

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE
LA HIDRODINÁMICA DE EULER EN DOMINIOS
CON OBSTÁCULOS

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

Ricardo Tovar Duarte

DIRECTOR DEL TRABAJO:

Dr. Francisco Shidartha Guzmán Murillo

Morelia Michoacán, Marzo del 2020



Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Resumen | 1 |
| 2. Abstract | 3 |
| 3. Introducción | 5 |
| 4. Ecuaciones de la Dinámica de un Fluido Simple | 7 |
| 4.1. Forma Cuasi-Lineal de una Ecuación Diferencial Parcial | 7 |
| 4.1.1. Ecuación de Burguers | 7 |
| 4.2. Ecuación de Estado | 8 |
| 4.3. Ecuaciones de Euler | 9 |
| 4.3.1. Forma Conservativa | 10 |
| 4.3.2. Ecuaciones de Euler en 1D | 11 |
| 4.3.3. Ecuaciones de Euler en 2D | 13 |
| 4.3.4. Ecuaciones de Euler en 3D | 15 |
| 5. Métodos Numéricos | 17 |
| 5.1. Discretización del Dominio | 17 |
| 5.1.1. Dominio Espacial 1D: | 17 |
| 5.1.2. Dominio Espacial 2D: | 18 |
| 5.1.3. Dominio Espacial 3D: | 19 |
| 5.1.4. Dominio Temporal: | 20 |
| 5.2. Método de Líneas | 21 |
| 5.3. Métodos de Integración Runge Kutta | 22 |
| 5.4. Volúmenes Finitos | 23 |
| 5.4.1. Forma Integral | 23 |
| 5.5. Reconstrucción de Variables | 24 |
| 5.5.1. Reconstructores de Variables | 25 |
| 5.6. Problema de Riemann | 27 |
| 5.6.1. Caso 1D | 27 |
| 5.6.2. Caso 3D | 30 |
| 5.7. Solución Aproximada del Problema de Riemann de Harten Lax y Van Leer (HLL) | 32 |
| 5.8. Condiciones de Frontera | 33 |
| 5.8.1. Condiciones de Frontera Reflectivas o de Rebote | 33 |
| 5.8.2. Condiciones de Frontera Transmisivas o de Salida | 33 |
| 5.8.3. Condiciones de Frontera Periódicas | 33 |
| 6. Pruebas | 35 |
| 6.1. Tubo de Choque 1D | 35 |
| 6.1.1. Choque-Rarefacción | 36 |
| 6.1.2. Rarefacción-Rarefacción | 39 |
| 6.2. Tubo de Choque con el código 3D | 41 |
| 6.2.1. Choque-Rarefacción. | 42 |
| 6.2.2. Rarefacción-Rarefacción | 44 |
| 6.3. Onda Explosiva | 46 |
| 6.3.1. Explosión Débil | 47 |
| 6.4. Túnel de Viento de Emery | 50 |
| 6.5. Túnel de Viento con Obstáculos | 52 |
| 6.5.1. Escalón con Inclinación | 53 |
| 6.5.2. Dos Escalones Inclinados | 58 |
| 6.5.3. Círculo | 62 |

| | |
|----------------------------|-----------|
| 6.5.4. Elipse | 64 |
| 6.5.5. proyectil | 66 |
| 7. Conclusiones | 71 |

1. Resumen

En este trabajo se implementó un código en Fortran 90 para la solución numérica de las ecuaciones de la hidrodinámica de Euler para un fluido simple, compresible, no viscoso y donde se puede ignorar el intercambio de calor. Dicho código se basa en el método de Volúmenes Finitos, que se describe con detalle. Se hacen pruebas para el código con diferentes problemas clásicos con diferentes condiciones iniciales y de frontera para validar el código. Finalmente se proponen problemas que no son básicos, en particular pruebas con túneles de viento que contienen diversos obstáculos sólidos e impenetrables: escalones, escalones inclinados, cilindro, elipse y finalmente un proyectil, éste último en el régimen sub y supersónico. Los resultados se presentan y analizan para cada caso.

Palabras clave: ecuaciones de la hidrodinámica de Euler, Volúmenes Finitos, HLL, Godunov, Minmod, túnel de viento con obstáculos.

2. Abstract

In this work, we present a code implemented in Fortran 90, that solves Euler's hydrodynamics equations for a simple, compressible, non-viscous fluid and where heat exchange is ignored. This code is based on the Finite Volumes method, which is described in detail. Tests were done for the code with different classical problems with different initial and boundary conditions to validate the code. Finally, problems that are not basic are proposed, in particular tests involving wind tunnels that contain various solid and impenetrable obstacles: steps, inclined steps, cylinder, ellipse and finally a projectile, the latter in the sub and supersonic regimes. The results are presented and analyzed for each case.

Keywords: Euler's hydrodynamic equations, Finite Volumes, HLL, Godunov, Minmod, wind tunnel with obstacles.

3. Introducción

Las ecuaciones de Navier Stokes (Claude - Louis Navier y George Gabriel Stokes) son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que gobiernan el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones modelan la atmósfera terrestre, corrientes oceánicas y el flujo en los alrededores de vehículos y proyectiles, así como cualquier fenómeno en el que se consideren fluidos newtonianos.

Las ecuaciones de Navier-Stokes se obtienen aplicando los principios de la conservación en mecánica y la termodinámica a un volumen de fluido con lo que resultan las ecuaciones en su formulación integral [2]. Para tener su formulación diferencial, las ecuaciones se manipulan considerando diversas consideraciones, principalmente la ley de viscosidad de Newton, la cual nos dice que los esfuerzos tangenciales guardan una relación lineal con el gradiente de velocidad.

Las ecuaciones de Navier-Stokes en forma diferencial son más útiles para resolver problemas de la mecánica de fluidos. No se cuenta con una solución general para este conjunto de ecuaciones y a excepción de ciertos tipos de flujos y situaciones no es posible encontrar una solución exacta en general, por ello se busca construir soluciones numéricamente. Este campo de estudio se llama Computational Fluid Dynamics (CFD). Por mencionar unas cuantas aplicaciones de mi interés para las ecuaciones de Navier-Stokes:

- Problemas de hidrodinámica más complejos.
- Aplicaciones a la aerodinámica y aeronáutica al simular la evolución de fluidos con presencia de obstáculos, como por ejemplo la evolución del aire en presencia de una ala de avión, agua golpeando el fondo del lecho marino o la costa. Problemas de propulsión y empuje de cohetes o proyectiles en general.
- Aplicación al estudio de la atmósfera.
- Propagación de incendios e inundaciones.
- Problemas de explosiones.
- Construcción de presas, canales y acueductos para determinar las presiones presentes y la evolución del agua ante alguna perturbación.
- Interacción y comportamiento de fluidos con diferentes condiciones de presión y densidad para hacer mezclas de ellos.
- Efectos de flujos de aire en puentes, edificios y estructuras.

Sin duda todas estas aplicaciones son un campo de estudio muy amplio que está en constante desarrollo por su utilidad en la vida diaria y la ingeniería [2].

En la dinámica de fluidos existen fluidos complejos, en los que intervienen dos o más fluidos distintos, incluso en dos fases. Hay otros regímenes donde se consideran fluidos magnetizados, cuya dinámica está gobernada por la Magnetohidrodinámica. En esta tesis nos concentramos en sistemas que constan de un sólo fluido, no magnetizado y en una sola fase.

Un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes considera un fluido sin viscosidad. Las ecuaciones con esta condición son las ecuaciones de Euler que se utilizan para fluidos compresibles (fluido cuya densidad no es constante), no viscosos y sin intercambio de calor para estudiar su movimiento y las ondas de choque que generan [1].

En este trabajo nos concentraremos en la solución numérica de las ecuaciones de Euler. Para esto implementaremos un código en Fortran 90, a fin de hacer pruebas estándar con diferentes problemas, cada uno de ellos con condiciones iniciales y condiciones de frontera diferentes dependiendo del sistema físico que se busca modelar. Comparamos nuestros resultados con los obtenidos en la literatura para validar nuestro código [4], [5], [7]. Una vez que nuestro código haya superado las pruebas, proponemos pruebas no estándar; es decir, pruebas originales que no forman parte de los problemas clásicos. Por cada prueba realizada los resultados se mostrarán en gráficos y se discutirá de manera breve la interpretación de ellos.

Este trabajo es un primer paso a la visión futura en el campo de estudio de CFD, esperando resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para simular problemas más reales y de mayor interés para la humanidad y la ingeniería del futuro.

4. Ecuaciones de la Dinámica de un Fluido Simple

En este capítulo se presentarán las ecuaciones que gobiernan la dinámica de fluidos para un fluido compresible, por ejemplo, un gas, con su ecuación de estado que describiremos más adelante. Inicialmente consideraremos la forma diferencial de las ecuaciones de Euler y su relación con aspectos de la termodinámica. Después presentaremos la forma integral fundamental de las ecuaciones de Euler.

4.1. Forma Cuasi-Lineal de una Ecuación Diferencial Parcial

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para m incógnitas escrito como:

$$U_t + AU_x + B = 0, \quad (4.1)$$

donde:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Si las entradas de \mathbf{A} y B son constantes, decimos que el sistema (4.1) es lineal con coeficientes constantes. Si \mathbf{A} depende de U , es decir, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(U)$, el sistema (4.1) se llama cuasi-lineal. El sistema 4.1 se llama hiperbólico en el punto (x, t) si \mathbf{A} tiene m eigenvalores reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

4.1.1. Ecuación de Burgers

Un buen ejemplo ilustrativo de una EDP hiperbólica es la ecuación de Burgers:

$$\begin{cases} U_t + UU_x = 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{cases}$$

es inmediato que $\lambda = U$, así la velocidad de propagación de la información no es constante, además las curvas características para la ecuación de Burgers tienen la forma:

$$x = x_0 + U_0(x)t.$$

Debido a esto existen puntos donde las curvas características se intersectan y se producen discontinuidades, esto provocado por la no linealidad de la ecuación de Burguers, esto se ilustra en la figura 4.1.

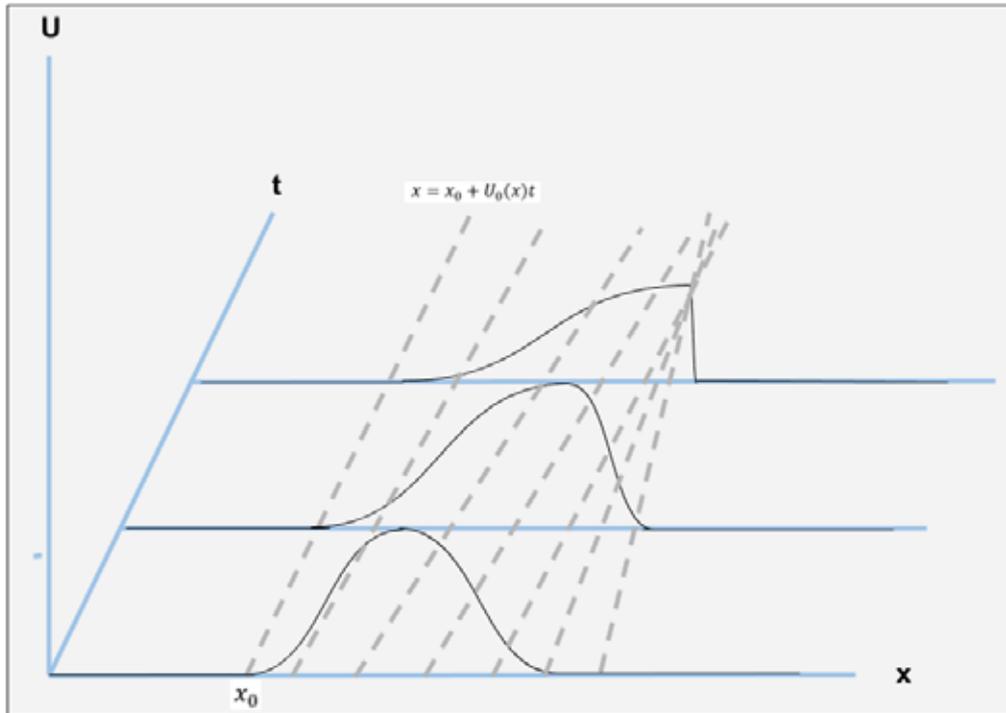


Figura 4.1: Curvas características en la ecuación de Burguers.

4.2. Ecuación de Estado

Un sistema en equilibrio termodinámico se describe por las variables p y v que son la presión y el volumen específico respectivamente. En este trabajo consideraremos la Ecuación de Estado para un gas ideal que tiene la forma:

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (4.2)$$

aquí e es la energía interna, γ es el índice adiabático, que tiene la fórmula:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v},$$

donde C_p es la capacidad calorífica del fluido a presión constante y C_v es la capacidad calorífica del fluido a volumen constante. A lo largo de este trabajo, el coeficiente $\gamma = 1.4$ se refiere al aire y $\gamma = \frac{5}{3}$ a un gas monoatómico como por ejemplo el Helio [10].

Otra cantidad que será de ayuda es la velocidad del sonido en el fluido, que se determina mediante [2]:

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (4.3)$$

donde ρ es la densidad. Otra magnitud importante es el número de Mach M introducido por el físico austriaco Ernst Mach (1838-1916) que se define como el cociente entre la velocidad V de un elemento de volumen o un objeto y la velocidad del sonido en el fluido en que se mueve el objeto que definimos con (4.3), así:

$$M = \frac{V}{a}. \quad (4.4)$$

En función del valor de M definimos a un fluido como:

$$M = \begin{cases} < 0.7 & \textit{subsónico} \\ 0.7 - 1.2 & \textit{transónico} \\ 1.2 - 5 & \textit{supersónico} \\ > 5 & \textit{hipersónico} \end{cases}$$

Dependiendo del valor de M el fluido se comporta de maneras diferentes al encontrarse con obstáculos, que son las pruebas finales de esta tesis.

4.3. Ecuaciones de Euler

Consideremos las ecuaciones de Euler. Estas leyes conservativas se presentan como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que son del tipo hiperbólico. Este sistema rige el comportamiento de un fluido compresible no viscoso como gases y en los cuales podemos despreciar los efectos del intercambio de calor.

Consideremos un dominio cartesiano en 3 dimensiones y definamos las siguientes funciones que dependen de la posición y del tiempo:

$\rho(x, y, z, t)$: Densidad de masa.

$p(x, y, z, t)$: Presión.

$v_x(x, y, z, t)$: Componente en dirección x de la velocidad.

$v_y(x, y, z, t)$: Componente en dirección y de la velocidad.

$v_z(x, y, z, t)$: Componente en dirección z de la velocidad.

También podemos definir las variables conservativas:

ρv_x : Componente x de la densidad de momento.

ρv_y : Componente y de la densidad de momento.

ρv_z : Componente z de la densidad de momento.

E : Energía total por unidad de masa.

En el sentido físico, estas cantidades conservativas resultan de la aplicación de las leyes fundamentales de conservación de masa, momento y energía a un elemento del fluido.

4.3.1. Forma Conservativa

Las ecuaciones de la Hidrodinámica de Euler tienen la forma:

$$\begin{aligned}
 \rho_t + (\rho v_x)_x + (\rho v_y)_y + (\rho v_z)_z &= 0 \\
 (\rho v_x)_t + (\rho v_x^2 + p)_x + (\rho v_x v_y)_y + (\rho v_x v_z)_z &= 0 \\
 (\rho v_y)_t + (\rho v_x v_y)_x + (\rho v_y^2 + p)_y + (\rho v_y v_z)_z &= 0 \\
 (\rho v_z)_t + (\rho v_x v_z)_x + (\rho v_y v_z)_y + (\rho v_z^2 + p)_z &= 0 \\
 E_t + [v_x(E + p)]_x + [v_y(E + p)]_y + [v_z(E + p)]_z &= 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

E = Energía total por unidad de masa = $\rho(\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + e)$; e = Energía interna específica.

Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales escritas de la forma (4.5) se le llama sistema de leyes conservativas en forma diferencial. Para que todo esté bien definido asumimos que existe solución U cuyas derivadas parciales existen y convierten a (4.5) en una identidad. Si en (4.5) consideramos:

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \end{pmatrix},$$

$$F(U) := \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ v_x(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{2u_1}(3 - \gamma) + (\gamma - 1)[u_5 - \frac{u_3^2 + u_4^2}{2u_1}] \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ \frac{u_2 u_4}{u_1} \\ \gamma \frac{u_2}{u_1} u_5 - \frac{u_2}{2u_1^2} (\gamma - 1)[u_2^2 + u_3^2 + u_4^2] \end{pmatrix},$$

$$G(U) := \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_z v_y \\ v_y(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ \frac{u_3^2}{2u_1} (3 - \gamma) + (\gamma - 1) \left[u_5 - \frac{u_2^2 + u_4^2}{2u_1} \right] \\ \frac{u_3 u_4}{u_1} \\ \gamma \frac{u_3}{u_1} u_5 - \frac{u_3}{2u_1} (\gamma - 1) [u_2^2 + u_3^2 + u_4^2] \end{pmatrix},$$

$$H(U) := \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z^2 + p \\ v_z(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_4 \\ \frac{u_2 u_4}{u_1} \\ \frac{u_3 u_4}{u_1} \\ \frac{u_4^2}{2u_1} (3 - \gamma) + (\gamma - 1) \left[u_5 - \frac{u_2^2 + u_3^2}{2u_1} \right] \\ \gamma \frac{u_4}{u_1} u_5 - \frac{u_4}{2u_1} (\gamma - 1) [u_2^2 + u_3^2 + u_4^2] \end{pmatrix},$$

el sistema (4.5) puede escribirse en forma cuasilineal (4.1):

$$U_t + \mathbf{A}(U)U_x + \mathbf{B}(U)U_y + \mathbf{C}(U)U_z = 0,$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} son matrices que especificaremos más adelante.

4.3.2. Ecuaciones de Euler en 1D

A fin de ilustrar y proceder a hacer pruebas, nos conviene primeramente estudiar el caso 1D. La forma conservativa en forma diferencial de las ecuaciones de la hidrodinámica de Euler para un fluido compresible en 1D consta de tres ecuaciones y tiene la forma:

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

donde:

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ E \end{pmatrix},$$

$$F(U) := \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ v_x(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{2u_1} (3 - \gamma) + (\gamma - 1) u_3 \\ \gamma \frac{u_2 u_3}{u_1} - (\gamma - 1) \frac{u_2^3}{2u_1} \end{pmatrix},$$

donde ρ es la densidad del fluido, p la presión, v_x es la velocidad y en el caso 1D la energía total por unidad de masa es $E = \rho(\frac{1}{2}v_x^2 + e)$. Además con la ecuación de estado (4.2) $e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)}$, podemos resolver el sistema.

Si aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{dF(U)}{dU} \frac{\partial U}{\partial x},$$

las ecuaciones de Euler en 1D pueden ser escritas en forma cuasi-lineal como:

$$U_t + \mathbf{A}(U)U_x = 0, \quad (4.6)$$

donde \mathbf{A} es la matriz Jacobiana

$$\mathbf{A} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3 - \gamma)\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & \gamma - 1 \\ -\gamma\frac{u_3 u_2}{(u_1)^2} + (\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 & \gamma\frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \end{pmatrix}.$$

Para conocer las direcciones características y la velocidad de propagación de información para (4.6) es necesario conocer los eigenvalores de \mathbf{A} . Para calcular los eigenvalores λ_{xi} , $i = 1, 2, 3$ de \mathbf{A} resolvemos $|\mathbf{A} - \lambda_x \mathbf{I}| = 0$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad 3×3 .

Resolviendo:

$$\begin{aligned} & (\lambda_x - v_x)(\gamma v_x - \lambda_x)[2v_x - \gamma_x - \lambda_x] + (\lambda_x - v_x)[-a^2 - (\gamma - 1)v_x^2 + (\gamma - 1)\gamma v_x^2] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2}[(\gamma v_x - \lambda_x)(1 - \gamma)v_x^2 - (\gamma - 1)v_x^2[(1 - 2\gamma)\lambda_x + \gamma v_x]] = 0 \end{aligned}$$

Si en la expresión anterior factorizamos un término $(\lambda_x - v_x)$ implica que:

$$\lambda_{x2} = v_x,$$

por otro lado también:

$$\lambda_x^2 - 2v_x \lambda_x + v_x^2 - a^2 = 0.$$

Resolviendo para λ_x tenemos:

$$\lambda_{x1} = v_x - a,$$

$$\lambda_{x3} = v_x + a.$$

Así entonces, los tres valores propios de \mathbf{A} son reales:

$$\begin{aligned}\lambda_{x1} &= v_x - a, \\ \lambda_{x2} &= v_x, \\ \lambda_{x3} &= v_x + a.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Recordemos que a es la velocidad del sonido en el fluido. Los eigenvalores de \mathbf{A} se llaman eigenvalores del sistema (4.6). Físicamente, los eigenvalores representan velocidades de propagación de información, además definen direcciones características localmente de la forma $\frac{dx}{dt} = \lambda_{xi}$, $i = 1, 2, 3$.

4.3.3. Ecuaciones de Euler en 2D

Para ilustrar y hacer pruebas de problemas en 2D estudiemos las ecuaciones de Euler en 2D. La forma diferencial conservativa de las ecuaciones de la hidrodinámica de Euler para un fluido compresible en 2D son cuatro:

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0,$$

donde:

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ E \end{pmatrix},$$

$$F(U) := \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ v_x(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma - 1)(u_4 - \frac{u_2^2 + u_3^2}{2u_1}) \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ (1 - \gamma)(u_2^2 + u_3^2) \frac{u_2}{u_1} \end{pmatrix},$$

$$G(U) := \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ v_y(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ \frac{u_3^2}{u_1} + (\gamma - 1)(u_4 - \frac{u_2^2 + u_3^2}{2u_1}) \\ (1 - \gamma)(u_2^2 + u_3^2) \frac{u_3}{u_1} \end{pmatrix}.$$

De igual manera que en el caso 1D, ρ es la densidad del fluido, p la presión, la diferencia con el caso 1D radica en que consideramos v_x y v_y , que son las componentes x y y de la velocidad del fluido. e es la energía interna (4.2) y en el caso 2D la energía total por unidad de masa es $E = \rho(\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + e)$. Una vez completo el sistema de ecuaciones podemos resolverlo.

Usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(U)}{\partial x} &= \frac{dF(U)}{dU} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial G(U)}{\partial x} &= \frac{dG(U)}{dU} \frac{\partial U}{\partial x},\end{aligned}$$

las ecuaciones de Euler en 2D pueden ser escritas en forma cuasi-lineal:

$$U_t + \mathbf{A}(U)U_x + \mathbf{B}(U)U_y = 0,$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} son las matrices Jacobianas:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3 - \gamma)\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & \gamma - 1 \\ -\gamma\frac{u_3 u_3}{(u_1)^2} + (\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 & \gamma\frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{i,j} = \frac{\partial G_i}{\partial u_j}.$$

Resolviendo $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ obtenemos los eigenvalores λ_x de \mathbf{A} :

$$\lambda_{x1} = v_x - a,$$

$$\lambda_{x2} = v_x,$$

$$\lambda_{x3} = v_x,$$

$$\lambda_{x4} = v_x + a.$$

Análogamente los eigenvalores λ_{yi} de \mathbf{B} son:

$$\lambda_{y1} = v_y - a,$$

$$\lambda_{y2} = v_y,$$

$$\lambda_{y3} = v_y,$$

$$\lambda_{y4} = v_y + a.$$

Los eigenvalores de \mathbf{A} y \mathbf{B} son las velocidades de propagación de información en las direcciones x y y respectivamente.

4.3.4. Ecuaciones de Euler en 3D

Finalmente, con el propósito de ilustrar y hacer pruebas en 3D, estudiemos las ecuaciones de la hidrodinámica de Euler para un fluido compresible en 3D. La forma conservativa diferencial de las ecuaciones de Euler en 3D son cinco:

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y + H(U)_z = 0,$$

siendo:

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \end{pmatrix},$$

$$F(U) := \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ v_x(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{2u_1}(3 - \gamma) + (\gamma - 1)[u_5 - \frac{u_3^2 + u_4^2}{2u_1}] \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ \frac{u_2 u_4}{u_1} \\ \gamma \frac{u_2}{u_1} u_5 - \frac{u_2}{2u_1^2} (\gamma - 1)[u_2^2 + u_3^2 + u_4^2] \end{pmatrix},$$

$$G(U) := \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_z v_y \\ v_y(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \\ \frac{u_3^2}{2u_1}(3 - \gamma) + (\gamma - 1)[u_5 - \frac{u_2^2 + u_4^2}{2u_1}] \\ \frac{u_3 u_4}{u_1} \\ \gamma \frac{u_3}{u_1} u_5 - \frac{u_3}{2u_1^2} (\gamma - 1)[u_2^2 + u_3^2 + u_4^2] \end{pmatrix},$$

$$H(U) := \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z^2 + p \\ v_z(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_4 \\ \frac{u_2 u_4}{u_1} \\ \frac{u_3 u_4}{u_1} \\ \frac{u_4^2}{2u_1}(3 - \gamma) + (\gamma - 1)[u_5 - \frac{u_2^2 + u_3^2}{2u_1}] \\ \gamma \frac{u_4}{u_1} u_5 - \frac{u_4}{2u_1^2} (\gamma - 1)[u_2^2 + u_3^2 + u_4^2] \end{pmatrix}.$$

Nuevamente ρ es la densidad del fluido, p la presión. Ahora consideremos la velocidad del fluido en la dirección z , así v_x, v_y, v_z son las componentes en x, y y z de la velocidad. La energía interna está determinada por (4.2). En el caso 3D la energía total por unidad de masa es: $E = \rho(\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + e)$. Una vez completo el sistema de ecuaciones podemos resolverlo.

Usando regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(U)}{\partial x} &= \frac{dF(U)}{dU} \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial G(U)}{\partial y} &= \frac{dG(U)}{dU} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{\partial H(U)}{\partial z} &= \frac{dH(U)}{dU} \frac{\partial U}{\partial z},\end{aligned}$$

las ecuaciones de Euler en 3D pueden ser escritas en forma cuasi-lineal:

$$U_t + \mathbf{A}(U)U_x + \mathbf{B}(U)U_y + \mathbf{C}(U)U_z = 0,$$

con \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} las matrices Jacobianas:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3 - \gamma)\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & \gamma - 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{u_3 u_3}{(u_1)^2} + (\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 & \gamma\frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices \mathbf{B} , \mathbf{C} tienen una forma similar:

$$\mathbf{B}_{i,j} = \frac{\partial G_i}{\partial u_j}, \quad \mathbf{C}_{i,j} = \frac{\partial H_i}{\partial u_j}.$$

Resolviendo $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ obtenemos los eigenvalores λ_x de \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}\lambda_{x1} &= v_x - a, \\ \lambda_{x2} &= v_x, \\ \lambda_{x3} &= v_x, \\ \lambda_{x4} &= v_x, \\ \lambda_{x5} &= v_x + a.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Análogamente los eigenvalores λ_y , λ_z de \mathbf{B} y \mathbf{C} son:

$$\begin{aligned}\lambda_{y1} &= v_y - a, & \lambda_{z1} &= v_z - a, \\ \lambda_{y2} &= v_y, & \lambda_{z2} &= v_z, \\ \lambda_{y3} &= v_y, & \lambda_{z3} &= v_z, \\ \lambda_{y4} &= v_y, & \lambda_{z4} &= v_z, \\ \lambda_{y5} &= v_y + a. & \lambda_{z5} &= v_z + a.\end{aligned}$$

Los eigenvalores de \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son las velocidades de propagación en las direcciones x , y y z respectivamente.

5. Métodos Numéricos

5.1. Discretización del Dominio

Para el método numérico de Volúmenes Finitos que se presentará más adelante, necesitamos un dominio discretizado, es decir, se construirá una versión discreta Ω_d de Ω . Para esto necesitamos un dominio espacial Ω y enteros N_x , N_y , N_z encargados de la resolución.

5.1.1. Dominio Espacial 1D:

Sea $\Omega = [x_0, x_f]$ el dominio espacial en 1D. Definimos la resolución del dominio discreto Ω_d como:

$$\Delta x = \frac{x_f - x_0}{N_x}.$$

Así, los elementos del dominio discreto (figura 5.1) son:

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x.$$

Nótese que $x_0 = x_0$ y $x_{N_x} = x_f$.



Figura 5.1: Elementos del dominio discreto Ω_d en 1D.

5.1.2. Dominio Espacial 2D:

Sea $\Omega = [x_0, x_f] \times [y_0, y_f]$ el dominio espacial en 2D. Definimos las resoluciones en x y y del dominio discreto Ω_d como:

$$\Delta x = \frac{(x_f - x_0)}{N_x},$$

$$\Delta y = \frac{(y_f - y_0)}{N_y}.$$

Así, los elementos del dominio discreto Ω_d (figura 5.2) se definen como:

$$x_{i,j} = x_0 + i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x.$$

$$y_{i,j} = y_0 + j\Delta y, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

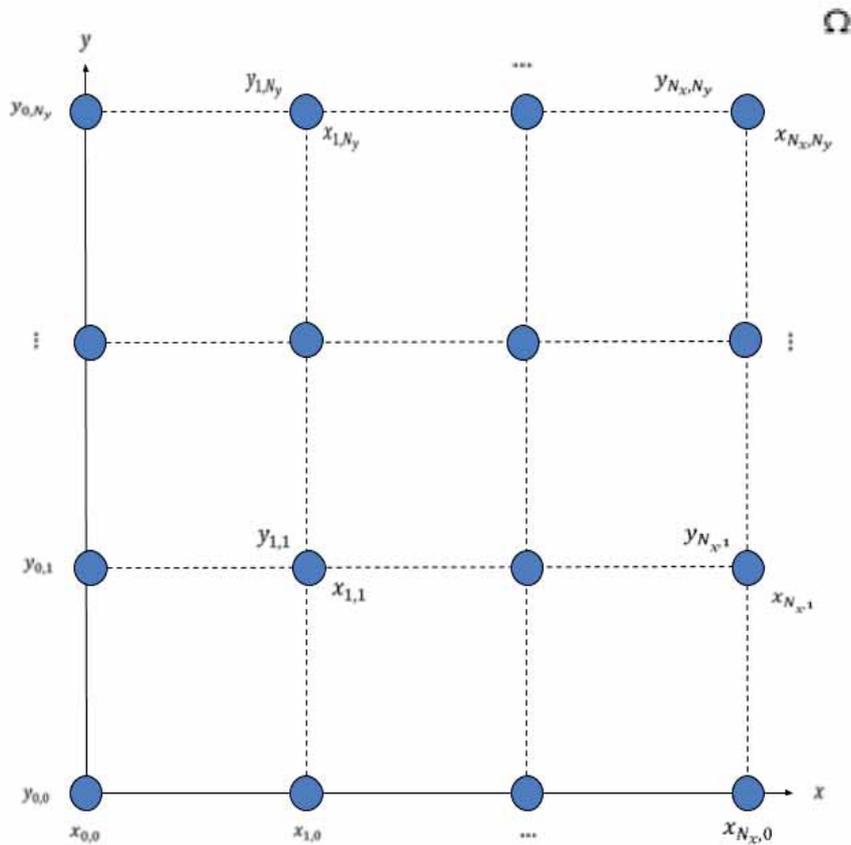


Figura 5.2: Elementos de dominio discreto Ω_d en 2D.

5.1.3. Dominio Espacial 3D:

Sea $\Omega = [x_0, x_f] \times [y_0, y_f] \times [z_0, z_f]$ el dominio espacial en 3D. Definimos las resoluciones en x , y y z como:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{(x_f - x_0)}{N_x}, \\ \Delta y &= \frac{(y_f - y_0)}{N_y}, \\ \Delta z &= \frac{(z_f - z_0)}{N_z}.\end{aligned}$$

Así, los elementos del dominio discreto Ω_d (figura 5.3) se definen como:

$$\begin{aligned}x_{i,j,k} &= x_0 + i\Delta x, & i &= 0, 1, \dots, N_x, \\ y_{i,j,k} &= y_0 + j\Delta y, & j &= 0, 1, \dots, N_y, \\ z_{i,j,k} &= z_0 + k\Delta z, & k &= 0, 1, \dots, N_z.\end{aligned}$$

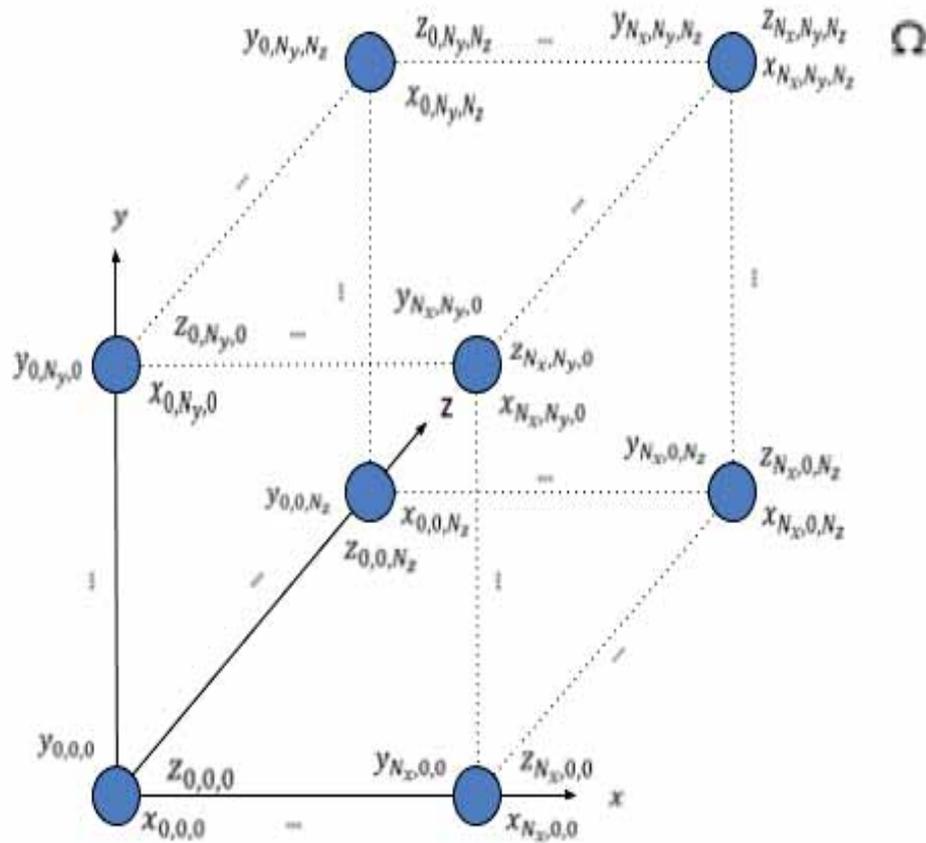


Figura 5.3: Elementos del dominio discreto Ω_d en 3D.

5.1.4. Dominio Temporal:

Sea $\Omega = [t_0, t_f] \times [x_0, x_f] \times [y_0, y_f] \times [z_0, z_f]$ el dominio espacio-temporal, con el dominio espacial ya discretizado. Definimos la resolución en t como:

$$\Delta t = C \Delta x,$$

$$t^n = n \Delta t,$$

donde C es una constante llamada factor de Courant [2]. Una vez discretizado el dominio espacio-temporal, cada punto tendrá las coordenadas i, j, k para cada instancia t^n del tiempo [3].

5.2. Método de Líneas

Consideremos una ecuación diferencial parcial general para una función $f = f(t, x)$ en un dominio $\Omega = [0, t_f] \times [x_0, x_f]$ con condiciones iniciales y de frontera del tipo:

$$\begin{cases} F\left(f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = 0 \\ f(0, x) = f_0(x) \\ f(t, x_0) = g(t) \\ f(t, x_f) = h(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

y supongamos que podemos reescribir la ecuación diferencial como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = rhs\left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right).$$

La parte izquierda es la derivada de f respecto al tiempo y a $rhs\left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$ le llamamos Right Hand Side de la ecuación anterior, que como su nombre lo dice, hace referencia al lado derecho de la ecuación. Así podremos construir una solución $f(t, x)$ de manera iterativa para cada dupla $(t^n, x_i) \in \Omega_d$ calculando :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t^n, x_i)} = rhs\left(\left.f\right|_{(t^n, x_i)}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(t^n, x_i)}, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(t^n, x_i)}\right). \quad (5.2)$$

Esta ecuación se llama versión semi-discreta de la ecuación diferencial parcial en el punto del dominio (t^n, x_i) debido a que la parte derecha está escrita en forma discreta de f y sus derivadas, pero la parte izquierda no está en forma discreta sino continua.

La ecuación (5.2) es una ecuación diferencial ordinaria para cada punto x_i en el espacio, en el dominio temporal $[t^n, t^{n+1}]$ y la parte derecha es un número. Así obtenemos la solución $f(t^n, x_i)$ a lo largo de $[0, t_f]$ en el punto x_i . En resumen, el método de líneas convierte un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes en cada punto espacial x_i .

Para obtener dicha solución el siguiente paso será resolver esta ecuación diferencial ordinaria en cada punto x_i de t^n a t^{n+1} mediante el método de integración Runge Kutta [9].

5.3. Métodos de Integración Runge Kutta

Los métodos Runge Kutta son métodos iterativos útiles en la construcción de la solución de una ecuación diferencial. Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (5.3)$$

El método Runge-Kutta de cuarto orden tiene la forma [8]:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, x_i), \\ k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + h\frac{k_1}{2}), \\ k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + h\frac{k_2}{2}), \\ k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3). \end{cases}$$

donde $h = \Delta t$. Así ya tenemos una aproximación de la función $x(t)$. La precisión de la función $x(t)$ depende del valor de Δt , mientras más pequeño sea, $x(t)$ será una mejor aproximación a la solución en el continuo de (5.3). Como su nombre lo dice, el método es de cuarto orden, es decir, el error total acumulado es de $O(h^4)$.

Decimos que un método es de orden n si al aumentar la resolución (disminuir el tamaño de Δx) por un factor ϵ , la aproximación de la versión discreta se aproxima a la versión continua un factor ϵ^n .

5.4. Volúmenes Finitos

En el caso de las ecuaciones de Euler debido a su no linealidad, es común la aparición de discontinuidades en las variables hidrodinámicas incluso si las condiciones iniciales son suaves, por ello en los métodos clásicos en donde las derivadas se aproximan con diferencias finitas, se espera que no funcionen cerca de las discontinuidades. Para evitar esto, el método de Volúmenes Finitos está basado en la forma integral de una ecuación y no en su forma diferencial. Consideremos la siguiente ecuación:

$$U_t + F(U)_x = 0.$$

El método de Volúmenes Finitos consiste en discretizar un dominio espacio temporal continuo Ω en forma de malla, con celdas $C_i^{n+\frac{1}{2}}$. Cada celda tiene un volumen espacio-temporal $\Delta t \Delta x$, donde $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ y $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, como se ilustra en la figura 5.4. Se discretizan las ecuaciones de balance de flujos en su forma integral y se obtiene una ecuación de evolución para el vector U . Una vez calculados las aproximaciones de los flujos, podemos usar el Método de Líneas.

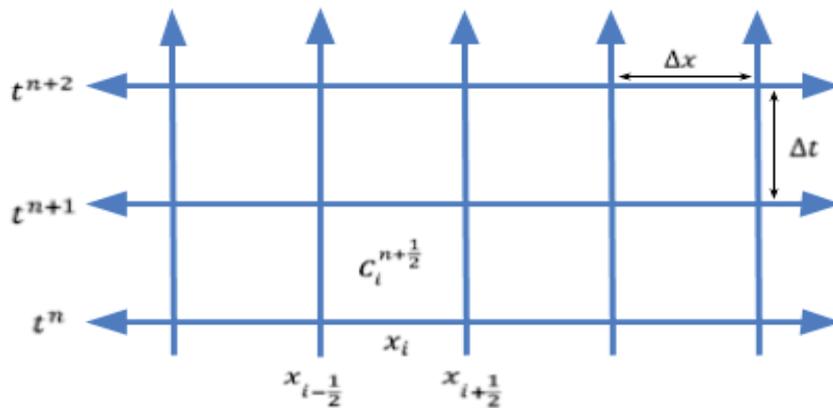


Figura 5.4: Celdas en un dominio discreto para el uso del método de Volúmenes Finitos.

5.4.1. Forma Integral

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$U_t + F(U)_x = S.$$

Aquí U es un vector de variables conservativas, $F(U)$ es un vector de flujos que depende del vector U y S es un vector de términos fuente. Integrando en el espacio y el tiempo, y dividiendo por el volumen de una celda se tiene:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} U_t dt dx + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U)_x dt dx = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} S dt dx.$$

Aplicando el Teorema de Gauss, se integra la ecuación para obtener una ecuación discretizada de evolución del promedio de U en una celda:

$$\bar{U}_i^{n+1} = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \bar{S}_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t.$$

Aquí,

$$\bar{U}_i^n = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(t^n, x) dx$$

son los promedios en el espacio de las variables conservativas,

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{i+\frac{1}{2}})) dt$$

son los promedios temporales de los flujos y finalmente

$$\bar{S}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} S(t, x) dx dt$$

son los promedios espacio-temporales de los términos fuente [4].

5.5. Reconstrucción de Variables

Ya tenemos una ecuación de evolución para los promedios de las variables conservativas; sin embargo, el problema del cálculo del promedio temporal de los flujos $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ sigue complicando las cosas. Una manera de resolver este problema es mediante los métodos numéricos definidos por Godunov, en estos, se considera un problema de Riemann en cada borde entre celdas, que requiere aproximar el promedio espacial de las variables \bar{U} en cada celda con funciones definidas a trozos. Generalmente los reconstructores tienen la forma:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^L &= \bar{U}_i + \sigma_i(x_{i+\frac{1}{2}} - x_i), \\ \bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^R &= \bar{U}_{i+1} + \sigma_{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}), \end{aligned} \tag{5.4}$$

aquí L y R indican la celda a la izquierda y derecha del borde entre las celdas [4].

5.5.1. Reconstructores de Variables

Godunov

El reconstructor Godunov considera que una variable es constante a trozos, es decir, si tomamos $\sigma_i = 0$ en la ecuación (5.4), tenemos el reconstructor Godunov:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^L &= \bar{U}_i, \\ \bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^R &= \bar{U}_{i+1}.\end{aligned}$$

Esto se ilustra en la figura 5.5. Este reconstructor nos provee un método de precisión de orden 1.

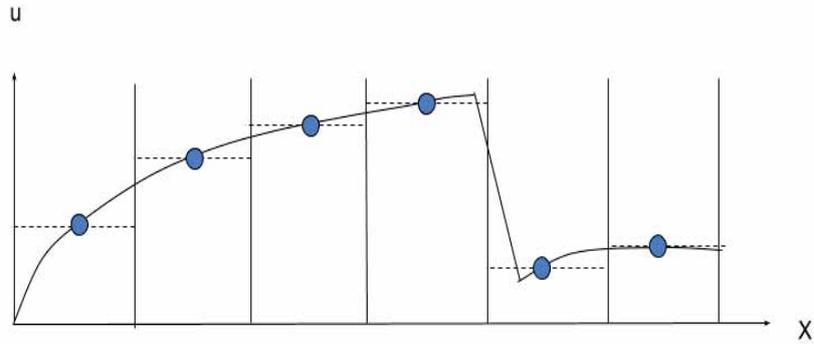


Figura 5.5: Reconstrucción de la función u en cada celda con reconstructor Godunov.

Minmod

Si tomamos la ecuación (5.4) con:

$$\sigma_i = \text{minmod}(m_{i+\frac{1}{2}}, m_{i-\frac{1}{2}}), \quad (5.5)$$

$$m_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{U}_{i+1} - \bar{U}_i}{\Delta x}, \quad (5.6)$$

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0. \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0. \\ 0 & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

El reconstructor Minmod reconstruye las variables de la fórmula (5.4) en forma lineal a trozos, como se ilustra en la figura 5.6 [4].

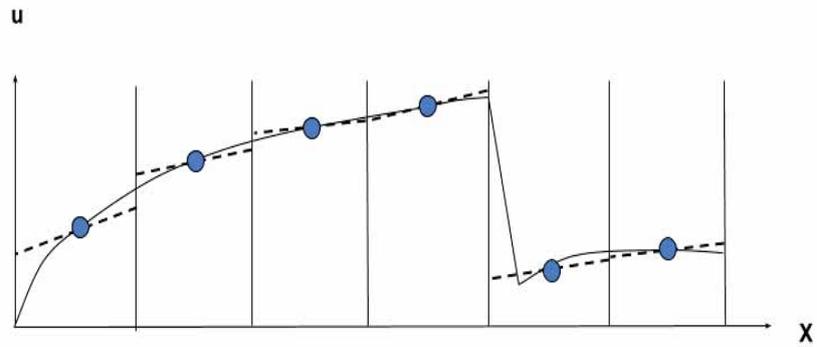


Figura 5.6: Reconstrucción de la función u en cada celda con reconstructor Minmod.

Veamos la diferencia de reconstrucción de una función u con cada reconstructor en la figura 5.7

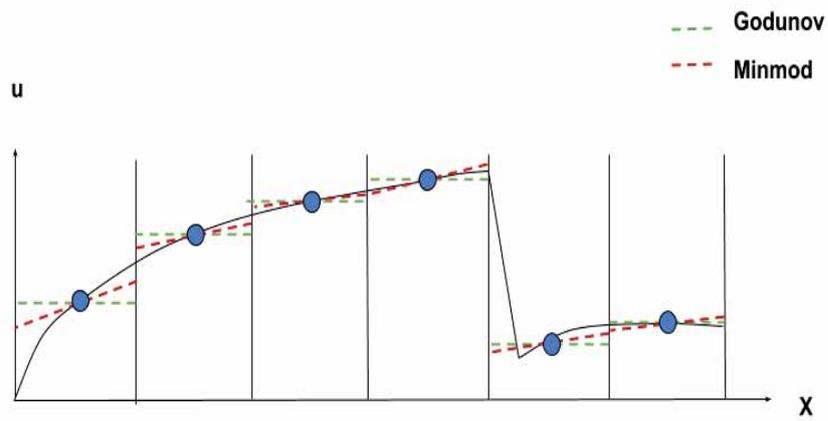


Figura 5.7: Reconstrucción de la función u con Godunov y Minmod.

5.6. Problema de Riemann

El problema de Riemann es una prueba fundamental en la prueba de un código. El problema de Riemann presenta un sistema de ecuaciones diferenciales parciales conservativo para un vector de flujos U con condiciones iniciales diferentes en dos regiones del dominio divididas por una barrera. Físicamente representa la evolución de este fluido cuando se retira la barrera

5.6.1. Caso 1D

Consideremos el problema de Riemann 1D asociado a las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} U_t + \mathbf{A}(U)U_x &= 0 \\ U(0, x) = U_0(x) &= \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.8)$$

y el vector de estado:

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ E \end{pmatrix}.$$

Para este caso, la matriz Jacobiana es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3 - \gamma)\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & \gamma - 1 \\ -\gamma\frac{u_3 u_2}{(u_1)^2} + (\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 & \gamma\frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \end{pmatrix},$$

cuyos eigenvalores son:

$$\lambda_1 = v_x - a,$$

$$\lambda_2 = v_x,$$

$$\lambda_3 = v_x + a.$$

Recordemos que a es la velocidad del sonido en el fluido que se calcula mediante (4.3). A cada eigenvalor le corresponde un eigenvector

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x - a \\ \frac{E+p}{\rho} - v_x a \end{pmatrix},$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ \frac{v_x^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x + a \\ \frac{v_x^2}{2} + v_x a \end{pmatrix}.$$

Una vez conocidos los tres eigenvectores, la estructura de la solución general del problema de Riemann asociado a las ecuaciones de Euler (5.8) en el plano $t - x$ consiste de tres ondas, una por cada eigenvalor λ_i que parten del origen. Cada onda causa un salto discontinuo en U que se propaga con velocidad λ_i . La solución a la derecha de la onda correspondiente a λ_3 es las condiciones iniciales U_R , y a la izquierda de la onda correspondiente a λ_1 es U_L . Ahora la cuestión es encontrar la solución en las porciones que forman las ondas que corresponden a λ_1 con λ_2 y λ_2 con λ_3 .

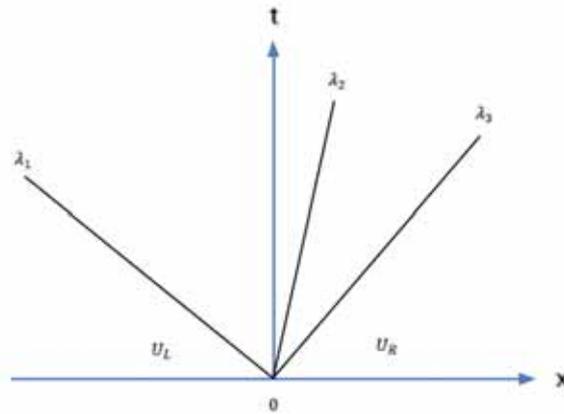


Figura 5.8: Región del espacio tiempo dividida por los eigenvalores de la matriz A .

Como los eigenvectores r_1, r_2, r_3 son linealmente independientes, podemos escribir los datos iniciales U_L, U_R como una combinación lineal de los vectores r_1, r_2, r_3

$$U_L = \sum_{i=1}^3 \alpha_i r_i,$$

$$U_R = \sum_{i=1}^3 \beta_i r_i,$$

para α, β coeficientes constantes. Así, la solución general tiene la forma:

$$U(t, x) = \sum_{i=I+1}^3 \alpha_i r_i + \sum_{i=1}^I \beta_i r_i, \quad (5.9)$$

tomando $I = I(t, x)$ como el máximo valor del subíndice i para el cual se cumple que $x - \lambda_i t > 0$ [1].

La solución en el problema de Riemann (5.8) consiste de cuatro zonas separadas por tres ondas. Para sistemas no lineales, las ondas deben ser discontinuas en caso de ondas de choque, suaves en el caso de ondas de rarefacción. En la figura 5.9 mostramos estos tres tipos de ondas.

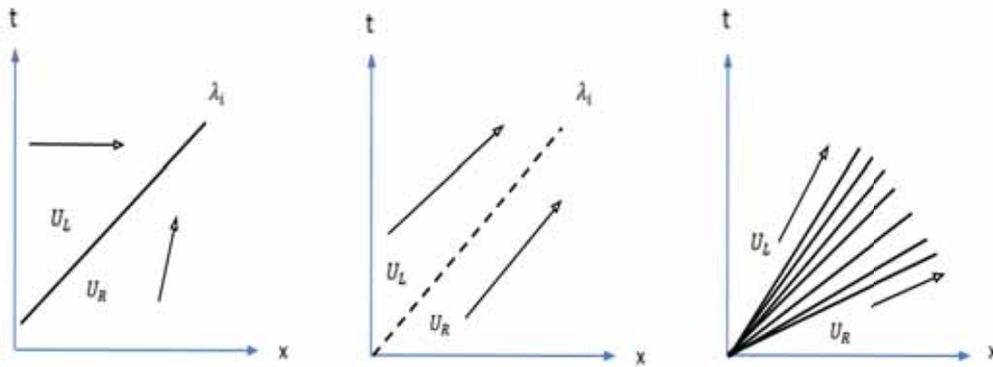


Figura 5.9: A la izquierda se muestra una onda de choque, al medio una onda de contacto y a la derecha una onda de rarefacción.

En términos de las velocidades características de una discontinuidad que se propaga a velocidad λ_i tenemos:

- Ondas de choque: $\lambda_i(U_L) > \lambda_i > \lambda_i(U_R)$.
- Ondas de contacto: velocidades características iguales $\lambda_i(U_L) = \lambda_i(U_R) = \lambda_i$.
- Onda de rarefacción: $\lambda_i(U_L) < \lambda_i < \lambda_i(U_R)$.

5.6.2. Caso 3D

Consideremos las ecuaciones de Euler en 3D:

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y + H(U)_z = 0,$$

donde:

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \end{pmatrix},$$

$$F(U) := \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ v_x(E + p) \end{pmatrix},$$

$$G(U) := \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_z v_y \\ v_y(E + p) \end{pmatrix},$$

$$H(U) := \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z^2 + p \\ v_z(E + p) \end{pmatrix}.$$

Suponemos que podemos separar este problema de Riemann de 3D en 3 problemas de Riemann en 1D (5.8) a lo largo de cada dirección cartesiana y en cada celda para cada elemento de volumen.

Así tendremos:

▷ Dirección x

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ v_x(E + p) \end{pmatrix}_x = 0.$$

Usando un método conservativo tenemos la expresión para resolver este problema a lo largo de la dirección x :

$$\bar{U}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \bar{U}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{F}_{i-\frac{1}{2},j,k}^n - \bar{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n] \quad \forall j, \forall k, \quad (5.10)$$

donde $F_{i+\frac{1}{2},j,k}^n$ es el flujo numérico intercelda en la posición $x_{i+\frac{1}{2},j,k}$.

▷ Dirección y

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_z v_y \\ v_y(E + p) \end{pmatrix}_y = 0,$$

para la dirección y , la solución tiene la forma:

$$\bar{U}_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} = \bar{U}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{\Delta t}{\Delta y} [\bar{G}_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{3}} - \bar{G}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{3}}] \quad \forall i, \forall k.$$

▷ Dirección z

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z^2 + p \\ v_z(E + p) \end{pmatrix}_z = 0,$$

cuya solución se lee:

$$\bar{U}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{U}_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{\Delta t}{\Delta z} [\bar{H}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{2}{3}} - \bar{H}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{2}{3}}] \quad \forall i, \forall j.$$

Una vez separados en tres problemas de Riemann 1D podemos encontrar la solución de la forma 5.9 [1].

5.7. Solución Aproximada del Problema de Riemann de Harten Lax y Van Leer (HLL)

El método HLL para aproximar el flujo interceldas tiene la propiedad de que sólo necesitamos conocer los valores propios λ_i de la matriz jacobiana. Como vimos en el problema de Riemann, tenemos 3 regiones separadas por los valores propios λ_i . Para cada frontera entre celdas tenemos la fórmula [1]:

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^{HLLLE} = \begin{cases} F(\bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^L), & 0 \leq \lambda^- \\ \frac{\lambda^+ F(\bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^L) - \lambda^- F(\bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^R) + \lambda^+ \lambda^- (\bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^R - \bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^L)}{\lambda^+ - \lambda^-}, & \lambda^- \leq 0 \leq \lambda^+ \\ F(\bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^R), & 0 \geq \lambda^+ \end{cases}$$

Aquí:

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L, \lambda_3^L),$$

$$\lambda^- = \min(0, \lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L, \lambda_3^L).$$

\bar{U}^L y \bar{U}^R son los valores de las variables conservativas que fueron reconstruidas a la izquierda y derecha del borde entre celdas. Una vez calculados los flujos intercelda podemos usar la fórmula conservativa (5.10) y así tener una fórmula de evolución en el tiempo para U . De la misma manera se aplica en direcciones x y y para calcular $\bar{G}_{i+\frac{1}{2}}$ y $\bar{H}_{i+\frac{1}{2}}$.

5.8. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera son parte esencial de cada problema físico. Veremos las usadas en este trabajo [1].

5.8.1. Condiciones de Frontera Reflectivas o de Rebote

Consideremos una frontera en $x = x_{obs}$ físicamente es una barrera fija e impermeable que refleja las ondas que chocan con ella. Consideremos un dominio espacio-temporal $\Omega = [t_0, t_f] \times [x_0, x_{obs}]$, un vector $U^n = (\rho^n, v^n, p^n)^T$. Entonces las condiciones de frontera reflectivas son:

$$\begin{aligned} p_{x_{obs}}^n &= p_{x_{obs}-1}^n, \\ \rho_{x_{obs}}^n &= \rho_{x_{obs}-1}^n, \\ v_{x_{obs}}^n &= -v_{x_{obs}-1}^n. \end{aligned}$$

Notemos que la parte esencial está en el cambio de signo de la velocidad, pues se supone que al rebotar, su magnitud no cambia pero su sentido es contrario.

5.8.2. Condiciones de Frontera Transmisivas o de Salida

Las fronteras transmitivas son fronteras que dejan pasar las ondas sin causar efectos en ellas. Consideremos un dominio espacio-temporal $\Omega = [t_0, t_f] \times [x_0, x_{obs}]$, un vector $U^n = (\rho^n, v^n, p^n)^T$ y la frontera en $x = x_{obs}$. Las condiciones de frontera transmisiva son:

$$\begin{aligned} p_{x_{obs}}^n &= p_{x_{obs}-1}^n, \\ \rho_{x_{obs}}^n &= \rho_{x_{obs}-1}^n, \\ v_{x_{obs}}^n &= v_{x_{obs}-1}^n. \end{aligned}$$

Estas condiciones son importantes para que al salir los flujos, no causen problemas numéricos.

5.8.3. Condiciones de Frontera Periódicas

Consideremos un dominio espacio-temporal $\Omega = [t_0, t_f] \times [x_0, x_f]$, un vector $U^n = (\rho^n, v_x^n, p^n)^T$. Las condiciones de frontera periódicas son:

$$\begin{aligned} p_{x_0}^n &= p_{x_f}^n, \\ \rho_{x_0}^n &= \rho_{x_f}^n, \\ v_{x_0}^n &= v_{x_f}^n. \end{aligned}$$

Estas condiciones se usan en sistemas que presentan simetrías.

6. Pruebas

En esta sección expondremos pruebas a las cuales se sometió el código con diversos problemas, cada uno con sus propios aspectos interesantes debido a las configuraciones iniciales, la dimensión del dominio en el cual se desarrolla el problema y las condiciones de contorno impuestas. Se presentan los resultados con gráficas y diagramas especificando las condiciones de cada prueba en orden temporal, así como la resolución usada.

6.1. Tubo de Choque 1D

Uno de los problemas clásicos y antiguos para probar un código y analizar el comportamiento de un gas en una dimensión es el tubo de choque. Para este problema suponemos que existe un gas en un contenedor separado por una barrera física, así, este contenedor está separado en dos cámaras distintas izquierda y derecha, refiriéndonos a cada una con el subíndice L (izquierda) y R (derecha). El gas en cada cámara del contenedor está caracterizado por condiciones de presión, densidad y velocidad generalmente distintas. En la solución numérica se supone que se quita dicha barrera al tiempo inicial y el gas de cada cámara evoluciona con el tiempo, esta evolución dependerá de las condiciones iniciales (figura 6.1).

Para las pruebas consideremos aire con $\gamma = 1.4$ en un dominio espacial a lo largo de la dirección x con $x \in [0, 1]$ y la barrera física situada en $x = 0.5$. Esto nos define un problema de Riemann.

Hagamos 2 pruebas diferentes con las siguientes condiciones iniciales:

| Prueba | p_L | p_R | v_L | v_R | ρ_L | ρ_R |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Choque-Rarefacción | 0.1 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.125 | 1.0 |
| Rarefacción-Rarefacción | 0.4 | 0.4 | -1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |

Tabla 6.1: Pruebas de Tubo de Choque 1D.

Las condiciones de frontera izquierda y derecha son de flujo saliente.

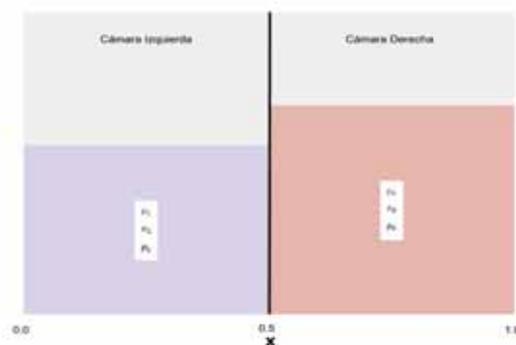


Figura 6.1: Problema de tubo de choque.

6.1.1. Choque-Rarefacción

Godunov

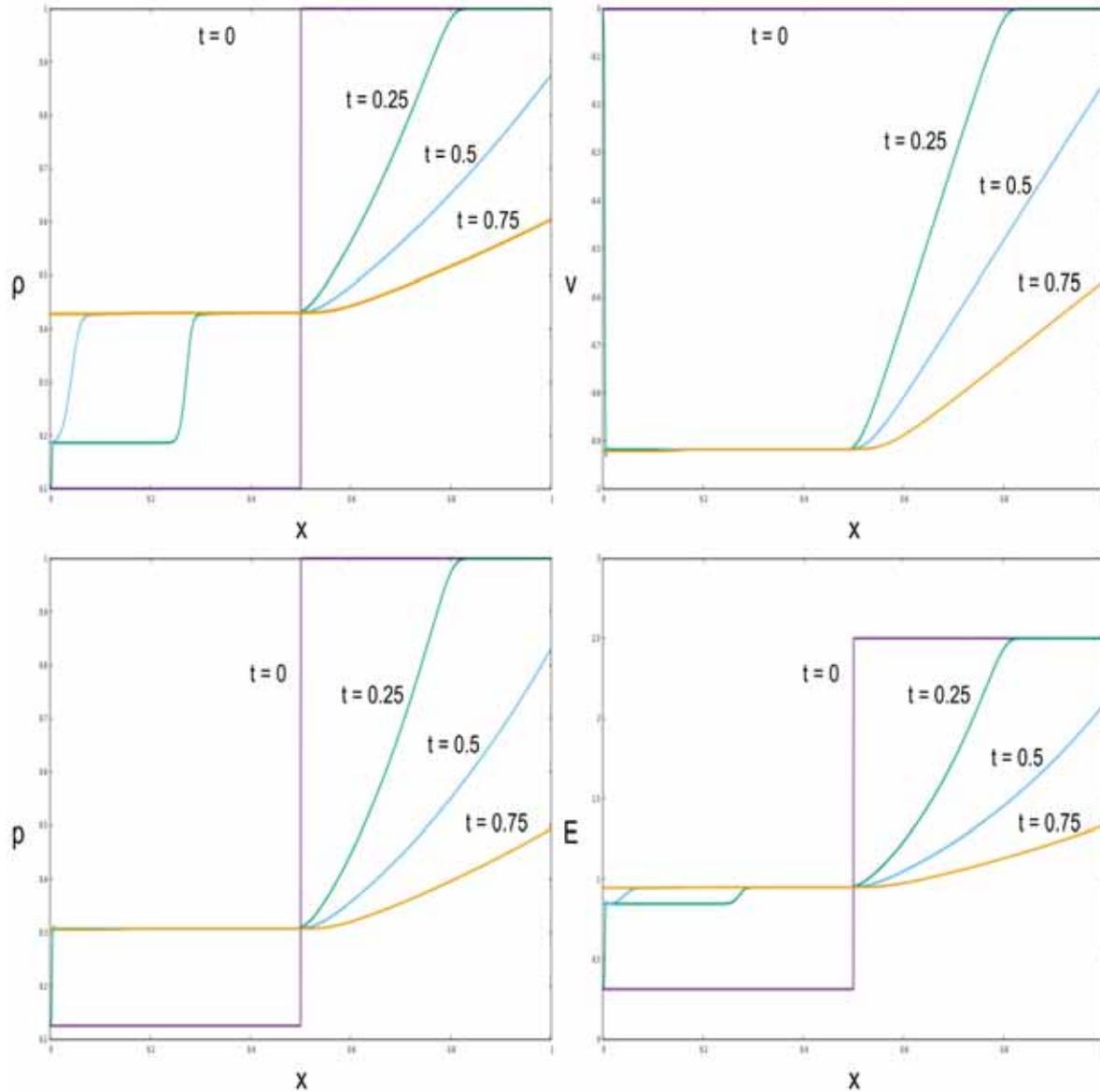


Figura 6.2: Densidad, velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Godunov en caso choque-rarefacción. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{2000}$, Courant = 0.25. Se aprecia una onda de choque que viaja hacia la derecha y la onda de rarefacción que viaja a la izquierda.

Minmod

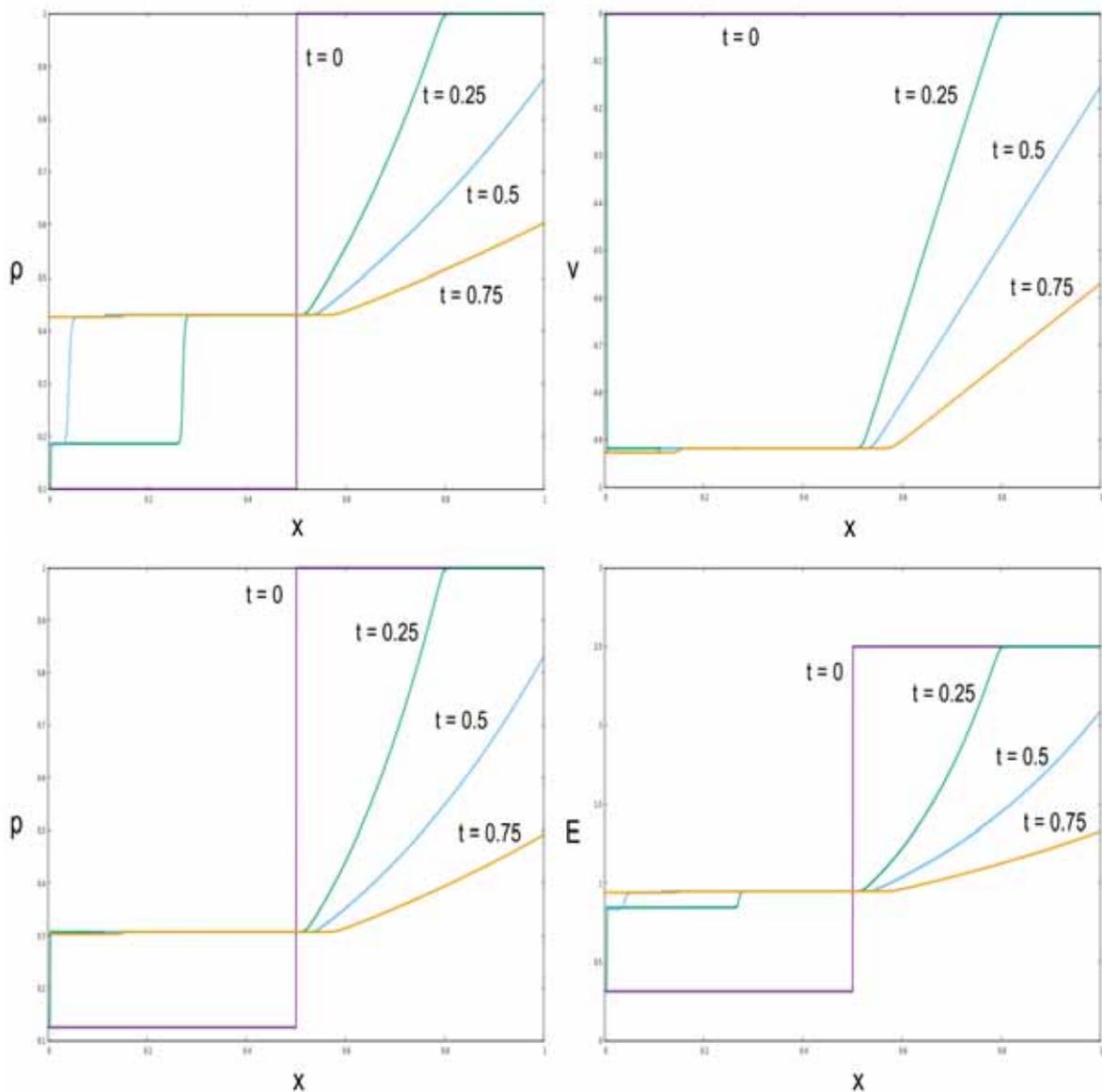


Figura 6.3: Densidad, velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Minmod en caso Choque-rarefacción. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{2000}$, Courant = 0.25.

Las figuras 6.2 y 6.3 nos muestran el caso choque-rarefacción en la parte izquierda y derecha del dominio respectivamente. La onda de choque en el lado izquierdo genera discontinuidades en el valor de la densidad, en la parte derecha una onda de rarefacción que se observa en la disminución de la densidad. Nuevamente la diferencia entre los reconstructores Godunov y Minmod (figura 6.2 y 6.3) se presenta en la suavidad de las gráficas, como veremos a continuación, Godunov suaviza las discontinuidades.

Es momento de observar a detalle las diferencias del cálculo numérico entre los reconstructores de variables Godunov y Minmod. El reconstructor Minmod refleja con mayor eficacia las ondas de choque, esto lo podemos ver en la imagen 6.4, el recostructor Godunov suaviza la solución, es decir, destruye las discontinuidades. Por otro lado el reconstructor Minmod nos provee una solución más parecida a una discontinua, que se asemeja más al comportamiento real.

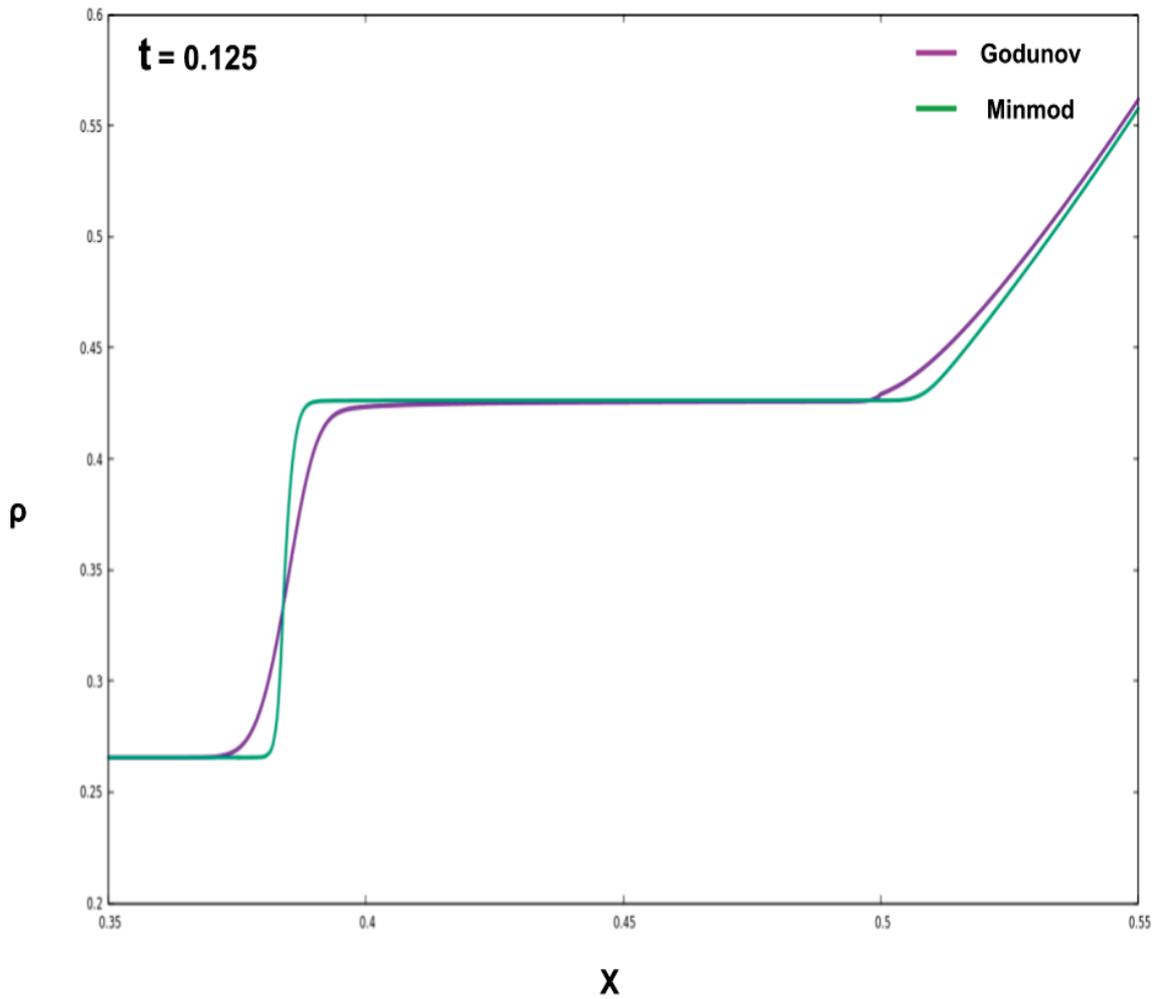


Figura 6.4: Comparación entre los reconstructores de variables Godunov y Minmod en la densidad a un tiempo $t = 0.125$ con un zoom en $[0.35, 0.55] \times [0.2, 0.6]$ para una mejor apreciación. La resolución usada es de $\Delta x = \frac{1}{4000}$.

6.1.2. Rarefacción-Rarefacción

Godunov

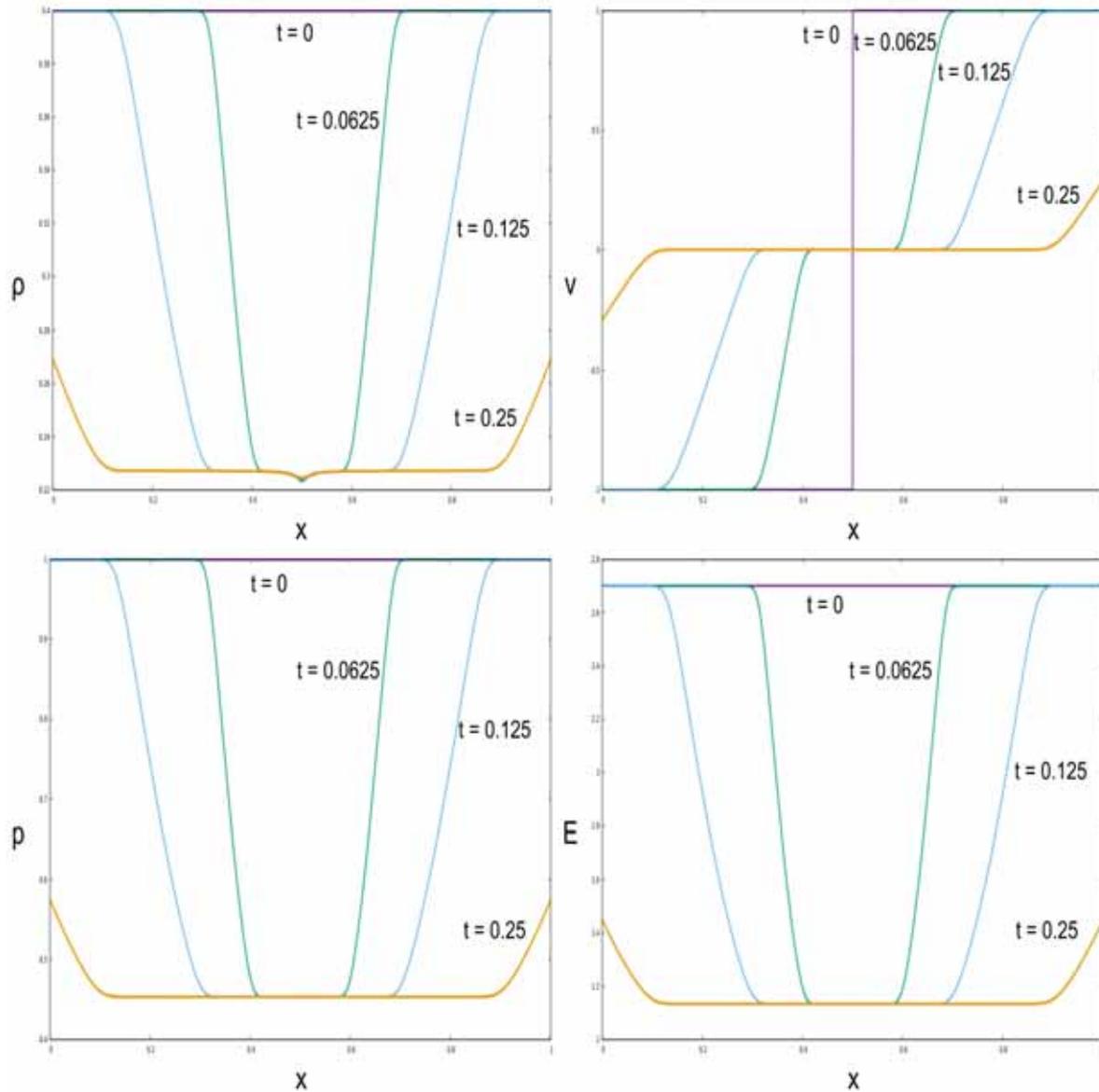


Figura 6.5: Densidad, velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Godunov en caso rarefacción-rarefacción. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{2000}$, Courant = 0.25.

Minmod

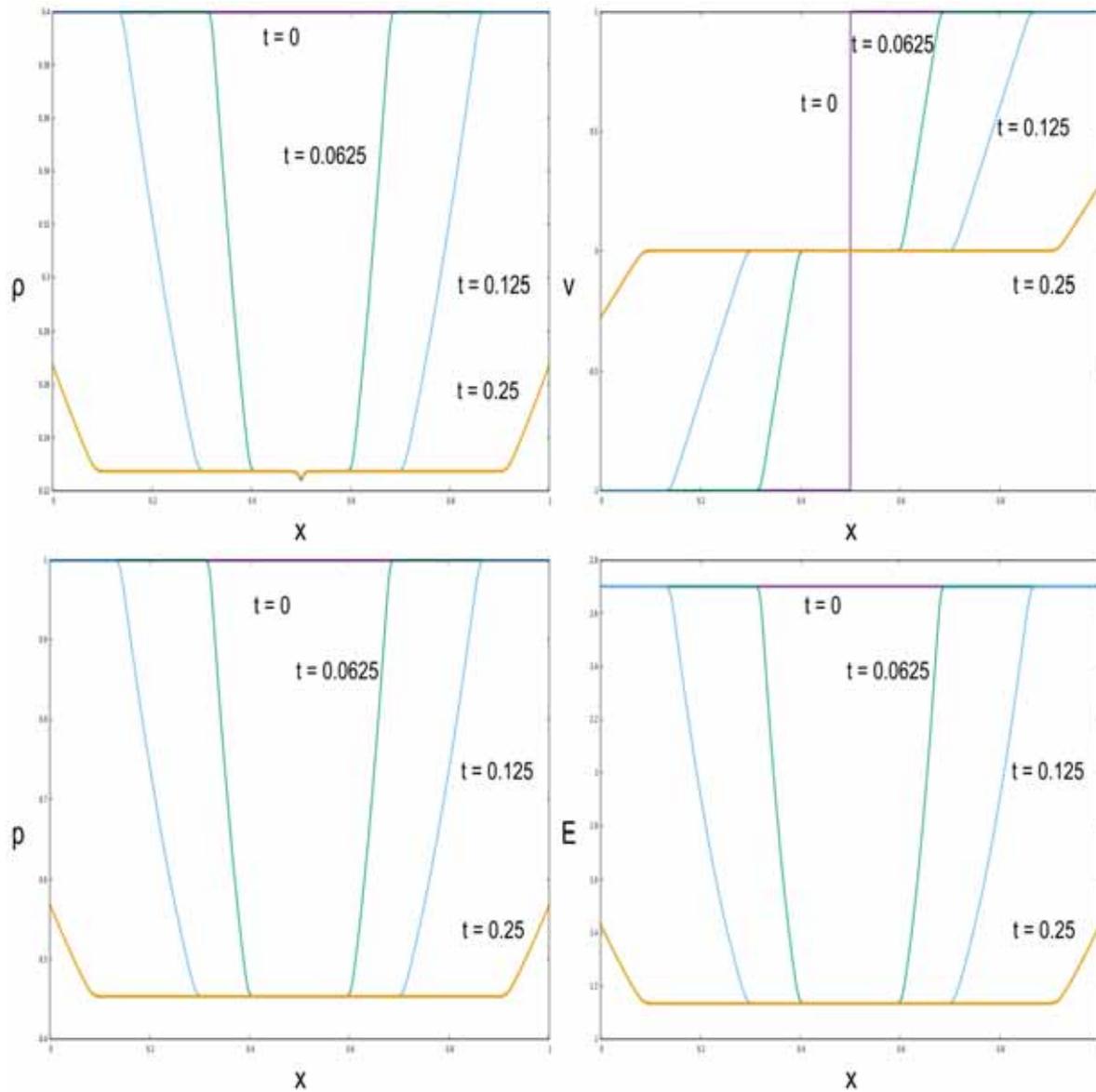


Figura 6.6: Densidad, velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Minmod en caso rarefacción-rarefacción. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{2000}$, Courant = 0.25.

En el caso rarefacción-rarefacción, en los resultados mostrados en las figuras 6.5 y 6.6 se observan ondas de rarefacción en las dos partes del dominio debido a que la densidad disminuye a ambos lados de la discontinuidad, esto principalmente porque las velocidades iniciales van en sentido opuesto hacia afuera del dominio.

6.2. Tubo de Choque con el código 3D

Ahora consideremos el mismo problema de tubo de choque usando el código para tres dimensiones. Consideremos un dominio espacial $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Consideremos un gas con $\gamma = 1.4$, la barrera en $x = 0.5$. Con intención de probar el código en tres dimensiones y ver su consistencia, consideremos una resolución de $\Delta x = \frac{1}{2000}$, $\Delta y = \frac{1}{4}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, así esperamos tener un comportamiento de la solución similar al caso 1D.

| Prueba | p_L | p_R | v_L | v_R | ρ_L | ρ_R |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Choque-Rarefacción | 0.1 | 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.125 | 1.0 |
| Rarefacción-Rarefacción | 0.4 | 0.4 | -1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |

Tabla 6.2: Pruebas de Tubo de Choque 3D.

6.2.1. Choque-Rarefacción.

Godunov

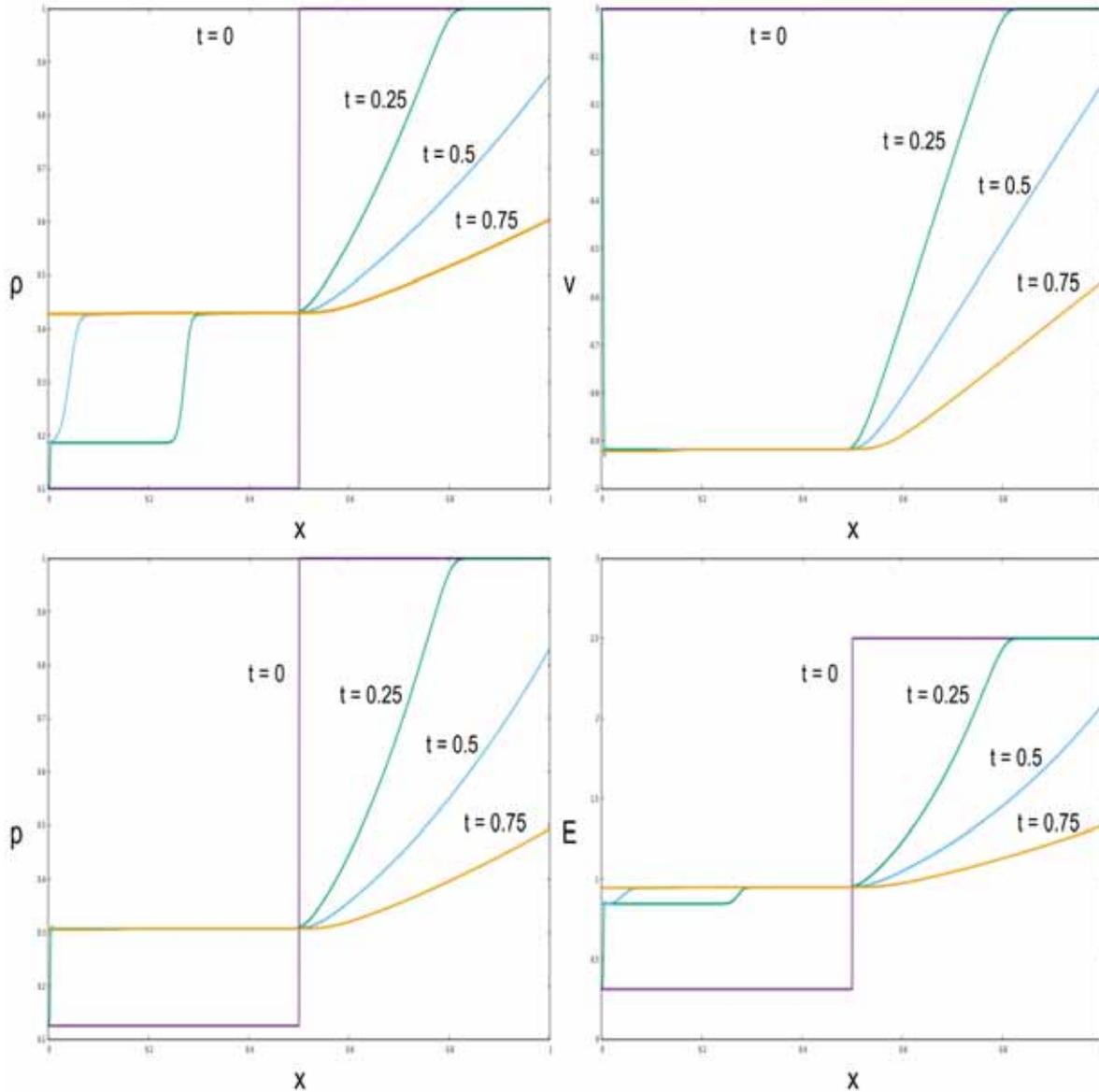


Figura 6.7: Densidad, componente x de la velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.0625$, $t = 0.125$ y $t = 0.25$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Godunov en caso choque-rarefacción. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{2000}$, $\Delta y = \frac{1}{4}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

Minmod

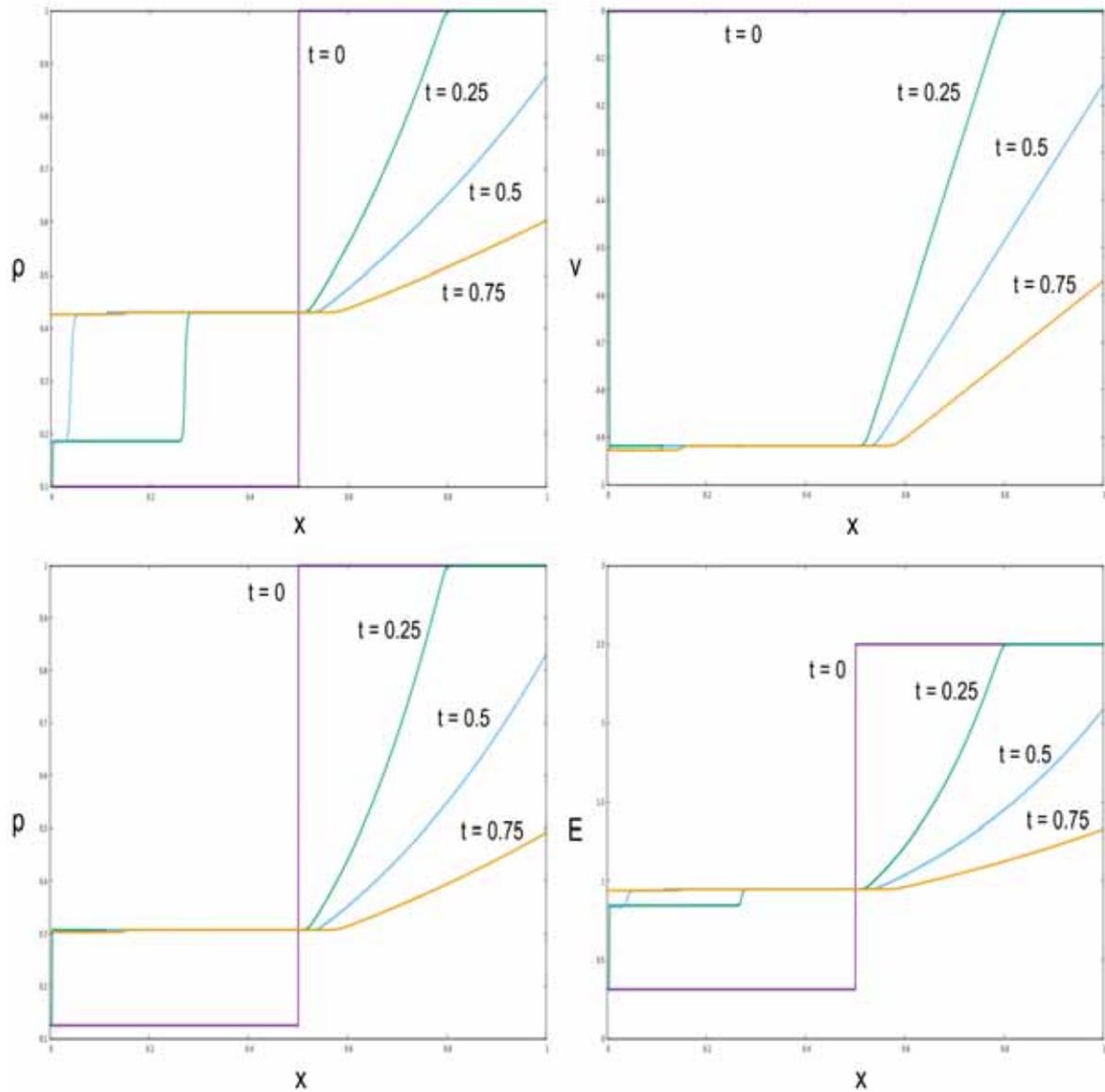


Figura 6.8: Densidad, componente x de la velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.0625$, $t = 0.125$ y $t = 0.25$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Mínmod en caso choque-rarefacción. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{2000}$, $\Delta y = \frac{1}{4}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

Las figuras 6.7 y 6.8 nuevamente nos muestran la onda de choque en la parte izquierda que además viaja hacia la izquierda y del lado derecho del dominio la onda de rarefacción que viaja a la derecha.

6.2.2. Rarefacción-Rarefacción

Godunov

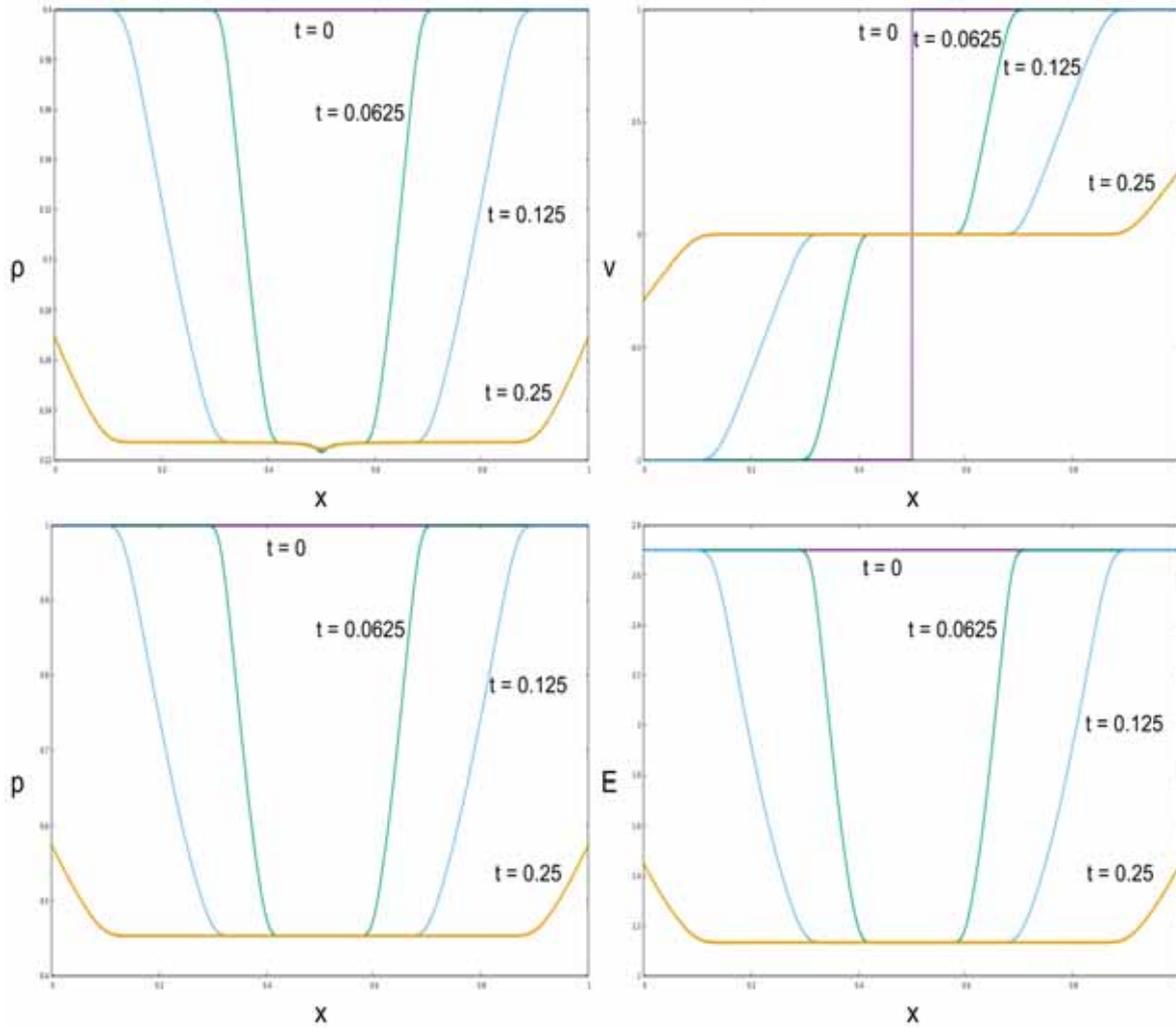


Figura 6.9: Densidad, componente x de la velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.0625$, $t = 0.125$ y $t = 0.25$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Godunov en caso rarefacción-rarefacción. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{2000}$, $\Delta y = \frac{1}{4}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

Minmod

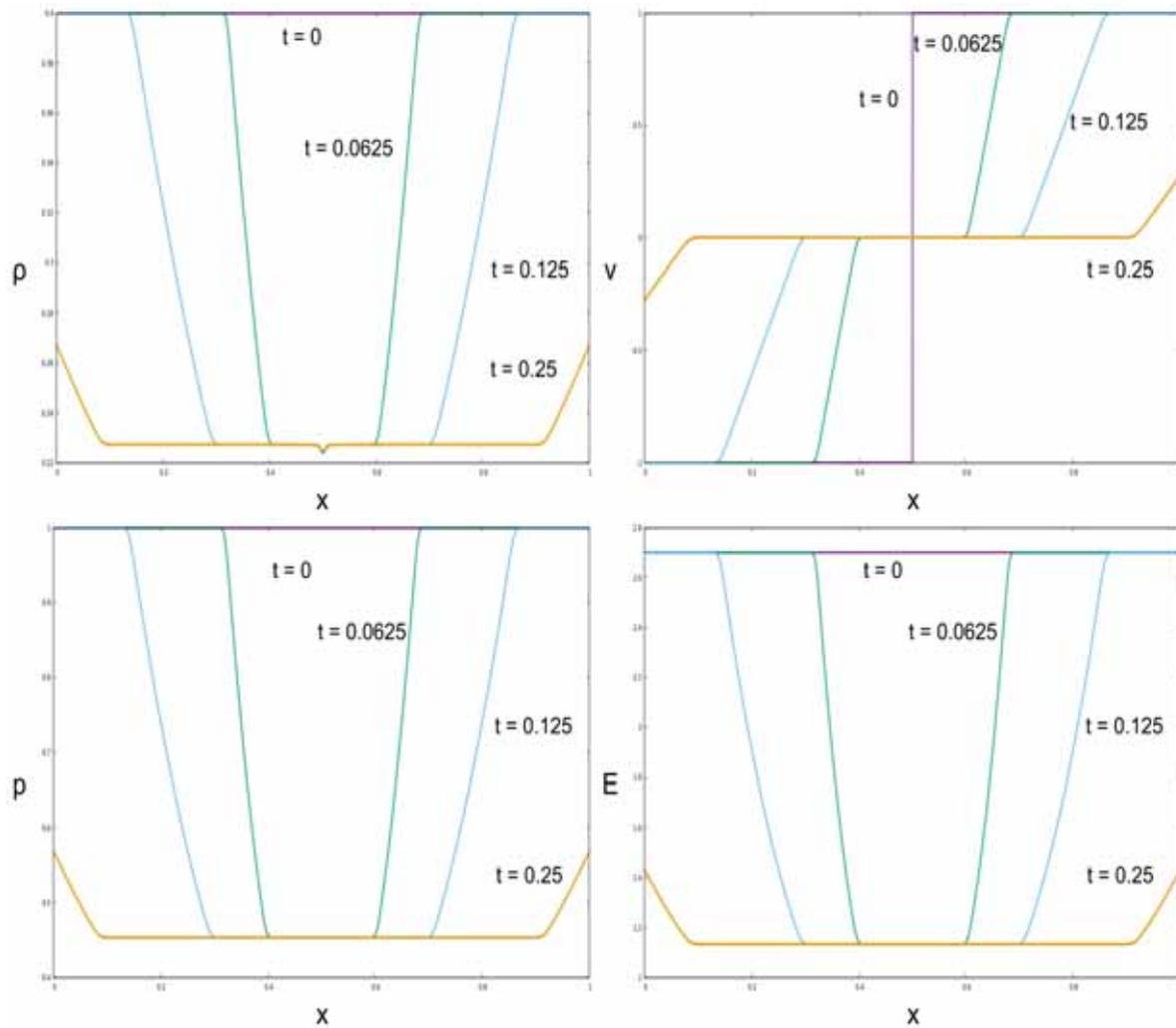


Figura 6.10: Densidad, componente x de la velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.0625$, $t = 0.125$ y $t = 0.25$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Minmod en caso rarefacción-rarefacción. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{2000}$, $\Delta y = \frac{1}{4}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

Las figuras 6.9 y 6.10 observamos dos ondas de rarefacción, una viaja a la izquierda y la otra a la derecha caracterizadas por la disminución en la densidad, no hay ondas de choque pues la densidad no presenta discontinuidades.

6.3. Onda Explosiva

El problema de simetría esférica Blast Wave consiste en un fluido distribuido en dos regiones R_i y R_e interna y externa respectivamente separadas por una barrera física esférica colocada en el origen y radio $r = r_0$ como vemos en la figura 6.11. Inicialmente el fluido del interior tiene mayor densidad y presión que el del exterior. Las velocidades son cero para ambas configuraciones. Cuando la barrera física se retira, una onda de choque se mueve desde la región con presión más alta hacia la que tiene menor presión, de igual forma una onda de rarefacción viaja en la dirección opuesta. Fijemos $\gamma = \frac{5}{3}$ que corresponde al Helio. Las condiciones iniciales tienen la forma:

$$\rho = \begin{cases} \rho_i, & x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2. \\ \rho_e, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} v_i, & x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2. \\ v_e, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$p = \begin{cases} p_i, & x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2. \\ p_e, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

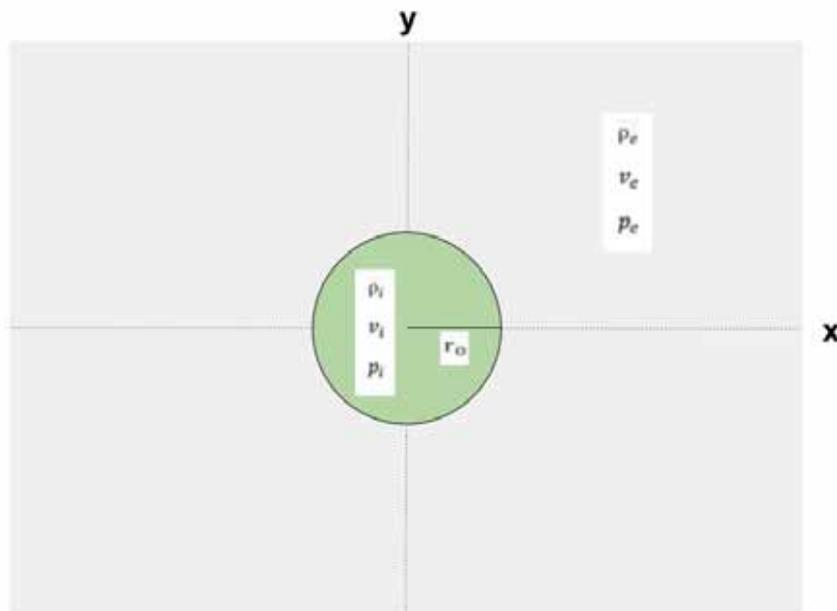


Figura 6.11: Problema de onda explosiva.

6.3.1. Explosión Débil

Consideremos un dominio espacial $\Omega = [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 3]$ con la esfera de radio $r = 0.5$. Para la explosión débil consideremos las condiciones iniciales siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i = 1.0, \\ \rho_e = 0.125, \\ v_i = 0.0, \\ v_e = 0.0, \\ p_i = 1.0, \\ p_e = 0.1, \end{array} \right.$$

usemos condiciones de flujo saliente en las caras del cubo que forma el dominio. Se le llama explosión débil debido a que la presión del fluido dentro de la esfera. Presentamos los resultados en las imágenes 6.12 y 6.13 para cada reconstructor.

Godunov

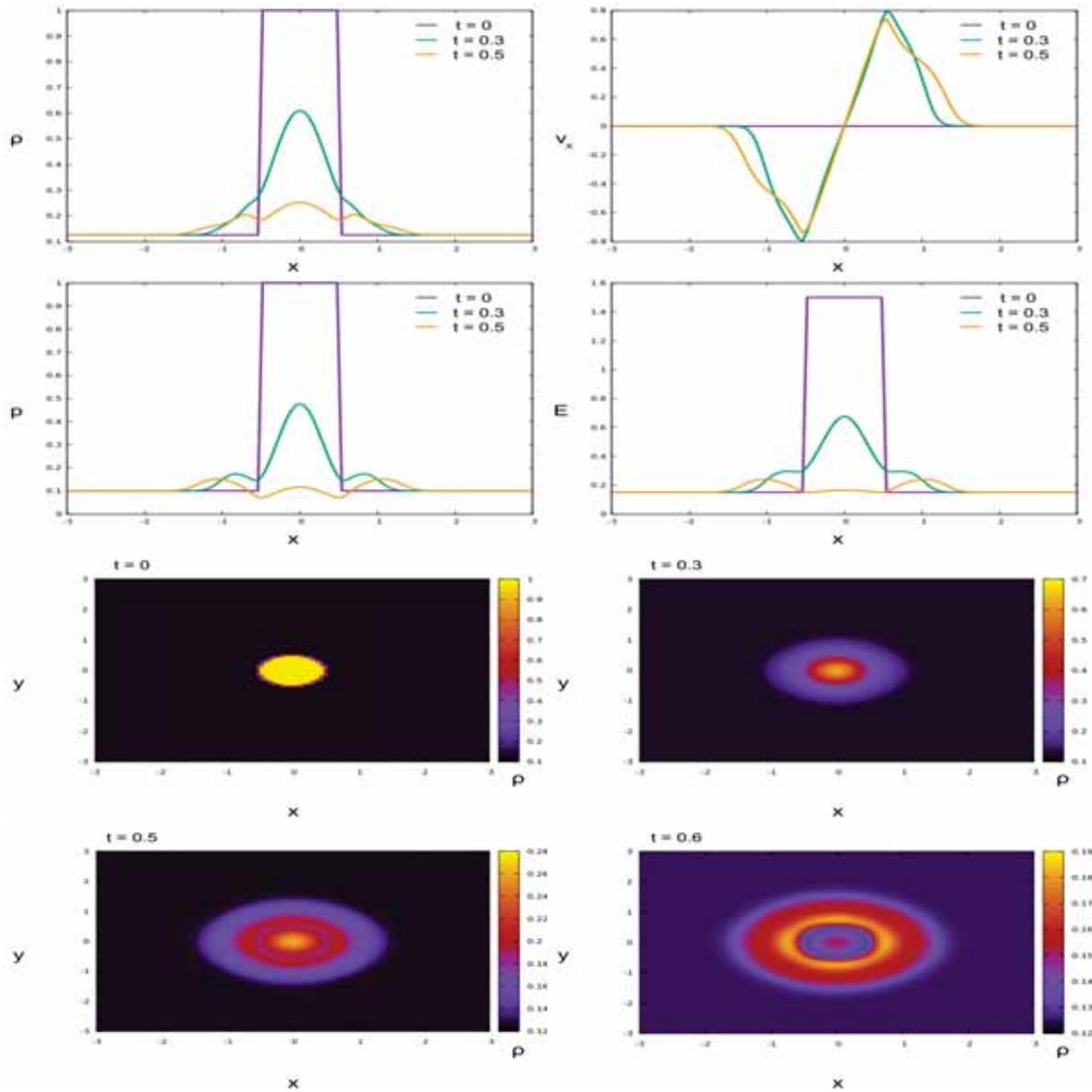


Figura 6.12: Densidad, componente x de la velocidad, presión y energía en $t = 0$, $t = 0.3$ y $t = 0.5$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Godunov. Resolución usada $\Delta x = \frac{3}{100}$, $\Delta y = \frac{3}{100}$, $\Delta z = \frac{3}{100}$, Courant = 0.25.

Minmod

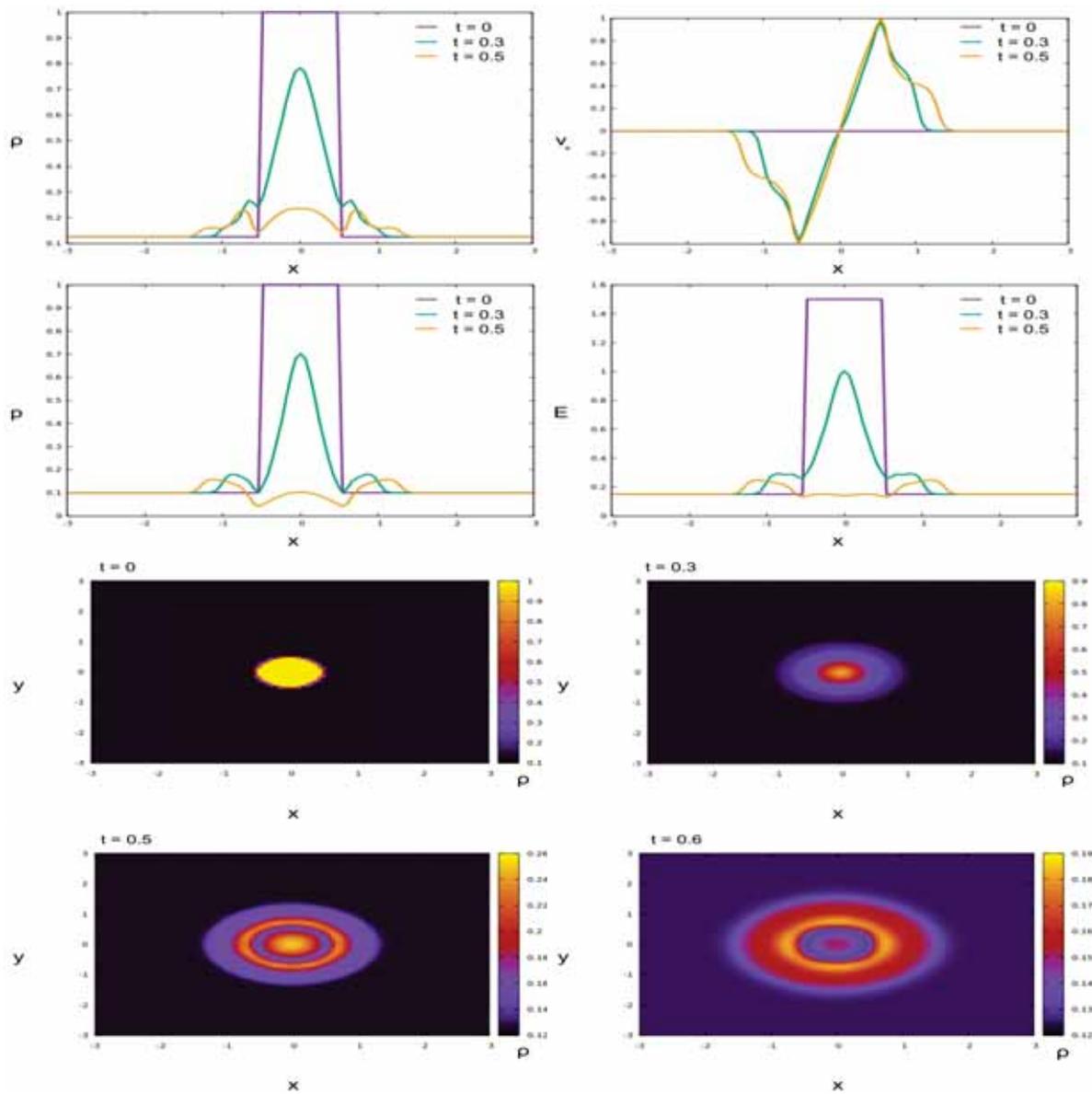


Figura 6.13: Densidad en $t = 0$, $t = 0.3$ y $t = 0.5$ a lo largo del eje x , usando reconstructor de variables Minmod. Resolución usada $\Delta x = \frac{3}{100}$, $\Delta y = \frac{3}{100}$, $\Delta z = \frac{3}{100}$, Courant = 0.25.

En las imágenes 6.12, 6.13 observamos los resultados, el problema tiene una simetría esférica, se producen ondas de choque debido a la mayor presión de la configuración al interior de la esfera, las ondas de choque viajan hacia afuera del dominio, por las condiciones de frontera de flujo saliente las ondas de choque salen del dominio. Las ondas de choque se visualizan mejor con el reconstructor Minmod. Este problema puede ser aplicado a diversos problemas de explosiones.

6.4. Túnel de Viento de Emery

El túnel de viento de Emery es un problema clásico, en él se inyecta un fluido por la izquierda de una cámara y sale por la derecha, dentro de la cámara se encuentra un escalón, en esta prueba se analiza el comportamiento del fluido, en este caso aire, dentro de la cámara. Consideremos un dominio $(x, y) \in [0, 3] \times [0, 1]$ en el plano xy . El escalón se encuentra en la región $0.6 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 0.2$, así el escalón tiene altura de 0.2 unidades y 2.4 unidades de largo. El escalón es fijo, con frontera sólida e indestructible. a partir de este punto al hacer pruebas, las condiciones de frontera en la dirección z del dominio serán periódicas. Consideremos las condiciones iniciales del fluido como:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1.4, \\ p_0 &= 1.0, \\ v_x &= 3.0, \\ v_y &= 0.0, \\ v_z &= 0.0, \\ \gamma &= 1.4,\end{aligned}$$

con esta configuración inicial, $a = \sqrt{\frac{1.4(1.4)}{1.0}} = 1$. Así $M = 3$ Por lo que se trata de un fluido supersónico. Lo interesante de este problema son las condiciones de frontera, en la frontera izquierda tenemos condiciones de flujo entrante con la misma configuración del fluido inicial, en la frontera derecha tenemos flujo saliente, en las paredes del obstáculo, la parte superior y la parte inferior que no es ocupada por el escalón tenemos condiciones de rebote, veamos un dibujo de esto en la figura 6.14.

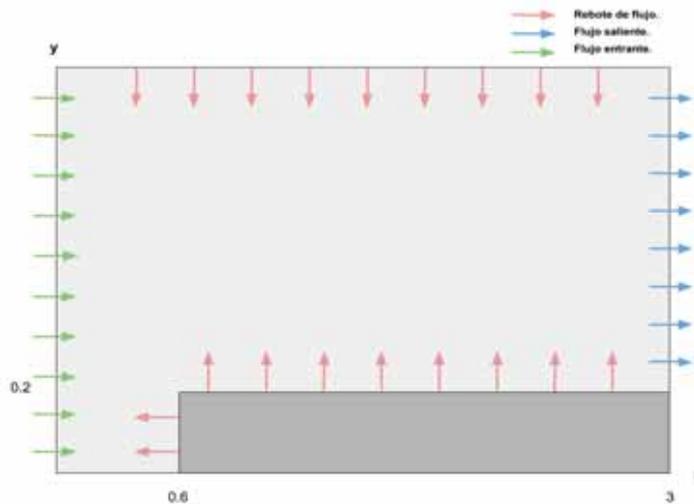


Figura 6.14: Condiciones de frontera para túnel de viento de Emery.

Mostramos los resultados en la figura 6.15

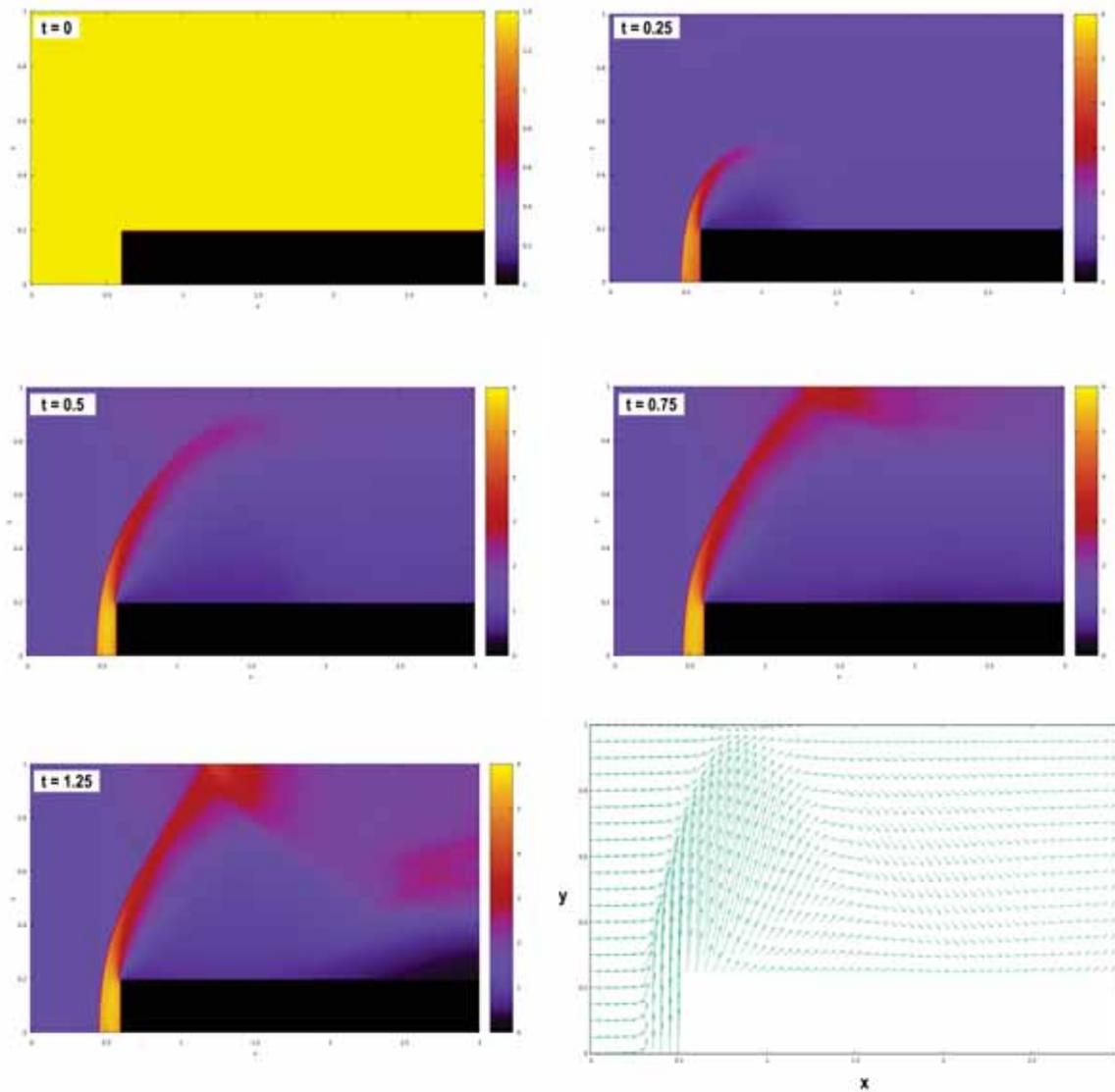


Figura 6.15: Densidad a tiempo $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$, $t = 1.25$. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{200}$, $\Delta y = \frac{1}{200}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25. En esta imagen vemos como la onda de choque se va desplazando desde el escalón hasta llegar a la parte superior del dominio donde también rebota. Abajo a la derecha el campo de velocidades a tiempo $t = 1.25$.

En la parte superior del dominio notemos que la densidad del aire se concentra debido al rebote del fluido en la pared superior del dominio, sin embargo, la zona donde más densidad se acumula es en el pie del escalón ya que el flujo llega sólo con la componente en dirección x de la velocidad y este rebota totalmente hacia el sentido opuesto. Otro aspecto interesante es que si revisamos el campo de velocidades en la figura 6.15 en el punto $(x, y) = (0.7, 0.975)$ la magnitud del campo de velocidades es pequeño, a este punto se le conoce como punto de estancamiento, este punto es consistente con [7] con un error de 0.1.

6.5. Túnel de Viento con Obstáculos

El túnel de viento es un modelo muy utilizado en el mundo de la ingeniería, se usa para medir los flujos de aire en presencia de objetos dentro del túnel que llamaremos obstáculos. En esta sección, la más relevante de este trabajo, utilizaremos obstáculos más complejos como escalones inclinados, un cilindro, una elipse y finalmente un proyectil.

En los obstáculos el desafío es imponer las condiciones de frontera y a lo largo de este trabajo nos concentramos en obstáculos fijos con frontera sólida e indestructible donde se impondrán condiciones de frontera de rebote.

Para imponer estas condiciones en la superficie de los obstáculos, es importante poder parametrizarlos con una curva y así conocer el ángulo que forma su vector normal con el flujo de entrada. Todo esto será para descomponer las magnitudes de la velocidad en cada dirección después del rebote.

Tomemos un punto en el plano xy tal que éste pertenece a nuestra curva obstáculo, tracemos su recta tangente y así podemos determinar el vector normal \hat{n} . Sea θ el ángulo que se forma entre la horizontal y el vector \hat{n} . Sea α el ángulo que se forma entre la recta tangente y la horizontal. Para una mejor comprensión apoyémonos de la figura 6.16.

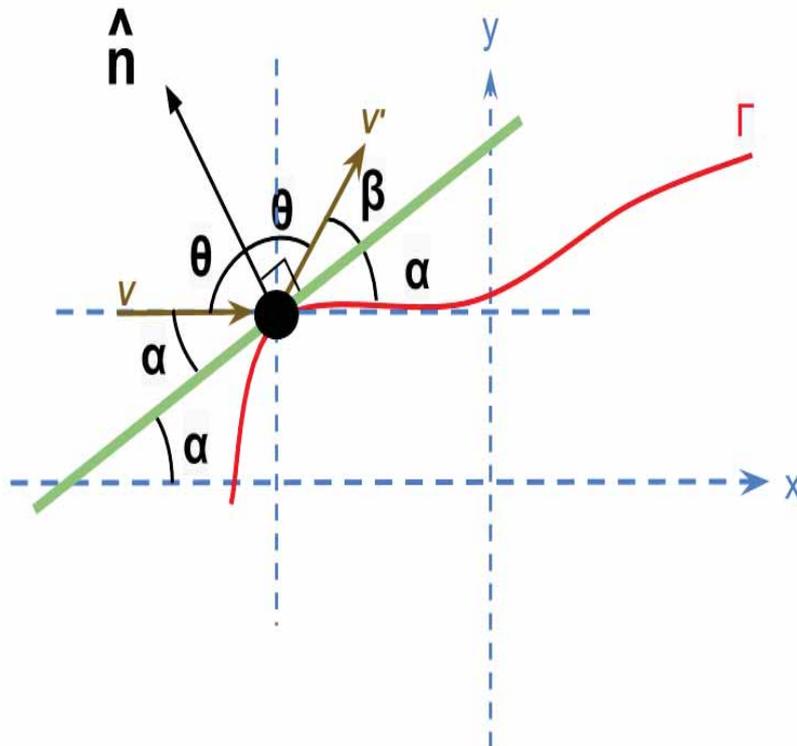


Figura 6.16: Vector normal y plano tangente en un punto de una curva parametrizada Γ .

Haciendo uso de la geometría euclídeana tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\theta + \beta &= \frac{\pi}{2}, \\ \theta + \alpha &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Restando las ecuaciones de 6.2 tenemos:

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= 0, \\ \beta &= \alpha.\end{aligned}$$

Ahora usando α podemos descomponer el vector resultante v' . Tenemos:

$$\begin{aligned}v'_x &= v \cos(2\alpha), \\ v'_y &= v \sin(2\alpha).\end{aligned}\tag{6.3}$$

Así, con 6.3 calculamos las proyecciones de v' en los ejes x y y .

6.5.1. Escalón con Inclinación

Para un escalón consideraremos ecuaciones para él de la forma $y(x) = \tan(\alpha)(x - i) + j$ con (i, j) el punto inicial de la recta. Impondremos condiciones sobre estas rectas. Es importante resaltar que α es el ángulo que forma la recta y con la horizontal, es decir, la inclinación del obstáculo. Una vez fijados α , la altura del obstáculo y (i, j) , ya está definido totalmente el obstáculo en forma de escalón.

Escalón con inclinación de 85 grados

Tomemos un dominio $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, dos rectas y_1, y_2 de la forma:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \tan(85^\circ)(x - 0.6), \\ y_2(x) &= 0.2.\end{aligned}$$

La intersección de y_1 con y_2 se da en $x^* = \frac{0.2}{\tan(85^\circ)} + 0.6$. El escalón E es la región:

$$E = \begin{cases} y \leq y_1, & 0.2 \leq x < x^*. \\ y \leq y_2, & x^* \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Las condiciones de frontera en la frontera de E serán de rebote, así como en la parte superior y la inferior sobrante del dominio. En el borde derecho del dominio donde no hay obstáculos son condiciones de flujo saliente y en el borde izquierdo son condiciones de flujo entrante constante con la configuración:

$$\rho_0 = 1.4,$$

$$p_0 = 1.0,$$

$$v_x = 3.0,$$

$$v_y = 0.0,$$

$$v_z = 0.0,$$

$$\gamma = 1.4,$$

se trata de un fluido supersónico pues $M = 3$.

Los resultados se muestran en la figura 6.17.

El comportamiento del aire con el obstáculo a $\alpha = 85^\circ$ se asemeja mucho al del obstáculo a $\alpha = 90^\circ$, así podemos hablar de que el código es consistente para escalones inclinados. El patrón de la densidad mostrado en la figura 6.17 es similar al del túnel de viento de Emery ya que el rebote en la parte superior del escalón no es tan violento porque el rebote en la parte superior del túnel tampoco lo es, además el punto de estancamiento para $\alpha = 85^\circ$ está mas a la derecha en el punto $(x, y) = (1.1, 0.975)$.

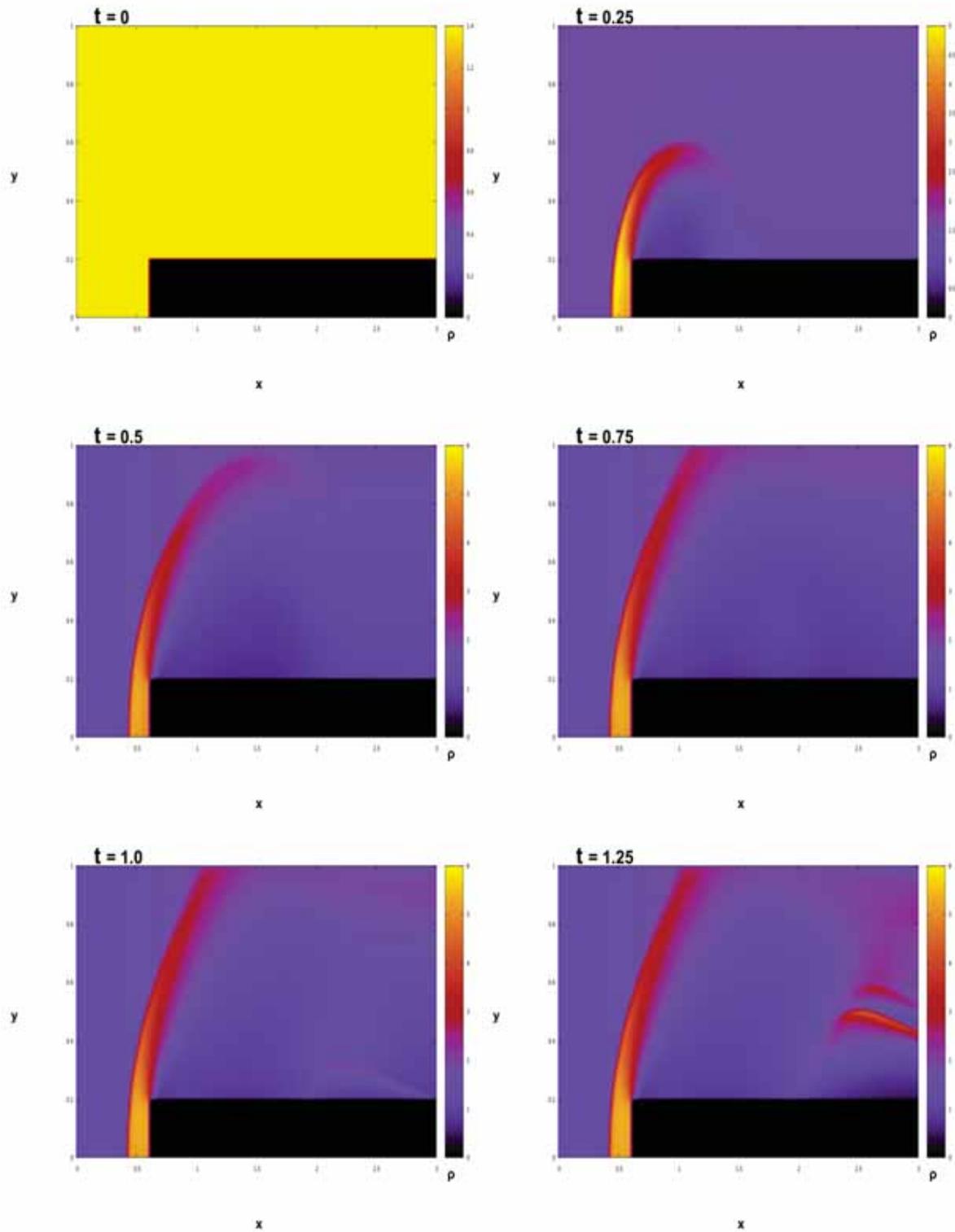


Figura 6.17: Densidad a tiempo $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$, $t = 1.0$, $t = 1.25$. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{100}$, $\Delta y = \frac{1}{100}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

Escalón inclinado a 5 grados

Tomemos un dominio $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, dos rectas y_1, y_2 de la forma:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \tan(5^\circ)(x - 0.6), \\y_2(x) &= 0.2.\end{aligned}$$

La intersección de y_1 con y_2 es en $x^* = \frac{0.2}{\tan(5^\circ)} + 0.6$, así el escalón E es la región:

$$E = \begin{cases} y \leq y_1, & 0.2 \leq x < x^*. \\ y \leq y_2, & x^* \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Las condiciones de frontera en la frontera de E serán de rebote así como en la parte superior y la inferior sobrante del dominio. En el borde derecho del dominio donde no hay obstáculos son condiciones de flujo saliente y en el borde izquierdo son condiciones de flujo entrante con la configuración:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1.4, \\p_0 &= 1.0, \\v_x &= 3.0, \\v_y &= 0.0, \\v_z &= 0.0, \\\gamma &= 1.4,\end{aligned}$$

se trata de un fluido supersónico pues $M = 3$. Mostrando los resultados en la figura 6.18.

Debido a que el ángulo α es pequeño, el rebote en la parte superior no es tan fuerte para provocar puntos de estancamiento.

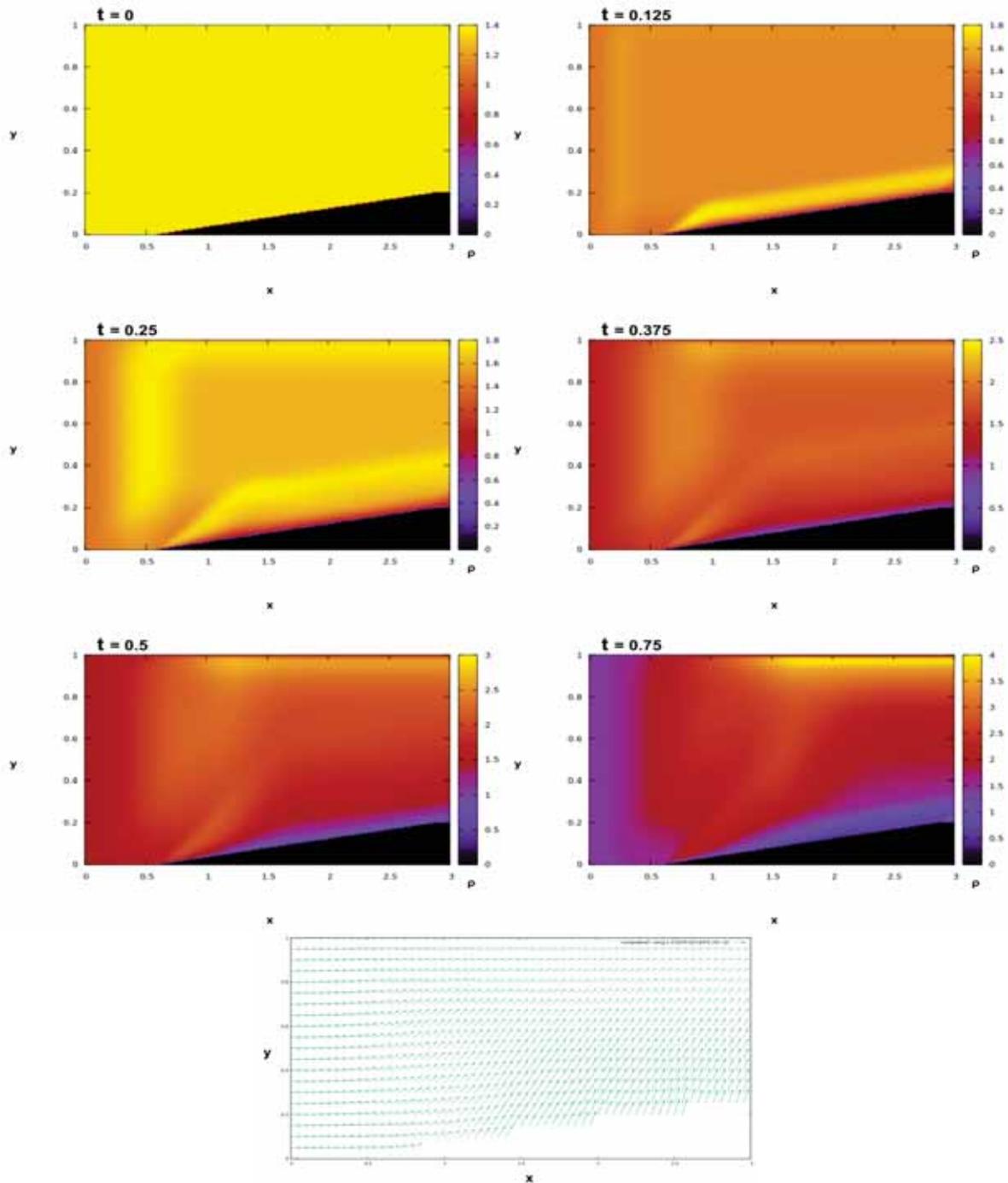


Figura 6.18: Densidad a tiempo $t = 0$, $t = 0.125$, $t = 0.25$, $t = 0.375$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ y el campo de velocidades ya en equilibrio a $t = 1.0$ en la parte inferior. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{300}$, $\Delta y = \frac{1}{300}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

6.5.2. Dos Escalones Inclinados

Para dos escalones inclinados definimos las rectas para cada escalón por separado e imponemos condiciones de rebote en sus fronteras.

Escalones con inclinación de 5 y -5 grados

Tomemos un dominio $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, cuatro rectas y_1, y_2, y_3, y_4 de la forma:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \tan(5^\circ)(x - 0.6), \\ y_2(x) &= 0.2, \\ y_3(x) &= \tan(-5^\circ)(x - 0.2) + 1, \\ y_4(x) &= 0.8. \end{aligned}$$

La intersección de y_1 con y_2 y y_3 con y_4 se dan en $x_1^* = \frac{0.2}{\tan(5^\circ)} + 0.6$ y $x_2^* = \frac{0.8-1}{\tan(-5^\circ)} + 0.2$ respectivamente.

Así los escalones E_1, E_2 son las regiones:

$$E_1 = \begin{cases} y \leq y_1, & 0.2 \leq x < x_1^*. \\ y \leq y_2, & x_1^* \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{cases} y \geq y_3, & 0.2 \leq x < x_2^*. \\ y \geq y_4, & x_2^* \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Las condiciones de frontera en las rectas serán de rebote, así como en la parte superior e inferior sobrante del dominio. En el borde derecho del dominio donde no hay obstáculos son condiciones de flujo saliente y en el borde izquierdo son condiciones de flujo entrante con la configuración:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1.4, \\ p_0 &= 1.0, \\ v_x &= 3.0, \\ v_y &= 0.0, \\ v_z &= 0.0, \\ \gamma &= 1.4, \end{aligned}$$

se trata de un fluido supersónico pues $M = 3$. Podemos observar los resultado en la figura 6.19.

En la mitad del dominio, es decir, los puntos $(x, y) = (x, 0.5)$, $\in [0, 3]$ se observa que la componente y de la velocidad es pequeña a comparación de la componente en x de la velocidad.

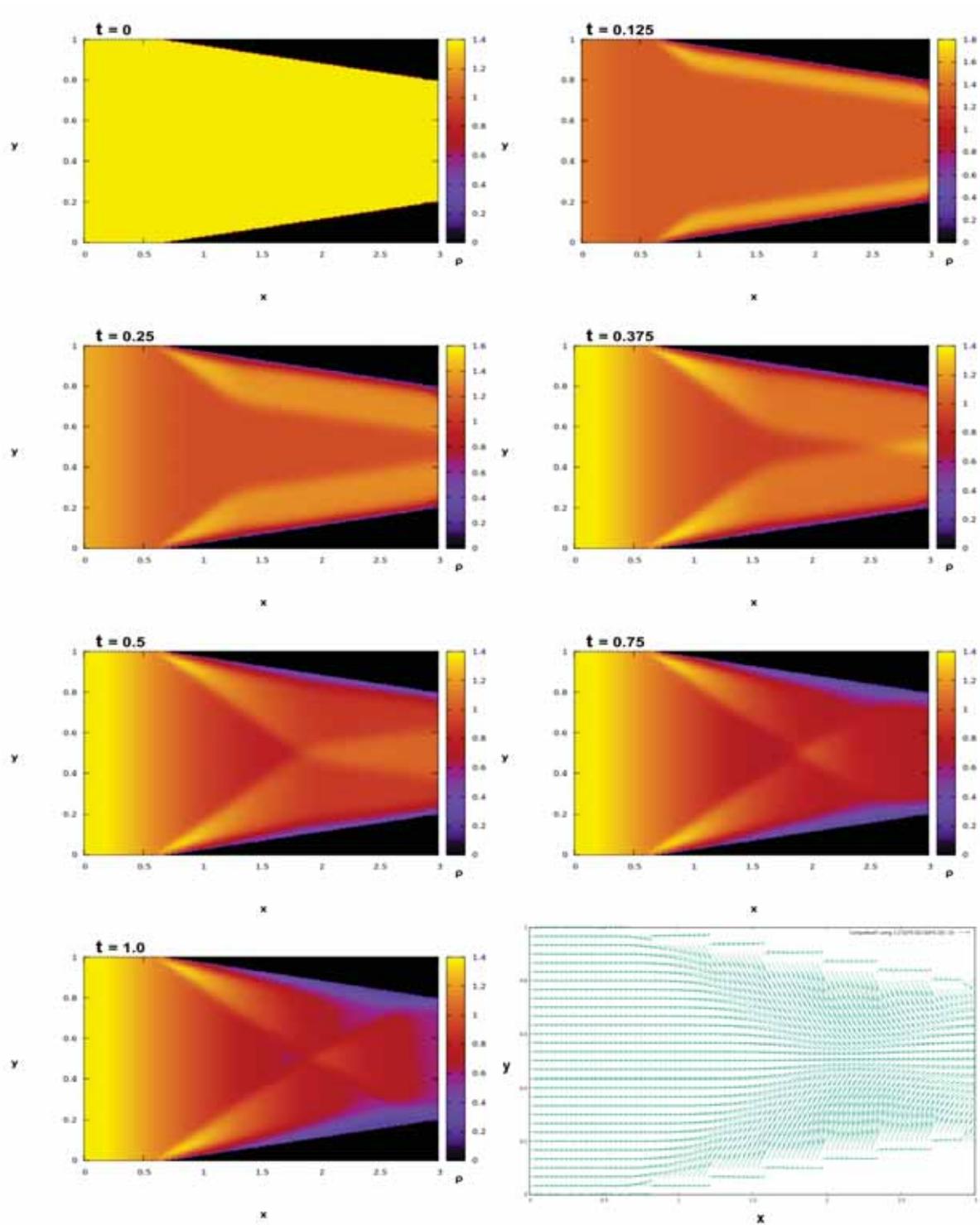


Figura 6.19: Densidad a tiempo $t = 0$, $t = 0.125$, $t = 0.25$, $t = 0.375$, $t = 0.5$, $t = 0.75$, $t = 1.0$. En la parte inferior derecha el campo de velocidades en $t = 1.25$. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{200}$, $\Delta y = \frac{1}{200}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

Escalones con inclinación de 45 y -15 grados

Tomemos un dominio $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, cuatro rectas y_1, y_2, y_3, y_4 de la forma

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \tan(45)(x - 0.6), \\y_2(x) &= 0.2, \\y_3(x) &= \tan(-15)(x - 0.2) + 1, \\y_4(x) &= 0.8.\end{aligned}$$

La intersección de y_1 con y_2 y y_3 con y_4 se dan en $x_1^* = \frac{0.2}{\tan(45^\circ)} + 0.6$ y $x_2^* = \frac{0.8-1}{\tan(-15^\circ)} + 0.2$ respectivamente. Así los escalones E_1, E_2 son las regiones:

$$E_1 = \begin{cases} y \leq y_1, & 0.2 \leq x < x_1^*. \\ y \leq y_2, & x_1^* \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{cases} y \geq y_3, & 0.2 \leq x < x_2^*. \\ y \geq y_4, & x_2^* \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Resaltemos que eligiendo un punto de inicio (x, y) , el ángulo α y la altura del obstáculo, la coordenada x de la intersección de las rectas cambiará de posición. Las condiciones de frontera en la frontera de E_1 y E_2 serán de rebote así como en la parte superior e inferior sobrante del dominio. En el borde derecho del dominio donde no hay obstáculos son condiciones de flujo saliente y en el borde izquierdo son condiciones de flujo entrante con la configuración:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1.4, \\p_0 &= 1.0, \\v_x &= 3.0, \\v_y &= 0.0, \\v_z &= 0.0, \\\gamma &= 1.4,\end{aligned}$$

se trata de un fluido supersónico pues $M = 3$.

Podemos observar los resultados en la figura 6.20.

Este es un caso muy interesante, sobre todo por la forma de los campos de velocidad y las regiones donde se concentra la densidad.

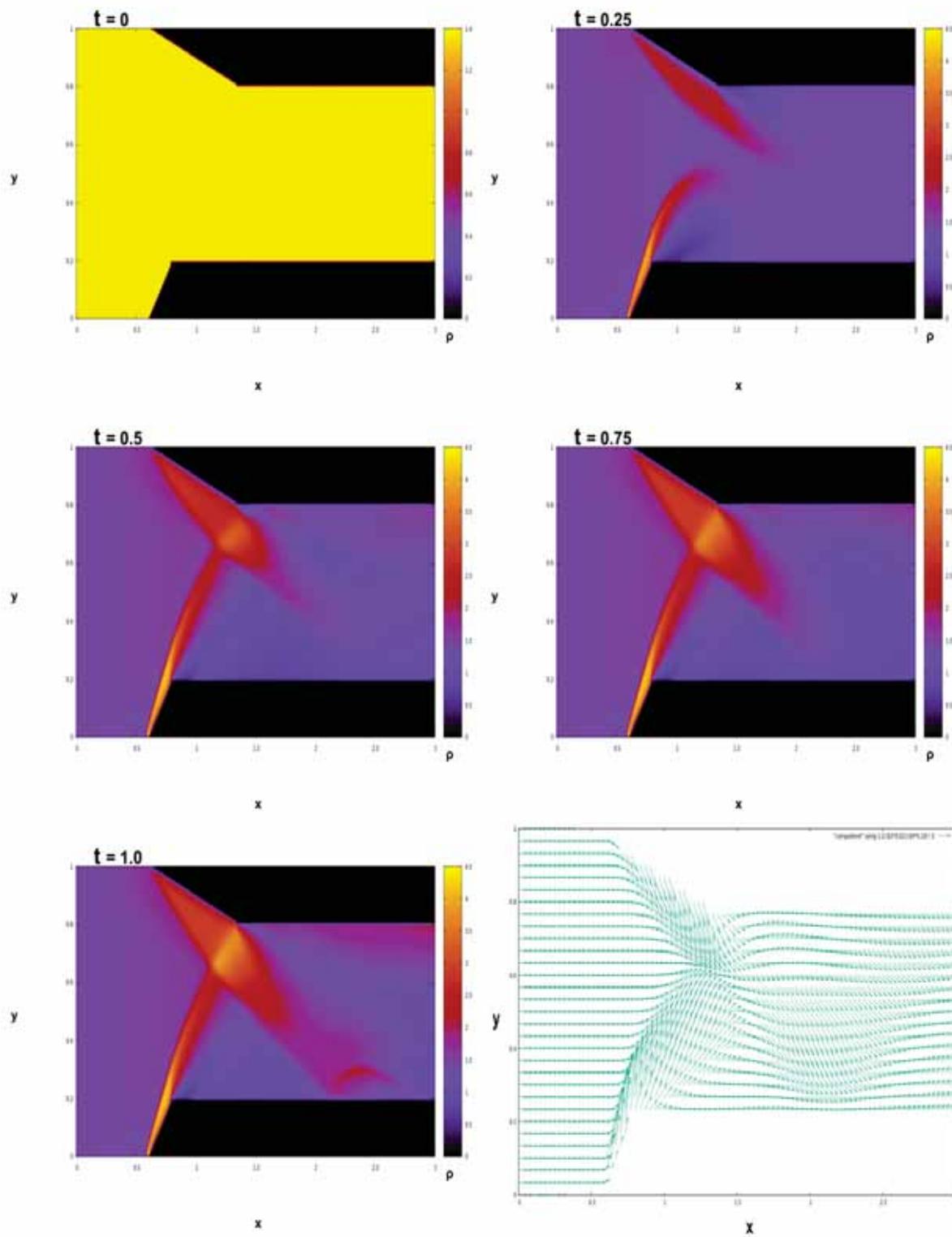


Figura 6.20: Densidad a tiempo $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$. En la esquina inferior derecha se muestra el campo de velocidades a $t = 1.0$. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{200}$, $\Delta y = \frac{1}{200}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

6.5.3. Círculo

Tomemos un dominio $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, una circunferencia centrada en $(x, y) = (1.5, 0.5)$ con radio $r = \frac{1}{6}$, que es un tercio del dominio en y . Nuestro obstáculo cilíndrico E es la región:

$$(x - 1.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

Para imponer condiciones de frontera en la frontera del cilindro, recorremos la circunferencia con la parametrización:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1.5 - \frac{\cos(t)}{6}, \\ y(t) &= 0.5 + \frac{\sin(t)}{6}, \\ 0 &\leq t < 2\pi. \end{aligned}$$

En la frontera de la circunferencia imponemos condiciones de frontera de rebote así como en la parte superior e inferior del dominio. En el borde derecho del dominio ponemos condiciones de flujo saliente, a la izquierda condiciones de flujo entrante con la configuración:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1.4, \\ p_0 &= 1.0, \\ v_x &= 3.0, \\ v_y &= 0.0, \\ v_z &= 0.0, \\ \gamma &= 1.4, \end{aligned}$$

se trata de un fluido supersónico con $M = 3$.

Obtenemos los resultados mostrados en la figura 6.21.

El viaje de la circunferencia por el aire a $M = 3$ produce una alta concentración de densidad en el frente izquierdo de la circunferencia debido al choque y rebote al igual que en el escalón del túnel de viento de Emery, la zona de mayor densidad se da en el rebote de los flujos con las paredes del dominio.

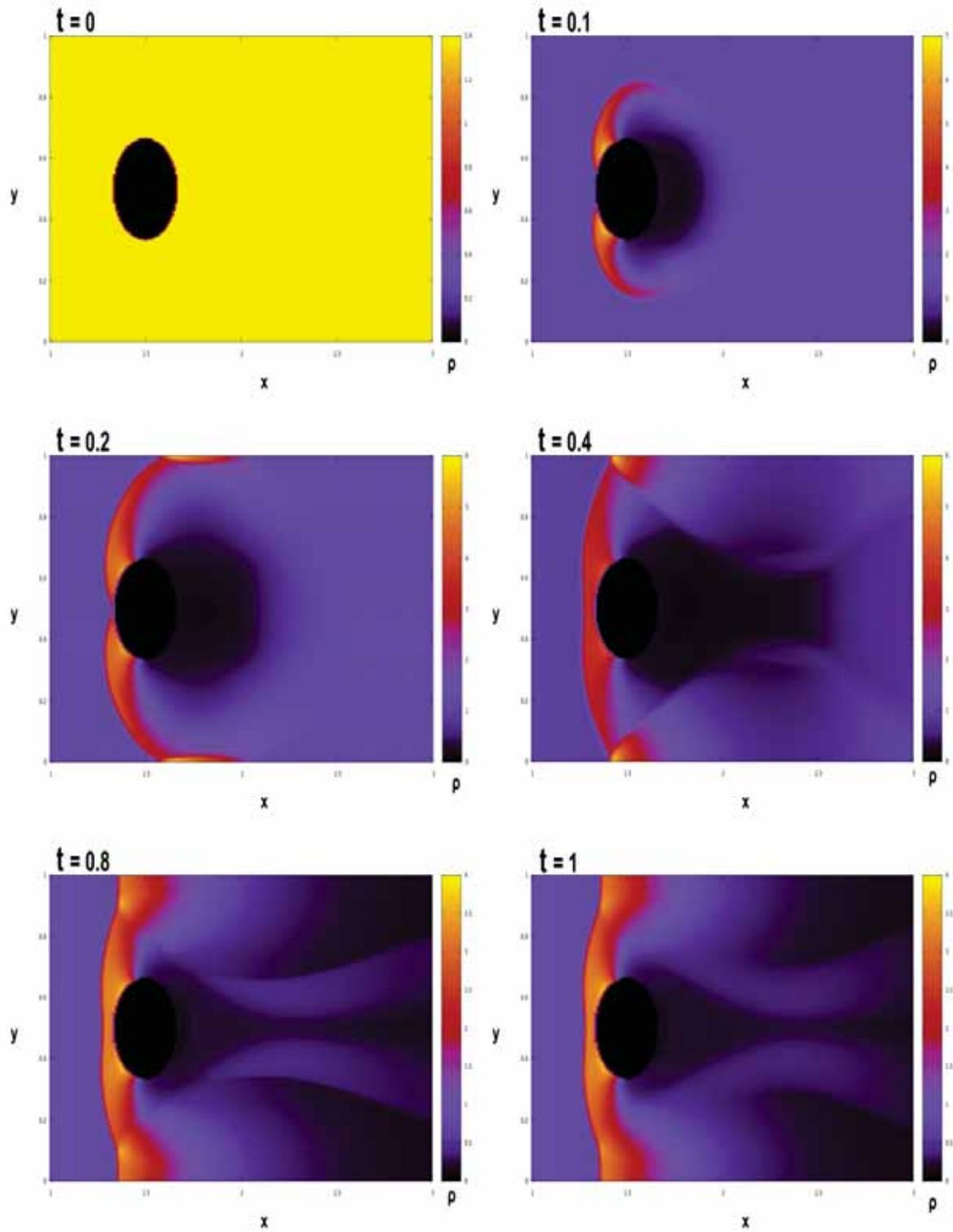


Figura 6.21: Densidad a tiempo $t = 0, t = 0.1, t = 0.2, t = 0.4, t = 0.8, t = 1.0$. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{100}, \Delta y = \frac{1}{300}, \Delta z = \frac{1}{4}, \text{Courant} = 0.25$.

6.5.4. Elipse

Tomemos un dominio $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, una elipse centrada en $(x, y) = (1.5, 0.5)$ con eje mayor y menor 0.6 y 0.1 respectivamente. Así el obstáculo E es la región:

$$\frac{(x - 1.5)^2}{0.6} + \frac{(y - 0.5)^2}{0.1} \leq 1.$$

Para imponer condiciones de frontera en la frontera de la elipse, la recorremos con la parametrización:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1.5 - 0.6 \cos(t), \\ y(t) &= 0.5 + 0.1 \sin(t), \\ 0 &\leq t < 2\pi. \end{aligned}$$

En la frontera de la elipse imponemos condiciones de frontera de rebote, en el borde derecho del dominio ponemos condiciones de flujo saliente, a la izquierda condiciones de flujo entrante y en las paredes superior e inferior de rebote. Para las condiciones de flujo entrante consideremos un gas con la configuración:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1.4, \\ p_0 &= 1.0, \\ v_x &= 3.0, \\ v_y &= 0.0, \\ v_z &= 0.0, \\ \gamma &= 1.4, \end{aligned}$$

se trata de un fluido supersónico con $M = 3$. Los resultados obtenidos podemos observarlos en la figura 6.22. La elipse desplaza el aire violentamente debido a la velocidad supersónica, el aire choca con las paredes superior e inferior del dominio rebotando y a continuación rebota nuevamente con la elipse. La densidad se acumula en el frente del lado izquierdo de la elipse pero es mayor la concentración donde se tienen los primeros rebotes, ahí se forma un punto de estancamiento del que hablamos en la sección del túnel de viento de Emery en la posición $(x, y) = (0.9, 0.5)$.

La diferencia entre el círculo y la elipse es que en la elipse, al tener mayor longitud en dirección x , los flujos rebotados en las paredes superior e inferior del tunel vuelven a rebotar con la parte derecha de la elipse formando pequeñas ondas de choque, en el caso del cilindro solo rebotan una vez con las paredes superior e inferior del dominio.

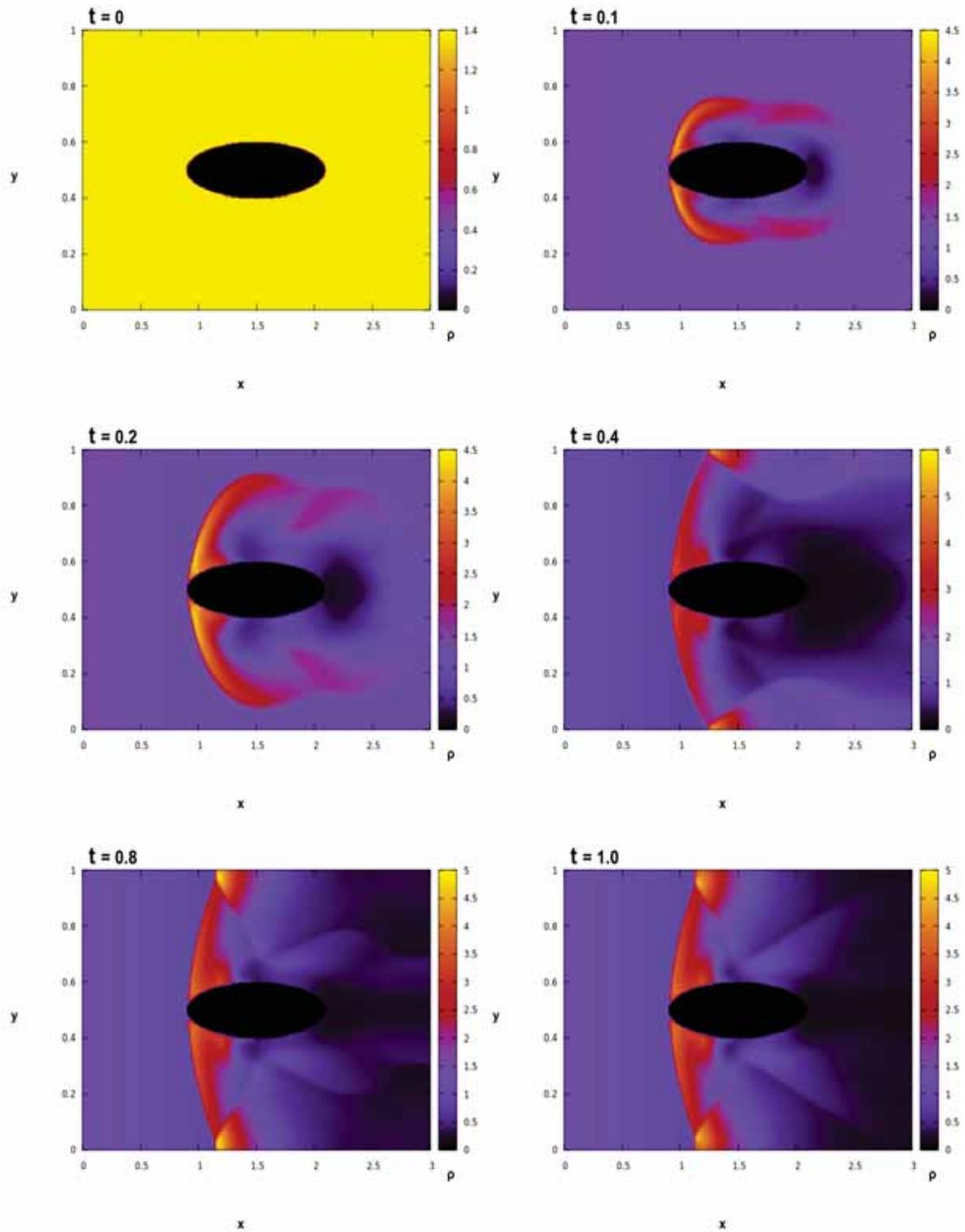


Figura 6.22: Densidad a tiempo $t = 0$, $t = 0.1$, $t = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.8$, $t = 1.0$. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{100}$, $\Delta y = \frac{1}{300}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

6.5.5. Proyectil

Tomemos el dominio $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, una elipse C_1 con centro en $(x, y) = (2, 0.5)$ con eje mayor y menor 1 y $\frac{1}{30}$ respectivamente, su ecuación es

$$(x - 2)^2 + \frac{(y - 0.5)^2}{30^2} = 1.$$

Consideremos la recta $C_2: x = 2$. Tomemos el obstáculo E como la región encerrada entre C_1 y C_2 , E es la región:

$$(x - 2)^2 + \frac{(y - 0.5)^2}{\frac{1}{30}} \leq 1, x \in [1, 2].$$

Recorramos la mitad de la elipse C_1 con la parametrización:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2 - \cos(t), \\ y_1(t) &= 0.5 + \frac{\sin(t)}{\frac{1}{30}}, \\ |t| &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

y la recta C_2 con:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 2, \\ y_2(t) &= t, \\ \frac{7}{15} &\leq t \leq \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

En la frontera de E impondremos condiciones de frontera de rebote. Las condiciones de frontera del dominio serán de rebote en la parte superior e inferior, de salida en el borde derecho y condiciones de flujo entrante constante en el borde izquierdo.

Si consideramos una partícula que se mueve en régimen supersónico, la partícula adelanta a las ondas de sonido en su movimiento (las ondas se expanden a la velocidad del sonido mientras que la partícula se desplaza a una velocidad mayor que la del sonido), de tal manera que la envolvente de las mismas forma un frente de ondas cónico, se llama Cono de Mach.

Caso subsónico

Consideremos el flujo entrante con la configuración:

$$\rho_0 = 1.4,$$

$$p_0 = 1.0,$$

$$v_x = 0.8,$$

$$v_y = 0.0,$$

$$v_z = 0.0,$$

$$\gamma = 1.4,$$

el fluido es subsónico pues usando (4.3) tenemos que $M = 0.8$.

Se presentan los resultados obtenidos en la figura 6.23.

En la evolución de la densidad se aprecia una pequeña onda de choque en la punta del proyectil, notemos que al ser relativamente baja la velocidad del proyectil, se forma una segunda onda de choque en la parte posterior del proyectil pues el aire que choca con el frente del proyectil no es desplazado a tal grado de esquivar el borde trasero.

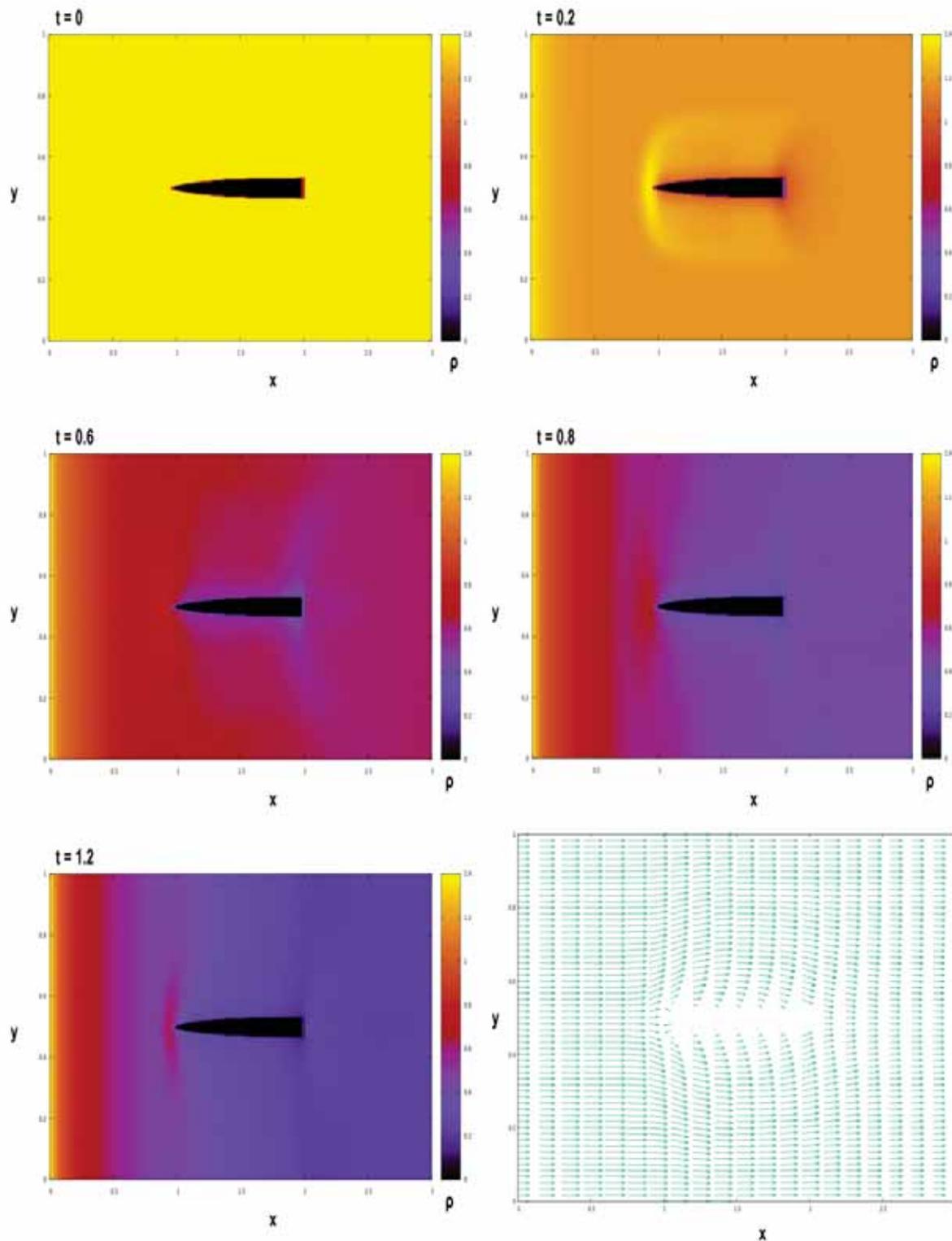


Figura 6.23: Densidad a tiempo $t = 0$, $t = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$, $t = 0.8$, $t = 1.2$ y el campo de velocidades del sistema a $t = 1.0$ en la parte inferior derecha. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{100}$, $\Delta y = \frac{1}{100}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.25.

Caso supersónico

Consideremos el flujo entrante con la configuración:

$$\rho_0 = 1.4,$$

$$p_0 = 1.0,$$

$$v_x = 3.0,$$

$$v_y = 0.0,$$

$$v_z = 0.0,$$

$$\gamma = 1.4,$$

el fluido es supersónico pues usando (4.3) tenemos $M = 3$.

Observamos los resultados obtenidos en la figura 6.24

En la figura 6.24 podemos ver como se va formando el cono de Mach por la alta velocidad del fluido entrante. En el frente del obstáculo se tiene la mayor densidad y se aprecia cómo se genera una onda de choque. La zona de menor densidad es detrás del proyectil como es de esperarse pues el aire no puede situarse detrás del proyectil tan rápidamente.

Estas zonas son la diferencia entre el vuelo subsónico y supersónico del proyectil, además de que en el vuelo subsónico el radio del cono de Mach es más grande que en el caso supersónico, además el campo de velocidades en el vuelo supersónico es más violento. Sin embargo, en el vuelo subsónico se forman 2 ondas de choque violentas y en el vuelo supersónico solo una, esto se debe al campo de velocidades del flujo supersónico, desvía el aire pero éste no alcanza a chocar con la parte trasera del proyectil.

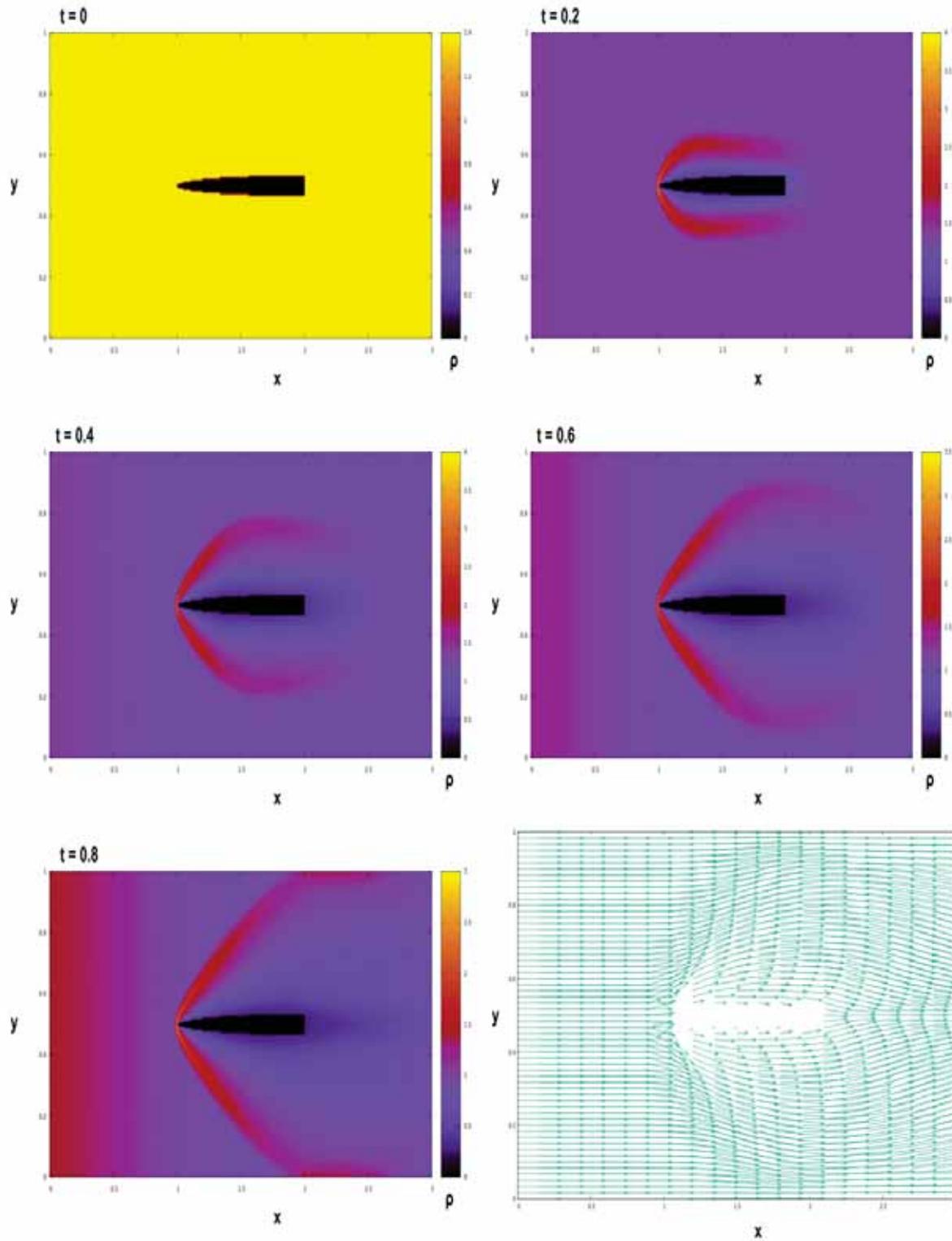


Figura 6.24: Densidad a tiempo $t = 0$, $t = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$, $t = 0.8$, abajo a la derecha el campo de velocidades del sistema a $t = 1.0$. Resolución usada $\Delta x = \frac{1}{200}$, $\Delta y = \frac{1}{200}$, $\Delta z = \frac{1}{4}$, Courant = 0.2.

7. Conclusiones

En este trabajo de tesis se desarrolló un código en lenguaje fortran 90, cuyo propósito es la solución de las ecuaciones de Euler en el régimen Newtoniano, en tres dimensiones espaciales descritas en coordenadas cartesianas.

En un contexto más general, estas ecuaciones describen la dinámica de un fluido simple, sin viscosidad, en una sola fase, usando la ecuación de estado de gas ideal.

Los métodos numéricos empleados asumen la discretización en volúmenes finitos, y el uso de métodos de alta resolución con captura de choques basados en la fórmula de flujos HLL. La reconstrucción de variables se logra mediante el reconstructor Godunov o usando reconstructores lineales.

El código pasa las pruebas básicas de tubos de choque y ondas expansivas y la prueba de Emery del tunel de viento.

En objetivo principal ha sido la solución de problemas que constan de flujos obstruidos por obstáculos cuya fórmula es en principio general. Para ello se ha desarrollado un método para imponer condiciones de frontera de rebote de flujos sobre una superficie. El reto más importante consiste en imponer las condiciones sobre superficies de obstáculos cuya superficie no coincide con las direcciones cartesianas de la discretización.

Se plantearon diversas pruebas a partir del tunel de viento de Emery, a saber, variaciones del escalón del caso de Emery con distintos ángulos, pruebas con obstáculos cilíndrico y elíptico, hasta llegar a un obstáculo con forma de proyectil. Se lograron pruebas en los regímenes sub y supersónico.

Con la herramienta desarrollada en este trabajo se abre un amplio panorama de aplicaciones que pueden estudiarse en el futuro próximo. En particular aplicaciones en la ingeniería hidro y aerodinámica, o incluso la espacial.

Los métodos numéricos utilizados dejan otra puerta abierta, la generalización del código para que sea posible considerar términos de viscosidad e incluso la simulación de fluidos complejos, al menos para simular la dinámica de un fluido en dos fases que coexisten.

Referencias

- [1] Toro, E.F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. New York: Springer.
- [2] Leveque, R.J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. New York: Cambridge Texts in Applied Mathematics.
- [3] Guzmán, F.S. (Junio 2010). Solución de la Ecuación de Onda como un Problema de Valores Iniciales Usando Diferencias Finitas. *Revista Mexicana de Física* (56).
- [4] Guzmán, F.S., Lora Clavijo, F.D. & Morales, M.D. (Diciembre 2012). Revisiting Spherically Symmetric Relativistic Hydrodynamics. *Revista Mexicana de Física* (58).
- [5] Lora-Clavijo, F. D., Cruz Pérez, J.P., Guzmán, F.S. & González, A. Exact Solution of the 1D Riemman Problem in Newtonian and Relativistic Hydrodynamics.
- [6] Lora-Clavijo F.D., Cruz-Osorio, A. & Guzmán, F.S. (Junio 2015) CAFE: A New Relativistic MHD Code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*.
- [7] Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., Timmes, F.X., Zingale, M., Lamb, D.Q., MacNeice, P., Rosner, R., J.W. Truran & Tufo, H. (Noviembre 2000). FLASH: An Adaptative Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes. *The Astrophysical Journal Supplement Series*.
- [8] Burden, R. L. & Douglas, J. (2002). *Análisis Numérico*. México: Thomson Learning.
- [9] Ochoa, R. O. (Marzo, 2019). Código para Estudiar la Dinámica de Plasma en los Regímenes Ideal y Resistivo. *Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH*
- [10] Madrid García, C. N. (1991). Prácticas de Termotecnia. *Prácticas, Universidad de Murcia* (Ed. 2)