

donde λ es la longitud de onda para la cual se diseña la lente, y f es la distancia focal de la lente [8]. La función $G(x, y)$ es la amplitud de la transmitancia de las placas zonales o lentes de Fresnel de distancia focal f , es decir, $G(x, y)$ es la relación que deben cumplir los anillos que componen la placa zonal o lentes de Fresnel. Al graficar la función dada por la ecuación anterior, ecuación (2.12) se obtiene un patrón de círculos concéntricos tal como se muestra en la siguiente figura:

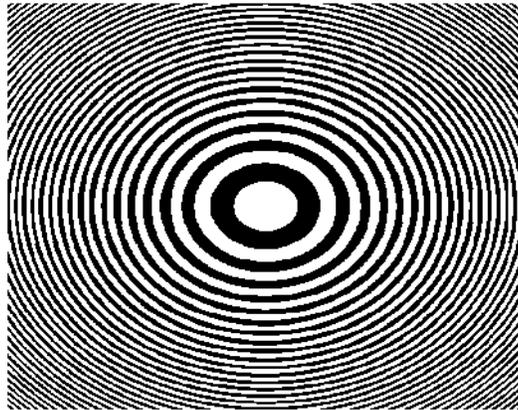


Figura 2.6 Esquema de una placa zonal o lente de Fresnel

El radio del anillo n -ésimo está dado por:

$$r_n = \sqrt{nr_1^2} \quad (2.13)$$

donde r_1 es el radio del anillo interior en la lente de Fresnel.

La longitud focal de esta lente está dada por la ecuación (2.14)

$$f = \frac{r_1^2}{\lambda}$$

donde nuevamente r_1 es el radio del anillo interior y λ es longitud de onda empleada para diseñar la lente. En el siguiente capítulo se mencionan los tipos más comunes de interferencia mecánica como por ejemplo la de dos rejillas cosenoidales.

Capítulo 3. Técnicas para la formación del efecto moiré

En este capítulo se analiza la teoría de superposición de rejillas para crear el efecto moiré que tiene su fundamento en la interferencia de patrones periódicos. Su principio es la interferencia obtenida cuando se superponen dos rejillas, una de ellas rotada un pequeño ángulo o desplazada respecto a la primera, esta modalidad de interferencia es mecánica y muestra un patrón de franjas con diferente frecuencia que la de las dos rejillas que se superponen. Al superponer las rejillas el patrón que aparecerá será un patrón de franjas de moiré, a partir de las cuales se conocen los movimientos relativos que han ocurrido en un sistema. La principal diferencia entre la interferencia óptica y la mecánica o efecto moiré radica en el tamaño del patrón generado que es aproximadamente 10^2 veces mayor que el otro. Basados en este efecto se han desarrollado varias técnicas las cuales se pueden dividir en función de su aplicación y se analizan más adelante.

3.1. Superposición de rejillas para la formación del efecto moiré

Como se menciona anteriormente se tratara con efectos moiré entre imágenes monocromáticas, en blanco y negro; donde cada imagen puede representarse en el dominio de la imagen mediante una función de reflectancia y en el caso de transparencias mediante una función de transmitancia. Una superposición de imágenes de rejillas se puede obtener mediante sobreimpresión, o colocando transparencias impresas una encima de la otra. Dado que la superposición del negro con cualquier otro tono seguirá siendo negro, esto sugiere un modelo *multiplicativo* para la superposición de imágenes monocromáticas. Por lo tanto, cuando se superponen imágenes monocromáticas la transmitancia (o reflectancia) de la imagen resultante viene dada por el producto de las funciones de transmitancia (o reflectancia) de las imágenes individuales:

$$t_1(x, y) \cdot t_2(x, y).$$

Para analizar el efecto moiré se considerarán, por simplicidad, dos rejillas cosenoidales las cuales se superpondrán entre sí. Estas dos rejillas están dadas por las ecuaciones (2.3) y (2.4), y se muestran en la figura 3.1(a), 3.1 (b) y 3.2, al superponerse, es decir al colocar una sobre la otra, en este caso, se tiene el producto de las transmitancias individuales y está dado por [2]:

$$t(x, y) = t_1 t_2 = a^2 \left\{ 1 + \cos \left(\frac{2\pi}{p} x \right) + \cos 2\pi \left(\frac{x}{p} + \psi(x) \right) + \frac{1}{2} \cos 2\pi \left(\frac{2x}{p} + \psi(x) \right) + \frac{1}{2} \cos 2\pi \psi(x) \right\}. \quad (3.1)$$

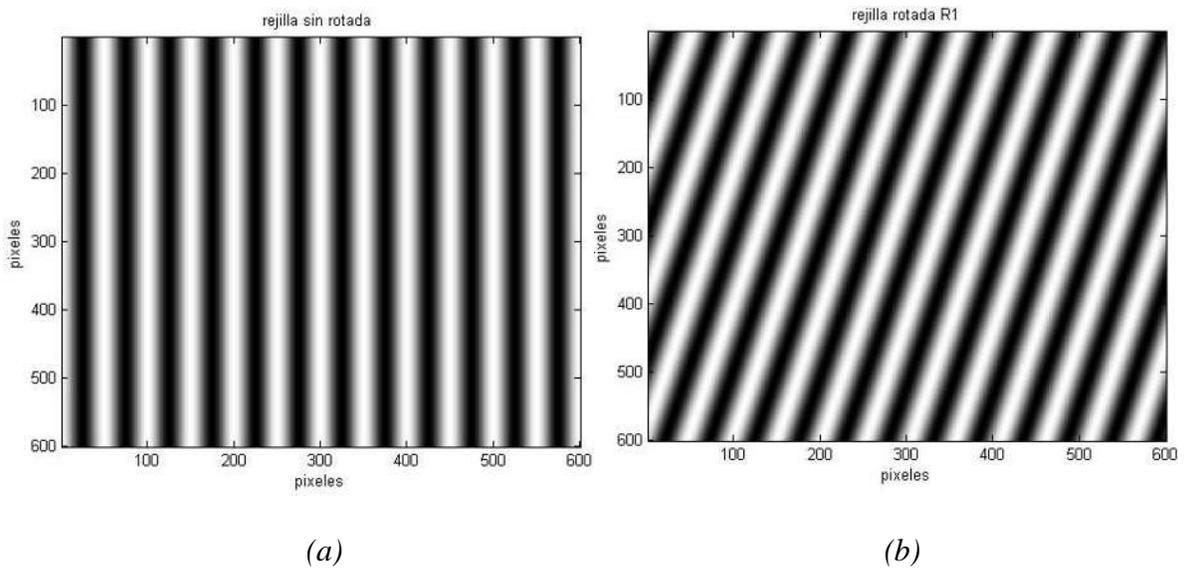


Figura 3. 1(a) Representación de la rejilla cosenoidal (b) rejilla cosenoidal rotada 15 grados respecto de la vertical.

Los primeros tres términos de la ecuación (3.1) representan las rejillas originales, el cuarto término es una rejilla que tiene el doble de la frecuencia de la segunda rejilla, mientras que el último término depende únicamente de la función de modulación. Este es el término que describe el patrón de moiré. El patrón que se genera se muestra en la figura 3.2.

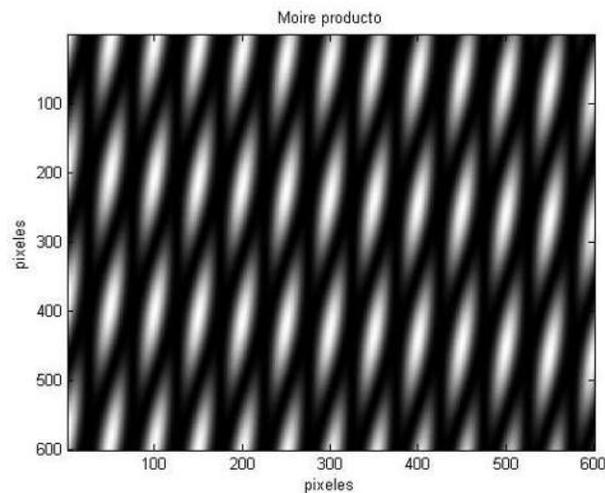


Figura 3. 2. Patrón de moiré formado por la superposición de las dos rejillas.

Sin embargo debe tenerse en cuenta que el modelo multiplicativo no es la única regla de superposición como es el caso cuando se superponen imágenes haciendo exposiciones múltiples en una película fotográfica positiva (teniendo en cuenta que no se debe exceder la parte lineal de la respuesta de la película), en estos casos se suman las intensidades en cada punto, lo que implica una regla *aditiva* de superposición, otro caso es cuando las imágenes se superponen haciendo exposiciones múltiples en un negativo de película fotográfica (suponiendo una respuesta lineal) en este caso se aplicaría una regla inversa aditiva, existen otras reglas de superposición que no se incluirán en este trabajo. Así pues, analicemos la combinación de rejillas mediante la adición de sus respectivas funciones de transmitancia realizando una doble exposición de las imágenes de cada una de las rejillas. La ecuación que describe esta doble exposición está dada en la ecuación (3.2)

$$t(x, y) = t_1 + t_2 = 2 a^2 \left\{ 1 + \cos \pi \psi(x) \cos 2 \pi \left(\frac{x}{p} + \frac{1}{2} \psi(x) \right) \right\}, \quad (3.2)$$

El término $\cos \pi \psi(x)$ describe las franjas de moiré y se considera como la amplitud de modulación de las rejillas originales.

Las ecuaciones (3.1) y (3.2) tienen un máximo y un mínimo dados por

$$\psi(x) = n, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.3)$$

cuando se tiene franjas brillantes y

$$\psi(x) = n + \frac{1}{2}, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.4)$$

cuando se tienen franjas oscuras.

Tanto las rejillas t_1 y t_2 pueden ser moduladas en fase por medio de las funciones de modulación ψ_1 y ψ_2 por lo que la modulación del patrón generado [2], $\psi(x)$, queda expresada como

$$\psi(x) = \psi_2(x) - \psi_1(x). \quad (3.5)$$

Tanto en la multiplicación como en la adición, la rejilla resultante queda modulada consiguiendo así un término en función únicamente de $\psi(x)$ que describe las franjas de moiré. El resultado es igual si se usan rejillas binarias u otro tipo de rejillas que para el caso de rejillas cosenoidales anteriormente expuesto. El resultado es, sin embargo, esencialmente el mismo, es decir, las rejillas forman un patrón moiré con periodo, d , dado por:

$$d = \frac{p}{2 \operatorname{sen} \alpha/2}. \quad (3.6)$$

Esta ecuación es útil cuando se desea calcular el valor del ángulo α usando la medición del periodo del patrón d .

La modulación de las rejillas anteriormente descrita se puede llevar a cabo si se une una rejilla cosenoidal a una superficie deformada como se muestra en la figura 3.3. Cuando se deforma la superficie, la rejilla seguirá la deformación y por lo tanto será dada por la ecuación (2.4). La deformación $u(x)$ se dará directamente de la ecuación (2.5):

$$u(x) = p \psi(x). \quad (3.7)$$

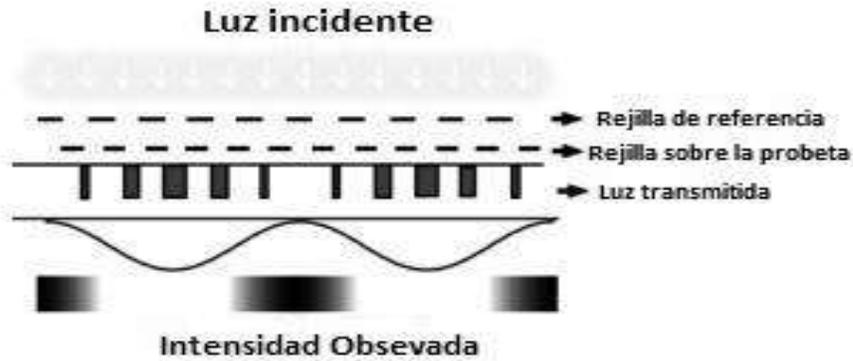


Figura 3. 3 Rejilla cosenoidal unida a una superficie deformada.

Para obtener el patrón de moiré, se puede aplicar uno de los siguientes métodos [10 – 12].

3.1.1. Moiré generado por el producto de rejillas

Para realizar el producto de las rejillas se deben realizar los pasos descritos a continuación.

- (1) Colóquese la rejilla de referencia con transmitancia t_1 en contacto con el modelo de rejilla con transmitancia t_2 . La distribución de la intensidad resultante se convierte entonces proporcional a la del producto $t_2 \cdot t_1$.
- (2) Proyétese la imagen de la rejilla t_2 sobre la rejilla de referencia t_1 . Debe t_1 adecuarse al tamaño de acuerdo a la ampliación de la imagen. La intensidad se vuelve proporcional a $t_1 \cdot t_2$.
- (3) Obténgase por separado el negativo de las fotografías de las rejillas de referencia t_1 (deformada por la superficie bajo análisis) y de la rejilla t_2 . A continuación las dos películas se ponen en contacto y el resultado es $t_1 \cdot t_2$.

3.1.2. Moiré generado por la suma de rejillas

Para la suma de rejillas se deben seguir los pasos descritos a continuación.

- (4) Proyéctese la imagen de la rejilla de referencia t_1 sobre la misma imagen de la rejilla t_2 , es decir, haciendo una doble proyección en la misma imagen. La intensidad resultante se convierte entonces proporcional a la suma $t_1 + t_2$.
- (5) Similarmente al punto (3), excepto que t_1 y t_2 son proyectados en la misma película fotográfica por doble exposición. El resultado es $t_1 + t_2$.

En la aplicación de los métodos (1), (2) y (3), la distribución de intensidad resultante es proporcional a $t_1 \cdot t_2$ y por lo tanto está dada por la ecuación (3.1) que se puede escribir

$$I(x) = I_0 + I_1 \cos 2\pi \psi(x) + \text{términos de frecuencia más altas.} \quad (3.8)$$

Mediante el uso de los métodos (4) y (5), la distribución de intensidad se hace igual a $t_1 + t_2$ y por lo tanto dada por la ecuación (3.2), que se puede escribir

$$I(x) = I_0 + I_1 \cos \pi \psi(x) \cos \frac{2\pi x}{p} + \text{otros términos.} \quad (3.9)$$

Como se observa en la ecuación (3.8) el primer término I_0 es una constante, el segundo término de esta ecuación contiene la función de modulación. En la ecuación (3.9) el segundo término modula la amplitud de la rejilla. Aplicando una frecuencia baja en las rejillas los métodos de multiplicación y suma pueden ser suficientes para la observación directa de la función de modulación, es decir, al patrón moiré.

Esto significa esencialmente que la relación I_1/I_0 en las ecuaciones (3.8) y (3.9) es muy pequeña. Se tiene, pues, la posibilidad de aplicar filtrado óptico. Para los métodos (3) y (5), esto se puede lograr mediante la colocación de un negativo en un sistema de filtrado óptico estándar. Las técnicas de filtrado óptico se pueden incorporar directamente por medio de un arreglo en la configuración de los métodos (1) y (4) mediante el uso de iluminación de luz coherente y la observación de los patrones de moiré en los primeros órdenes de franjas difractadas. Un método particularmente interesante (perteneciente al método (2)) ideado por D. Post [9] se muestra en la figura 3.4. En esta técnica, la rejilla de referencia está formada por una interferencia entre una onda plana y su imagen especular (en un espejo). El ángulo de incidencia y el periodo de la rejilla se ajusta de modo que la dirección de primer orden de la superficie difractada coincide con la superficie del objeto normal. Además, también experimentó con modelo de rejillas de frecuencias de hasta 600 líneas/mm las cuales han sido documentadas para la aplicación de este método. Para obtener la cantidad suficiente de luz de primer orden de difracción se tiene que usar rejillas de fase como el modelo que se ilustra en la figura 3.1.

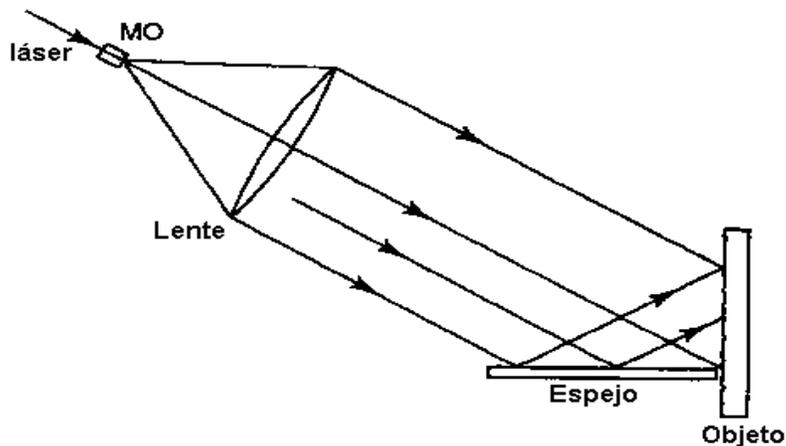


Figura 3.4. Diseño experimental para generar patrones de moiré ideado por D. Post. MO: Objetivo de microscopio.

Mediante el uso de los métodos (2), (3) y (5) la frecuencia de la rejilla (es decir, la sensibilidad de medición) está limitado por el poder de resolución de la lente de formación de imágenes.

Para superficies curvas, el modelo de rejilla se modulará en función a la curva, lo que puede conducir a una formación falsa sobre la deformación cuando se utilizan métodos (1), (2) y (4). Este no es el caso para los métodos (3) y (5), ya que esta modulación se incorpora en la rejilla (la primera exposición). La curvatura de la superficie también puede ser un problema cuando se utilizan los métodos (2), (3) y (5) debido a lo limitado de la profundidad de foco de la lente para la formación de imágenes. Pese a los inconvenientes antes mencionados, los métodos (1), (2) y (4) tienen la ventaja de medir la deformación en tiempo real.

Mediante el uso de uno de estos métodos, se puede obtener una distribución de la intensidad ya sea directamente o por medio de filtrado óptico, obteniendo así una distribución de la intensidad de la misma forma como se da en los dos primeros términos en la ecuación (3.8) o (3.9). Esta distribución tiene un máximo siempre que

$$\psi(x) = n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots,$$

y un mínimo siempre que

$$\psi(x) = n + \frac{1}{2}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots.$$

De acuerdo con la ecuación (3.7) esto corresponde a un desplazamiento igual a

$$u(x) = np \quad \text{para maxima,} \quad (3.10a)$$

$$u(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)p \quad \text{para minima.} \quad (3.10b)$$

3.2. Sombra de moiré

A continuación se describe un efecto donde se forman franjas de moiré entre una rejilla y su propia sombra y que es llamado efecto sombra de moiré. El principio del método se muestra en la Figura 3.5.

La rejilla se coloca sobre la superficie curvada como se muestra en la siguiente figura, se ilumina con un ángulo de incidencia θ_1 (medida desde la normal de la rejilla) y visto bajo un ángulo θ_2 . En la figura 3.5 se observa que un punto P_0 sobre la rejilla se proyecta a un punto P_1 sobre la superficie y este se refleja en el punto P_2 de la rejilla. Esto es equivalente a un desplazamiento de la rejilla con respecto a su sombra igual a

$$u = u_1 + u_2 = h(x, y)(\tan \theta_1 + \tan \theta_2), \quad (3.11)$$

donde $h(x, y)$ es la diferencia de altura entre la rejilla y el punto P_1 de la superficie.

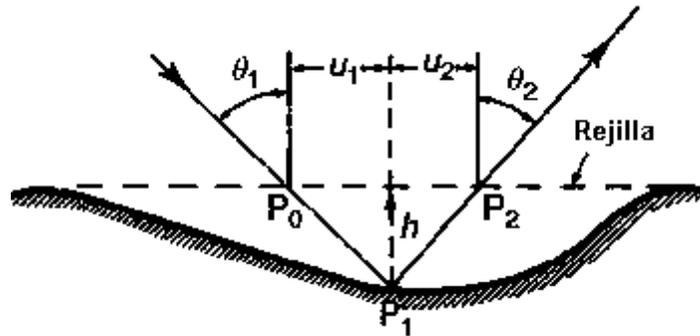


Figura 3. 5. Sombra de moiré.

De acuerdo con la ecuación (2.5), esto corresponde a una función de modulación igual a

$$\psi(x) = \frac{u}{p} = \frac{h(x,y)}{p} (\tan \theta_1 + \tan \theta_2). \quad (3.12)$$

Se obtiene una franja brillante cuando $\psi(x) = n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, lo que da

$$h(x, y) = \frac{n^P}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}, \quad (3.13 a)$$

y para franjas oscuras cuando $\psi(x) = n + 1/2$, para $n = 0, 1, 2, \dots$

$$h(x, y) = \frac{(n + \frac{1}{2})^P}{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}. \quad (3.13 b)$$

En el caso de la iluminación de onda plana y de la observación desde el infinito, θ_1 y θ_2 permanecerán constantes a través de la superficie y las ecuaciones (3.13) describe un mapa de contorno con un intervalo de contorno fijo constante. Con la fuente puntual y el punto de visión a distancias finitas, θ_1 y θ_2 variarán a través de la superficie que resulta en un intervalo de contorno que depende de las coordenadas de superficie. Esto es por supuesto una condición no deseable. Sin embargo, si la fuente puntual y el punto de visión se colocan a la misma altura z_p encima de la superficie y si las variaciones de altura de la superficie son insignificantes en comparación con z_p , entonces, $\tan \theta_1 + \tan \theta_2$ serán constantes a través de la superficie resultante en un intervalo de contorno constante. Esta es una buena solución especialmente para las grandes superficies que son imposibles de cubrir con una onda plana debido a la limitada apertura de la lente de colimación.

Si las variaciones de altura de la superficie son grandes en comparación con el periodo de la rejilla, se producirán los efectos de difracción, que produce la sombra de la rejilla en la superficie. Por lo tanto, la sombra moiré es el método más adecuado para las mediciones profundas sobre grandes superficies. Es relativamente fácil de aplicar y el equipo necesario es de muy bajo costo. Es una valiosa herramienta en la mecánica y en sistemas experimentales para medir y controlar formas.

Capítulo 4. Extracción de moiré en las diferentes rejillas

Como se ha mencionado, las franjas de moiré son mapas de contorno de las componentes de desplazamiento en la dirección perpendicular a las líneas de la rejilla y son básicamente generadas por la superposición de dos rejillas periódicas: una rejilla de referencia y una rejilla rotada (desplazada y/o inclinada, o bien de diferente periodo).

Las rejillas utilizadas son las rejillas de difracción que generalmente se elaboran sobre superficies de vidrio, metal o sobre negativos de películas fotográficas, todos estos elementos son valiosas herramientas y se utilizan en sistemas experimentales y en pruebas industriales, sin embargo actualmente varios investigadores han estado experimentando con rejillas generadas por computadora y utilizando algún lenguaje de programación con el propósito de generar las rejillas y simular el moiré por medios digitales, así mismo están trabajando en el desarrollo de nuevas aplicaciones del método digital de moiré y la adopción de técnicas que permitan al igual que en el método convencional de moiré la cuantificación de patrones.

En concordancia a este método, las operaciones lógicas de computadora proveen las rejillas como una alternativa para simular la generación del fenómeno aliasing (la superposición de réplicas periódicas sucesivas es lo que se conoce como aliasing y puede dar origen a patrones de moiré) en un patrón tradicional de moiré. Debido a que las dos rejillas que se utilizan en el método digital de moiré están formadas por números binarios, la rejilla de referencia generada por la computadora puede desplazarse con precisión sin necesidad de utilizar mecánicamente algún desplazador de fase (como es el caso en el moiré tradicional ya que es un método mecánico). Para varios tipos de problemas de mecánica de sólidos, actualmente se experimenta con una nueva técnica digital con rejillas cosenoidales para medir el desplazamiento en el plano y campos de deformación en materiales que presentan deformaciones.

Como se mencionó anteriormente, a fin de explorar el fenómeno de moiré se pueden utilizar varios enfoques matemáticos. Uno de éstos se basa en un estudio geométrico de las propiedades de las capas superpuestas, sus periodos y sus ángulos, al considerar las relaciones entre triángulos, paralelogramos u otras geometrías generadas entre las capas superpuestas, este método conduce a fórmulas que pueden predecir, bajo ciertas limitaciones, las propiedades geométricas de los patrones de moiré. Otro enfoque está basado en un método algebraico puro basado en las ecuaciones de cada familia de líneas superpuestas y que también produce las mismas fórmulas básicas que el estudio geométrico. Sin embargo a la fecha, el enfoque más adecuado para investigar fenómenos en la superposición de estructuras periódicas es el enfoque espectral, que se basa en la teoría de Fourier. A diferencia de los métodos anteriores, este enfoque permite analizar no sólo las propiedades de las capas originales y su superposición, sino también sus representaciones espectrales, y por tanto ofrece una visión más amplia del problema y proporciona herramientas indispensables para un mejor análisis.

El enfoque espectral se basa en la dualidad existente entre funciones o imágenes, en el dominio de la imagen en el espacio y sus espectros en el dominio de la frecuencia espacial, a través de la transformada de Fourier. Una propiedad clave de la transformada de Fourier es su capacidad para permitir un análisis desde la perspectiva tanto del espacio como de los dominios de frecuencia. Ya que permite analizar las propiedades no solo en la imagen original sino también en su representación espectral.

En éste caso se presentan estructuras bidimensionales (2D) en un plano (x, y) continuo, denominadas *imágenes*, y sus espectros 2D se presentan en un plano (u, v) continuo que se obtiene mediante la transformada de Fourier 2D. En éste capítulo el estudio se restringe a algunos tipos de imágenes en 2D, como son las rejillas de líneas y las circulares, que son susceptibles de generar efectos de moiré cuando se superponen y los alcances de sus propiedades tanto en la imagen como en los dominios espectrales.

Es importante hacer notar que a menudo, las rejillas que se emplean para el efecto moiré son transparencias cuya función de transmitancia está dada por una función de onda cuadrada como en el caso de las rejillas tipo binaria, sin embargo, todos los tipos de rejillas periódicas se pueden describir como una versión de rejillas cosenoidales, y además, los conceptos que se emplean para este tipo de rejillas son aplicables para cualquier otro tipo de rejilla.

4.1. Extracción de moiré de rejillas cosenoidales

En el capítulo 3 se mostró la superposición de dos rejillas cosenoidales, una sin rotar y la otra rotada con un ángulo y/o desplazamiento, que generan el efecto moiré. Esta superposición, matemáticamente se representa por el producto de sus funciones de transmitancia.

En este trabajo se experimentará con rejillas *periódicas* como las lineales rectangulares, las circulares y zonales. Esto implica que el espectro de la imagen en el sistema (u, v) en un plano, consiste en impulsos, los cuales representan las frecuencias en la descomposición de la serie periódica de Fourier. Un fuerte impulso en el espectro indica una componente periódica pronunciada en la imagen original, en la frecuencia y dirección de ese impulso.

En la figura 4.1 se muestran dos rejillas cosenoidales generadas digitalmente y en la figura 4.2 se muestran sus respectivas transformada de Fourier 2D [ver Apéndice A.1] de cada una de estas rejillas y posteriormente en la figura 4.3 una representación geométrica mediante diagramas vectoriales del espectro en la cual mediante un esquema indica la localización geométrica de los vectores de frecuencia de la transformada de Fourier de cada una de las rejillas.

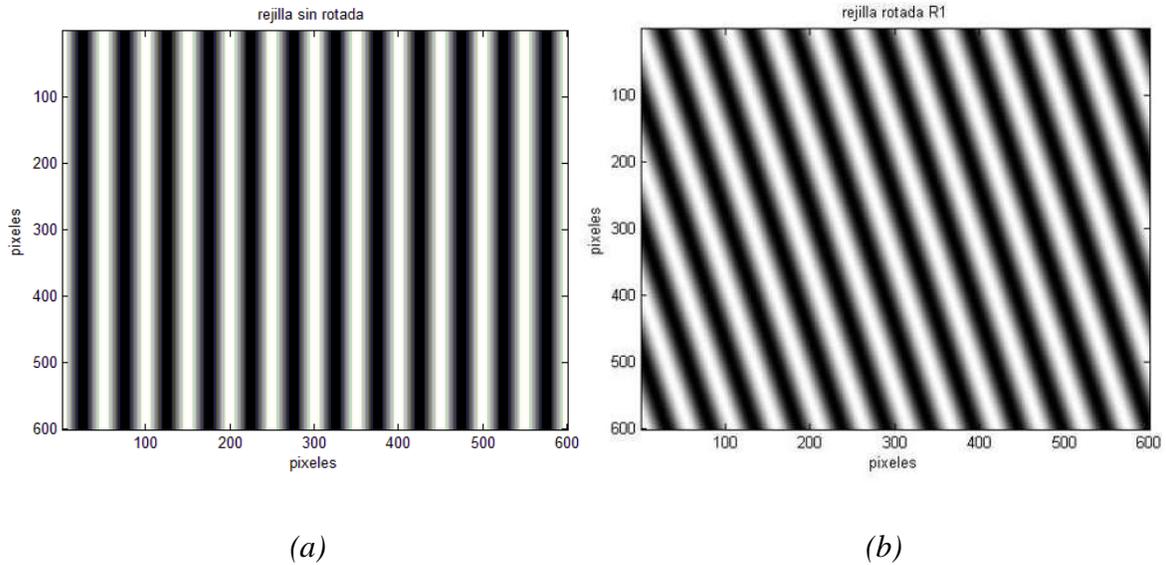


Figura 4.1 Rejillas generadas por Matlab (a) rejilla cosenoidal; (b) rejilla cosenoidal rotada a -15 grados respecto de la vertical.

La figura 4.2(a) muestra el espectro de Fourier o transformada de Fourier obtenida por Matlab de la rejilla sin rotar mostrada en la figura 4.1(a), la cual presenta un espectro de Fourier único que se puede interpretar como su huella digital. En la figura 4.2 (b) se muestra la transformada de Fourier de la rejilla cosenoidal que forma ángulo de -15 grados con respecto a la vertical, la cual es diferente a la transformada de Fourier de la rejilla sin rotar.

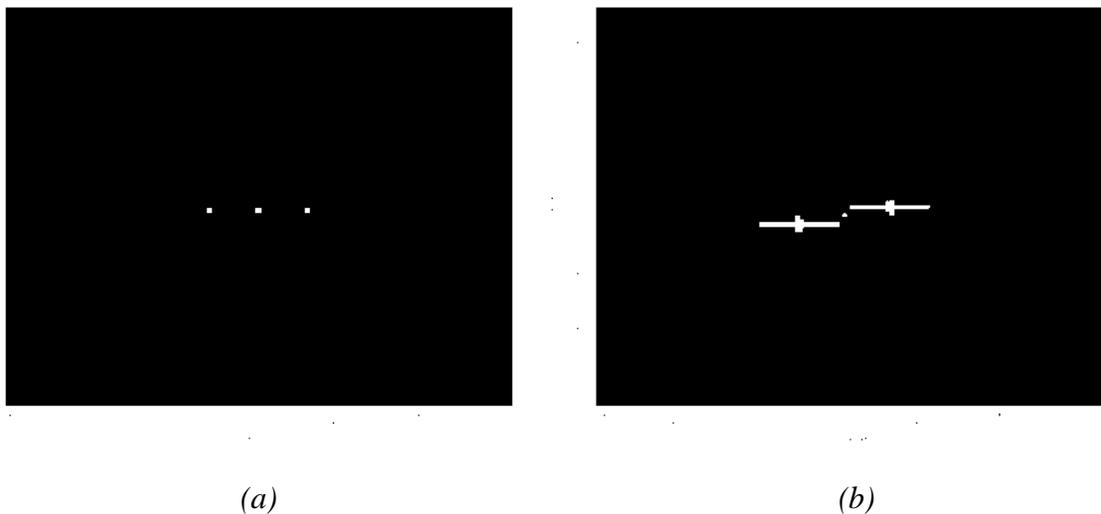


Figura 4.2. (a) Transformada de Fourier amplificada de la rejilla cosenoidal y (b) Transformada de Fourier amplificada de la rejilla cosenoidal rotada.

En la figura 4.3 se muestran los diagramas vectoriales de los espectros que se presentan en la figura 4.2 (a) y (b) con el objetivo de proporcionar una explicación gráfica más clara.

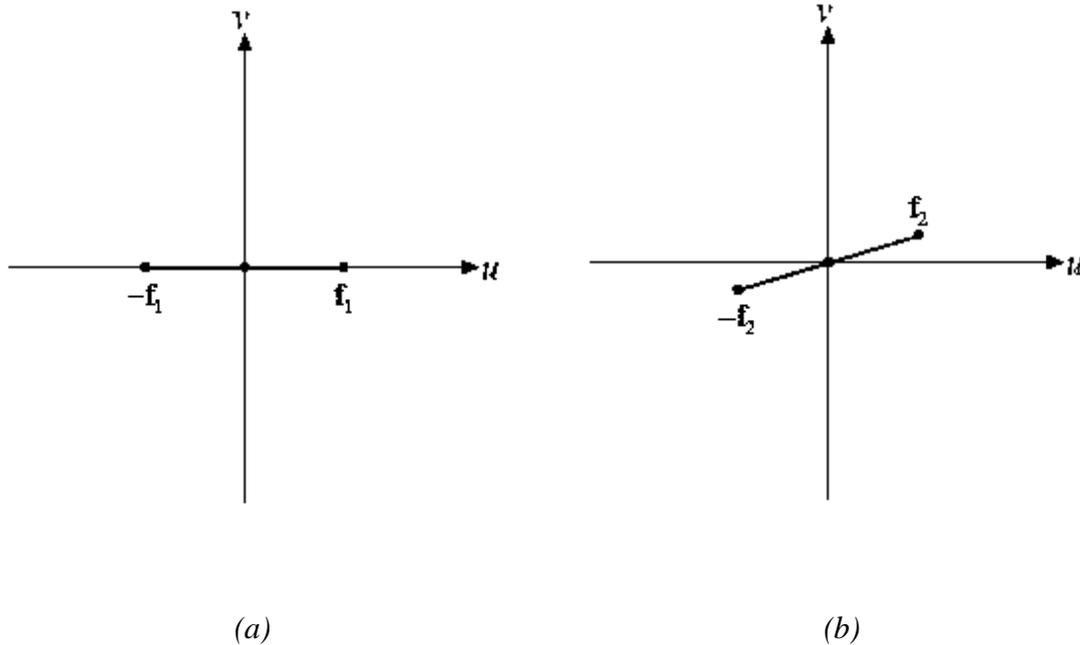


Figura 4.3 Representación gráfica de las frecuencias obtenidas por transformada de Fourier de la rejilla cosenoidal (a) centrada, donde $-f_1$ y f_1 representan en forma de vectores las frecuencias espaciales de la rejilla y (b) rotada -15° . En este esquema del espectro, los puntos negros indican la localización geométrica de los vectores de frecuencias $-f_2$ y f_2 . En ambos casos los vectores son perpendiculares a las líneas de las rejillas.

El impulso que se localiza en el origen es una constante y se le toma como una componente (de corriente directa DC) carente de información de frecuencia y fase, por lo tanto no se le tienen en cuenta y en el espectro representa la frecuencia cero, que corresponde en el dominio de la imagen a la componente constante de la imagen, y su amplitud corresponde a la intensidad de este componente constante de la imagen, esto significa que la amplitud del impulso representa el nivel de intensidad promedio de la imagen (que en este caso es un número entre 0 y 1, ya que nuestras imágenes solo pueden tomar valores entre 0 y 1).

En la siguiente figura (4.4) se muestra un esquema para ilustrar la vista lateral del mismo espectro, mostrando las amplitudes de impulso.

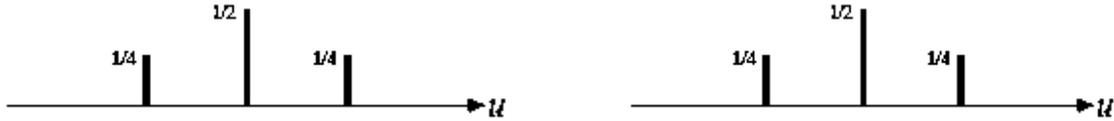


Figura 4.4 Esquema del mismo espectro, mostrando las amplitudes de impulso de cada uno de los espectros.

Las imágenes de rejillas con las que se trabajara en este caso normalmente serán de naturaleza simétrica y por simplicidad también se asume a menos que se indique otra cosa, que las rejillas estarán centradas simétricamente alrededor del origen. Como resultado, se trataran con imágenes (y superposiciones de imágenes) que son de *valores reales* y *simétricas* y cuyos espectros son consecuentemente también de valores reales y simétricos [10]. Esto significa que cada impulso en el espectro (excepto el impulso de CC (corriente continua) en el origen) siempre va acompañado de un impulso par de amplitud idéntica, que está simétricamente situado en el otro lado del origen como en la figura 4.2 (sus vectores de frecuencia son f y $-f$).

La transformada de Fourier 2D de cada una de estas funciones de reflectancia consta de exactamente tres impulsos. De hecho, es la suma de la transformada de Fourier del término cosenoidal, que consiste de dos impulsos simétricos de amplitud $1/4$ situados a una distancia de $f_i = 1/T_i$ del origen en la dirección θ_i más la transformada de Fourier de la constante adicional, que es un impulso de amplitud $1/2$ en el origen (impulso DC). Obsérvese, sin embargo que si la imagen original no es simétrica respecto al origen (pero sigue siendo real), las amplitudes de los impulsos pares en f y $-f$ son conjugados complejos; en este caso la amplitud de cada impulso en el espectro (excepto el impulso CC) puede tener también un componente imaginario distinto de cero. Sin embargo, es importante comprender que incluso en estos casos, cada frecuencia f de la imagen sigue representada en el espectro por un par de impulsos, cuyas posiciones geométricas son f y $-f$, ésta propiedad de simetría conjugada en el espectro sólo se rompe en el caso de imágenes con valor complejo. Por ejemplo, un solo impulso en el punto (u, v) del espectro corresponde a la función de valor complejo $p(x, y) = e^{-2ni(ux+vy)}$ en el dominio de la imagen.

Como se mencionó anteriormente la superposición de estas rejillas produce el efecto moiré y está dado por la ecuación 4.1

$$t(x, y) = t_1 t_2 = a^2 \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right) + \cos 2\pi\left(\frac{x}{p} + \psi(x)\right) + \frac{1}{2} \cos 2\pi\left(\frac{2x}{p} + \psi(x)\right) + \frac{1}{2} \cos 2\pi\psi(x) \right\}. \quad (4.1)$$

Los primeros tres términos de la ecuación (4.1) representan las rejillas originales, el cuarto término es una rejilla que tiene el doble de la frecuencia de la segunda rejilla, mientras que el último término depende únicamente de la función de modulación. Este es el término que describe el patrón de moiré. El patrón que se genera se mostró en la figura 4.3.

La ecuación (4.1) tienen un máximo y un mínimo dados por

$$\psi(x) = n, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.2)$$

cuando se tiene franjas brillantes y

$$\psi(x) = n + \frac{1}{2}, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.3)$$

cuando se tienen franjas oscuras.

Ahora bien, según el teorema de convolución [Apéndice A.1], la transformada de Fourier de un producto de funciones es la convolución de las transformadas de Fourier de las funciones individuales. Por tanto, si se denota la transformada de Fourier por $F(u, v)$ el espectro de la superposición está dado por

$$F(u, v) = F_1(u, v) * F_2(u, v), \quad (4.4)$$

donde el símbolo $*$ denota la convolución en 2D.

En la *figura 4.5* se muestra la superposición de las rejillas (fig. 4.1) y la transformada de Fourier de la superposición de las rejillas, es decir, muestra la transformada de Fourier de la convolución de ambas rejillas la cual es diferente a las transformadas de Fourier de las dos rejillas individuales.

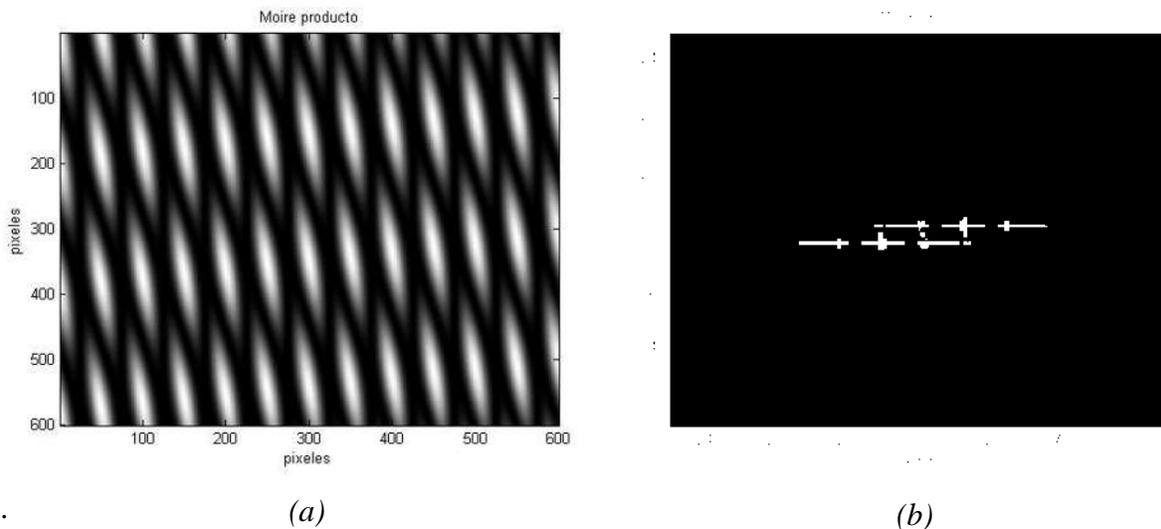


Figura 4.5 (a) superposición de las dos rejillas anteriores (4.1 (a) y 4.1 (b)) que fueron generadas digitalmente y que forman un patrón de moiré, (b) transformada de Fourier amplificada de la superposición de rejillas (4.1 (a) y 4.1 (b)).

El espectro resultante de la convolución contiene todos los pares de impulsos de los espectros originales (sólo sus amplitudes han sido modificadas, pero no sus localizaciones geométricas). Sin embargo, además de los impulsos originales, dos nuevos pares de impulsos que no existían en ninguno de los espectros originales han aparecido en la convolución (véase el esquema geométrico de este espectro en la Figura 4.6). Las posiciones geométricas de estos nuevos pares de impulsos están determinadas por la suma vectorial y la diferencia vectorial de los vectores de frecuencia de los impulsos originales, a saber: $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, $-\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ y $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$.

Esto es, la convolución contiene los vectores de frecuencia de cada una de las imágenes originales así como los vectores de frecuencia resultantes obtenidos, esto significa que los componentes cartesianos (u, v) de la suma vectorial puede escribirse como:

$$\begin{aligned} u &= f_1 \cos \theta_1 + f_2 \cos \theta_2, \\ v &= f_1 \sen \theta_1 + f_2 \sen \theta_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Y la frecuencia, el período y el ángulo del impulso en cuestión están dados por la longitud y la dirección del vector resultante f [11]:

$$f = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad T = 1/f, \quad \varphi = \arctan(v/u). \quad (4.6)$$

La localización geométrica y la amplitud de los impulsos en el espectro resultante de la superposición de rejillas se puede determinar gráficamente si se coloca una reproducción centrada del nuevo espectro de tres impulsos de la rejilla girada encima de los impulsos de la convolución de la rejilla de referencia generando así dos nuevos pares de impulsos adicionales en el espectro combinado. Esto es, gráficamente la convolución de la superposición de las dos rejillas anteriores equivale a colocar los 3 puntos de una de las transformadas en la posición de cada uno de los puntos de la otra transformada. La amplitud de cada uno de los impulsos del espectro obtenidos es el producto de la amplitud del impulso del espectro de la rejilla de referencia y la del espectro de la rejilla rotada sobrepuesta (figura 4.3). Si alguno de los impulsos recién generados cae dentro del círculo de visibilidad, se puede ver un nuevo componente periódico (o efecto moiré) en la imagen.

Dado que en nuestro caso cada uno de los espectros de cada una de las rejillas anteriores (la rejilla sin rotar y la rotada consta de tres impulsos (figura 4.4)), su convolución consta de 9 impulsos (figura 4.5 (b) y 4.6). Obsérvese que la convolución es cero en todo el plano (u, v) excepto en los puntos en que los impulsos quedan en el origen. Esto significa que la localización geométrica de los impulsos en la convolución se puede encontrar simplemente colocando encima de cada impulso de la rejilla 1 una copia centrada de la rejilla 2 girada (o viceversa, ya que la convolución es conmutativa).

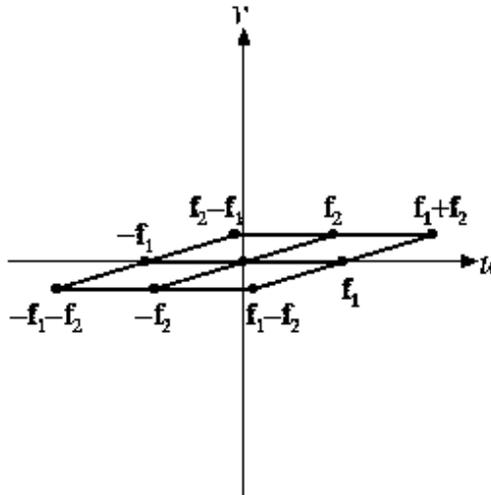


Figura 4.6 Diagrama vectorial de la convolución de las transformadas (4.2 (a) y (b)). Obsérvense los dos nuevos pares de impulsos que han aparecido en la convolución del espectro. Un componente periódico aportado por el nuevo par de impulsos que se encuentra en la frecuencia de la diferencia $f_1 - f_2$ y $f_2 - f_1$ y el otro nuevo componente periódico aportado por el nuevo par de impulsos en las frecuencias de suma $f_1 + f_2$ y $-f_1 - f_2$.

La amplitud de cada impulso de la convolución es producto de las amplitudes de los dos impulsos espectrales: el impulso en el primer espectro de referencia sobre el cual se centra el espectro girado y el impulso del espectro girado (rotado o desplazado) que determina la localización del impulso resultante. Si un pulso recién generado cae encima de un impulso ya existente, se reagrupan sus amplitudes. Las amplitudes recibidas en nuestro caso son $1/4$ para el impulso de CC (corriente continua), $1/8$ para los dos pares de los impulsos de los cosenos originales y $1/16$ para los dos nuevos pares de impulsos generados por la convolución.

Como se observa los diagramas vectoriales proporcionan en el dominio espectral una explicación gráfica más clara de la naturaleza del efecto moiré.



Figura 4.7 Representación del mismo espectro, mostrando las amplitudes de impulso que han aparecido en la convolución del espectro mostrado en la figura 4.5

Obsérvese que cada par de impulsos en el espectro refleja una componente periódica con la frecuencia y el ángulo correspondiente en el dominio de imagen, estos dos nuevos pares de impulsos indican que la superposición de las dos imágenes originales incluye dos nuevos componentes periódicos que no existían en ninguna de las imágenes originales. Estos dos nuevos componentes periódicos están presentes en la imagen superpuesta: el componente periódico más visible (o perceptible por el ojo humano) es el que corresponde a las diferencias vectorial de los vectores de frecuencia originales, y tiene la frecuencia y la dirección del vector de diferencia, $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ es decir, éste nuevo componente consiste de los impulsos simétricos de la diferencia vectorial más el impulso que se encuentra en el origen, es decir este nuevo componente está formado por $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, **el impulso en el origen y $\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$** (figura 4.6); el otro componente tiene la frecuencia y la dirección del vector de suma, $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, es decir, éste otro componente consiste de los impulsos simétricos de la suma vectorial más el impulso que se encuentra en el origen, esto significa que está formado por $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, **el impulso en el origen y $-\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$** éstos dos contribuyen a la imagen superpuesta de los detalles finos de alta frecuencia, pero su contribución aislada, (mostrada en la figura 4.6), no es fácilmente discernible por el ojo humano en la superposición.

El primer componente periódico $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, **el impulso en el origen y $\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$** es más visible que el otro puesto que su frecuencia es menor, es decir, su periodo es mayor. Mientras que la frecuencia de la suma vectorial es mayor que las frecuencias de cada uno de los vectores individuales, la frecuencia de la diferencia vectorial puede ser significativamente menor que cualquiera de las frecuencias originales. En consecuencia, el componente periódico en la imagen superpuesta que corresponde a la diferencia vectorial puede tener un periodo significativamente mayor y, por tanto, ser mucho más visible que los cosenos de las imágenes originales. Este componente periódico visible es, de hecho, el efecto moiré que vemos en la superposición de las imágenes originales. El otro componente periódico corresponde a otro efecto moiré, que no es visible fácilmente, ya que su vector de frecuencia $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ está situado más allá del círculo de visibilidad. (Es conveniente hacer notar que la situación es inversa cuando el ángulo entre \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 es obtuso, ya que en este caso la longitud de $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, es menor que la longitud de $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$).

Obsérvese que los pares de impulsos en las frecuencias de las rejillas cosenoidales originales ($\pm \mathbf{f}_1$ y $\pm \mathbf{f}_2$) aparecen en el espectro de la superposición solo gracias a la propiedad del producto de los cosenos que representan la reflectancia de nuestras rejillas cosenoidales. Es precisamente la constante aditiva la que aporta el impulso de corriente continua a cada uno de los espectros originales (figura 4.2) y es sólo gracias a estos impulsos de CC que los impulsos de frecuencia originales aparecen en la convolución del espectro (figura 4.5). En el espectro de su producto (es decir, la convolución del espectro) solo son visible los nuevos pares de impulsos en las frecuencias suma y diferencia, pero los pares de impulsos originales en las frecuencias de $\pm \mathbf{f}_1$ y $\pm \mathbf{f}_2$ no son visibles. Esto es exactamente lo que ocurre en la teoría de la comunicación en el caso de la modulación de amplitud (AM) ya que tanto el portador como el modulador son señales cosenoidales. Esto también puede comprobarse por medio de las siguientes identidades trigonométricas simples al efectuarse el producto

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) , \quad (4.7 (a))$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos \beta + \frac{1}{8} \cos(\alpha - \beta) \\ &+ \frac{1}{8} \cos(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (4.7 (b))$$

También es interesante observar que los nuevos pares de impulsos en las frecuencias de suma y diferencia (es decir los impulsos de moiré) aparecen en el espectro de la superposición (figura 4.5) solo gracias a la no linealidad de la regla de superposición de un producto, es decir si aplicamos una no linealidad, la operación de superposición resultante es no lineal.

Nuevamente los diagramas vectoriales proporcionan en el dominio espectral una clara explicación gráfica de la naturaleza de cualquier moiré en cuestión.

Si el impulso cuyo vector de frecuencia es \mathbf{f} cae dentro del círculo de visibilidad y representa un moiré visible en la superposición de las 2 imágenes originales, las fórmulas (ecs. 4.6) anteriores expresan la frecuencia, el periodo y el ángulo de este moiré. Debe tenerse en cuenta que, como se produce un efecto moiré debido a la suma vectorial de los vectores de frecuencia \mathbf{f}_1 y $-\mathbf{f}_2$ (véase la figura 4.6), estas fórmulas se reducen al análisis del diagrama geométrico vectorial obtenido del espectro de la superposición de las dos rejillas (la rejilla de referencia y la rejilla rotada o desplazada) y sus transformadas obtenidas del período y ángulo del efecto moiré entre dos rejillas [12]:

$$T_M = \frac{T_1 T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 - 2T_1 T_2 \cos \alpha}}, \quad \varphi_M = \arctan \left(\frac{T_2 \sin \theta_1 - T_1 \sin \theta_2}{T_2 \cos \theta_1 - T_1 \cos \theta_2} \right). \quad (4.8)$$

Donde T_1 y T_2 son los periodos de las dos rejillas originales y α es la diferencia de ángulos entre ellas, $\theta_2 - \theta_1$. (Debe tenerse en cuenta que estas fórmulas se limitan solo para cuando $T_1 \approx T_2$) En el caso particular donde $T_1 = T_2$ entonces el procedimiento se simplifica más a través de las fórmulas [12]:

$$T_M = \frac{T}{2 \sin(\alpha/2)}, \quad \varphi_M = 90^\circ + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2). \quad (4.9)$$

Obsérvese que en este caso la dirección del moiré es perpendicular a la bisectriz del ángulo formado entre las direcciones de la rejilla.

Otro caso particular y que resulta conveniente mencionar cuando $T_1 \neq T_2$, pero $\theta_1 = \theta_2$ (es decir, la superposición de dos rejillas paralelas) las ecuaciones (4.8) se reducen en las fórmulas:

$$T_M = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}, \quad (i. e., f_M = |f_2 - f_1|), \quad \varphi_M = \theta. \quad (4.10)$$

Las ecuaciones (4.5), (4.6) y las fórmulas que se derivan de ellas (4.8) - (4.10) dan las *propiedades geométricas* del período y la dirección de un impulso en el espectro de la superposición (y de la *componente periódica* o moiré que se obtiene en el dominio de la imagen). La *amplitud* de cualquier impulso individual, que queda envuelta en el impulso de la componente periódica correspondiente en la imagen, es un producto de las amplitudes de los m impulsos que se han obtenido en la convolución, de cada uno de los m espectros:

$$a = a_1 \cdot \dots \cdot a_m. \quad (4.11)$$

Se debe tener en cuenta, sin embargo, que si dos o más impulsos en la convolución llegan a caer uno encima del otro exactamente en el mismo lugar, sus amplitudes individuales se suman.

Los impulsos en los espectros de convolución pueden considerarse como una operación en la que los vectores de frecuencia de los espectros originales se añaden vectorialmente, mientras que las amplitudes de impulso correspondientes se multiplican. Obsérvese que si todos los espectros de la convolución son reales y simétricos respecto al origen, el espectro resultante también es real y simétrico, y contiene para cada impulso en la posición $+\mathbf{f}$ un impulso gemelo idéntico en $-\mathbf{f}$. Sin embargo, si las imágenes originales no son simétricas, las amplitudes de cada uno de dichos pares de impulsos en la convolución son conjugados complejos, y las amplitudes de impulso en el espectro también pueden tener componentes imaginarios.

En este punto es importante abordar un problema de todos los patrones que se obtienen en la superposición de las rejillas o redes primarias, el patrón que nos interesa (denominado imagen de moiré) es aquel cuya frecuencia espacial suele ser aislada de otros patrones de diferentes frecuencias mediante filtrados que se denominan: filtrado de paso bajo, filtrado de paso alto y filtrado de pasa bandas.

Para el filtraje en la transformada de Fourier de la superposición de las rejillas cosenoidales (figura 4.1 y 4.2), en la extracción de moiré de baja frecuencia se filtran (se dejan pasar) las frecuencias que están en la parte superior izquierda, la del centro y la ubicada en la parte inferior derecha, (componente formado por $\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$, el impulso en el origen y $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$), (ver figura 4.8) las cuales generan el filtro de baja frecuencia. El filtro obtenido se muestra a continuación.

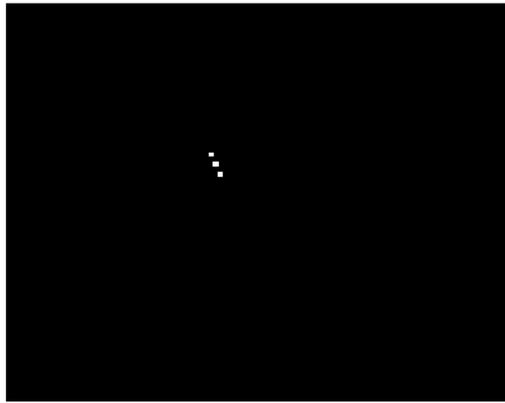


Figura 4.8 Filtro de baja frecuencia amplificada para la transformada del patrón de moiré

Este filtro permite extraer el moiré de baja frecuencia que se muestra a continuación.

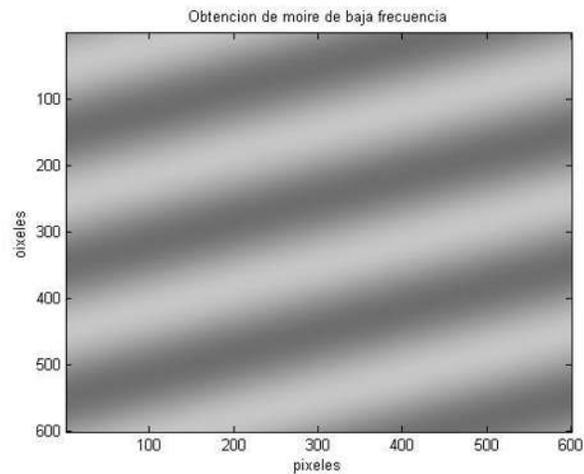


Figura 4.9 Moiré formado por la componente periódica de baja frecuencia aportada mediante el filtraje de los impulsos simétricos de la diferencia vectorial más el impulso que se encuentra en el origen, esto es, por el nuevo par de impulsos que se encuentra en las frecuencias de diferencia f_1-f_2 , f_2-f_1 y el impulso en el origen

Para la extracción de moiré de alta frecuencia (figura 4.1 y 4.2), se filtran (se dejan pasar) las frecuencias que están en la parte inferior izquierda, en la central y la ubicada en la parte superior derecha, (formado por $-f_1-f_2$, el impulso en el origen y f_1+f_2) las cuales generan el filtro de alta frecuencia. La máscara obtenida para el filtraje de alta frecuencia se muestra a continuación.

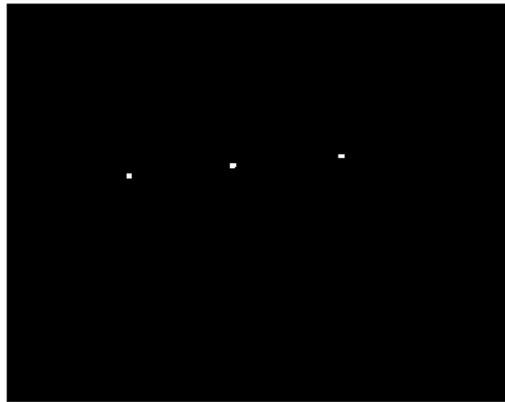


Figura 4.10. Filtro de alta frecuencia amplificada para la transformada del patrón de moiré, el cual permite obtener el moiré de alta frecuencia.

La imagen que se obtiene es la que se muestra a continuación.

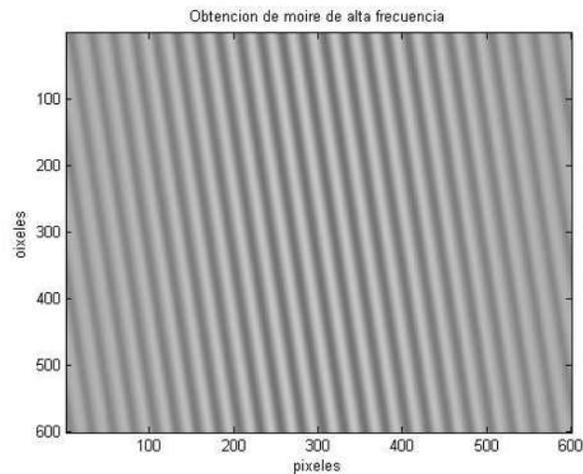


Figura 4.11. Moiré formado por la componente periódica de alta frecuencia aportada mediante el filtraje de los impulsos simétricos de la suma vectorial más el impulso que se encuentra en el origen, esto es, por el nuevo par de impulsos que se encuentra en las frecuencias de suma f_1+f_2 , $-f_1-f_2$ y el impulso en el origen.

Sin embargo, la cuestión de si un par de impulsos en el espectro representa una componente periódica *visible* en la imagen depende en gran medida de las propiedades del sistema visual humano. El hecho de que el ojo no pueda distinguir detalles finos por encima de una cierta frecuencia (es decir, por debajo de un cierto período) sugiere que el modelo de sistema visual humano incluye cierto grado de filtrado denominado de paso bajo. Este filtro es bidimensional en forma de campana cuya forma es anisotrópica (la anisotropía del espacio físico es la variabilidad en la percepción de la simetría cuando el eje de simetría deja de coincidir con la vertical u horizontal. Ya que parece que el ojo es menos sensible a pequeños detalles en direcciones diagonales como 45° [13]).

4.2. Extracción de moiré de rejillas binarias

En la figura 4.12 se muestran dos rejillas tipo binaria, generadas mediante Matlab (a) rejilla sin rotar, (b) rejilla rotada un ángulo θ respecto de la vertical; figura (c) se muestra el patrón de moiré que se obtiene al superponer ambas rejillas.

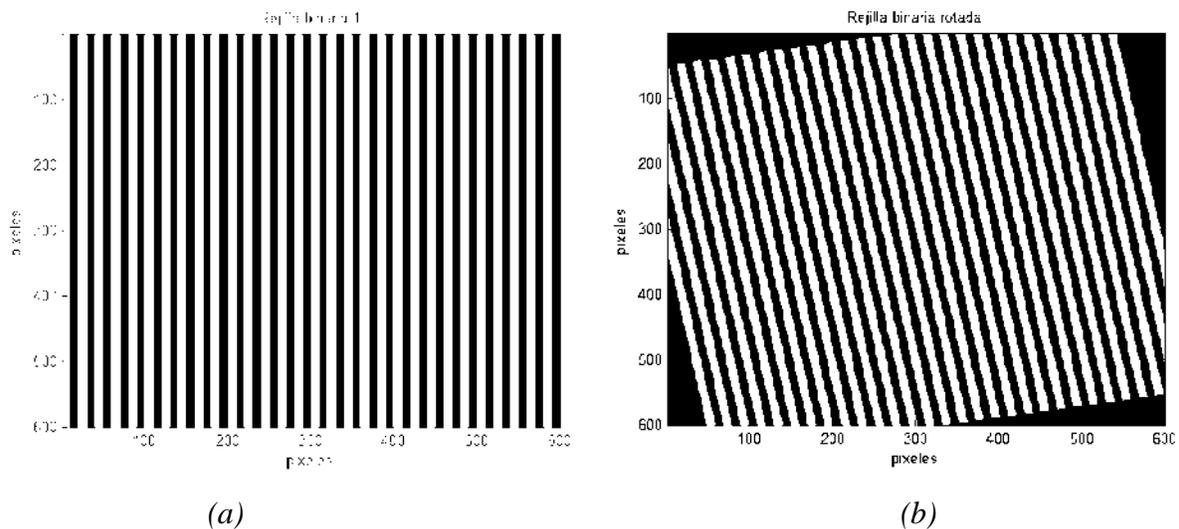


Figura 4.12 Se muestran dos rejillas tipo binaria generadas mediante Matlab (a) rejilla sin rotar, (b) rejilla rotada un pequeño ángulo respecto de la vertical.

De acuerdo con la teoría de Fourier, una onda cuadrada periódica $g(x)$ puede expresarse, mediante su expansión en serie de Fourier, como una serie infinita de funciones seno y coseno ponderadas a la frecuencia de $1/T$ y todos sus armónicos. La expansión

general (o descomposición) de una función periódica unidimensional $g(x)$ en una serie de Fourier está dada por [ver Apéndice 1]

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{T}\right), \quad (4.12)$$

donde los coeficientes de la serie de Fourier son

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T g(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{p}\right) dx \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nx}{p}\right) dx. \quad (4.13)$$

Además si $g(x)$ es simétrico no hay componente seno, y $b_n = 0$ para todo n . El hecho de que solo tratamos con funciones periódicas cuyos valores están limitados entre 0 y 1 influye también en el rango posible de los coeficientes de la serie de Fourier.

Si los valores de la función periódica $g(x)$ están limitados entre 0 y 1 entonces todos los coeficientes de la serie de Fourier (amplitudes de impulso) tienen valores absolutos entre 0 y 1. Más exactamente, satisfacen que $0 \leq a_0 \leq 1$ y para cualquier $n \neq 0$; $|a_n| \leq 1/\pi$ y $|b_n| \leq 1/\pi$. Por otra parte se tiene que para cualquier serie convergente de Fourier a_n y b_n tienden a 0 cuando $n \rightarrow \pm\infty$. Y además, si $g(x)$ es $k+1$ veces continuamente diferenciable, entonces a_n y b_n tienden a 0 más rápido que $1/n^k$.

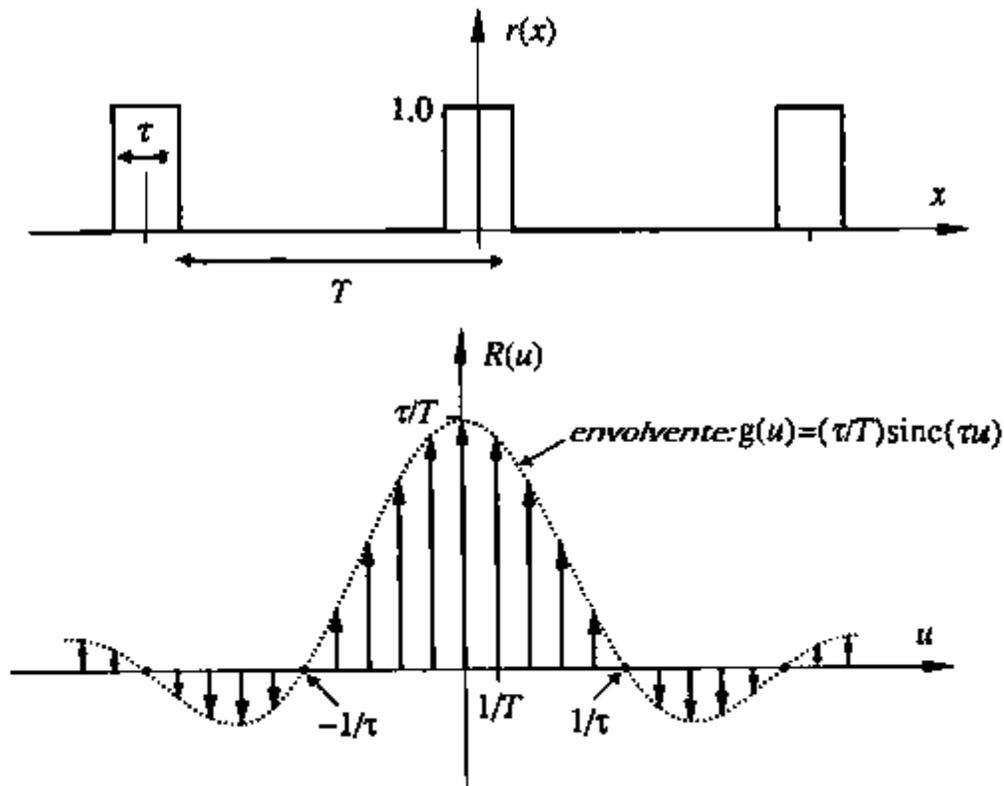


Figura 4.13 Representación esquemática de la transformada de Fourier de una onda cuadrada simétrica con período T y apertura τ . La línea punteada indica la envolvente del tren de impulsos. La relación de apertura en este caso es $\tau T=1/5$ por lo tanto cada quinto impulso en el espectro tiene una amplitud cero.

Como ejemplo, en el caso de nuestra onda cuadrada binaria simétrica (ver figura 4.13), los coeficientes de Fourier ecuación 4.13 son:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{\tau}{T}, \\
 a_n &= \frac{1}{n\pi} \text{sen} \left(\frac{\pi n \tau}{T} \right) = \frac{\tau}{T} \text{sinc} \left(\frac{n\tau}{T} \right), \\
 b_0 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

(Los componentes seno aquí son todos nulos debido a la simetría de la onda cuadrada, y obsérvese que a_0 es un caso particular de a_n ya que la envolvente $\text{sinc}(0) = 1$). El hecho de que la onda cuadrada pueda expresarse como un tren constante de a_0 más una suma infinita de funciones coseno implica que la transformada de Fourier de la onda cuadrada

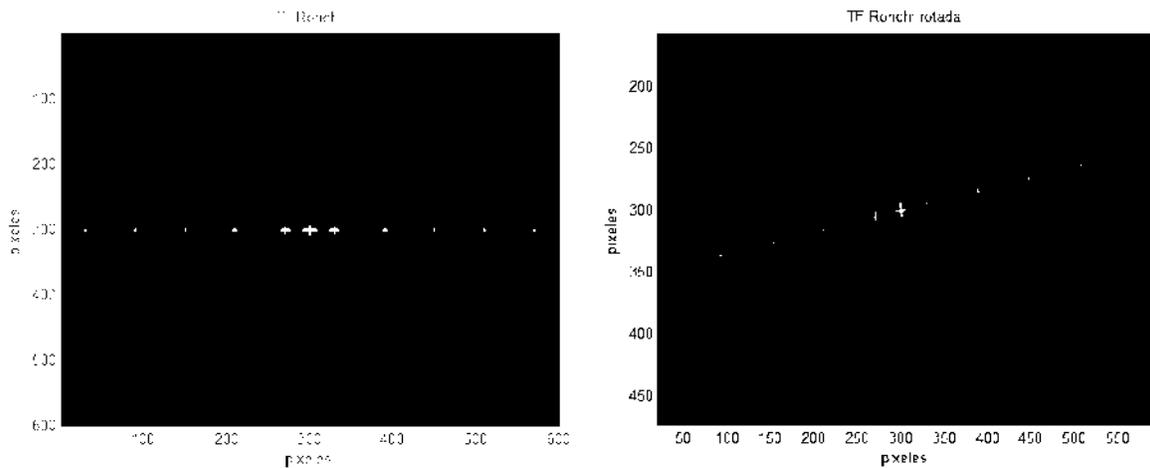
contiene un impulso de corriente continua cuya amplitud es a_0 , más una serie infinita de impulsos (los n -ésimos armónicos) que están situados en las frecuencias $\pm n/T$, y cuyas amplitudes están dadas por los coeficientes de coseno a_n (ec. 4.14). Y en efecto, el espectro de la onda cuadrada $r(x)$ se da de acuerdo a la ecuación del apéndice A.1

$$R(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(u - \frac{n}{T}). \quad (4.15)$$

Donde $\delta(u)$ es el símbolo del impulso [10]. Este es un tren de impulsos (o un *comb*) que muestra la función continua (“envolvente”) $g(u) = \frac{\tau}{T} \text{sinc}(\tau u)$ a la frecuencia $u = 1/T$ y todos sus armónicos, figura 4.13. La amplitud de los impulsos oscila y se desvanece simétricamente en ambas direcciones desde el centro. Obsérvese que el periodo T de la onda cuadrada determina el intervalo $1/T$ entre cada uno de los dos impulsos sucesivos del *comb* (esquema del peine o tren de impulso) en el espectro mientras que la apertura τ ($0 \leq \tau \leq T$) determina la longitud de los marcos o perfiles en la envolvente de la función *sinc*. La altura de la envolvente en el origen, es decir, la longitud del impulso de corriente continua, se determina por la relación de apertura de la onda cuadrada, τ/T ($0 \leq \tau \leq T$).

Una observación que es conveniente agregar en la fórmula de los coeficientes de Fourier a_n en el caso de una onda cuadrada es que si la razón de apertura τ/T de una onda cuadrada dada es racional, es decir, si puede expresarse como una relación l/k entre dos enteros, entonces para cualquier n que sea múltiplo de k la amplitud de impulso a_n es cero. Por ejemplo, si $\tau/T = \frac{1}{2}$ entonces cada impulso par del *comb* o peine (tren de impulso) tiene una amplitud cero y si $\tau/T = \frac{1}{4}$ entonces cada cuarto impulso en el peine es cero.

La figura 4.14(a) muestra el espectro de Fourier o transformada de Fourier generado por Matlab de la rejilla mostrada en la figura 4.12(a), la cual presenta un espectro de Fourier único que igual se puede interpretar como su huella digital. En la figura 4.14 (b) se muestra la transformada de Fourier de la rejilla binaria que tiene un ángulo con respecto a la vertical, la cual es diferente a la transformada de Fourier de la rejilla sin rotar.



(a)

(b)

Figura 4.14 (a) Transformada de Fourier de la rejilla binaria (b) Transformada de Fourier ampliada de la rejilla binaria rotada.

Tomemos como ejemplo principal el caso de las rejillas binarias de onda cuadrada, en las que la función de reflectancia $r(x, y)$ es una onda cuadrada binaria. Obsérvese que dado que una rejilla lineal 2D es una función perpendicular periódica y constante a su dirección principal, su representación 2D en serie de Fourier (y por lo tanto también su espectro 2D) son de hecho de naturaleza unidimensional; Ver el Apéndice A. Por razones de simplicidad se ubicara $r(x, y)$ en simetría con respecto al origen. La función de reflectancia de periodo T_1 en la dirección x tal que la rejilla es lineal (véase la figura 4.15 (a)) se expresa por la serie de Fourier:

$$r_1(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(1)} \cos(2\pi nx/T_1). \quad (4.16)$$

Si $r_1(x, y)$ es una rejilla de onda cuadrada binaria, sus coeficientes de Fourier $a_n^{(1)}$ están dados por la ecuación (4.14), donde T y τ igual T_1 y τ_1 respectivamente. De forma similar, la función de reflectancia de una rejilla con el periodo T_2 que se hace girar por un ángulo θ_2 (figura 4.15 (b)) está dada por:

$$r_2(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(2)} \cos(2\pi n[x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2]/T_2). \quad (4.17)$$

Donde $a_n^{(2)}$ son los coeficientes de Fourier correspondientes (en el caso de una rejilla de onda cuadrada: los mismos coeficientes que anteriormente, pero con T_2 y τ_2).

La transformada de Fourier $R_1(u, v)$ de la función de reflectancia $r_1(x, y)$ es un tren o peine de impulso unidimensional simétrico en el eje u (Fig. 4.15 (d)); los intervalos entre los impulsos son $1/T_1$ y sus amplitudes son $a_n^{(1)}$. Obsérvese, sin embargo, que dependiendo de la función $r_1(x, y)$, algunas (o incluso la mayoría) de las amplitudes $a_n^{(1)}$ pueden ser 0. Del mismo modo, la transformada de Fourier $R_2(u, v)$ de la función de reflectancia $r_2(x, y)$ es un tren o peine de impulso unidimensional simétrico situado en una línea recta a través del origen del plano u, v que ha sido girado por un ángulo θ_2 ; Sus intervalos de impulso son iguales a $1/T_2$ y sus amplitudes de impulso son $a_n^{(2)}$ (Fig. 4.15 (e)). Obsérvese que en el caso de las rejillas de onda cuadrada, los trenes o peines de impulso tienen las formas de envolvente de $g_1(u) = \frac{\tau_1}{T_1} \text{Sinc}(\tau_1 u)$ y $g_2(u) = \frac{\tau_2}{T_2} \text{sinc}(\tau_2 u)$, respectivamente, como en la Fig. 4.13.

Consideremos ahora la superposición de las dos rejillas lineales, $r(x, y) = r_1(x, y)r_2(x, y)$. Su espectro $R(u, v)$ en base a la función de reflectancia es según el teorema de la convolución (ecuación (4.4)), la convolución de los espectros $R_1(u, v)$ y $R_2(u, v)$. Esta convolución se puede llevar a cabo gráficamente utilizando el método grafico vectorial como en el caso analizado previamente de dos rejillas cosenosoidales, la única diferencia es que en este caso cada uno de los espectros individuales contiene un número infinito de impulsos (un tren o peine) en lugar de sólo 3 impulsos. El resultado de la convolución es un arreglo oblicuo infinito en el plano u, v , que se obtiene colocando una copia paralela y centrada del comb $R_2(u, v)$ sobre cada impulso del comb $R_1(u, v)$, o viceversa (véase la figura 4.15 (f), y que es semejante con el caso de las rejillas cosenosoidales mostradas en la figura 4.6). Más precisamente, los resultados de esta convolución se pueden describir como sigue:

- (a) La *localización de impulso* (vector-frecuencia) para el impulso (m, n) -ésimo de la convolución en el plano u, v es la suma vectorial del vector de frecuencia del m -ésimo impulso en el primer espectro y la frecuencia- vector del n -ésimo impulso en el segundo espectro.
- (b) La amplitud del impulso (m, n) -ésimo es el producto de las amplitudes del m -ésimo impulso en el primer tren o peine y del n -ésimo impulso en el segundo tren o peine:

$$a_{m,n} = a_m^{(1)} a_n^{(2)}. \quad (4.18)$$

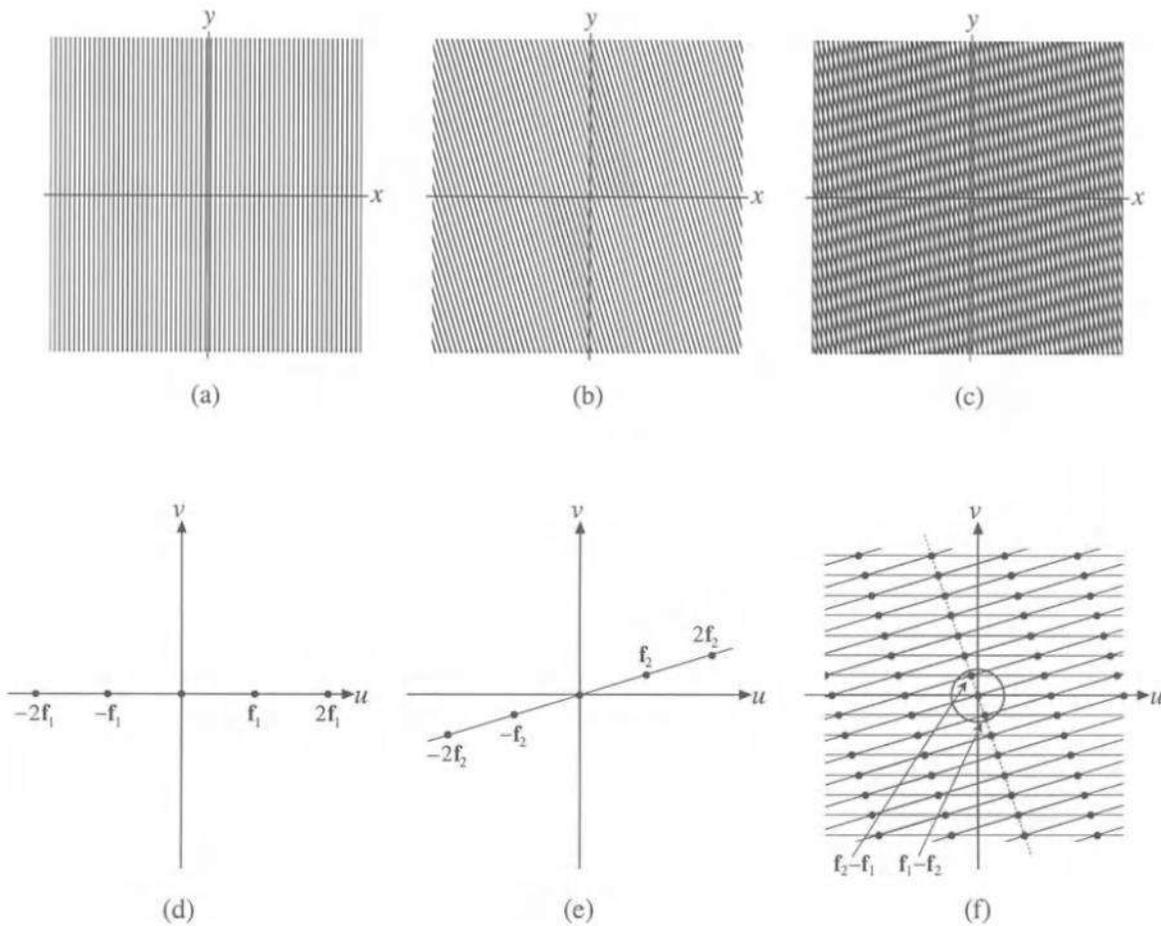


Figura 4.15 En los incisos (a) y (b) se tienen rejillas binarias, una rotada con respecto a la otra y (c) su superposición en el dominio de imagen; Sus respectivos espectros son los peines infinitos mostrados en (d) y (e) y su convolución (f). En el inciso (f) el círculo en el centro del espectro representa el círculo de visibilidad (para una distancia de visión donde las rejillas originales ya no son visibles). Contiene el par de impulsos cuyos vectores de frecuencia son $f_1 - f_2$ y $f_2 - f_1$ este es el par de impulso fundamental del moiré visto en (c). La línea punteada en (f) muestra el peine infinito de impulsos que representa el moiré.

En nuestro ejemplo de súper posiciones simétricas de onda cuadrada las amplitudes se obtienen por medio de la ecuación (4.14):

$$a_{m,n} = \frac{1}{mn\pi^2} \sin\left(\frac{\pi m\tau_1}{T_1}\right) \sin\left(\frac{\pi n\tau_2}{T_2}\right) = \frac{\tau_1\tau_2}{T_1T_2} \text{sinc}\left(\frac{m\tau_1}{T_1}\right) \text{sinc}\left(\frac{n\tau_2}{T_2}\right). \quad (4.19)$$

En el caso cosenosoidal, vemos que también, la superposición de rejillas introduce nuevos impulsos en el espectro. Si alguno de estos impulsos cae dentro del círculo de visibilidad, como en la Fig. 4.15 (f), esto indica que en la imagen superpuesta existe un componente periódico visible (es decir, un efecto moiré) en la dirección y frecuencia

correspondientes. En este sentido se debe tener en cuenta que el moiré sigue existiendo incluso cuando su impulso fundamental excede el círculo de visibilidad o tiene una amplitud baja, y el moiré ya no es visible.

Como consecuencia de los puntos (a) y (b) anteriores obtenemos los siguientes resultados para la superposición de rejillas de onda cuadrada:

- (1) Los cambios de ángulos o escalas espaciales en cualquiera de las rejillas superpuestas (transformaciones que preservan las relaciones τ/T de las rejillas originales) sólo influyen en la ubicación geométrica de los impulsos en la convolución del espectro, pero no en las amplitudes individuales de impulso. Sin embargo en el caso del dominio de la imagen las operaciones de rotación y escala espacial en las rejillas originales sólo influyen en el ángulo y el período de cada moiré, pero no en su amplitud. Nuevamente aquí debe tenerse en cuenta que el moiré sigue existiendo incluso cuando su impulso fundamental excede el círculo de visibilidad o tiene una amplitud baja y el moiré ya no es visible. En este caso los impulsos combinados se denominan impulsos compuestos y solo ocurre en estados singulares.
- (2) Por otra parte al variar la relación de apertura τ/T de cualquiera de las rejillas cuadradas superpuestas sólo se influye en las amplitudes de los impulsos en la convolución del espectro, pero no en sus ubicaciones. En el dominio de la imagen esto significa que sólo la amplitud y el perfil (forma de onda) del moiré están influenciados, pero no su ángulo o período.

Estos resultados son importantes y pueden generalizarse a la superposición de cualquier función periódica:

Las posiciones de impulso y las amplitudes de impulso en el espectro de la superposición son propiedades independientes: mientras que las localizaciones de impulso sólo dependen de los períodos y ángulos de las capas superpuestas, la suma de las amplitudes de los impulsos individuales nos genera un impulso compuesto solo cuando la combinación de ángulo y frecuencia precisos lo genera. Esto también se aplica, por supuesto, a los impulsos que caen dentro del círculo de visibilidad y, por lo tanto, a los correspondientes efectos de moiré en el dominio de imagen: mientras que los períodos y ángulos de moiré dependen solamente de los períodos y ángulos de las capas superpuestas, (formas de onda) dentro de estos períodos y ángulos los perfiles de intensidad resultante sólo se ven afectados por los perfiles de intensidad de las capas superpuestas.

La generalización de este resultado en la superposición de rejillas de m líneas es directa. De hecho, la localización geométrica de cada impulso en el espectro resultante es una suma vectorial de vectores de frecuencia del espectro de cada una de las rejillas superpuestas, mientras que su amplitud es el producto de las amplitudes de los impulsos originales implicados. Esto es muy similar al caso de las rejillas cosenosoidales, excepto que en el caso general el espectro de cada rejilla de líneas consiste en un tren o peine infinito de impulsos en lugar de sólo 3 impulsos, de modo que la convolución de m espectros da un tren

o peine infinito de impulsos más que sólo un número finito (3^m) de impulsos. Esto significa que en el caso general de las rejillas lineales cada uno de los componentes f'_i en la Ec. (4.20) puede originarse de cualquier impulso del tren o peine del i -ésimo espectro.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}'_1 + \dots + \mathbf{f}'_m, \quad (4.20)$$

De hecho, si f_i es el vector de frecuencia del impulso fundamental en el i -ésimo espectro, entonces el vector de frecuencia de su k_i -ésimo impulso armónico es $k_i \mathbf{f}_i$, y para cualquier impulso individual en la convolución viene dada por las ecuaciones. (4.20) y (4.18) por lo que se obtiene:

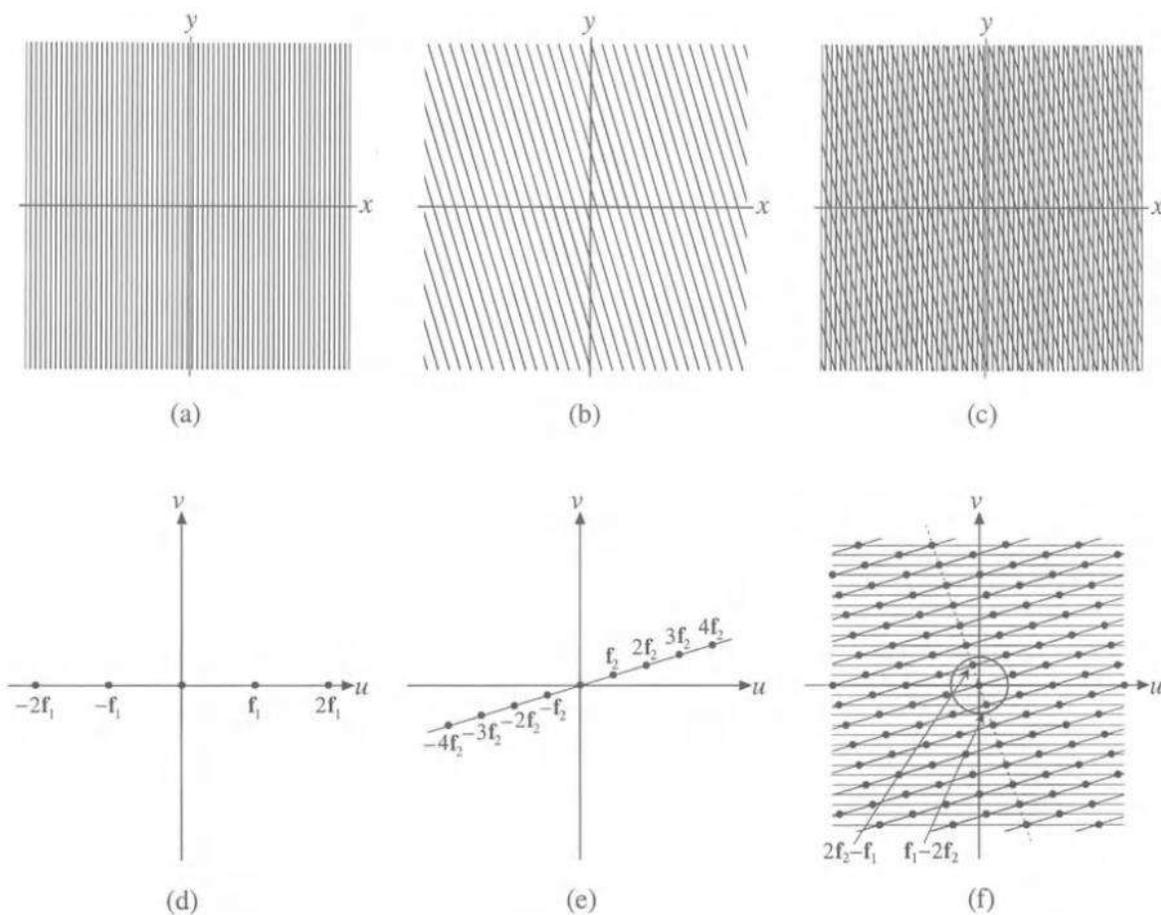


Figura 4.16 En (a) y (b) se muestran las rejillas binarias como en la Fig. 4.15 pero en la rejilla rotada tienen la mitad de la frecuencia, y (c) su superposición; Sus respectivos espectros son (d), (e) y (f). El círculo de visibilidad en el centro del espectro en (f) contiene el par de impulsos con los vectores de frecuencia $f_1 - 2f_2$ y $2f_2 - f_1$, que se originan del segundo armónico de f_2 , y representan el par de impulso fundamental del moiré. Obsérvese que el moiré visto en (c) es diferente a la Fig. 4.15 (c), pero todavía tiene el mismo ángulo y frecuencia que de la Fig. 4.15(c), y sólo su intensidad es más débil.

$$\mathbf{f} = k_1 \mathbf{f}_1 + \dots + k_m \mathbf{f}_m, \quad (4.21)$$

$$a = a_{k_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{k_m}^{(m)}, \quad (4.22)$$

donde $a_{k_i}^{(i)}$ es la amplitud del k_i -ésimo impulso de la i -ésima rejilla. Obsérvese que, cada multiplicación sucesiva en el producto de la ecuación (4.22) reduce aún más la amplitud a del impulso en cuestión. En el caso particular de las rejillas de onda cuadrada centradas se obtienen para cualquier impulso de la convolución, usando la ecuación (4.14) se puede expresar la siguiente ecuación:

$$a = \frac{1}{\pi^m k_1 \dots k_m} \sin\left(\frac{\pi k_1 \tau_1}{T_1}\right) \dots \sin\left(\frac{\pi k_m \tau_m}{T_m}\right) = \frac{\tau_1 \dots \tau_m}{T_1 \dots T_m} \operatorname{sinc}\left(\frac{k_1 \tau_1}{T_1}\right) \dots \operatorname{sinc}\left(\frac{k_m \tau_m}{T_m}\right). \quad (4.23)$$

Como en el caso cosenosoidal, si algún impulso de la convolución cae dentro del círculo de visibilidad, entonces es visible en el efecto moiré en la superposición.

Como se puede ver, existen dos diferencias importantes entre las superposiciones de rejillas cosenosoidales y las superposiciones de rejillas binarias:

- (i) En primer lugar, en el caso de las rejillas binarias, cada impulso en el círculo de visibilidad pertenece a un tren o peine infinito de impulsos que se encuentra en una línea recta a través del origen (véase la figura 4.15 (f)). Esto significa que cada moiré está representado en el espectro por un tren o peine infinito de impulsos. El impulso fundamental de este tren o peine (es decir, el primer impulso) determina el periodo y la dirección del moiré. Si otros impulsos armónicos de este tren o peine caen dentro del círculo de visibilidad, el perfil de intensidad del moiré ya no se percibe como una función periódica cosenosoidal pura, sino como una forma más compleja (una suma de cosenos).
- (ii) En segundo lugar, en el caso de superposición de rejilla binaria, el círculo de visibilidad puede contener impulsos que se originan a partir de impulsos armónicos superiores en los espectros de las rejillas originales. Esto significa que, a diferencia del caso cosenosoidal, los efectos de moiré entre las rejillas binarias también pueden obtenerse a partir de armónicos más altos de las frecuencias de rejilla fundamentales. Tales efectos moiré se llaman *moirés de orden superior* [14]. Esto se ilustra para el caso de dos rejillas superpuestas en la Fig. 4.16; obsérvese que en este ejemplo el efecto moiré visible es causado por la suma vectorial (o la diferencia) de \mathbf{f}_1 , la frecuencia fundamental de la primera rejilla y dos veces \mathbf{f}_2 , es decir, la segunda armónica de la otra rejilla, mientras que la diferencia vectorial $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ está fuera del círculo de visibilidad esto es en los moiré de orden superior.

En el dominio de la imagen esto significa que el moiré visible es en realidad debido a la intersección de cada segunda línea en la primera rejilla con cada línea de la segunda rejilla. Sin embargo, intentar interpretar los diferentes moirés mediante esquemas gráficos vectoriales contando las intersecciones de líneas en el dominio de la imagen no pueden extenderse a superposiciones que implican más de dos rejillas la Fig. 4.17 muestra (tanto en la imagen como en los dominios espectrales) algunos de los diferentes moirés que pueden existir entre dos rejillas superpuestas. En este caso ambos $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ y $\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2$ están dentro del círculo de visibilidad, y de hecho, los moires correspondientes pueden ser simultáneamente observados en la superposición. Obsérvese, sin embargo, que aunque $2\mathbf{f}_1 - 3\mathbf{f}_2$ también se encuentra dentro del círculo de visibilidad, lo que significa que su longitud de período es visible, el moiré de tercer orden correspondiente es difícilmente perceptible en la superposición ya que sus amplitudes de impulso son demasiado débiles.

Ahora que ya estamos familiarizados con algunas nociones básicas del enfoque espectral, se pueden tratar de generalizar las fórmulas clásicas obtenidas geoméricamente ecuación (4.8) que proporcionan el período y el ángulo del moiré entre dos rejillas superpuestas. Se mencionó anteriormente que estas fórmulas sólo se mantienen cuando los periodos de rejilla cumplen la condición: $T_1 \approx T_2$.

En esta etapa se está en condiciones de entender la razón de esta restricción: las formulas (4.8) sólo dan los parámetros geométricos para el moiré de primer orden que es causado por la diferencia vectorial $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ (estas fórmulas se observa para $m = 2$ rejillas de la ecuación (4.20), o equivalente de la ecuación (4.21) con los índices $k_1 = 1$ $k_2 = -1$). Este moiré es visible, sólo cuando $f_1 - f_2 \approx 0$, lo que implica, de hecho, $f_1 \approx f_2$ o $T_1 \approx T_2$. Sin embargo, en otras superposiciones de dos rejillas, el impulso de $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ puede estar situado fuera del círculo de visibilidad, mientras que otro impulso, por ejemplo el de $\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2$, puede encontrarse dentro del círculo de visibilidad (como en la figura 4.16 (f)). En este caso, el moiré visible es el moiré de segundo orden que corresponde a la diferencia vectorial $\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2$; pero las fórmulas (4.8) para obtener el ángulo y la frecuencia (o período) del impulso $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ de primer orden, que ahora es irrelevante y no corresponde al moiré visible. La restricción $T_1 \approx T_2$ asegura, por tanto, que el moiré dominante en la superposición es, de hecho, el moiré de primer orden perteneciente a $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, cuyos parámetros son establecidos por las fórmulas (4.8).

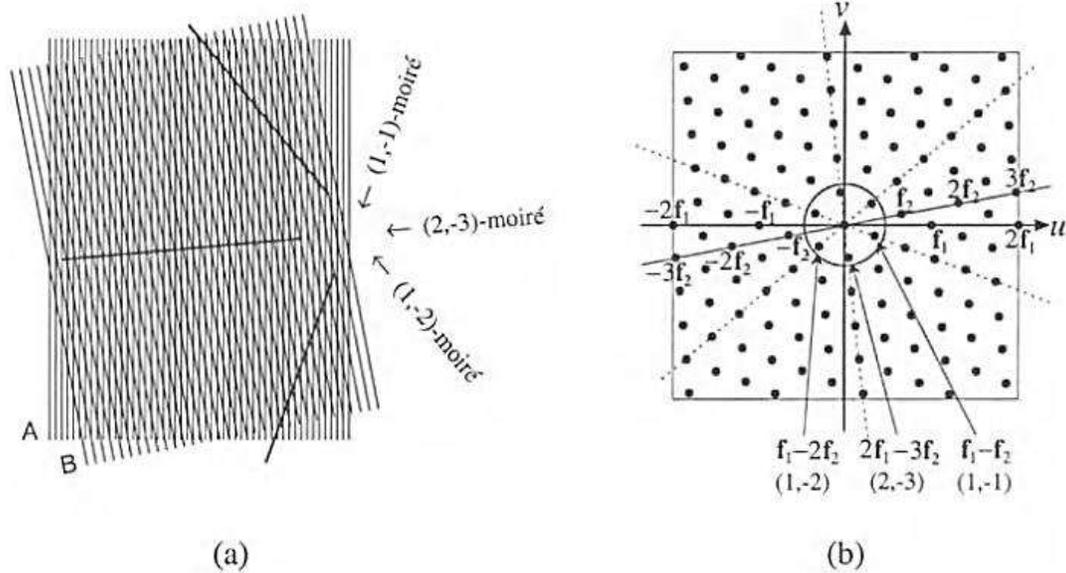


Figura 4.17 (a) Algunos de los diferentes moiré que se obtienen al girar las dos rejillas superpuestas. (b) Peines de impulso de los tres moiré correspondientes a cada espectro, obsérvese que sus direcciones son perpendiculares a las respectivas bandas de moiré.

La figura 4.18 (a) muestra el moiré formado por la superposición de las rejillas binarias de la figura 4.12 (a) y (b), y la transformada de Fourier de este moiré de la figura 4.18, posteriormente se obtiene un filtraje correspondientes que se ve en las figuras 4.19 y 4.20 (Ver apéndice A.2).

En el plano de Fourier se pueden insertar pantalla o filtros para pasar o para evitar ciertas frecuencias espaciales pasen al plano de la imagen. Este proceso se conoce como filtrado espacial. Existen diferentes formas y tipos de filtros pero se clasifican como filtros pasa baja que atenúan o eliminan las componentes de alta frecuencia en el dominio de Fourier y tienen como objetivo permitir pasar las frecuencias bajas sin alterarlas y filtros pasa altas esta consisten en poner una pantalla en donde se ubican las bajas frecuencias a fin de atenuar o eliminar los componentes de baja frecuencia, dejando así pasar al plano de la imagen solo las componentes de alta frecuencias (ver Apéndice A.2).

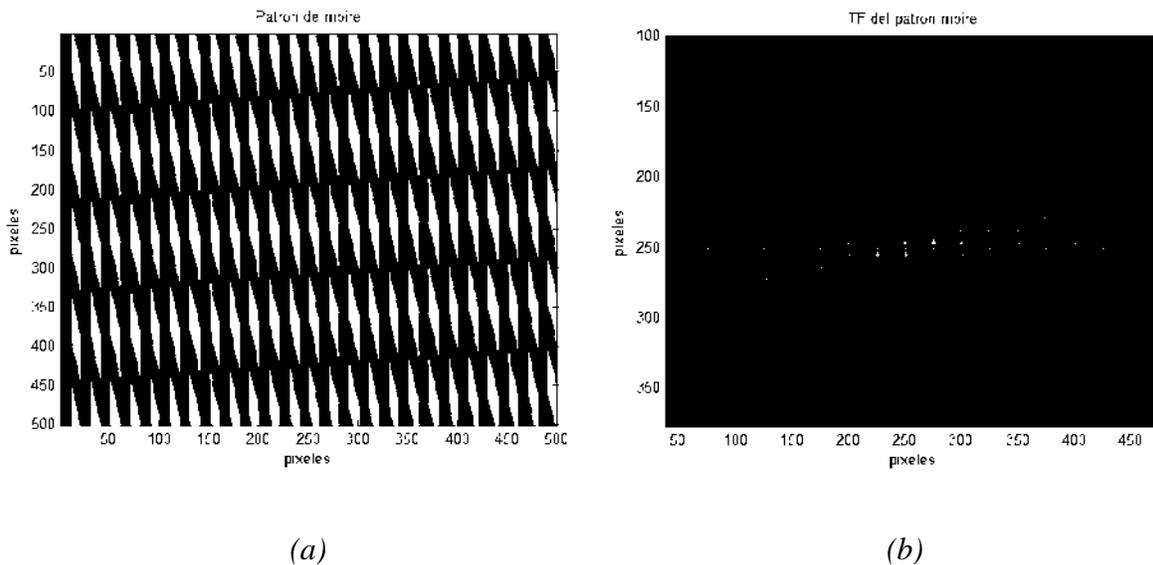
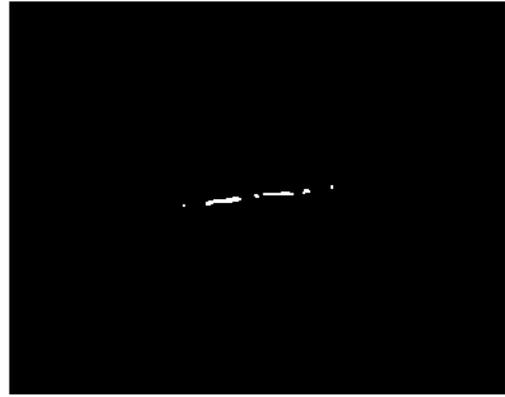


Figura 4.18 (a) superposición de las dos rejillas de la figura 4.12 que fueron generadas digitalmente y que forman un patrón de moiré, (b) transformada de Fourier de la superposición de rejillas binaria ampliada.

Por simplicidad los filtros de paso bajo y pasa alto para una rejilla binaria puede ser aproximado por un “*círculo de visibilidad*”, el cual es una función de elíptica alrededor del origen del espectro cuyo ejes representa la *frecuencia de corte* (es decir, la frecuencia de corte es cuando va más allá del umbral en el cual el detalle fino ya no es detectado por el ojo humano). Obviamente, su radio depende de varios factores como el contraste de los detalles observados, la distancia de visión, las condiciones de luz, etc. Si las frecuencias de los detalles de la imagen están más allá del borde del círculo de visibilidad en el espectro, el ojo ya no puede verlos; pero si un impulso es suficientemente fuerte en el espectro de la superposición de la imagen y cae dentro del círculo de visibilidad, entonces un efecto moiré se hace visible en la imagen superpuesta (de hecho, el círculo de visibilidad es una especie de un agujero en su centro que permite separar el paso del par de frecuencias bajos $f_1 - f_2$ y $f_2 - f_1$ o frecuencias bajas, del par de frecuencias altas $f_1 + f_2$ y $-f_1 - f_2$, tampoco se pueden ver frecuencias muy bajas, en este caso el círculo de visibilidad es una elipse muy delgada, (ver figura 4.19), que pareciera una línea).

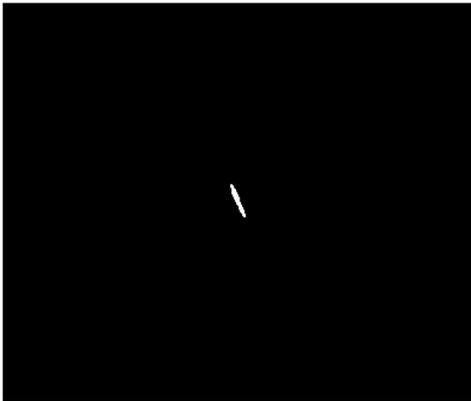


(a)

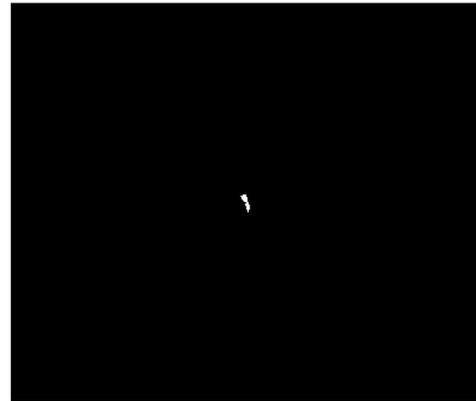


(b)

Figura 4.19 (a) Aproximación de un filtro de paso alto para una rejilla binaria mediante un “círculo de visibilidad”, en este caso es una elipse que se asemeja a una línea en esta imagen (b) Transformada de Fourier con filtro.



(a)



(b)

Figura 4.20 (a) Aproximación de un filtro de paso bajo para una rejilla binaria mediante un “círculo de visibilidad”, (b) Transformada de Fourier con filtro.

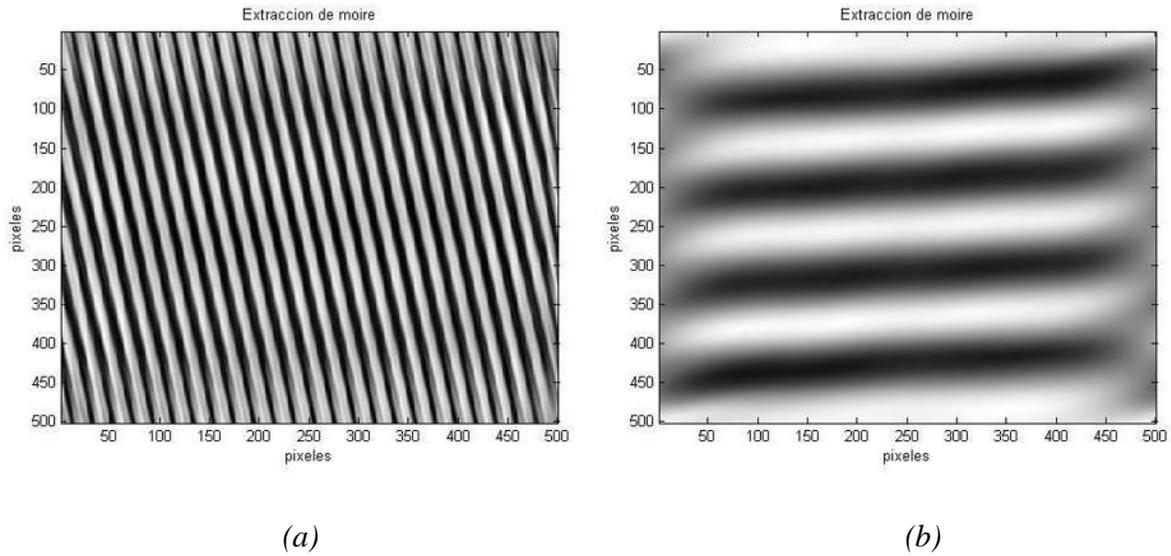


Figura 4.21 (a) Transformada inversa de Fourier con filtro paso alto, (b) Transformada inversa de Fourier con filtro paso bajo.

4.3. Extracción de moiré de rejillas circulares

Al igual que en el método convencional de moiré para la deformación de rejillas por un desplazamiento $u(r, \theta)$ la función de transmitancia T_d puede ser expresada como

$$T_r(r, \theta) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{p} [r - u(r, \theta)], \quad (4.24)$$

donde $[u(r, \theta)]$ representa el desplazamiento en la dirección de r .

Superponiendo una rejilla rotada (desplazada y/o deformada) con respecto a la rejilla de referencia se obtiene el patrón de moiré y la función de transmitancia para el patrón de moiré es

$$T(r, \theta) = T_r T_d = a_0^2 + a_0 a_1 \cos \frac{2\pi}{p} [r - u(r, \theta)] + a_0 a_1 \cos \frac{2\pi}{p} r + \frac{a_1^2}{2} \cos \frac{2\pi}{p} [2r - u(r, \theta)] + \frac{a_1^2}{2} \cos \frac{2\pi}{p} u(r, \theta), \quad (4.25)$$

donde el primer término es la contribución de fondo, el segundo y tercer término corresponden a las rejillas originales, el cuarto término corresponde a la doble frecuencia de la rejilla del modelo, el quinto término representa las franjas de moiré [6]. Normalmente las frecuencias altas son filtradas y la intensidad del patrón de moiré puede ser simplificada como

$$T(r, \theta) \approx a_1^2 \cos \frac{2\pi}{p} u(r, \theta). \quad (4.26)$$

Entonces la fase de las franjas se calcula de acuerdo a la fórmula

$$\Phi(r, \theta) = \frac{2\pi}{p} u(r, \theta), \quad (4.27)$$

el desplazamiento $u(r, \theta)$ para cada punto en el patrón de moiré varía linealmente con la fase $\Phi(r, \theta)$. Esto significa que una vez que se resuelve la fase de cada punto, la distribución de desplazamiento es una consecuencia de esto. En la siguiente figura se muestran dos rejillas circulares una desplazada con respecto a la otra y su superposición.

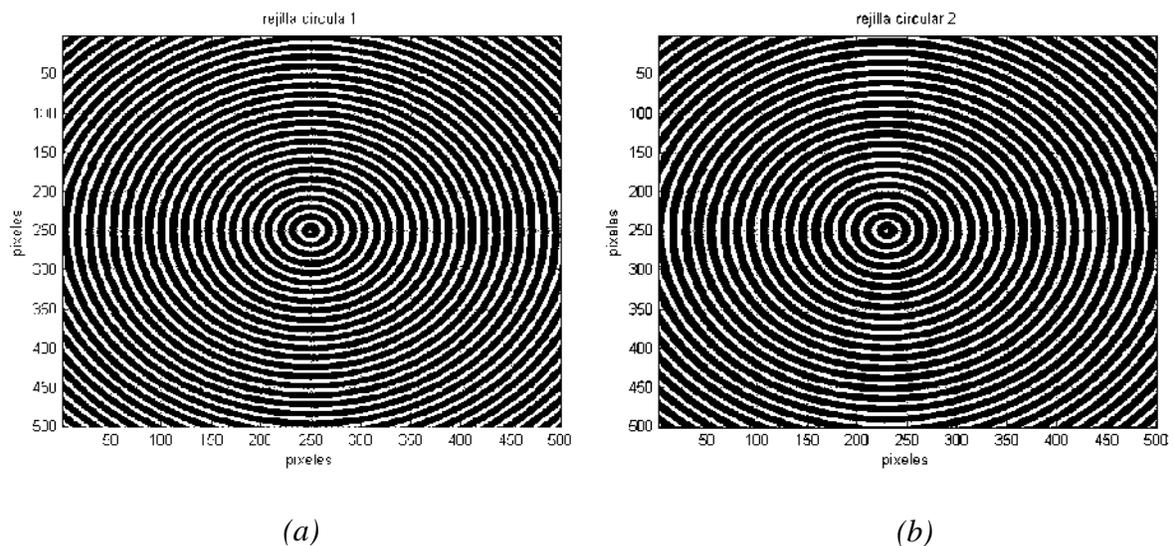


Figura 4.22 Esquema de rejillas circulares una de las cuales: (a) está en el origen, (b) ha sido desplazada lateralmente.

La figura 4.23 muestra la transformada de Fourier de la rejilla circular que se encuentra en el origen y la figura 4.24(a) la superposición de las rejillas mostrada en la figura 4.22 y su transformada de Fourier en la figura 4.24 (b).

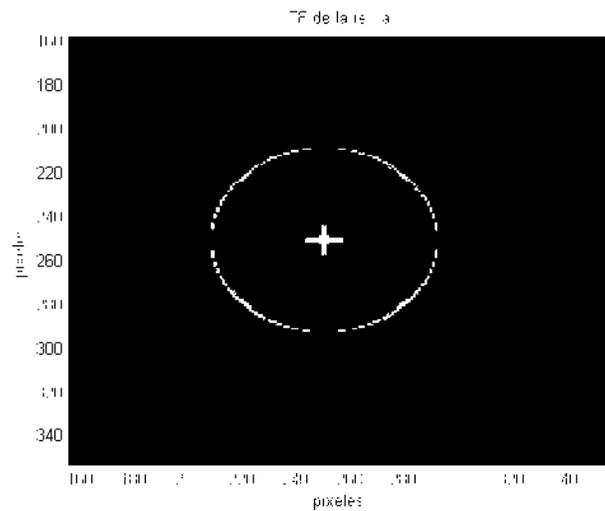
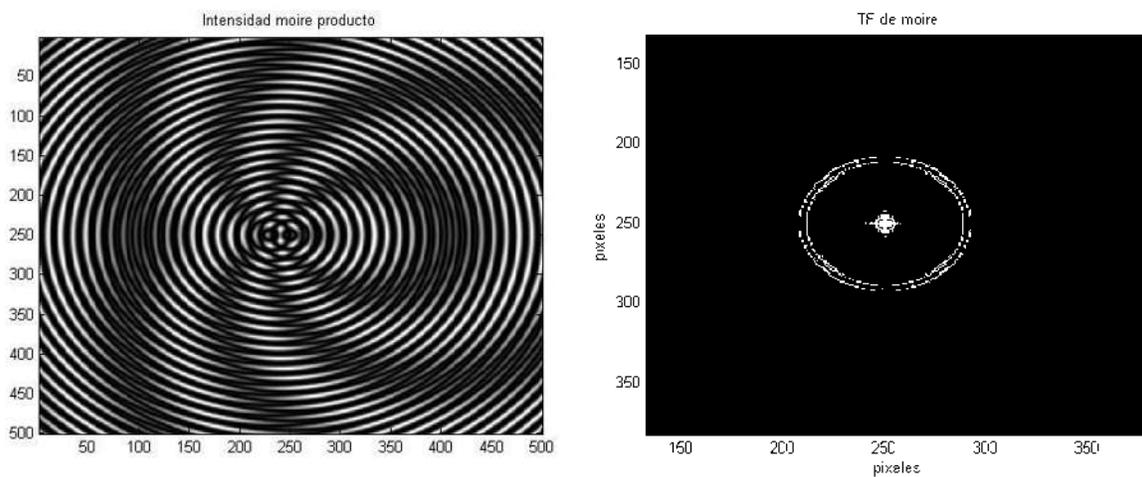


Figura 4.23 Transformada de Fourier de la rejilla circular ampliada.



(a)

(b)

Figura 4.24 (a) Patrón de moiré que se obtiene al superponer las dos rejillas circulares, (b) transformada de Fourier de la superposición de rejillas ampliada.

En el caso de rejillas circulares el filtrado se realizó por medio de filtrado pasa bandas.

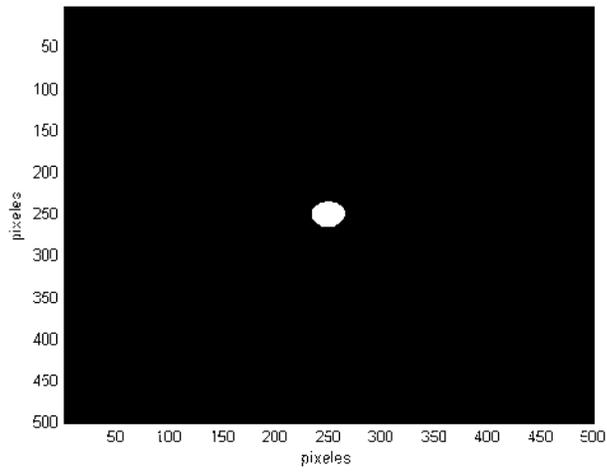


Figura 4.25 Filtro para la transformada de Fourier de la superposición de las rejillas circulares (ver figura 4.22).

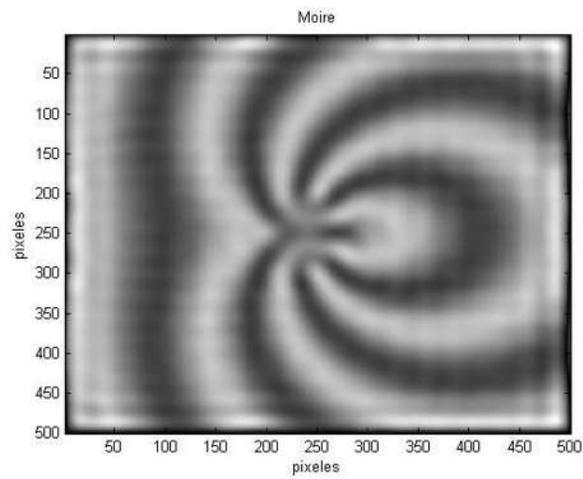


Figura 4.26 Imagen de la transformada inversa de Fourier de la superposición de rejillas con filtro pasa banda.

4.4. Extracción de moiré de placas zonales

Las placas zonales son semejantes a las rejillas circulares, solo que difieren respecto al comportamiento del espesor de los círculos ya que en el mismo patrón no son del mismo ancho de sus líneas circulares, en la figura 4.27 se muestra dos placas zonales que están ambas desplazadas con respecto al origen y la superposición de estas, muestra un patrón diferente al de rejillas circulares.

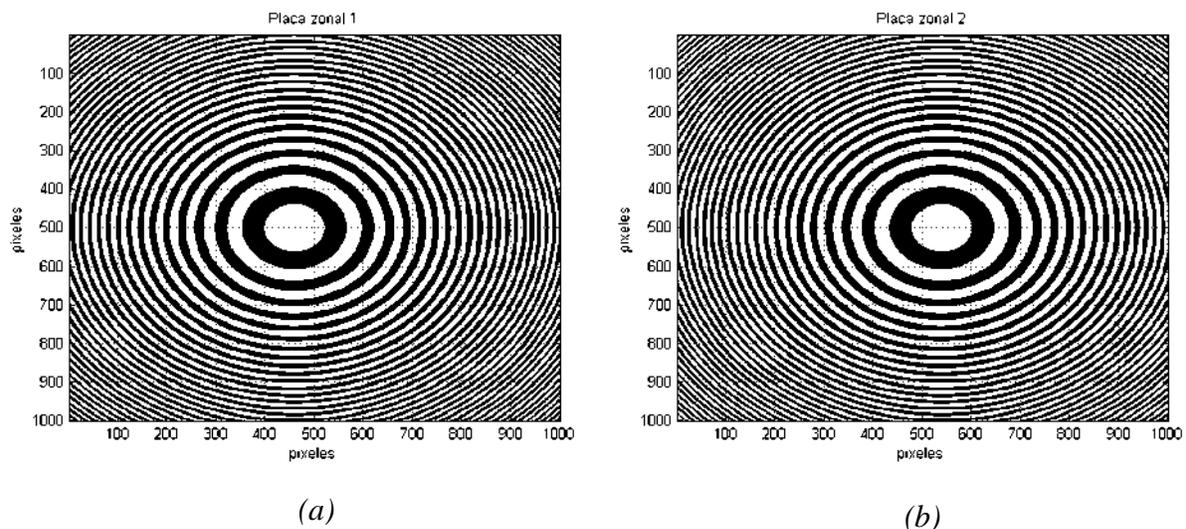


Figura 4.27 Esquema de placas zonales una de las cuales: (a) ha sido desplazada lateralmente a la izquierda, (b) se desplazó lateralmente a la derecha.

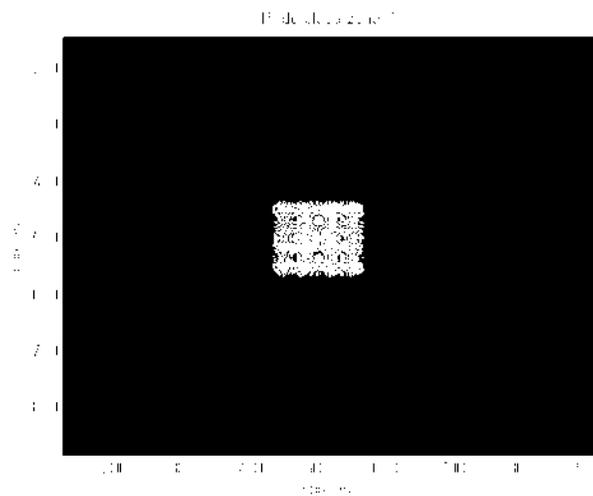


Figura 4.28 Transformada de Fourier de la placa zonal ampliada.

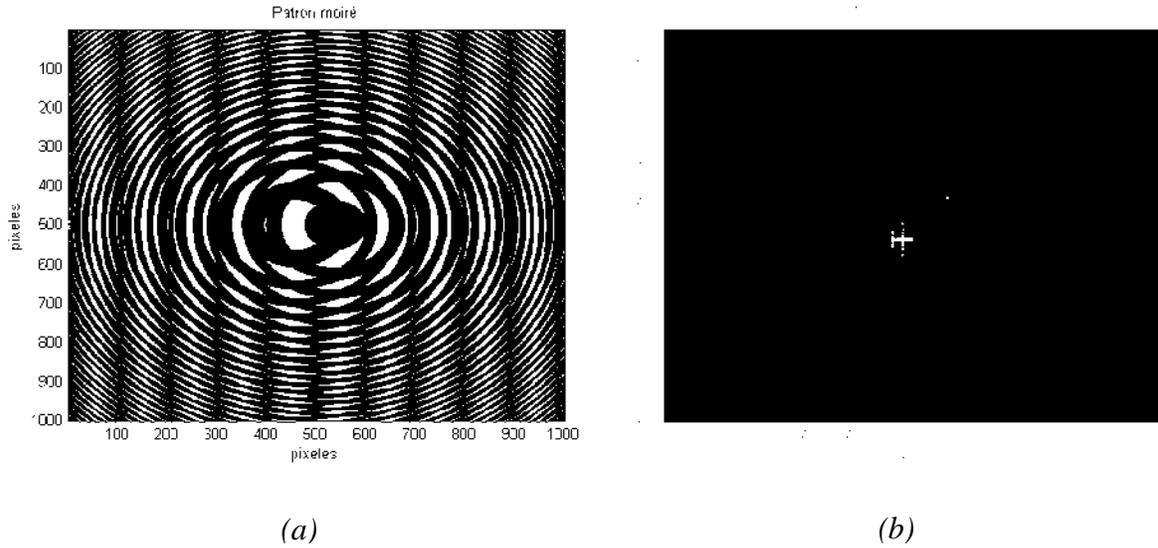


Figura 4.29 (a) Patrón de moiré que se obtiene al superponer las rejillas zonales (figura 4.28), (b) transformada de Fourier de la superposición de las placas zonales.



Figura 4.30 (a) Filtro para la transformada de Fourier de la superposición de las placas zonales (ver figura 4.27), (b) la transformada de Fourier con el filtro mostrado en la figura 4.30 (a) del patrón de moiré de la placa zonal.

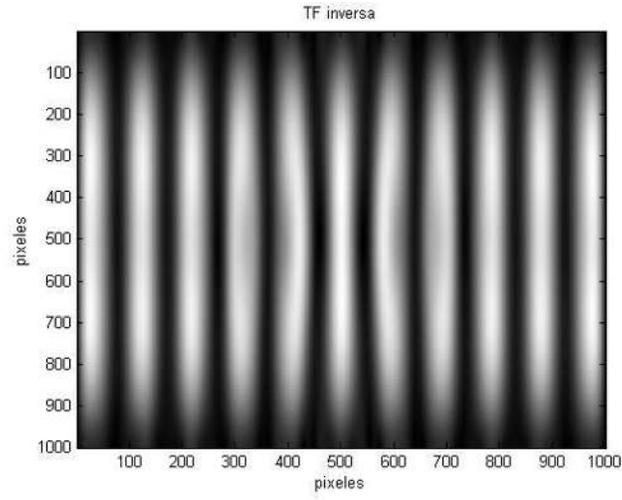


Figura 4.31 Imagen de la transformada inversa de Fourier de la superposición de las placas zonales filtrada.

Capítulo 5. Resultados

5.1. Ensayos de moiré en diferentes patrones de rejillas

Rejillas cosenoidales: *Franjas de moiré de rotación*

- Se generaron dos rejillas cosenoidales de igual período una de franjas con ángulo de -15° con respecto a la vertical y la otra que es la que queda sobrepuesta con franjas verticales, ambas ubicadas en el origen. Se dejó fija la rejilla de -15° y la rejilla de franjas verticales se fue desplazando (sobre la rejilla de franjas de -15°) hacia la derecha en 10, 20, 30, 40 y 50 píxeles. (ver figuras 5.1)

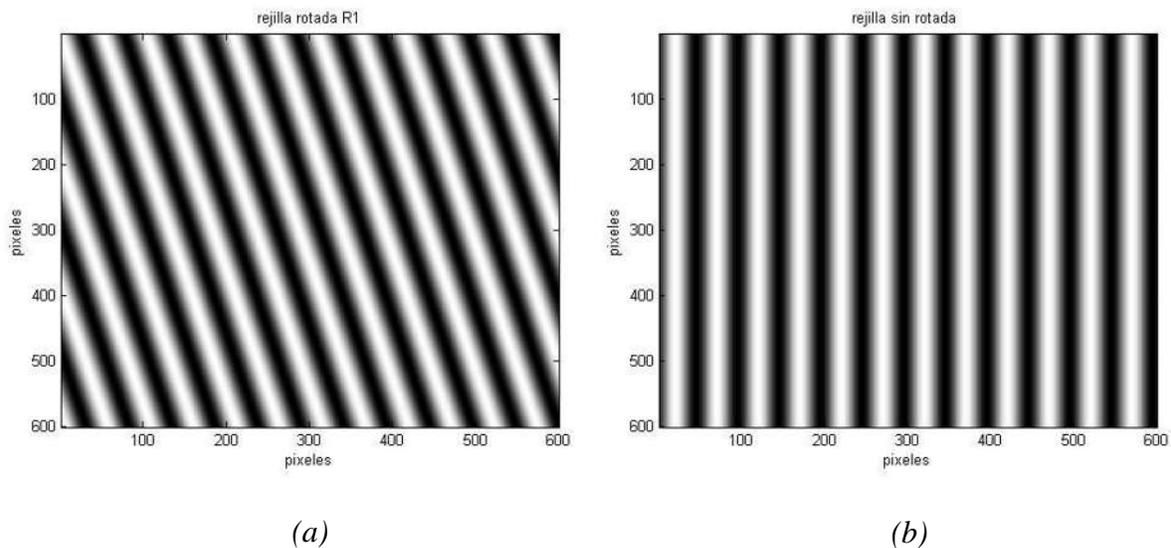


Figura 5.1(a) Rejilla cosenoidal con -15° respecto de la vertical, se le sobrepone (b) rejilla con franjas verticales que se desplaza hacia la derecha sobre la rejilla (a) en el eje "x" por 10 píxeles en cada paso.

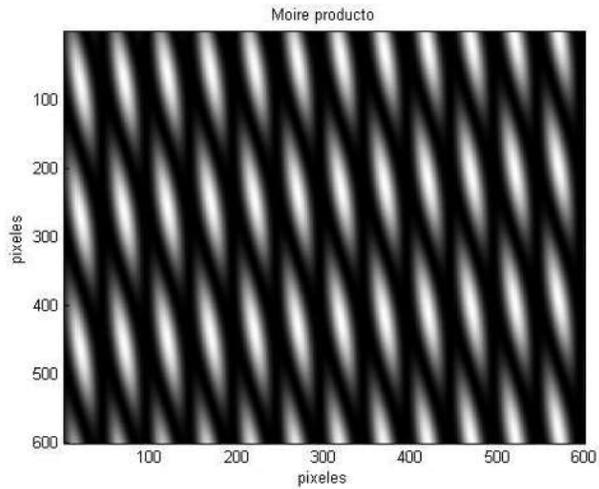


Figura 5.2 Patrón de moiré de la superposición de las dos rejillas de la figura 5.1.

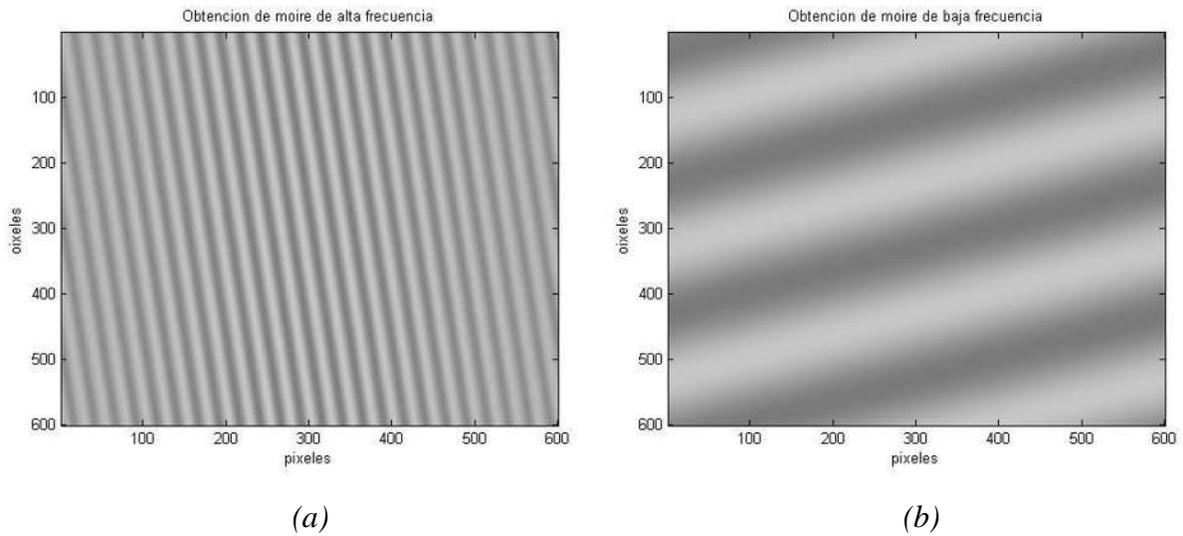


Figura 5.3 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas cosenoidales superpuestas (figura 5.2) desplazada en "x" por 10 píxeles (a) filtrada con filtro pasa alta (b) filtrada con filtro pasa baja.

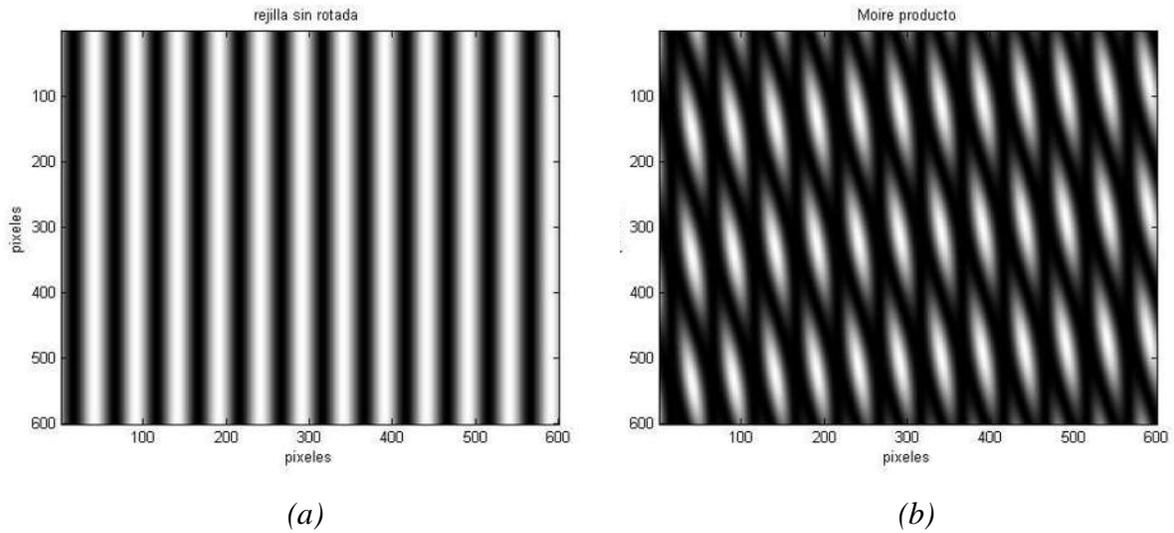


Figura 5.4 Rejilla cosenoidal: (a) rejilla con franjas verticales y se desplaza hacia la derecha en “x” por 20 pixeles. 10 pixeles más con respecto al moiré de la Figura 5.1, (b) patrón de moiré con la rejilla desplazada en “x” por 20 pixeles. El patrón de moiré se va desplazando en el eje vertical en sentido positivo y.

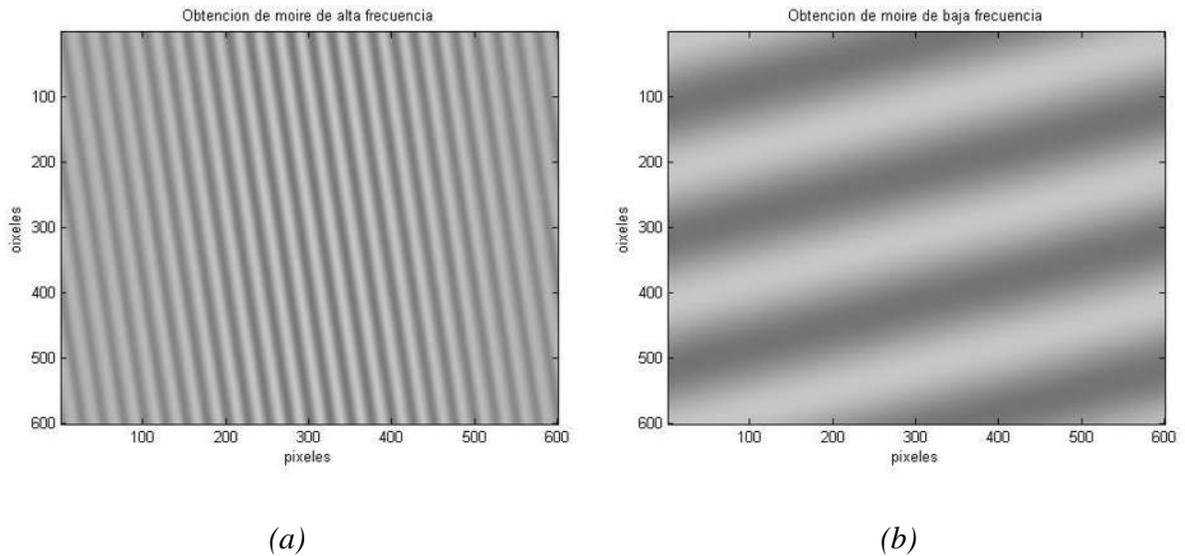


Figura 5.5 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas cosenoidales sobrepuestas (figura 5.4 (b)) desplazada en “x” por 20 pixeles (a) filtrada con filtro pasa alta (b) filtrada con filtro pasa baja.

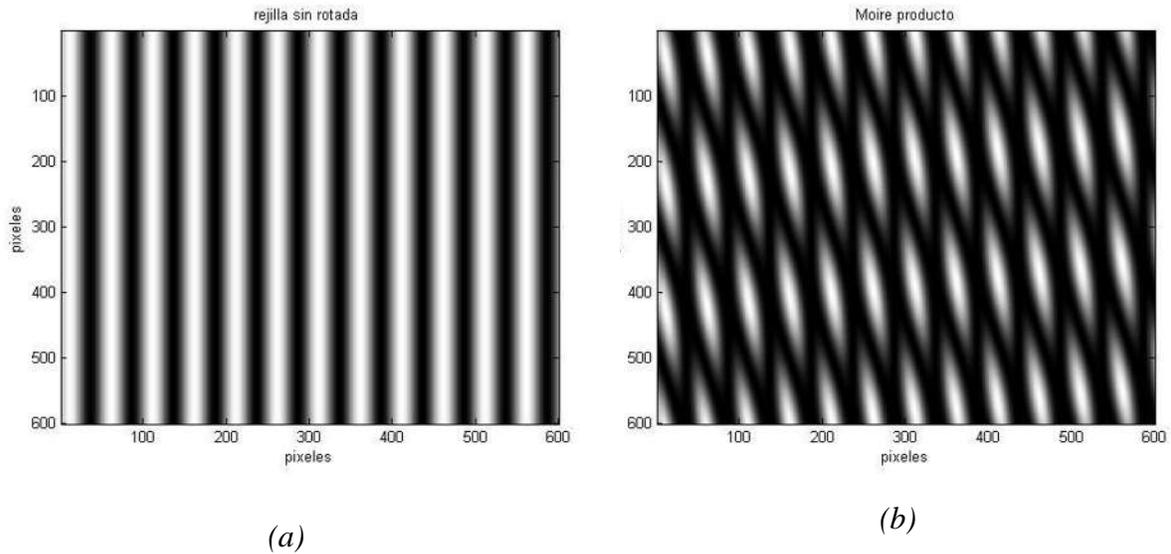


Figura 5.6 Rejilla cosenoidal: (a) rejilla con franjas verticales que se desplaza hacia la derecha en “x” por 30 pixeles respecto a la vertical. 20 pixeles más con respecto al moiré de la Figura 5.1, (b) patrón de moiré con la rejilla desplazada en “x” por 30 pixeles. El patrón de moiré se sigue desplazando en el eje vertical en sentido positivo y. Si se observa el patrón de moiré en la figura 5.2 se puede notar como tiene un patrón similar al presentado en esta figura 5.6.

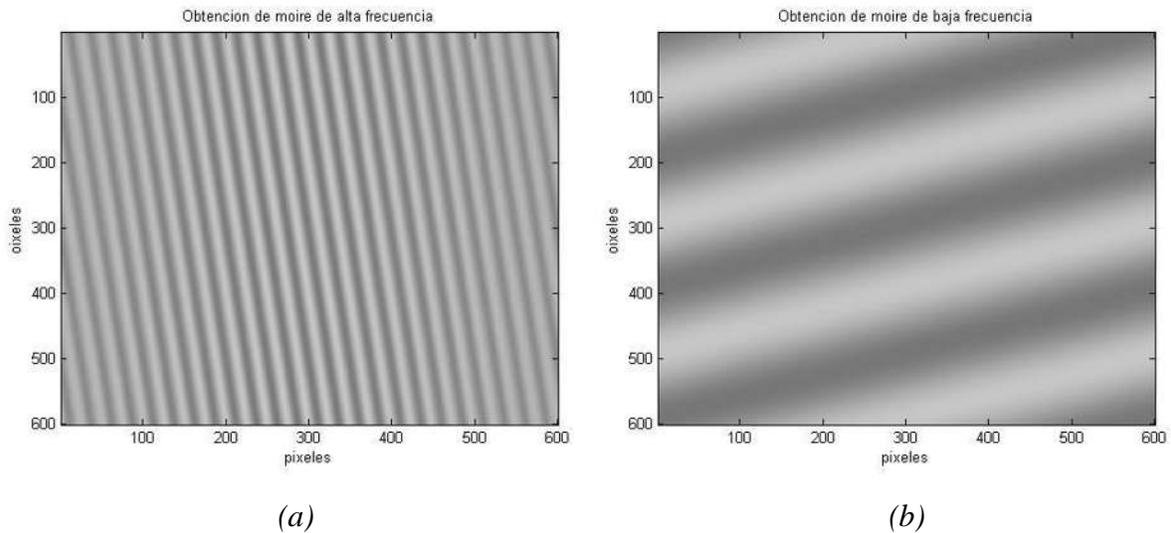


Figura 5.7 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas cosenoidales sobrepuestas (figura 5.6 (b)) desplazada en “x” por 30 pixeles (a) filtrada con filtro pasa alta (b) filtrada con filtro pasa baja.

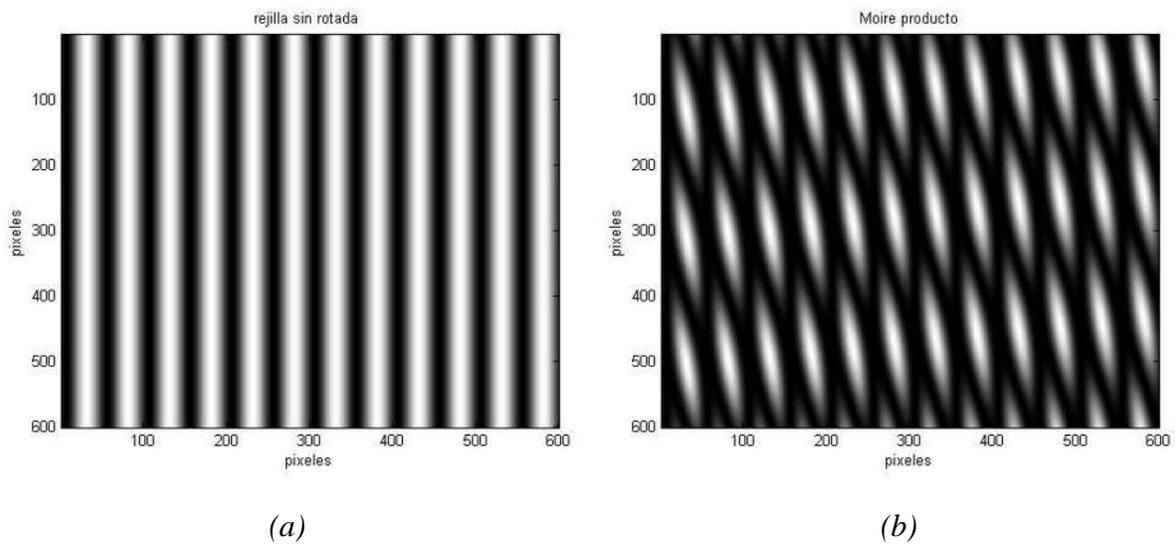


Figura 5.8 Rejilla cosenoidal: (a) rejilla con franjas verticales que se desplaza hacia la derecha en “x” por 40 pixeles. 30 pixeles más con respecto al moiré de la Figura 5.1, (b) patrón de moiré con la rejilla desplazada en “x” por 40 pixeles. El patrón de moiré se sigue desplazando en el eje vertical en sentido positivo y.

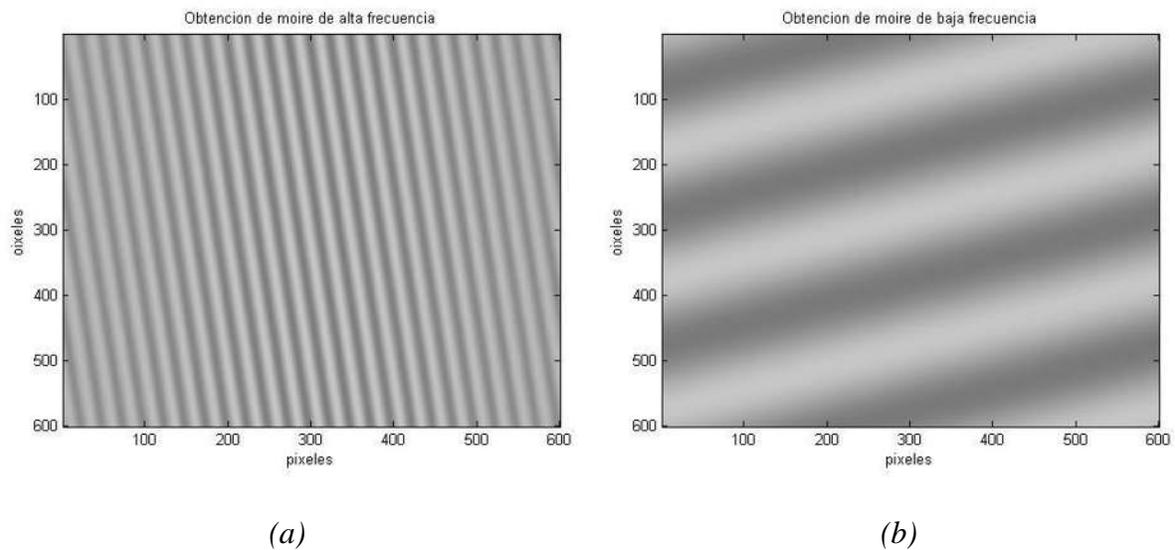
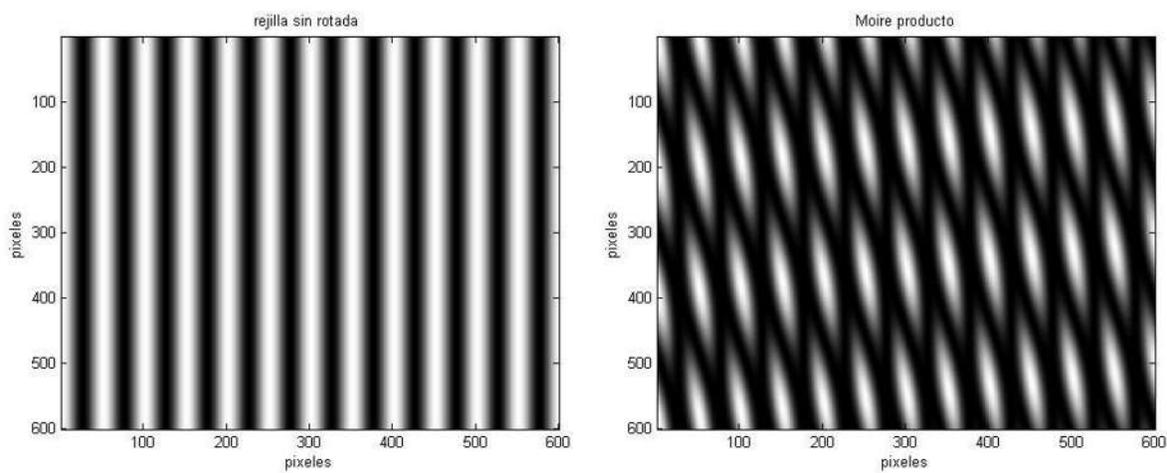


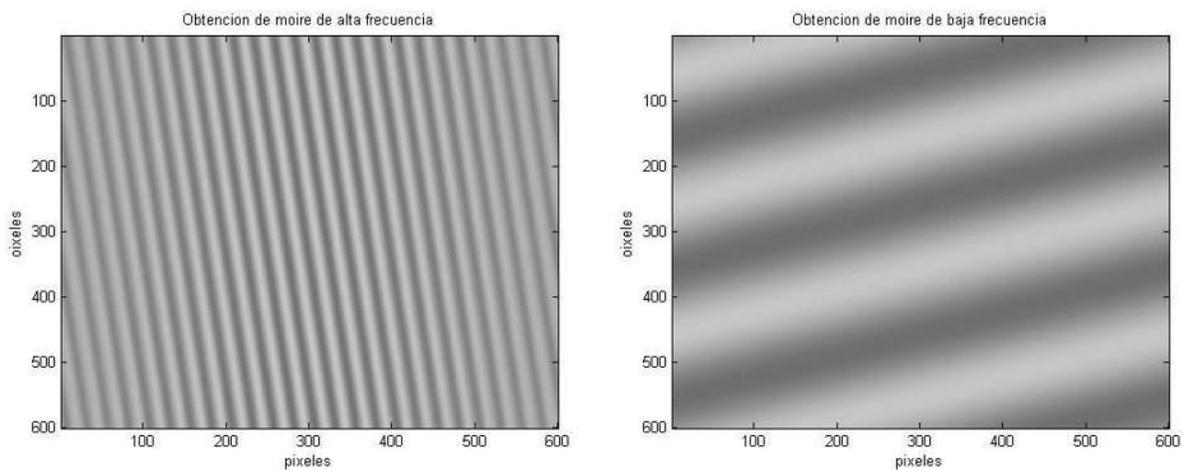
Figura 5.9 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas cosenoidales sobrepuestas (figura 5.8 (b)) desplazada en “x” por 40 pixeles (a) filtrada con filtro pasa alta (b) filtrada con filtro pasa baja.



(a)

(b)

Figura 5.10 Rejilla cosenoidal: (a) rejilla con franjas verticales que se desplaza hacia la derecha en “x” por 50 píxeles. 40 píxeles más con respecto al moiré de la Figura 5.1, (b) patrón de moiré con la rejilla desplazada en “x” por 50 píxeles.



(a)

(b)

Figura 5.11 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas cosenoidales superpuestas (figura 5.10 (b)) desplazada en “x” por 50 píxeles (a) filtrada con filtro pasa alta (b) filtrada con filtro pasa baja.

Rejillas binarias: *Franjas de moiré de rotación*

- Se generaron varias rejillas binarias con franjas de diferente ángulo (-20° , -30° , -40° y -50° con respecto a la vertical) y una rejilla binarias de franjas verticales que se superpone sobre las rejillas rotadas y se extrajeron sus respectivos efectos moiré con filtrados pasa baja y pasa alta

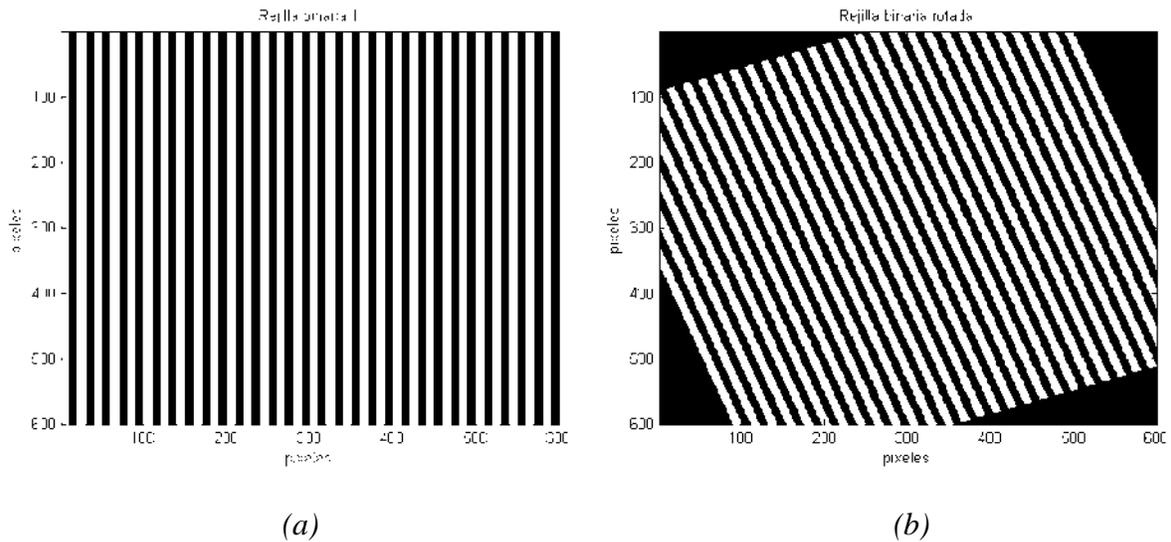
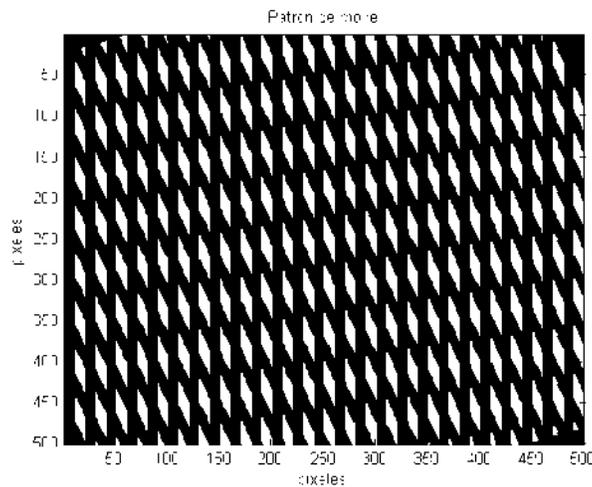


Figura 5.12(a) Rejilla binaria con franjas verticales, (b) rejilla binaria con una rotación de -20° respecto de la vertical.



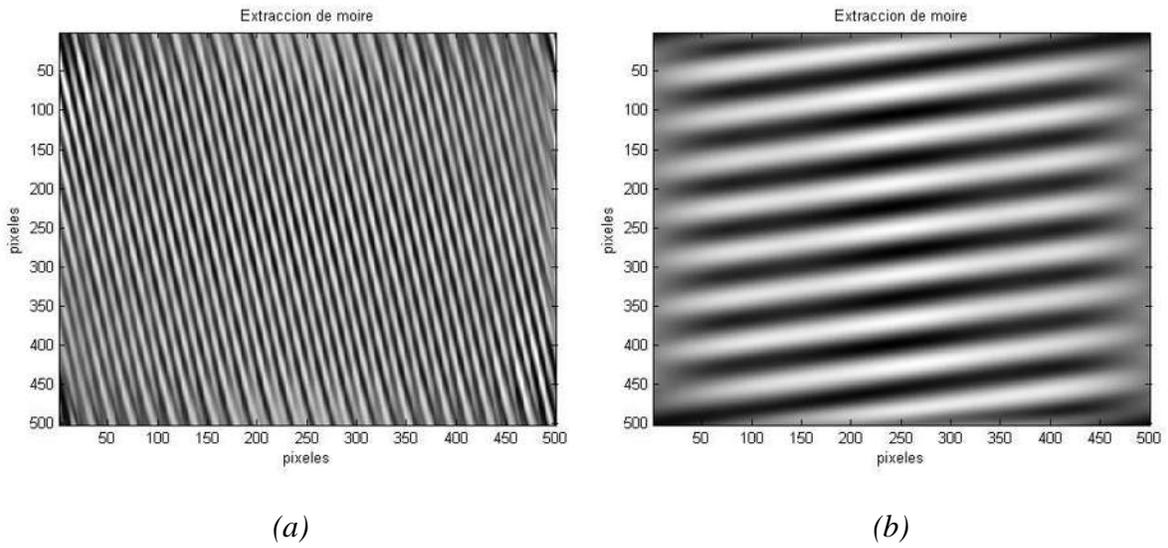


Figura 5.14 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias superpuestas (figura 5.13) rotada a -20° con respecto a la vertical (a) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de alta frecuencia (b) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de baja frecuencia.

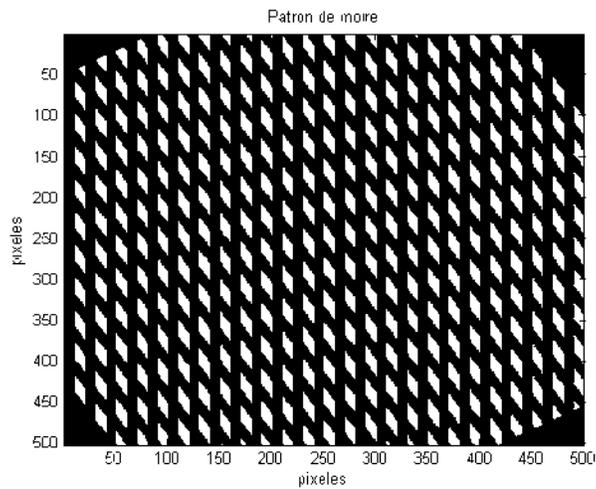


Figura 5.15 Patrón de moiré de la superposición de una rejilla binaria con franjas verticales y la otra rotada a -30° con respecto a la vertical.

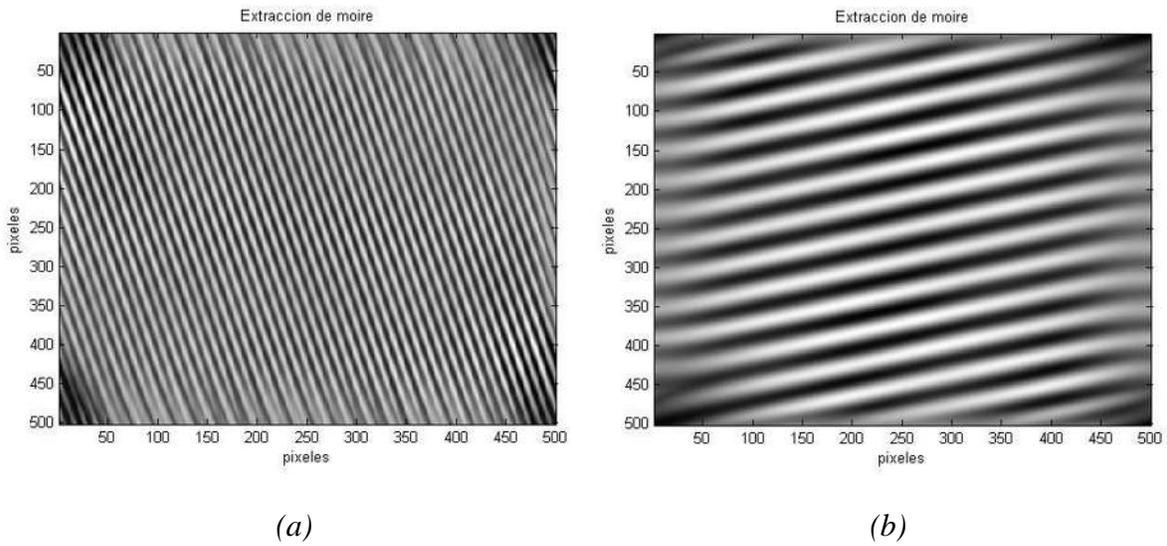


Figura 5.16 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias superpuestas (figura 5.15) rotada a -30° con respecto a la vertical (a) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de alta frecuencia (b) filtrada con filtro pasa banda, obtiene moiré de baja frecuencia.

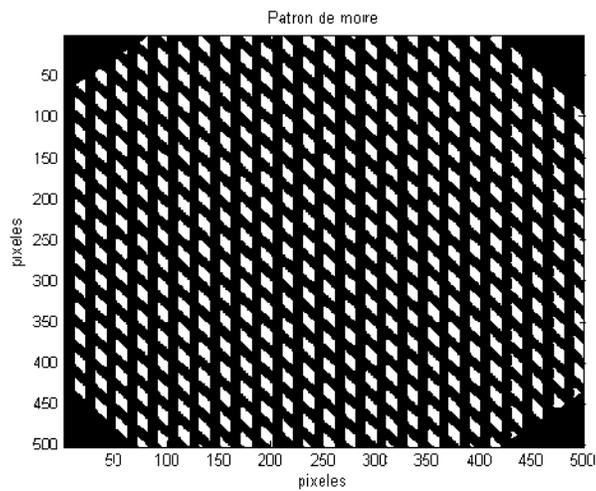


Figura 5.17 Patrón de moiré de la superposición de una rejilla binaria con franjas verticales y la otra rotada a -40° con respecto a la vertical.

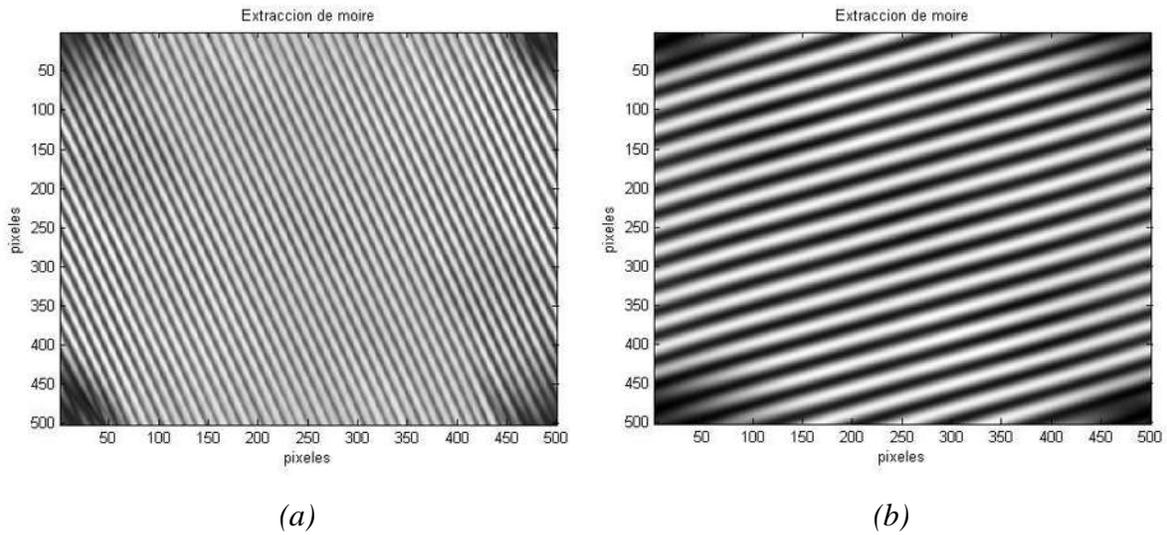


Figura 5.18 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias sobrepuestas (figura 5.17) rotada a -40° con respecto a la vertical (a) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de alta frecuencia (b) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de baja frecuencia.

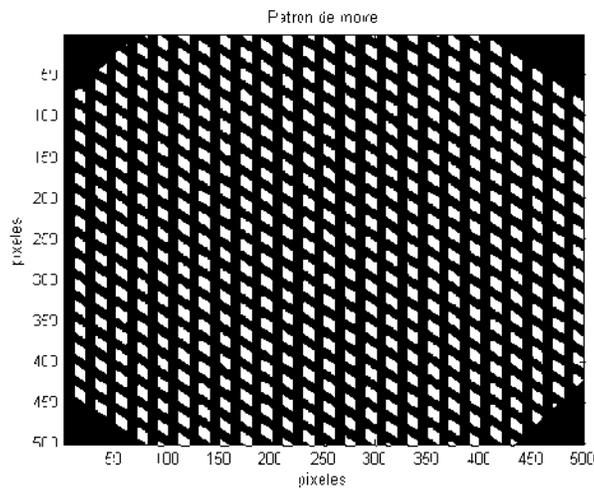


Figura 5.19 Patrón de moiré de la superposición de una rejilla binaria con franjas verticales y la otra rotada a -50° con respecto a la vertical.

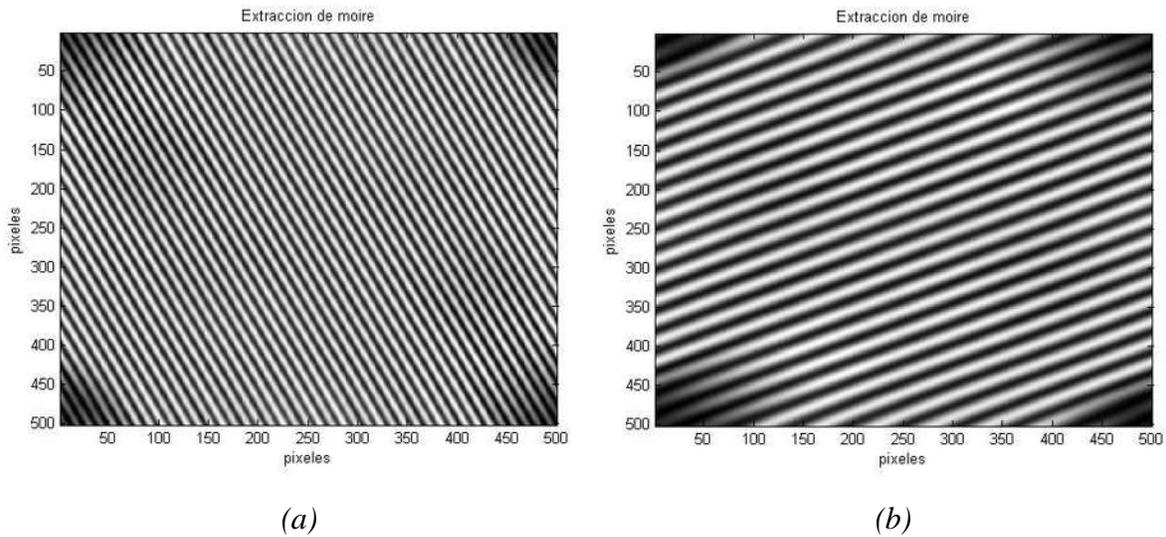


Figura 5.20 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias sobrepuestas (figura 5.19) rotada a -50° con respecto a la vertical (a) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de alta frecuencia (b) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de baja frecuencia.

Rejillas binarias: Franjas de moiré

- Se generaron tres rejillas binarias con franjas de período diferente (10, 13 y 16 pixeles) y una rejilla de 10 pixeles con ángulo de -10° que se sobrepuso sobre las tres anteriores de períodos diferentes y se realizaron filtrados pasa baja y pasa alta. Posteriormente se generaron dos rejillas más con período de 19 y 21 pixeles y al aplicarles el filtrado de pasa baja y pasa alta, no dan una imagen visible ya que como se mencionó anteriormente T_1 y T_2 no son iguales, por lo que se tuvo que hacer un barrido de filtraje en diferentes ángulos para encontrar el moiré.

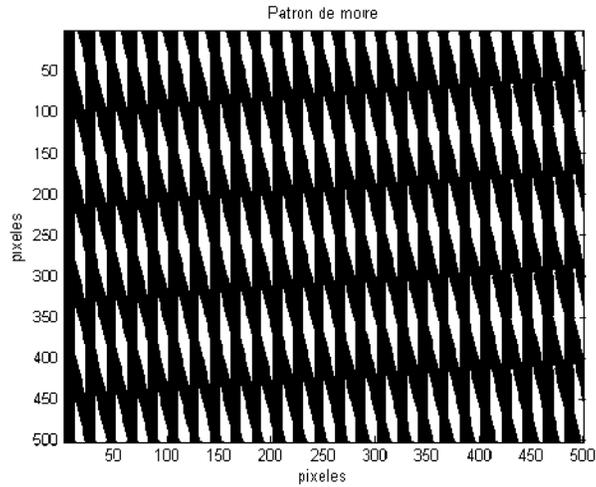


Figura 5.21 Patrón de moiré de la superposición de una rejilla binaria con la misma frecuencia y una rotada a un ángulo de -10° con respecto a la vertical.

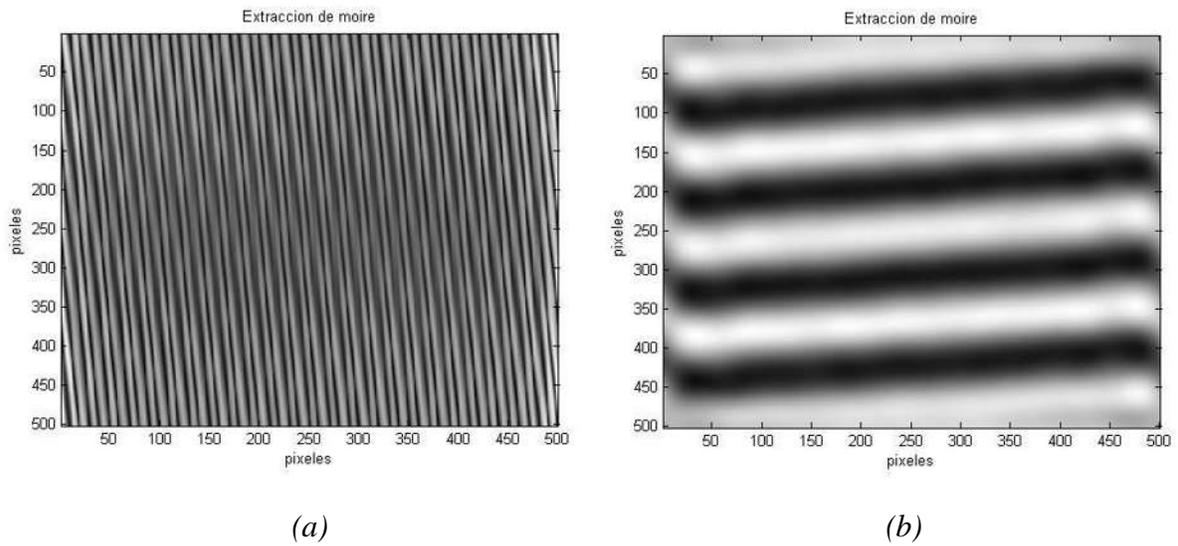


Figura 5.22 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias sobrepuestas (figura 5.18) rotada a -10° y con la misma frecuencia de 10 pixeles (a) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de alta frecuencia (b) filtrada con filtro pasa banda, se obtiene moiré de baja frecuencia.

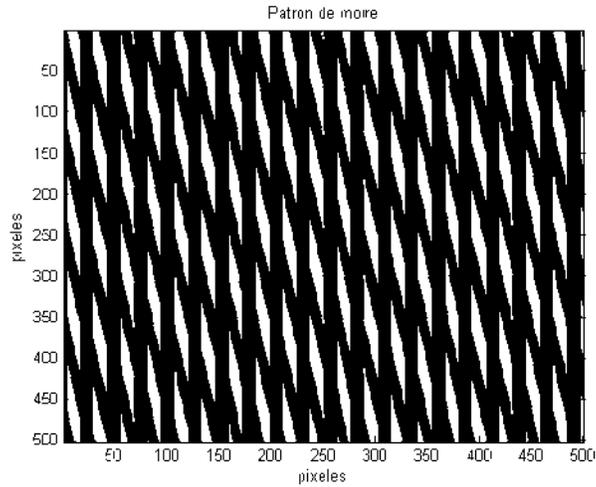


Figura 5.23 Patrón de moiré de la superposición de una rejilla binaria con diferente frecuencia de 13 píxeles, la otra con una frecuencia de 10 píxeles y rotada a un ángulo de menos 10° con respecto a la vertical.

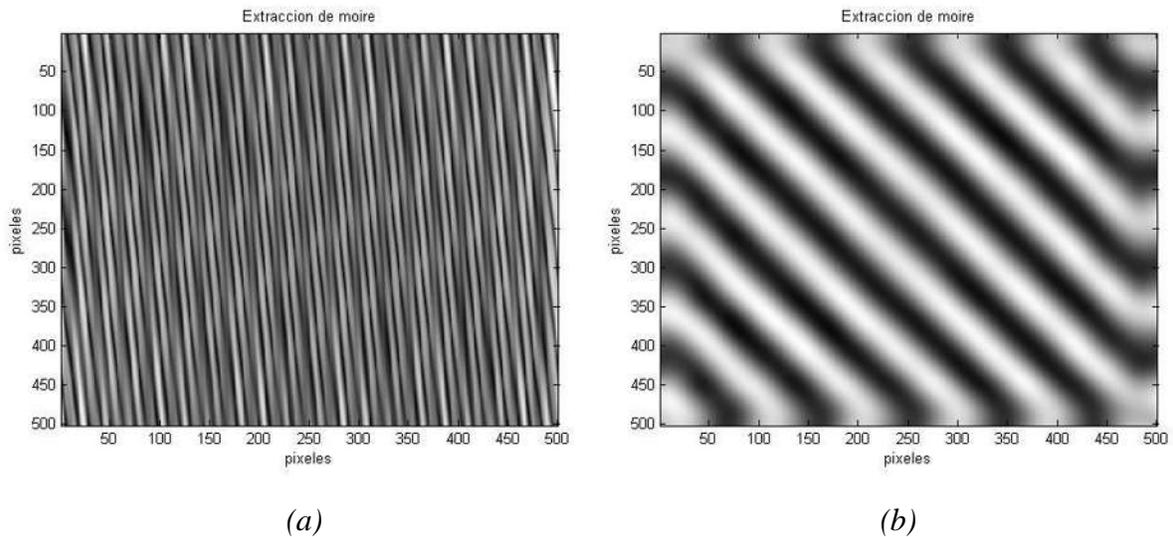


Figura 5.24 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias superpuestas (figura 5.20) con diferente frecuencia que tiene una de 13 píxeles y la otra con 10 píxeles (a) barrido con filtro pasa banda, para obtener moiré de alta frecuencia (b) barrido con filtro pasa banda, para obtener moiré de baja frecuencia.

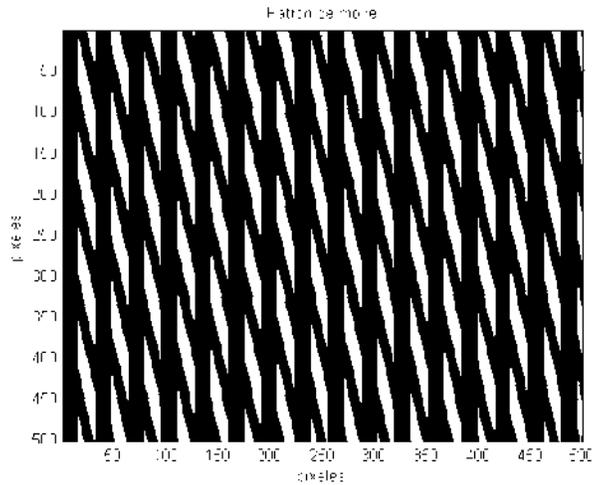


Figura 5.25 Patrón de moiré de la superposición de una rejilla binaria con diferente frecuencia de 16 píxeles, la otra con una frecuencia de 10 píxeles y rotada a un ángulo de menos 10° con respecto a la vertical.

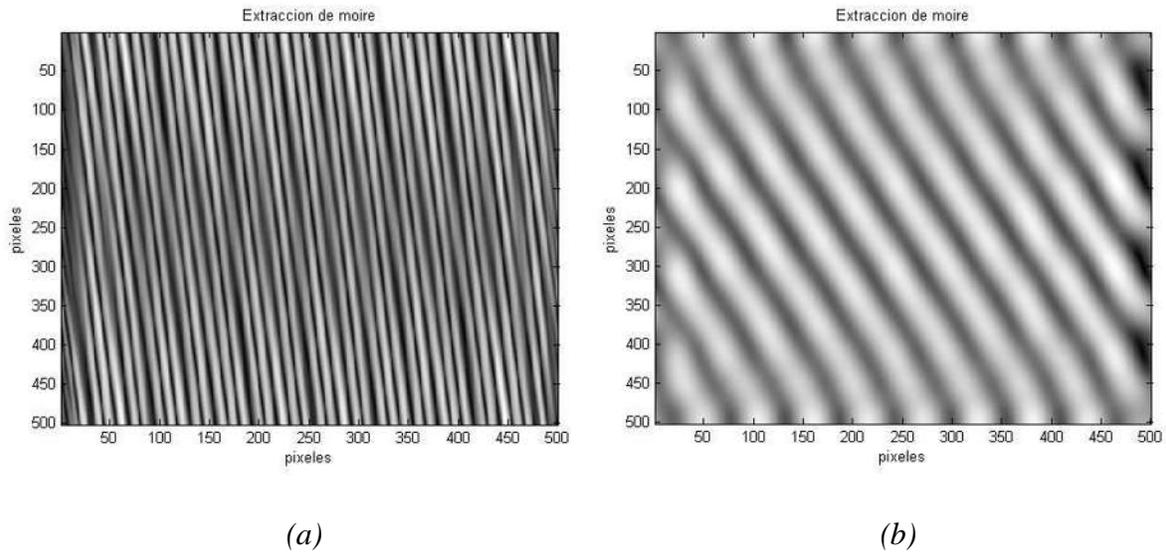
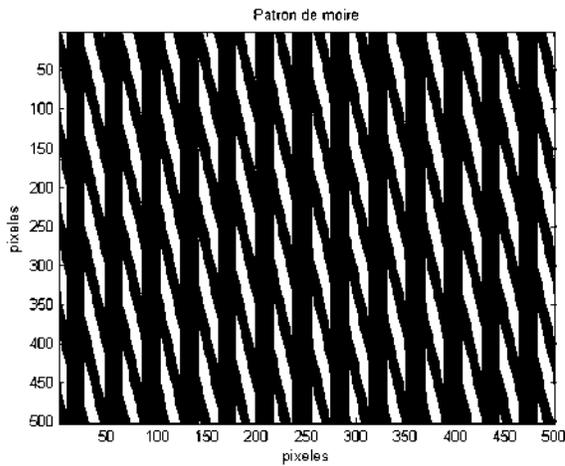
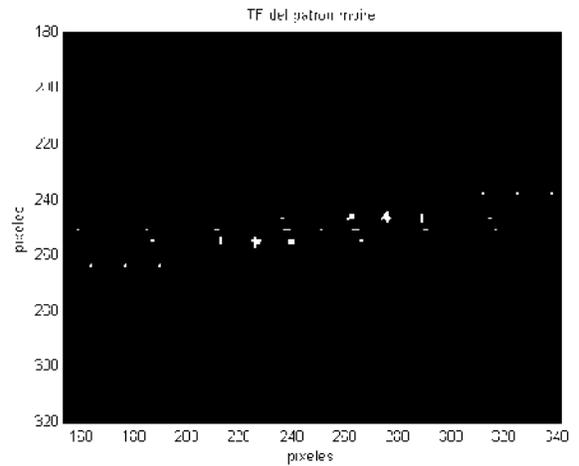


Figura 5.26 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias superpuestas (figura 5.21) con diferente frecuencia que tiene una de 16 píxeles y la otra con 10 píxeles (a) barrido con filtro pasa banda, para obtener moiré de alta frecuencia (b) barrido con filtro pasa banda, para obtener moiré de baja frecuencia.

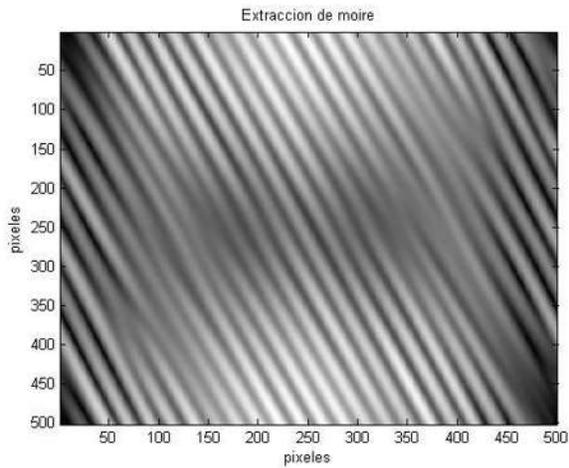


(a)

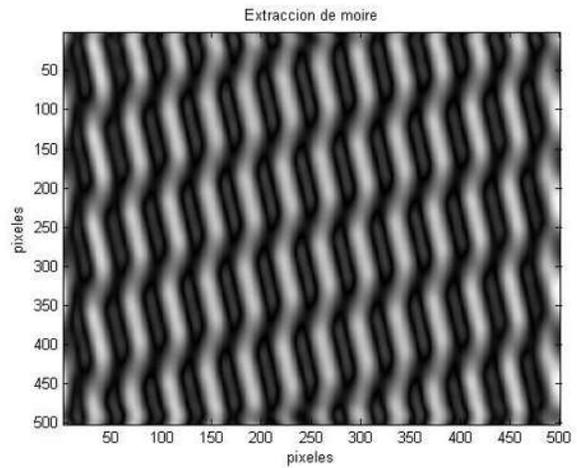


(b)

Figura 5.27 (a) Patrón de moiré de la superposición de una rejilla binaria con diferente frecuencia de 19 píxeles, la otra con una frecuencia de 10 píxeles y rotada a un ángulo de menos 10° con respecto a la vertical, (b) su transformada de Fourier.



(a)



(b)

Figura 5.28 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias sobrepuestas (figura 5.27) con diferente frecuencia, una de 19 píxeles y la otra de 10 píxeles (a) barrido con filtro pasa banda, para obtener moiré de alta frecuencia, (b) barrido con filtro pasa banda, para obtener moiré de baja frecuencia.

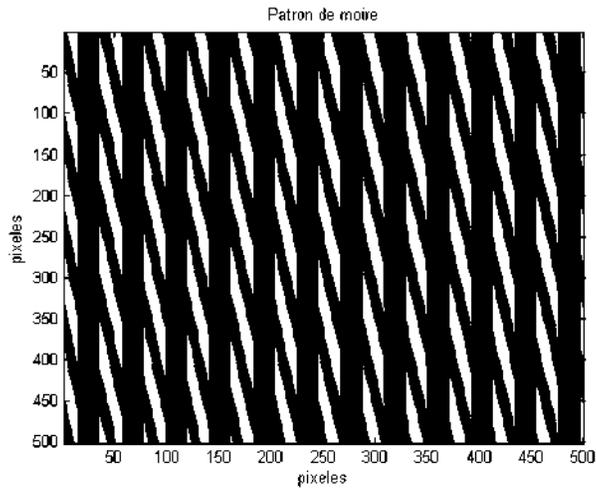


Figura 5.29 Patrón de moiré de la superposición de una rejilla binaria con diferente frecuencia de 21 píxeles, la otra con una frecuencia de 10 píxeles y rotada a un ángulo de menos 10° con respecto a la vertical.

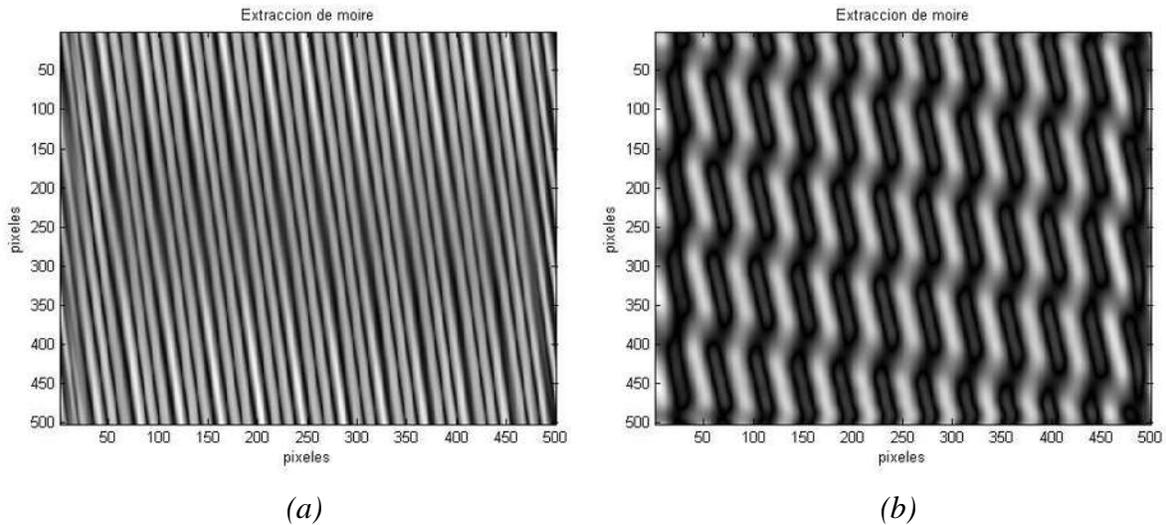


Figura 5.30 Transformada inversa de Fourier del moiré obtenido de las rejillas binarias sobrepuestas (figura 5.29) (a) barrido con filtro pasa banda, para obtener moiré de alta frecuencia, (b) barrido con filtro pasa banda, para obtener moiré de baja frecuencia.

Rejillas circulares: *Patrones de moiré de extensión*

- Se generaron dos rejillas circulares que se superponen y se ubican en el origen las dos, posteriormente se van realizando diferentes desplazamientos de la rejilla sobrepuesta, se ensayó primero con 10 pixeles y enseguida con -10 pixeles en el eje “x”, igualmente se ensayó con 20, 30, 40 y 50 pixeles y sus simétricos en -20, -30, -40 y -50. También se ensayó con desplazamientos en el eje “y” con 10, 20, 30, 40 y 50 pixeles.

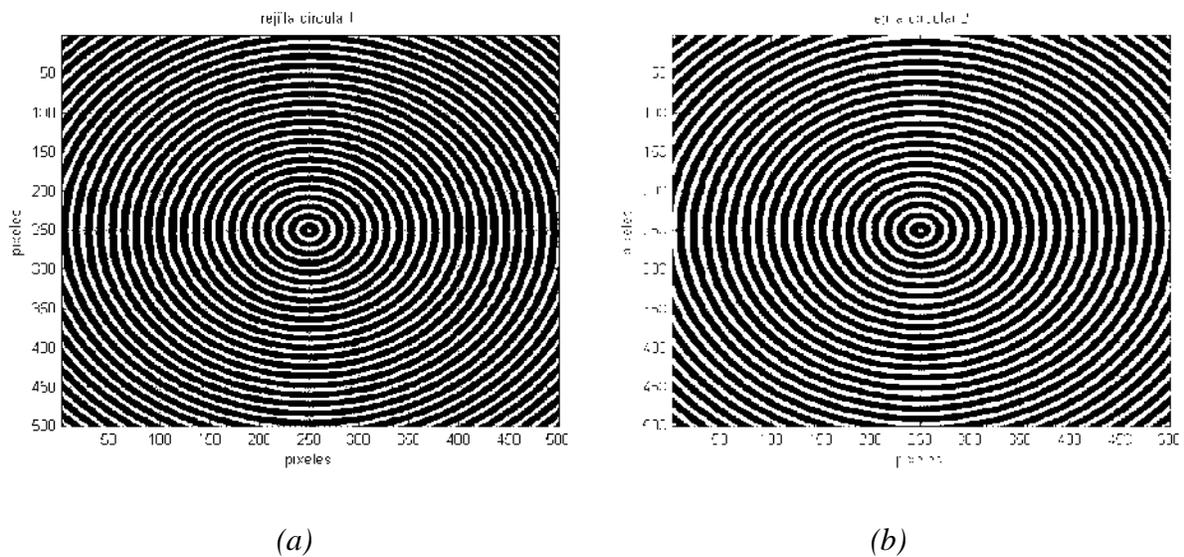


Figura 5.31(a) Rejilla circular centrada, (b) rejilla circular con una frecuencia 0.5 pixeles mayor con respecto (a).

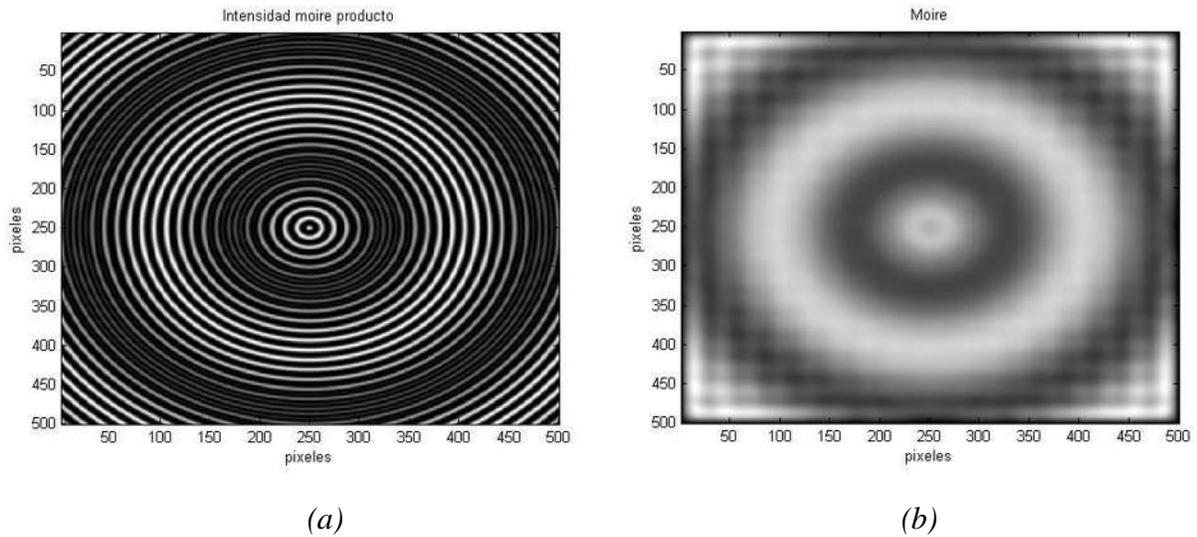


Figura 5.32(a) Patrón de moiré de la superposición en el origen de dos rejillas circulares con una 0.5 pixeles más de frecuencia respecto a la otra, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

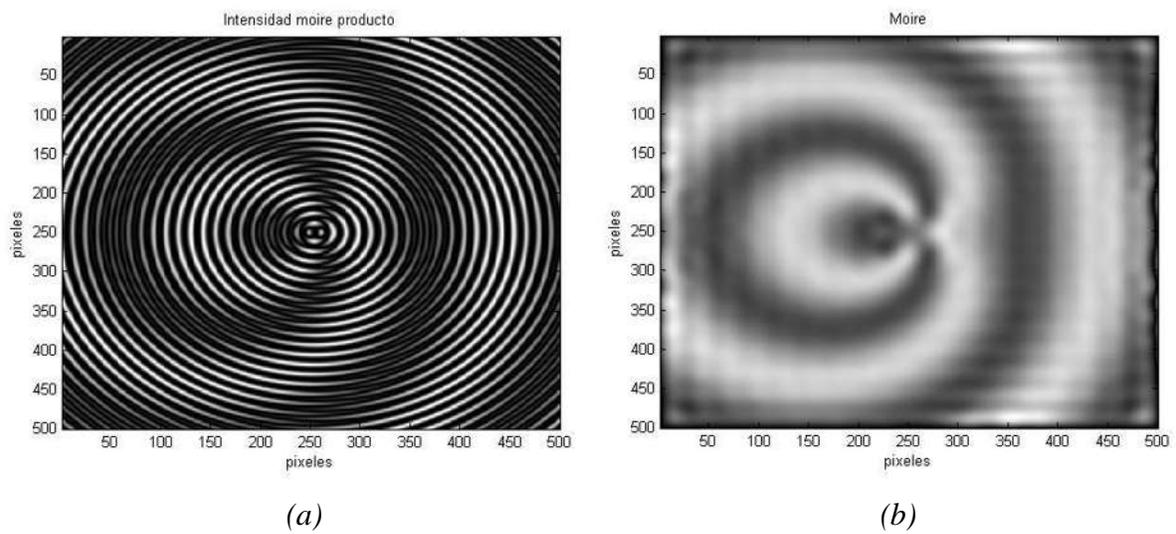


Figura 5.33(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a 10 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

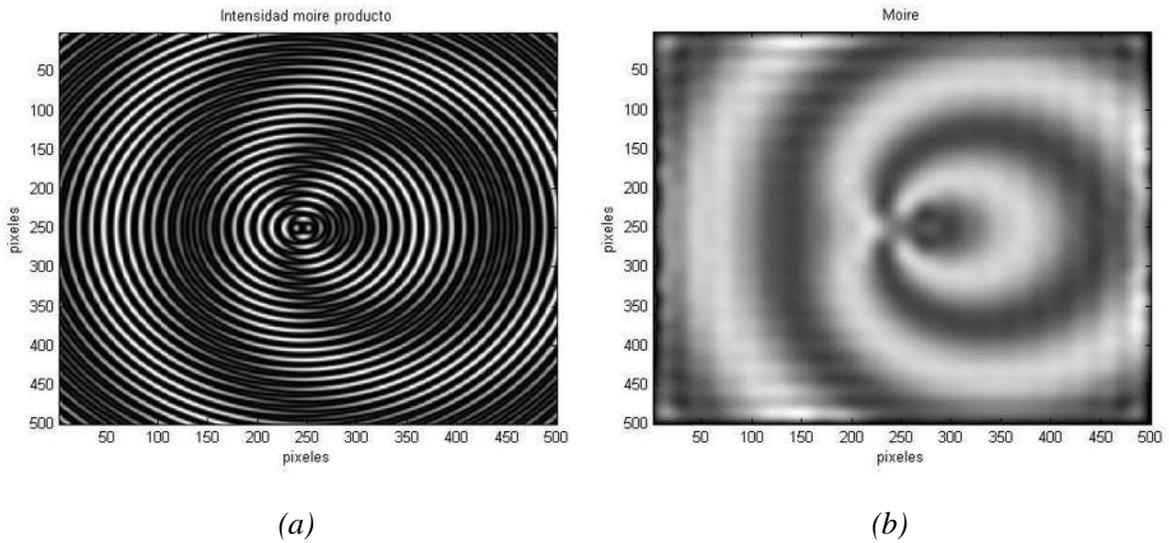


Figura 5.34(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 píxeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a -10 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

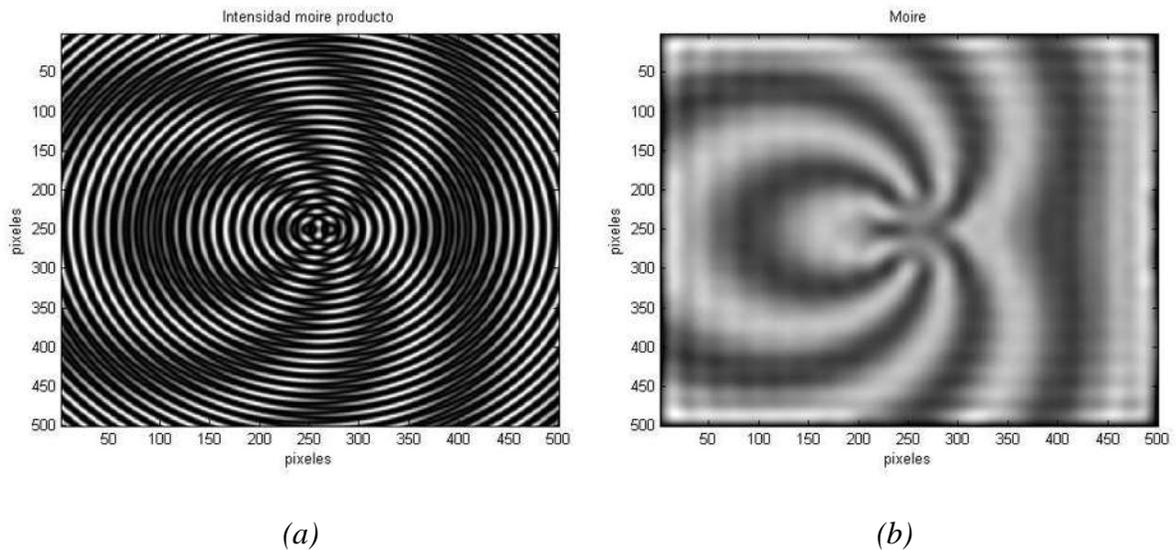
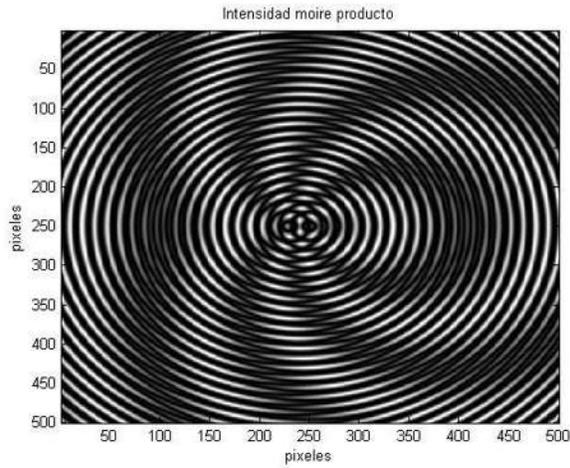
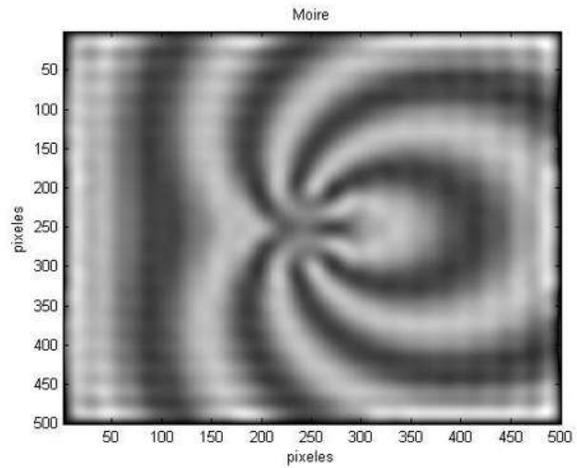


Figura 5.35(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 píxeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a 20 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

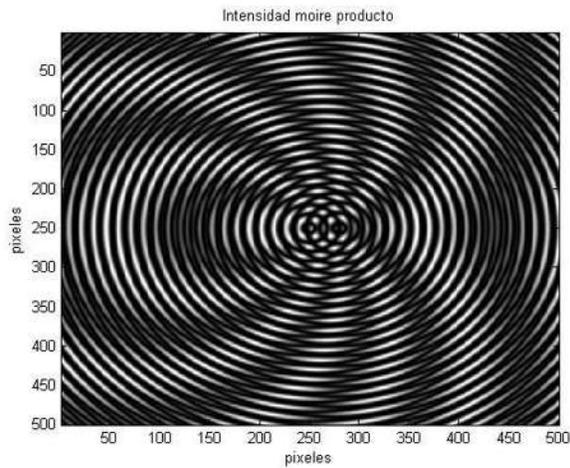


(a)

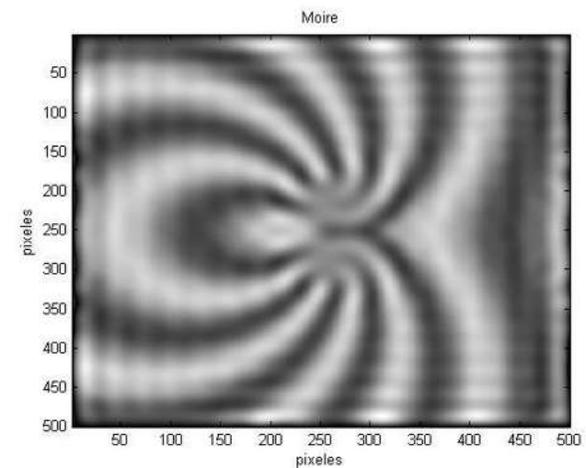


(b)

Figura 5.36(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a -20 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.



(a)



(b)

Figura 5.37(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a 30 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

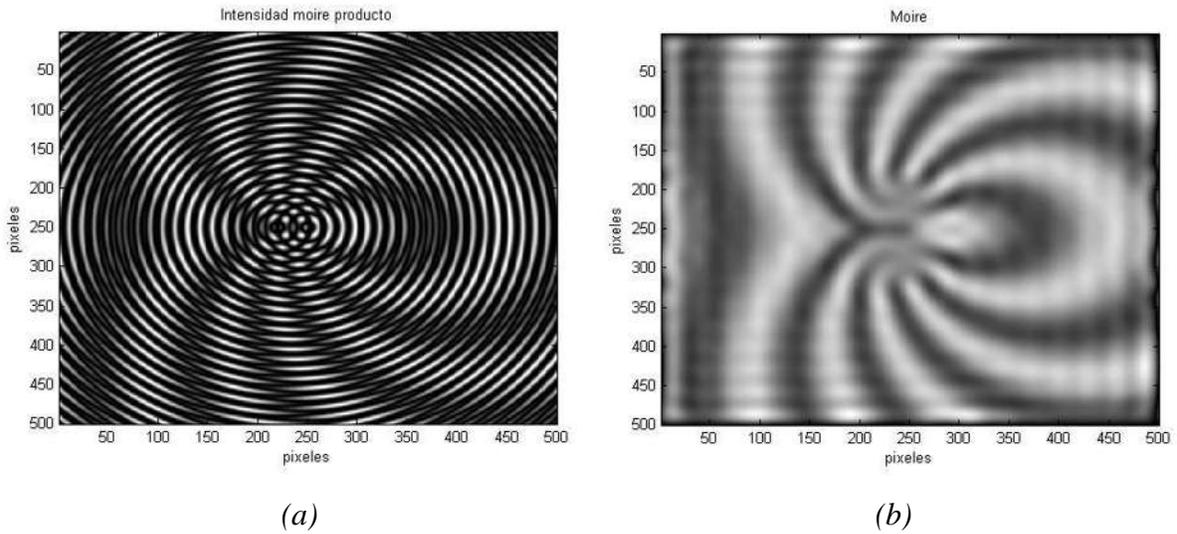


Figura 5.38(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a -30 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

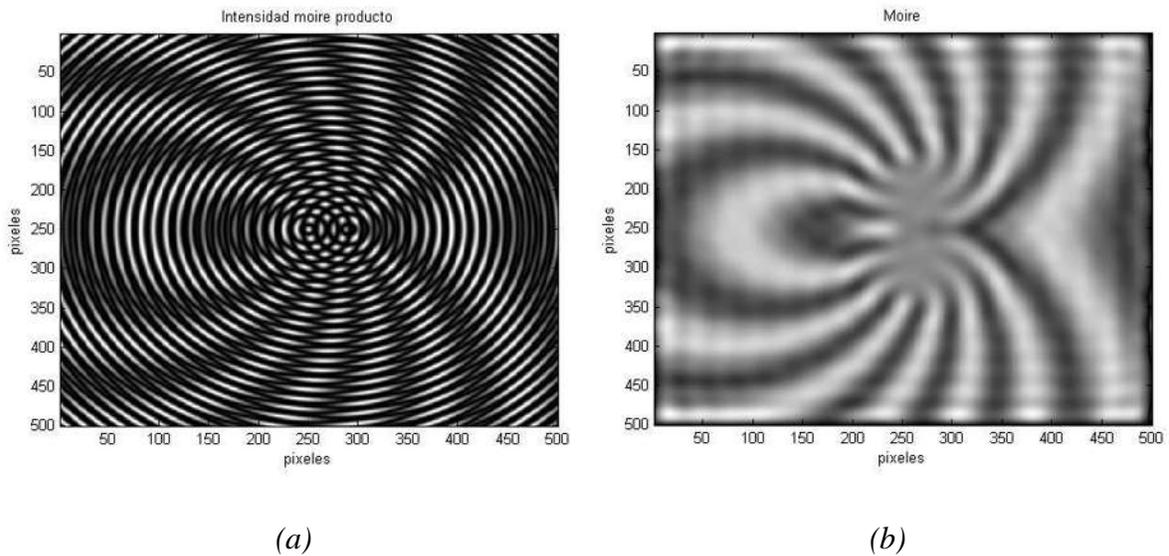
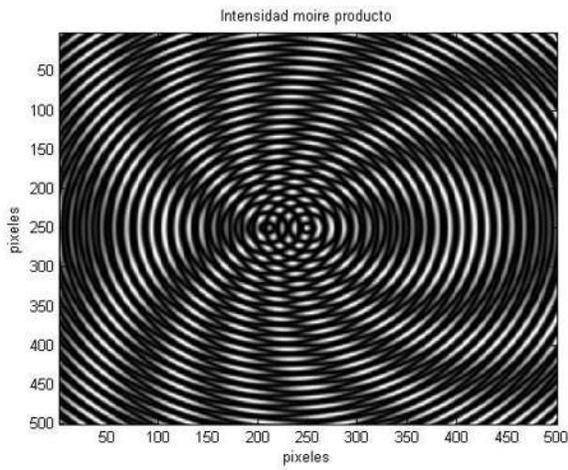
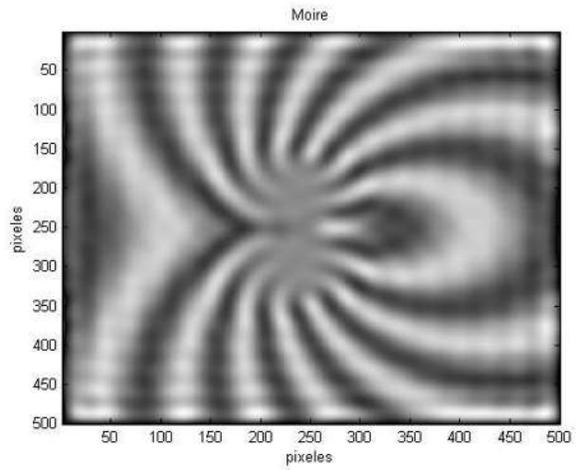


Figura 5.39(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a 40 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

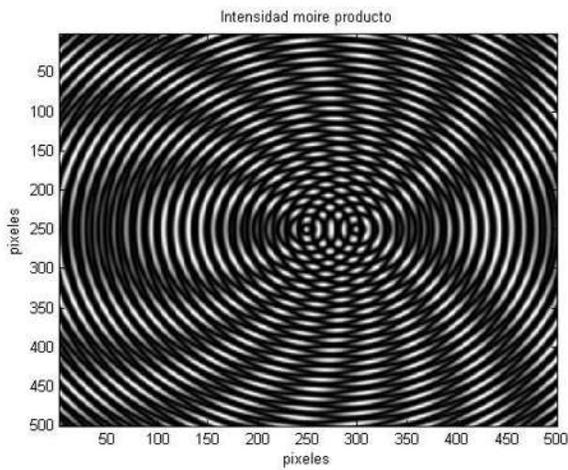


(a)

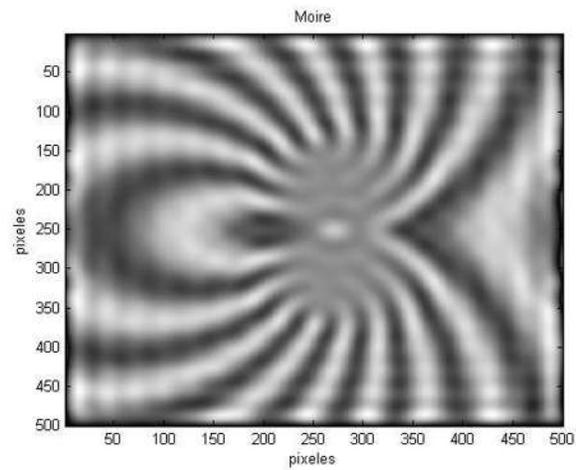


(b)

Figura 5.40(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a -40 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.



(a)



(b)

Figura 5.41(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 píxeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a 50 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

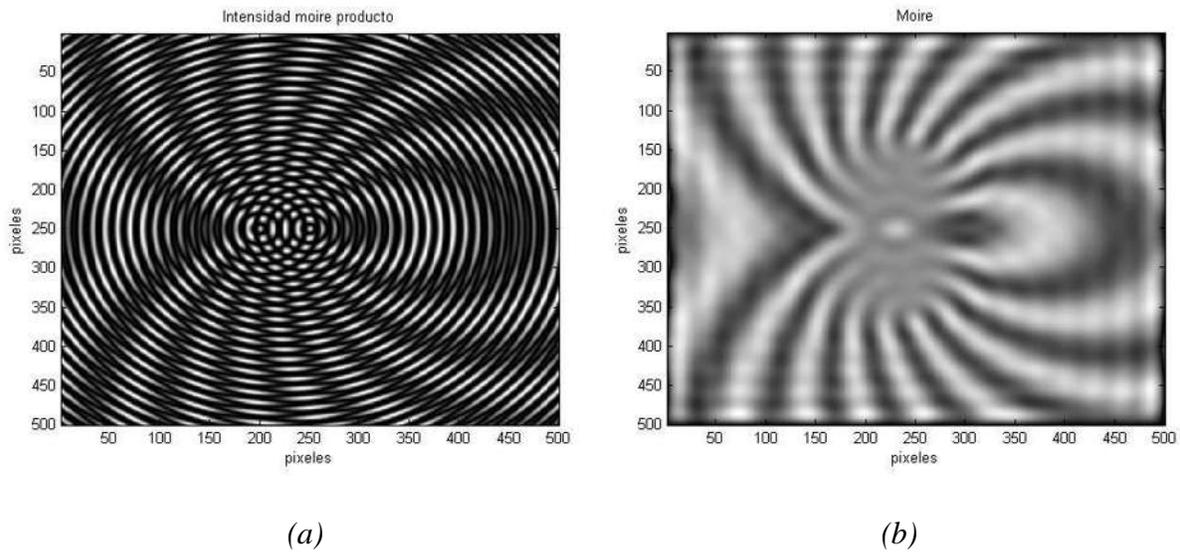


Figura 5.43(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada lateralmente en x a -50 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con pasa banda.

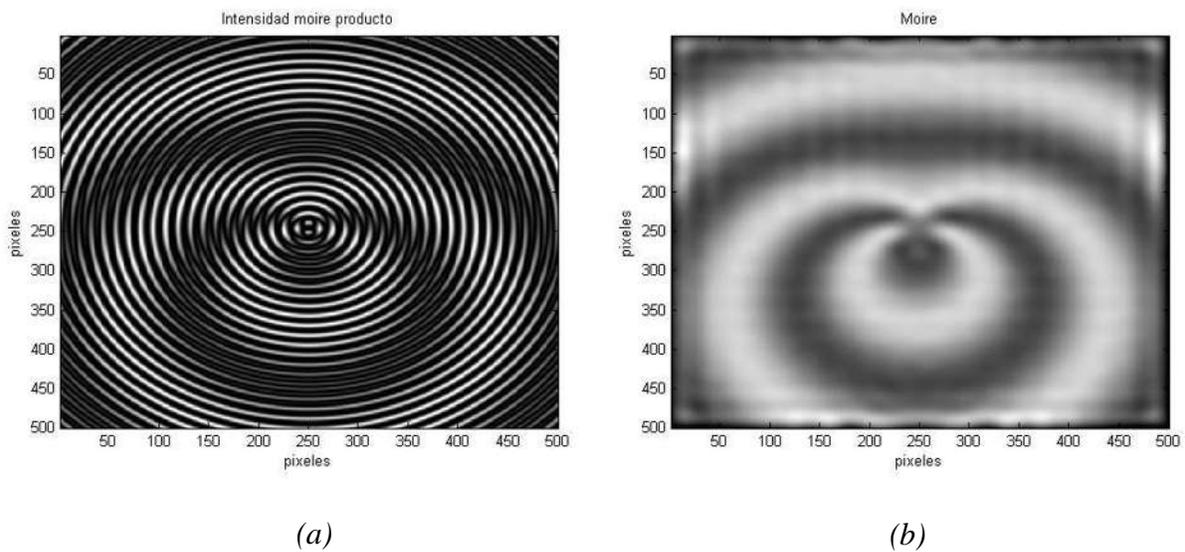


Figura 5.43(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada verticalmente hacia abajo en el eje y a -10 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

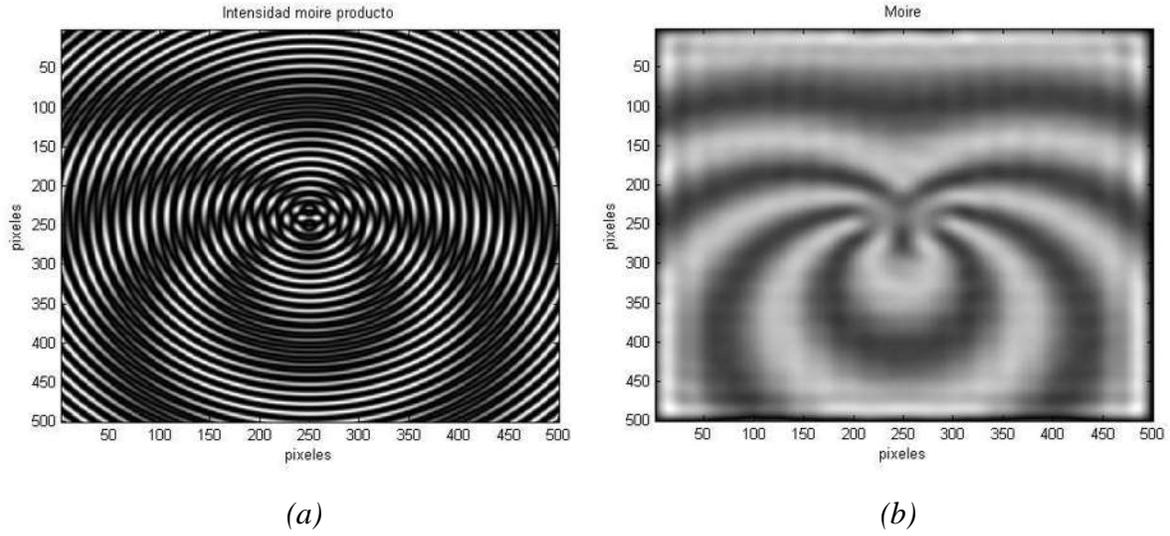


Figura 5.44(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada verticalmente hacia abajo en el eje y a -20 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

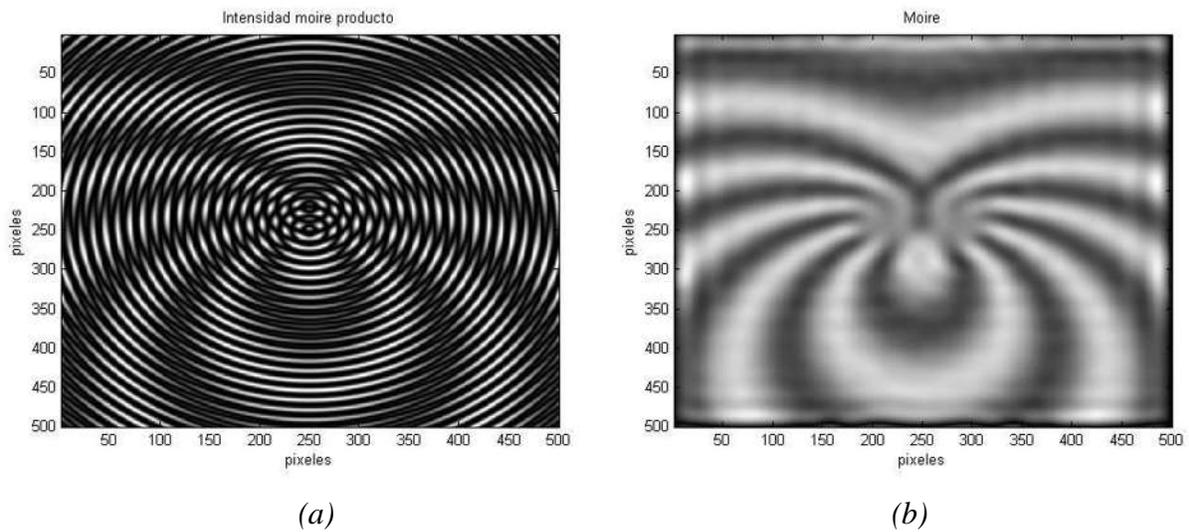


Figura 5.45(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 pixeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada verticalmente hacia abajo en el eje y a -30 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

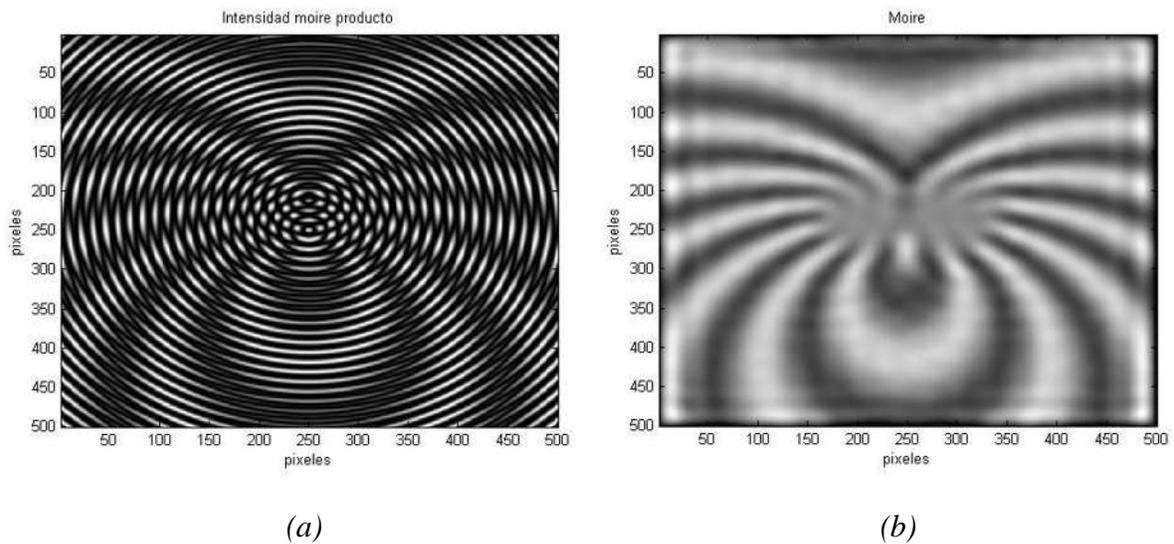


Figura 5.46(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 píxeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada verticalmente hacia abajo en el eje y a -40 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

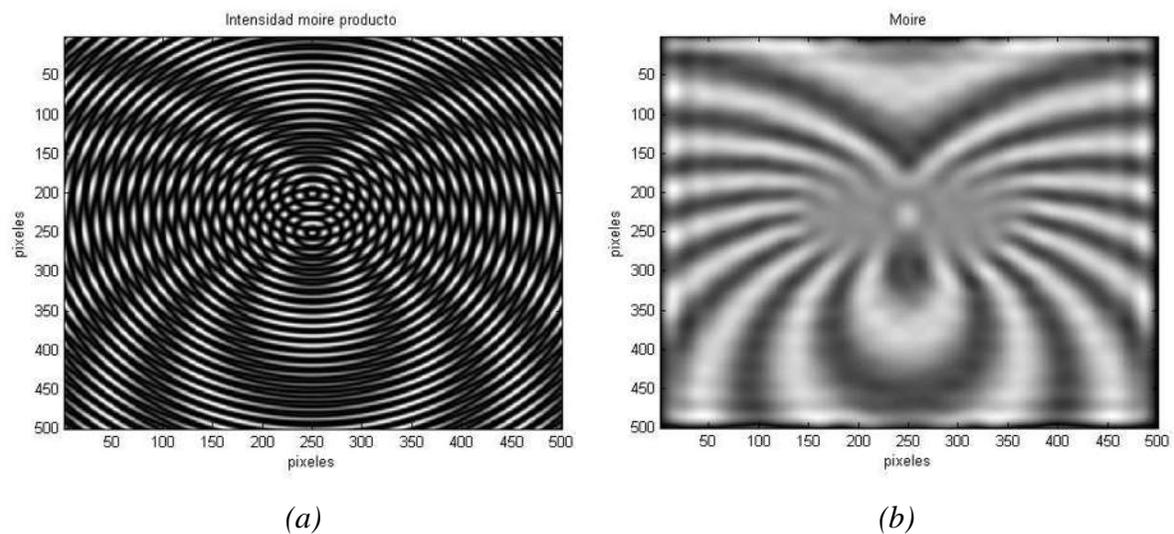


Figura 5.47(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas circulares con una fija en el origen y la otra con 0.5 píxeles más de frecuencia con respecto a la otra y desplazada verticalmente hacia abajo en el eje y a -50 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

Rejillas zonales de igual frecuencia:

- Se generaron dos placas zonales que se superponen y se ubican en el origen las dos, posteriormente se van realizando diferentes desplazamientos de la rejilla sobrepuesta, se ensayó con 20, 40, 60, 80 y 100 píxeles. Posteriormente se ensayó desplazando al mismo tiempo ambas rejillas en sentidos opuestos al origen -20 y 20, -40 y 40, -60 y 60, -80 y 80, -100 y 100 píxeles.

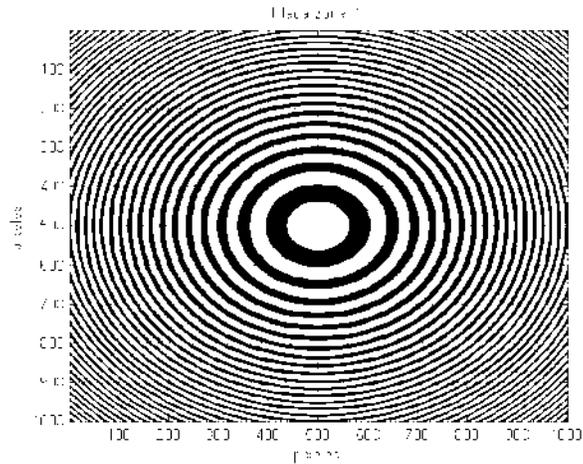


Figura 5.48 Rejilla zonal en el centro.

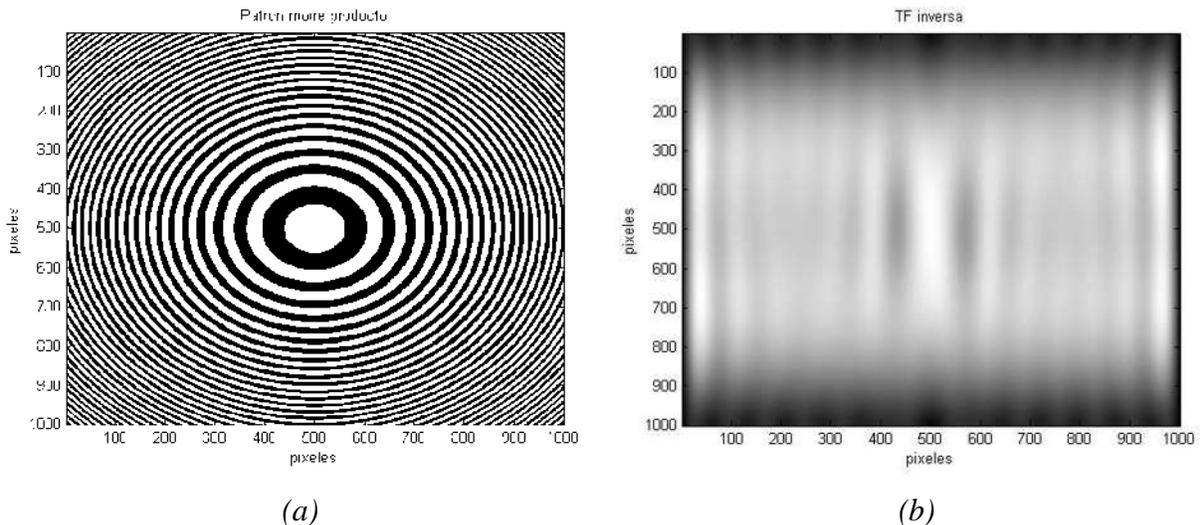


Figura 5.49(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales ambas en la misma posición, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

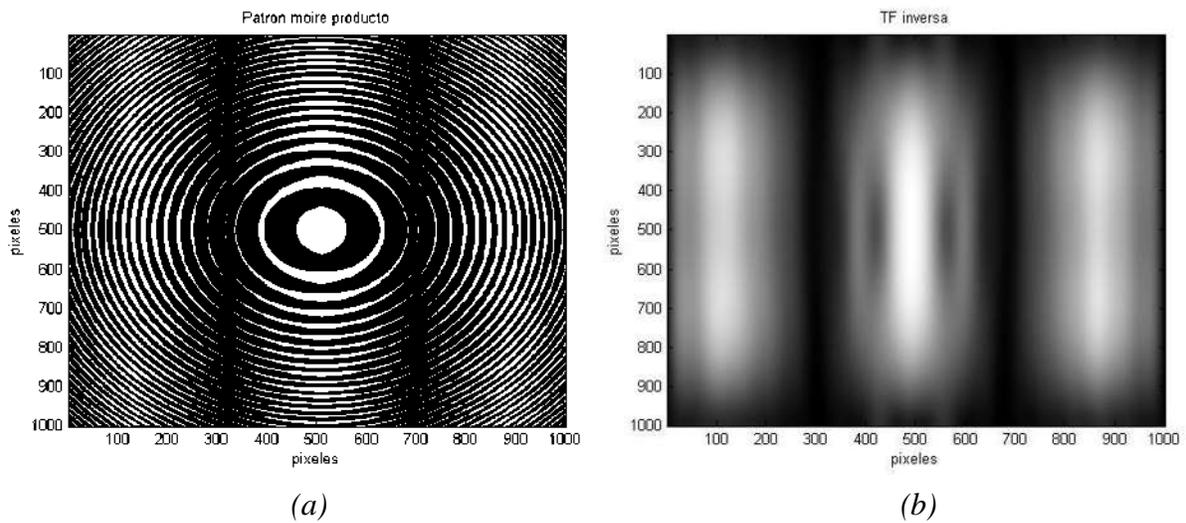


Figura 5.50(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con una fija en el origen y la otra desplazada horizontalmente hacia derecha en x a 20 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

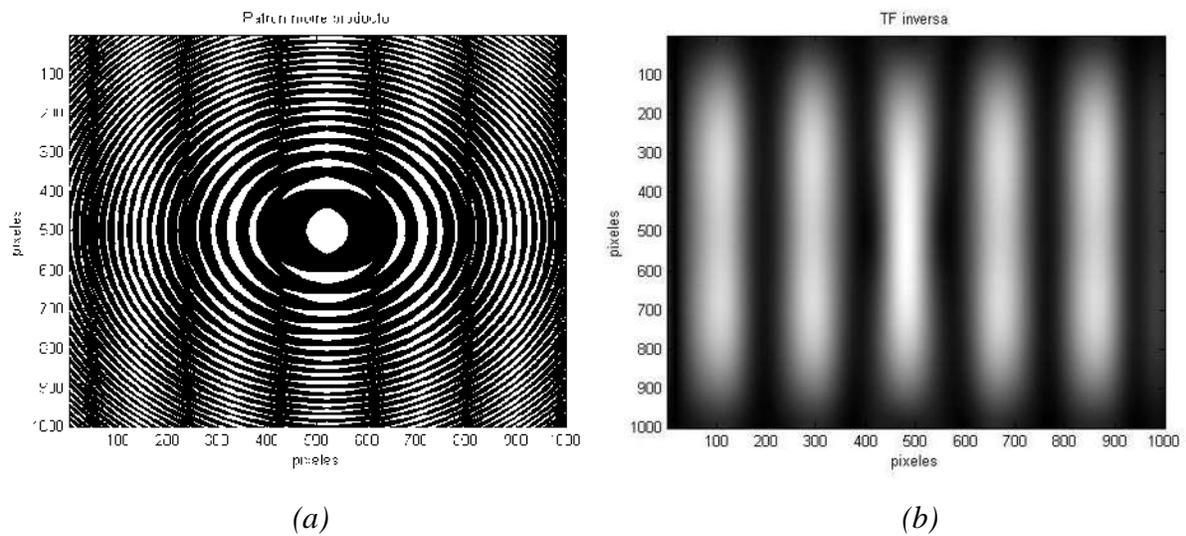


Figura 5.51(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con una fija en el origen y la otra desplazada horizontalmente hacia derecha en x a 40 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

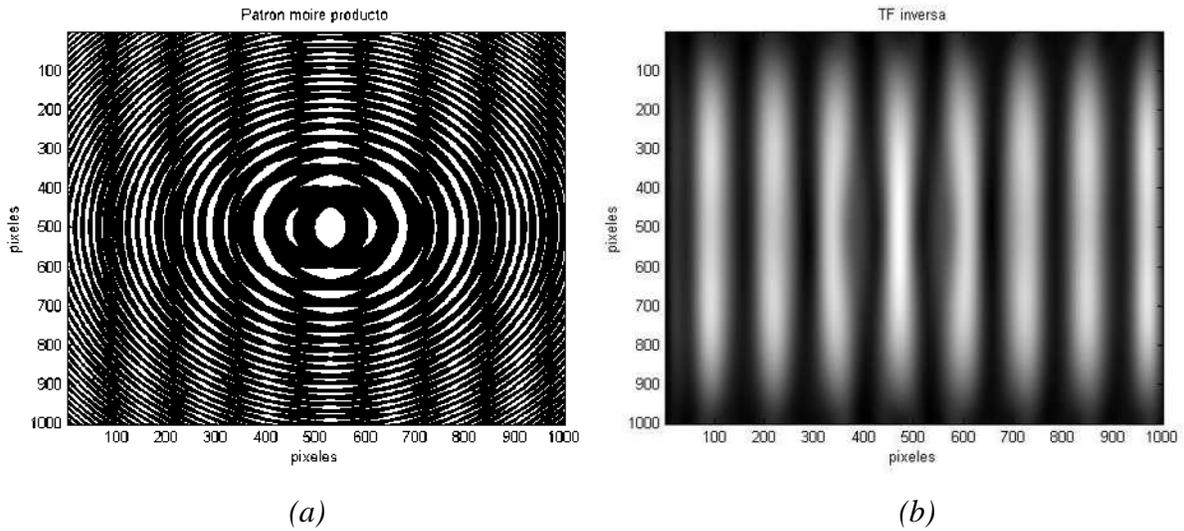


Figura 5.52(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con una fija en el origen y la otra desplazada horizontalmente hacia derecha en x a 60 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

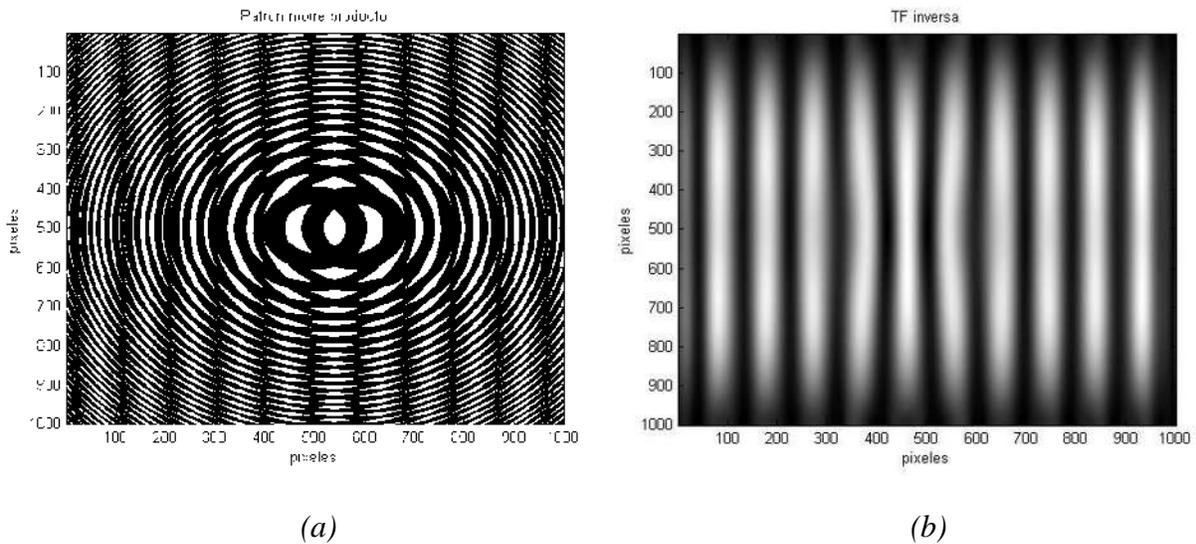


Figura 5.53(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con una fija en el origen y la otra desplazada horizontalmente hacia derecha en x a 80 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

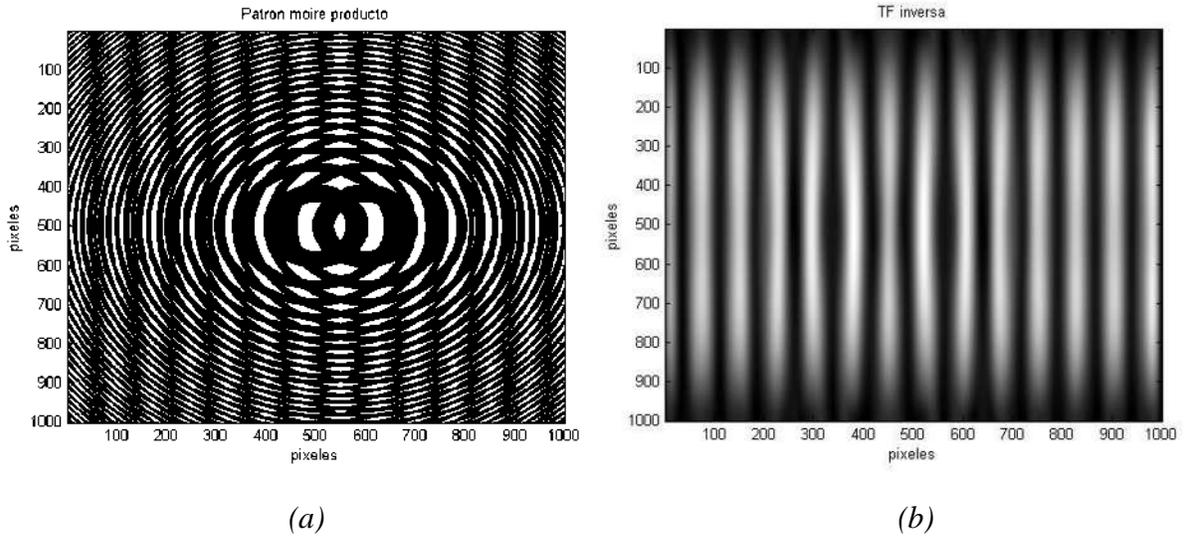


Figura 5.54(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con una fija en el origen y la otra desplazada horizontalmente hacia derecha en x a 100 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

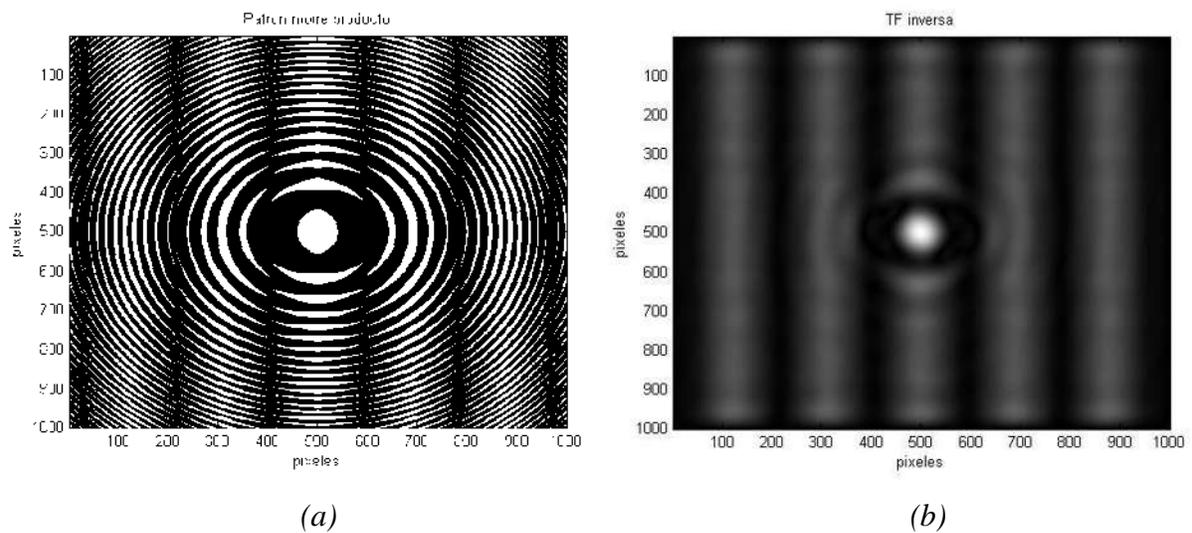
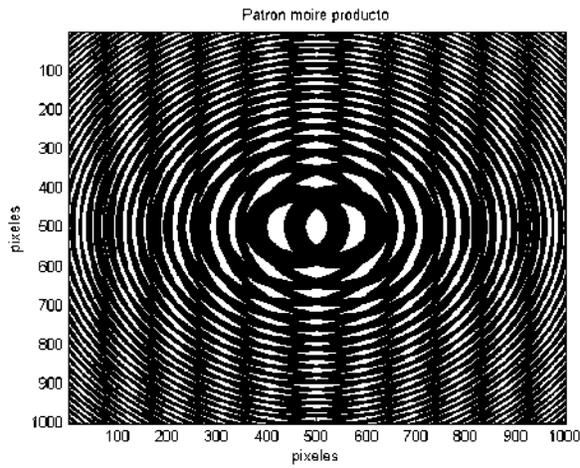
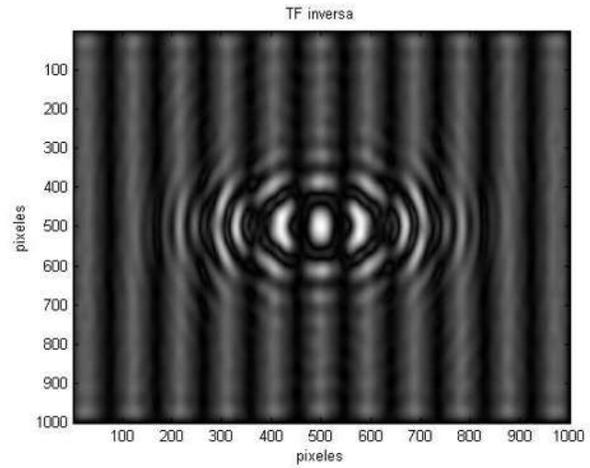


Figura 5.55(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales ambas desplazadas horizontalmente en el eje x a 20 pixeles y -20 pixeles alejándose una de la otra, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

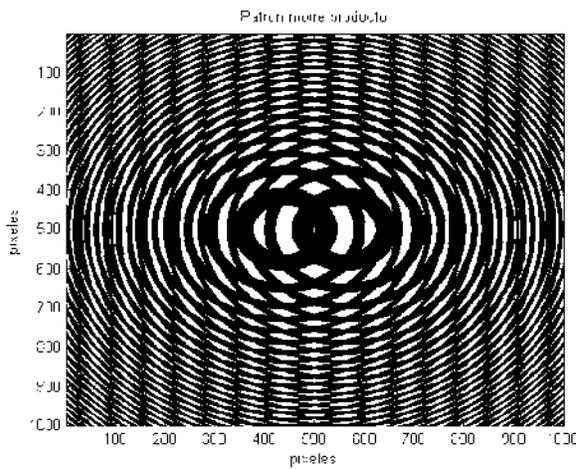


(a)

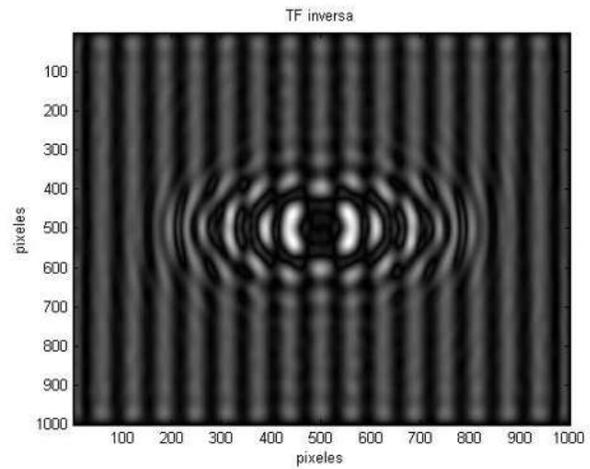


(b)

Figura 5.56(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales ambas desplazadas horizontalmente en el eje x a 40 píxeles y -40 píxeles alejándose una de la otra, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

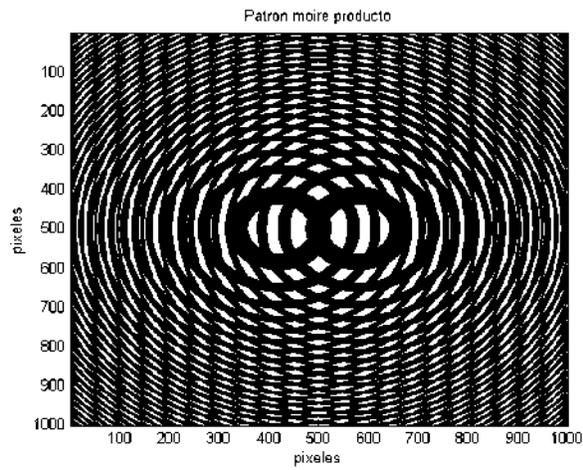


(a)

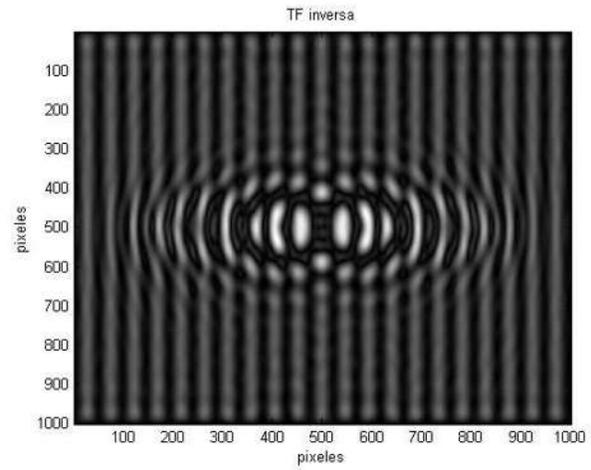


(b)

Figura 5.57(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales ambas desplazadas horizontalmente en el eje x a 60 píxeles y -60 píxeles alejándose una de la otra, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

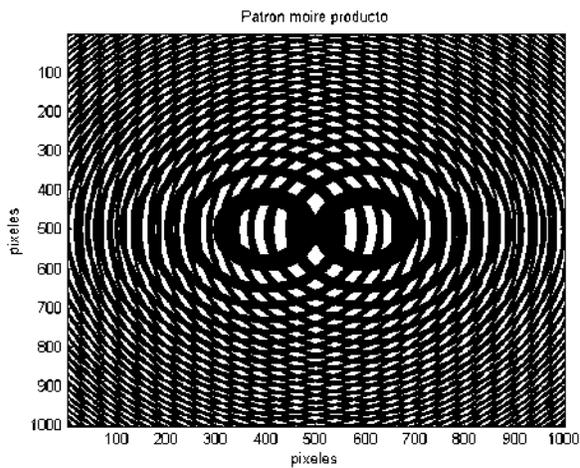


(a)

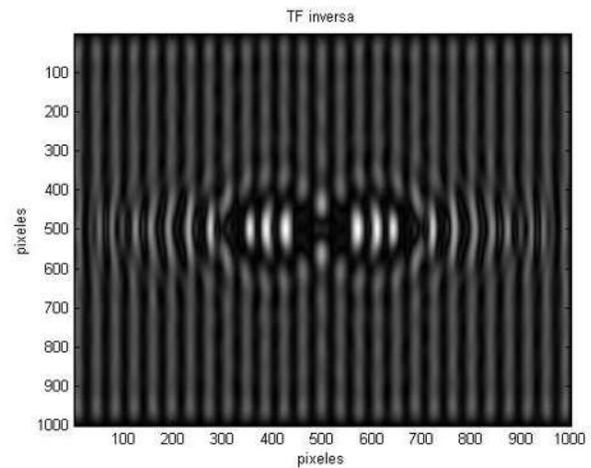


(b)

Figura 5.58(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales ambas desplazadas horizontalmente en el eje x a 80 píxeles y -80 píxeles alejándose una de la otra, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.



(a)



(b)

Figura 5.59(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales ambas desplazadas horizontalmente en el eje x a 100 píxeles y -100 píxeles alejándose una de la otra, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

Placas zonales: *Patrones de moiré con diferente frecuencia*

- Se generaron dos placas zonales con diferentes frecuencias que se sobreponen y se ubican en el origen las dos, posteriormente se van realizando diferentes desplazamientos de las placas sobrepuesta en sentido contrario: ± 20 , ± 40 , ± 60 , ± 80 y ± 100 pixeles.

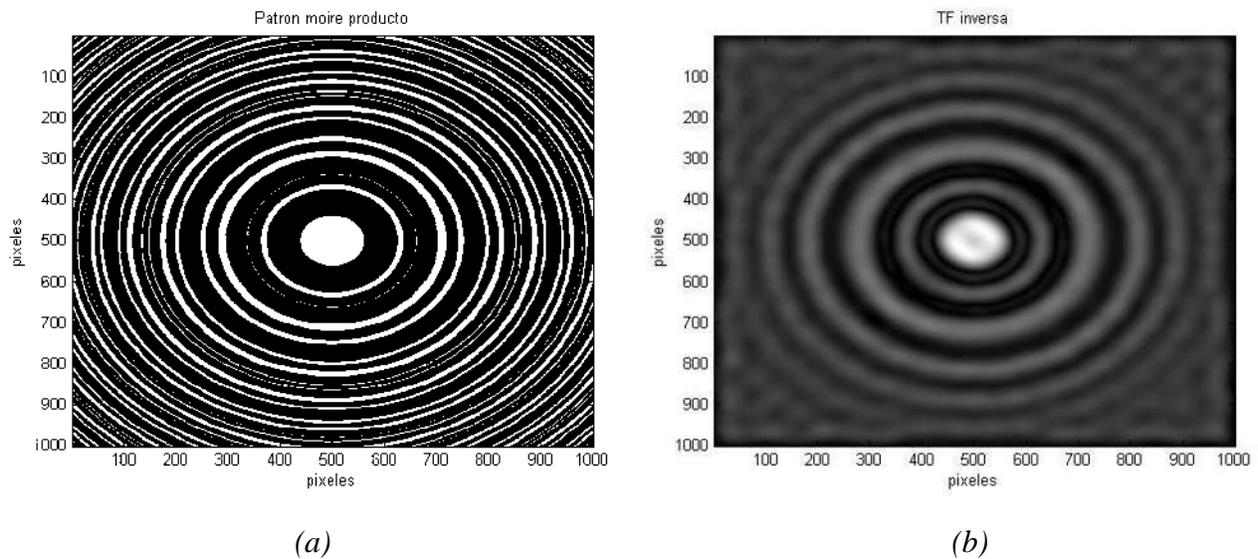


Figura 5.60(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con diferente frecuencia y ambas en el origen, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

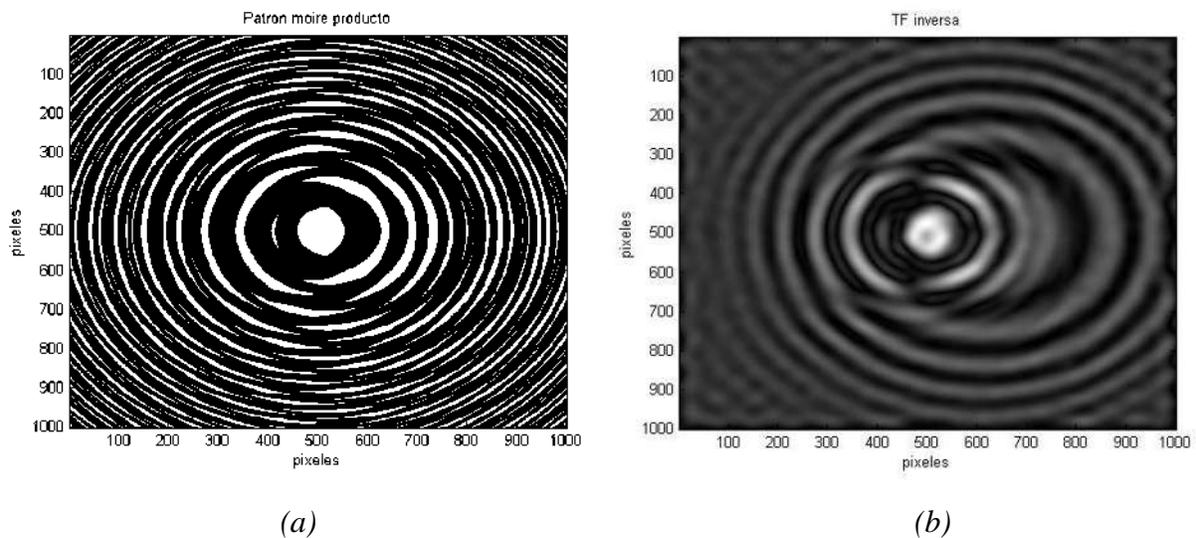


Figura 5.61(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con diferente frecuencia y ambas desplazadas horizontalmente en x a ± 20 pixeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

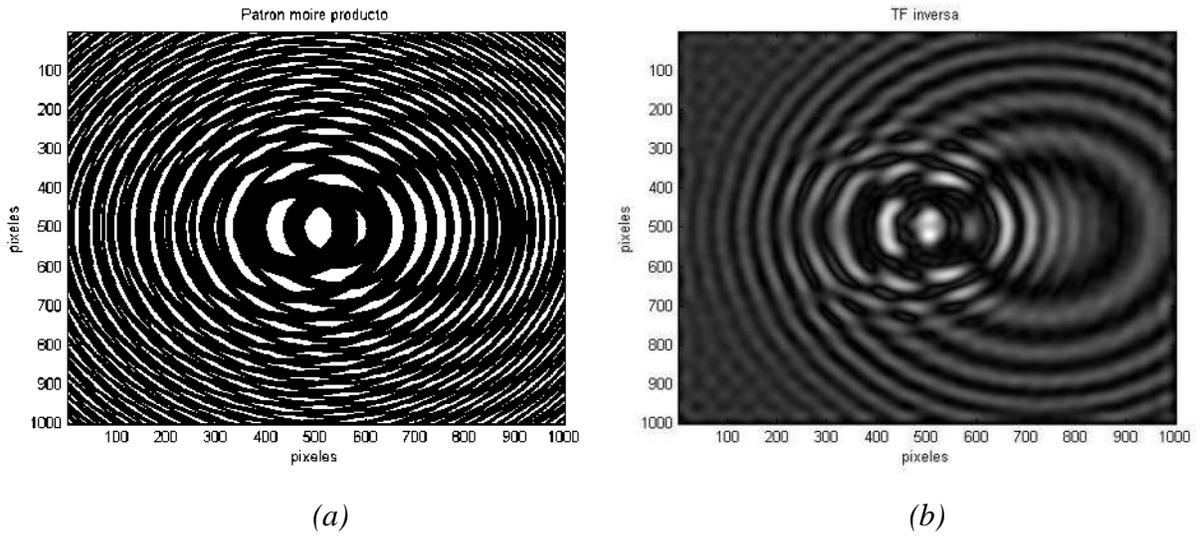


Figura 5.62(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con diferente frecuencia y ambas desplazadas horizontalmente en x a ± 40 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

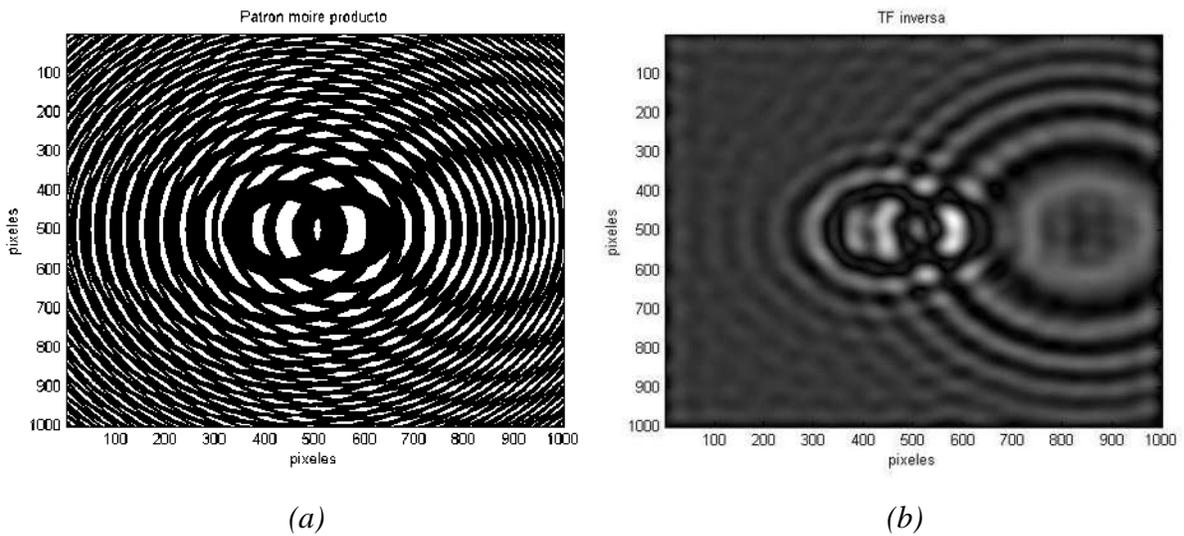


Figura 5.63(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con diferente frecuencia y ambas desplazadas horizontalmente en x a ± 60 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

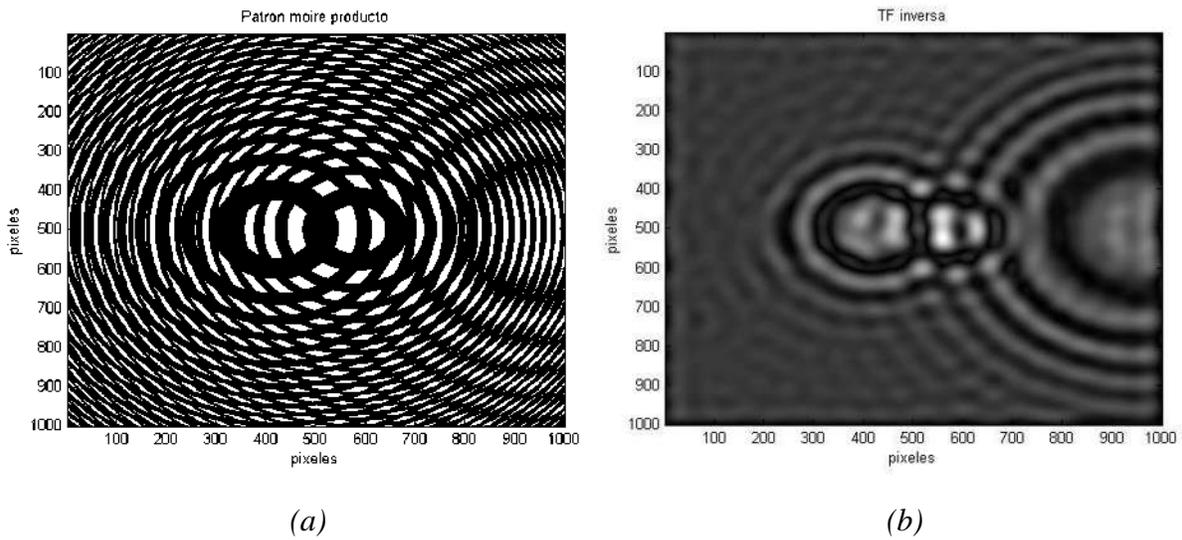


Figura 5.64(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con diferente frecuencia y ambas desplazadas horizontalmente en x a ± 80 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

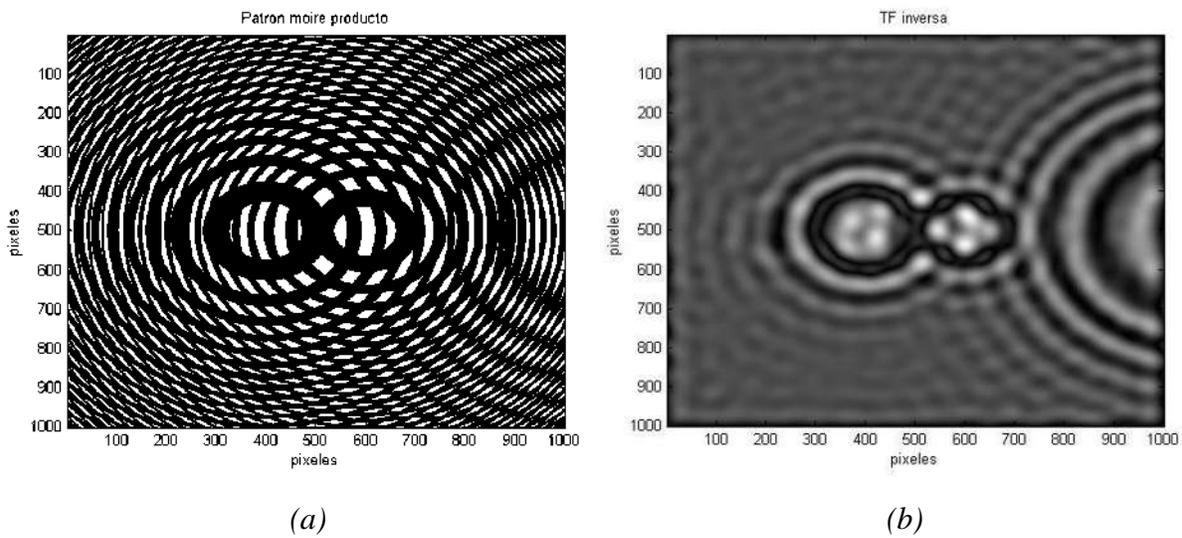


Figura 5.65(a) Patrón de moiré de la superposición de dos rejillas zonales con diferente frecuencia y ambas desplazadas horizontalmente en x a ± 100 píxeles, (b) transformada inversa filtrada con un pasa banda.

A partir de lo expuesto en capítulos anteriores, se pueden distinguir tres tipos de superposición de estructuras de rejillas en la formación de franjas de moiré: a) moiré aditivo, en el que se suman las distribuciones de intensidad de las estructuras de rejillas superpuestas, para lo cual normalmente por ejemplo se requiere exponer en una fotografía las estructuras en dos exposiciones consecutivas; b) moiré sustractivo, en el que se restan las distribuciones de intensidad de las estructuras de rejillas superpuestas, por ejemplo cuando las imágenes se superponen haciendo exposiciones múltiples en un negativo de película fotográfica, en este caso se aplicaría una regla inversa aditiva, c) moiré multiplicativo, que consiste en superponer las estructuras de rejillas (virtual o real), colocándolas detrás o al frente una de otra y se pueden analizar o generar patrones de moiré mediante el producto de sus transmitancias o reflectancias y es éste el moiré que se ha estado analizado en esta tesis.

Las franjas de moiré a partir de rejillas de líneas superpuestas pueden ser de diferentes tipos ya sea de acuerdo a la relación entre los períodos de las rejillas primarias o bien de acuerdo al ángulo que formen ambas rejillas entre ellas. Así podemos diferenciarlos como: a) *franjas de moiré de rotación* en donde las rejillas tienen el mismo período pero el ángulo que forman entre sí, no es cero y b) *franjas de moiré de extensión*, en donde las rejillas no están inclinadas una con respecto a otra, pero aunque tienen el mismo ángulo, los períodos de las dos rejillas son diferentes.

Con el objetivo de proporcionar una explicación más clara de la aplicación que se realizó en los ensayos de esta tesis del efecto moiré, supóngase que se quiere generar una imagen dinámica, es decir una imagen que se mueva a partir de una imagen estática.

Entonces, se tiene una rejilla con líneas verticales opacas en un fondo claro (transparente) que se va a mover continuamente hacia la derecha conforme transcurre el tiempo, esto está descrito por una función $h(x - vt)$ que depende de x menos la velocidad por el tiempo transcurrido, esta rejilla se va a mover encima de una imagen fija que no se mueve, esa otra función está descrita por $g(x, y)$ que no depende del tiempo, solo de sus coordenadas tal que el producto de las funciones de estas dos imágenes es equivalente a sobreponer éstas dos imágenes $g(x, y) \times h(x - vt) = \alpha f(x, y, t) + \dots \dots \dots$ donde $h(x - vt)$ representa un patrón uniforme de líneas oscuras y claras que se desplaza uniformemente con velocidad " v " y $\alpha f(x, y, t)$ es el resultado que es proporcional a la imagen animada que se desea obtener.

Como ejemplo si se analiza el caso del ensayo que se realizó en las rejillas cosenoidales anteriores (Figuras 5.1 a 5.11) se experimentó con una rejilla inclinada -15° con respecto a la vertical que permaneció fija, sin moverse y tenemos una segunda rejilla sobrepuesta con líneas verticales que se fue moviendo hacia la derecha con desplazamiento constante. En las rejillas cosenoidales anteriores se muestran las imágenes de cinco desplazamientos ocurridos de *10 pixeles en 10 pixeles (10, 20, 30, 40 y 50 pixeles)* entonces al irse desplazando la rejilla de líneas verticales sobrepuesta sobre la rejilla rotada fija, se puede observar que *el patrón de moiré que se forma de esta superposición se va desplazando en el eje vertical en sentido positivo + y* (las imágenes que se presentan de las diferentes rejillas se generaron en Matlab, y los códigos se anexan en el Apéndice A.3). Esto es

consecuencia de los patrones moiré que se generan mediante el producto de sus transmitancias o reflectancias.

Se tiene entonces el producto de dos funciones una que solo depende de (x, y) es decir una función que permanece fija sin moverse y otra función dinámica que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante " v ", sea $h(x - vt)$ esta función que es la función de líneas verticales y que se desplaza a la derecha con una velocidad constante dada se encuentra sobrepuesta en la rejilla fija. El proceso de sobreponer la rejilla de líneas verticales (o de cualquier otro patrón) encima de la rejilla rotada, en este caso a -15° (o cualquier otro patrón de rejillas fija), esto es lo que se denomina un moiré multiplicativo y en funciones es el producto de las dos funciones. Y a partir de este efecto si a la imagen sobrepuesta se le desplaza con una velocidad " v " $g(x, y) \times h(x - vt) = \alpha f(x, y, t) + \dots$ esto es lo que permite que el producto de estas dos imágenes sea proporcional a la animación y de esta manera se puede sintetizar la animación que se desee crear utilizando el efecto moiré y dos imágenes, con lo que se puede generar un patrón de alguna imagen con movimientos hacia donde se desee.

5.2. Animación de figuras

La animación de la imagen estática (una mariposa) se obtiene al desplazar una rejilla (con un periodo correspondiente para ésta imagen) de franjas verticales en el sentido positivo de x , con una velocidad v . Figura 5.66 (ver código en Matlab, Apéndice A.3).

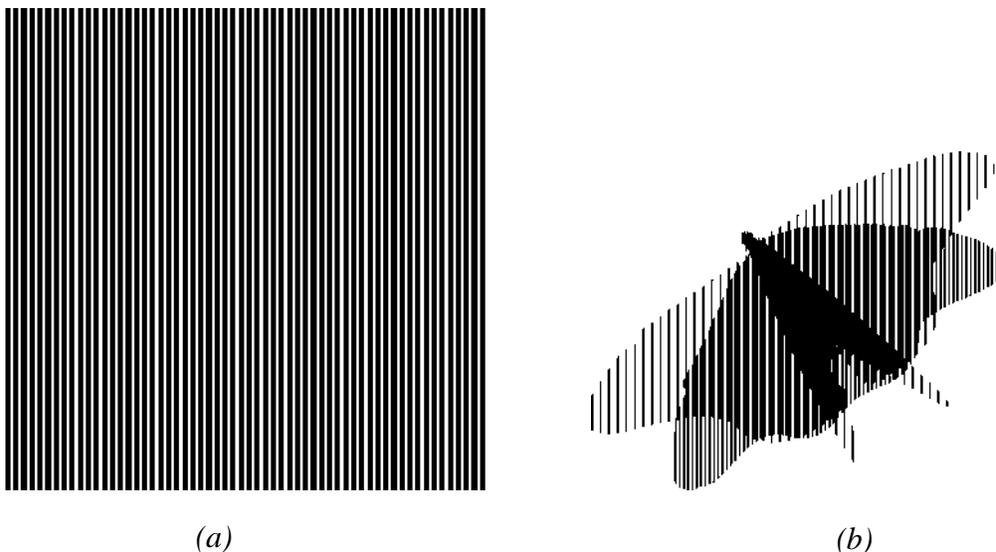


Figura 5.66 (a) rejilla binaria de franjas verticales generada en Matlab para crear la animación de una mariposa volando a partir de la imagen (b)

En las figuras siguientes se muestran diferentes desplazamientos de la rejilla de franjas verticales sobre la imagen codificada de la mariposa, esto permite generar una imagen animada de la mariposa. Figura 5.67 Obsérvese que se repite el patrón de la figura (a) nuevamente en (e) esto se debe a que se repite el período del producto del patrón de las imágenes.

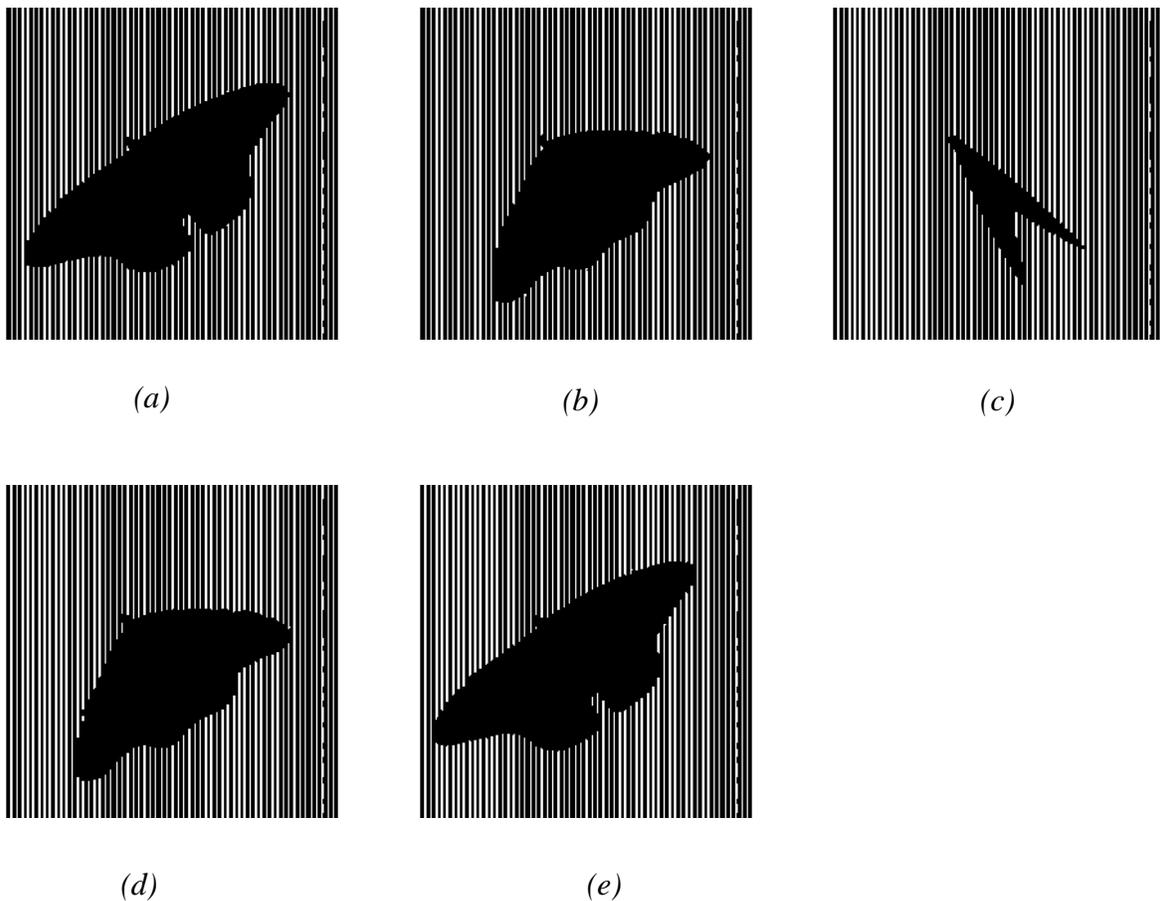
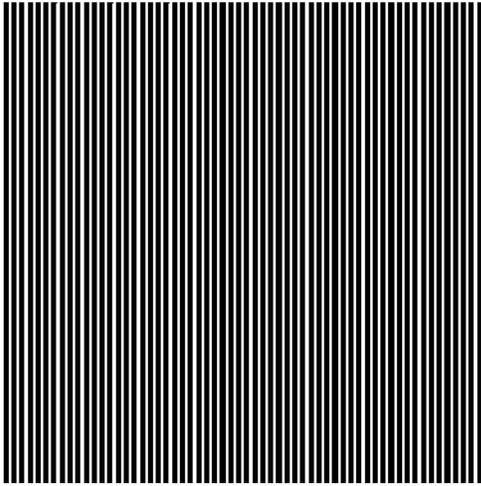
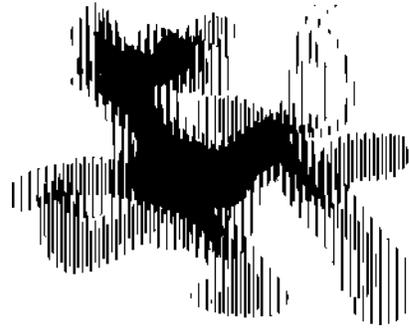


Figura 5.67 Se muestran diferentes desplazamientos de la rejilla sobrepuesta para generar la animación de una mariposa. Obsérvese que se repite el patrón de la figura (a) nuevamente en (e) esto se debe a que se repite el período del patrón

Se realizó el mismo procedimiento que se mencionó anteriormente para las otras dos animaciones que se muestran a continuación.

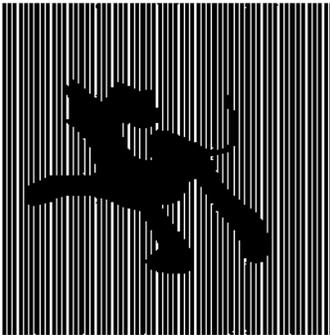


(a)

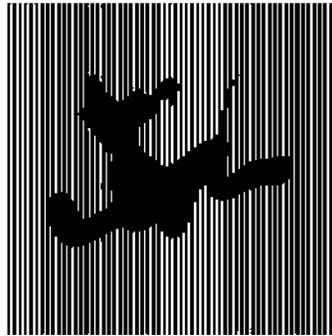


(b)

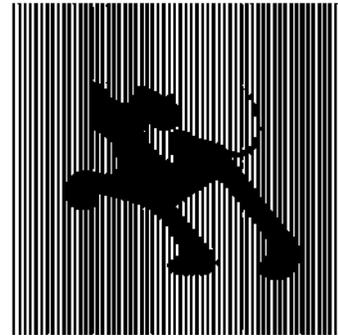
Figura 5.68 (a) rejilla binaria generada en Matlab para crear la animación de un perro caminando a partir de la imagen (b).



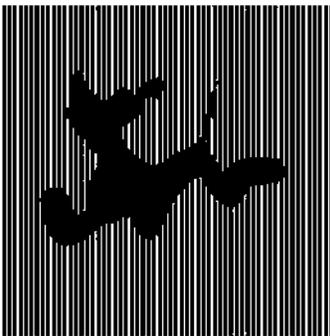
(a)



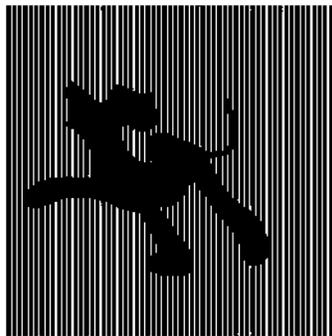
(b)



(c)

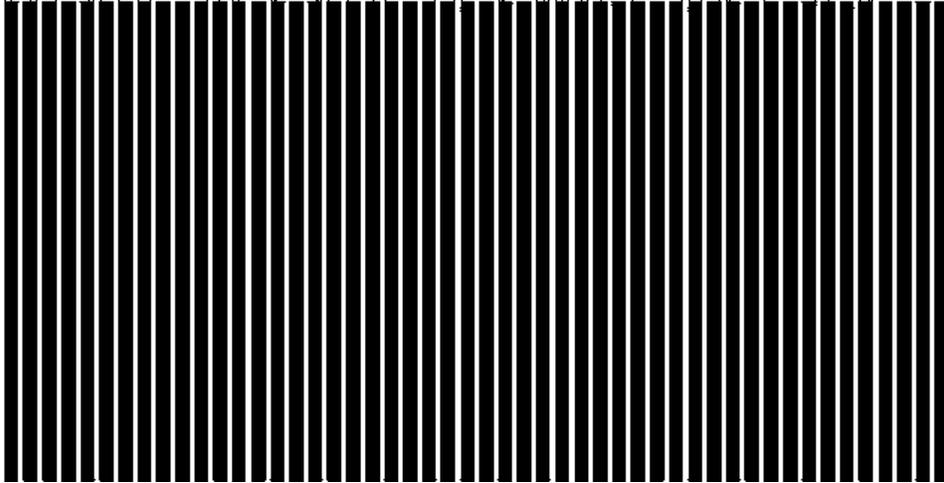


(d)



(e)

Figura 5.69 Obsérvese que se repite la figura (a) en (e) esto se debe que se repite el patrón

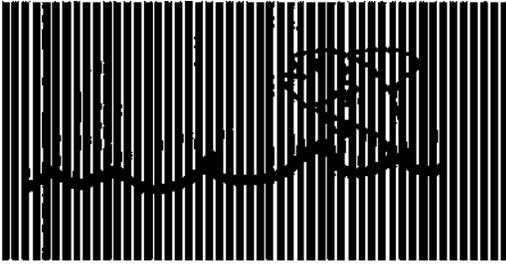


(a)

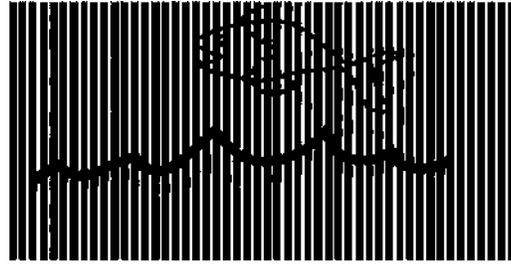


(b)

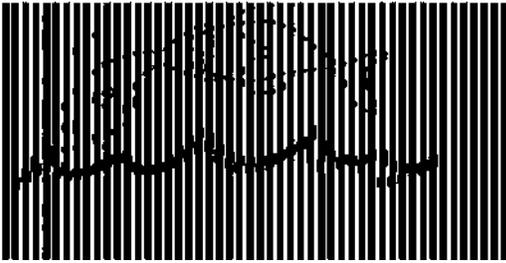
Figura 5.70 (a) rejilla binaria generada en Matlab para crear la animación de un pez nadando, (b) pececito que tiene superpuesta la rejilla vertical y se realizaron cuatro desplazamientos en sentido positivo de x , nuevamente al cuarto desplazamiento se repite la imagen.



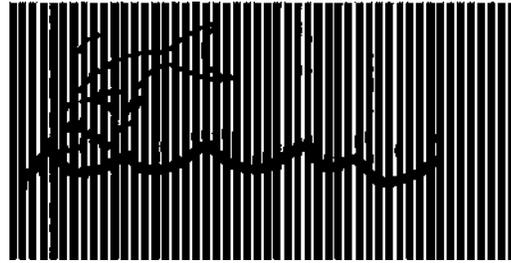
(a)



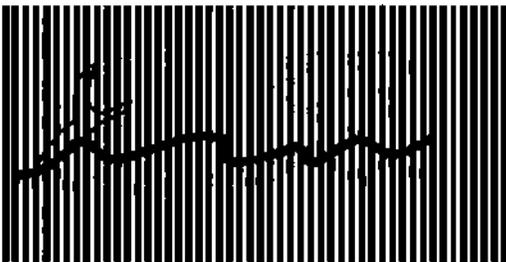
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 5.71 Obsérvese que se repite nuevamente la imagen de la figura (a) en (e)

Capítulo 6. Conclusiones

El estudio, desarrollo, aplicación y perfeccionamiento de métodos ópticos se considera un área de investigación muy importante. En la actualidad, las investigaciones en óptica y sus aplicaciones son más relevantes y sus avances se utilizan en diferentes áreas como se ha mencionado a lo largo de esta tesis. La importancia de éstas técnicas consiste en que no son invasivas, son relativamente fáciles de aplicar y en cualquier área pueden tener una aplicación diferente.

Se presentó el fundamento matemático y de algunas de las técnicas que se han desarrollado del efecto moiré. La técnica aplicada en este trabajo consiste en la proyección de diferentes patrones de imágenes periódicas y su superposición para el análisis del comportamiento de los diferentes patrones de moirés.

Se crearon algoritmos en Matlab para generar diferentes rejillas y también para generar la superposición de dos rejillas, es decir, su producto, por ejemplo se generaron rejillas cosenoidales, que son funciones armónicas, rejillas binarias cuyo perfil es una serie de funciones rectángulo, cada una de éstas rejillas tiene diferentes aplicaciones, como ya se analizó en esta tesis, y cada una tiene sus representaciones matemáticas.

La versatilidad de los códigos que se generaron en Matlab, permite utilizarlos para crear rejillas de cualquier tamaño y también variar sus períodos ajustándose a las necesidades del usuario.

Se analizó en detalle la teoría de Fourier para procesamiento de imágenes, se utilizó el código que está en Matlab para obtener la transformada de Fourier, se crearon también códigos para generar filtros que permitan extraer la información necesaria que existe en frecuencias altas o frecuencias bajas, de acuerdo a la información que se necesite para un análisis determinado.

Por último se creó un código para generar el movimiento de imágenes, aplicando el efecto moiré de éste tipo de rejillas. La aplicación de ésta clase de códigos se utiliza en exposiciones o difusiones científicas para atraer al público.

Apéndice A. Transformada de Fourier

A.1. Teoría de Fourier

A menudo dentro del análisis de algunos fenómenos se trata con sistemas referentes al análisis de series temporales y el tratamiento digital de imágenes o sistemas que oscilan o vibran.

Una de las herramientas matemáticas más poderosas en estas aplicaciones es la transformada de Fourier ya que juega un papel importante en el modelado de tales problemas con comportamiento periódico. El análisis de Fourier representa un esquema sistemático con este propósito.

Si una función periódica $f(t)$ de período T , se puede representar por

$$f(t) = f(t + T), \quad (\text{A.1})$$

donde T es la constante de periodo, y si ésta cumple con las condiciones de Dirichlet, entonces se puede aplicar la teoría de Fourier. Una serie de Fourier permite expresar funciones como sumas discretas de armónicos.

Una función $g(x)$ cualquiera, con periodo T , se puede representar mediante la serie trigonométrica de Fourier:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \text{Sen}\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right], \quad (\text{A.2})$$

o bien introduciendo $f_x = 1/T$ que es la frecuencia fundamental, se tiene entonces que

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n x f_x) + b_n \text{Sen}(2\pi n x f_x)], \quad (\text{A.3})$$

los coeficientes a_n y b_n son las amplitudes de cada una de las componentes y éstas determinan la importancia o factores de peso de las diversas contribuciones de frecuencia espacial angular, esto es a_n y b_n , son las *transformadas de Fourier del coseno y del seno* dadas por:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T g(x) \cos(2\pi n f_x x) dx, \quad (\text{A.4})$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T g(x) \text{sen}(2\pi n f_x x) dx. \quad (\text{A.5})$$

Si la función $g(x)$ es real, los coeficientes son también reales y éstos pueden ser calculados a partir de $g(x)$ después de integrar sobre un período completo la expresión analítica.

Se puede observar que los componentes de la frecuencia tienen una separación constante igual a la frecuencia fundamental f_x . Si la función es simétrica ($g(x) = g(-x)$), entonces solo los coeficientes a_n pueden ser diferentes de cero y, si es antisimétrica ($g(x) = -g(-x)$) entonces serán los coeficientes b_n los que pueden ser diferentes de cero. Si la función es asimétrica ambos coeficientes pueden ser diferentes de cero. En la Figura A.1 se muestran algunas de las funciones periódicas más comunes

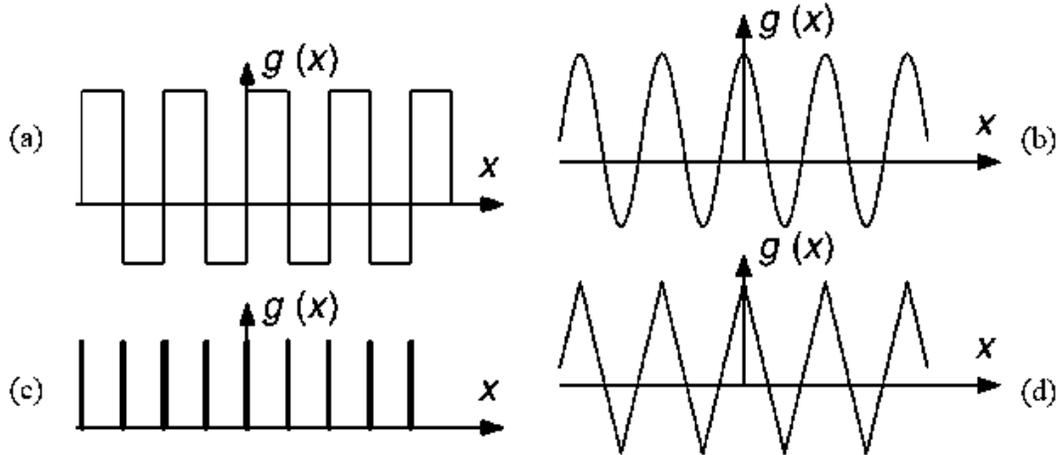


Figura A.1 Gráficas de las funciones periódicas unidimensionales (a) Función rectángulo $Rect(x)$; (b) Función Coseno $Cos(x)$; (c) Función peine de Dirac $Comb(x)$ y (d) Función triangular.

Las series de Fourier también pueden ser escritas en términos de funciones complejas donde los coeficientes a_n y b_n deben ser complejos. Usando las ecuaciones de Euler se obtiene:

$$\cos(2\pi n x f_x) = \frac{e^{2\pi i n x f_x} + e^{-2\pi i n x f_x}}{2}, \quad \text{Sen}(2\pi n x f_x) = \frac{e^{2\pi i n x f_x} - e^{-2\pi i n x f_x}}{2i}, \quad (\text{A.6})$$

por lo que la ecuación (A.3) puede ser escrita como:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n x f_x}, \quad (\text{A.7})$$

donde los coeficientes C_n pueden ser reales, imaginarios o complejos. Estas funciones exponenciales son también ortogonales ya que son funciones trigonométricas. Los coeficientes pueden ser calculados como:

$$C_n = \int_{-T}^T g(x) \cos(2\pi n f_x x) dx, \quad (\text{A.8})$$

En este caso, los coeficientes C_n corresponden a valores positivos de amplitud. En general estos coeficientes son complejos.

A.2. Transformada de Fourier Unidimensional

Si el periodo de la función $g(x)$ se incrementa y la separación de las componentes sinusoidales decrece en el límite cuando el periodo tiende a infinito, el intervalo de frecuencia entre armónicas tiende a cero. Cualquier función continua no periódica puede ser considerada como una función periódica con un periodo infinito, y por lo tanto, se puede representar como una serie de Fourier, es decir, se puede representar por una suma infinita de funciones sinusoidales. Como consecuencia, la serie de la ecuación (A.3) se puede representar como una integral y esto nos lleva al concepto de Transformada de Fourier para cualesquier función continua no periódica.

Sea $g(x)$ una función integrable definida en \mathbb{R} . Su *transformada de Fourier o integral de Fourier* unidimensional [15, 16] será la función definida también en \mathbb{R} , que se representa como $G(f)$, dada por:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi ifx} dx. \quad (\text{A.9})$$

La condición para que exista $G(f)$ generalmente está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)dx| < \infty. \quad (\text{A.10})$$

La integral del valor absoluto de $g(x)$ debe ser finita.

La Transformada de Fourier $G(f)$ es el *espectro de amplitud de la función $g(x)$* o espectro de Fourier y su amplitud es el módulo al cuadrado de este espectro. Un ejemplo de una Transformada de Fourier se tiene al utilizar una función cosenoidal $g(x)$ la cual presenta un espectro de Fourier único con dos frecuencias características que se puede interpretar como su huella digital. Este espectro es un par de funciones delta de Dirac localizadas simétricamente con respecto al origen en el plano de frecuencia correspondiente. Dada $G(f)$, la función $g(x)$, puede ser obtenida a través de la Transformada Inversa de Fourier, definida por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{2\pi ifx} df. \quad (\text{A.11})$$

Aquí, x es la variable espacial y su dominio se refiere como *dominio espacial*. Por otro lado, f es una variable de frecuencia, por lo que su dominio es el de *frecuencias espaciales* o *dominio de Fourier*. Un par de Transformadas de Fourier está definido por las ecuaciones (A.9) y (A.11). Ambas funciones, $g(x)$ y $G(f)$, pueden ser reales o complejas.

En la Tabla A.1 se muestran algunos pares de Transformadas de Fourier [17].

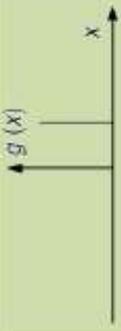
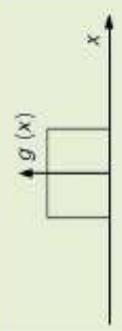
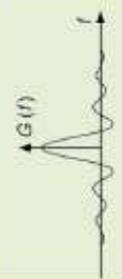
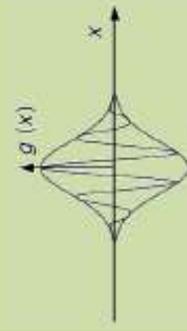
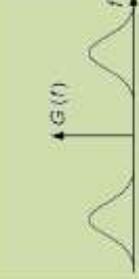
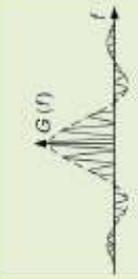
Funciones en el Dominio Espacial	Gráfica	Funciones en el Espacio de Frecuencias	Gráfica
Función Delta de Dirac (pulso): $g(x) = \delta(x - x_0)$		Constante: $G(f) = Ae^{-2\pi ifx_0}$	
Función Rectángulo: $g(x) = \begin{cases} A & x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$		Función Seno cociente (sinc): $G(f) = 2Aa \frac{\text{sinc}(2\pi fx_0)}{2\pi fx_0}$	
Onda Gaussiana Modulada: $g(x) = A \cos(2\pi f_0 x) e^{-\frac{x^2}{a^2}}$		Función Gaussiana: $G(f) = \frac{Aa\sqrt{\pi}}{\gamma} e^{-\frac{2\pi a^2(f-f_0)^2}{4}} + \frac{Aa\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{2\pi a^2(f+f_0)^2}{4}}$	
Par de funciones Rectángulo: $g(x) = \begin{cases} A & b-a \leq x \leq b+a \\ 0 & x < b-a, x > b+a \end{cases}$		Onda Sinc Modulada: $G(f) = 4Aa \cos(2\pi fb) \frac{\text{sinc}(2\pi fa)}{2\pi fa}$	

Tabla A.1. Algunas funciones y sus Transformadas de Fourier.

Las ecuaciones (A.9) y (A.11) se conocen a menudo como *par de transformadas de Fourier*. Obviamente, si f fuera una función del tiempo en vez del espacio, únicamente tendríamos que reemplazar x por t y entonces f_x , la frecuencia espacial se cambia por ω , la frecuencia temporal angular, para obtener el par de transformadas en el dominio temporal, es decir

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i\omega t} dt, \quad (\text{A.12})$$

y

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{2\pi i(\omega t)} d\omega. \quad (\text{A.13})$$

A.3. Transformada de Fourier bidimensional y propiedades

La Transformada de Fourier de una función g de dos variables independientes x y y será representada por $\mathcal{F}\{g\}$ y es definida por [16]:

$$\mathcal{F}\{g\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy, \quad (\text{A.14})$$

Esta transformada de Fourier se define como una función de valores complejos de dos variables independientes f_x y f_y , las cuales se conocen como frecuencias espaciales. De manera similar, la Transformada Inversa de Fourier de una función $G(f_x, f_y)$ será representada por $\mathcal{F}^{-1}\{G\}$ y está definida como:

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y. \quad (\text{A.15})$$

Obsérvese que como operación matemática la transformada y la transformada inversa son muy similares, diferenciándose en el signo de la exponencial que aparece en el integrando. Antes de discutir las propiedades de la transformada de Fourier y de su inversa, se debe primero decidir cuándo las ecuaciones (A.14) y (A.15) son significativas. Para ciertas funciones, estas integrales pueden no existir en un sentido matemático y, por lo tanto, esta discusión estaría incompleta sin al menos hacer una breve mención de las “*condiciones de existencia*”. Una variedad de conjuntos de condiciones de suficiencia son posibles para la existencia de la ecuación (A.14) donde quizá las más comunes son las siguientes:

1. g debe ser absolutamente integrable sobre plano infinito (x, y) .
2. g debe tener solo un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en un rectángulo finito.
3. g no debe tener infinitas discontinuidades.

En general, cualquiera de estas condiciones puede ser debilitada a cambio de reforzar una o dos de las otras condiciones.

La definición básica de la Transformada de Fourier ecuación (A.14) conduce a una amplia estructura matemática asociada con la operación de transformación. A continuación se expondrán algunas de las propiedades matemáticas básicas de la transformada. En los siguientes casos se considera que las transformadas de Fourier de las funciones $g(x)$ y $h(x)$ están dadas por $\mathcal{F}\{g\} = G(f_x, f_y)$ y $\mathcal{F}\{h\} = H(f_x, f_y)$, respectivamente.

1. Teorema de Linealidad. La transformada de una suma ponderada de dos (o más) funciones es idéntica a la suma ponderada de las transformadas individuales.

$$\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha \mathcal{F}\{g\} + \beta \mathcal{F}\{h\}. \quad (\text{A.16})$$

2. Teorema de Similaridad. La amplificación de las coordenadas en el dominio espacial (x, y) resulta en una contracción de las coordenadas en el dominio de las frecuencias (f_x, f_y) , además de un cambio en la amplitud total del espectro.

$$\mathcal{F}\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_x}{a}, \frac{f_y}{b}\right). \quad (\text{A.17})$$

3. Teorema de Desplazamiento. Una traslación de la función en el dominio espacial introduce un cambio de fase lineal en el espectro de frecuencias.

$$\mathcal{F}\{g(x - a, y - b)\} = G(f_x, f_y) e^{-i2\pi(f_x a + f_y b)}. \quad (\text{A.18})$$

4. Teorema de Rayleigh (Teorema de Parseval). La integral del lado izquierdo del teorema puede ser interpretada como la energía contenida en un frente de onda $g(x, y)$. Lo que nos conduce a la idea de que la cantidad $|G(f_x, f_y)|^2$ puede ser interpretada como una densidad de energía en el dominio de las frecuencias. Este teorema también se le conoce como principio de conservación de energía.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2 df_x df_y. \quad (\text{A.19})$$

5. Teorema de Convulación. La transformada de Fourier de una convolución de dos funciones en el dominio espacial es equivalente a la más simple operación de multiplicar sus transformadas individuales.

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_x, f_y) H(f_x, f_y). \quad (\text{A.20})$$

6. Teorema de Autocorrelación. Este teorema puede ser considerado como un caso especial del Teorema de Convulación donde se realiza la convolución entre $g(x, y)$ con $g^*(-x, -y)$.

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right\} = |G(f_x, f_y)|^2. \quad (\text{A.21})$$

Similarmente,

$$\mathcal{F}\{|g(x, y)|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta)G^*(\xi - f_x, \eta - f_y)d\xi d\eta. \quad (\text{A.22})$$

7. Teorema Integral de Fourier. A cada punto de discontinuidad de g , las dos transformadas sucesivas producen un promedio angular del valor de g en una vecindad pequeña de ese punto. Esto es, la transformada sucesiva y la transformada inversa de una función producen la función original, excepto por sus puntos de discontinuidad.

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x, y)\} = g(x, y). \quad (\text{A.23})$$

Ejemplo 1.

Sea $\tau(x)$ la función que describe las rejillas múltiples dada por

$$\tau(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + \dots, \quad (\text{A.24})$$

Una representación alternativa de las rejillas múltiples es por medio de una serie de funciones rectángulo moduladas por la dimensión finita de la mascarilla que es a su vez otra función rectángulo

$$\tau(x) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x-nx_0}{a}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{w}\right). \quad (\text{A.25})$$

Otra forma más práctica de representar la rejilla es mediante el uso de la función $\text{comb}(x)$, también conocida como peine de Dirac de la siguiente forma

$$\tau(x) = \left[\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{w}\right). \quad (\text{A.26})$$

Por lo que sustituyendo la función $U(x, y)$ en la definición de la transformada de Fourier se obtiene

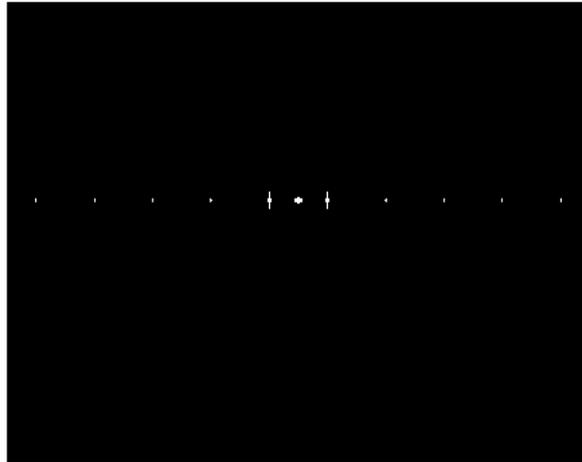
$$U(v, \mu) = \mathcal{F}\{\tau(x)\} = \mathcal{F}\left\{\left[\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{w}\right)\right\}. \quad (\text{A.27})$$

y utilizando los teoremas de la transformada de Fourier se tiene

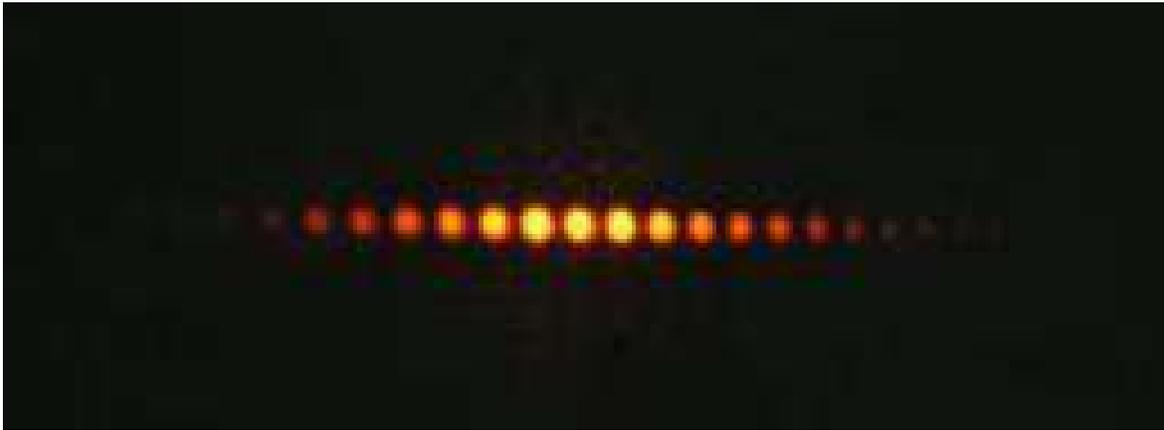
$$U(v, \mu) = \left[\mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} \mathcal{F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0)\right\} \right] * \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x}{w}\right)\right\} = [\text{sinc}(va) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(v - nv_0)] * \text{sinc}(vw). \quad (\text{A.28})$$

La ecuación A.28 representa la distribución de frecuencias de la rejilla. En la Fig. A.6 (a) se muestra la transformada de Fourier de una rejilla binaria obtenida en Matlab.

TF Ronchi



(a)



(b)

Figura A.6. (a) Transformada de Fourier de rejilla binaria, (b) patrón de difracción de una rejilla binaria.

Ejemplo 2.

Sea $f(t)$ la función que describe la rejilla cosenoidal dada por

$$f(t) = \cos(\omega_0 t). \quad (\text{A.29})$$

Una representación alternativa de la rejilla cosenoidal es por medio de la fórmula de Euler que esta dado como

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}. \quad (\text{A.30})$$

Por lo que sustituyendo la función $U(x, y)$ en la definición de la transformada de Fourier se obtiene

$$U(t, \omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right\}. \quad (\text{A.31})$$

y utilizando los teoremas de la transformada de Fourier se tiene

$$U(t, \omega) = \frac{1}{2} [\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t}\}] = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (\text{A.32})$$

La ecuación A.32 representa la distribución de frecuencias de la rejilla. En la Fig. A.7 se muestra la transformada de Fourier de una rejilla cosenoidal obtenida en Matlab.

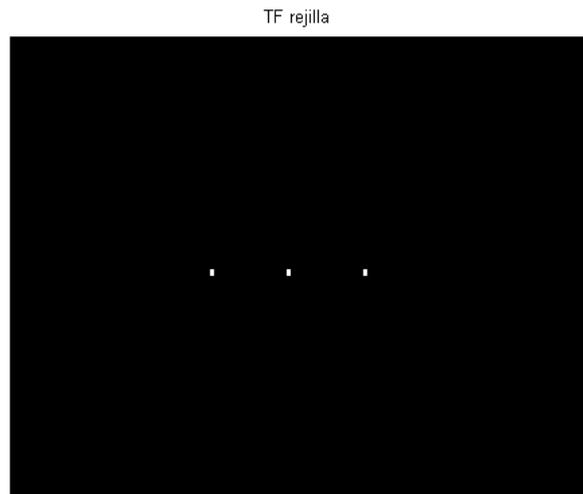


Figura A.7. Transformada de Fourier de una rejilla cosenoidal.

B. Filtros pasa bandas

En el plano de Fourier se pueden insertar máscaras o filtros para evitar que ciertas frecuencias espaciales lleguen al plano imagen. Este proceso se conoce como filtrado espacial [15].

Los llamados filtros pasa baja atenúan o eliminan componentes de alta frecuencia en el dominio de Fourier, mientras que dejan las frecuencias bajas sin alterar. Las frecuencias altas en el dominio de Fourier caracterizan fronteras (bordes) y detalles con alta variación en el nivel de grises de la imagen, así los filtros pasa baja proporcionan información de bulto, es decir, después de un filtro pasa bajas, no es posible reconstruir los detalles de una imagen. Los filtros pasa alta, atenúan o eliminan las bajas frecuencias dejando las altas frecuencias, como las bajas frecuencias son responsables de las suaves variaciones de las características de la imagen, se acentúan los bordes y otro tipo de detalles.

Por ejemplo, un filtro pasa bajas es como el que se muestra en la figura A.8(a) puede observarse, que este filtro se puede construir físicamente como una obstrucción total del campo de luz excepto por una pequeña apertura de forma circular (o puede ser de cualquier geometría). Este filtro deja pasar toda la información o frecuencias bajas del centro de la imagen y evita el paso de las frecuencias altas impidiendo el paso de la información del objeto correspondiente a los detalles de la imagen.

En la figura A.8 (b) se muestra un filtro pasa altas. Este consta de un obstáculo que impide el paso de las frecuencias bajas dejando pasar las frecuencias altas del patrón de difracción. Se pueden construir filtros pasa altas haciendo el negativo del filtro pasa bajas [18].

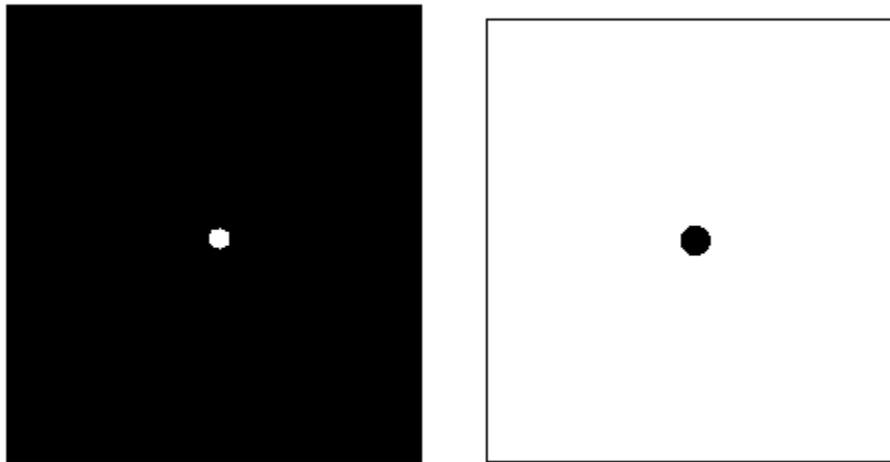


Figura A.8. Imagen de un filtro (a) pasa bajas y (b) pasa altas. La geometría es arbitraria.

Como ejemplo de procesamiento de imágenes con filtros, en la Fig. A.9 (a) se muestra la fotografía de un rostro y en la Fig. A.9 (b) se presenta su espectro de frecuencias obtenido en Matlab.



Figura A.9. (a) Rostro y (b) espectro de frecuencias.

Si se aplican filtros pasa bajas y pasa altas en el plano de frecuencias se modifica la imagen resaltando el bulto (ver Fig. A.10 (a)) o los bordes (ver Fig. A.10 (b)).

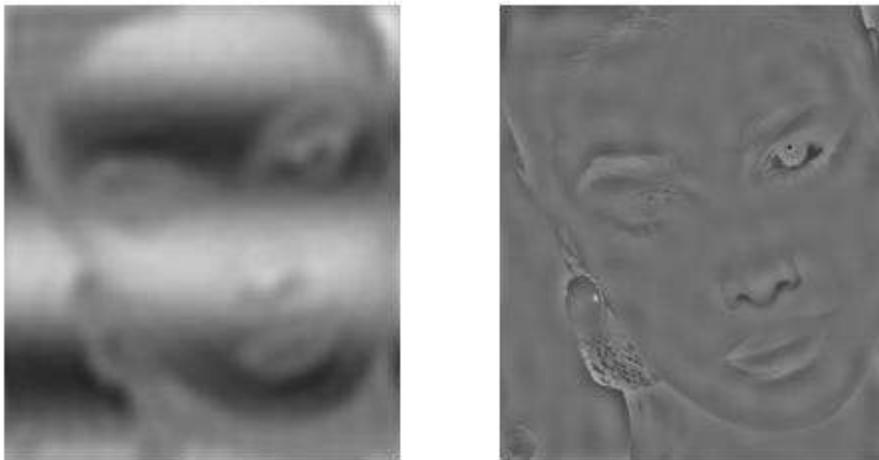


Figura A.10. a) Información de bulto, b) información de bordes.

C. Códigos en MATLAB

C.1. Código para patrón de moiré cosenoidal

Este código genera dos rejillas cosenoidales: una rejilla (inclinada) rotada un ángulo de -15° con respecto a la vertical y otra rejilla con líneas verticales la cual se superpone sobre la rejilla rotada para generar un patrón de moiré, se le obtiene la transformada de Fourier, se le aplica un filtro pasa baja y también un filtro pasa alta, para obtener ciertas frecuencias de su espectro.

```
1. clc; close all; clear;
2. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
   %%%%%%%%%%
3. %Crea una rejilla cosenoidal rotada
4. n=600;
5. m=600;
6. a=1/2; %radiación de fondo
7. b=1/2;
8. e=50; %periodo de la rejilla
9. d=0; %desfase, no es necesario
10. t=-15;%ángulo de rotación
11. f=1/e;
12. Angulo=t*(pi./180); % cambio de grados a radianes ya que
   Matlab trabaja en radianes
13. for i=1:m
14.     for j=1:n
15.         R1(i,j)=a+b*cos(2*pi*(j*cos(Angulo)+i*sin(Angulo))/e);
16.     end
17. end
18.
19. %muestra la rejilla rotada
20. %Nombre del titulo
21. til='rejilla rotada R1';
22. % función que grafica la primera rejilla rotada
23. figurasMo( R1,til)
24.
25.
26.
27. %obtiene la transformada de Fourier de la rejilla rotada
28. TFR1=transformadafouriermat( R1); % función de la
   transformada de Fourier
29.
30. %muestra la TF de la rejilla rotada
31. tilf1='TF rejilla R1 rotada';
```

```

32.     % función que grafica la transformada de Fourier de la
    rejilla rotada
33.     figurastransformada( TFR1,tilf1,50,255)
34.
35.
36.     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%
37.     %Crea una rejilla cosenoidal centrada
38.
39.     for i=1:m
40.         for j=1:n
41.             R2(i,j)=a+b*cos(2*pi*j/e+d);
42.         end
43.     end
44.
45.
46.     %Muestra la rejilla centrada
47.     %Nombre del titulo
48.     ti2='rejilla sin rotar ';
49.     % función para graficar las rejillas
50.     figurasMo( R2,ti2)
51.
52.     %Obtiene la TF de la rejilla centrada
53.     TFR2=transformadafouriermat( R2); % función transformada de
    Fourier
54.
55.
56.
57.     %Muestra la TF de la rejilla centrada
58.     tilf2='TF rejilla 2';
59.     % función para graficar la transformada de la rejilla
    centrada
60.     figurastransformada(TFR2,tilf2,100,255)
61.
62.
63.
64.     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%
65.     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%
66.     %Crea y muestra moiré en producto (de las funciones de las
    rejillas)
67.
68.     t1=(R1.*R2);
69.
70.     Figure %muestra la rejilla
71.     colormap(gray(255));
72.     image(255*t1)
73.     title('Moiré producto')
74.     axis on

```

```

75.     ylabel('pixeles')
76.     xlabel('pixeles')
77.
78.
79.
80.     %Saca TF de producto
81.     TF1=transformadafouriermat(t1); % función de la transformada
de Fourier
82.
83.     %Muestra TF de producto
84.     tilf3='TF producto';
85.     % función que grafica la transformada del producto
86.     figurastransformada( TF1,tilf3,50,255)
87.
88.
89.     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
90.     %Crea filtro para observar moiré de alta frecuencia
91.     fprintf('Crea filtro para observar moiré de alta
frecuencia\n')
92.
93.     % uno da los valores, es decir las coordenadas que se checa
en la imagen de la trasformada de
94.     %Fourier de moiré
95.     cx1=input('coordenada horizontal =');
96.     cy1=input('coordenada vertical =');
97.     r1=input('radio del orden 1 =');
98.
99.     cx2=input('coordenada horizontal =');
100.    cy2=input('coordenada vertical =');
101.
102.    %función que obtiene la inversa de la transformada de Fourier
103.    a1=filtropuntos_frec( m,n,r1,cx1,cy1,cx2,cy2);
104.
105.    %muestra la máscara negra o filtro pasa alta
106.    figure
107.    colormap(gray(255));
108.    image(255*a1)
109.    title('Mascara para alta frecuencia')
110.    axis on
111.    xlabel('pixeles'),ylabel('pixeles')
112.
113.
114.    %Con esto se multiplica la transformada por la máscara o
filtro pasa alta
115.    B=TF1.*a1;
116.
117.    % Genera la imagen del producto del filtro y la transformada
de Fourier
118.    tilf4=('Producto de la transformada por la máscara');
119.    figurastransformada( B,tilf4,255,100)

```

```

120.
121.
122.   %%% Obtiene la IFT
123.   B1= invtransformadafouriermat(B); %función que obtiene la
      transformada inversa de Fourier
124.
125.   % Genera la imagen de alta frecuencia
126.   tilf5=('Obtención de moiré de alta frecuencia');
127.   % función que grafica B1
128.   figurastransformada( B1,tilf5,1,200)
129.
130.
131.   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5
132.   %%Esto es para filtrar moiré de baja frecuencia
133.   %Crea filtro para observar moiré de baja frecuencia
134.   fprintf('Crea filtro para observar moiré de baja
      frecuencia\n')
135.
136.   % uno da los valores, es decir las coordenadas que se checa
      en la imagen de la trasformada de
137.   %Fourier de moiré
138.   ccx1=input('coordenada horizontal =');
139.   ccy1=input('coordenada vertical =');
140.   ccx2=input('coordenada horizontal =');
141.   ccy2=input('coordenada vertical =');
142.
143.   %Función donde crea tres puntos para el filtrado de las
      frecuencias
144.   a2= filtropuntos_frec( m,n,r1,ccx1,ccy1,ccx2,ccy2);
145.
146.
147.   %muestra la imagen de la máscara para el filtrado
148.   figure
149.   colormap(gray(255));
150.   image(255*a2)
151.   title('Imagen de la máscara')
152.   axis on
153.   xlabel('pixeles'),ylabel('pixeles')
154.
155.   B2=TF1.*a2; %Con esto se multiplica la transformada por la
      mascara
156.   til2='Producto de la transformada por la máscara ';
157.   figurasMo( B2,til2)% función que grafica B2
158.
159.
160.   %%% Obtiene la IFT
161.   %función que obtiene la inversa de la transformada de Fourier
162.   TFB2= invtransformadafouriermat(B2);
163.
164.   % Crea la imagen de baja frecuencia

```

```

165.     tilf6=('Obtención de moiré de baja frecuencia');
166.     figurastransformada( TFB2,tilf6,1,200)
167.
168.
169.     %guarda la imagen en la computadora
170.     Salida=abs(TFB2);
171.     imwrite(Salida,'moire.bmp')
172.

```

C.2. Código para patrón de moiré binaria

Este código genera dos rejillas binarias: una a -10° con respecto a la vertical y otra con líneas verticales la cual se superpone sobre la rejilla rotada obteniéndose un efecto moiré, después se obtienen sus transformadas y se filtra su espectro con filtros pasa baja y pasa alta.

```

1. %Código para generar dos rejillas binarias, una de ellas rotada y
   su superposición
2. %para generar moiré.
3.
4. clc; close all; clear;
5. nx=600;
6. ny=600;
7.
8. ancho1=10;
9. b1=2*ancho1;
10.
11.     a1=zeros(ny,nx);%matriz de ceros
12.
13.     for n=1:nx/b1
14.         a1(:,1+(n-1)*b1:ancho1+(n-1)*b1)=1;
15.     end
16.
17.     %Imagen a1
18.     til='Rejilla binaria 1'; %título
19.     figurasMo( a1,til)% función de gráfica
20.
21.
22.     ancho2=10;
23.     b2=2*ancho2;
24.
25.     a2=zeros(ny,nx);
26.
27.     for n=1:nx/b2
28.         a2(:,1+(n-1)*b2:ancho2+(n-1)*b2)=1;

```

```

29.     end
30.
31.     %Formación de imagen de rejilla binaria
32.     ti2='Rejilla binaria 2'; %titulo
33.     figurasMo( a2,ti2)% función de grafica
34.     axis off
35.
36.
37.
38.     E=imrotate(a2,10,'nearest','crop'); % rota mi rejilla a 10°
39.
40.     %Formación de rejilla binaria rotada
41.     ti3='Rejilla binaria rotada';%titulo
42.     figurasMo( E,ti3)% función de grafica
43.
44.     %transformada de Fourier de la rejilla a2
45.     TF12=transformadafourier( a2,nx,ny);
46.
47.     %Crea la figura
48.     tit5='TF binaria'; %titulo
49.     GraficaTF(TF12,tit5)% función de grafica
50.     %Transformada de Fourier del patrón de moiré generado
51.     axis on
52.     ylabel('pixeles')
53.     xlabel('pixeles')
54.
55.
56.     %transformada de Fourier de la rejilla E
57.
58.     TF13=transformadafourier( E,nx,ny);
59.
60.     %Crea la figura
61.     tit4='TF binaria rotada'; %titulo
62.     GraficaTF(TF13,tit4)% función de grafica
63.     %Transformada de Fourier del patrón de moiré generado
64.
65.
66.     axis on
67.     ylabel('pixeles')
68.     xlabel('pixeles')
69.
70.     %Producto de las rejillas que generan un patrón de moiré
71.     F1=a1.*E;
72.     F=F1(50:ny-50,50:nx-50);
73.     [ny1,nx1]=size(F);
74.
75.     %Crea la figura
76.     ti4='Patrón de moiré'; %titulo
77.     figurasMo( F,ti4)% función de grafica

```

```

78.
79.     %Transformada de Fourier del patrón de moiré generado
80.     TF1=transformadafourier( F,nx1,ny1);% función de la
      transformada de Fourier
81.
82.
83.     % Crea la imagen de la TF de F1
84.     ti5='TF del patrón moiré';
85.     GraficaTF( TF1,ti5)% función que grafica la transformada de
      Fourier
86.     axis on
87.     ylabel('pixeles')
88.     xlabel('pixeles')
89.
90.
91.
92.     %para la construcción del filtro que en este caso es elíptica
93.     %se introducen los valores
94.     x=input('Posición horizontal del orden a filtrar o
      desplazamiento='); %300
95.     y=input('Posición vertical del orden a filtrar o
      desplazamiento=');%300
96.
97.     ax=input('punto de la coordenada x1 =');
98.     by=input('punto de la coordenada y1 =');
99.     cx=input('punto de la coordenada x2=');
100.    dy=input('punto de la coordenada y2 =');
101.    t1=angulo_tetha4( ax,by,cx,dy,x,y);%obtenemos el ángulo,
      función del ángulo
102.    x04=eje_mayor( ax,by,cx,dy)+4; %función eje mayor
103.    x0=input('Valor del eje mayor (horizontal)=');
104.    y0=input('Valor del eje menor (vertical)=');
105.
106.    %función donde crea el filtro elíptico que tiene una cierta
      rotación
107.    a=filtroelipse2( nx1,ny1,x0,y0,x,y,t1);% función filtro
      elíptica
108.
109.
110.    %crea la figura del valor a
111.    %Nombre del título
112.    ti6='Imagen de la máscara'; % titulo
113.    figurasMo( a,ti6)% función que grafica "a"
114.
115.
116.    E=TF1.*a; %Con esto se multiplica la transformada por la
      mascara
117.
118.    %Crea la figura del valor E
119.    ti7='Producto de la transformada por la máscara'; %titulo

```

```

120.   figurasMo( E,ti7)% función que grafica "E"
121.
122.
123.   %Transformada de fourier inversa
124.   trans1 = transformadafourierinversa( E,nx1,ny1);%función de
    la transformada
125.
126.
127.   %Crea la figura del valor trans1
128.   ti8='Extraccion de moire'; %titulo
129.   GraficaTFIN( trans1,ti8)% función de la gráfica de la
    transformada de
130.   %Fourier inversa
131.   xlabel('pixeles'),ylabel('pixeles')
132.
133.   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
134.   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
135.
136.
137.   % segundo filtro elíptica
138.   ax1=input('punto de la coordenada x1 =');
139.   by1=input('punto de la coordenada y1 =');
140.   cx1=input('punto de la coordenada x2=');
141.   dy1=input('punto de la coordenada y2 =');
142.   t2=angulo_tetha4( ax1,by1,cx1,dy1,x,y);% Se obtiene el ángulo
    función
143.   x05=eje_mayor( ax1,by1,cx1,dy1)+4; %función del eje mayor
144.   x01=input('Valor del eje mayor (horizontal)=');
145.   y01=input('Valor del eje menor (vertical)=');
146.
147.   % función del filtro de elipse
148.   a3=filtroelipse2( nx1,ny1,x01,y01,x,y,t2);
149.
150.   %Crea la figura
151.   ti9='Imagen de la máscara';% titulo
152.   figurasMo( a3,ti9)% función que grafica
153.
154.
155.   E1=TF1.*a3; %Con esto se multiplica la transformada por la
    mascara
156.
157.   %Crea la figura
158.   ti10='Producto de la transformada por la máscara';% titulo
159.   figurasMo( E1,ti10)% función que grafica "E1"
160.
161.
162.   %Transformada de Fourier inversa
163.   trans2 = transformadafourierinversa( E1,nx1,ny1);%función de
    la transformada inversa de Fourier

```

```

164.
165.
166.   %Crea la figura
167.   till='Extracción de moiré';
168.   GraficaTFIN( trans2,till)% función de la gráfica de la
      transformada de
169.   %Fourier inversa
170.   xlabel('pixeles'),ylabel('pixeles')
171.
172.
173.

```

C.3. Código para patrón de moiré circular

Este código genera dos rejillas circulares que se superponen una de ellas es desplazada sobre la horizontal generándose un patrón de moiré, y se obtiene su transformada de Fourier y se filtran con un filtrado pasa baja y filtrado pasa alta.

```

1. clc; close all; clear;
2. %Este es el código que permite la extracción del patrón moiré de
   dos
3. %rejillas circulares.
4.
5. nx=500;
6. ny=500;
7. p1=6; %periodo de la primera rejilla circular
8. p2=6.5; %periodo de la segunda rejilla circular
9. despx=-20; %desplazamiento lateral en x (horizontal)
10.  despy=0; %desplazamiento vertical en y
11.  a0=1/2;
12.  a1=1/2;
13.
14.  %se crea una rejilla circular
15.  nx1=nx/2;
16.  ny1=ny/2;
17.  for i=1:nx
18.      for j=1:ny
19.          T1(j,i)=a0+a1*cos(pi*sqrt((i-nx1).^2+(j-
      ny1).^2)/p1);
20.
21.      end
22.  end
23.

```

```

24.     %Grafica de la rejilla T1
25.     %la primera rejilla circular
26.     %Nombre del título
27.     tit1='rejilla circular 1';
28.     figurasMo( T1,tit1)% función para obtener la grafica
29.     grid %crea una cuadrícula para poder visualizar que se
desplazo
30.
31.
32.     % % % %guarda mi imagen (T1) en la computadora
33.
34.     imwrite(T1,'rcircular.jpg')
35.
36.     %transformada de Fourier de la rejilla T1
37.     til='TF de la rejilla'; %título de mi imagen
38.     TF1=transformadafourier(T1,nx,ny);%función para obtener
39.     %la transformada de Fourier
40.
41.     GraficaTF( TF1,til)% función que grafica la transformada de
Fourier
42.     axis on %que aparezca los ejes
43.     ylabel('pixeles') %nombre del eje y
44.     xlabel('pixeles') %nombre del eje x
45.
46.
47.
48.
49.     % Se crea la segunda rejilla circular T2, desplazada según
los parámetros
50.     % definidos arriba
51.     for i=1:nx
52.         for j=1:ny
53.             T2(j,i)=a0+a1*cos(pi*sqrt((i-nx1-despx).^2+(j-ny1-
despy).^2)/p2);
54.         end
55.     end
56.
57.     %grafica de la rejilla T2
58.     %Nombre del titulo
59.     tit2='rejilla circular 2';
60.     % función que grafica la rejilla T2
61.     figurasMo( T2,tit2)
62.     grid
63.
64.
65.     %Nota: no se genera la transformada de Fourier de la rejilla
T2 porque es
66.     %similar a la transformada de la rejilla T1.
67.
68.     %Superposición de las rejillas T1 y T2 para generar moiré

```

```

69.
70.     T3=T1.*T2;
71.
72.     %grafica de moiré
73.     %Nombre del titulo
74.     tit3='Intensidad moiré producto';
75.     figurasMo( T3,tit3)% función que grafica en este caso la
76.     %Transformada de Fourier del patrón de moiré generado
77.
78.     T3=double(T3); ti3='TF de moiré';
79.
80.     TF3=transformadafourier(T3,nx,ny);%función para obtener
81.     %la transformada de Fourier en este caso del producto de las
    rejillas circulares anteriores.
82.     GraficaTF( TF3,ti3)% función que grafica la transformada de
    Fourier
83.     %en este caso el producto de moiré
84.
85.     axis on           %que aparezca los ejes
86.     ylabel('pixeles') %nombre del eje y
87.     xlabel('pixeles') %nombre del eje x
88.
89.
90.     % Se genera una máscara elíptica para filtrar las frecuencias
    bajas de la
91.     % transformada de Fourier del patrón de moiré.
92.
93.     %Se introduce de qué tamaño se quiere el radio
94.     r=input('introduce el radio= ');
95.     %función que genera el filtro circular
96.     MASC= filtrocircular( r,nx,ny);
97.
98.
99.     % Grafica de la máscara generada
100.    tit4='';
101.    figurasMo(MASC,tit4)% función que grafica
102.
103.
104.    %producto de la máscara por la TF del moiré
105.
106.    PROD=TF3.*MASC;
107.    %grafica del producto de la máscara por la TF
108.    % función que grafica
109.    tit5='';
110.    figurastransformada( PROD,tit5,256,50)
111.
112.
113.    % %Transformada de Fourier inversa

```

```

114.     TFIM = transformadafourierinversa( PROD,nx,ny);%función de la
        transformada
115.     % de Fourier inversa
116.
117.     ti4='Moiré';
118.     GraficaTFIN( TFIM,ti4)% función de la gráfica de la
        transformada de
119.     %Fourier inversa
120.
121.     axis on           %que aparezca los ejes
122.     ylabel('pixeles') %nombre del eje y
123.     xlabel('pixeles') %nombre del eje x
124.

```

C.4. Código para patrón de moiré zonal

Este código genera dos rejillas zonales, que se superponen ambas y son desplazadas horizontalmente para así generar un patrón de moiré, y se obtienen sus transformadas de Fourier.

```

1. clc; close all; clear;
2. % Crea las placas zonales o rejillas zonales
3. %se desplazan ambas placas zonales con diferente periodo
4. ny=1000;
5. nx=1000;
6. desx=40; %desplazamiento lateral en x (horizontal)
7. nx1=nx/2;
8. ny1=ny/2;
9.
10.     t=1/2400; %periodo
11.     for i=1:ny
12.         for j=1:nx
13.             if cos(((i-ny1)^2+(j+desx-nx1)^2)*t)>0
14.
15.                 a(i,j)=1;
16.                 elseif cos(((i-ny1)^2+(j+desx-nx1)^2)*t)<=0
17.
18.                 a(i,j)=0;
19.             end
20.         end
21.     end

```

```

22.
23.     %guarda en la computadora la imagen
24.     imwrite(a, 'cosine.bmp')
25.
26.     %grafica de la rejilla
27.     %Nombre del titulo
28.     ti1='Placa zonal 1';
29.     % función que grafica en este caso la primera placa zonal
30.     figurasMo( a,ti1)
31.     grid
32.
33.     %transformada de Fourier de la placa zonal
34.     a=double(a);
35.     a1=transformadafourier( a,nx,ny);% función de la transformada
    de Fourier
36.
37.
38.     %imagen en escala de grises del valor absoluto de la
    transformada
39.     %normaliza la función
40.     a2=MaTF( a1);
41.     % función que grafica la transformada de Fourier de la 1ª
    placa zonal
42.     ti1='';
43.     figurastransformada( a2,ti1,50,250)
44.
45.     %Segunda placa zonal desplazada respecto de la anterior
46.
47.     t1=1/2400;
48.     for i=1:ny
49.         for j=1:nx
50.             if cos(((i-ny1)^2+(j-desx-nx1)^2)*t1)>0
51.
52.                 b(i,j)=1;
53.             elseif cos(((i-ny1)^2+(j-desx-nx1)^2)*t1)<=0
54.
55.                 b(i,j)=0;
56.             end
57.         end
58.     end
59.
60.     b=double(b);
61.
62.     %título de la grafica
63.     ti2='Placa zonal 2';
64.     figurasMo( b,ti2)%función que grafica la segunda
65.     %placa zonal
66.     grid
67.

```

```

68.
69.     d=a.*b;%producto de las rejillas
70.
71.     %título de la grafica
72.     ti3='Patrón moiré producto';
73.     figurasMo( d,ti3)%función que grafica en este caso
74.     %el producto de las placas zonales
75.
76.     %d=double(d);
77.     %Transformada de Fourier del patrón de moiré generado
78.     g=transformadafourier( d,nx,ny);% función de la transformada
    de Fourier
79.
80.
81.     %imagen en escala de grises del valor absoluto de la
    transformada
82.     %normaliza la función
83.     g1=MaTF( g);
84.     % función que grafica la transformada de Fourier
85.     til='';
86.     figurastransformada( g1,til,10,250)
87.
88.     %Ahora se construye un filtro para pasar el orden 1
89.
90.     x=input('Posición horizontal del orden a filtrar o
    desplazamiento=');
91.     y=input('Posición vertical del orden a filtrar o
    desplazamiento=');
92.     ax=input('punto de la coordenada x1 =');
93.     by=input('punto de la coordenada y1 =');
94.     cx=input('punto de la coordenada x2=');
95.     dy=input('punto de la coordenada y2 =');
96.     x04=eje_mayor( ax,by,cx,dy)+2; %función eje mayor
97.     x0=input('Valor del eje mayor (horizontal)=');
98.     y0=input('Valor del eje menor (vertical)=');
99.
100.    %función donde crea el filtro elíptico
101.    m=filtroelipse( nx,ny,x0,y0,x,y);
102.
103.    %función que grafica
104.    ti5= 'Imagen de la máscara';
105.    figurasMo( m,ti5)
106.
107.    B=g.*m; %Con esto se multiplica la transformada por la
    mascara
108.    ti3='Producto de la transformada por la máscara';
109.    figurasMo( B,ti3)% función que grafica B
110.
111.    %Transformada de Fourier inversa

```

```

112.     TFI=transformadafourierinversa( B,nx,ny);% función de la
        transformada inversa
113.
114.     %función de grafica de la transformada inversa
115.     ti4='TF inversa';
116.     GraficaTFIN( TFI,ti4)%función de grafica de la transformada
        inversa
117.     ylabel('pixeles')
118.     xlabel('pixeles')
119.
120.

```

C.5. Código para dibujar las rejillas que se generaron

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores.

```

1.     function [ ] = figurasMo( a,ti)
2.     %muestra la figura con los valores de a
3.     %ti es el título de nuestra figura
4.     figure
5.     colormap(gray(255));
6.     image(255*(abs(a)))
7.     title(ti)
8.     axis on
9.     ylabel('pixeles')
10.    xlabel('pixeles')

```

C.6. Código para obtener la imagen de la transformada de Fourier que se generó

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores.

```

1.     function [ ] = figurastransformada( TFR1,ti,int,int1)
2.     %muestra la figura con los valores de la transformada de
    Fourier
3.     %TFR1 es el valor o en este caso la matriz que vamos a
    graficar o dibujar
4.     %ti es el título de nuestra figura
5.     %int es para hacer más grande los valores de TFR1 ya que
    puede que estén muy pequeños

```

```

6.      %int1 es la escala de grises que van desde el negro hasta el
      blanco
7.      %en cual 255 es el más blanco o blanco en si
8.      figure
9.      colormap(gray(255));
10.     image(int1*abs(int*TFR1))
11.     title(ti)
12.     axis on
13.     ylabel('pixeles')
14.     xlabel('pixeles')

```

C.7. Código para normalizar la matriz y crear la imagen de la transformada de Fourier que se generó

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, el cual normaliza la transformada y crea su imagen.

```

1. function [ ] = GraficaTF( TF1,ti)
2. % Grafica de la TF de T1
3. %TFR1 es el valor que vamos a graficar o dibujar
4. %ti es el título de nuestra figura
5.
6. % %imagen en escala de grises del valor absoluto de la transformada
7. max1=max(TF1); %saca el máximo de TF1
8. max2=max(max1);%saca el máximo del max1
9. scale=1.0/max2;
10.     TF1=TF1.*scale;% matriz normalizada
11.
12.     %imagen en escala de grises del valor absoluto de la
      transformada
13.     figure
14.     colormap(gray(255));
15.     title(ti);
16.     image(10*(abs(256*TF1)));
17.     title(ti)
18.     axis off
19.

```

C.8. Código para crear la imagen de la transformada de Fourier inversa que se generó

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para crea la imagen de la transformada de Fourier inversa.

```
1. function [ ] = GraficaTFIN( TFIM,ti)
2. % Grafica de la TF de T1
3. %TFR1 es el valor que vamos a graficar o dibujar
4. %ti es el título de nuestra figura
5.
6. % %imagen en escala de grises del valor absoluto de la transformada
7. max1=max(TFIM); %saca el máximo de TF1
8. max2=max(max1);%saca el máximo del max1
9. scale=1.0/max2;
10. TFIM=TFIM.*scale; % matriz normalizada
11.
12. %imagen en escala de grises del valor absoluto de la
    transformada
13. figure
14. colormap(gray(255));
15. title(ti);
16. image(1*(abs(256*TFIM)));
17. title(ti)
18. axis on
19.
```

C.9. Código para generar la figura de la transformada de Fourier de las rejillas

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para generar la transformada de Fourier de las rejillas.

```
1. function [ ] = figurastransformada( TFR1,ti,int,int1)
2. %muestra la figura con los valores de la transformada de
    Fourier
3. %TFR1 es el valor o en este caso la matriz que vamos a
    graficar o dibujar
4. %ti es el título de nuestra figura
5. %int es para hacer más grande los valores de TFR1 ya que
    puede que estén muy pequeños
```

```

6.      %int1 es la escala de gises que van desde el negro hasta el
      blanco
7.      %en cual 255 es el blanco
8.      figure
9.      colormap(gray(255));
10.     image(int1*abs(int*TFR1))
11.     title(ti)
12.     axis on
13.     ylabel('pixeles')
14.     xlabel('pixeles')

```

C.10. Código para generar la transformada de Fourier de las rejillas

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para generar la transformada de Fourier de las rejillas.

Opción 1

```

1.  function [ TFR1 ] = transformadafouriermat(R1)
2.  %obtiene la transformada de Fourier de la rejilla
3.  %R1 es el que le voy a sacar la transformada de Fourier
4.  TFR1=fft2(R1);
5.  TFR1=fftshift(TFR1);
6.  maxR1=max(max(TFR1));
7.  TFR1=TFR1./maxR1;

```

Opción 2

```

1.  function [ TF1 ] = transformadafourier( T1,nx,ny)
2.  %Transformada de Fourier
3.  %T1 es la función o el valor donde se le aplicara lo que es la
      transformada
4.  %de Fourier
5.  %nx y ny es el tamaño de T1
6.
7.  epsx=pi/sqrt(2*nx); x=((1:nx)')-nx/2-1/2)*epsx;
8.  alfax=pi*exp(1i*2*pi*((nx-1)/2)^2/nx)/sqrt(2*nx);
9.  epsy=pi/sqrt(2*ny); y=((1:ny)')-ny/2-1/2)*epsy;
10.     alfay=pi*exp(1i*2*pi*((ny-1)/2)^2/ny)/sqrt(2*ny);
11.     Sx=diag(exp(-1i*pi*(nx-1)*(0:nx-1)'/nx));
12.     Sy=diag(exp(-1i*pi*(ny-1)*(0:ny-1)'/ny));

```

```

13.
14.     p=alfax*nx*(Sx*fft((T1*Sx).'));
15.     TF1=alfay*ny*Sy*(fft((p*Sy).'));
16.

```

C.11. Código para generar la transformada de Fourier inversa de las rejillas

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para generar la transformada de Fourier inversa de las rejillas.

Opción 1

```

1.     function [ TFB2 ]= invtransformadafouriermat(B2)
2.     %función que obtiene la inversa de la transformada de Fourier
3.     %B2 es la función donde le sacaran su inversa de la
   transformada de Fourier
4.     TFB2=ifft2(B2);
5.     TFB2=fftshift(TFB2);
6.     maxi2=max(max(TFB2));
7.     TFB2=TFB2./maxi2;

```

Opción 2

```

1. function [ TFIM ] = transformadafourierinversa( PROD,nx,ny)
2. % %TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA
3. %Hace la transformada de Fourier de la función que se desea obtener
4. %PROD es la función o el valor donde se le aplicara lo que es la
   transformada
5. %de Fourier inversa
6. %nx y ny es el tamaño de PROD
7.
8. epsx=pi/sqrt(2*nx); x=((1:nx)'^-nx/2-1/2)*epsx;
9. alfax=pi*exp(1i*2*pi*((nx-1)/2)^2/nx)/sqrt(2*nx);
10.     epsy=pi/sqrt(2*ny); y=((1:ny)'^-ny/2-1/2)*epsy;
11.     alfay=pi*exp(1i*2*pi*((ny-1)/2)^2/ny)/sqrt(2*ny);
12.     Sx=diag(exp(-1i*pi*(nx-1)*(0:nx-1)'/nx));
13.     Sy=diag(exp(-1i*pi*(ny-1)*(0:ny-1)'/ny));
14.
15.     p=alfax*nx*(Sx*ifft((PROD*Sx).'));
16.     TFIM=alfay*ny*Sy*(ifft((p*Sy).'));
17.

```

C.12. Código para generar un filtro de tres puntos

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para generar un filtro de tres puntos.

```
1. function [ a1 ] = filtropuntos_frec( m,n,r1,cx1,cy1,cx2,cy2)
2. %Crea filtro para observar moiré de alta frecuencia
3.
4. %m y n es el tamaño de la función o matriz en este caso donde
5. %vamos a filtrar
6. %a1 es una matriz de ceros del tamaño de la función del que se va
   filtrar
7. %cx1 y cy1 son la primera coordenada que quiero filtrar es decir
   x1,y1
8. %cx2 y cy2 son la segunda coordenada que quiero filtrar es decir
   x2,y2
9. %r1 es el radio que quiero que tenga el filtro
10.    %OR1,OR2 y OR3 son tres filtros que se generan en cual dos
    son las coordenadas que uno le indique y uno se encuentra en el
    centro ya que ese
11.    %se queda fijo.
12.
13.    a1=zeros(m,n);
14.
15.    for i=1:m
16.        for j=1:n
17.            if sqrt((i-cy1)^2+(j-cx1)^2)<r1
18.                OR1(i,j)=1;
19.            elseif sqrt((i-cy1)^2+(j-cx1)^2)>r1
20.                OR1(i,j)=0;
21.            end
22.        end
23.    end
24.
25.
26.
27.    for i=1:m
28.        for j=1:n
29.            if sqrt((i-cy2)^2+(j-cx2)^2)<r1
30.                OR2(i,j)=1;
31.            elseif sqrt((i-cy2)^2+(j-cx2)^2)>r1
32.                OR2(i,j)=0;
33.            end
34.        end
35.    end
```

```

36.
37.
38.     for i=1:m
39.         for j=1:n
40.             if sqrt((i-m/2-1)^2+(j-n/2-1)^2)<r1
41.                 OR3(i,j)=1;
42.             elseif sqrt((i-m/2-1)^2+(j-n/2-1)^2)>r1
43.                 OR3(i,j)=0;
44.             end
45.         end
46.     end
47.
48.     a1=OR1+OR2+OR3;

```

C.13. Código para generar un filtro circular

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para generar un filtro circular.

```

1. function [ MASC ] = filtrocircular( r,nx,ny)
2. % %Filtro circular
3.
4. %r es el radio que uno desee darle para filtro circular
5. %nx,ny son las dimensiones de la función original para crear el
   filtro para
6. %esa función o esa imagen es necesario que sean de las mismas
   dimensiones
7.
8. MASC=zeros(ny,nx);
9. for i=1:nx
10.     for j=1:ny
11.         if ((i-nx/2).^2+(j-ny/2).^2)<r
12.             MASC(j,i)=1;
13.         else if ((i-nx/2).^2+(j-ny/2).^2)>r
14.             MASC(j,i)=0;
15.         end
16.     end
17. end
18. end
19.
20.

```

C.14. Código para generar un filtro elíptico

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para generar un filtro elíptico, otra versión de este es `filtroelipse2(nx,ny,x0,y0,x,y,t)` donde va rotando la elipse con respecto a la vertical.

```
1. function [ m ] = filtroelipse( nx,ny,x0,y0,x,y)
2. % %Filtro elíptica
3.
4. %x e y es el punto de centro de la elipse
5. %x0 es el eje mayor de la elipse
6. %y0 es el eje menor de la elipse
7. %nx,ny son las dimensiones de la función original para crear el
   filtro para
8. %esa función
9.
10.     t=0;
11.     u=t*pi/180;
12.     for i=1:ny
13.         for j=1:nx
14.             if (((i-y)*cos(u)+(j-x)*sin(u))/(y0))^2+(((j-
   x)*cos(u)-(i-y)*sin(u))/(x0))^2)<1
15.
16.                 m(i,j)=255;
17.             elseif (((i-y)*cos(u)+(j-x)*sin(u))/(y0))^2+(((j-
   x)*cos(u)-(i-y)*sin(u))/(x0))^2)>1
18.                 m(i,j)=0;
19.             end
20.         end
21.     end
22.
```

C.15. Código para calcular las distancias

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para calcular las distancias de los puntos que queremos filtrar para así saber los valores que introduciremos para construir el filtro elíptico.

```
1. function [ h1 ] = eje_mayor( ax,by,cx,dy)
2. %Va calcular las distancias x e y, va indicar cuál es la distancia
   mas
3. %grande de los dos ejes
4.
```

```

5. a1=abs(dy-by); % distancia en el eje y
6. h=abs(cx-ax); % distancia en el eje x
7.
8. if a1<h
9.     h1=h;
10.    fprintf('distancia de x\n %4.2f \n',h)
11.    fprintf('distancia de y\n %4.2f \n',a1)
12.    fprintf('número más grande\n %4.2f \n',h1)
13.    fprintf('número más pequeño\n %4.2f \n',a1)
14.
15.
16.    elseif h<a1
17.        h1=a1;
18.        fprintf('distancia de x\n %4.2f \n',h)
19.        fprintf('distancia de y\n %4.2f \n',a1)
20.        fprintf('número más grande\n %4.2f \n',h1)
21.        fprintf('número más pequeño\n %4.2f \n',h)
22.
23.    elseif h==a1
24.        h1=a1;
25.        fprintf('distancia de x\n %4.2f \n',h)
26.        fprintf('distancia de y\n %4.2f \n',a1)
27.        fprintf('mismo número \n %4.2f \n',h1)
28.        fprintf('mismo número \n %4.2f \n',h)
29.
30.    end
31.

```

C.16. Código para calcular el ángulo

Este código es una función que se enlaza con los códigos que generan las rejillas anteriores, para calcular el ángulo para rotar el filtro elíptico con los puntos que queremos filtrar.

```

1. function [ tetha1 ] = angulo_tetha4( ax,by,cx,dy,x,y)
2.
3. %Esta función obtiene las distancias de los puntos y el ángulo,
   pero en
4. %este caso solo se pide que devuelva solo el ángulo que busco al
   darles las
5. %coordenadas de dos puntos se quieren
6.
7. %x e y es el punto de referencia que se toma en este caso es para
   la
8. %elíptica
9. %ax, by es la coordenada del primer punto

```

```

10.     %cx,dy es la coordenada del segundo punto
11.
12.     a1=dy-by; % diferencia de y2-y1
13.     h=cx-ax; % diferencia de x2-x1
14.
15.     if h<0 & a1>0
16.         h1=abs(h);
17.         fprintf('distancia de x\n %4.2f \n',h1)
18.         fprintf('distancia de y\n %4.2f \n',a1)
19.
20.     elseif a1<0 & h>0
21.         a2=abs(a1);
22.         fprintf('distancia de x\n %4.2f \n',h)
23.         fprintf('distancia de y\n %4.2f \n',a2)
24.
25.     elseif a1<0 & h<0
26.         a2=abs(a1);
27.         h1=abs(h);
28.         fprintf('distancia de x\n %4.2f \n',h1)
29.         fprintf('distancia de y\n %4.2f \n',a2)
30.
31.     elseif a1>0 & h>0
32.         fprintf('distancia de x\n %4.2f \n',h)
33.         fprintf('distancia de y\n %4.2f \n',a1)
34.
35.     end
36.
37.     %saca el angulo
38.
39.     ax1=ax-x; %cambio de referencia del x1
40.     by1=y-by; %cambio de referencia del y1
41.     cx1=cx-x; %cambio de referencia del x2
42.     dy1=y-dy; %cambio de referencia del y2
43.     a=dy1-by1; %numerador
44.     p=cx1-ax1; %denominador
45.
46.     if p=0
47.         tetha1=90
48.     end
49.
50.     pend=a/p; %pendiente de la recta
51.
52.     % saca el ángulo
53.     radianes=atan(pend);%está en radianes el ángulo
54.
55.     %lo convertimos a los grados que queremos
56.     tetha2=radianes*(180/pi);
57.
58.     if tetha2<0

```

```
59.         tetha=-tetha2
60.     else
61.         tetha=tetha2
62.     end
63.
64.     if a>0 && p<0
65.         tetha1=180-tetha    %statements
66.     elseif a<0 && p<0     %expression
67.         tetha1=270-tetha    %statements
68.     elseif a<0 && p>0
69.         tetha1=360-tetha    %statements
70.     else
71.         tetha1=tetha2
72.     end
73.
74.     te=tetha2
75.
```

Referencias

- [1] RAYLEIGH, Lord. XII. On the manufacture and theory of diffraction-gratings. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1874, vol. 47, no 310
- [2] GASVIK, Kjell J. Moiré Methods. Triangulation. *Optical metrology*, 2002, p. 173-190.
- [3] RONCHI, Vasco. Forty years of history of a grating interferometer. *Applied optics*, 1964, vol. 3, no 4, p. 437-451.
- [4] CORNEJO-RODRIGUEZ, A. Ronchi test. *Optical Shop Testing*, 2007, vol. 3.
- [5] WILSON, Jerry D.; BUFFA, Anthony J. *Física*. Pearson Educación, 2002.
- [6] LI, Xiao-Lei, et al. A study on the digital moiré technique with circular and radial gratings. *Optics and lasers in engineering*, 2007, vol. 45, no 7, p. 783-788.
- [7] BOU, Pedro Andrés. *Placas zonales: Obtención de una Lente Kinoform por métodos holográficos*. Universitat de València, Facultat de Ciències Físiques, 1983.
- [8] M.A. Salgado Verduzco, Ortiz. Lentes de Fresnel grabadas en un material fotosensible, *Ciencia Nicolaita* No.43, abril 2006.
- [9] POST, D. Moiré fringe multiplication with a nonsymmetrical doubly blazed reference grating. *Applied optics*, 1971, vol. 10, no 4, p. 901-907.
- [10] BRACEWELL, Ronald Newbold; BRACEWELL, Ronald N. *The Fourier transform and its applications*. New York: McGraw-Hill, 1986.
- [11] AMIDROR, Isaac. *The Theory of the Moiré Phenomenon: Volume I: Periodic Layers*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [12] NISHIJIMA, Yasunori; OSTER, Gerald. Moiré patterns: their application to refractive index and refractive index gradient measurements. *JOSA*, 1964, vol. 54, no 1, p. 1-5.
- [13] ULICHNEY, Robert. *Digital halftoning*. MIT press, 1987.
- [14] BRYNGDAHL, Olof. Moiré and higher grating harmonics. *JOSA*, 1975, vol. 65, no 6, p. 685-694.
- [15] ROSENFELD, Azriel; KAK, Avinash C. *Digital picture processing*, Computer Science and Applied Mathematics. 1982.
- [16] GOODMAN, Joseph W. *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill Inc. USA, 1968. Chap. 2-5.

[17] JORGE ADRIÁN ARIAS DEL ANGEL. *Obtención de relieves y reconstrucción de objetos en 3d utilizando proyección de luz estructurada*. Tesis de Licenciatura, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, 2013.

[18] CESAR RANGEL CORONA. *Medición de distancias usando efecto talbot*. Tesis de Licenciatura, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, 2010.