



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS  
MAT. "LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

UNA DESCOMPOSICIÓN ESPÍN-ORBITAL EN EL  
FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO PARA  
DISPERSIONES DE FOTONES

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

P R E S E N T A :

CARLOS JAVIER SERVIN TOMAS

TUTORES:

DR. CHRISTIAN JOHANNES SCHUBERT BAUMGARTEL  
DR. JAMES PAUL EDWARDS

MORELIA, MICHOACÁN. OCTUBRE DE 2020





# Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento y gratitud:

- A mis padres Juan y Juliana por creer en mí y apoyarme en todo momento, convirtiéndose en mi fuente de inspiración para concluir este trabajo.
- A mis hermanos: Adriana, Jorge y José por su cariño incondicional y por estar siempre presentes en los buenos y malos momentos de mi vida.
- A mis asesores Christian y James por aceptarme como tesista y guiarme a lo largo de este proceso mostrando mucha profesionalidad. Aprecio la paciencia que me tuvieron y su sincera amistad.
- A Sarahí por el amor y ternura que me ha dado, por animarme a continuar mis estudios y darme fuerza en momentos de debilidad.
- A mis amigos Pelonchito, Jorge, Ranfla, Eri, Juve, Huesos, Oscar, Ezgar, Gustavo, Chicharito y los señores Juan, Chelís y Andrea, que aunque algunos de ellos ya no los frecuento, su amistad tuvo gran impacto en algún momento de mi vida.
- A la U.M.S.N.H. por apoyar a las casas del estudiante; sin ellas no habría podido salir de mi lugar de origen para estudiar la carrera que me apasiona.



# Resumen

En el presente trabajo mostraremos una breve introducción al formalismo línea de mundo (Worldline formalism), usado para la cuantización de campos y el cálculo de cantidades de la Teoría Cuántica de Campos como dispersiones, acciones afectivas, anomalías, entre otras. Este formalismo también es llamado “inspirado en cuerdas” porque realiza cálculos análogos a los de la teoría de perturbación de cuerdas. Ofrece una alternativa al enfoque estándar basado en la segunda cuantización y diagramas de Feynman.

Introducimos las técnicas de éste formalismo aplicándolas a la representación integral del propagador y la acción efectiva en la QED escalar y espinorial, lo que nos lleva posteriormente al cálculo de amplitudes de dispersión de fotones a nivel árbol y un lazo. Para el caso escalar obtenemos una fórmula maestra obtenida por primera vez en el marco de la teoría de cuerdas, que permite calcular dispersiones de fotones a un lazo. Realizar la generalización de esta fórmula al caso espinorial requiere de un tratamiento más complicado, por lo que nos limitamos a presentar una técnica llamada *regla de remplazo* que permite ir al espinorial de una manera muy simple.

El objetivo principal de esta tesis es presentar un método recientemente descubierto para obtener una expresión general para la amplitud de dispersión N-fotón para líneas fermiónicas abiertas, no obstante, este método puede aplicarse a líneas cerradas fácilmente. Este método, que llamamos descomposición espín orbital, realiza una separación de interacciones orbitales y espinoriales entre los fotones de un campo electromagnético y el propagador del electrón por medio de un operador de vértice del fotón, análogo al utilizado en teoría de cuerdas para representar la emisión o ab-

sorción de un fotón por una cuerda. A partir de esto la descomposición espín orbital goza de ciertas ventajas como la implementación de la invarianza Gauge por medio de la identidad de Ward, que nos permite dejar expresiones en términos del tensor de campo electromagnético. Además muestra una mayor simpleza en el manejo de los cálculos que con los otros métodos del mismo formalismo.

Se realizan los cálculos para el caso de dos fotones que representa la dispersión de Compton y se comparan con los resultados que se obtienen utilizando el enfoque de diagramas de Feynman.

**Palabras clave:** WORLDLINE FORMALISM, AMPLITUD N-FOTÓN, DIAGRAMAS DE FEYNMAN, KERNEL, TEORÍA DE CUERDAS

# Abstract

In the present work we will show a brief introduction to Worldline formalism, used for the quantization of fields and the calculation of quantities of the Quantum Field Theory such as dispersions, effective actions, anomalies, among others. This formalism is also called "string-inspired" because it performs calculations analogous to string perturbation theory. Offers an alternative to the standard approach based on the second quantization and Feynman diagrams.

We introduce the techniques of this formalism applying them to the integral representation of the propagator and the effective action in the scalar and spinor QED which leads us subsequently to the calculation of photon scattering amplitudes at tree level and a loop. For the scalar case, we obtain a master formula obtained for the first time in the framework of string theory, which allows us to calculate photon scattering to a loop. Generalizing this formula to the spinor case requires a more complicated treatment. So we just present a technique called replacement rule that allows you to go to the spinor in a very simple way.

The main objective of this thesis is to present a recently discovered method to obtain a general expression for the N-photon scattering amplitude for open fermionic lines; however, this method can be applied to closed lines easily. This method, which we call orbital spin decomposition, performs a separation of orbital and spinor interactions between photons of an electromagnetic field and electron propagator by means of a vertex operator of the photon, analogous to that used in string theory to represent the emission or absorption of a photon by a string. From this, the orbital spin decomposition enjoys certain advantages such as the implementation of the Gau-

ge invariance by means of the Ward identity, which allows us to leave expressions in terms of the electromagnetic field tensor. It also shows a greater simplicity in handling the calculations than with the other methods of the same formalism.

Calculations are made for the case of two photons representing the scattering of Compton and are compared with the results obtained using the approach of Feynman diagrams.



# Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	IV
Abstract	VI
Índice general	VIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamentos</b>	<b>5</b>
2.1. Teoría clásica de campos . . . . .	5
2.1.1. Lagrangiano en teoría de campos . . . . .	5
2.1.2. Hamiltoniano en teoría de campos . . . . .	7
2.1.3. Campo electromagnético . . . . .	8
2.2. Mecánica cuántica . . . . .	9
2.2.1. Operadores en Mecánica Cuántica . . . . .	10
2.2.2. Ecuación de Schrödinger . . . . .	10
2.2.3. Propagador de una partícula libre . . . . .	12
2.2.4. Integrales de camino . . . . .	16
2.2.5. Propagador acoplado a un campo electromagnético . . . . .	19
2.3. Teoría cuántica de campos . . . . .	20
2.3.1. Breve notación y convenciones . . . . .	21
2.3.2. Campo de Klein-Gordon . . . . .	22

2.3.3. Ecuación de Dirac . . . . .	25
2.3.4. Reglas de Feynman para QED espinorial . . . . .	31
<b>3. Formalismo Línea de mundo</b>	<b>33</b>
3.1. Escalar QED . . . . .	33
3.1.1. El propagador libre . . . . .	33
3.1.2. Amplitud de dispersión N-fotón a nivel árbol . . . . .	35
3.1.3. Amplitud N-fotón a una lazo . . . . .	41
3.2. QED espinorial . . . . .	44
3.2.1. Propagador vestido . . . . .	44
3.2.2. Amplitud N-fotón a nivel árbol . . . . .	46
3.2.3. Amplitud N-fotón a un lazo . . . . .	47
3.2.4. Regla de reemplazo . . . . .	48
<b>4. Descomposición espín-orbital</b>	<b>52</b>
4.1. Kernel para $N=0,1,2$ . . . . .	61
4.2. Dispersión de Compton con diagramas de Feynman . . . . .	66
4.3. Comparación de resultados . . . . .	66
<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>70</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría cuántica de campos (TCC) es la estructura teórica más aceptada en el intento de explicar el mundo subatómico, se puede considerar como una combinación de la mecánica cuántica y la relatividad especial aplicada a sistemas de campos continuos; en particular, la electrodinámica cuántica (QED) es la teoría más precisa desarrollada por el hombre. Sus herramientas permiten dar sentido y solución a problemas físicos que la mecánica cuántica no pudo, tales como la relación entre el espín y estadística o la existencia de la antimateria. La teoría ofrece herramientas potentes a la física nuclear, física de materia condensada, física atómica y astrofísica. Sin embargo, el cálculo de cantidades físicas suele ser dificultoso y extenso, tal motivo fue el que impulsó al físico R. Feynman a mediados del siglo XX a desarrollar nuevas técnicas y representaciones pictóricas que más tarde llevarían su nombre y lo pondrían como uno de los más grandes físicos de la historia.

En 1948 Richard P. Feynman introdujo las integrales de camino aplicadas a la mecánica cuántica no relativista en su trabajo "Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics", dejando en claro la potencialidad de los métodos funcionales. Años después presenta una serie de artículos que sentaron las bases de la electrodinámica cuántica en los que hace uso de las famosas reglas de Feynman.

Los diagramas y reglas de Feynman nos proporcionan una manera gráfica de visualizar fases intermedias de un proceso de dispersión de partículas y así mismo saber

cuáles interacciones son posibles. En los trabajos de Feynman se encontraban aunadas sugerencias alternativas (técnicas de primera cuantización) de cómo analizar los mismos procesos que con sus diagramas, no obstante, sus métodos no fueron utilizados en la teoría cuántica de campos en los años precedentes. Fué hasta 1982 cuando Affleck, Álvarez y Manton hicieron uso de estas técnicas propuestas, quienes estudiaron la producción de pares electrón-positrón usando una aproximación de campo eléctrico débil. Pero el verdadero potencial de los métodos funcionales se reconoció alrededor de los años 90 con los trabajos de Bern y Kosower [1], quienes comenzaron a desarrollar un formalismo denominado inspirado en cuerdas, que permite calcular cantidades como acciones efectivas y matrices-S en TCC de una manera similar a los cálculos realizados en la teoría de perturbación de cuerdas, demostrando que muchas o quizás todas las amplitudes en la teoría cuántica de campos se puede representar como el límite de tensión infinita de una cuerda. Este nuevo formalismo permitió calcular amplitudes a un lazo de la TCC con una elegancia y formalidad antes no vista, análogo a los diagramas de Feynman pero con una mayor simpleza. Más tarde, Strassler [10] unió las ideas de Feynman con los métodos de Bern y Kosower, derivando los resultados de estos últimos en términos de integrales de camino para partículas, lo que hoy en día se conoce como formalismo línea de mundo o Worldline.

El formalismo línea de mundo (Worldline formalism) es un método alternativo al formalismo estándar que relaciona integrales funcionales de la mecánica cuántica relativista con el cálculo de cantidades de la TCC. En este sentido presenta más eficiencia porque hace uso de los métodos funcionales que a través de los años han demostrado tener bastante potencialidad. Basta con mencionar su aplicación en el cálculo perturbativo de diversas cantidades en TCC, permitiendo implementar la invariancia Gauge.

El objetivo de esta tesis es presentar una introducción del formalismo línea de mundo y aplicarlo en una descomposición espín-orbital a nivel árbol de la amplitud de dispersión de dos fotones. Veremos que este nuevo método ofrece grandes ventajas teóricas y prácticas sobre el formalismo estándar, como pueden ser que obtenemos expresiones invariantes de Gauge en la capa de masa o que logramos compactar varios

diagramas en una sola integral funcional. Se hará la comparación con los resultados de la teoría estándar (teoría cuántica de campos en su cuantización canónica) y veremos que son equivalentes. La importancia de este trabajo radica en que la descomposición espín-orbital ofrece un gran avance teórico en el cálculo de dispersiones N-fotón a nivel árbol y a un lazo. Resulta de gran interés usar esta descomposición para la amplitud 3-fotón, con lo cual obtenemos las herramientas necesarias para calcular el momento magnético anómalo del electrón a un lazo.

La presente tesis se divide en 4 capítulos, los cuales se presentan a continuación:

En el capítulo 2 presentamos algunos fundamentos teóricos que se requieren para entender gran parte del tema central de la tesis. Se sintetiza de manera que se vean las transiciones desde la teoría clásica de campos hasta la teoría cuántica de campos, pasando por la mecánica cuántica donde la parte más importante será la introducción del enfoque de Feynman de las integrales de camino. En la parte de TCC se pretende desarrollar brevemente los temas y conceptos necesarios para comprender el capítulo 3, siendo los diagramas y reglas de Feynman el punto principal. Conceptos como el propagador, operador de evolución temporal, funciones de Green e integrales de camino, tendrán gran relevancia en el desarrollo de los temas.

En el capítulo 3 se muestran cantidades y técnicas elementales del formalismo línea de mundo, específicamente de QED escalar y espinorial, las cuales nos servirán en nuestros cálculos posteriores. La intención de este apartado se centra en introducir las técnicas Worldline, su tratamiento riguroso puede encontrarse entre las referencias. Entre las cantidades más importantes que se desarrollarán se encuentra la fórmula maestra de Bern y Kosower.

El capítulo 4 representa el tema central de esta tesis; se desarrolla una nueva técnica en el formalismo línea de mundo llamada "descomposición espín-orbital" que nos permite calcular la amplitud de dispersión N-fotón a nivel árbol y a un lazo de una manera más formal y sofisticada, implementando directamente la invariancia Gauge. Se muestran los cálculos hasta  $N = 2$  y se usan las reglas de Feynman para comparar nuestros resultados con los del formalismo estándar.

En el capítulo 5 presentamos nuestras conclusiones sobre este trabajo y el trabajo futuro. Y finalmente la bibliografía.

# Capítulo 2

## Fundamentos

### 2.1. Teoría clásica de campos

#### 2.1.1. Lagrangiano en teoría de campos

En la mecánica clásica podemos analizar sistemas de partículas puntuales o medios continuos en términos de Lagrangianos. En el caso continuo el Lagrangiano  $L$  puede ser expresado como la integral espacial de una densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , la cual a su vez es una función de uno o más campos  $\phi(x)$  y sus derivadas  $\partial_\mu\phi(x)$ . Es decir

$$L = \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) d^3x. \quad (2.1)$$

Uno de los conceptos fundamentales en física es la acción  $S$ , la cual podemos calcular como la integral temporal del Lagrangiano:

$$S = \int \mathcal{L} dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^4x. \quad (2.2)$$

El principio de mínima acción establece que la evolución temporal de todo sistema físico se realiza de tal forma que la acción tiende a ser un extremal (normalmente un

mínimo). Así tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \delta \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Usemos que

$$\partial_\mu \left[ (\delta \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) + (\delta \phi) \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right], \quad (2.4)$$

por lo anterior tenemos

$$\int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi + \int d^4x \partial_\mu \left[ (\delta \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0. \quad (2.5)$$

La condición de frontera que se establece es que los campos en el infinito permanezcan constantes. Usando el teorema de Stokes podemos reescribir la última integral como sigue

$$\int d^4x \partial_\mu \left[ (\delta \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = \int_\Omega d^3x (\delta \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \hat{n}_\mu, \quad (2.6)$$

donde  $\hat{n}_\mu$  es normal a la superficie de la frontera. Usando la condición de frontera  $\delta \phi|_\Omega = 0$  se tiene

$$\int_\Omega d^3x (\delta \phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \hat{n}_\mu = 0. \quad (2.7)$$

Así, la integral restante de (2.5) debe eliminarse para  $\delta \phi$  arbitrario, lo cual implica que el factor que lo acompaña es cero, es decir

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0} \quad (2.8)$$

las cuales son las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo  $\phi$ . Nótese que en caso de existir más de un campo se tendría un conjunto de ecuaciones (2.8) para cada uno.



### 2.1.2. Hamiltoniano en teoría de campos

En esta parte se introduce la formulación Hamiltoniana para el estudio de campos, la cual nos ayudará a hacer una mejor extensión teórica a muchos campos de la física; especialmente nos interesa la transición a la mecánica cuántica. Consideremos un sistema de  $n$  grados de libertad descritos por un conjunto  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  de coordenadas generalizadas, si el sistema es conservativo el Lagrangiano  $L$  es la energía cinética  $T$  menos la energía potencial  $V$ , es decir:

$$L(q, \dot{q}) = T - V. \quad (2.9)$$

Se define un momento conjugado  $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  asociado a cada variable dinámica  $q_i$ , donde  $\dot{q} = \partial q / \partial t$ . Y así, el Hamiltoniano es

$$H(p, q) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (2.10)$$

Ahora consideremos un número infinito de grados de libertad o medio continuo en 4 dimensiones, entonces el sistema estará descrito por un campo:

$$q_i(t) \longrightarrow \phi(x). \quad (2.11)$$

En este caso se define una densidad de momento conjugado  $\pi(x)$  para el campo  $\phi(x)$  como

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}, \quad (2.12)$$

entonces la densidad Hamiltoniana se escribe

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}. \quad (2.13)$$

De esta manera el hamiltoniano estará dado por la integral espacial

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi, \phi) = \int d^3x [\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}]. \quad (2.14)$$

### 2.1.3. Campo electromagnético

En esta parte desarrollaremos en breve la electrodinámica clásica desde una perspectiva Lagrangiana. Sea  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  el campo eléctrico y magnético respectivamente, llamamos campo electromagnético al conjunto de estos dos campos vectoriales, los cuales podemos expresar en términos de un potencial vectorial  $\vec{A}$  y un potencial escalar  $\phi$  de la siguiente forma

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (2.15)$$

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.16)$$

Es de nuestro interés usar notación relativista, para ello definamos los siguientes 4-vectores (o cuadvectores)

$$A^\mu = (\phi; \vec{A}), \quad J^\mu = (\rho; \vec{J}), \quad (2.17)$$

donde  $\rho$  y  $\vec{J}$  son la densidad de carga y de corriente. Con lo anterior podemos expresar el campo electromagnético por medio de un tensor de rango 2 antisimétrico:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.18)$$

donde  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ . Generalmente se usa la siguiente densidad Lagrangiana para el campo electromagnético

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(E^2 - B^2) - \rho\phi + \vec{J} \cdot \vec{A} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La densidad Lagrangiana dada por la ecuación anterior está expresada como la suma de la energía cinética y un término que describe la interacción lagrangiana. Dado este lagrangiano se puede demostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange dan las ecuaciones de Maxwell.

## 2.2. Mecánica cuántica

A comienzos del siglo veinte los físicos se encontraron con bastantes fenómenos naturales que no podían ser explicados satisfactoriamente con la teorías físicas desarrolladas hasta entonces, se dieron cuenta que conforme se acercaban al mundo microscópico las cosas se complicaban. El problema apuntaba a que los conocimientos existentes sólo eran aplicables a un dominio de fenómenos, muchos otros quedaban fuera, por lo que era necesario cambiar la concepción del mundo físico.

El tratamiento separado de partículas materiales y radiación fue una inminente señal de que se necesitaba una teoría que unificara estos conceptos. La dinámica de los cuerpos macroscópicos era bien explicada con las leyes de Newton. Por su parte, la radiación fue explicada con la teoría electromagnética, gracias a las ecuaciones de Maxwell, las cuales unieron conceptos que parecían ser independientes: la electricidad y el magnetismo. Como primer intento en el tratamiento de la interacción entre materia y radiación se tenía la fuerza de Lorentz. Los conocimientos de ese entonces parecían abordar exitosamente la mayoría de los fenómenos físicos, sin embargo, estas teorías no describían satisfactoriamente, por ejemplo, la interacción entre un átomo y un campo electromagnético.

La radiación de cuerpo negro fue uno de tantos fenómenos que la teoría electromagnética no era capaz de explicar satisfactoriamente, lo que llevó a Max Planck en 1900 cambiar las concepciones físicas de la época al suponer que la energía estaba cuantizada, esto es, una onda electromagnética de frecuencia  $\nu$  sólo puede tener múltiplos enteros de energía de la cantidad  $h\nu$ , a lo que él llamó *cuanto de energía*, introduciendo así una nueva constante univrsal  $h$ . Partiendo de estos resultados, en 1905 Einstein propuso que el campo de radiación estaba constituido por paquetes de energía  $h\nu$ , es decir, retomó la naturaleza corpuscular de la luz que creía Newton. A tales paquetes de energía más tarde se les llamó *fotones*, palabra que prevalece hasta hoy en día. Esta nueva forma de estudiar al campo electromagnético le permitió a Einstein explicar de manera elegante algunos fenómenos relacionados, entre ellos el efecto fotoeléctrico, trabajo que lo llevaría a ganar el premio Nobel en física

del año 1921. Posteriormente estos resultados fueron comprobados por el físico Arthur Compton gracias al efecto Compton, donde se confirmó la naturaleza dualidad onda-partícula de la luz.

### 2.2.1. Operadores en Mecánica Cuántica

Partiendo de uno de los postulados de la Mecánica Cuántica, podemos asociar un operador lineal hermítico a cada variable dinámica u observable físico como se muestra a continuación

Posición	$\hat{\mathbf{x}}$	$\longrightarrow$	$\vec{x}$
Momento	$\hat{\mathbf{p}}$	$\longrightarrow$	$-i\hbar\vec{\nabla}$
Energía potencial	$\hat{V}$	$\longrightarrow$	$V$
Energía cinética	$\hat{T}$	$\longrightarrow$	$(-\hbar^2/2m)\nabla^2$
Hamiltoniano	$\hat{H}$	$\longrightarrow$	$\hat{T} + \hat{V}$

Tabla 2.1: Operadores elementales en el espacio de posición.

Donde  $\vec{\nabla}$  es el vector gradiente  $\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ . La medición de cualquiera de estos observables sólo produce valores propios  $\lambda$  del operador asociado, los cuales satisfacen la ecuación

$$\hat{\mathbf{O}}|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle, \quad (2.20)$$

donde  $\hat{\mathbf{O}}$  es el operador de algún observable y  $|\phi\rangle$  es la función propia o eigenestado correspondiente al eigenvalor  $\lambda$ .

### 2.2.2. Ecuación de Schrödinger

Dado un sistema físico, su estado cuántico está representado por un vector normalizado, perteneciente a un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en alguna base dada, al cual denotaremos

como  $|\psi\rangle$ . La evolución temporal del sistema está dado por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle, \quad (2.21)$$

que en la representación de posición se expresa

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) &= \hat{H} \psi(\vec{x}, t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

para una partícula de masa  $m$  bajo un potencial  $V(\vec{x}, t)$ . Si el potencial es independiente del tiempo podemos emplear el método de separación de variables para resolver la ecuación de Schrödinger; escribimos

$$\psi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x})T(t), \quad (2.23)$$

es decir, suponemos que la función de onda  $\psi(\vec{x}, t)$  se puede expresar como el producto de dos funciones; una que depende sólo de la posición y la otra sólo del tiempo. Al insertar la expresión (2.23) en la ec. (2.22) obtenemos una ecuación que se puede separar en la parte espacial y temporal de la siguiente forma

$$i\hbar \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi} \nabla^2 \phi + V(\vec{x}), \quad (2.24)$$

para que se cumpla la igualdad anterior ambas partes de la ecuación deben ser iguales a una constante  $E$ . Entonces

$$i\hbar \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = E \quad (2.25)$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi} \nabla^2 \phi + V(\vec{x}) = E. \quad (2.26)$$

Reescribamos la ec. (2.26) de la siguiente forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(\vec{x}) + V(\vec{x})\phi(\vec{x}) = E\phi(\vec{x}), \quad (2.27)$$

o usando el operador Hamiltoniano

$$\hat{H}\phi(\vec{x}) = E\phi(\vec{x}). \quad (2.28)$$

Ésta es la *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo* y sus soluciones corresponden a los estados estacionarios del sistema. Notemos que ésta ecuación corresponde a la ecuación de valores propios del operador Hamiltoniano, es decir, la constante  $E$  corresponde a los valores de la energía que podemos obtener del sistema.

Al resolver la ecuación (2.25) obtenemos

$$T(t) = e^{-iEt/\hbar}, \quad (2.29)$$

notemos que en general para cada valor propio del Hamiltoniano obtendremos una función propia, por lo que una solución más general a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (considerando que el potencial no depende del tiempo) es de la forma

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (2.30)$$

donde los coeficientes  $c_n$  se encuentran usando las condiciones iniciales del problema en cuestión. Recordemos que el potencial  $V$  no debe depender del tiempo para obtener los resultados anteriores.

### 2.2.3. Propagador de una partícula libre

Sea  $|\psi(t_0)\rangle$  el vector de estado de una partícula en el instante inicial  $t_0$  y  $|\psi(t)\rangle$  el vector de estado en algún instante  $t$ , la transformación  $|\psi(t_0)\rangle$  en  $|\psi(t)\rangle$  está dado por un operador lineal  $\hat{U}(t, t_0)$  que satisface

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (2.31)$$

A  $\hat{U}(t, t_0)$  se le llama *operador de evolución temporal*.

Usemos la ec. de Schrödinger (2.21) con el vector dado por (2.31), esto es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (2.32)$$

es decir,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0), \quad (2.33)$$

que es la ecuación de evolución del operador  $\hat{U}(t, t_0)$ .

Consideremos el caso de sistemas conservativos en los cuales el Hamiltoniano no depende del tiempo, con esta condición es fácil resolver la ec. diferencial (2.33), la condición inicial la podemos establecer a partir de (2.31) recordando que el operador de evolución es lineal, por lo que

$$|\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t_0, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.34)$$

requiere que

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{1}, \quad (2.35)$$

de esta forma la solución de (2.33) con condición inicial (2.35) es

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}. \quad (2.36)$$

Con esta información estamos interesados en relacionar dos estados cuánticos del sistema a diferentes tiempos. Para ello usemos que la función de onda en la posición  $\vec{x}_2$  en el instante  $t_2$  está dada por

$$\psi(\vec{x}_2, t_2) = \langle \vec{x}_2 | \psi(t_2) \rangle \quad (2.37)$$

y hagamos el producto interno en ambos lados de la ec. (2.31) con el ket  $|\vec{x}_2\rangle$ :

$$\langle \vec{x}_2 | \psi(t_2) \rangle = \psi(\vec{x}_2, t_2) = \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \psi(t_1) \rangle, \quad (2.38)$$

notemos que hemos usado  $t_2$  en lugar de  $t$  sólo por comodidad. Insertemos la relación de completitud

$$\int d^3x |\vec{x}_1\rangle \langle \vec{x}_1| = \mathbb{1} \quad (2.39)$$

entre  $\hat{U}(t_2, t_1)$  y  $|\psi(t_1)\rangle$ , entonces

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}_2, t_2) &= \int d^3x \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{x}_1 \rangle \langle \vec{x}_1 | \psi(t_1) \rangle \\ &= \int d^3x \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{x}_1 \rangle \psi(\vec{x}_1, t_1). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si consideramos la distribución inicial  $\psi(\vec{x}_1, t_1)$ , la función de onda en la posición  $\vec{x}_2$  en el instante  $t_2$  estará dada por

$$\psi(\vec{x}_2, t_2) = \int d^3x K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) \psi(\vec{x}_1, t_1), \quad (2.41)$$

en este caso  $K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1)$  es la amplitud de probabilidad de que una partícula se propague de la posición  $\vec{x}_1$  en el instante  $t_1$  a la posición  $\vec{x}_2$  en el instante  $t_2$ , por tal motivo esta función es conocida como el *propagador de una partícula*.

Comparando las ecs. (2.40) y (2.41) concluimos que el propagador se puede escribir como

$$K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{x}_1 \rangle. \quad (2.42)$$

Nos interesa el caso  $t_1 < t_2$  y  $K = 0$  para  $t_1 > t_2$ , con lo que podemos escribir al propagador en su forma más común:

$$K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{x}_1 \rangle \theta(t_2 - t_1). \quad (2.43)$$

Consideremos un sistema con un Hamiltoniano que no depende explícitamente del tiempo y sean  $|\phi_n\rangle$  y  $E_n$  sus estados y valores propios, tenemos entonces

$$\hat{H} |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle, \quad (2.44)$$



usando la ecuación (2.36) y la relación de completitud

$$\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \mathbb{1} \quad (2.45)$$

tenemos

$$\hat{U}(t_2, t_1) = e^{-i\hat{H}(t_2-t_1)/\hbar} \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad (2.46)$$

y usando (2.44):

$$\hat{U}(t_2, t_1) = e^{-iE_n(t_2-t_1)/\hbar} \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|. \quad (2.47)$$

Ahora usemos la ecuación (2.42) para calcular  $K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1)$ :

$$\begin{aligned} K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-iE_n(t_2-t_1)/\hbar} \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \vec{x}_1 \rangle \theta(t_2 - t_1) \\ &= \theta(t_2 - t_1) \sum_n \phi_n^*(\vec{x}_1) \phi_n(\vec{x}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)/\hbar}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde hemos usado

$$\langle \vec{x}_2 | \phi_n \rangle = \phi_n(\vec{x}_2), \quad \langle \phi_n | \vec{x}_1 \rangle = \phi_n^*(\vec{x}_1) \quad (2.49)$$

Por otro lado, como  $\phi_n(\vec{x}_2)e^{-iE_n t_2/\hbar}$  es una solución de la ecuación de Schrödinger tenemos

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - \hat{H} \right] \phi_n(\vec{x}_2) e^{-iE_n t_2/\hbar} = 0, \quad (2.50)$$

ahora apliquemos en ambos lados de la ecuación (2.48) el operador

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - \hat{H}, \quad (2.51)$$

el cual sólo actúa sobre las variables  $\vec{x}_2, t_2$  y usemos la ecuación (2.50), obtenemos

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - \hat{H} \right] K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \sum_n \phi_n^*(\vec{x}_1) \phi_n(\vec{x}_2) e^{-iE_n(t_2-t_1)/\hbar}. \quad (2.52)$$

Observemos que el argumento de la exponencial se vuelve cero debido a la presencia

de la función delta de Dirac, también, con ayuda de las ecuaciones (2.45), (2.49) podemos demostrar que

$$\sum_n \phi_n^*(\vec{x}_1)\phi_n(\vec{x}_2) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \quad (2.53)$$

por lo que  $K$  satisface la ecuación:

$$\left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - \hat{H} \right] K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \quad (2.54)$$

Las soluciones a este tipo de ecuaciones donde son proporcionales a una función delta de Dirac son llamadas funciones de Green. Por tanto, concluimos que el propagador  $K$  es la función de Green de la ecuación de Schrödinger.

#### 2.2.4. Integrales de camino

El formalismo de integrales de camino ofrece un gran aporte teórico a la mecánica cuántica, generaliza de forma más sencilla a otras teorías de interacciones. Debido a que su cantidad fundamental es la Lagrangiana, el formalismo funcional preserva todas las simetrías de una teoría. Además, el límite clásico de la mecánica cuántica puede obtenerse inmediatamente.

Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve en una dimensión en un potencial  $V$ . Para un hamiltoniano independiente del tiempo la amplitud de probabilidad de que la partícula se propague de la posición  $x'$  a la posición  $x$  en un tiempo  $t$  es

$$K(x, x'; t) = \langle x | \hat{U}(t) | x' \rangle = \langle x | e^{-it\hat{H}/\hbar} | x' \rangle \quad (2.55)$$

con condición inicial

$$K(x, x'; 0) = \delta(x - x'). \quad (2.56)$$

Para introducir las integrales de camino consideremos tiempos intermedios iguales

$\Delta t = t/N$  entre 0 y  $t$ :

$$K(x, x', t) = \langle x | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} \dots e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x' \rangle. \quad (2.57)$$

Ahora introducimos la unidad con estados propios:

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \mathbb{1}, \quad (2.58)$$

entonces podemos escribir a propagador como

$$\begin{aligned} K(x, x', t) &= \int dx_1 \langle x | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} \dots e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x' \rangle \\ &= \int dx_1 dx_2 \langle x | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_2 \rangle \langle x_2 | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} \dots e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x' \rangle \\ &= \int dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \langle x_N | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_{N-2} \rangle \dots \langle x_1 | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_0 \rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \prod_{j=1}^N \langle x_j | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_{j-1} \rangle, \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde  $x_N = x$  y  $x_0 = x'$ . Expandimos la exponencial a primer orden e introducimos nuevamente la unidad en la base de momentos:

$$\langle x_j | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_{j-1} \rangle = \int dp_j \langle x_j | p_j \rangle (1 - i\Delta t \hat{H}/\hbar) \langle p_j | x_{j-1} \rangle \quad (2.60)$$

En esta parte hemos supuesto que el Hamiltoniano es de la forma  $\hat{T} + \hat{V}$ , es decir, que no tiene combinaciones de  $x$  y  $p$ . Recordemos que

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}, \quad (2.61)$$

entonces (2.60) se puede escribir a primer orden en  $\Delta t$  como

$$\langle x_j | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_{j-1} \rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{ip_j(x_j - x_{j-1})/\hbar} \left[ 1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} H(p_{j-1}, x_{j-1}) \right]. \quad (2.62)$$

Insertando este resultado en (2.59) se tiene

$$K(x, x', t) = \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \int \prod_{j=1}^N \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{ip_j(x_j - x_{j-1})/\hbar} \left[ 1 - \frac{i\Delta t}{\hbar} H(p_{j-1}, x_{j-1}) \right]. \quad (2.63)$$

Consideremos el límite  $N \rightarrow \infty$  y usemos la siguiente identidad:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{x_i}{N} \right) = \exp \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \right), \quad (2.64)$$

la cual aplicaremos a (2.63), obteniendo

$$K(x, x', t) = \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \int \prod_{j=1}^N \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^N \Delta t \left[ p_k \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} - H(p_k, x_k) \right] \right\}. \quad (2.65)$$

En el límite  $N \rightarrow \infty$  se define

$$\int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \rightarrow \int \mathcal{D}x(\tau) \quad (2.66)$$

$$\int \prod_{j=1}^N \frac{dp_j}{2\pi} \rightarrow \int \mathcal{D}p(\tau) \quad (2.67)$$

con  $0 < \tau < t$  y  $\hbar = 1$ . Entonces (2.65) queda

$$K(x, x', t) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau) \int \mathcal{D}p e^{i \int_0^t d\tau [p\dot{x} - H(p, x)]} \quad (2.68)$$

la cual es conocida como integral de camino de espacio-fase.

Para  $\hat{H}$  cuadrático en el momento podemos resolver las integrales de momento para llevar a (2.68) a una forma más interesante. De (2.65) se tiene

$$\langle x_i | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_{j-1} \rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{i\Delta t \left[ p_j \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} - \frac{p_j^2}{2m} - V(x_j) \right]}, \quad (2.69)$$

la cual es una integral Gaussiana, al completar los cuadrados y tomando la continuación analítica (rotación de Wick) obtenemos

$$\langle x_i | e^{-i\Delta t \hat{H}/\hbar} | x_{j-1} \rangle = \left( \frac{m}{2\pi i \Delta t} \right)^{1/2} \exp \left( i\Delta t \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} \right)^2 - V(x_j) \right] \right), \quad (2.70)$$

con ello podemos reescribir a (2.65) como

$$K(x, x', t) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \left( \frac{m}{2\pi i} \right)^{N/2} \exp \left( i \sum_{k=1}^N \Delta t \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} \right)^2 - V(x_k) \right] \right) \quad (2.71)$$

y tomando el límite  $N \rightarrow \infty$ :

$$K(x, x', t) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x e^{i \int_0^t d\tau \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x(\tau)) \right]} \quad (2.72)$$

$$= \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x e^{iS[x(\tau)]} \quad (2.73)$$

La expresión anterior es conocida como *integral de camino en el espacio de configuración*. Esta integral funcional se extiende sobre todas las funciones  $x(\tau)$  que satisfacen las condiciones de frontera  $x(0) = x'$  y  $x(t) = x$ . Vemos entonces que el propagador está dado por una integral sobre todos los posibles caminos entre  $x'$  y  $x$ , ponderado por una cantidad cuya fase es el valor de la acción sobre cada camino.

### 2.2.5. Propagador acoplado a un campo electromagnético

En el presente apartado estamos interesados en derivar una expresión para el propagador de una partícula escalar sometida a un campo electromagnético externo, para ello consideraremos un electrón de masa  $m$  (sin interacciones espinoriales). El Hamiltoniano es

$$H = \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)]^2}{2m} - e\phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.74)$$

donde  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  es el potencial vectorial magnético y  $\phi(\mathbf{x}, t)$  el potencial escalar electrostático.

Insertemos este Hamiltoniano en la expresión (2.68):

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}\mathbf{x} \int \mathcal{D}\mathbf{p} \exp \left[ i \int_0^t d\tau \left( \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p} - \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau)]^2}{2m} + e\phi(\mathbf{x}, \tau) \right) \right]. \quad (2.75)$$

Hagamos  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau)$ , con esto  $d^3p_n = d^3p'_n$  y con ello  $\mathcal{D}\mathbf{p} = \mathcal{D}\mathbf{p}'$ . Así

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) &= \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}\mathbf{x} \int \mathcal{D}\mathbf{p}' \exp \left[ i \int_0^t d\tau \left( \dot{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{p}' - e\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau)) - \frac{\mathbf{p}'^2}{2m} + e\phi(\mathbf{x}, \tau) \right) \right] \\ &= \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}\mathbf{x} \int \mathcal{D}\mathbf{p}' \exp \left[ i \int_0^t d\tau \left( -\frac{\mathbf{p}'^2}{2m} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{p}' - e\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{x}} + e\phi(\mathbf{x}, \tau) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Observamos que podemos integrar sobre los momentos, similarmente como en el apartado anterior. Al hacerlo obtenemos

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}\mathbf{x} \exp \left[ i \int_0^t d\tau \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - e\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \dot{\mathbf{x}} + e\phi(\mathbf{x}, \tau) \right) \right] \quad (2.77)$$

$$= \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}\mathbf{x} \exp \left[ i \int_0^t d\tau L_m(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \right], \quad (2.78)$$

donde identificamos a  $L_m(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  como el Lagrangiano de un electrón sobre un campo magnético.

## 2.3. Teoría cuántica de campos

La TCC surgió en el intento de explicar fenómenos subatómicos en los que la mecánica cuántica parecía no tener dominio, especialmente en fenómenos donde interviene la relatividad especial. Aún cuando se usó la ecuación de Schrödinger para describir una partícula relativista, ésta mostraba inconsistencias físicas como densidades de probabilidad negativas, soluciones con energía negativa, violación del principio de causalidad o variación en el número de partículas de algún proceso.

En especial, la QED es la teoría física que tiene la mayor precisión de acuerdo con el experimento. Algunas de las cantidades que muestran esta grandiosa precisión son la transición de energía en el hidrógeno y átomos similares, el momento magnético anómalo del electrón y del muón, y las tasas de decaimiento del positronio en estado singlete y triplete.

Nuestra discusión en esta sección comienza introduciendo algunas convenciones y la notación relativista que usaremos, sin embargo, cambiaremos algunas convenciones en el capítulo siguiente por comodidad. Posteriormente desarrollaremos las ecuaciones de Klein-

Gordon y Dirac; posteriormente las reglas de Feynman para la QED escalar, como modo introductorio al manejo de campos cuánticos.

### 2.3.1. Breve notación y convenciones

Durante este capítulo usaremos el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

sin embargo en el capítulo 3 y 4 usaremos otra signatura en la métrica para ser consistentes con el formalismo Worldline. También usaremos las unidades naturales o de Planck, donde  $\hbar = c = 1$ .

Sea  $a^\mu$  un cuadrivector con componentes

$$a^\mu = (a^0; a^1, a^2, a^3), \quad (2.80)$$

entonces

$$a_\mu = (a_0; a_1, a_2, a_3) = g_{\mu\nu} a^\nu = (a^0; -a^1, -a^2, -a^3), \quad (2.81)$$

con la convención de Einstein de que los índices repetidos son siempre sumados. Los índices griegos toman valores 0,1,2,3 y los romanos ( $i, j, k$ ) 1,2,3. Algunos ejemplos de cuadrivectores que más utilizaremos son

- cuadrivector posición:  $x^\mu = (x^0; x^1, x^2, x^3) = (t; x, y, z) = (t; \vec{x})$
- cuadrivector momento o cuadrimomento:  $p^\mu = (p^0; p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z)$

Podemos formar un escalar de Lorentz, invariante ante cualquier transformación de Lorentz, con el producto escalar de dos cuadrivectores  $a^\mu$  y  $b^\mu$ :

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3. \quad (2.82)$$

Se define el operador derivada

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial^0; \vec{\nabla}), \quad (2.83)$$

tengamos en cuenta que el subíndice  $\mu$  en la derivada se debe a que se transforma como un cuadrivector covariante. Así

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.84)$$

### 2.3.2. Campo de Klein-Gordon

El formalismo Lagrangiano convencionalmente se ha utilizado para formular la física de partículas, éste define la teoría porque contiene las interacciones fundamentales. Los motivos más importantes por los que se usa esta formulación es porque la densidad Lagrangiana es una simple función que determina la dinámica, y debe ser un escalar en todo el espacio relevante, invariante bajo transformaciones. Al hacer a la densidad Lagrangiana invariante bajo transformaciones de Lorentz garantizamos a nivel clásico, que todas sus predicciones teóricas son invariantes de Lorentz.

Comencemos nuestro estudio de campos considerando el caso más simple: el campo escalar real  $\phi(x) = \phi^*(x)$  de masa  $m$ . Para construir un Lagrangiano (densidad Lagrangiana) que describa una dinámica no trivial, éste debe contener derivadas  $\partial_\mu$  y los índices de Lorentz deben estar contraídos. Una opción es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (2.85)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para este campo es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0, \quad (2.86)$$

implica que  $\phi$  satisface la ecuación

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0; \quad (2.87)$$

ésta es la *ecuación de Klein-Gordon*.



Notemos que de la ecuación de energía relativista

$$E^2 = m^2 + \vec{p}^2 \quad (2.88)$$

y  $E = i\partial_0$ ,  $\vec{p}^2 = -i\vec{\nabla}^2$  se verifica que

$$E^2 - \vec{p}^2 = -\partial_0^2 + \nabla^2 = -\partial_\mu \partial^\mu \quad (2.89)$$

Por tanto, cada campo que describe una partícula de masa  $m$  debe satisfacer  $-\partial_\mu \partial^\mu \phi = m^2 \phi$ . A manera ilustrativa, construyamos un campo normalizado muy simple: el de un cuanto de energía  $\omega$  y momento  $\vec{k}$ . Sabemos que

$$\phi = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (2.90)$$

es una solución de la ecuación de onda que representa (2.88), con  $\omega^2 = k^2 + m^2$  y  $A$  una constante de normalización. Encontremos la densidad Hamiltoniana asociada a nuestro Lagrangiano por medio de la ecuación (2.13):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (2.91)$$

y la energía total es

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \mathcal{H} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x [\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Si usamos  $\phi$  de ecuación (2.90) tenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^3x [(\omega^2 + k^2) \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) + m^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \\ &= \frac{1}{2} A^2 \omega^2, \end{aligned} \quad (2.93)$$

donde hemos usado los valores promedio de las integrales sobre  $\sin^2$  y  $\cos^2$ , y que  $\omega^2 = k^2 + m^2$ . Para determinar el valor de la constante  $A$  tenemos que igualar el valor de la energía obtenida con  $\omega$ , ya que es la energía del cuanto considerado, con esto  $A = \sqrt{\frac{2}{\omega}}$ . Así,

la solución general se puede escribir como

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right]. \quad (2.94)$$

La interpretación de las soluciones con modos de energía positiva y negativa surge al cuantizar el campo (segunda cuantización).

### Propagador de Klein-Gordon

Al cuantizar el campo,  $\phi(x)$  se convierte en un operador, que en el esquema de Heisenberg podemos escribir como

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \quad (2.95)$$

donde  $a_{\vec{p}}$  y  $a_{\vec{p}}^\dagger$  son los operadores escalera independientes del tiempo. La amplitud  $D(x, y)$  de una partícula para propagarse de  $y$  a  $x$  es  $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ , donde  $|0\rangle$  es el estado de mínima energía llamado vacío cuántico, sobre el cual los eigenestados del Hamiltoniano serán generados aplicando el operador de creación  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$  sobre  $|0\rangle$  un número arbitrario de veces:

$$\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0, \quad (2.96)$$

$$\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle = |\vec{p}\rangle, \quad (2.97)$$

eligiendo la normalización  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Con esto es fácil comprobar que

$$D(x, y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} = D(x-y), \quad (2.98)$$

donde usamos la normalización relativista de los estados

$$|p\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle. \quad (2.99)$$

Definamos

$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}, \quad \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (2.100)$$

el factor  $i\epsilon$  aleja ligeramente a los polos del eje real. Separemos la integral sobre  $p^0$ :

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon}. \quad (2.101)$$

Cuando  $x^0 > y^0$  podemos realizar la integral sobre  $p^0$  cerrando el contorno sobre el plano inferior, rodeando el polo  $p^0 = E_{\vec{p}} - i\epsilon/(2E_{\vec{p}})$  en sentido horario. Con esto obtenemos el mismo propagador  $D(x-y)$  que (2.98).

Cuando  $x^0 < y^0$  cerramos el contorno sobre el plano superior, rodeando el polo  $p^0 = -E_{\vec{p}} + i\epsilon/(2E_{\vec{p}})$  en sentido antihorario. Obtenemos el mismo resultado pero intercambiados  $x$  y  $y$ .

Por tanto

$$D_F(x-y) = \begin{cases} D(x-y), & x^0 > y^0 \\ D(y-x), & x^0 < y^0 \end{cases}$$

o con la función escalón:

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \\ &\equiv \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.102)$$

El símbolo  $T$  es llamado *operador de orden temporal*. Al realizar el cálculo  $(\partial^2 + m^2)D_F(x-y)$  verificamos que  $D_F$  es una función de Green del operador de Klein-Gordon.

La función de Green  $D_F(x-y)$  es llamada *propagador de Feynman* para una partícula Klein-Gordon, el cual tendrá un papel muy importante cuando veamos las reglas de Feynman para QED.

### 2.3.3. Ecuación de Dirac

En 1928, Paul Dirac desarrolló una ecuación que generaliza a la ecuación de Schrödinger para incluir la presencia de espín 1/2, consistente con los principios de la mecánica cuántica y la relatividad especial. Esto es; garantiza la conservación de la probabilidad y es una ecuación lineal en la derivada temporal. La cual es

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left[ -i \left( \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \beta m \right] \psi \\ &= i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right] \psi. \end{aligned} \quad (2.103)$$

$\psi$  es un espinor de 4 componentes,  $\alpha_i$  y  $\beta$  son matrices de 4x4 que se determinan con condiciones físicas. De las ecuaciones (2.88) y (2.89) tenemos

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\psi \quad (2.104)$$

como una condición sobre algún estado  $\psi$ . Tomemos los operadores de la ecuación (2.103)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i(\alpha_1 \partial x_1 + \alpha_2 \partial x_2 + \alpha_3 \partial x_3) + \beta m \quad (2.105)$$

( $\frac{\partial}{\partial x_i} := \partial x_i$ ) y apliquemos esto a (2.103). Obtenemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \sum_{j>i} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + im(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - m^2 \beta^2 \psi. \quad (2.106)$$

La comparación de las ecuaciones (2.104) y (2.106) requiere:

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j), \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0. \quad (2.107)$$

Un caso de interés es considerar fermiones sin masa, así la ecuación (2.106) se simplifica bastante y la condición sobre las matrices  $\alpha_i$  se puede escribir

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \quad (2.108)$$

Ésta relación de anticonmutación la cumplen las matrices de Pauli para partículas de espín 1/2, así

$$\alpha_i = -\sigma_i. \quad (2.109)$$

Usamos el signo negativo por convención. Por tanto, la ecuación de Dirac se escribe

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \psi, \quad (2.110)$$

donde podemos interpretar a  $\psi$  como un espinor de 2 componentes.

A partir de las relaciones que deben satisfacer las matrices  $\alpha_i$  y  $\beta$  se observa que cuando consideramos fermiones con masa distinta de cero, se requieren matrices de dimensiones 4x4

al menos. La elección de matrices no es única, ya que podemos elegir cualquier conjunto de matrices que satisfagan las condiciones (2.107). Elegiremos un conjunto de matrices llamado *matrices Gamma*, definidas como

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

y

$$\gamma^i = \alpha_i \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

A tal representación para las matrices gamma se le llama representación de Weyl o quiral. Podemos definir

$$\gamma^\mu = (\gamma^0; \gamma^i), \quad (2.113)$$

que cumple

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{álgebra de Dirac}). \quad (2.114)$$

Si multiplicamos por  $\beta$  a la ecuación (2.103) y usamos las relaciones (2.112) y (2.111) podemos reescribir la ecuación de Dirac como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.115)$$

que suele ser escrita en la notación de slash, definida como la contracción tensorial de una matriz gamma con un cuadrivector, esto es

$$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (2.116)$$

Así, la ecuación de Dirac se puede escribir como

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0. \quad (2.117)$$

Podemos verificar que la ecuación de Dirac implica la ecuación de Klein-Gordon aplicando a la misma  $(-i\not{\partial} - m)$  por la izquierda.

Para escribir el Lagrangiano de la teoría de Dirac definimos la cantidad

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0, \quad (2.118)$$

así  $\bar{\psi}\psi$  es un escalar de Lorentz. Entonces, el Lagrangiano de Dirac es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi, \quad (2.119)$$

en donde se puede verificar que  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es un vector de Lorentz.

Debido a que las matrices gamma están escritas en bloques 2x2, asumimos

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

donde  $\psi_R$  y  $\psi_L$  son espinores de dos componentes. Entonces podemos escribir la ecuación de Dirac como

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0, \quad (2.121)$$

usando que  $i\partial^\mu = p^\mu$ . Para simplificar un poco la notación definamos

$$\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma}), \quad (2.122)$$

con lo que

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.123)$$

Y la ecuación de Dirac se convierte en

$$\begin{pmatrix} -m & i\partial \cdot \sigma \\ i\partial \cdot \bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0. \quad (2.124)$$

Al elegir  $m = 0$  las ecuaciones para  $\psi_R$  y  $\psi_L$  se desacoplan en la forma

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi_R &= 0 \\ i\sigma \cdot \partial \psi_L &= 0, \end{aligned} \quad (2.125)$$

las cuales son llamadas *ecuaciones de Weyl*.

Debido a que un campo de Dirac  $\psi$  obedece la ecuación de Klein-Gordon, podemos escribir la solución general de la ecuación de Dirac como una combinación lineal de ondas planas:

$$\psi(x) = u(\vec{p})e^{-ip \cdot x} \quad (\text{modos de energía positivos } E > 0) \quad (2.126)$$

$$\psi(x) = v(\vec{p})e^{ip \cdot x} \quad (\text{modos de energía negativos } E < 0). \quad (2.127)$$

Por (2.117), los vectores columna  $u(\vec{p})$  y  $v(\vec{p})$  obedecen las restricciones

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0. \quad (2.128)$$

Para encontrar la forma de  $u(\vec{p})$  y  $v(\vec{p})$  en cualquier marco inercial, hacemos un boost en alguna dirección arbitraria para  $\vec{p}$ . Obtenemos

$$u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}} \xi^s \\ \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad v^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}} \eta^s \\ -\sqrt{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (2.129)$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  son espinores de dos componentes que convencionalmente normalizamos usando  $\xi^\dagger \xi = 1$ . Una elección útil para estos espinores serían los estados propios de  $\sigma^3$ .

Para hacer un escalar de Lorentz definimos

$$\bar{u}(\vec{p}) = u^\dagger(\vec{p})\gamma^0. \quad (2.130)$$

Entonces

$$\bar{u}u = 2m\xi^\dagger \xi \quad (2.131)$$

será nuestra condición de normalización. Análogamente la condición de normalización para  $v(\vec{p})$  es

$$\bar{v}^r v^s = -2m\delta^{rs} \quad (2.132)$$

### Propagador de Dirac

Al realizar la segunda cuantización del campo, obtenemos las expresiones para los operadores del campo [5]

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s [a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}s^\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x}]; \quad (2.133)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s [b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^{s^\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x}]. \quad (2.134)$$

Las amplitudes de propagación para el campo son

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s u_a^s(p) \bar{u}_b^s(p) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sum_s v_a^s(p) \bar{v}_b^s(p) e^{-ip \cdot (y-x)} \\ &= -(i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (y-x)}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Similarmente definimos

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (2.137)$$

que bajo las condiciones de frontera de Feynman (los contornos usados con  $D_F(x-y)$ ) resulta ser

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle, & x^0 > y^0 \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle, & x^0 < y^0 \end{cases} \\ &\equiv \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.138)$$

en este caso definimos al operador de orden temporal con un signo menos cuando los operadores son intercambiados. Análogamente se puede verificar que  $S_F(x-y)$  es una función de Green del operador de Dirac  $(i\not{\partial} - m)$ .



### 2.3.4. Reglas de Feynman para QED espinorial

En el capítulo 4 usaremos la descomposición espín-orbital para calcular la dispersión 2-fotón a nivel árbol, por lo que es de interés hacer la comparativa con el método estándar, esto es; con los diagramas de Feynman. Por ese motivo en esta parte introducimos los diagramas de Feynman para QED espinorial [5], que nos permiten visualizar interacciones entre partículas.

1. Para cada electrón entrante y saliente se dibuja una línea sólida con una flecha: la primera apunta hacia el vértice y la segunda en sentido opuesto al vértice. Se les etiqueta con cuadrimomento  $p_i$  y  $p'_i$
2. Para cada positrón entrante y saliente se dibuja una línea sólida con una flecha: la primera apuntando en sentido opuesto al vértice y la segunda hacia el vértice. Se les etiqueta con un signo menos en su cuadrimomento  $-p_i$  y  $-p'_i$ .
3. Para cada fotón entrante y saliente se dibuja una línea ondulada con una flecha: la primera apuntando hacia el vértice y la segunda en sentido opuesto. Se les etiqueta con un cuadrimomento  $k_i$  y  $k'_i$
4. El único vértice permitido une dos líneas sólidas, una con una flecha apuntando hacia el vértice y la otra en sentido opuesto, y una línea ondulada cuya flecha puede apuntar en cualquier dirección. Éste vértice debe unir todos las líneas externas, así como las posibles líneas internas que se necesiten. De esta manera se dibujan todos los posibles diagramas topológicamente inequivalentes.
5. Se asigna a cada línea interna su propio cuadrimomento y se usa la conservación de momento en cada vértice.
6. El valor de cada diagrama consiste de los siguientes factores:
  - fermión interno;  $i \frac{(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$ ,
  - fotón interno;  $-i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$  (en norma de Feynman),
  - fotón externo;  $\epsilon^\mu(k)$ ,
  - vértice;  $-ie\gamma^\mu$ ,
  - cada lazo fermiónico contribuye con un signo menos,

- se integra sobre cada momento interno, esto es, sobre todos los momentos desconocidos o bien cuyos valores no son fijados por conservación del momento.

# Capítulo 3

## Formalismo Línea de mundo

El formalismo línea de mundo, que a partir de aquí abreviaremos como WF (por sus siglas en inglés) ofrece una alternativa eficaz al método estándar para el cálculo de cantidades como acciones efectivas, amplitudes de dispersión, anomalías en TCC, entre otras. En el capítulo 1 se mostró una breve historia de este formalismo y algunas de sus aplicaciones. En este capítulo presentamos resultados elementales de WF en la QED escalar y espinorial, ya que es ahí donde se ve más claramente las ventajas que ofrece sobre los diagramas de Feynman.

Como se mencionó en el capítulo anterior, este capítulo y en lo posterior usaremos la convención en la signatura de la métrica de Minkowski  $(- + ++)$ , ya que es la estándar en este formalismo.

### 3.1. Escalar QED

#### 3.1.1. El propagador libre

Comencemos con el caso más simple, esto es, el propagador escalar libre. Es la función de Green para el operador de Klein-Gordon:

$$D_0^{xx'} = \langle 0|T\phi(x)\phi(x')|0\rangle = \langle x|\frac{1}{-\partial_\mu\partial^\mu + m^2}|x'\rangle \quad (3.1)$$

Si usamos las convenciones euclidianas, con la métrica del espacio de Minkowski de signatura  $(-+++)$  y hacemos una rotación de Wick (continuación analítica)

$$\begin{aligned} k^0 &= E = -k_0 \rightarrow ik_0, \\ x^0 &= t = -x_0 \rightarrow ix_0 \end{aligned}$$

podemos convertir el operador  $\partial_\mu \partial^\mu$  en el Laplaciano 4-dimensional.

$$\partial_\mu \partial^\mu \rightarrow \square = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (3.2)$$

Como es usual en TCC, trabajamos con las unidades naturales  $\hbar = c = 1$ .

Aprovechando la representación integral

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty dT e^{-TA} \quad (3.3)$$

podemos escribir el propagador relativista así:

$$D_0^{xx'} = \langle x | \int_0^\infty dT e^{-(\square + m^2)T} | x' \rangle \quad (3.4)$$

$$= \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \langle x | e^{\square T} | x' \rangle \quad (3.5)$$

Comparemos lo anterior con la fórmula derivada en el capítulo 2 para la amplitud de transición de la partícula libre en mecánica cuántica:

$$K(x, x', t) = \langle x | e^{-it\hat{H}} | x' \rangle = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x e^{i \int_0^t d\tau [\frac{m}{2} \dot{x}^2]} \quad (3.6)$$

con  $\hat{H} = \frac{-1}{2m} \nabla^2$ . Usemos (3.6) con los siguientes reemplazos formales:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &\longrightarrow \square \\ m &\longrightarrow \frac{1}{2} \\ \tau &\longrightarrow -i\tau \\ t &\longrightarrow -iT \end{aligned}$$

obtenemos

$$D_0^{xx'} = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2} \quad (3.7)$$

Ésta es la *representación Worldline de la integral de camino* del propagador relativista de una partícula escalar en el espacio-tiempo euclidiano de  $x'$  a  $x$ .

Ahora consideremos que el propagador se encuentra acoplado a un campo electromagnético externo  $A_\mu(x)$ . Comparando las ecuaciones (2.73) y (2.77) encontramos que la acción para esta partícula está dada por

$$S[x(\tau)] = \int_0^T d\tau \left( \frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie\dot{x} \cdot A(x(\tau)) \right) \quad (3.8)$$

Así, la expresión para el propagador queda

$$D^{xx'} = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left( \frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie\dot{x} \cdot A(x(\tau)) \right)} \quad (3.9)$$

Similarmente se introduce la *acción efectiva* de una partícula escalar en el campo de fondo:

$$\Gamma[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left( \frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie\dot{x} \cdot A(x(\tau)) \right)} \quad (3.10)$$

lo cual representa integrales de camino Worldline sobre trayectorias cerradas que están relacionados con las acciones efectivas a un lazo de la teoría cuántica de campos. Al considerar trayectorias cerradas aparece una arbitrariedad de la elección del origen de la trayectoria; ésta simetría adicional traslacional se trata dividiendo por la longitud de la circunferencia misma ( $dT/T$ ). Físicamente estas trayectorias sólo pueden pertenecer a partículas virtuales, por tanto, la acción efectiva contiene los efectos cuánticos generados por tales partículas en el vacío para el campo de fondo.

### 3.1.2. Amplitud de dispersión N-fotón a nivel árbol

Usemos la expresión para el propagador de una partícula escalar acoplada a un campo electromagnético  $A^\mu$  para el cálculo de las amplitudes de dispersión N-fotón a nivel árbol.

Esto es, consideramos que la partícula se desplaza en el espacio-tiempo Euclidiano mientras absorbe o emite un número fijo pero arbitrario de fotones, cada uno con un momento  $k$  y polarización  $\varepsilon$ . Para ello partamos de la ecuación (3.9):

$$D^{xx'} = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left( \frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie \dot{x} \cdot A(x(\tau)) \right)} \quad (3.11)$$

Ahora consideremos a  $A^\mu$  como una suma de  $N$  ondas planas:

$$A^\mu(x) = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^\mu e^{ik_j \cdot x} \quad (3.12)$$

entonces

$$D_{scal}^{xx'} = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left( \frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie \sum_{j=1}^N \dot{x} \cdot \varepsilon_j e^{ik_j \cdot x} \right)} \quad (3.13)$$

El subíndice scal denota que estamos trabajando con escalares. Expandamos la exponencial que involucra la interacción con  $A^\mu$  en serie de potencias:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -ie \int_0^T d\tau \sum_{j=1}^N \dot{x} \cdot \varepsilon_j e^{ik_j \cdot x} \right\} &= 1 + (-ie) \int_0^T d\tau \sum_{j=1}^N \dot{x} \cdot \varepsilon_j e^{ik_j \cdot x} + \frac{(-ie)^2}{2!} \left[ \int_0^T d\tau \sum_{j=1}^N \dot{x} \cdot \varepsilon_j e^{ik_j \cdot x} \right]^2 + \\ &\dots + \frac{(-ie)^N}{N!} \left[ \int_0^T d\tau \sum_{j=1}^N \dot{x} \cdot \varepsilon_j e^{ik_j \cdot x} \right]^N + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sólo el término de orden  $N$  en  $A^\mu$  tiene contribuciones físicas para nuestra cantidad de interés, el cual es

$$\frac{(-ie)^N}{N!} \left[ \int_0^T d\tau \sum_{j=1}^N \dot{x}(\tau) \cdot \varepsilon_j e^{ik_j \cdot x(\tau)} \right]^N. \quad (3.15)$$

De estos  $N^N$  términos nos interesan sólo aquellos con polarización y momento distintos; es decir:

$$\frac{(-ie)^N}{N!} \left[ \int_0^T d\tau_1 \dot{x}(\tau_1) \cdot \varepsilon_1 e^{ik_1 \cdot x(\tau_1)} \int_0^T d\tau_2 \dot{x}(\tau_2) \cdot \varepsilon_2 e^{ik_2 \cdot x(\tau_2)} \dots \int_0^T d\tau_N \dot{x}(\tau_N) \cdot \varepsilon_N e^{ik_N \cdot x(\tau_N)} \right] \quad (3.16)$$

Como hay  $N!$  formas de obtener lo anterior, nos queda

$$(-ie)^N \left[ \int_0^T d\tau_1 \left( \dot{x}(\tau_1) \cdot \varepsilon_1 e^{ik_1 \cdot x(\tau_1)} \right) \int_0^T d\tau_2 \left( \dot{x}(\tau_2) \cdot \varepsilon_2 e^{ik_2 \cdot x(\tau_2)} \right) \cdots \int_0^T d\tau_N \left( \dot{x}(\tau_N) \cdot \varepsilon_N e^{ik_N \cdot x(\tau_N)} \right) \right] \quad (3.17)$$

que podemos escribir como

$$(-ie)^N V_{scal}^\gamma[k_1, \varepsilon_1] \cdots V_{scal}^\gamma[k_N, \varepsilon_N] \quad (3.18)$$

con

$$V_{scal}^\gamma[k, \varepsilon] \equiv \int_0^T d\tau \dot{x}(\tau) \cdot \varepsilon e^{ik \cdot x(\tau)} \quad (3.19)$$

llamado el *operador vértice del fotón*, algo análogo es usado en la teoría de cuerdas para describir la absorción o emisión de fotones por una cuerda [12]. Con esto, la amplitud N-fotón queda

$$D_{scal}^{xx'}[k_1, \varepsilon_1; \cdots; k_N, \varepsilon_N] = (-ie)^N \int_0^N dT e^{-Tm^2} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2} \times V_{scal}^\gamma[k_1, \varepsilon_1] \cdots V_{scal}^\gamma[k_N, \varepsilon_N] \quad (3.20)$$

A partir de este punto comienza nuestra odisea para realizar el cálculo de la integral de camino (3.20). Comenzamos aplicando el siguiente truco:

$$\dot{x}_j \cdot \varepsilon_j e^{ik_j \cdot x_j} = e^{ik_j \cdot x_j + \dot{x}_j \cdot \varepsilon_j} \Big|_{\text{lin } \varepsilon_j}, \quad (3.21)$$

lo cual significa que tenemos que hacer una expansión de la exponencial y tomar sólo los términos lineales en  $\varepsilon_j$ . Reescribimos a (3.20) como

$$D_{scal}^{xx'}[k_1, \varepsilon_1; \cdots; k_N, \varepsilon_N] = (-ie)^N \int_0^\infty dT e^{-Tm^2} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2 + \sum_{j=1}^N (ik_j \cdot x_j + \varepsilon_j \cdot \dot{x}_j)} \Big|_{\text{lin } \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N} \quad (3.22)$$

Resulta conveniente absorber las condiciones de frontera parametrizando la trayectoria ar-

bitraria  $x(\tau)$  entre  $x'$  y  $x$  de la siguiente forma:

$$x(\tau) = x' + (x - x')\frac{\tau}{T} + q(\tau) \quad (3.23)$$

donde podemos interpretar los primeros dos términos como la trayectoria clásica entre los puntos y a  $q(\tau)$  como una desviación de la misma (véase figura (3.1)). Entonces  $q(\tau)$  satisface las condiciones de frontera de Dirichlet:

$$q(0) = q(T) = 0 \quad (3.24)$$

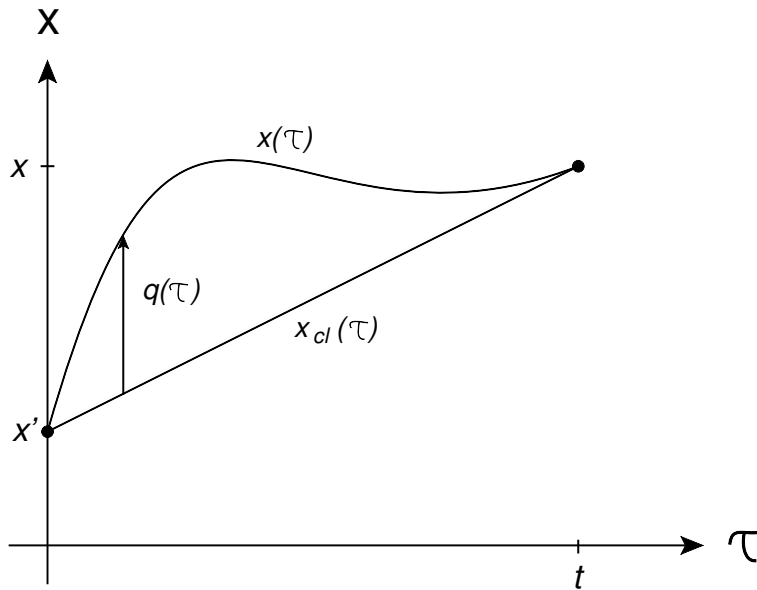


Figura 3.1: Parametrización de trayectorias

Así transformamos la integral funcional sobre  $x(\tau)$  en una sobre  $q(\tau)$ :

$$\int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) \longrightarrow \int_{q(0)=0}^{q(T)=0} \mathcal{D}q(\tau) \quad (3.25)$$

Aplicando esta parametrización tenemos que

$$\int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4} = \frac{(x - x')^2}{4T} + \int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4} \quad (3.26)$$



y

$$\int_0^T d\tau e^{ik \cdot x(\tau) + \varepsilon \cdot \dot{x}(\tau)} = \int_0^T d\tau e^{ik \cdot (x' + (x-x')\frac{\tau}{T}) + ik \cdot q + (x-x') \cdot \frac{\varepsilon}{T} + \varepsilon \cdot \dot{q}} \quad (3.27)$$

Con estos resultados podemos escribir a (3.22) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & D_{scal}^{xx'}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] \\ &= (-ie)^N \int_0^T dT e^{-m^2 T} e^{-\frac{(x-x')^2}{4T}} \prod_{j=1}^N \int_0^T d\tau_j e^{\sum_{k=1}^N \left[ ik_j \cdot (x' + (x-x')\frac{\tau}{T}) + \frac{(x-x') \cdot \varepsilon_j}{T} \right]} \\ &\times \int_{q(0)=0}^{q(T)=0} \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T \left[ \frac{\dot{q}^2}{4} - j(\tau) \cdot q(\tau) \right]} \Bigg|_{\lim \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N} \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde

$$j^\mu(\tau) = \sum_{j=1}^N \left( ik_j^\mu - \varepsilon_j^\mu \partial_\tau \right) \delta(\tau - \tau_j) \quad (3.29)$$

y recordando

$$\int_0^T d\tau \delta'(\tau - \tau_i) q(\tau) = -q(\tau_i). \quad (3.30)$$

Notemos que la integral sobre  $q(\tau)$  es del tipo Gaussiana. Recordemos las integrales Gaussianas en  $n$  dimensiones:

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{4} x \cdot M \cdot x} = (4\pi)^{n/2} (\det M)^{-n/2} \quad (3.31)$$

$$\frac{\int d^n x e^{-\frac{1}{4} x \cdot M \cdot x + j \cdot x}}{\int d^n x e^{-\frac{1}{4} x \cdot M \cdot x}} = e^{j \cdot M^{-1} \cdot j} \quad (3.32)$$

donde  $M$  es una matriz de  $n \times n$  dimensiones y asumimos que es simétrica y positiva definida.

Con la aplicación de (3.31) y (3.32) se tiene

$$\int_{q(0)=0}^{q(T)=0} \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4}} = \text{Det} \left[ -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right]_{DBC} \quad (3.33)$$

y

$$\frac{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[ \frac{\dot{q}^2}{4} - j(\tau) \cdot q(\tau) \right]}}{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4}}} = e^{\frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' G(\tau, \tau') j(\tau) \cdot j(\tau')}, \quad (3.34)$$

$G(\tau, \tau')$  es la función de Green del operador  $M = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ . Para encontrar el determinante

de (3.33) notemos que

$$\text{Det} \left[ -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] = \prod_{\lambda} \lambda \quad (3.35)$$

para los eigenvalores  $\lambda$  que formen una base de eigenfunciones  $f(\tau)$  del operador  $M$ , es decir

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} f(\tau) = \lambda f(\tau) \quad (3.36)$$

Las eigenfunciones que cumplen las condiciones de frontera de Dirichlet son  $f(\tau) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$ , con eigenvalores  $\left(\frac{n\pi}{2T}\right)^2$ . Con la función  $\zeta$  de regularización [4] encontramos

$$\text{Det} \left[ -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right]_{DBC} = (4\pi T)^{-D/2}. \quad (3.37)$$

La función de Green Worldline que satisface las condiciones de frontera de Dirichlet es

$$G(\tau, \tau') = -2\Delta(\tau, \tau') \quad (3.38)$$

con

$$\Delta(\tau, \tau') = \frac{1}{2} |\tau - \tau'| - \frac{1}{2}(\tau + \tau') + \frac{\tau\tau'}{T}. \quad (3.39)$$

Pues satisface la ecuación de Green:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} G(\tau, \tau') &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [\Delta(\tau, \tau')] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ \frac{1}{2} |\tau - \tau'| - \frac{1}{2}(\tau + \tau') + \frac{\tau\tau'}{T} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} [\sigma(\tau - \tau')] \\ &= \delta(\tau - \tau'), \end{aligned} \quad (3.40)$$

y se vuelve cero en los puntos sobre la frontera:

$$\begin{aligned} G(0, \tau') &= \frac{1}{2} |-\tau'| - \frac{1}{2}\tau' = 0 \\ G(\tau, 0) &= \frac{1}{2} |\tau| - \frac{1}{2}\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

En lo que sigue usaremos la siguiente notación:

$$\partial_\tau \Delta(\tau, \tau') = \bullet \Delta(\tau, \tau'), \quad \partial_{\tau'} \Delta(\tau, \tau') = \Delta^\bullet(\tau, \tau'), \quad \partial_\tau \partial_{\tau'} \Delta(\tau, \tau') = \bullet \Delta^\bullet(\tau, \tau') \quad (3.42)$$

así

$$\bullet \Delta(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \sigma(\tau - \tau') + \frac{\tau'}{T} - \frac{1}{2} \quad (3.43)$$

$$\bullet \Delta^\bullet(\tau, \tau') = -\delta(\tau - \tau') + \frac{1}{T} \quad (3.44)$$

Por tanto, para resolver la integral funcional sobre  $q(\tau)$  sólo falta calcular las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' G(\tau, \tau') j(\tau) \cdot j(\tau') \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^N [k_i \cdot k_j \Delta(\tau_i, \tau_j) - 2ik_j \cdot \varepsilon_i \partial_{\tau_i} \Delta(\tau_i, \tau_j) + \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \partial_{\tau_i} \partial_{\tau_j} \Delta(\tau_i, \tau_j)] \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^N [k_i \cdot k_j \Delta_{ij} - 2ik_j \cdot \varepsilon_i \bullet \Delta_{ij} - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \bullet \Delta_{ij}^\bullet] \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por tanto, reescribimos a (3.28) como sigue

$$\begin{aligned} & D_{scal}^{xx'} [k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] \\ &= (-ie)^N \int_0^\infty dT (4\pi T)^{-D/2} e^{-m^2 T} e^{-\frac{(x-x')^2}{4T}} \prod_{j=1}^N \int_0^T d\tau_j e^{\sum_{k=1}^N \left[ ik_k \cdot \left( x' + \frac{(x-x')\tau_k}{T} \right) + (x-x') \cdot \frac{\varepsilon_j}{T} \right]} \\ & \times e^{\sum_{i,j=1}^N [k_i \cdot k_j \Delta_{ij} - 2ik_j \cdot \varepsilon_i \bullet \Delta_{ij} - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \bullet \Delta_{ij}^\bullet]} \Bigg|_{\text{lin } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N} \end{aligned} \quad (3.46)$$

La expresión anterior es el análogo a la “*fórmula maestra*” derivada por Bern y Kosower [1] en teoría de cuerdas y rederivado por Strassler [10] para la amplitud N-fotón a un lazo.

### 3.1.3. Amplitud N-fotón a una lazo

Ahora consideraremos el caso especial donde una partícula escalar se mueve en una trayectoria cerrada bajo las mismas condiciones que el apartado anterior. Entonces partimos de la

expresión (3.10):

$$\Gamma[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4}\dot{x}^2 + i\dot{x}\cdot A(x(\tau)))} \quad (3.47)$$

Repetimos los mismos pasos desde la ecuación (3.12) hasta (3.22) y tenemos

$$\begin{aligned} & \Gamma_{scal}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] \\ &= (-ie)^N \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-Tm^2} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4}\dot{x}^2 + \sum_{j=1}^N (ik_j \cdot x_j + \varepsilon_j \cdot \dot{x}_j))} \Bigg|_{\text{lin } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N} \end{aligned} \quad (3.48)$$

En este caso surge un problema adicional: la integral de camino completa sobre  $x$  no es positiva definida debido a la existencia de lazos constantes, en los cuales desaparece el término cinético como respuesta a un eigenvalor cero del operador  $M$ , lo cual también es llamado "*modo cero*". Como solución definimos el centro de masa del lazo (o posición promedio):

$$x_0 = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau x^\mu(\tau). \quad (3.49)$$

Con esto podemos parametrizar las trayectorias como

$$x(\tau) = x_0 + q(\tau) \quad (3.50)$$

de esta manera obtenemos una integral funcional sobre  $q(\tau)$ . Ahora la variable  $q(\tau)$  satisface condiciones de frontera periódicas y obedece la ecuación

$$\int_0^T d\tau q^\mu(\tau) = 0. \quad (3.51)$$

Para resolver la integral sobre  $x_0$  usemos que  $\dot{x} = \dot{q}$ , así

$$\int_0^T d^n x_0 e^{i \sum_{j=1}^N k_j \cdot x_0} = (2\pi)^n \delta \left( \sum_{j=1}^N k_j \right). \quad (3.52)$$

que expresa la conservación global del momento. Obtenemos los mismos eigenvalores que en la sección anterior para el operador  $M$  y con ello el mismo determinante funcional. La

función de Green de  $M$  correspondiente al tratamiento anterior del modo cero es:

$$G_B(\tau, \tau') = |\tau - \tau'| - \frac{(\tau - \tau')^2}{T} - \frac{T}{6} \quad (3.53)$$

El subíndice  $B$  refiere a que estamos trabajando en el caso bosónico, posteriormente usaremos  $F$  refiriendo al caso fermiónico. Para cálculos en el espacio plano la constante  $T/6$  puede ser omitida, entonces tenemos

$$G_B(\tau, \tau') \equiv |\tau - \tau'| - \frac{(\tau - \tau')^2}{T}. \quad (3.54)$$

Calculemos su primer y segunda derivada:

$$\dot{G}_B(\tau, \tau') = \sigma(\tau - \tau') - 2\frac{\tau - \tau'}{T}, \quad (3.55)$$

$$\ddot{G}_B(\tau, \tau') = 2\delta(\tau - \tau') - \frac{2}{T}. \quad (3.56)$$

La notación es similar a la sección anterior; el punto denota la primer derivada respecto al primer argumento. Para resolver la integral sobre  $q(\tau)$  usamos las fórmulas integrales (3.31) y (3.32), también la definición (3.29). Obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[ \frac{\dot{q}^2}{4} - j(\tau) \cdot q(\tau) \right]}}{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4}}} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' G_B(\tau, \tau') j(\tau) \cdot j(\tau')} \\ & = \exp \left\{ \sum_{j,k=1}^N \left[ \frac{1}{2} G_B(\tau_j, \tau_k) k_j \cdot k_k - ik_j \cdot \varepsilon_k \dot{G}_B(\tau_j, \tau_k) + \frac{1}{2} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_k \ddot{G}_B(\tau_j, \tau_k) \right] \right\} \\ & = \exp \left\{ \sum_{j,k=1}^N \left[ \frac{1}{2} k_j \cdot k_k G_{Bjk} - ik_j \cdot \varepsilon_k \dot{G}_{Bjk} + \frac{1}{2} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_k \ddot{G}_{Bjk} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Donde hemos usado la misma notación que en el apartado anterior. Usando la normalización absoluta de la integral de camino libre llegamos a la *fórmula maestra* de Bern y Kosower:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{scal}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] \\
&= (-ie)^N (2\pi)^n \delta\left(\sum_{i=1}^N k_i\right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-Tm^2} (4\pi T)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \\
&\times \exp\left\{ \sum_{j,k=1}^N \left[ \frac{1}{2} k_j \cdot k_k G_{Bjk} - ik_j \cdot \varepsilon_k \dot{G}_{Bjk} + \frac{1}{2} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_k \ddot{G}_{Bjk} \right] \right\} \Big|_{\text{lin } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}. \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Ésta fórmula, obtenida por primera vez por Strassler [10] usando este método, representa la amplitud N-fotón a un lazo en QED escalar, su gran importancia radica en que es completamente válida bajo condiciones off-shell (fuera de la capa de masa).

## 3.2. QED espinorial

### 3.2.1. Propagador vestido

Consideremos un fermión de espín 1/2 propagándose desde una posición  $x'$  con estado de espín  $\beta$ , a la posición  $x$  con estado de espín  $\alpha$  mientras interactúa con un campo electromagnético  $A_\mu$ , entonces su propagador se puede escribir:

$$S_{\beta\alpha}^{xx'} \equiv \langle x, \alpha | \frac{1}{\not{p} + e\mathcal{A} + m} | \beta, x' \rangle. \quad (3.59)$$

Notemos que  $S_{\beta\alpha}^{xx'}$  es una función de Green del operador de Dirac  $(\not{p} + e\mathcal{A} - m)$ . Multipliquemos y dividamos a (3.59) por  $[m - (\not{p} + e\mathcal{A})]$ , también usemos que

$$m^2 - (\not{p} + e\mathcal{A})^2 = m^2 + (\not{p} + e\mathcal{A}) + \frac{ie}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}, \quad (3.60)$$

así, (3.59) se convierte en

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha}^{xx'} &= [m - (\not{p} + e\mathcal{A})]_\beta^\rho \langle x, \alpha | \frac{1}{m^2 + (\not{p} + e\mathcal{A}) + \frac{ie}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}} | \rho, x' \rangle \\
&= [m + i\gamma \cdot (\partial + ieA)]_\beta^\rho K_{\rho\alpha}^{xx'}. \quad (3.61)
\end{aligned}$$

$K_{\rho\alpha}^{xx'}$  resulta ser el kernel del propagador  $S_{\beta\alpha}^{xx'}$ . Queremos una representación integral para la expresión anterior, para ello repetimos las mismas técnicas que en la QED escalar y llegamos a

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha}^{xx'} &= [m - i\gamma \cdot (\partial + ieA)]_{\beta}^{\rho} \int_0^{\infty} dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[ \frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x}(\tau) \cdot A(x(\tau)) \right]} \\ &\quad \times \langle x, \alpha | e^{-T \left[ \frac{ie}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] F_{\mu\nu} \right]} | \rho, x' \rangle \\ &= [m - i\gamma \cdot (\partial + ieA)]_{\beta}^{\rho} \int_0^{\infty} dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[ \frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x}(\tau) \cdot A(x(\tau)) \right]} \mathcal{S}_{\rho\alpha}[x, A]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

A  $\mathcal{S}_{\rho\alpha}[x, A]$  se le llama “factor de espín”, que para líneas abiertas tiene la forma

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta}[x, A] = \mathcal{P} \left[ e^{-\frac{ie}{2} \int_0^T d\tau \gamma^{\mu} F_{\mu\nu}[x(\tau)] \gamma^{\nu}} \right]_{\alpha\beta}, \quad (3.63)$$

donde  $\mathcal{P}$  es el operador de ordenamiento de camino (path ordering). A su vez, (3.63) tiene una representación integral en términos de *variables Grassmann* [11]:

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta}[x, A] = 2^{-D/2} \text{Symb}^{-1} \left\{ \int_A \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[ \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} - ie(\psi + \eta)^{\mu} F_{\mu\nu}[x(\tau)] (\psi + \eta)^{\nu} \right]} \right\}_{\alpha\beta}, \quad (3.64)$$

donde el subíndice  $A$  en la integral funcional indica condiciones de frontera antiperiódicas y *Symb* es llamado *mapeo simbólico*, definido por

$$\text{Symb}(\gamma^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}) \equiv (-i\sqrt{2})^n \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n, \quad (3.65)$$

y  $\gamma^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$  denota el producto totalmente antisimétrico de matrices gamma:

$$\gamma^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \gamma^{\alpha_{\pi(1)}} \gamma^{\alpha_{\pi(2)}} \dots \gamma^{\alpha_{\pi(n)}}. \quad (3.66)$$

Con esto podemos reescribir a (3.62) de la siguiente forma

$$S_{\beta\alpha}^{xx'} = [m - i\gamma \cdot (\partial + ieA)]_{\beta}^{\rho} K_{\rho\alpha}^{xx'}, \quad (3.67)$$

donde

$$\begin{aligned}
 K_{\rho\alpha}^{xx'} &\equiv 2^{-D/2} \int_0^\infty d\tau e^{-mT^2} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^\tau \left[ \frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x}(\tau) \cdot A(x(\tau)) \right]} \\
 &\times \text{Symb}^{-1} \left\{ \int_A \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[ \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} - ie(\psi + \eta)^\mu F_{\mu\nu}[x(\tau)] (\psi + \eta)^\nu \right]} \right\}_{\rho\alpha}, \quad (3.68)
 \end{aligned}$$

que representa el Kernel de nuestro propagador (3.67).

### 3.2.2. Amplitud N-fotón a nivel árbol

Para extraer las amplitudes de dispersión partimos de (3.68) y fijamos al campo de fondo  $A_\mu$  como una suma de ondas planas:

$$A_\mu[x(\tau)] = \sum_{j=1}^N \varepsilon_{i\mu} e^{ik_j \cdot x(\tau)}, \quad (3.69)$$

de esta forma el tensor de campo electromagnético se puede escribir como

$$F_{\mu\nu}[x(\tau)] = i \sum_{j=1}^N f_{j\mu\nu} e^{ik_j \cdot x(\tau)}, \quad (3.70)$$

con  $f_{i\mu\nu} \equiv k_{i\mu} \varepsilon_{i\nu} - k_{i\nu} \varepsilon_{i\mu}$ . Hacemos los reemplazos anteriores y nuevamente procedemos como en el caso escalar: expandimos a orden N a (3.68) y tomamos sólo los términos con polarizaciones lineales y distintas. Obtenemos

$$\begin{aligned}
 K^{xx'}[A] &= (-ie)^N 2^{-D/2} \int_0^\infty d\tau e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4}} \\
 &\times \text{Symb}^{-1} \left\{ \int_A \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi}} \prod_{i=1}^N V_{spin}^\gamma[k_i, \varepsilon_i; \eta] \right\}, \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

con el operador de vértice

$$\begin{aligned}
 V_{spin}^\gamma[k, \varepsilon; \eta] &= \int_0^T d\tau [\varepsilon \cdot \dot{x}(\tau) + 2i\varepsilon \cdot (\psi + \eta) k \cdot (\psi + \eta)] e^{ik \cdot x(\tau)} \\
 &= \int_0^T d\tau [\varepsilon \cdot \dot{x}(\tau) - i(\psi + \eta) \cdot f \cdot (\psi + \eta)] e^{ik \cdot x(\tau)} \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

Podemos construir condiciones de frontera de Dirichlet para  $x(\tau)$  haciendo un cambio de variable como en el caso escalar (ec. (3.23)), además, si aplicamos el truco (3.21) el operador



de vértice se convierte en

$$V_{\eta}^{xx'}[k, \varepsilon] = \int_0^T d\tau e^{ik \cdot \hat{x}(\tau) + ik \cdot q(\tau) + \varepsilon \cdot \left(\frac{x_-}{T} + \dot{q}\right) + 2i\varepsilon \cdot \left(\psi + \frac{\eta}{2}\right) k \cdot \left(\psi + \frac{\eta}{2}\right)} \Big|_{lin \varepsilon}, \quad (3.73)$$

usando  $\hat{x}(\tau) = x' + (x - x')\frac{\tau}{T}$  y  $x_- = x - x'$ . Así nos queda la siguiente expresión para el kernel:

$$K^{xx'}[A] = (-ie)^N 2^{-D/2} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} e^{-\frac{x_-^2}{4T}} \int_{\text{DBC}} \mathcal{D}q(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{q}^2}{4}} \\ \times \text{Symb}^{-1} \left\{ \int_A \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi}} \prod_{i=1}^N V_{\eta}^{xx'}[k_i, \varepsilon_i] \right\} \Big|_{lin \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}. \quad (3.74)$$

### 3.2.3. Amplitud N-fotón a un lazo

Para hacer la generalización de la acción efectiva escalar al caso espinorial, agregamos la contribución espinorial por medio del *factor de espín* y un factor global de  $-1/2$  [3]:

$$\Gamma_{spin}[A] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{1}{4} \dot{x}^2 + ie \dot{x} \cdot A(x(\tau))\right)} \mathcal{S}[x, A]. \quad (3.75)$$

En este caso  $\mathcal{S}[x, A]$  tiene la siguiente representación integral [2]:

$$\mathcal{S}[x, A] = \oint_{A/P} \mathcal{D}\psi e^{-\int_0^T d\tau \left[\frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} - ie \psi^\mu F_{\mu\nu}(x(\tau)) \psi^\nu\right]}. \quad (3.76)$$

El subíndice  $A/P$  de la integral indica que la integral de camino es sobre el espacio de funciones antiperiódicas que anticonmutan en el tiempo propio:

$$\psi^\mu(\tau_1) \psi^\nu(\tau_2) = -\psi^\nu(\tau_2) \psi^\mu(\tau_1), \quad \psi^\mu(T) = -\psi^\mu(0).$$

Para obtener la amplitud N-fotón a un lazo usamos el mismo procedimiento que en el caso escalar, obtenemos

$$\Gamma_{spin}[k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N] = -\frac{1}{2} (-ie)^N \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2} \\ \times \int_{A/P} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi}} V_{spin}^\gamma[k_1, \varepsilon_1] \cdots V_{spin}^\gamma[k_N, \varepsilon_N]. \quad (3.77)$$

Ahora

$$V_{spin}^\gamma \equiv \int_0^T d\tau [\varepsilon \cdot \dot{x}(\tau) + 2i\varepsilon \cdot \psi(\tau)k \cdot \psi(\tau)] e^{ik \cdot x(\tau)} \quad (3.78)$$

es el operador vértice para la absorción o emisión de un fotón por un espinor. La generalización de la fórmula maestra de Bern y Kosower para el caso espinorial requiere del uso de supersimetría Wordline, lo cual no es de nuestro interés presentar en este trabajo.

### 3.2.4. Regla de reemplazo

Mostraremos un caso especial de una regla más general en QCD derivada por Bern y Kosower [1], con la cual podemos ir del caso escalar en la amplitud N fotón a un lazo al caso espinorial. Para ilustrar esta regla consideremos a (3.58) con  $N = 2$ , esto es; la polarización del vacío:

$$\begin{aligned} \Gamma_{scal}[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] &= (-ie)^2 (2\pi)^2 \delta(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\ &\times \exp \left\{ \sum_{j,k=1}^2 \left[ \frac{1}{2} k_j \cdot k_k G_{Bjk} - i k_j \cdot \varepsilon_k \dot{G}_{Bjk} + \frac{1}{2} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_k \ddot{G}_{Bjk} \right] \right\} \Big|_{\text{lin } \varepsilon_1 \varepsilon_2} . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Expandiendo la exponencial nos da

$$\begin{aligned} \Gamma_{scal}[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] &= (-ie)^2 (2\pi)^2 \delta(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \\ &\times \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \left[ (-i)^2 k_1 \cdot \varepsilon_2 \dot{G}_{B12} k_2 \cdot \varepsilon_1 \dot{G}_{B21} + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ddot{G}_{B12} \right] e^{k_1 k_2 G_{B12}} . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Definimos

$$P_2 = k_1 \cdot \varepsilon_2 \dot{G}_{B12} k_2 \cdot \varepsilon_1 \dot{G}_{B21} - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ddot{G}_{B12}, \quad (3.81)$$

así

$$\Gamma_{scal}[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] = (-ie)^2 (2\pi)^2 \delta(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 (-i)^2 P_2 e^{k_1 k_2 G_{B12}} . \quad (3.82)$$

Es de interés eliminar segundas derivadas en  $G_{B12}$ , para ello integramos por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^T d\tau_2 \int_0^T d\tau_1 \ddot{G}_{B12} e^{G_{B12}k_1 \cdot k_2} &= \dot{G}_{B12} e^{G_{B12}k_1 \cdot k_2} \Big|_0^T - \int_0^T d\tau_2 \int_0^T d\tau_1 \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B12} k_1 \cdot k_2 e^{G_{B12}k_1 \cdot k_2} \\ &= \int_0^T d\tau_2 \int_0^T d\tau_1 \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B21} k_1 \cdot k_2 e^{G_{B12}k_1 \cdot k_2}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde hemos usado la antisimetría de  $G_B$  en sus índices. Así, podemos transformar el polinomio  $P_2$  en  $Q_2$ , el cual sólo contiene primeras derivadas en  $G_B$ :

$$P_2 \rightarrow Q_2 = \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B21} (\varepsilon_1 \cdot k_2 \varepsilon_2 \cdot k_1 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 k_1 \cdot k_2). \quad (3.84)$$

Así

$$\Gamma_{scal}[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] = (-ie)^2 (2\pi)^D \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 (-i)^2 Q_2 e^{k_1 \cdot k_2 G_{B12}}. \quad (3.85)$$

Usemos la conservación de momento para definir  $k \equiv k_1 = -k_2$ , obtenemos

$$\Gamma_{scal}[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] = (2\pi)^D \varepsilon_1 \cdot \Pi_{scal} \cdot \varepsilon_2 \quad (3.86)$$

con

$$\Pi_{scal}^{\mu\nu}(k) = e^2 (k^2 \delta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B21} e^{k_1 \cdot k_2 G_{B12}} \quad (3.87)$$

Ahora calculemos la polarización del vacío usando la ecuación (3.77):

$$\begin{aligned} \Gamma_{spin}(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2) &= -\frac{1}{2} (-ie^2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}\psi \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \\ &\times \varepsilon_{1\mu} (\dot{x}_1^\mu + 2i\psi_1^\mu \psi_1 \cdot k_1) e^{ik_1 \cdot x_1} \varepsilon_{2\nu} (\dot{x}_2^\nu + 2i\psi_2^\nu \psi_2 \cdot k_2) e^{ik_2 \cdot x_2} e^{-\int_0^T d\tau (\frac{1}{4} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi})}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

En lugar de calcular las integrales sobre  $x$  y  $\psi$  como en el caso escalar, usemos el teorema de Wick. Para ello notemos que las contracciones de Wick no mezclan los campos  $x$  y  $\psi$ , entonces la integral sobre  $x$  queda igual que en el caso escalar y lo único que queda calcular es la integral sobre  $\psi$ . Necesitamos la función de Green para el operador  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  que actúa en el

espacio de funciones antiperiódicas, que resulta ser

$$G_F(\tau - \tau') \equiv 2 \langle \tau | \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^{-1} | \tau' \rangle = \sigma(\tau - \tau'). \quad (3.89)$$

Así encontramos las reglas de contracción de Wick para campos Grassmann:

$$\begin{aligned} \langle \psi^\mu(\tau_1) \psi^\nu(\tau_2) \rangle &= \frac{1}{2} G_F(\tau_1 - \tau_2) \delta^{\mu\nu}, \\ \langle \psi^\mu(\tau_1) \psi^\nu(\tau_2) \psi^\alpha(\tau_3) \psi^\beta(\tau_4) \rangle &= \frac{1}{4} \left[ G_{F12} G_{F34} \delta^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} - G_{F13} G_{F24} \delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} \right. \\ &\quad \left. + G_{F14} G_{F23} \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (3.90)$$

En la última igualdad hemos usado la notación  $G_F(\tau_i - \tau_j) = G_{Fij}$ . Usando (3.90) en (3.88) tenemos

$$(2i)^2 \langle \psi_1^\mu \psi_1 \cdot k_1 \psi_2^\nu \psi_2 \cdot k_2 \rangle = G_{F12}^2 (k_1 \cdot k_2 \delta^{\mu\nu} - k_2^\mu k_1^\nu) \quad (3.91)$$

Con esto (3.88) queda

$$\Gamma_{spin}[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] = (2\pi)^D \varepsilon_1 \cdot \Pi_{spin} \cdot \varepsilon_2, \quad (3.92)$$

pero con

$$\begin{aligned} \Pi_{spin}^{\mu\nu}(k) &= -2e^2 (k^2 \delta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} (4\pi T)^{-\frac{D}{2}} \\ &\quad \times \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \left( \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B21} - G_{F12} G_{F21} \right) e^{k_1 \cdot k_2 G_{B12}} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Al analizar estos resultados observamos que las integrales sobre el tiempo propio de (3.93) las podemos obtener a partir de (3.87) haciendo el siguiente reemplazo:

$$\dot{G}_{B12} \dot{G}_{B21} \rightarrow \dot{G}_{B12} \dot{G}_{B21} - G_{F12} G_{F21}. \quad (3.94)$$

En general, al realizar la expansión de la exponencial de (3.58) obtenemos algo de la forma  $P_N e^{\frac{1}{2} \sum k_i k_j G_{Bij}}$ , donde  $P_N$  es un polinomio en  $\dot{G}_B$  y  $\ddot{G}_B$ . Es de interés transformar a  $P_N$  en un polinomio  $Q_N$  que no dependa de segundas derivadas en  $G_B$ , para ello aplicamos una

integración por partes, obteniendo

$$P_N e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} k_i \cdot k_j G_{Bij}} \xrightarrow{\text{IBP}} Q_N e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} k_i \cdot k_j G_{Bij}}. \quad (3.95)$$

Ahora escribimos a  $Q_N$  usando “ $\tau$ -ciclos”, definidos como productos de  $\dot{G}_{Bij}$  de la forma  $\dot{G}_{Bi_1i_2} \dot{G}_{Bi_3i_4} \cdots \dot{G}_{Bi_Ni_1}$ , para lo cual necesitamos usar la antisimetría de  $\dot{G}_B$ . De esta manera el integrando del lazo espinorial puede obtenerse del lazo escalar haciendo en cada  $\tau$ -ciclo de  $Q_N$  el siguiente reemplazo:

$$\dot{G}_{Bi_1i_2} \dot{G}_{Bi_3i_4} \cdots \dot{G}_{Bi_Ni_1} \longrightarrow \dot{G}_{Bi_1i_2} \dot{G}_{Bi_3i_4} \cdots \dot{G}_{Bi_Ni_1} - G_{Fi_1i_2} G_{Fi_3i_4} \cdots G_{i_Ni_1} \quad (3.96)$$

y agregando el factor  $-2$  como lo vimos en nuestro ejemplo para  $N=2$ .

# Capítulo 4

## Descomposición espín-orbital

En el capítulo anterior desarrollamos expresiones para calcular dispersiones de fotones a nivel árbol y a nivel un lazo en la QED escalar, sin embargo, para la QED espinorial no calculamos las expresiones (3.74) y (3.77) para tratar de llegar a una "fórmula maestra". Hacer la generalización de las expresiones (3.46) y (3.58) para el caso espinorial puede llevarse a cabo por medio de 3 formas:

- Cálculo de integrales Gaussianas: proceso difícil y tardado, requiere del uso de una super simetría Worldline.
- Regla de reemplazo: mostrado en el capítulo anterior para la dispersión 2 fotón a un lazo.
- Descomposición espín orbital: aprovecha la forma del operador de vértice para separar los términos en interacción orbital y espinorial.

En este capítulo calculamos la dispersión 2 fotón a nivel árbol usando una descomposición espín orbital y posteriormente comparamos con los resultados del modelo estándar (utilizando diagramas de Feynman).

Comencemos nuestra discusión reescribiendo el Kernel (3.71) en términos de funciones de correlación:

$$K^{xx'}[A] = (-ie)^N 2^{-D/2} Symb^{-1} \left\{ \int_0^\infty d\tau e^{-m^2 T} \prod_{j=1}^N \int_0^T d\tau_j \langle V_{spin}^\gamma[k_j, \varepsilon_j; \eta] \rangle \right\}. \quad (4.1)$$

Notemos que si  $f_{i\mu\nu} = 0$  el operador de vértice (3.72) se reduce al del caso escalar, por lo que el término que contiene  $\varepsilon \cdot \dot{x}(\tau)$  representa interacción orbital, consecuentemente el término restante representa la interacción espinorial. Lo anterior es lo que motiva a pensar que podemos escribir al Kernel de la siguiente forma:

$$K^{xx'}[A] = K_N = \sum_{S=0}^N K_{NS}. \quad (4.2)$$

El subíndice  $N$  denota el número de fotones interactuantes y  $K_{NS}$  representa la contribución al Kernel de  $S$  interacciones espinoriales y  $N - S$  interacciones orbitales. De esta forma si hacemos  $S = 0$ ,  $K_{N0}$  se reduce al Kernel del caso escalar.

Definamos la cantidad

$$\begin{aligned} W_\eta^S(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_S, \varepsilon_S) &\equiv i^S \left\langle V_\eta[k_1, \varepsilon_1] V_\eta[k_2, \varepsilon_2] \cdots V_\eta[k_S, \varepsilon_S] \right\rangle \\ &= i^S \left\langle \prod_{j=1}^S (-i) (\psi_j + \eta) \cdot f_j \cdot (\psi_j + \eta) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.3)$$

en donde usamos

$$V_\eta[k, \varepsilon] \equiv -i (\psi + \eta) \cdot f \cdot (\psi + \eta) = 2i\varepsilon \cdot (\psi + \eta) k \cdot (\psi + \eta), \quad (4.4)$$

que corresponde a la parte espinorial del operador de vértice  $V_{spin}^\gamma$  (sin el factor exponencial). Consideremos  $\eta = 0$ , así para las contracciones de Wick de  $S$  factores  $V_{\eta=0}[k, \varepsilon]$  tenemos

$$\begin{aligned} W_{\eta=0}^S(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_S, \varepsilon_S) &= i^S \left\langle \prod_{j=1}^S V_{\eta=0}[k_j, \varepsilon_j] \right\rangle \\ &= i^S \left\langle \prod_{j=1}^S (-i) (\psi_j \cdot f_j \cdot \psi_j) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para  $S = 1$  tenemos:

$$W_{\eta=0}^1 = i^1 \left\langle V_{\eta=0}[k_1, \varepsilon_1] \right\rangle = f_{1\mu\nu} \left\langle \psi^\mu(\tau_1) \psi^\nu(\tau_1) \right\rangle = 0. \quad (4.6)$$

Para  $S = 2$ :

$$\begin{aligned} W_{\eta=0}^2(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2) &= i^2 \left\langle V_{\eta=0}[k_1, \varepsilon_1] V_{\eta=0}[k_2, \varepsilon_2] \right\rangle \\ &= - \left\langle (-i)^2 f_{1\mu\nu} f_{2\alpha\beta} \psi^\mu(\tau_1) \psi^\nu(\tau_1) \psi^\alpha(\tau_2) \psi^\beta(\tau_2) \right\rangle, \end{aligned}$$

usando (3.90) nos da

$$\begin{aligned} W_{\eta=0}^2(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2) &= f_{1\mu\nu} f_{2\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{4} \left[ G_{F12} G_{F12} \left( \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha} - \delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} \right) \right] \right\} \\ &= - \frac{1}{2} G_{F12} G_{F21} \text{tr}(f_1 \cdot f_2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

En lo anterior hemos usado la antisimetría en el intercambio de subíndices de  $G_{Fij}$  y de  $f_{\mu\nu}$ .

En general, definimos los *bi-ciclos fermiónicos* de longitud  $n$ :

$$G_F(i_1, \dots, i_n) \equiv G_{F i_1 i_2} G_{F i_2 i_3} \cdots G_{F i_n i_1} Z_n(i_1 \dots i_n), \quad (4.8)$$

con

$$\begin{aligned} Z_2(ij) &\equiv \frac{1}{2} \text{tr}(f_i \cdot f_j), \\ Z_n(i_1 \dots i_n) &\equiv \text{tr}(f_{i_1} \cdot f_{i_2} \cdots f_{i_n}) \quad (n \geq 3), \end{aligned} \quad (4.9)$$

Con la convención de que  $G_F(0) \equiv 1$ . Con esto (4.5) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} W_{\eta=0}^S(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_S, \varepsilon_S) \\ = \sum_{\text{partitions}} (-1)^{cy} G_F(i_1 i_2 \cdots i_{n_1}) G_F(i_{n_1+1} \cdots i_{n_1+n_2}) \cdots G_F(i_{n_1+\dots+n_{cy-1}+1} \cdots i_{n_1+\dots+n_{cy}}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

En la suma anterior  $cy$  es el número de bi-ciclos,  $n_k$  es la longitud del bi-ciclo  $k$  y la suma es sobre productos de hasta  $S$  bi-ciclos no equivalentes. Decimos que dos biciclos son no equivalentes si sus argumentos no pueden ser iguales por medio de rotaciones cíclicas o inversiones, por ejemplo,  $G_F(12)$  es equivalente con  $G_F(21)$  así como  $G_F(123)$  lo es con  $G_F(231)$ . Para ilustrar la definición (4.10), continuación se muestran los valores de  $W_{\eta=0}^S$



para  $S = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned}
 W_{\eta=0}^1(k, \varepsilon) &= G_F(1) = G_{F11} = 0 \\
 W_{\eta=0}^2(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2) &= (-1)^1 G_F(12) = -G_F(12) \\
 W_{\eta=0}^3(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2; k_3, \varepsilon_3) &= (-1)^3 G_F(1)G_F(2)G_F(3) + (-1)^2 G_F(1)G_F(23) + (-1)^2 G_F(2)G_F(13) \\
 &\quad + (-1)^2 G_F(3)G_F(12) + (-1)G_F(123) = -G_F(123) \\
 W_{\eta=0}^4(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2; k_3, \varepsilon_3; k_4, \varepsilon_4) &= -G_F(1234) - G_F(1243) - G_F(1324) \\
 &\quad + G_F(12)G_F(34) + G_F(13)G_F(24) + G_F(14)G_F(23).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Para generalizar a  $W_{\eta=0}^S$  para  $\eta \neq 0$  simplemente sumamos en los bi-ciclos de (4.10) las contribuciones de los  $\eta$ s que pueden “romper” los bi-ciclos. Para ello necesitamos definir la siguiente cantidad:

$$\begin{aligned}
 G_F|i| &\equiv \eta \cdot f_i \cdot \eta, \\
 G_F|i_1 i_2 \cdots i_n| &\equiv 2G_{F i_1 i_2} G_{F i_2 i_3} \cdots G_{F i_{n-1} i_n} \eta \cdot f_1 \cdot f_2 \cdots f_n \cdot \eta \quad (n \geq 2);
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

a la que llamaremos *bi-cadena fermiónica* de longitud  $n$ , donde  $G_F|0| \equiv 1$ . Para estos objetos diremos que dos bi-cadenas son equivalentes si sus argumentos se pueden obtener por inversión, por ejemplo  $G_F|123| = G_F|321|$ . Con estos elementos  $W_{\eta}^S$  se escribe

$$\begin{aligned}
 &W_{\eta}^S(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_S, \varepsilon_S) \\
 &= \sum_{\text{partitions}} (-1)^{cy} G_F(i_1 i_2 \dots i_{n_1}) G_F(i_{n_1+1} \dots i_{n_1+n_2}) \cdots G_F(i_{n_1+\dots+n_{cy-1}+1} \dots i_{n_1+\dots+n_{cy}}) \\
 &\quad \times G_F|i_{n_1+\dots+n_{cy}+1} \cdots i_{n_1+\dots+n_{cy}+n_1}| \cdots G_F|i_{n_1+\dots+n_{cy}+n_1+1} \cdots i_S|.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

La demostración de la expresión anterior se puede hacer por inducción matemática, pero no nos preocuparemos por incluirla en este trabajo. Lo que sí es de interés es corroborar que la expresión (4.13) concuerda con la definición (4.3), para ello a continuación se muestran los cálculos de  $W_{\eta}^S$  para  $S = 1, 2, 3$  usando su definición y con (4.13) (para  $S = 3$  sólo se usa (4.13) ya que el cálculo es un poco largo). Para simplificar usaremos la notación  $\psi(\tau_i) = \psi_i$ . Comencemos usando la definición.

i) S=0:

$$W_\eta^0 = \langle 1 \rangle = 1. \quad (4.14)$$

ii) S=1:

$$W_\eta^1(k_1, \varepsilon_1) = i \langle (-i) (\psi_1 + \eta) \cdot f_1 \cdot (\psi_1 + \eta) \rangle,$$

recordemos que las contracciones de Wick no nulas son aquellas donde aparecen productos pares de  $\psi$  a diferente tiempo. Por tanto

$$W_\eta^1(k_1, \varepsilon_1) = \eta \cdot f_1 \cdot \eta \langle 1 \rangle = \eta \cdot f_1 \cdot \eta. \quad (4.15)$$

iii) S=2:

$$\begin{aligned} W_\eta^2(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2) &= \langle [(\psi_1 + \eta) \cdot f_1 \cdot (\psi_1 + \eta)] [(\psi_2 + \eta) \cdot f_2 \cdot (\psi_2 + \eta)] \rangle \\ &= \langle \psi_1 \cdot f_1 \cdot \psi_1 \psi_2 \cdot f_2 \cdot \psi_2 \rangle + \langle \psi_1 \cdot f_1 \cdot \eta \psi_2 \cdot f_2 \cdot \eta \rangle + \langle \psi_1 \cdot f_1 \cdot \eta \eta \cdot f_2 \cdot \psi_2 \rangle \\ &\quad + \langle \eta \cdot f_1 \cdot \psi_1 \psi_2 \cdot f_2 \cdot \eta \rangle + \langle \eta \cdot f_1 \cdot \psi_1 \eta \cdot f_2 \cdot \psi_2 \rangle + \langle \eta \cdot f_1 \cdot \eta \eta \cdot f_2 \cdot \eta \rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Como  $\eta$  y  $\psi$  son variables Grassman, al realizar conmutaciones entre ellas tendremos cambios de signo. Así

$$\begin{aligned} W_2^\eta &= f_{1\mu\nu} f_{2\alpha\beta} \left[ \langle \psi_1^\mu \psi_1^\nu \psi_2^\alpha \psi_2^\beta \rangle - \eta^\nu \eta^\beta \langle \psi_1^\mu \psi_2^\alpha \rangle + \eta^\nu \eta^\alpha \langle \psi_1^\mu \psi_2^\beta \rangle + \eta^\mu \eta \beta \langle \psi_1^\nu \psi_2^\alpha \rangle \right. \\ &\quad \left. + \eta^\mu \eta^\alpha \langle \psi_1^\nu \psi_2^\beta \rangle + \eta^\mu \eta^\nu \eta^\alpha \eta^\beta \right] \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(f_1 \cdot f_2) G_{F12} G_{F21} + 2\eta \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \eta G_{F12} + \eta \cdot f_1 \cdot \eta \eta \cdot f_2 \cdot \eta \\ &= -G_F(12) + 2\eta \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \eta G_{F12} + \eta \cdot f_1 \cdot \eta \eta \cdot f_2 \cdot \eta. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ahora usaremos la expresión (4.13):

i) S=0:

$$W_\eta^0 = (-1)^0 = 1. \quad (4.18)$$

ii) S=1. Para este valor de  $S$  tenemos dos posibles particiones:

a) 1+0 (Bi-cadenas de longitud 1 y bi-ciclos de longitud 0). En este caso sólo hay

una bi-cadena de longitud 1 y el bi-ciclo de longitud 0 es el trivial, por lo que esta partición aporta el término  $(-1)^0 G_F(0)G_F|1\rangle = \eta \cdot f_1 \cdot \eta$ .

- b) 0+1 (Bi-cadenas de longitud 0 y bi-ciclos de longitud 1). Por convención tenemos  $G_F|0\rangle = 1$  y sólo hay un bi-ciclo de longitud 1, el cual se anula. Entonces el término correspondiente a esta partición de  $S$  es  $(-1)^1 G_F(1)G_F|0\rangle = 0$ .

Así

$$W_\eta^1(k_1, \varepsilon_1) = \eta \cdot f_1 \cdot \eta. \quad (4.19)$$

III)  $S=2$ . En este caso tenemos más particiones:

- a) 2+0:  $(-1)^0 G_F|12\rangle G_F(0) = 2G_{F12}\eta \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \eta$ .  
b) 1+1:  $(-1)^0 G_F|1\rangle G_F|2\rangle + (-1)^2 G_F(1)G_F(2) = \eta \cdot f_1 \cdot \eta \cdot f_2 \cdot \eta$ .  
c) 0+2:  $(-1)^1 G_F(12)G_F|0\rangle = -\frac{1}{2}G_{F12}G_{F21}tr(f_1 \cdot f_2)$ .

Por tanto

$$W_\eta^2(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2) = 2G_{F12}\eta \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \eta + \eta \cdot f_1 \cdot \eta \cdot f_2 \cdot \eta - \frac{1}{2}G_{F12}G_{F21}tr(f_1 \cdot f_2). \quad (4.20)$$

IV)  $S=3$ . Similarmente obtenemos

$$\begin{aligned} & W_\eta^3(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2; k_3, \varepsilon_3) \\ &= -G_F(123) - [G_F(12)G_F|3\rangle + G_F(13)G_F|1\rangle + G_F(23)G_F|1\rangle] + G_F|1\rangle G_F|2\rangle G_F|3\rangle \\ & \quad + G_F|1\rangle G_F|23\rangle + G_F|2\rangle G_F|13\rangle + G_F|3\rangle G_F|12\rangle + G_F|123\rangle + G_F|231\rangle + G_F|312\rangle \\ &= -G_{F12}G_{F23}G_{F31}tr(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3) - \frac{1}{2} \left[ G_{F12}G_{F21}tr(f_1 \cdot f_2)\eta \cdot f_3 \cdot \eta + G_{F13}G_{31}tr(f_1 \cdot f_3)\eta \cdot f_2 \cdot \eta \right. \\ & \quad \left. + G_{F23}G_{F32}tr(f_2 \cdot f_3)\eta \cdot f_1 \cdot \eta \right] + \eta \cdot f_1 \cdot \eta \cdot f_2 \cdot \eta \cdot f_3 \cdot \eta + 2 \left[ G_{F23}\eta \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \eta \cdot f_1 \cdot \eta \right. \\ & \quad \left. + G_{F13}\eta \cdot f_1 \cdot f_3 \cdot \eta \cdot f_2 \cdot \eta + G_{F12}\eta \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \eta \cdot f_3 \cdot \eta + G_{F12}G_{F23}\eta \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \eta \right. \\ & \quad \left. + G_{F13}G_{F32}\eta \cdot f_1 \cdot f_3 \cdot f_2 \cdot \eta + G_{F21}G_{F13}\eta \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot f_3 \cdot \eta \right]. \end{aligned}$$

Con esto observamos que la definición de  $W_\eta^S$  arroja los mismos resultados que la expresión (4.13) al menos para los 3 primeros valores de  $S$ .

Ahora tenemos que ocuparnos de la parte bosónica de (4.1), para ello simplemente retomamos la expresión (3.46) y de ella vamos a “extraer” las partes necesarias para completar a

nuestra nueva expresión para  $K_N$  que implementa a  $W_\eta^S$ . Como primer objetivo es lograr que el operador de vértice bosónico manifieste invarianza Gauge, para ello introducimos una derivada temporal de la siguiente manera

$$V_{scal}^\gamma[k, \varepsilon] = \int_0^T d\tau \varepsilon \cdot \dot{x}(\tau) e^{ik \cdot x(\tau)} \longrightarrow \int_0^T d\tau \left[ \varepsilon \cdot \dot{x} + c \frac{d}{d\tau} \right] e^{ik \cdot x} = V_{scal}[k, \varepsilon, r]; \quad (4.21)$$

la derivada no contribuirá a ningún proceso físico cuando vayamos a “on-shell”. Eligiendo  $c = ir \cdot \varepsilon / r \cdot k$  con  $r^\mu$  un cuadrivector arbitrario con la restricción  $r \cdot k = 0$  se tiene

$$V_{scal}[k, \varepsilon, r] = \int_0^T d\tau \tilde{\varepsilon} \cdot \dot{x} e^{ikx} \quad (4.22)$$

donde

$$\tilde{\varepsilon}_\mu = \frac{r^\alpha f_{\alpha\mu}}{r \cdot k}. \quad (4.23)$$

Con esto el nuevo vértice  $V_{scal}$  ya es invariante de norma pero nos costó introducir un vector de referencia  $r^\mu$ . Entonces observamos que el operador de vértice  $V_{scal}^\gamma$  se transforma en  $V_{scal}$  haciendo el cambio de variable

$$\varepsilon^\mu \longrightarrow \tilde{\varepsilon}^\mu. \quad (4.24)$$

Por otro lado, resulta más conveniente trabajar en el espacio de momentos, lo que nos llevará a aplicar una transformada de Fourier a  $D_{scal}^{xx'}$ , esto es

$$D_N^{p'p}(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N) \equiv \int d^D x \int d^D x' D_{scal}^{xx'} e^{(ip \cdot x + ip' \cdot x)}. \quad (4.25)$$

Haciendo el cambio de variables  $x_- \equiv x - x'$  y  $x_+ \equiv (x + x')/2$  obtenemos la siguiente integral sobre  $x_+$ :

$$\int d^D x_+ e^{ix_+ \cdot (p+p' + \sum_{j=1}^N k_j)} = (2\pi)^D \delta^D \left( p + p' + \sum_{j=1}^N k_j \right), \quad (4.26)$$

calculando la integral restante sobre  $x_-$  nos lleva al siguiente resultado:

$$D_N^{p'p}(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N) = (-ie)^N (2\pi)^D \delta^D \left( p + p' + \sum_{j=1}^N k_j \right) \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \\ \times \prod_{j=1}^N \int_0^T d\tau_j e^{-T[p' + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N (k_j \tau_j - i\varepsilon_j)]^2 + \sum_{i,j=1}^N [k_i \cdot k_j \Delta_{ij} - 2ik_j \cdot \varepsilon_i \bullet \Delta_{ij} - \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \bullet \Delta_{ij}]} \Big|_{\text{lin } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}, \quad (4.27)$$

que a su vez, si usamos la forma explícita de  $\Delta_{ij}$  y sus derivadas podemos escribir como

$$D_N^{p'p}(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N) = (-ie)^N (2\pi)^D \delta^D (p + p' + K) \int_0^\infty dT e^{-T(m^2 + p'^2)} \\ \times \prod_{j=1}^N \int_0^T d\tau_j e^{\sum_{j=1}^N 2p'(i\varepsilon_j - k_j \tau_j) + \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2}[|\tau_i - \tau_j| - (\tau_i + \tau_j)] k_i \cdot k_j - i(\sigma_{ij} - 1) \varepsilon_i \cdot k_j + \delta_{ij} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j} \Big|_{\text{lin } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}, \quad (4.28)$$

donde hemos usado  $K = \sum_{j=1}^N k_j$ . Si introducimos las siguientes variables

$$k_0 = p', \quad k_{N+1} = p, \quad \tau_0 = T, \quad \varepsilon_0 = 0 = \varepsilon_{N+1} = \tau_{N+1}, \quad (4.29)$$

podemos compactar a (4.28) como

$$D_N^{p'p}(k_1, \varepsilon_1; \dots; k_N, \varepsilon_N) = (-ie)^N (2\pi)^D \delta^D (p + p' + K) \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \\ \times \prod_{j=1}^N \int_0^T d\tau_j \exp \left\{ \sum_{i,j=0}^{N+1} \left( \frac{1}{2} g_{ij} k_i \cdot k_j - i \dot{g}_{ij} \varepsilon_i \cdot k_j + \frac{1}{2} \ddot{g}_{ij} \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \right) \right\} \Big|_{\text{lin } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N}, \quad (4.30)$$

donde  $g_{ij} = |\tau_i - \tau_j|$  y sus derivadas  $\dot{g}_{ij}, \ddot{g}_{ij}$  son respecto al primer argumento. Introduzcamos el cambio de variable (4.24) en (4.30) para identificar los nuevos polinomios  $R_{N,S}$ :

$$e^{(\cdot)} R_{N,S} (-i)^N = \exp \left\{ \sum_{i,j=0}^{N+1} \left( \frac{1}{2} g_{ij} k_i \cdot k_j - i \dot{g}_{ij} \frac{r_i \cdot f_i \cdot k_j}{r_i \cdot k_i} + \frac{1}{2} \ddot{g}_{ij} \frac{r_i \cdot f_i \cdot f_j \cdot r_j}{r_i \cdot k_i r_j \cdot k_j} \right) \right\} \Big|_{\text{lin } f_1 \dots f_N}, \quad (4.31)$$

con

$$e^{(\cdot)} = e^{\sum_{i,j=0}^{N+1} \frac{1}{2} g_{ij} k_i \cdot k_j}. \quad (4.32)$$

Notemos que la linealidad en los factores  $\varepsilon_i$  es equivalente a exigir linealidad en factores de

$f_i$ . La expresión para  $R_{N,S}$  queda

$$R_{N,S} = (-i)^{-N} \exp \left\{ \sum_{i,j=0}^{N+1} \left( -i\dot{g}_{ij} \frac{r_i \cdot f_i \cdot k_j}{r_i \cdot k_i} - \frac{1}{2} \ddot{g}_{ij} \frac{r_i \cdot f_i \cdot f_j \cdot r_j}{r_i \cdot k_i \cdot r_j \cdot k_j} \right) \right\} \Big|_{\text{lin} f_1 \dots f_N} \quad (4.33)$$

y con ello nuestro propagador escalar vestido queda en el espacio de momentos

$$\begin{aligned} & D_N^{p'p}(k_1, \varepsilon_1, r_1; \dots; k_N, \varepsilon_N, r_N) \\ &= (-e)^N (2\pi)^D \delta^D(p + p' + K) \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \prod_{j=1}^N \int_0^T d\tau_j R_{N,S} e^{(\cdot)}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Notemos que (4.33) denota  $N$  interacciones orbitales, sin embargo, en  $K_{NS}$  estaremos considerando  $N - S$  interacciones de este tipo, por lo que utilizaremos la siguiente expresión

$$R_{N,S}^{\{i_1 \dots i_S\}} = (-i)^{-(N-S)} \exp \left\{ \sum_{i,j=0}^{N+1} \left( -i\dot{g}_{ij} \frac{r_i \cdot f_i \cdot k_j}{r_i \cdot k_i} - \frac{1}{2} \ddot{g}_{ij} \frac{r_i \cdot f_i \cdot f_j \cdot r_j}{r_i \cdot k_i \cdot r_j \cdot k_j} \right) \right\} \Big|_{f_{i_1, \dots, i_S} = 0, \text{lin} f_{i_{S+1}} \dots f_N}, \quad (4.35)$$

Los superíndices de  $R_{N,S}$  indican los fotones de  $K_{NS}$  que presentarán interacción espinorial, por ello al hacer la expansión de la exponencial pedimos que sus polarizaciones se vuelvan cero. Observemos que  $R_{N,0}^{\{\}}_0$  indica que tenemos solamente interacciones orbitales, por lo que  $K_{NS}$  se reduce al caso bosónico. Por otro lado  $R_{N,N}^{\{i_1 \dots i_N\}} = 1$  significa que en  $K_{NS}$  sólo hay interacción espinorial con los fotones. Hasta  $N = 2$  tenemos los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} R_{1,0}^{\{\}} &= (-i)^{-(1-0)} \exp \left\{ \sum_{i,j=0}^2 -i\dot{g}_{ij} \frac{r_i \cdot f_i \cdot k_j}{r_i \cdot k_i} - \frac{1}{2} \ddot{g}_{ij} \frac{r_i \cdot f_i \cdot f_j \cdot r_j}{r_i \cdot k_i \cdot r_j \cdot k_j} \right\} \Big|_{f_0=f_2=0, \text{lin} f_1} \\ &= i \exp \left\{ \sum_{j=0}^2 -i\dot{g}_{1j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_j}{r_1 \cdot k_1} \right\} \Big|_{\text{lin} f_1} = \sum_{j=0}^2 \dot{g}_{1j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_j}{r_1 \cdot k_1} = \frac{r_1 \cdot f_1}{r_1 \cdot k_1} (p' \sigma_{10} + p \sigma_{12}) \\ &= \frac{r_1 \cdot f_1}{r_1 \cdot k_1} (p - p'), \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$R_{2,1}^{\{1\}} = r_2 \cdot f_2 \cdot \left( \frac{p - p' + \sigma_{21} k_1}{r_2 \cdot k_2} \right), \quad (4.37)$$

$$R_{2,1}^{\{2\}} = r_1 \cdot f_1 \cdot \left( \frac{p - p' + \sigma_{12} k_2}{r_1 \cdot k_1} \right), \quad (4.38)$$

$$R_{2,0}^{\{\}} = \sum_{i,j=0}^3 \dot{g}_{1i} \dot{g}_{2j} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_i \cdot r_2 \cdot f_2 \cdot k_j}{r_1 \cdot k_1 \cdot r_2 \cdot k_2} + \ddot{g}_{12} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 \cdot r_2 \cdot k_2}. \quad (4.39)$$

Con todos estos elementos llegamos a la siguiente representación para  $K_{NS}$  que llamamos *descomposición espín-orbital*:

$$K_{NS}^{\{i_1 i_2 \dots i_S\}} = (-e)^N \text{Symb}^{-1} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \prod_{j=1}^N \int_0^T d\tau_j W_\eta^S(k_{j_1}, \varepsilon_{j_1}; \dots; k_{j_S}, \varepsilon_{j_S}) R_{N,S}^{\{i_1 \dots i_S\}} e^{(\cdot)}. \quad (4.40)$$

## 4.1. Kernel para $N=0,1,2$

El uso de (4.40) con  $N = 0$  corresponde al propagador libre, al desarrollarlo tenemos

$$\begin{aligned} K_0 = K_{00} &= (-e)^0 \text{Symb}^{-1} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} W_\eta^0 R_{0,0} e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^1 g_{ij} k_i \cdot k_j} \\ &= \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p^2)} = \frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{1}{p'^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

resultado que concuerda con el propagador escalar en la TCC.

En el caso  $N = 1$  obtenemos

$$\begin{aligned} K_1 &= K_{10} + K_{11} \\ &= (-ie)^1 (-i)^1 \text{Symb}^{-1} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau [W_\eta^0 R_{10} + W_\eta^1 R_{11}] e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^2 g_{ij} k_i \cdot k_j}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para resolver las integrales conviene primero desarrollar el factor exponencial

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^2 g_{ij} k_i \cdot k_j} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ g_{01} k_0 \cdot k_1 + g_{02} k_0 \cdot k_2 + g_{10} k_1 \cdot k_0 + g_{12} k_1 \cdot k_2 + g_{20} k_2 \cdot k_0 + g_{21} k_2 \cdot k_1 \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ (T - \tau_1) p' \cdot k_1 + T p' \cdot p + (T - \tau_1) p' \cdot k_1 + \tau_1 p \cdot k_1 + T p' \cdot p + \tau_1 p \cdot k_1 \right] \right\} \\ &= e^{-T p'^2 - \tau_1 (p^2 - p'^2)}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde hemos usado la conservación de momento y las variables (4.29). Con ello tenemos

$$\begin{aligned} K_1 &= -e \text{Symb}^{-1} \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p^2)} \int_0^T d\tau \left[ \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (p - p')}{r_1 \cdot k_1} + \eta \cdot f_1 \cdot \eta \right] e^{-\tau(p^2 - p'^2)} \\ &= -e \left[ \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot (p - p')}{r_1 \cdot k_1} \text{Symb}^{-1}(1) + \text{Symb}^{-1}(\eta \cdot f_1 \cdot \eta) \right] \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p^2)} \int_0^T d\tau e^{-\tau(p^2 - p'^2)}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Por otro lado, usando (3.65) tenemos

$$Symb^{-1}(1) = 1, \quad Symb^{-1}(\eta \cdot f_1 \eta) = -\frac{1}{4} f_{1\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (4.45)$$

Las integrales restantes son fáciles de calcular, quedando

$$K_1 = e^{\frac{1}{4} f_{1\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \varepsilon(p' - p)} \frac{1}{(m^2 + p^2)(m^2 + p'^2)}. \quad (4.46)$$

Descomponiendo el primer término del numerador de la expresión anterior y usando condiciones on-shell podemos reescribir al kernel de la siguiente manera

$$K_1 = e^{\frac{1}{2}(\not{k}_1 \not{\not{p}} - \not{\not{p}} \not{k}_1) + \varepsilon(p' - p)} \frac{1}{(m^2 + p^2)(m^2 + p'^2)} = \frac{\not{\not{p}}(\not{p} - m) - (\not{p}' - m)\not{\not{p}}}{(m^2 + p^2)(m^2 + p'^2)}. \quad (4.47)$$

Es momento de poner a prueba la expresión (4.40) considerando dos fotones, lo que nos da herramientas para calcular la auto-energía del electrón y la Dispersión de Compton. Sin embargo, sólo nos enfocaremos en el segundo proceso.

Usando  $N = 2$  en (4.40) tenemos:

$$\begin{aligned} K_2 &= \sum_{S=0}^2 K_{2S} = K_{20}^{\{\}} + K_{21}^{\{1\}} + K_{21}^{\{2\}} + K_{22}^{\{12\}} \\ &= (-e)^2 Symb^{-1} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \left[ W_\eta^0 R_{2,0}^{\{\}} + W_\eta^1 R_{2,1}^{\{1\}} + W_\eta^1 R_{2,1}^{\{2\}} + W_\eta^2 R_{2,2}^{\{12\}} \right] \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 g_{ij} k_i k_j}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Podemos asociar a la expresión anterior la suma de diagramas que aparecen en la figura 4.1, donde las bolas negras en los vértices (que llamamos blobs) indican el acoplamiento con  $\sigma_{\mu\nu}$  en el formalismo de segunda cuantización.



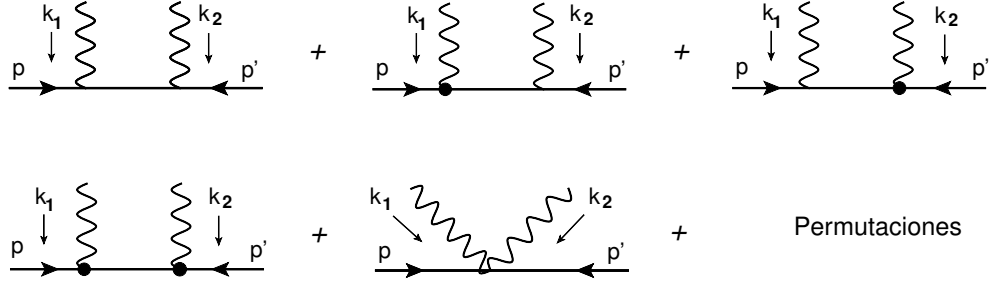


Figura 4.1: Diagramas asociados a la descomposición del Kernel en interacciones espinoriales y orbitales

Para comenzar el cálculo de  $K_2$  consideremos la contribución de  $K_{20}^{\{\}}$ . Primero desarrollamos el argumento del factor exponencial en (4.48):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 g_{ij} k_i \cdot k_j &= \frac{1}{2} \left[ (T - \tau_1) p' \cdot k_1 + (T - \tau_2) p' \cdot k_2 + T p \cdot p' + (T - \tau_1) p' \cdot k_1 + |\tau_1 - \tau_2| k_1 \cdot k_2 \right. \\ &\quad \left. + \tau_1 p \cdot k_1 + (T - \tau_2) p' \cdot k_2 + |\tau_2 - \tau_1| k_1 \cdot k_2 + \tau_2 p \cdot k_2 + T p \cdot p' + \tau_1 p \cdot k_1 + \tau_2 p \cdot k_2 \right] \\ &= -T p'^2 + (p - p') \cdot (\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2) + |\tau_1 - \tau_2| k_1 \cdot k_2, \end{aligned} \quad (4.49)$$

así

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 g_{ij} k_i \cdot k_j \right\} = \exp \{ -T p'^2 + (p - p') \cdot (\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2) + |\tau_1 - \tau_2| k_1 \cdot k_2 \}. \quad (4.50)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} K_{20}^{\{\}} &= (-ie)^2 (-i)^2 Symb^{-1} \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p'^2)} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 2\delta_{12} \frac{r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \\ &\quad \times \exp \{ (p - p') \cdot (\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2) + |\tau_1 - \tau_2| k_1 \cdot k_2 \}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Con la función delta eliminamos una integral sobre  $\tau$  y notemos que no tenemos variables

$\eta$ , así

$$\begin{aligned}
 K_{20}^{\{1\}} &= (-ie)^2 \left( -\frac{2r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \right) \text{Symb}^{-1}(\mathbb{1}) \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p'^2)} \int_0^T d\tau e^{\tau(p-p') \cdot (k_1+k_2)} \\
 &= (-ie)^2 \left( -\frac{2r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \right) \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p'^2)} \left( \frac{e^{p'^2-p^2} - 1}{p'^2 - p^2} \right) \\
 &= (-ie)^2 \left( \frac{2r_1 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot r_2}{r_1 \cdot k_1 r_2 \cdot k_2} \right) \frac{1}{(m^2 + p^2)(m^2 + p'^2)}, \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado conservación del momento. Ahora calculemos la contribución de  $K_{21}^{\{1\}}$ :

$$\begin{aligned}
 K_{21}^{\{1\}} &= (-ie)^2 (-i)^2 \text{Symb}^{-1} \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p'^2)} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \frac{\eta \cdot f_1 \cdot \eta r_1 \cdot f_1 (p - p' + \sigma_{21} k_1)}{r_2 \cdot k_2} \\
 &\quad \times \exp\{(p - p') \cdot (\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2) + |\tau_1 - \tau_2| k_1 \cdot k_2\}, \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

donde tenemos que calcular la siguiente integral:

$$A = \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p'^2)} \int_0^T d\tau_1 \int_0^{d\tau_1} d\tau_2 e^{(p-p')(\tau_1 k_1 + \tau_2 k_2) + (\tau_1 - \tau_2) k_1 \cdot k_2} \tag{4.54}$$

que corresponde al caso  $\tau_1 > \tau_2$ . Simplificando la exponencial e integrando sobre  $\tau_2$  nos da

$$A = \frac{1}{2k_2 \cdot p} \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p'^2)} \int_0^T d\tau_1 [e^{2\tau_1(k_2 \cdot p - k_1 \cdot p')} - e^{-2\tau_1 k_1 \cdot p'}] \tag{4.55}$$

$$= \frac{1}{2k_2 \cdot p} \int_0^\infty dT e^{-T(m^2+p'^2)} \left\{ \frac{e^{T(p'^2-p^2)} - 1}{p'^2 - p^2} - \frac{e^{-2T k_1 \cdot p'} - 1}{-2k_1 \cdot p'} \right\} \tag{4.56}$$

$$= \frac{1}{(m^2 + p^2)(m^2 + p'^2) [m^2 + (k_1 + p')^2]}. \tag{4.57}$$

La integral para el caso  $\tau_1 < \tau_2$  es obtenida intercambiando los subíndices  $1 \leftrightarrow 2$  en  $A$ .

Uniendo estos resultados podemos escribir

$$\begin{aligned}
 K_{21}^{\{1\}} &= \\
 &(-ie)^2 \frac{1}{4} f_{\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \frac{1}{(m^2 + p^2)(m^2 + p'^2)} \left\{ \frac{r_2 \cdot f_2 (p - p')}{r_2 \cdot k_2} \left( \frac{1}{m^2 + (k_1 + p')^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{m^2 + (k_2 + p'^2)} \right) + \frac{r_2 \cdot f_2 \cdot k_1}{r_2 \cdot k_2} \left( \frac{1}{m^2 + (k_2 + p')^2} - \frac{1}{m^2 + (k_1 + p')^2} \right) \right\} \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

y se puede verificar que  $K_{21}^{\{2\}}$  es simétrico con  $K_{21}^{\{1\}}$ . Para calcular la contribución  $K_{22}^{\{12\}}$  sólo

se necesita notar que  $\sigma_{21}\sigma_{12} = -1$  y

$$\text{Symb}^{-1}(\eta^\mu\eta^\nu\eta^\alpha\eta^\beta) = -\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5 \quad (4.59)$$

ya que aparecen integrales parecidas a las ya realizadas. Así

$$\begin{aligned} K_{22}^{\{12\}} &= \frac{(-ie)^2}{(m^2+p^2)(m^2+p'^2)} \left\{ \frac{1}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] f_{1\alpha\nu} f_2^{\nu\beta} \left( \frac{1}{m^2+(k_2+p)^2} - \frac{1}{m^2+(k_1+p)^2} \right) \right. \\ &\quad + \frac{i}{4} f_{1\alpha\beta} f_{2\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_5 \left( \frac{1}{m^2+(k_2+p)^2} + \frac{1}{m^2+(k_1+p)^2} \right) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m^2+(k_2+p)^2} + \frac{1}{m^2+(k_1+p)^2} \right) \text{tr}(f_1 \cdot f_2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Estos resultados para  $K_2$  pueden escribirse de una forma más compacta de la siguiente manera:

$$K_2 = (-ie)^2 \frac{\mathcal{K}_2}{(m^2+p^2)(m^2+p'^2)}; \quad (4.61)$$

$$\mathcal{K}_2 = A_2 \mathbb{1} + B_{2\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} - iC_2 \gamma_5, \quad (4.62)$$

con los coeficientes

$$\begin{aligned} A_2 &= -2 \frac{p' \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot p'}{p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2p' \cdot k_1} + \frac{1}{2p' \cdot k_2} \right) \text{tr}(f_1 \cdot f_2), \\ B_2^{\mu\nu} &= -\frac{r_1 \cdot f_1 \cdot k_2 f_2^{\mu\nu} r_2 \cdot f_2 \cdot k_1 f_1^{\mu\nu}}{2p' \cdot k_1 p' \cdot k_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2p' \cdot k_1} - \frac{1}{2p' \cdot k_2} \right) ([f_1, f_2])^{\mu\nu}, \\ C_2 &= -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{2p' \cdot k_1} + \frac{1}{2p' \cdot k_2} \right) \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} f_1^{\alpha\beta} f_2^{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

y  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Para llegar a los coeficientes (4.63) hemos usado la conservación de momento, las condiciones on-shell y la simetrización y antisimetrización del producto  $f_{1\mu\alpha} f_{2\nu}^\alpha$ . Queremos hacer notar que usamos el subíndice dos en los coeficientes de  $\mathcal{K}_2$  debido a que en general el kernel  $K_N$  siempre puede expresarse con la estructura (4.61) [11].

## 4.2. Dispersión de Compton con diagramas de Feynman

En el contexto de la TCC la dispersión de Compton corresponde al proceso  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ , el cual contiene dos diagramas que se muestran en la figura 4.2.

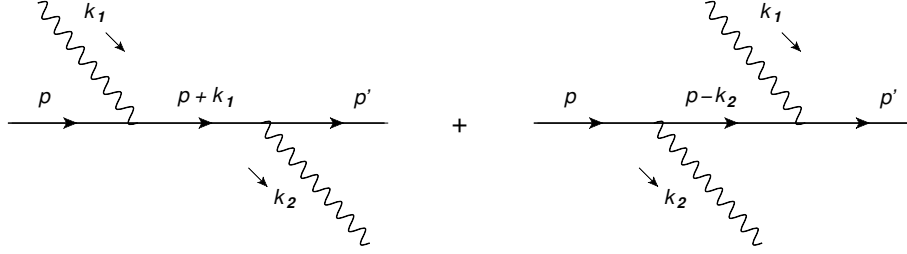


Figura 4.2: Diagramas de Feynman para la dispersión de Compton

Hacemos notar que en los diagramas que usamos en Worldline normalmente usamos la convención de que el momento apunte hacia el vértice, lo cual no afecta en lo absoluto al aplicar la conservación de momento. Aplicando las reglas presentadas en la sección 2.3.4 obtenemos una expresión para la matriz  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{u}(p')(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu(k_2)\frac{i(\not{p} + \not{k}_1 + m)}{(p+k_1)^2 - m^2}(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k_1)u(p) \\
 &+ \bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k_1)\frac{i(\not{p} - \not{k}_1 + m)}{(p-k_1)^2 - m^2}(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu(k_2)u(p) \\
 &= -ie^2\bar{u}(p')\left[\not{\epsilon}(k_2)\frac{\not{p} + \not{k}_1 + m}{(p+k_1)^2 - m^2}\not{\epsilon}(k_1) + \not{\epsilon}(k_1)\frac{\not{p} - \not{k}_1 + m}{(p-k_1)^2 - m^2}\not{\epsilon}(k_2)\right]u(p) \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

## 4.3. Comparación de resultados

En esta parte final mostraremos la equivalencia entre el propagador vestido con dos fotones obtenido con la descomposición espín-orbital y el obtenido usando diagramas de Feynman. Para ello resulta conveniente escribir al propagador (3.61) en el espacio de momentos considerando a  $A^\mu$  como una suma de ondas planas:

$$S_N^{p'p} \equiv \int d^D x \int d^D x' e^{ip \cdot x + ip' \cdot x'} S_N^{x'x} \Big|_{\text{lin } \varepsilon_1 \dots \varepsilon_N} \quad (4.65)$$

Usando nuevamente las variables  $x_{\pm}$  y notando que hay dos formas de elegir los términos lineales en los vectores de polarización, tenemos

$$S_N^{p'p} = (\not{p}' + m)K_N^{pp'} - e \sum_{j=1}^N \not{\epsilon}_j K_{N-1}^{p+k_j, p'}; \quad (4.66)$$

$$K_{N-1}^{p+k_j, p'} = K_{N-1}^{p+k_j, p'} [k_1, \varepsilon_1; \dots; k_{j-1}, \varepsilon_{j-1}; k_{j+1}, \varepsilon_{j+1}; \dots; k_N, \varepsilon_N]. \quad (4.67)$$

Debido a que al usar diagramas de Feynman no consideramos los propagadores externos, tenemos que “amputar” las piernas externas en nuestro propagador introduciendo

$$\widehat{S}_N^{p'p} = (-\not{p}' + m)S_N^{p'p}(\not{p} + m), \quad (4.68)$$

con lo cual ya contamos con las herramientas para obtener el propagador  $\widehat{S}_2^{p'p}$ , no obstante nosotros contamos con un kernel en términos de los tensores  $f_{i\mu\nu}$ , cambiarlo en términos de los vectores de polarización involucra cálculos un poco largos que no pretendemos mostrar en este trabajo, en [11] se muestra que  $K_2$  puede escribirse de la forma siguiente

$$K_2^{p'p} = \frac{1}{(p^2 + m^2)(p'^2 + m^2)} \left\{ \frac{1}{m^2 + (p' + k_1)^2} \left[ -\not{\epsilon}_1(\not{p}' + \not{k}_1 + m)\not{\epsilon}_2(\not{p} - m) \right. \right. \\ \left. \left. - (\not{p}' - m)\not{\epsilon}_1\not{\epsilon}_2(\not{p} - m) + (\not{p}' - m)\not{\epsilon}_1(\not{p}' + \not{k}_1 - m)\not{\epsilon}_2 \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right\}, \quad (4.69)$$

donde se han usado relaciones de capa de masa. El propagador no amputado queda

$$S_2^{p'p} = (\not{p}' + m)K_2^{p'p}[k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2] - \not{\epsilon}_1 K_1^{p'+k_1, p}[k_2, \varepsilon_2] - \not{\epsilon}_2 K_1^{p'+k_2, p}[k_1, \varepsilon_1] \\ = \frac{(\not{p}' + m)}{(p^2 + m^2)(p'^2 + m^2)} \left\{ \frac{1}{m^2 + (p' + k_1)^2} \left[ -\not{\epsilon}_1(\not{p}' + \not{k}_1 + m)\not{\epsilon}_2(\not{p} - m) \right. \right. \\ \left. \left. - (\not{p}' - m)\not{\epsilon}_1\not{\epsilon}_2(\not{p} - m) + (\not{p}' - m)\not{\epsilon}_1(\not{p}' + \not{k}_1 - m)\not{\epsilon}_2 \right] + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \\ - \left\{ \not{\epsilon}_1 \frac{\not{\epsilon}_2(\not{p} - m) - (\not{p}' + \not{k}_1 - m)\not{\epsilon}_2}{[(p' + k_1)^2 + m^2](p^2 + m^2)} + (1 \leftrightarrow 2) \right\}, \quad (4.70)$$

donde hemos usado  $e = 1$ . Con ello

$$\widehat{S}_2^{p'p} = (m - \not{p}')S_2^{p'p}(\not{p} + m) = \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}' + \not{k}_1 + m}{(p' + k_1)^2 + m^2} \not{\epsilon}_2 + \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}' + \not{k}_2 + m}{(p' + k_2)^2 + m^2} \not{\epsilon}_2 \quad (4.71)$$

Para llegar a la expresión anterior usamos que  $\not{p}^2 = -p^2$ . Resultado que concuerda con (4.64) cuando agregamos las funciones de onda espinoriales para calcular la matriz  $\mathcal{M}$ .

Finalmente notamos que, como mencionamos en la introducción, la expresión (4.48) contiene a los diagramas de Feynman 4.2 bajo una sola integral de camino, mostrando así un gran avance teórico.

# Conclusiones

En esta tesis se mostró que el formalismo línea de mundo ofrece ventajas sobre el método estándar al menos para QED escalar y espinorial para el cálculo de amplitudes de dispersión a nivel árbol y a un lazo, no obstante, un estudio más a fondo revela que también es bastante eficiente a órdenes multilazo.

A pesar de que obtuvimos una expresión compacta para calcular dispersiones de fotones para líneas cerradas en QED escalar, no lo hicimos para el caso de línea abierta porque requiere del uso de una super simetría Worldline. Una forma de evitar hacer uso de super campos para tratar de llegar a un tipo de fórmula maestra es la descomposición espín orbital, la cual brinda una expresión general para la interacción de una línea fermiónica abierta con fotones, que se puede reducir fácilmente al caso escalar e implementa directamente la invarianza Gauge en la capa de masa.

La ventaja de esta descomposición es que aprovecha la forma del operador de vértice para separar interacciones orbitales y espinoriales de una manera simple y elegante, de la que se puede extraer información física e implementar la invarianza Gauge.

Una aplicación muy importante que consideramos como trabajo futuro es el cálculo del momento magnético anómalo del electrón a un lazo, que podemos realizar al hacer el cálculo para  $N = 3$ . Este cálculo resulta de gran interés dado que es una de las cantidades más precisas que formalismo estándar presenta.

# Bibliografía

- [1] Z. Bern and D. A. Kosower, “Efficient calculation of one loop QCD amplitudes”, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 1669; “The computation of loop amplitudes in gauge theory”, *Nucl. Phys. B* 379 (1992) 451.
- [2] O. Corradini, C. Schubert, Lectures on the worldline formalism, given at School on Spinning Particles in Quantum Field Theory: Worldline Formalism, Higher Spins, and Conformal Geometry, Morelia, Mexico, November 19–23, 2012, arXiv:1512.08694 [hep-th].
- [3] R.P. Feynman, “An Operator calculus having applications in quantum electrodynamics”, *Phys. Rev.* 84 (1951) 108.
- [4] S. W. Hawking, “Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Spacetime”, *Commun. Math. Phys.*, vol. 55, p. 133, 1977.
- [5] M. Peskin, D. Schroeder, “An Introduction to Fiel Theory”, Westview (1995).
- [6] K. Daikouji, M. Shino, and Y. Sumino, “Bern-Kosower rule for scalar QED”, *Phys. Rev.*, vol. D53, pp. 4598–4615, 1996.
- [7] N. Ahmadinia, F. Bastianelli, and O. Corradini, “Dressed scalar propagator in a non-Abelian background from the worldline formalism”, *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 2, p. 025035, 2016. [Addendum: *Phys. Rev.*D93,no.4,049904(2016)].
- [8] A. Ahmad, N. Ahmadinia, O. Corradini, S. P. Kim, and C. Schubert, “Master formulas for the dressed scalar propagator in a constant field”, *Nucl. Phys.*, vol. B919, pp. 9–24, 2017.



- [9] J. Edwards and C. Schubert, “Quantum mechanical path integrals in the first quantised approach to quantum field theory”.
- [10] M. J. Strassler, “Field theory without Feynman diagrams: One loop effective actions”, Nucl. Phys. B385 (1992), págs. 145-184.
- [11] N. Ahmadinia, V. Banda, F. Bastianelli, O. Corradini, J. Edwards and C. Schubert, “Worldline master formulas for the dressed electron propagator, part 1: Off-shell amplitudes”
- [12] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, “Super String Theory”, Cambridge University Press (1987).