



**Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo**  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
"MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

---

## **Retículas unitarias y nudos en el complemento del nudo trébol**

---

### **Tesis**

Para obtener el título de  
Licenciada en Físico Matemáticas

Presentada por  
Sofía Ramírez Núñez

Asesor  
Jorge Luis López López

Sinodales  
Jorge Luis López López  
Fernando Hernández Hernández  
Gerardo Tinoco Ruíz

Morelia, Michoacán, octubre de 2020.



# Agradecimientos

Completar los estudios universitarios requiere el esfuerzo no sólo de la persona que los termina sino de todas las personas que la acompañaron en el proceso incluidos los profesores, compañeros, familiares, amigos, la institución, Dios.

Por esta razón, agradezco a Dios que ha estado conmigo siempre y ha sido mi principal guía hasta el día de hoy. Gracias a mi familia, especialmente mis papás y mi hermano Luis, por su amor incondicional, gracias por ser mi soporte y siempre apoyar las decisiones que he tomado, además de estar presentes en cada paso de mi formación académica.

Gracias a mi universidad quién me recibió, por haber sido una oportunidad de progreso personal y en donde conocí personas maravillosas que sin duda siempre llevaré en mi corazón.

A mi asesor de tesis, Dr. Jorge Luis López López, por ser mi mentor durante toda la carrera, por decidir compartir sus conocimientos, creer en la educación y el desarrollo de la sociedad a través de la misma, y por supuesto por creer en mí. Los agradecimientos que puedo escribir aquí se quedan muy cortos comparados a todo lo que yo aprendí gracias a usted y a lo agradecida que siempre estaré por haberme formado como matemática y haber asesorado mi tesis.

Muchas gracias a cada uno de mis profesores y en especial al Dr. Fernando Hernández, al Dr. Gerardo Tinoco, a la Dra. Gloria Andablo y al Dr. Francisco Mota, por aceptar revisar mi tesis. Por último y no menos importante, gracias a mis amigos y compañeros por hacer de este viaje una experiencia inolvidable.



# Resumen

En ésta tesis se presenta una conexión entre *Órbitas periódicas de retículas unitarias* y *Nudos en el complemento del nudo trébol*. Esto es algo reciente, basado en un trabajo bien conocido del matemático Étienne Ghys llamado *Knots and Dynamics*. Para lograr este objetivo, asociamos a los nudos objetos matemáticos que sabemos calcular y comprender mejor (matrices). La belleza de los nudos radica en las herramientas matemáticas que hay detrás, además de que conectan distintas áreas de las matemáticas y el cómo objetos no relacionados resultan sí estar relacionados. Todo esto sin mencionar todas las aplicaciones que hasta el momento hay.

En el Capítulo 1 se estudia el espacio de retículas unitarias al identificarlo con  $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ . Esto permite definir funciones de manera mucho más sencilla. En los Capítulos 2 y 3, se establece una correspondencia entre el espacio de retículas unitarias con  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ , donde  $\mathcal{T}$  es el nudo trébol. Esta correspondencia se demuestra de dos maneras distintas. Finalmente, en el Capítulo 4, se dan definiciones importantes para poder definir el flujo en las retículas y estudiar algunos nudos en  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ .

A pesar de que la tesis se basa en el trabajo de Étienne Ghys, se realizaron algunas aportaciones personales que consisten en detallar algunas demostraciones de las que sólo se bosquejan algunas ideas, se incluye además un capítulo con la idea de una demostración completamente nueva del homeomorfismo entre  $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  y el complemento del nudo trébol en  $\mathbb{S}^3$  (Capítulo 3).

**Palabras clave:** *Grupo modular, Retículas, Nudos, Homeomorfismo, Sistema Dinámico.*



# Abstract

This thesis presents a connection between Periodic orbits and lattices of area 1 and the complement of the trefoil knot in the 3-sphere. What is mentioned above is a recent investigation, based on Étienne Ghys paper called Knots and Dynamics. To achieve this objective, we associate mathematical objects that we know how to manipulate (matrix) to knots. The beauty of knots lies in all the concepts and math areas that are connected to describe such elements and how unrelated objects turn out to be related. All this not to mention the applications that there are so far.

In Chapter 1, we study the space of lattices of area 1 identifying them with  $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  which is more useful in order to define functions in an easier way. In Chapters 2 and 3, we establish a correspondence between the space of lattices of area 1 with  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ , where  $\mathcal{T}$  defines the trefoil knot. This correspondence is demonstrated in two different ways. Finally, in Chapter 4, some definitions are given to be able to define a modular flow in lattices, and then we study some knots in  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ .

Even though the present thesis is based on Étienne Ghys work, we provided some personal contributions. We mainly include detailed proofs of which some authors only sketch some ideas. We also include a full chapter of a completely new idea of demonstrating the homeomorphism between  $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  and the complement of the trefoil knot in the 3-sphere (Chapter 3).

**Key words:** *Modular group, Lattices, Knots, Homeomorphism, Dynamic System.*





# Índice general

Agradecimientos	3
Resumen	5
Abstract	7
<b>1. Conceptos Básicos</b>	<b>11</b>
1.1. Retículas unitarias . . . . .	11
1.2. Grupo modular . . . . .	14
<b>2. Series de Eisenstein</b>	<b>17</b>
2.1. Homeomorfismo entre $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ y retículas unitarias . . . . .	17
<b>3. <math>\mathbb{S}^3</math> y Retículas Unitarias</b>	<b>25</b>
3.1. Región de Dirichlet y retículas . . . . .	26
3.2. $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ . . . . .	31
<b>4. Nudos en el complemento del nudo trébol</b>	<b>37</b>
4.1. Órbitas periódicas y matrices hiperbólicas . . . . .	37
4.2. Nudos . . . . .	40



# Capítulo 1

## Conceptos Básicos

### 1.1. Retículas unitarias

**Definición 1.1.1.** Sea  $\Gamma$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .  $\Gamma$  es una retícula si existen vectores  $u, v$  linealmente independientes tales que

$$\Gamma = \{\alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}.$$

A  $u$  y  $v$  se les llama generadores. Denotaremos como  $\Gamma_{(u,v)}$  a la retícula generada por  $u$  y  $v$ .

Es fácil notar que  $u, v$  no son los únicos generadores de la retícula, por ejemplo  $v' = u + v$  y  $u$  generan la misma retícula. La siguiente proposición nos permite entender cuáles son todos los generadores de la misma retícula.

**Proposición 1.1.2.** Sean  $u, v$  base de  $\mathbb{R}^2$  y sean  $u', v'$  otra base. Existen  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $u' = au + bv$  y  $v' = cu + dv$ . Entonces

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm 1 \text{ si y sólo si } \Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(u',v')},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sabemos que  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y sin pérdida de generalidad que  $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 1$  (el caso  $ad - bc = -1$  es totalmente análogo). Entonces,  $cu' = acu + bcv$  y  $av' = acu + adv$  implican que  $av' - cu' = (ad - bc)v = v$ . Y análogamente,  $du' - bv' = (ad - bc)u = u$ .

Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ,

$$\gamma = \alpha u + \beta v = \alpha(du' - bv') + \beta(av' - cu') = (\alpha d - \beta c)u' + (\beta a - \alpha b)v',$$

donde  $(\alpha d - \beta c), (\beta a - \alpha b) \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto  $\Gamma_{(u,v)} \subset \Gamma_{(u',v')}$ .

Ahora, dado  $\delta, \eta \in \mathbb{Z}$ ,

$$\gamma' = \delta u' + \eta v' = \delta(au + bv) + \eta(cu + dv) = (\delta a + \eta c)u + (\delta b + \eta d)v,$$

donde  $(\delta a + \eta c), (\delta b + \eta d) \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,  $\Gamma_{(u,v)} \supset \Gamma_{(u',v')}$  y así concluimos que  $\Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(u',v')}$ .

$\Leftrightarrow$  Dado que  $u, v$  y  $u', v'$  son bases, sabemos que  $u' = au + bv$  y  $v' = cu + dv$ . Falta probar:

a)  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

b)  $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm 1$ .

a) Puesto que  $\Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(u',v')}$ , entonces  $v' = cu + dv$  donde  $v'$  es combinación lineal de  $u$  y  $v$  con coeficientes enteros. De igual manera  $u' = au + bv$ . Así  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

b) Como  $du' = adu + bdv$  y  $bv' = bcu + bdv$ , entonces  $du' - bv' = (ad - bc)u$ . Podemos suponer que  $(ad - bc) \neq 0$ , de lo contrario  $du' = bv'$  que es imposible ya que  $u'$  y  $v'$  son base de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces,  $u = \frac{du'}{(ad - bc)} - \frac{bv'}{(ad - bc)}$  donde  $\frac{d}{(ad - bc)}$  y  $\frac{b}{(ad - bc)}$  tienen que ser enteros pues  $u \in \Gamma_{(u',v')}$ . De manera que  $(ad - bc) \mid b$  y  $(ad - bc) \mid d$ . Análogamente,  $v = \frac{av'}{(ad - bc)} - \frac{cu'}{(ad - bc)}$ . Así  $(ad - bc) \mid a$  y  $(ad - bc) \mid c$ . Entonces existen  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$  tales que

$$\begin{aligned} a &= k_1(ad - bc) \\ b &= k_2(ad - bc) \\ c &= k_3(ad - bc) \\ d &= k_4(ad - bc) \end{aligned} \Rightarrow (ad - bc) = (ad - bc)^2(k_1k_4 - k_2k_3),$$

$1 = (ad - bc)(k_1k_4 - k_2k_3)$ . Así  $(ad - bc) \mid 1$ .

Por lo tanto,  $ad - bc = \pm 1$ .

□

Ahora, daremos a conocer retículas cuyos generadores forman un paralelogramo de área 1.

**Definición 1.1.3.** Sean  $u$  y  $v$  vectores en  $\mathbb{R}^2$ . El vector proyección de  $u$  sobre  $v$  se define como

$$Proj_v(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \cdot v.$$

**Notación 1.1.4.** Si  $v$  es un vector en  $\mathbb{R}^n$ , entonces pensaremos  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

**Proposición 1.1.5.** Sea  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Entonces  $\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \pm 1$  si y sólo si el área del paralelogramo formado por  $u$  y  $v$  es 1.

*Demostración.* Sea  $A(u, v)$  el área del paralelogramo formado por  $u$  y  $v$  y sea  $w = Proj_v(u) - u$ . Notar que si  $\theta$  es el ángulo entre  $u$  y  $Proj_v(u)$ , entonces  $\sin \theta = \frac{\|w\|}{\|u\|}$ . Es bien conocido que una interpretación geométrica del producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$  de dos vectores es el área del paralelogramo generado por ellos. Entonces para usar ésta propiedad debemos “extender” nuestros vectores  $u$  y  $v$  a  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente manera: Sean ahora  $u = (u_1, u_2, 0)$  y  $v = (v_1, v_2, 0)$ . Entonces,

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta = \|v\| \|w\| = A(u, v).$$

Y por otro lado tenemos que  $\|u \times v\| = \|(0, 0, u_1v_2 - u_2v_1)\| = |u_1v_2 - u_2v_1|$ . Por lo tanto,  $|u_1v_2 - u_2v_1| = 1 \Leftrightarrow \|u \times v\| = 1 = A(u, v)$ .  $\square$

**Definición 1.1.6.** Sea  $u, v$  base de  $\mathbb{R}^2$ . A las retículas que satisfacen que  $\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = 1$  les llamaremos retículas unitarias.

**Definición 1.1.7.**  $SL_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$ .

**Definición 1.1.8.**  $PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R})/\pm 1$ .

**Definición 1.1.9.** Sean  $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$ . Entonces,  $A \sim B$  si existe  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$  tal que  $AC = B$ .

Consideremos a  $\mathcal{U}$  como el conjunto de todas las retículas unitarias en  $\mathbb{R}^2$ . Definimos la función  $f : SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{U}$  tal que si  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$  entonces  $f([A]) = \Gamma_{(u,v)}$ , donde  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$ .

Primero veamos que en efecto,  $f$  está bien definida.

Sean  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$  tales que  $AC = B$  para alguna  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Por la Proposición 1.1.2 sabemos que  $AC = B \Leftrightarrow \Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(w,z)}$ . Así  $f$  está bien definida.

**Proposición 1.1.10.**  *$f$  es una función biyectiva.*

*Demostración.* Sean  $u, v$  y  $u', v'$  dos bases de  $\mathbb{R}^2$  tales que  $\Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(u',v')}$ . Sean

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{pmatrix}.$$

Por la Proposición 1.1.2 sabemos que  $\Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(u',v')} \Rightarrow$  existe  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$  tal que  $AC = B$ . Por lo tanto  $f$  es inyectiva.

Sean  $u$  y  $v \in \mathbb{R}^2$  tales que  $\Gamma_{(u,v)} \in \mathcal{U}$ . Entonces

$$\Gamma_{(u,v)} = \{\alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \text{ y } \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = 1\}.$$

Sea  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ . Entonces  $f([A]) = \Gamma_{(u,v)}$ . Por lo tanto  $f$  es suprayectiva.  $\square$

## 1.2. Grupo modular

Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función definida como

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ .

**Observación 1.2.1.** *Si definimos como  $G$  al conjunto de todas las funciones así definidas tales que  $ad - bc \neq 0$ , entonces  $(G, \circ)$  es grupo.*

*Demostración.*  $G$  es asociativo pues la composición lo es. La función  $Id_G$  que manda  $z \mapsto z$  es elemento neutro de  $G$ . Además  $G$  es cerrado con la composición, sean  $f, g \in G$  tales que

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{hz + l}{mz + n},$$

donde  $a, b, c, d, h, l, m, n \in \mathbb{C}$ . Entonces,

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \frac{a\left(\frac{hz+l}{mz+n}\right) + b}{c\left(\frac{hz+l}{mz+n}\right) + d} = \frac{(ah + bm)z + (al + bn)}{(ch + dm)z + (cl + dn)},$$

donde  $(ah + bm), (al + bn), (ch + dm), (cl + dn) \in \mathbb{C}$  y además  $[(ah + bm)(cl + dn) - (ch + dm)(al + bn)] \neq 0$ , por lo que  $f \circ g \in G$ . Y finalmente sea  $f \in G$  donde  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  entonces es fácil ver que si defino  $g(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ , entonces  $g \in G$  y además  $(f \circ g)(z) = Id_G$ .  $\square$

El grupo  $G$  es mejor conocido como el conjunto de *transformaciones de Möbius*.

**Definición 1.2.2.** Al subconjunto de transformaciones de Möbius de la forma  $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$  donde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$  se le llama **grupo modular** y lo denotaremos como  $Möb$ .

**Proposición 1.2.3.** Sea  $F : \frac{SL_2(\mathbb{Z})}{\{\pm I\}} \rightarrow Möb$  definida como

$$\left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \xrightarrow{F} f(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

donde  $\tau$  varía en  $\mathbb{C}$ . Entonces  $F$  es isomorfismo de grupos.

*Demostración.* Para probar que es homomorfismo, sean  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y  $B =$

$\begin{pmatrix} h & l \\ m & n \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Entonces,

$$\begin{aligned} F([AB]) &= F\left(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & l \\ m & n \end{pmatrix}\right]\right) = F\left(\left[\begin{pmatrix} ah + bm & al + bn \\ ch + dm & cl + dn \end{pmatrix}\right]\right) = \\ &= H(\tau) = \frac{(ah + bm)\tau + (al + bn)}{(ch + dm)\tau + (cl + dn)}, \end{aligned}$$

donde  $H \in Möb$ . Y, por otro lado,

$$\begin{aligned} F([A])F([B]) &= F\left(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]\right) F\left(\left[\begin{pmatrix} h & l \\ m & n \end{pmatrix}\right]\right) = f(\tau) \circ g(\tau) = \\ &= f(g(\tau)) = \frac{a\left(\frac{h\tau+l}{m\tau+n}\right) + b}{c\left(\frac{h\tau+l}{m\tau+n}\right) + d} = \frac{(ah + bm)\tau + (al + bn)}{(ch + dm)\tau + (cl + dn)} = H(\tau), \end{aligned}$$

donde  $f, g \in Möb$ . Por lo tanto,  $F([AB]) = F([A])F([B])$ .

Es fácil probar la biyección utilizando el 1<sup>er</sup> Teorema de Isomorfismo.  $\square$





# Capítulo 2

## Series de Eisenstein

Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto  $\{(3t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}\}$ . Éste conjunto es muy especial al hablar de retículas, porque lo que se probará a continuación es que para una retícula  $\Gamma_{(u,v)}$ , el par de números complejos  $(g_2(u, v), g_3(u, v))$ , donde los números  $g_2$  y  $g_3$  son conocidas como series de Eisenstein, caracteriza a la retícula. Aún más, un par de números complejos  $(z_1, z_2)$  corresponde a una retícula sí y solo si  $\Delta = z_1^3 - 27z_2^2$  es no cero. A  $\Delta$  le llamaremos *discriminante*. En resumen, el espacio de retículas se puede identificar con el complemento en  $\mathbb{C}^2$  de la curva  $\Delta = 0$ .

En éste capítulo se da una demostración del homeomorfismo entre retículas unitarias y  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ . Esta es una prueba detallada donde se usan dos series de Eisenstein, muy útiles en teoría de números, por ejemplo.

### 2.1. Homeomorfismo entre $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ y retículas unitarias

A partir de ahora veremos a los generadores  $u$  y  $v$  de una retícula como valores complejos.

Sea  $\Gamma_{(u,v)}$  una retícula, donde  $u, v \in \mathbb{C}$ .

$$g_2(u, v) = 60 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(nu + mv)^4}, \quad (2.1)$$

$$g_3(u, v) = 140 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(nu + mv)^6}. \quad (2.2)$$

A  $g_2$  y  $g_3$  se les conoce como *series de Eisenstein*. Ambas series convergen absoluta y uniformemente. Entonces,  $g_2$  y  $g_3$  son invariantes, es decir, no dependen de la elección de los generadores  $u$  y  $v$  de la retícula, esto debido a que cualquier reordenamiento de la serie converge y de hecho converge a lo mismo.

**Observación 2.1.1.** Si  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , un cálculo directo muestra que

$$g_2(\lambda u, \lambda v) = \lambda^{-4} g_2(u, v) \quad \text{y} \quad g_3(\lambda u, \lambda v) = \lambda^{-6} g_3(u, v). \quad (2.3)$$

**Observación 2.1.2.**

$$g_2(1, \tau) = u^4 g_2(u, v) \quad \text{y} \quad g_3(1, \tau) = u^6 g_3(u, v), \quad (2.4)$$

donde  $\tau = \frac{v}{u}$  y  $u \neq 0$ .

Ver las funciones  $g_2$  y  $g_3$  como funciones de  $\tau$  es útil pues de esta manera estas funciones sólo dependen de una variable.

**Observación 2.1.3.**  $(z_1, z_2) \in \mathcal{C}$  si y sólo si  $z_1^3 - 27z_2^2 = 0$ .

*Demostración.*  $(z_1, z_2) \in \mathcal{C}$  si y sólo si  $(z_1, z_2) = (3t_0^2, t_0^3)$  para algún  $t_0 \in \mathbb{C}$ . Entonces  $z_1^3 - 27z_2^2 = 27t_0^6 - 27t_0^6 = 0$ .  $\square$

**Proposición 2.1.4.** Consideremos  $V$  el espacio de retículas. Sea  $\mathcal{F} : V \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$  función definida por

$$\mathcal{F}(\Gamma) = (g_2(u, v), g_3(u, v)), \quad (2.5)$$

donde  $u$  y  $v$  son generadores de la retícula  $\Gamma$ . Entonces  $\mathcal{F}$  define una biyección entre  $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$  y el conjunto de retículas.

*Demostración.* Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el par  $(u, v)$  forma una base positivamente orientada en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $\text{Arg}(v) - \text{Arg}(u) \in (0, \pi)$  (si no, entonces tomar  $-v$  en lugar de  $v$ ). Entonces, tenemos que  $\tau = \frac{v}{u} \in \mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ . Como las series  $g_2$  y  $g_3$  son absoluta y uniformemente convergentes, entonces que para  $\tau \in \mathbb{H}$ ,  $g_2(1, \tau)$  y  $g_3(1, \tau)$

son funciones holomorfas en  $\mathbb{H}$ .

Ahora, la función

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(1, \tau)}{g_3^3(1, \tau) - 27g_2^2(1, \tau)},$$

define una biyección entre  $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$  y  $\mathbb{C}$  (ver Teorema 2.7 de [1]).

Ahora, si tomamos la función  $1/J(\tau) : \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  que está definida mediante  $1/J(\tau) = 1 - 27g_2^2(1, \tau)/g_3^3(1, \tau)$ , nos da la biyección

$$\frac{g_3^2(1, \tau)}{g_2^3(1, \tau)} : \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \setminus \{1/27\}, \quad (2.6)$$

que usaremos para probar la biyección de  $\mathcal{F}$ .

**Suprayectividad** (Apostol). Sea  $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$ . Por la suprayectividad de (2.6), existe  $\tau$  tal que  $g_3^2(1, \tau)/g_2^3(1, \tau) = b^2/a^3 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{1/27\}$ . Dividiremos en 2 casos:

**1.  $a \neq 0$ .** Tomando alguna raíz cuarta de  $g_2(1, \tau)/a$ , podemos encontrar  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $g_2(1, \tau) = \lambda^4 a$ . Entonces,

$$g_3^2(1, \tau) = \frac{b^2}{a^3} g_2^3(1, \tau) = \lambda^{12} b^2.$$

Esto implica que  $g_3 = \pm \lambda^6 b$ .

Si  $g_3 = \lambda^6 b$ . Usando (2.3),  $(\lambda, \lambda\tau) \mapsto (\lambda^{-4} g_2(1, \tau), \lambda^{-6} g_3(1, \tau)) = (a, b)$ .

Si  $g_3 = -\lambda^6 b$ . Entonces,  $(i\lambda, i\lambda\tau) \mapsto (\lambda^{-4} g_2(1, \tau), -\lambda^{-6} g_3(1, \tau)) = (a, b)$ .

**2.  $a = 0$ .** Existe  $\tau \in \mathbb{H}$  tal que  $J(\tau) = 0$ , lo que implica que  $g_2(1, \tau) = 0$ . Dado que  $b \neq 0$ , existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $g_3(1, \tau) = \lambda^6 b$ . Por lo tanto  $(\lambda, \lambda\tau) \mapsto (\lambda^{-4} g_2(1, \tau), \lambda^{-6} g_3(1, \tau)) = (0, b)$ .

**Inyectividad.** Sean  $u, v, z, w \in \mathbb{C}$  tales que

$$(g_2(u, v), g_3(u, v)) = (g_2(z, w), g_3(z, w)).$$

Un cálculo simple muestra que

$$g_2(1, \tau) = \left(\frac{u}{z}\right)^4 g_2(1, \sigma), \quad (2.7)$$

y también

$$g_3(1, \tau) = \left(\frac{u}{z}\right)^6 g_3(1, \sigma), \quad (2.8)$$

como consecuencia de (2.4) y tomando  $\tau = \frac{v}{u}$  y  $\sigma = \frac{w}{z}$ .  
Con lo que obtenemos que

$$\frac{g_3^2(1, \tau)}{g_2^3(1, \tau)} = \frac{g_3^2(1, \sigma)}{g_2^3(1, \sigma)}.$$

Por la inyectividad de (2.6),  $\tau = \frac{a\sigma+b}{c\sigma+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} g_2(1, \tau) &= g_2\left(1, \frac{a\sigma+b}{c\sigma+d}\right) = (c\sigma+d)^4 g_2(c\sigma+d, a\sigma+b) \\ &= 60(c\sigma+d)^4 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(n(c\sigma+d) + m(a\sigma+b))^4} \\ &= 60(c\sigma+d)^4 \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{((nc+am)\sigma + (nd+mb))^4} \\ &= (c\sigma+d)^4 g_2(1, \sigma). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notar que la última igualdad es cierta pues  $(c, a) = 1$  y  $(b, d) = 1$  (i.e. son primos relativos) pues  $ad - bc = 1$ . Si  $g_2(1, \sigma) = 0$ , entonces  $g_2(z, w) = 0$ . El hecho de que  $g_2(z, w)$  se anule es equivalente a que  $\mathcal{J}(\sigma) = 0$  y esto pasa si y sólo si  $z = \frac{w}{\rho}$ , donde  $\rho$  es raíz cúbica de la unidad y  $\rho \neq 1$ , así tenemos también que  $(u, v) = (\frac{v}{\rho}, v)$ . De (2.8), obtenemos que  $v^6 = w^6$ , cuya norma es la misma y su argumento difiere por un múltiplo de  $\pi/3$ . Por lo que se trata entonces de la misma retícula. Si suponemos ahora que  $g_2(1, \sigma) \neq 0$ , de (2.7) y (2.9) deducimos que  $(\frac{u}{z})^4 = (c\sigma+d)^4$ . De manera análoga  $(\frac{u}{z})^6 = (c\sigma+d)^6$  cuando usamos  $g_3$ . Por lo tanto,  $\frac{u}{z} = \pm(c\sigma+d)$ . Sustituyendo  $\sigma$  por  $\frac{w}{z}$ ,  $u = \pm(cz + dw)$ , concluyendo que  $u \in \Gamma_{(z,w)}$ .

Siguiendo los mismos pasos y utilizando

$$g_2(1, \sigma) = \left(\frac{z}{u}\right)^4 g_2(1, \tau) \quad y \quad \sigma = \frac{a'\tau + b'}{c'\tau + d'}$$

concluimos que  $z \in \Gamma_{(u,v)}$ .

Ahora, si utilizamos

$$g_2(u, v) = v^{-4} g_2\left(\frac{u}{v}, 1\right) \quad y \quad g_3(u, v) = v^{-6} g_3\left(\frac{u}{v}, 1\right),$$

obtenemos que

$$g_2(\tau', 1) = \left(\frac{v}{w}\right)^4 g_2(\sigma', 1) \quad y \quad g_3(\tau', 1) = \left(\frac{v}{w}\right)^6 g_3(\sigma', 1), \quad (2.10)$$

2.1. HOMEOMORFISMO ENTRE  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$  Y RETÍCULAS UNITARIAS 21

donde  $\tau' = \frac{u}{v}$  y  $\sigma' = \frac{z}{w}$ .

Realizando análogamente los pasos antes realizados con las ecuaciones de (2.10), concluimos que  $v \in \Gamma_{(z,w)}$  y  $w \in \Gamma_{(u,v)}$  y por lo tanto  $\Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(z,w)}$ .  $\square$

Hasta ahora tenemos que las retículas se corresponden con elementos en  $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}$ . Ahora veremos que existe biyección entre retículas unitarias y  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$  y más aún, es homeomorfismo.

El conjunto de retículas es un espacio topológico: diremos que dos retículas están cerca si son generadas por un par de vectores en el plano que sean cercanos.

$\mathcal{F}(\Gamma_{(u,v)}) = (g_2(u, v), g_3(u, v))$  manda el conjunto  $\mathcal{U}$  de retículas unitarias en una  $n$ -variedad  $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{C}^2$ .

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función diferenciable tal que

$$(u, v, s) \mapsto s^{-8}|g_2(u, v)|^2 + s^{-12}|g_3(u, v)|^2.$$

Sea  $(u_0, v_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  tal que  $f(u_0, v_0, s_0) = 1$ . Consideremos  $(u, v, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , entonces  $\frac{\partial f}{\partial s}(u_0, v_0, s_0) \neq 0$ . Aplicando el teorema de la función implícita, existen conjuntos abiertos  $V \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  y  $W \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  con  $(u_0, v_0, s_0) \in V$  y  $(u_0, v_0) \in W$  tales que para cada  $(u, v) \in W$  existe un único  $s$  tal que  $(u, v, s) \in V$  y  $f(u, v, s) = 1$ , lo que define una función  $S : W \rightarrow \mathbb{R}$  que es continua y diferenciable y que además satisface

$$\forall (u, v) \in W, \quad f(u, v, S(u, v)) = 1.$$

Ahora tenemos que  $S$  es la función tal que  $\left( \frac{1}{S(u,v)^4} g_2(u, v), \frac{1}{S(u,v)^6} g_3(u, v) \right) \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ . De esta manera concluimos que

$$\Upsilon(u, v) = \left( \frac{1}{S(u, v)^4} g_2(u, v), \frac{1}{S(u, v)^6} g_3(u, v) \right)$$

es diferenciable.

**Proposición 2.1.5.** *La función  $\Upsilon : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$  es biyección.*

*Demostración. Suprayectividad.* Sea  $(z, w) \in \mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ . Buscamos  $\Gamma_{(u,v)}$  unitaria tal que existe  $s$  que cumple  $(g_2(su, sv), g_3(su, sv)) = (z, w)$ . Por la suprayectividad de  $\mathcal{F}$ , Proposición 2.1.4, consideramos  $\Gamma_{(u',v')}$  tal que  $\mathcal{F}(\Gamma_{(u',v')}) = (g_2(u', v'), g_3(u', v')) = (z, w)$ . Si  $\det(u', v') < 0$  entonces intercambiamos generadores, es decir,  $\Gamma_{(u',v')} = \Gamma_{(v',u')}$ . Proponemos  $s = \det(u', v')^{-\frac{1}{2}}$ , aquí usamos que  $\det(u', v') > 0$ . Sean  $u = su'$  y  $v = sv'$ . Entonces,  $\Gamma_{(u,v)}$  es retícula unitaria ( $\det(u, v) = s^2 \det(u', v') = 1$ ) y  $(g_2(su, sv), g_3(su, sv)) = (g_2(u', v'), g_3(u', v')) = (z, w)$ .

**Inyectividad.** Sean  $u, v, z, w \in \mathbb{C}$  tales que

$$(g_2(u, v), g_3(u, v)) = (g_2(z, w), g_3(z, w)),$$

donde  $(g_2(u, v), g_3(u, v)), (g_2(z, w), g_3(z, w)) \in \mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ . Sea  $\Gamma_{(u,v)}$  tal que  $\mathcal{F}(\Gamma_{(u,v)}) = (g_2(u, v), g_3(u, v))$  y  $\Gamma_{(z,w)}$  tal que  $\mathcal{F}(\Gamma_{(z,w)}) = (g_2(z, w), g_3(z, w))$ . Por la Proposición 2.1.4,  $\Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(z,w)}$ . Por lo tanto,  $z = au + bv$  y  $w = cu + dv$  para  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $ad - bc = \pm 1$ . De aquí que  $\det(u, v) = \pm \det(z, w)$ . Supongamos que  $\det(u, v) > 0$  (Si  $\det(u, v) < 0$  entonces intercambiamos los generadores, i.e  $\Gamma_{(u,v)} = \Gamma_{(v,u)}$ ), sea  $s = \det(u, v)^{-\frac{1}{2}}$ . Notar que si  $u' = su, v' = sv, z' = sz$  y  $w' = sw$ , entonces  $\Gamma_{(u',v')}$  y  $\Gamma_{(z',w')}$  son ambas retículas unitarias y además  $\Gamma_{(u',v')} = \Gamma_{(z',w')}$ .  $\square$

**Proposición 2.1.6.** *La función  $\Upsilon^{-1}$  es diferenciable.*

*Demostración.* Consideremos el punto  $p = (p_2, p_3) \in \mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ . Ahora, tomamos  $p_2^3/(p_2^3 - 27p_3^2)$ , que es función racional de las coordenadas de  $p$ , y por consiguiente es función diferenciable de  $p$ . Dado que la función  $J$  (mencionada en la Proposición 2.1.4) es biholomorfismo, entonces es diferenciable y su jacobiana tiene rango 2. Así se cumplen las condiciones del teorema de la función inversa y existe  $\tau = J^{-1}$ , que es función diferenciable de  $p$ , tal que  $J(\tau) = p_2^3/(p_2^3 - 27p_3^2)$ . El  $\lambda$  que encontramos en la demostración de Suprayectividad de la misma Proposición 2.1.4 depende diferenciablemente de  $p$  también. De aquí, conseguimos  $(u, v)$ , que depende diferenciablemente de  $p$ , tal que  $F(\Gamma_{(u,v)}) = (p_2, p_3)$ . Sea  $t(u, v)$  el real tal que  $t(u, v)\Gamma_{(u,v)}$  es unitaria, es decir,

$$t(u, v)^2 \operatorname{Re}(uv) = 1 \Rightarrow t(u, v)^2 (\bar{u}v - u\bar{v}) = 2i.$$

Nuevamente,  $t$  es función diferenciable de  $(u, v)$ , y por lo tanto de  $p$ .  $\square$

## 2.1. HOMEOMORFISMO ENTRE $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ Y RETÍCULAS UNITARIAS 23

Concluimos finalmente que  $\Upsilon$  es diferenciable con inversa diferenciable, por lo tanto,  $\Upsilon$  es difeomorfismo. En particular,  $\Upsilon$  es homeomorfismo.

Esto significa que hemos conseguido identificar el espacio de retículas unitarias con el complemento de  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{S}^3$ . Esto es útil dado que  $\mathbb{S}^3$  es compacto y los cálculos en este tipo de espacios se facilitan. En el siguiente capítulo se verá que  $\mathbb{S}^3 \cap \mathcal{C}$  es un nudo trébol.





# Capítulo 3

## $\mathbb{S}^3$ y Retículas Unitarias

Un nudo matemático es la idea abstracta de un nudo normal en el que se pegan los extremos de la cuerda. Intuitivamente, un nudo es una curva cerrada en  $\mathbb{R}^3$  sin autointersecciones. La definición formal es la siguiente:

**Definición 3.0.1.** *El subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^3$  es un nudo si existe un homeomorfismo del círculo unitario  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$  en  $\mathbb{R}^3$  cuya imagen es  $K$ .*

A menudo los matemáticos prefieren considerar nudos encajados en la 3-esfera  $\mathbb{S}^3$ , más que en  $\mathbb{R}^3$ , dada la compacidad de ésta. La 3-esfera es la compactificación por un punto de  $\mathbb{R}^3$ .

En la siguiente figura podemos ver algunos ejemplos de nudos:

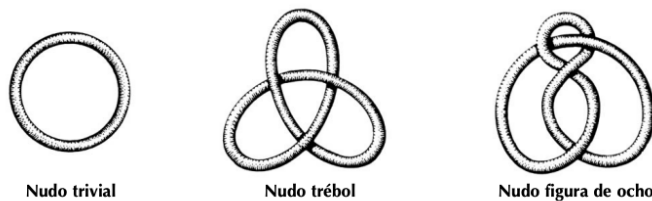


Figura 3.1: Fuente: <http://www.ehu.es/~mtwmastm/sigma20.pdf>

Al igual que en el Capítulo 2, en éste capítulo mostraremos un homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ , donde  $\mathcal{T}$  es el nudo trébol, y el espacio de retículas unitarias. Sin embargo, aquí se bosqueja una prueba nueva, haciendo uso de la geometría.

### 3.1. Región de Dirichlet y retículas

**Definición 3.1.1.** Al conjunto  $D_\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}, \|z\| \leq \|z - \gamma\|\}$  se le conoce como región de Dirichlet de la retícula  $\Gamma$ .

A continuación veamos que si  $\Gamma$  es una retícula, entonces la región de Dirichlet  $D_\Gamma$  tiene a lo más 6 lados. Para obtener  $D_\Gamma$ , buscamos aquellos  $v \in \Gamma$  tales que su mediatriz forma un lado de la región de Dirichlet. Es inmediato que tales  $v$  no pertenecen a la subretícula  $2\Gamma = \{v \in \Gamma : \exists u \in \Gamma, v = 2u\}$ . Debemos fijarnos entonces en el cociente  $\Gamma/2\Gamma$  del grupo abeliano  $\Gamma$ . Este cociente es un grupo que posee 4 elementos (Si  $u$  y  $v$  generan  $\Gamma$ , entonces las clases son  $u$ ,  $v$ ,  $u + v$  y  $0$ , pues para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $au + bv$  está en alguna de las clases anteriores).

**Observación 3.1.2.**  $v \in \Gamma$  es tal que su mediatriz forma un lado de  $D_\Gamma$  si y sólo si  $\pm v$  son los únicos de norma mínima en toda la clase  $v + 2\Gamma$ .

*Demostración.* Primero tenemos que notar que

1.  $x$  equidista de 0 y de  $v$  si y sólo si  $2x \cdot v = v \cdot v$ .

$$\begin{aligned} \|x\| = \|v-x\| &\Leftrightarrow \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{(v-x) \cdot (v-x)} = \sqrt{(v \cdot v) - 2(x \cdot v) + (x \cdot x)} \\ &\Leftrightarrow 0 = (v \cdot v) - 2(x \cdot v). \end{aligned}$$

2.  $x$  está más cerca de 0 que de  $v$  si y sólo si  $2x \cdot v \leq v \cdot v$ .
3. Si  $H_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \cdot v \leq v \cdot v\}$ , entonces  $D_\Gamma = \bigcap_{v \in \Gamma \setminus \{0\}} H_v$ .

( $\Rightarrow$ ) Procedemos por reducción al absurdo. Sea  $w$  en la clase de  $v + 2\Gamma$  (i.e.  $v - w \in 2\Gamma$ ) tal que  $w \neq \pm v$  y  $\|w\| \leq \|v\|$ . Entonces  $\zeta = (v - w)/2 \in \Gamma$  y  $\xi = (v + w)/2 \in \Gamma$ . Sea  $u \in H_\zeta \cap H_\xi$ , por definición  $2u \cdot \zeta \leq \zeta \cdot \zeta$  y  $2u \cdot \xi \leq \xi \cdot \xi$ , luego

$$\begin{aligned} 2u \cdot \zeta &= 2u \cdot \left(\frac{v-w}{2}\right) \leq \left(\frac{v-w}{2}\right) \cdot \left(\frac{v-w}{2}\right) = \zeta \cdot \zeta \\ &\Rightarrow u \cdot v - u \cdot w \leq \frac{1}{4}(v \cdot v - v \cdot w - w \cdot v + w \cdot w), \end{aligned}$$

y

$$2u \cdot \xi = 2u \cdot \left(\frac{v+w}{2}\right) \leq \left(\frac{v+w}{2}\right) \cdot \left(\frac{v+w}{2}\right) = \xi \cdot \xi$$

$$\Rightarrow u \cdot v + u \cdot w \leq \frac{1}{4}(v \cdot v + v \cdot w + w \cdot v + w \cdot w).$$

Lo que implica que  $4u \cdot v \leq v \cdot v + w \cdot w \leq 2v \cdot v$ . Es decir,  $u \in H_\zeta \cap H_\xi \Rightarrow u \in H_v$ , y por lo tanto no se necesita  $H_v$  en la intersección para definir  $D_\Gamma$ .

( $\Leftarrow$ ) Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $v/2$  no forma parte de un lado de  $D_\Gamma$ . Entonces existe  $w \in \Gamma \setminus \{0\}$  tal que  $v/2$  está fuera de  $H_w$  o en su frontera, i.e.  $v \cdot w \geq w \cdot w$ . Se sigue que  $\|v - 2w\|^2 \leq \|v\|^2$ , y por lo tanto  $(v - 2w) \in \Gamma$  y está igual o más cerca de 0 que  $\pm v$ .  $\square$

Concluimos que  $D_\Gamma$  tiene a lo más 6 lados, determinados por los elementos mínimos de cada clase en  $\Gamma/2\Gamma$  (Sección 48 en [4]).

**Proposición 3.1.3.** *Sea  $\Gamma_{(u,v)}$  una retícula unitaria generada por los vectores  $u$  y  $v$ , donde  $u, v \in \mathbb{C}$ . Entonces  $D_{\Gamma_{(u,v)}}$  es un hexágono cíclico o un rectángulo. Además  $D_{\Gamma_{(u,v)}}$  es centralmente simétrico, es decir, los segmentos homólogos son iguales y la medida de los ángulos correspondientes también es igual.*

*Demostración.* Diremos que  $\Gamma_{(u,v)}$  es *ortogonal* si existe alguna base ortogonal para  $\Gamma_{(u,v)}$ . Consideraremos 2 casos para probar que  $D_{\Gamma_{(u,v)}}$  es un hexágono cíclico o un rectángulo:  $\Gamma_{(u,v)}$  ortogonal o  $\Gamma_{(u,v)}$  no ortogonal. Denotemos por  $\vec{0}$  al origen de la retícula.

1.  $\Gamma_{(u,v)}$  ortogonal. Sea  $u', v' \in \mathbb{R}^2$  la base ortogonal. Es fácil notar que  $\pm u'$  y  $\pm v'$  son los vectores más cercanos a  $\vec{0}$ , aquí el mínimo de la clase de  $(u' + v')$  no se necesita para definir  $D_{\Gamma_{(u,v)}}$  (utilizando Teorema de Pitágoras). Entonces por cómo se define  $D_{\Gamma_{(u,v)}}$ , tenemos que ésta región será el área obtenida de intersectar las 4 mediatrices de los segmentos  $\|u'\|$ ,  $\|-u'\|$ ,  $\|v'\|$  y  $\|-v'\|$ . Lo que nos da como resultado que  $D_{\Gamma_{(u,v)}}$  será o bien un cuadrado o un rectángulo cuya área es la misma al área generada por los generadores de la retícula. Es inmediato que un rectángulo (o un cuadrado) es cíclico.

2.  $\Gamma_{(u,v)}$  no ortogonal. Primero hay que notar que  $D_{\Gamma_{(u,v)}}$  no puede tener menos de 3 lados como frontera pues  $u, v \in \mathbb{R}^2$  son linealmente independientes. Por la Observación 3.1.2, sabemos que  $D_{\Gamma_{(u,v)}}$  tiene un número par de lados (2 por cada mínimo de cada clase). Entonces si  $\Gamma_{(u,v)}$  es no ortogonal, su región de Dirichlet tiene 6 lados. Veamos ahora que tal hexágono es cíclico. Las mediatrices de los 6 elementos forman los lados del hexágono y la intersección de dichas mediatrices definen los vértices  $V_k$  del hexágono. Los  $V_k$  son circuncentros de triángulos semejantes, más aún, son triángulos

iguales. Por lo tanto, la distancia  $\|V_k\|$  es igual para todo  $k = 1, \dots, 6$ .

Finalmente,  $D_{\Gamma(u,v)}$  es centralmente simétrico, si  $v \in D_{\Gamma(u,v)}$  entonces  $-v \in D_{\Gamma(u,v)}$ . Esto debido a que  $\Gamma(u,v) = -\Gamma(u,v)$ . □

**Observación 3.1.4.** *Cada retícula unitaria está caracterizada por una única región de Dirichlet y ésta última se puede definir conociendo únicamente sus vértices que están sobre una circunferencia.*

Hasta este momento sabemos que podemos identificar retículas unitarias con hexágonos cíclico (o rectángulos). Para facilitar cálculos futuros, es conveniente que re-escalemos cada región de Dirichlet para hacerla encajar en un círculo unitario.

**Definición 3.1.5.** *Sea  $\Gamma \in \mathcal{U}$  y  $D_\Gamma$  su región de Dirichlet. Denotaremos  $\hat{D}_\Gamma$  a la región de Dirichlet de  $\Gamma$  inscrita en el círculo unitario.*

A partir de ahora haremos uso de todas las características de la región de Dirichlet de las retículas unitarias descritas anteriormente.

**Observación 3.1.6.** *Gracias a que la región de Dirichlet está canónicamente asociada a  $\Gamma$ , definiremos  $\hat{D}_\Gamma = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3})$  donde  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \pi$ . Cada  $e^{i\theta_k}$  representa un vértice de la región de Dirichlet.*

Sean  $\mathcal{D} = \{\hat{D}_\Gamma \subset \mathbb{C} : \Gamma \in \mathcal{U}\}$ . Sea  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  la función definida de la siguiente manera:

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{e^{i\theta_1} + \lambda e^{i\theta_2} + \lambda^2 e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_1} + \lambda^5 e^{i\theta_2} + \lambda^4 e^{i\theta_3}},$$

donde  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \pi$  y  $\lambda^k = e^{\frac{2\pi ik}{6}}$  para,  $k = 1, 2, \dots, 6$  (raíces sextas de la unidad).

**Observación 3.1.7.** *Es sencillo notar que  $F$  es invariante bajo rotación, es decir,  $\forall \phi \in [0, 2\pi]$ ,  $F(\theta_1 + \phi, \theta_2 + \phi, \theta_3 + \phi) = F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Entonces si rotamos por  $\phi = -\theta_1$  para conseguir  $e^{i\theta_1} = 1$ , reducimos nuestro problema a 2 variables en lugar de 3.*

Con la observación anterior podemos redefinir  $F$  a la siguiente función  $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$f(\phi_1, \phi_2) = \frac{1 + \lambda e^{i\phi_1} + \lambda^2 e^{i\phi_2}}{1 + \lambda^5 e^{i\phi_1} + \lambda^4 e^{i\phi_2}},$$

donde  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \pi$ . Teniendo finalmente que  $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = f(\phi_1, \phi_2)$ .

Para entender un poco mejor a la función  $f$ , mostraremos algunos valores que destacan de ella.

1. Sea  $l_1 = \{(\phi_1, \phi_1) \mid \phi_1 \in [0, \pi]\}$ ,  $l_2 = \{(0, \phi_2) \mid \phi_2 \in [0, \pi]\}$ , y por último  $l_3 = \{(\phi_1, \pi) \mid \phi_1 \in [0, \pi]\}$ . Cada punto  $(\phi_1, \phi_2) \in l_1 \cup l_2 \cup l_3$  representa un rectángulo en  $\mathcal{D}$ . Además, los puntos  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  son el mismo cuadrado en  $\mathcal{D}$ .
2.  $f[l_1]$  es la línea curva que va de  $\lambda^2$  a  $\lambda^4$  representada en la Figura 3.1. Así mismo,  $f[l_2]$  es la línea curva que va de 1 a  $\lambda^2$  y  $f[l_3]$  es la línea curva que va de  $\lambda^4$  a 1.
3. La imagen del cuadrado  $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$  (representado con un punto azul en la Figura 3.1) y del hexágono regular  $f(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = 0$  (representado con un punto negro en la Figura 3.1).

Ahora que conocemos un poco más sobre la función  $f$ , daremos una idea para ver que en efecto, lo que se muestra en la Figura 3.1 es la imagen de  $f$ .

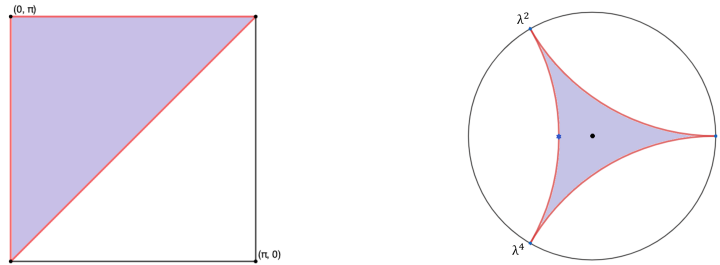


Figura 3.2: El triángulo morado junto con las 3 líneas rojas son el dominio de la función  $f$ , mientras que en la segunda imagen se muestra la imagen de  $f$  en  $\mathbb{C}$  pintada también con morado el interior y bordes rojos.

Como lo mencionamos anteriormente, las rectas en “rojo”  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  del dominio van a dar a las semicurvas en “rojo”. Además, la función  $f$  es continua y va de un compacto a un espacio Hausdorff. Por lo tanto es homeomorfismo sobre la imagen de  $f$ . Y esto nos ayuda para concluir que los puntos interiores en el dominio van a dar a puntos interiores en la imagen.

Lo que queremos conseguir es una correspondencia entre regiones de Dirichlet y un subconjunto de  $\mathbb{C}$ . Sin embargo, hay varios elementos en el dominio

de  $f$  que representan la misma región de Dirichlet. Por ejemplo,  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(0, \frac{\pi}{2})$  y  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ , todos ellos representan el mismo cuadrado, o por ejemplo,  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  y  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  representan al mismo rectángulo. La siguiente observación nos da una idea más clara de lo que necesitamos para obtener esa biyección deseada.

**Observación 3.1.8.**  *$f$  considera cierto orden en los vértices. Sin embargo, la región de Dirichlet que caracteriza a una retícula unitaria no lo hace. Consideremos  $\mathcal{P}$  al conjunto de permutaciones de los vértices. La manera de evitar contar varias veces un mismo hexágono (o rectángulo) es fijarnos mejor en (ver la Figura 3.3)*

$$f[[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]]/\mathcal{P}.$$

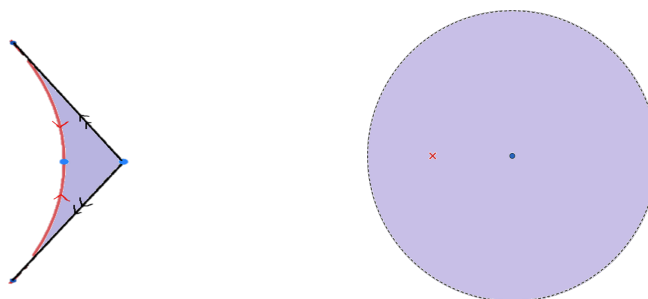


Figura 3.3: La primer figura muestra la imagen de  $f$  módulo las permutaciones de los vértices. Y la segunda figura representa la misma imagen pegando los lados correspondientes.

Dada una región de Dirichlet  $\hat{D}_\Gamma$  y un ángulo  $\theta \in [0, \pi]$ , podemos rotar  $\theta$  grados a  $\hat{D}_\Gamma$ , entonces la región resultante,  $\hat{D}_{\Gamma_\theta}$ , en general no representa a la misma retícula. Sin embargo, hay dos excepciones. El hexágono regular basta rotarlo  $\pi/3$  y  $2\pi/3$  para volver a obtener el mismo hexágono original, y el cuadrado se necesita rotarlo  $\pi/2$  y regresa a su posición original. Esto implica que el espacio de retículas unitarias  $\mathcal{U}$  está “fibrado” por círculos que corresponden a éstas rotaciones (topológicamente son círculos, en realidad demostraremos más adelante que se tratan de nudos trébol), y hay 2 fibras singulares: la del hexágono regular y la del cuadrado (que demostraremos después que a diferencia de ser nudos trébol, estos sí son círculos). Por lo tanto, las regiones de Dirichlet están compuestas de un disco pinchado de círculos, y dos de esos círculos son singulares.

### 3.2. $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$

Estudiaremos por otro lado a  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$  y su relación con el disco especial que acabamos de identificar.

Sea  $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$ . Sea  $G : \mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  función definida como  $G(z, w) = \frac{w^2}{z^3}$ . Más adelante probaremos que  $\mathbb{S}^3 \cap \mathcal{C}$  es el nudo trébol  $\mathcal{T}$ .

**Proposición 3.2.1.** *Supongamos  $\zeta \in \mathbb{R}^+$ . Entonces el conjunto  $\mathbb{T} = \{(z, w) \in \mathbb{S}^3 : \|\frac{w^2}{z^3}\| = \zeta\}$  es un toro encajado de la manera usual en  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demostración.* Podemos pensar a  $z = se^{i\theta}$  y  $w = re^{i\phi}$ . Al tomarnos el módulo  $\|\frac{w^2}{z^3}\|$  estamos fijando la norma y por consiguiente variamos solamente los ángulos de  $z$  y  $w$ . Entonces,  $z$  y  $w$  son valores que dependen sólo de  $\phi$  y  $\theta$  y que varían entre 0 y  $2\pi$ . Ahora, para ver que  $\mathbb{T}$  es realmente un toro, es necesario visualizarlo en  $\mathbb{R}^3$  con la proyección estereográfica pues los elementos de  $\mathbb{T}$  están en  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ .

**Proyección estereográfica** (Desde el punto  $(0,0,0,1)$ ). Sea  $P : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la proyección estereográfica tal que  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto u = \frac{1}{1-x_4}(x_1, x_2, x_3)$ . Utilizaremos coordenadas polares para simplificar los siguientes cálculos, entonces tenemos que

$$P(x) = \frac{1}{1 - \rho \sin(\phi)} (\sigma \cos(\theta), \sigma \sin(\theta), \rho \cos(\phi)),$$

donde  $x = (\sigma \cos \theta, \sigma \sin \theta, \rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$  y  $\sigma^2 + \rho^2 = 1$ . Fijemos  $\theta$ , demostraremos que la proyección al intersectarla con el plano  $\{(x \cos(\theta), x \sin(\theta), y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  resulta ser una circunferencia.

La intersección satisface que

$$\frac{\sigma \cos(\theta)}{1 - \rho \sin(\phi)} = x \cos(\theta) \quad y \quad \frac{\rho \cos(\phi)}{1 - \rho \sin(\phi)} = y.$$

De aquí que,  $x = \frac{\sigma}{1 - \rho \sin(\phi)}$  y  $y = \frac{\rho \cos(\phi)}{1 - \rho \sin(\phi)}$ . Consideremos  $h = \frac{\sigma}{1 - \rho^2}$ .

$$\begin{aligned}
(x-h)^2 + y^2 &= \left( \frac{\sigma}{1-\rho \sin(\phi)} - \frac{\sigma}{1-\rho^2} \right)^2 + \left( \frac{\rho \cos(\phi)}{1-\rho \sin(\phi)} \right)^2 \\
&= \frac{\sigma^2(1-\rho^2-1+\rho \sin(\phi))^2}{(1-\rho \sin(\phi))^2(1-\rho^2)^2} + \left( \frac{\rho \cos(\phi)}{1-\rho \sin(\phi)} \right)^2 \\
&= \frac{(-\rho^2 + \rho \sin(\phi))^2}{(1-\rho \sin(\phi))^2(1-\rho^2)} + \frac{(\rho \cos(\phi))^2}{(1-\rho \sin(\phi))^2}.
\end{aligned}$$

En esta última igualdad, se utilizó el hecho de que  $\sigma^2 = 1 - \rho^2$  en el primer sumando.

$$\begin{aligned}
&\frac{(-\rho^2 + \rho \sin(\phi))^2}{(1-\rho \sin(\phi))^2(1-\rho^2)} + \frac{(\rho \cos(\phi))^2}{(1-\rho \sin(\phi))^2} \\
&= \frac{\rho^4 - 2\rho^3 \sin(\phi) + \rho^2 \sin^2(\phi) + \rho^2 \cos^2(\phi)(1-\rho^2)}{(1-\rho \sin(\phi))^2(1-\rho^2)} \\
&= \frac{\rho^4 \sin^2(\phi) - 2\rho^3 \sin(\phi) + \rho^2}{(1-\rho \sin(\phi))^2(1-\rho^2)} \\
&= \frac{(\rho - \rho^2 \sin(\phi))^2}{(1-\rho \sin(\phi))^2(1-\rho^2)} \\
&= \frac{\rho^2(1-\rho \sin(\phi))^2}{(1-\rho \sin(\phi))^2(1-\rho^2)} = \frac{\rho^2}{1-\rho^2}.
\end{aligned}$$

De hecho  $\frac{\rho^2}{1-\rho^2} = \left(\frac{\sigma\rho}{1-\rho^2}\right)^2$  usando nuevamente que  $\sigma^2 = 1 - \rho^2$ . Entonces,  $x$  y  $y$  satisfacen la ecuación de una circunferencia con centro en  $(\frac{\sigma}{1-\rho^2}, 0)$  y radio  $\frac{\sigma\rho}{1-\rho^2}$ . De ésta manera al variar ahora  $\theta \in [0, 2\pi]$  concluimos que el conjunto  $\sigma^2 + \rho^2 = 1$  determina en  $\mathbb{R}^3$  bajo proyección estereográfica un toro de revolución, es decir, un toro encajado de manera usual en  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Proposición 3.2.2.**  $\mathbb{S}^3 \cap \mathcal{C}$  es el nudo trébol.

*Demostración.* Sean  $z = se^{i\theta}, w = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$  y consideremos la pareja  $(z, w) \in \mathbb{S}^3 \cap \mathcal{C}$ . Entonces,  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$  si y sólo si  $s^2 + r^2 = 1$  y  $(z, w) \in \mathcal{C}$  si y sólo si  $z^3 - 27w^2 = 0$ , es decir,  $e^{i(3\theta-2\phi)} = 27\frac{r^2}{s^3}$ . Dado que  $r, s \in \mathbb{R}^+$ , entonces tiene que pasar que  $3\theta - 2\phi \equiv 0 \pmod{2\pi}$  y  $27\frac{r^2}{s^3} = 1$  por lo que  $r^2 = s^3/27$ . De esta manera, obtenemos que  $s^2 + s^3/27 = 1$ . Sea  $f(s) = s^3 + 27s^2 - 27$ ,  $f$  es una función monótona creciente dado que  $f' > 0$ , para  $s \in \mathbb{R}^+$  y además  $f$



es acotada; por lo tanto,  $s$  es una constante bien definida y por consiguiente también lo es  $r$ . Así,  $z$  se mueve en una circunferencia de radio  $s$  fijo y  $w$  en una de radio  $r$  fijo. Por la Proposición 3.2.1,  $(z, w)$  esta en un toro encajado de la manera usual en  $\mathbb{R}^3$  parametrizado por  $(\theta, \phi)$  en donde  $3\theta - 2\phi \equiv 0 \pmod{2\pi}$  determina el nudo trébol (ver la Figura 3.4).  $\square$

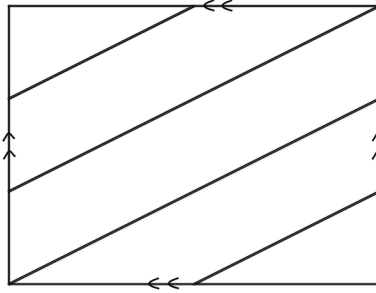


Figura 3.4: Nudo Trébol. La curva  $3\theta - 2\phi = 0$  en el cuadrado  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  pasa 3 veces por el eje  $\theta$  y 2 por el eje  $\phi$ . Al hacer el pegado resulta el nudo trébol.

Definamos una función  $\mathcal{A} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $\mathcal{A}(t, (z, w)) = (e^{2it}z, e^{3it}w)$ . Entonces,  $\mathcal{A}$  define una acción de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{S}^3$ .

**Definición 3.2.3.** Sea  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$  y  $\{\mathcal{A}(t, (z, w)) \in \mathbb{S}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$  órbita periódica de  $(z, w)$ , es decir, existe  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 > 0$  tal que  $\mathcal{A}(t_0, (z, w)) = (z, w)$ . Si  $t_0$  es el valor mínimo que cumple  $\mathcal{A}(t_0, (z, w)) = (z, w)$ , entonces a  $t_0$  le llamaremos periodo de la órbita de  $(z, w)$ .

**Afirmación 3.2.4.** Para todo  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ , la órbita de  $(z, w)$  es periódica bajo la acción de  $\mathcal{A}$ . Más aún,

1. El periodo para toda órbita de  $(z, w) \neq (z, 0), (0, w)$  es  $2\pi$ .
2. Existen 2 valores  $(z, 0)$  y  $(0, w)$  cuyas órbitas son especiales. El periodo para la órbita de  $(z, 0)$  es  $\pi$  y de  $(0, w)$  es  $2\pi/3$ .

*Demostración.* **1.** Sea  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ . Es fácil notar que  $2\pi$  sí cumple que  $\mathcal{A}(2\pi, (z, w)) = (z, w)$  por lo tanto la órbita de  $(z, w)$  es periódica. Falta verificar que en efecto  $2\pi$  es el periodo. Buscamos el  $\min\{t_0 \in \mathbb{R} \mid t_0 > 0 \text{ y } \mathcal{A}(t_0, (z, w)) = (z, w)\}$ . Los elementos de ese conjunto cumplen que  $e^{2it_0} = 1$  y  $e^{3it_0} = 1$ , y por lo tanto  $2t_0 = 2\pi k_1$  y  $3t_0 = 2\pi k_2$  para algunos  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

Finalmente,  $t_0 = 2\pi$  es el mínimo real positivo que satisface  $t_0 = 2\pi(k_2 - k_1)$ .  
**2.** Al igual que en 1., es claro que  $\mathcal{A}(\pi, (z, 0)) = (z, 0)$  y  $\mathcal{A}(2\pi/3, (0, w)) = (0, w)$ . Y por lo tanto la órbita de  $(z, 0)$  y de  $(0, w)$  son periódicas. El periodo de la órbita de  $(z, 0)$  cumple la ecuación  $e^{2it_0} = 1$ , así que el  $t_0$  mínimo positivo que lo cumple es  $\pi$ . De igual manera, el periodo de la órbita de  $(0, w)$  cumple la ecuación  $e^{3it_0} = 1$ , así que el  $t_0$  mínimo positivo que lo cumple es  $2\pi/3$ .  $\square$

**Observación 3.2.5.** *La acción  $\mathcal{A}$  respeta fibras bajo la función  $G$  que ya definimos al inicio de esta sección.*

*Demostración.* Sean  $(z_1, w_1)$  y  $(z_2, w_2)$  en  $\mathbb{S}^3$ .

**1.** Mostraremos que si  $G(z_1, w_1) = G(z_2, w_2)$  entonces existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{A}(t_0, (z_1, w_1)) = (z_2, w_2)$ . Supongamos que  $(z_1, w_1) = (\sigma_1 e^{i\phi_1}, \sigma_2 e^{i\phi_2})$  y  $(z_2, w_2) = (\rho_1 e^{i\psi_1}, \rho_2 e^{i\psi_2})$  y además  $G(z_1, w_1) = G(z_2, w_2) = \alpha$ , donde  $\alpha = re^{i\theta}$ . Como vimos antes si  $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1$  y  $\|G(z_2, w_2)\| = \|\frac{w_2^2}{z_2^3}\| = \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = r$  entonces,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  están bien determinadas, por lo tanto, si  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$  y  $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = r$  es porque  $\rho_1 = \sigma_1$  y  $\rho_2 = \sigma_2$ . Por otro lado,  $2\phi_2 - 3\phi_1 \equiv \theta \equiv 2\psi_2 - 3\psi_1 \pmod{2\pi}$ . De aquí, existe  $K$  tal que  $2\pi K = 2(\psi_2 - \phi_2) - 3(\psi_1 - \phi_1)$ . Proponemos el  $t_0$  buscado como  $\frac{\psi_1 - \phi_1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t_0, (z_1, w_1)) &= (e^{2i(\frac{\psi_1 - \phi_1}{2})} \sigma_1 e^{i\phi_1}, e^{3i(\frac{\psi_1 - \phi_1}{2})} \sigma_2 e^{i\phi_2}) \\ &= (\sigma_1 e^{i(\psi_1 - \phi_1 + \phi_1)}, \sigma_2 e^{i\frac{3}{2}(\psi_1 - \phi_1) + i\phi_2}) \\ &= (\sigma_1 e^{i\psi_1}, \sigma_2 e^{i(\psi_2 - \phi_2 - \pi K + \phi_2)}) \\ &= (\sigma_1 e^{i\psi_1}, \sigma_2 e^{i\psi_2} e^{-i\pi K}). \end{aligned}$$

Ahora, hay 2 casos posibles:

Si  $K$  es par: Entonces,  $(\sigma_1 e^{i\psi_1}, \sigma_2 e^{i\psi_2} e^{-i\pi K}) = (\rho_1 e^{i\psi_1}, \rho_2 e^{i\psi_2}) = (z_2, w_2)$ .

Si  $K$  es impar: Entonces,  $(\sigma_1 e^{i\psi_1}, \sigma_2 e^{i\psi_2} e^{-i\pi K}) = (\rho_1 e^{i\psi_1}, -\rho_2 e^{i\psi_2}) = (z_2, -w_2)$ , finalmente para ver que  $(z_2, -w_2)$  y  $(z_2, w_2)$  pertenecen a la misma órbita, tomemos  $t_0 = \pi$ .

**2.** Mostraremos que si para  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}(t_0, (z_1, w_1)) = (z_2, w_2)$  y además  $\alpha = G(z_1, w_1)$ , entonces  $G(z_2, w_2) = \alpha$ .

$$G(z_2, w_2) = \frac{w_2^2}{z_2^3} = \frac{(e^{3it_0} w_1)^2}{(e^{2it_0} z_1)^3} = \frac{e^{6it_0} w_1^2}{e^{6it_0} z_1^3} = \frac{w_1^2}{z_1^3} = \alpha.$$

$\square$

**Proposición 3.2.6.** *Para cada  $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$  existe una órbita periódica  $\mathcal{O}$  tal que  $G[\mathcal{O}] = \alpha$ .*

*Demostración.* Basta probar que existe  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$  tal que  $G(z, w) = \alpha$ . Tomar  $(z, w) = (1, |\alpha|^{1/2} e^{\frac{i \operatorname{Arg}(\alpha)}{2}})$ .  $\square$

**Afirmación 3.2.7.**  $G^{-1}(\alpha)$  es un nudo trébol para todo  $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ ,  $\alpha \neq 0, \infty$ . Además,  $G^{-1}(0)$  y  $G^{-1}(\infty)$  son nudos triviales.

*Demostración.* Bosquejaremos la idea de la demostración.

Por un lado, por Proposición 3.2.6 ya sabemos que  $G^{-1}(\alpha)$  es una órbita periódica para todo  $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ . Pero falta ver que esta órbita periódica es un nudo trébol o un nudo trivial en el caso de 0 y  $\infty$ .

Veamos primero que  $G^{-1}(\alpha)$  es un nudo trébol. Supongamos  $\alpha = \rho e^{i\psi}$ . Sean  $z = s e^{i\theta}$  y  $w = r e^{i\phi}$  tales que  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$  (i.e  $s^2 + r^2 = 1$ ) y además  $\frac{w^2}{z^3} = \alpha$ . Parecido a como se demostró en la Proposición 3.2.2, podemos deducir que  $r$  y  $s$  son constantes bien determinadas y también que  $2\phi - 3\theta \equiv \psi \pmod{2\pi}$ . Por lo tanto, por Proposición 3.2.1  $(z, w)$  está en un toro encajado de la manera estándar en  $\mathbb{R}^3$  parametrizado por  $(\theta, \phi)$  en donde  $2\phi - 3\theta \equiv \psi \pmod{2\pi}$ . Para notar que es un nudo trébol, en vez de pensar en el dominio usual  $\phi \in [0, 2\pi]$ , pensemos  $\phi \in [\frac{\psi}{2}, 2\pi + \frac{\psi}{2}]$ . Así, la curva  $2\phi - 3\theta - \psi = 0$  pasa 3 veces por el eje  $\theta$  y 2 por el eje  $\phi$ .

Ahora,  $G^{-1}(0) = \{(z, 0) \in \mathbb{S}^3\}$ . Si  $z = s e^{i\theta}$ , debe pasar  $s^2 = 1 \Rightarrow s = 1$ . Por lo tanto, por Proposición 3.2.1  $(z, 0)$  ésta en un toro encajado de la manera estándar en  $\mathbb{R}^3$  parametrizado únicamente por  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

$G^{-1}(\infty) = \{(0, w) \in \mathbb{S}^3\}$ . Si  $w = r e^{i\phi}$ , debe pasar  $r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$ . Por lo tanto, por Proposición 3.2.1  $(0, w)$  ésta en un toro encajado de la manera estándar en  $\mathbb{R}^3$  parametrizado únicamente por  $\phi \in [0, 2\pi]$ .  $\square$

**Proposición 3.2.8.**  $\mathbb{S}^3$  es la unión de dos toros sólidos  $\mathbb{T}_1$  y  $\mathbb{T}_2$ , de tal manera que el meridiano y la longitud de  $\mathbb{T}_1$  se identifican con el meridiano y la longitud de  $\mathbb{T}_2$ , respectivamente.

*Demostración.* Tomemos el disco sólido unitario en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Su preimagen bajo  $G$  es un toro sólido, llamémosle  $\mathbb{T}_1$ , relleno de puros nudos trébol (Proposición 3.2.7) y cuya alma es  $G^{-1}(0)$  que es un nudo trivial. Ahora, si tomamos  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\text{Disco unitario}\}$  es otro disco. Su preimagen bajo  $G$  es nuevamente un toro sólido, llamémosle  $\mathbb{T}_2$ , relleno también de nudos trébol y cuya alma es  $G^{-1}(\infty)$ .  $\square$

Lo que hemos hecho hasta este punto es probar que  $\mathbb{S}^3$  también tiene estructura especial sobre  $\mathbb{S}^2$  con 2 círculos singulares. Por lo tanto,  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$  tiene

estructura de un disco perforado de círculos, donde dos de esos son círculos especiales.

Al finalizar la sección anterior, concluimos que las regiones de Dirichlet unitarias poseen también estructura de disco abierto con 2 círculos singulares “de la misma manera” que  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ .

Hay un teorema de 3-variedades (Teorema de las fibraciones de Seifert) que dice que dado que éstas 2-variedades tienen estructuras “iguales”, entonces son homeomorfas. Podemos concluir entonces que las retículas unitarias se corresponden con  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ . Recordar que ésta es una manera nueva de probar esta correspondencia y no estamos entrando en los detalles técnicos sobre las variedades.

# Capítulo 4

## Nudos en el complemento del nudo trébol

En éste capítulo se darán algunas definiciones importantes para definir un sistema dinámico en el espacio de retículas, así como la forma en que el flujo de retículas unitarias representa nudos en el complemento del nudo trébol (Ver [3]).

### 4.1. Órbitas periódicas y matrices hiperbólicas

Sea  $\phi : \mathbb{R} \times SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  la función tal que  $\phi(t, [A]) = [\delta(t)A]$ , donde  $\delta(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ . Entonces  $\phi$  define una acción de  $\mathbb{R}$  en  $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ , es decir,  $\phi(0, [A]) = [A]$  y  $\phi(t, \phi(s, [A])) = \phi(s + t, [A])$ .

**Observación 4.1.1.**  $\phi(t, \cdot)$  es una función biyectiva para  $t \in \mathbb{R}$  fijo.

*Demostración.* Sea  $t \in \mathbb{R}$ . Sean  $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$  tales que  $[\delta(t)A] = [\delta(t)B]$ . Entonces,  $[A] = \phi(-t + t, [A]) = \phi(-t, \phi(t, [A])) = \phi(-t, \phi(t, [B])) = \phi(-t + t, [B]) = [B]$ .

Ahora, sea  $C \in SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ . Falta ver que existe un  $A \in SL_2(\mathbb{R})$  tal que  $\phi(t, [A]) = [C]$ . Si proponemos  $[A] = \phi(-t, [C])$ , entonces  $\phi(t, [A]) = \phi(t, \phi(-t, [C])) = [C]$ .  $\square$

Ahora veremos que existe una correspondencia entre órbitas periódicas y matrices hiperbólicas.

**Definición 4.1.2.** *La órbita de  $[A] \in SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  es el conjunto  $\{\phi(t, [A]) : t \in \mathbb{R}, [A] \text{ fijo}\}$ . Una órbita es llamada periódica si existe  $t_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$  tal que  $\phi(t_0, [A]) = [A]$ .*

**Definición 4.1.3.** *Si  $M \in SL_2(\mathbb{Z})$  tiene valores propios reales distintos entonces decimos que  $M$  es una matriz hiperbólica.*

Notar que un elemento  $A \in SL_2(\mathbb{R})$  define un elemento en  $SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  el cual tiene una órbita periódica si  $\delta(t)A = AC$  para algún  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$ , lo que significa que  $ACA^{-1}$  es diagonal.

Estas órbitas periódicas son muy interesantes pues también se encuentran en muchas otras áreas: geodésicas cerradas en la superficie modular, fracciones continuas, clases ideales en campos cuadráticos, etc.

**Proposición 4.1.4.** *Existe una biyección natural entre órbitas periódicas de  $\phi$  y las clases de conjugación de matrices hiperbólicas en  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Tal biyección es dada por  $\{[\delta(t)A] : t \in \mathbb{R}, [A] \text{ fijo y para } t_0 > 0 \delta(t_0)A = AC\} \mapsto [C]$ .*

**Lema 4.1.5.** *Sean  $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$  y  $t, s \in \mathbb{R}$  tales que  $[A] = [\delta(t)A]$  y  $[B] = [\delta(s)A]$ . Entonces  $[\delta(t)B] = [B]$ .*

*Demostración.*  $[\delta(t)B] = [\delta(t)\delta(s)A] = [\delta(s)\delta(t)A] = [\delta(s)A] = [B]$ .  $\square$

**Lema 4.1.6.** *Sean  $X, Y \in SL_2(\mathbb{R})$  tal que  $Y$  es diagonal con entradas distintas. Entonces  $X^{-1}YX = Y$  implica que  $X$  es diagonal.*

*Demostración.* Sea  $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  y  $Y = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ . Entonces  $X^{-1}YX = Y \Rightarrow YX = XY$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} aw & cw \\ bz & dz \end{pmatrix} = YX = XY = \begin{pmatrix} aw & cz \\ bw & dz \end{pmatrix}.$$

Así  $cw = cz$  y  $bz = bw$ , como  $w \neq z$  entonces  $b = c = 0$ .  $\square$

*Demostración de Proposición 4.1.4.* Para ver que es una función bien definida, pensemos en  $[A], [B] \in SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  elementos de una misma órbita periódica, es decir,  $\delta(t_0)A = AC$  para  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$  y  $[B] = [\delta(s)A]$  para algún  $s \in \mathbb{R}$ . Por el Lema 4.1.5, sabemos entonces que  $[\delta(t_0)B] = [B]$ . Sea  $D \in SL_2(\mathbb{Z})$  tal que  $\delta(t_0)B = BD$ . Comprobaremos que en efecto,  $C \sim D$ . Como  $[B] = [\delta(s)A]$  entonces existe  $H \in SL_2(\mathbb{Z})$  tal que  $BH = \delta(s)A$ . Ahora,  $C = A^{-1}\delta(t_0)A$  y  $D = B^{-1}\delta(t_0)B$  y utilizando las relaciones que acabamos de establecer

$$D = HA^{-1}\delta(s)^{-1}\delta(t_0)\delta(s)AH^{-1} = HA^{-1}\delta(t_0)AH^{-1} = HCH^{-1},$$

por lo tanto  $C \sim D$ .

**Inyectividad.** Sean  $C, D \in SL_2(\mathbb{Z})$  tales que  $C \sim D$ , es decir,  $H^{-1}CH = D$  para algún  $H \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Supongamos que  $C$  define la órbita de  $[A] \in SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$  y que  $D$  define la órbita de  $[B] \in SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z})$ . Notar que como  $C$  y  $D$  son conjugadas entonces, la diagonalización de ambas debe de coincidir. Sea  $\delta(t_0)$  la matriz diagonal de  $C$  y  $D$ . Veamos que  $[A]$  y  $[B]$  están en la misma órbita. Entonces,  $H^{-1}CH = D \Rightarrow H^{-1}A^{-1}\delta(t_0)AH = B^{-1}\delta(t_0)B$  y  $BH^{-1}A^{-1}\delta(t_0)AHB^{-1} = \delta(t_0)$ . Sea  $K = AHB^{-1}$ . Por Lema 4.1.6,  $K$  es diagonal con determinante 1. Así  $K = \delta(s)^{-1}$  para algún  $s \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,

$$K = \delta(s)^{-1} = AHB^{-1} \Rightarrow B = \delta(s)AH \Rightarrow [B] = [\delta(s)A].$$

Esto significa que  $A, B$  pertenecen a la misma órbita periódica.

**Suprayectividad.** Sea  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$  matriz hiperbólica y sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $C$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Hay que probar que existe  $A \in SL_2(\mathbb{R})$  y  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $C = A^{-1}\delta(t_0)A$ . Es casi inmediato encontrar una matriz  $U$  tal que  $\det U = \pm 1$  y que diagonaliza a  $C$ , es decir,  $C = U\delta(t)U^{-1}$ . Entonces, tenemos 2 casos:

**Caso 1.**  $\det U = 1$ . Entonces escogemos  $A = U^{-1}$ , así  $A \in SL_2(\mathbb{R})$ , y

$C = A^{-1}\delta(t)A$ . Además  $\delta(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  y  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  por lo tanto existe

$t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $t_0 = \ln(\lambda_1)$ . De manera que  $\delta(t_0) = \begin{pmatrix} e^{t_0} & 0 \\ 0 & e^{-t_0} \end{pmatrix}$ .

**Caso 2.**  $\det U = -1$ . Supongamos  $U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ , entonces consideremos

$B = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix}$ . Ahora  $B \in SL_2(\mathbb{R})$  y estamos nuevamente en el Caso 1.

□

La Proposición 4.1.4 nos dice que cada matriz hiperbólica define una órbita periódica en el flujo de retículas.

## 4.2. Nudos

Sea  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$  matriz hiperbólica. Sean  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$  y  $t_0 \in \mathbb{R}$  tales que  $\delta(t_0) = ACA^{-1}$ , es decir, la órbita de  $[A]$  es periódica. La trayectoria de la órbita de  $[A]$  es una curva cerrada en el espacio de retículas unitarias descritas por  $\phi(t, [A])$  donde  $t$  varía en  $\mathbb{R}$ . Dado que retículas unitarias se corresponden con  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$ , ésta curva cerrada define un **nudo** en el complemento del nudo trébol.

**Definición 4.2.1.** Dado  $C \in SL_2(\mathbb{Z})$ , denotaremos  $\mathbf{K}_C$  al nudo en  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{T}$  asociado a la matriz hiperbólica  $C$ .

A pesar de que en la teoría no resulta complicado pensar que topológicamente existen nudos asociados a matrices hiperbólicas, en la práctica es casi imposible determinar qué son estos nudos siguiendo éste método. Esto debido a que  $g_2$  y  $g_3$  no son series fáciles de calcular.

A continuación un ejemplo que ayuda a esclarecer lo anterior.

**Ejemplo.** Sea  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$  (notar que es una matriz cuyas entradas son números pequeños). Los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $C$  son  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

La matriz  $A \in SL_2(\mathbb{R})$  tal que  $ACA^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} & -1 \end{pmatrix}.$$

Nota:  $C$  define una órbita periódica en el flujo de  $A$  y para  $t_0 = \ln(\lambda_1)$ ,

$$\delta(t_0)A = \begin{pmatrix} \frac{-7-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})} & \frac{-3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{-7+3\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,89443 & -1,17082 \\ 0,23607 & -0,38197 \end{pmatrix}.$$



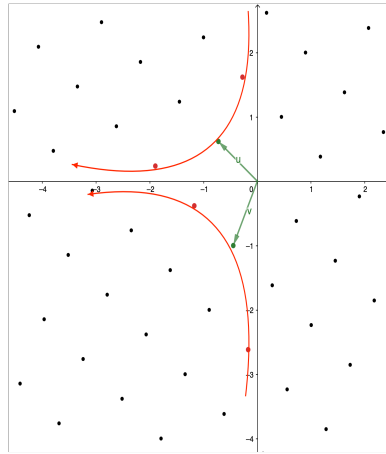


Figura 4.1: Flujo de la retícula  $A$  asociada a la matriz hiperbólica  $C$  del Ejemplo. Los vectores  $u$  y  $v$  son los generadores de la retícula  $A$ .

Imaginen ahora tener que calcular  $g_2$  y  $g_3$  para todo  $\delta(t)A$  donde  $t \in [0, \ln(\lambda_1)]$ .

Topológicamente, cada uno de los nudos  $\mathbf{K}_C$  en  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ , obtenidos de dotar con un flujo a las retículas unitarias, están enlazados con el nudo trébol proveniente de la cúbica  $\mathcal{C}$ . Finalmente, existe toda una rama de la topología que estudia los nudos y sus propiedades tan importantes en muchas áreas de las matemáticas.



# Lista de Símbolos

- $\Gamma_{(u,v)}$  – Retícula generada por los vectores  $u$  y  $v$ .
- $\mathcal{U}$  – Conjunto de retículas unitarias.
- Möb – Grupo modular.
- $\mathbb{S}^3$  – Esfera unitaria  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$ .
- $\mathcal{T}$  – Nudo trébol.
- $D_\Gamma$  – Región de Dirichlet de la retícula  $\Gamma$ .
- $\hat{D}_\Gamma$  – Región de Dirichlet de la retícula  $\Gamma$  inscrita en el círculo unitario.
- $\mathcal{D}$  – Conjunto  $\{\hat{D}_\Gamma : \Gamma \in \mathcal{U}\}$ .
- $\mathcal{C}$  – Cúbica  $\{(3t^2, t^3) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}\}$ .
- $g_2, g_3$  – Series de Eisenstein.
- $\Upsilon$  – Función que define homeomorfismo entre retículas unitarias y  $\mathbb{S}^3 \setminus \mathcal{C}$ .
- $K_C$  – Nudo asociado a la matriz hiperbólica  $C$ .



# Bibliografía

- [1] Apostol, T. M. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, 2ª edición, Editorial Board 1990.
- [2] Ghys. E. *Lorenz and Modular Flows: A Visual Introduction*, American Mathematical Society, Noviembre 2006.  
<http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-lorenz>
- [3] Ghys. E. *Knots and dynamics*. International Congress of Mathematicians. Vol I Eur. Math Soc., Zürich 2006. Sección 3.1.  
<http://www.icm2006.org/proceedings/Vol.I/15.pdf>
- [4] Voronoi, G. *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs*. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Vol. 134, 1908. Páginas 277 y 278.