UNIVERSIDAD MICHOACANA

DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA PROMOVER LA GENERALIZACIÓN ALGEBRAICA

Tesis para obtener el grado de

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA

Eder Karim Pedraza Mendoza

Asesor:

Doctor José Carlos Cortés Zavala

Morelia, Michoacán, noviembre 2020

AGRADECIMIENTOS

A MIS PADRES

Les agradezco con todo mi corazón el apoyo que me han brindado día a día, desde que nací, dándome la confianza, la fortaleza y siempre ayudarme a ser cada vez una mejor persona.

A MIS AMIGOS

Les agradezco su amistad, afecto y siempre estar a mi lado

A MI AMIGO JUAN FERNANDO HERNANDEZ

Por ser un gran compañero y sin duda una parte importante de mi vida en las buenas y en las malas, gracias a todo su apoyo, amistad y estar siempre a mi lado a lo largo de toda la carrera.

A MI ASESOR, EL DOCTOR CARLOS CORTÉS

Por la confianza, el apoyo, su amistad y todos los nuevos conocimientos que ha compartido conmigo, así como por el tiempo y paciencia que me tuvo en la realización de este trabajo.

Y finalmente, a todas las personas que aportaron algo de manera directa o indirecta para llegar a terminar este trabajo. A todos muchas gracias.

ÍNDICE

RESUMEN 8

ABSTRACT 9

CAPITULO I: INTRODUCCIÓN 10

CAPITULO II: METODOLOGIA Y PROCEDIMIENTOS 18

2.1 Metodología ACODESA 19
2.1.1 La metodología ACODESA: un aprendizaje cooperativo o colaborativo 21
2.1.2 Fundamentacio de la metodología ACODESA 24
2.2 Muestra 25
2.3 Diseño de la experimentación 25
2.3.1 Procedimientos de la experimentación 25
2.3.2 Análisis de la experimentación 26

CAPITULO III: ANÁLISIS, DISCUSIÓN Y RESULTADOS DE LA HOJAS DE TRABAJO ACTIVIDAD A: LA FABRICA DE VENTANAS 27

3.1 Trabajo individual 28
3.2 Trabajo en equipo 32
3.3 Debate grupal 34
3.3.1 Episodio 1 La representación icónica 34
3.3.2 Episodio 2 Abandono de representaciones icónicas y comparación de las diferentes estrategias entre los estudiantes 35
3.3.3 Episodio 3 En busca de una fórmula general 37
3.3.4 Episodio 4 Representación de la fórmula 38
3.3.5 Episodio 5 Comprobación 39
3.4 Auto-reflexión 39

CAPITULO IV: ANÁLISIS, DISCUSIÓN Y RESULTADOS DE LA HOJAS DE TRABAJO ACTIVIDAD B: EL RESTAURANTE DE MARCELO 42

4.1 Trabajo individual 43
4.2 Trabajo en equipo 44
4.3 Debate grupal 45
4.3.1 Episodio 1 La representación icónica 45
4.3.2 Episodio 2 El algoritmo iterativo 46
4.3.3 Episodio 3 En búsqueda de la expresión general 46
4.3.4 Episodio 4 Representación de la fórmula 47
4.3.5 Episodio 5 Comprobación 48
4.4 Auto-reflexión 49

CAPITULO V: ANÁLISIS, DISCUSIÓN Y RESULTADOS DE LA HOJAS DE TRABAJO ACTIVIDAD C: JOYERIA <<EL DORADO>> 51

5.1 Trabajo individual 52
5.2 Trabajo en equipo 53
5.3 Debate grupal 55
5.3.1 Episodio 1 Presentación del algoritmo iterativo 55
5.3.2 Episodio 2 El algoritmo iterativo 56
5.3.3 Episodio 3 Las limitantes del algoritmo iterativo 56
5.3.4 Episodio 4 En búsqueda de la expresión general 57
5.3.5 Episodio 5 La expresión general 58
3.3.6 Episodio 6 Comprobación 59
3.4 Auto-reflexión 60

CAPITULO VI: Reflexiones Finales 61

6.1 La importancia de los patrones 62
6.2 Los beneficios de la metodología ACODESA 62
6.3 Conclusiones 63
6.4 Recomendaciones 65

FUENTES CONSULTADAS 67

Documentos electrónicos y referencias de internet 69

ANEXOS 71

Anexo 1. Hoja de trabajo de la fabrica de ventanas 72
Anexo 2. Hoja de trabajo del restaurant de Marcelo 75
Anexo 3. Hoja de trabajo de la joyeria <<El Dorado>> 80

INDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 1 Vista global del proceso en el aula con la metodología ACODESA (Cortés et. Al., 2014, p. 229)……20

Figura 2 TIFV (Trabajo individual la fábrica de ventanas) Explicación del cálculo de cuadros color verde, Ennya……28

Figura 3 TIFV Respuesta a la pregunta 2 de Ennya……29

Figura 4 TIFV Ennya explicando su forma de calcular una ventana que tiene 17 cuadros verde de lado……29

Figura 5 TIFV Explicación de Abril……30

Figura 6 TIFV Estrategia de diferencia de áreas de Ángel……30

Figura 7 TIFV Pequeña explicación de Victor……31

Figura 8 TIFV Estrategia de Héctor basada en la suma de los lados de un cuadrado……31

Figura 9 TIFV Explicación y resultado de Héctor después de la etapa del debate……32

Figura 10 TEFV (trabajo en equipo de la fábrica de ventanas) Ennya utilizando la estrategia de diferencia de áreas de su compañero Ángel……32

Figura 11 TEFV Idea de formula general de Ángel……33

Figura 12 TEFV Representación icónica de Abril……34

Figura 13 DFV (debate fábrica de ventanas) Representación icónica……35

Figura 14 DFV Operación hecha por Héctor usando su estrategia……35

Figura 15 DFV Operaciones de Ángel utilizando su estrategia de diferencia de áreas……36

Figura 16 DFV Comparación de resultados de las distintas estrategias……37

Figura 17 DFV Propuesta de fórmula general de Ángel……38

Figura 18 DFV Expresiones generales de los estudiantes……38

Figura 19 DFV Comprobación de las expresiones generales hechas por los estudiantes……39

Figura 20 ARFV (auto-reflexión de la fábrica de ventanas) Propuesta para el cálculo de los cuadros de color verde en una ventana de 15 cuadros cafés de lado de Israel……40

Figura 21 ARFV Segunda estrategia efectuada por Israel ……40

Figura 22 ARFV Hoja de trabajo de Abril……40

Figura 23 ARFV Calculo de numero de cuadros verdes a partir de un algoritmo iterativo……41

Figura 24 ARFV Reconstrucción de la fórmula obtenida en el debate por parte de Ángel……41

Figura 25 TIRM (trabajo individual restaurante de Marcelo) Representación icónica de Israel……..43

Figura 26 TIRM Lógica iterativa……43

Figura 27 TERM (trabajo en equipo restaurante de Marcelo) Algoritmo iterativo por parte de Israel……..44

Figura 28 TERM Ángel comienza a utilizar el algoritmo iterativo……..45

Figura 29 DRM (debate restaurante de Marcelo) Representación icónica por parte de Ennya para el caso de 4 mesas……..45

Figura 30 DRM Suma de personas por parte de Héctor……46

Figura 31 DRM Propuesta de Ángel basada en iteraciones en búsqueda de una expresión general ……47

Figura 32 DRM Pruebas de Ángel sobre su línea de pensamiento antes propuesta……..47

Figura 33 DRM Fórmula general propuesta por los estudiantes……48

Figura 34 DRM Comprobación de la fórmula 2l+2 por parte de Héctor……..49

Figura 35 ARRM (auto-reflexión restaurante de Marcelo) Ángel mencionando la fórmula general encontrada durante la etapa del debate……..49

Figura 36 TIJD (trabajo individual joyería El Dorado) Estrategia de Abril a base de suma de eslabones ……52

Figura 37 TIJD Representación funcional por parte de Héctor……53

Figura 38 TEJD (trabajo en equipo joyería El Dorado) Representación funcional por parte de Héctor……53

Figura 39 TEJD Explicación de Héctor a su estrategia utilizada……54

Figura 40 TEJD Propuesta con palabras de fórmula general por parte de Abril para calcular el número de barras necesarias……54

Figura 41 DJD (debate joyería El Dorado) Presentación de la estrategia del equipo 1……..55

Figura 42 DJD Ángel haciendo sumas igual que su compañero Héctor……..56

Figura 43 DJD Suma de barritas hecha por Victor……57

Figura 44 DJD Operaciones hechas por Abril en base a su propuesta de fórmula general……58

Figura 45 DJD Expresión general propuesta por los estudiantes……58

Figura 46 DJD Comprobación de la expresión general……59

Figura 47 DJD Suma de barritas por parte de Héctor……59

Figura 48 ARJD (auto-reflexión joyería El Dorado) Propuesta de formula general……60

RESUMEN

En este documento se presentan los resultados de una investigación sobre la transición de la aritmética al álgebra, en la que se propone un transito natural entre estos dominios matemáticos mediante el uso de patrones, por medio de una serie de actividades de aprendizaje para promover la generalización algebraica y mediante el uso de la metodología ACODESA (aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión).

La investigación que se ha desarrollado es del tipo aplicada, con diseño experimental, realizada con una muestra que se integró de 6 alumnos los cuales fueron sorteados al azar de entre todos los diferentes grupos del tercer grado de la secundaria técnica número 30 ubicada en Uruapan, Michoacan.

Los resultados de esta investigación, demostraron la capacidad de los estudiantes de construir representaciones funcionales, y así resolver problemas donde se busca una expresión general para una serie de actividades por medio del reconocimiento de patrones (expresión algebraica), utilizando un pensamiento reversible, y acercándose al dominio de las representaciones institucionales y la generalización, necesarias para el pensamiento algebraico.

Finalmente, a partir de los resultados encontrados, se logró determinar que las actividades de aprendizaje aplicadas pueden llegar a ser efectivas en el transito de la aritmética al álgebra, las cuales de ser consolidadas en cualquier tipo de ambiente, podrían influir y cambiar por completo a futuro la didáctica de la enseñanza del álgebra.

Palabras claves: Investigación aplicada**,** ACODESA, actividades de aprendizaje, uso de patrones, educación secundaria.

ABSTRACT

This document presents the results of an investigation on the transition from arithmetic to algebra, in which a natural transition between these mathematical domains is proposed through the use of patterns, through a series of learning activities to promote generalization. algebraic and through the use of the ACODESA methodology (collaborative learning, scientific debate and self-reflection).

The research that has been developed is of the applied type, with an experimental design, carried out with a sample that was made up of 6 students who were randomly drawn from among all the different groups of the third grade of technical high school number 30 located in Uruapan, Michoacan.

The results of this research demonstrated the ability of students to build functional representations, and thus solve problems where a general expression is sought for a series of activities through pattern recognition (algebraic expression), using reversible thinking, and approaching to the domain of institutional representations and generalization, necessary for algebraic thinking.

Finally, from the results found, it was possible to determine that the applied learning activities can become effective in the transition from arithmetic to algebra, which if consolidated in any type of environment, could influence and completely change the didactics in the future of teaching algebra.

Keywords: Applied research, ACODESA, learning activities, use of patterns, secondary education.

CAPITULO I: INTRODUCCIÓN

En las matemáticas se observa una serie de problemas en dos sentidos: la construcción del conocimiento por parte de los alumnos y las distintas metodologías utilizadas por los profesores dentro de las aulas. Las investigaciones se han enfocado hacia estas dos vertientes de manera específica, aun así, se siguen obteniendo resultados poco satisfactorios en el aprendizaje de dominios matemáticos por parte de los estudiantes.

En la literatura existe una gran variedad de estudios referentes a los problemas que se tienen dentro y fuera de las instituciones educativas respecto al aprendizaje de las matemáticas (Miranda, Fortes, & Gil, 2000; Palarea; Socas, 1994; Resnick & Ford, 1998; Skemp, 1993; Socas, Camacho & Hernández, 1998), además se han realizado diversas evaluaciones a nivel internacional y nacional (PISA y PLANEA), que demuestran, a través de sus resultados, grandes deficiencias que se tienen específicamente en el contexto mexicano. Recordemos que estas pruebas son simples indicadores como lo menciona Santos y Vargas (2003), “el salir bien en estas evaluaciones no refleja un aprendizaje profundo de la disciplina” (p. 10), aun así, son un referente que puede ser analizado.

Se ha señalado en este tipo de pruebas estandarizadas, que en México la educación matemática tiene un rezago si es comparada con lugares considerados primermundistas, o al menos esos son los resultados que arroja la prueba PISA (Programme for International Student Assessment), o de manera local PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes).

Según los resultados de PISA (OCDE, 2019), en el 2018, Alrededor del 44% de los estudiantes en México alcanzó el nivel 2 o superior en matemáticas. Estos estudiantes pueden interpretar y reconocer, sin instrucciones directas, cómo se puede representar matemáticamente una situación (simple) (por ejemplo, comparar la distancia total de dos rutas alternativas o convertir los precios en una moneda diferente). La proporción de estudiantes de 15 años que alcanzaron niveles mínimos de competencia en matemáticas (Nivel 2 o superior) varió ampliamente – de 98% en Beijing, Shanghai, Jiangsu y Zhejiang (China) a solo el 2% en Zambia, que participó en la evaluación PISA para el desarrollo en 2017. En promedio en los países OCDE, el 76% de los alumnos obtuvo al menos un nivel de competencia 2 en matemáticas.

Alrededor del 1% de los estudiantes obtuvo un nivel de competencia 5 o superior en matemáticas. Seis países y economías asiáticas tuvieron la mayor proporción de estudiantes que lo hicieron: Beijing, Shanghái-Jiangsu-Zhejiang (China) (justo sobre el 44%), Singapur (casi el 37%), Hong Kong (China) (29%), Macao (China) (casi el 28%), China Taipéi (justo sobre el 23%) y Corea (justo sobre 21%). Estos estudiantes pueden modelar situaciones complejas matemáticamente y pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias apropiadas de resolución de problemas para tratar con ellos.

Considerando los resultados anteriores, el 56% de los alumnos obtuvo el nivel 1 o incluso menor. Se considera que los estudiantes ubicados en este nivel saben

responder a preguntas en contextos familiares (lenguaje común), en donde se presente toda la información necesaria (todos los datos utilizados en el problema) y además que las interrogantes sean muy claras, pueden llevar procedimientos rutinarios con situaciones directas y responde a estímulos presentados con respuestas obvias. Los analistas de esta evaluación, indican que estos estudiantes, cuyo desempeño se sitúa en el nivel 1, corren el riesgo de tener serias dificultades para aprovechar las matemáticas como herramienta que les permita beneficiarse de oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de su vida (OCDE, 2015).

Los resultados de la prueba PLANEA 2015 (Los niveles de logro de PLANEA no son comparables de manera directa con los de pruebas anteriores ya sea EXCALE o ENLACE) colocan a un 89.4% de alumnos de tercer de secundaria en el nivel 1 y 2, mientras el otro 10.6% se encuentran en el nivel 3 y 4. No obstante, en la primaria en esta misma asignatura, los alumnos alcanzaron un porcentaje de 20.6% en los niveles 3 y 4, mientras que el 79.4% lograron evaluaciones de nivel 3 y 4. Como se puede apreciar, los alumnos de secundaria obtuvieron resultados por debajo de los de primaria, pero ¿cuál es el motivo de esta baja? Puede estar ligada al nivel de abstracción necesario para comprender los contenidos destinados a este nivel educativo a manera de obstáculo epistemológico (Brousseau, 1997), a las estrategias didácticas utilizadas por los profesores en su enseñanza, o la introducción del dominio algebraico.

Este panorama apunta a una meta común: mejorar el aprendizaje de los estudiantes de secundaria, actores y partícipes de las decisiones de nuestro país en el presente y para el futuro. Esto implica fuertes retos en varios aspectos, desde la perspectiva del diseño curricular para mejorar el desempeño de los estudiantes y asegurarles una mejor inserción a la sociedad a partir de reducir el número de quienes no alcanzan los niveles mínimos de competencia e impulsar a quienes muestren potencial para que alcancen los niveles superiores de desempeño. Esto implica priorizar los aprendizajes que favorecen el desarrollo de habilidades cognitivas que redunden en el desarrollo del pensamiento crítico y en la solución de problemas, así como fortalecer las habilidades de comunicación y de trabajo en grupo; lo anterior implica para la secundaria un reto organizacional y de gestión para garantizar un mayor involucramiento y seguimiento entre docentes y alumnos, y las estrategias del colegiado.

En los estudios de corte psicogenético que Piaget (1979, 1980) realizó, demostró la existencia de diferentes estados por los cuales los sujetos pasan durante su crecimiento (de la niñez a la adolescencia), aproximadamente al momento de ingreso a la secundaria los sujetos inician el desarrollo del pensamiento hipotético deductivo que se caracteriza por abstracciones reflexionantes, representaciones y la reversibilidad, lo que podría suponer mayor éxito al tratar temas como el álgebra, en donde se requiere cierto nivel de abstracción para trabajar con representaciones de tercer orden (Alcalá, 2002), como es el caso de las literales, pero aun así el desequilibrio (en el sentido de Piaget) observado en los adolescentes y la débil

construcción conceptual de un pensamiento algebraico, han mostrado una serie de problemáticas que han sido estudiadas en la literatura (Godino, Castro, Aké, & Wilhelmi, 2012; Palarea, et al, 1994: Palarea, 1998; Socas et al., 1998).

Uno de los principios rectores del Plan es centrarse en el aprendizaje de los estudiantes, de ahí la importancia de conocer a los adolescentes que cursan este nivel. La adolescencia es una etapa integral y sigue en cada persona un ritmo y una dirección propios, según su trayecto y los factores socioeconómicos y culturales que la rodean. En ese contexto, las escuelas secundarias constituyen un punto de encuentro intercultural e intergeneracional, en el cual los adolescentes construyen y reconstruyen su identidad, y al mismo tiempo son un espacio de presión que refleja parte de las tensiones políticas, económicas, sociales y culturales del contexto en que vive.

Actualmente, las culturas juveniles están influidas por el contexto tecnológico y cultural que crea lenguajes y conocimientos en ocasiones incompatibles con la cultura escolar, lo cual plantea un desafío pedagógico. El gran reto de la escuela secundaria es integrar la pluralidad de lenguajes y culturas, ampliar el horizonte del acceso al conocimiento, garantizar la convivencia y el diálogo entre ambas culturas. Las relaciones sociales de convivencia que se construyen en el aula, entre el docente y sus estudiantes, tienen una importancia decisiva en los aprendizajes y dependen del equilibrio entre el respeto a la autoridad y los vínculos de confianza, cordialidad, respeto y gusto por el aprendizaje.

La heterogeneidad de los estudiantes es producto de la diversidad de contextos geográficos, sociales, económicos y culturales. A las escuelas acuden estudiantes provenientes de contextos diferentes, con experiencias de aprendizaje propias, por ello, la intervención docente debe favorecer el aprovechamiento y enriquecimiento de los saberes de los estudiantes a partir de sus diferencias. Estas diferencias no han de ser barrera para el aprendizaje; por el contrario, los maestros habrán de encontrar en la diversidad la riqueza para nutrir los ambientes de aprendizaje que propicien. Asimismo, es conveniente establecer nexos entre los profesores, las familias y la localidad donde está ubicada la escuela.

En este periodo (al concluir el tercer grado de secundaria, entre los 14 y 15 años de edad) los estándares que deben tener los estudiantes están organizados en tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información.

Al egresar del nivel de secundaria, los estudiantes saben efectuar cálculos con expresiones algebraicas, cuyos coeficientes sean números racionales, formulan ecuaciones o funciones para resolver problemas, calculan volúmenes y resuelven problemas geométricos con apoyo de las propiedades de las figuras y cuerpos. Calculan porcentajes y probabilidades de eventos simples o compuestos, y comunican e interpretan información mediante el uso de diferentes tipos de gráficas.

En este periodo se continúa promoviendo el desarrollo de actitudes y valores que son parte esencial de la competencia matemática y que son el resultado de la metodología didáctica que se propone para estudiar matemáticas. A continuación, se explica un poco mejor cada uno de estos ejes temáticos:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico

Este eje temático se subdivide en cuatro temas:

- Números y sistemas de numeración.
- Problemas aditivos.
- Problemas multiplicativos.
- Patrones y ecuaciones.

Los Estándares Curriculares para este eje temático son los siguientes. El alumno:

- Resuelve problemas que implican convertir números fraccionarios a decimales y viceversa.
- Resuelve problemas que implican calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor.
- Resuelve problemas aditivos que impliquen efectuar cálculos con expresiones algebraicas.
- Resuelve problemas multiplicativos con expresiones algebraicas a excepción de la división entre polinomios.
- Resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión.
- Resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas.

2. Forma, espacio y medida

Este eje temático se subdivide en dos temas:

- Figuras y cuerpos.
- Medida.

Los Estándares Curriculares para este eje temático son los siguientes. El alumno:

- Resuelve problemas que implican construir círculos y polígonos regulares con base en información diversa, y usa las relaciones entre sus puntos y rectas notables.
- Utiliza la regla y el compás para realizar diversos trazos, como alturas de triángulos, mediatrices, rotaciones, simetrías, etcétera.
- Resuelve problemas que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza en diversos polígonos.
- Calcula cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas de perímetro, área y volumen.

- Determina la medida de diversos elementos del círculo, como circunferencia, superficie, ángulo inscrito y central, arcos de la circunferencia, sectores y coronas circulares.
- Aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas.

3. Manejo de la información

Este eje temático se subdivide en los siguientes temas:

- Proporcionalidad y funciones.
- Nociones de probabilidad.
- Análisis y representación de datos.

Los Estándares Curriculares para este eje temático son los siguientes. El alumno:

- Resuelve problemas vinculados a la proporcionalidad directa, inversa o múltiple, como porcentajes, escalas, interés simple o compuesto.
- Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.
- Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
- Lee y representa información en diferentes tipos de gráficas; calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

4. Actitudes hacia el estudio de las matemáticas

Al término de la Educación Básica, el alumno:

- Desarrolla un concepto positivo de sí mismo como usuario de las matemáticas, el gusto y la inclinación por comprender y utilizar la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos.
- Aplica el razonamiento matemático a la solución de problemas personales, sociales y naturales, aceptando el principio de que existen diversos procedimientos para resolver los problemas particulares.
- Desarrolla el hábito del pensamiento racional y utiliza las reglas del debate matemático al formular explicaciones o mostrar soluciones.
- Comparte e intercambia ideas sobre los procedimientos y resultados al resolver problemas.

Por tanto, esta investigación se realizó con alumnos de tercer grado de secundaria en México. Se buscaron generalizaciones a través del reconocimiento de patrones por medio de la metodología ACODESA, con el objetivo de construir un pensamiento aritmético-algebraico en los estudiantes, que en lugar de cortes propicie un tránsito natural entre estas dos grandes estructuras.

El reconocimiento de patrones fue indispensable en este estudio, en matemáticas, encontrar regularidades puede significar la comprensión y superación de la dificultad presentada. En particular, el reconocimiento de patrones resulta útil cuando se requiere desarrollar en el estudiante un pensamiento ligado a la generalización, como es el pensamiento algebraico.

Por lo anterior, la pregunta central de la investigación fue **¿Cómo influye el uso de la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión (ACODESA) en el proceso de transición de la aritmética al álgebra?** A su vez, esta interrogante condujo a delimitar propósitos y líneas de investigación específicas para entender este cambio de pensamiento en los sujetos.

El propósito general de este estudio fue el de descubrir si las actividades de aprendizaje presentadas son capaces de promover la generalización algebraica en los estudiantes de secundaria.

Es importante mencionar las preguntas específicas que sirvieron como líneas de investigación para el análisis de los datos:

- ¿Qué importancia tienen los patrones generados en la transición de la aritmética al álgebra?

- ¿Cuáles son los beneficios y desventajas de utilizar la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión (ACODESA)?

Uno de los fines más importantes dentro de este estudio, es comprender el proceso de construcción conceptual necesario para que los alumnos que cursan la secundaria transiten entre la aritmética y el álgebra de una manera natural, el estudio de sus representaciones e interacciones está lejos de una recogida de datos medible en el sentido estricto de la palabra, se buscan conjeturas, contradicciones, estructuras mentales que conlleven a la resolución de las situaciones presentadas.

Es por ello, que nos ha parecido más que conveniente la elección del paradigma cualitativo dentro de esta investigación, con el que podemos analizar la construcción matemática, ya sea individual o colectiva, desde una perspectiva creadora, y no reguladora ni estandarizada. Objetivo factible dentro de la metodología ACODESA, en donde el profesor solo guía y los alumnos descubren las conjeturas necesarias para superar la dificultad presentada.

El uso de la metodología ACODESA, se basa principalmente en el aprendizaje colaborativo, en donde los alumnos generan conocimientos a través del análisis individual, por equipo y grupal en diferentes etapas, tomando al profesor como guía y no como el proveedor de conocimiento, el trabajo realizado demuestra la capacidad de los alumnos de resolver problemas si bien no con las representaciones institucionales que aparecen en los libros, sino con sus propias representaciones funcionales.

Es importante mencionar que en una de las etapas de la metodología ACODESA, denominada auto-reflexión, se recurrió del uso del método clínico utilizado por Jean Piaget (2001) dentro de la psicología genética. La razón de esto fue la línea de pensamiento de los alumnos para conocer a fondo las estructuras cognitivas desarrolladas durante la experimentación.

La experimentación se realizó con 6 alumnos de tercer año de la escuela secundaria técnica no. 30 ubicada en el municipio de Uruapan, del estado de Michoacán. En esta escuela se expresa la preocupación por la falta de comprensión del algebra de la mayoría de los estudiantes, estos sólo resuelven mecánicamente algunos problemas siguiendo una serie de pasos, pero con ausencia de comprensión y razonamiento.

Una investigación que se desarrolla en el contexto de la generación de patrones proponiendo la existencia de un pensamiento aritmético-algebraico, donde no son tan importantes los símbolos y signos algebraicos como entes institucionalizados, sino las representaciones funcionales que se generan a partir de representaciones mentales del sujeto, basadas en estructuras de control construidas sobre el pensamiento aritmético, ayuda a comprender el proceso natural que los alumnos desarrollan para acceder al álgebra.

En el capítulo II se presenta la metodología ACODESA, que es la que enmarca este trabajo, así como el diseño de esta investigación. En este apartado se explica todo lo que se hizo en la experimentación.

En el capítulo III, IV y V se muestran los resultados de las experimentaciones de cada una de las actividades realizadas. Los resultados en estos tres capítulos son mostrados a partir de las etapas de la metodología ACODESA, primero se analiza el trabajo individual, posteriormente el trabajo grupal, en un tercer momento los resultados de la auto-reflexión, realizada 15 días después de la experimentación, en donde se puede comprobar la construcción de conocimiento estable por parte de los alumnos.

Finalmente, el capítulo VI, está dedicado a las consideraciones y conclusiones finales de esta investigación, así como las respuestas a los cuestionamientos planteados al inicio del estudio.

CAPITULO II: METODOLOGIA Y PROCEDIMIENTOS

En este presente capítulo se plantea la metodología de la investigación, el diseño de actividades y procedimientos realizados en la experimentación, así como las características de los sujetos participantes. Al ser una metodología relativamente nueva, se explica de manera detallada a lo largo de este apartado.

2.1 METODOLOGÍA ACODESA

La metodología que se utilizó a lo largo de este estudio está enfocada al aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión (ACODESA), es una propuesta relativamente nueva que incluye la reflexión individual y grupal, lo que permite contradicciones por parte de los estudiantes, y aprendizaje individual en interacción con los otros sujetos que participan en el debate, en donde se construyen expresiones algebraicas para resolver la situación según sea el caso.

Esta metodología consta de cinco pasos (Cortés et al., 2014):

- **Trabajo individual:** en esta etapa el trabajo de cada uno de los alumnos demuestra de qué manera entiende el problema presentado, aquí se producen las representaciones funcionales y producciones semióticas para comprender la situación problema a fin de prepararse para una discusión en la cual sus ideas tengan mayor impacto.
- **Trabajo en equipo** sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación por parte de los estudiantes, las conjeturas que son confrontadas en este momento resultan en argumentos que acercan más al objetivo planteado (refinamiento y evolución de las representaciones funcionales y producciones asociadas).
- **Debate** (que puede convertirse en un debate científico). Procesos de discusión y validación (refinamiento de representaciones). La discusión en plenaria no es fácil de dirigir, el profesor tendría que promover la comunicación científica en el sentido de Legrand (1993) creando un ambiente de discusión científica, en donde la validación sea un elemento esencial, de manera que se favorezca un aprendizaje equitativo. Cada equipo propone sus resultados y los pone a consideración de toda la clase. Es importante llegar a un acuerdo en el grupo. Sin embargo, también se debe tener en cuenta la fugacidad del consenso; es probable que los estudiantes consideren que han comprendido sin que verdaderamente hayan interiorizado los resultados y nuevas representaciones (Thompson, 2002). La siguiente etapa es insustituible.
- **Auto-reflexión.** Regreso a la tarea en forma individual (trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión). Esta etapa es crucial en la metodología ACODESA, ya que todo el trabajo individual y en equipo una vez pasado el consenso se puede olvidar rápidamente. La estabilidad del conocimiento adquirido en las etapas anteriores no podrá alcanzarse si no se pasa por un periodo de reconstrucción (autorreflexión) de lo realizado.

- **Institucionalización.** En esta etapa, el profesor resume los resultados de los equipos, muestra la evolución de las representaciones espontáneas que emergieron en las etapas anteriores y discute su eficacia antes de introducir las representaciones institucionales y los procesos correctos.

Las etapas de esta metodología pueden ser apreciadas y comprendidas mejor en el siguiente diagrama:

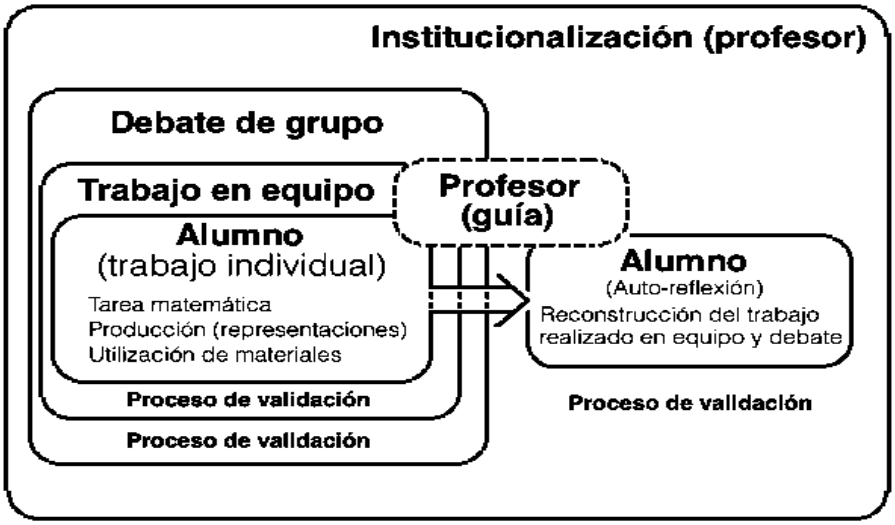


Figura 1 Vista global del proceso en el aula con la metodología ACODESA

(Cortés et. Al., 2014, p. 229)

Si se observa el diagrama anterior, los procesos de validación que son parte fundamental del marco teórico de los espacios de trabajo matemático, son recurrentes dentro de las etapas de esta metodología, además, al promover el trabajo colaborativo, se está promoviendo la comunicación entre los integrantes del grupo, que fortalece la génesis discursiva y la génesis semiótica. Al usar las herramientas tecnológicas, se desarrolla la génesis instrumental, lo que lleva al descubrimiento y al razonamiento, que son medios para la construcción conceptual.

Es importante mencionar que, la metodología ACODESA es una metodología de enseñanza, pero se ha comprobado en varios estudios (Cortés et al., 2014), que los resultados obtenidos al trabajar con esta metodología basada en el aprendizaje colaborativo, son sumamente interesantes y útiles para fines investigativos.

Se han aplicado algunas modificaciones a esta metodología cuando es utilizada para fines de investigación. La primera es que la etapa de autorreflexión pasa a ser la última fase de ACODESA y se aplica después de un lapso de un tiempo considerable (algunos días o después), esto con el fin de conocer la estabilidad del conocimiento demostrado durante la experimentación.

La otra diferencia es la relevancia de la fase de institucionalización de los objetos matemáticos. Dentro de la enseñanza esta etapa es insustituible e indispensable, ya que el proceso de construcción matemática va enfocado a la convencionalidad de representaciones, es decir, después de los procesos de refinamiento de las representaciones funcionales creadas por los estudiantes, es necesario que el profesor enmarque en un lenguaje científico (institucionalizado), los resultados propuestos por los alumnos.

En la presente investigación, esta etapa no tiene un papel central, no se busca enseñar al estudiante, sino saber la construcción conceptual del sujeto sobre el objeto de estudio, y a partir de ello observar el proceso de construcción del pensamiento algebraico, gracias a las conjeturas y contradicciones que se puedan generar dentro de las sesiones de clase.

2.1.1 La metodología ACODESA: un aprendizaje cooperativo o colaborativo

En las últimas décadas se ha estudiado los beneficios del trabajo en pequeños grupos dentro de las aulas, cómo es que la reflexión de los alumnos en interacción con sus pares, puede ayudar a la construcción del conocimiento en estos mismos sujetos.

Bajo este enfoque del trabajo en equipo, surgieron el aprendizaje cooperativo y el aprendizaje colaborativo, aunque tienen algunas similitudes y en ocasiones son tomados como sinónimos, tienen diferencias marcadas que definen cada una de estas perspectivas.

Dentro de esta investigación y para el caso específico de la metodología ACODESA, es necesario, explicare el tipo de trabajo en equipo que se realiza, definiendo por qué la metodología está basada en el aprendizaje colaborativo y no cooperativo.

En los últimos años del siglo pasado y principios de este siglo, las investigaciones sobre el aprendizaje cooperativo tuvieron un realce, según Brody (1995):

> El aprendizaje cooperativo es un proceso social basado en el trabajo grupal estructurado, y se ocupa de promover resultados sociales y académicos; es decir, los estudiantes aprenden nuevas habilidades sociales y como trabajar juntos para alcanzar metas académicas. Estas metas se realizan a través de la imposición de estructura y control por el maestro. El maestro hace que los estudiantes sean responsables por el aprendizaje, colectivamente. Al hacerlo, el maestro actúa como un director que utiliza estrategias de introducción para engendrar habilidades sociales, interdependencia positiva, cooperación y responsabilidad. (citado en Furlotte, 2013)

Se resalta la importancia de la dirección y el liderazgo del profesor en las actividades diseñadas para el trabajo en equipo. Reflexionando sobre este tipo de aprendizaje, Jhonson & Jhonson (1994), hace referencia a Sandy Koufax, uno de los mejores lanzados de la historia del Béisbol, que era capaz de hacer zumbar la pelota con sus

lanzamientos. Los bateadores del equipo rival permanecían en silencio para escuchar el zumbido de la pelota y cuando era su turno de batear, ya se sentían intimidados.

Los autores comentan que sólo habría una manera de arruinar la genialidad de Koufax, hacer que David (uno de los coautores del libro referido), jugara con él como receptor: Es decir, un lanzador necesita un buen receptor, de lo contrario tendría que lanzar la pelota más lentamente para que él pudiera atraparla y por lo tanto la principal arma de Koufax quedaría limitada. Y si además de esto, se ubicaran en posiciones defensivas a otras personas con pocas habilidades para la recepción de la pelota, se habría limitado más los triunfos de este talentoso lanzador, es decir, Koufax no era buen lanzador por sí solo, "el rendimiento excepcional en el aula, al igual que en el campo de juego, exige un esfuerzo cooperativo, y no los esfuerzos individualistas o competitivos de algunos individuos aislados" (Jhonson & Jhonson, 1994, p.5).

Para estos investigadores:

> La cooperación consiste en trabajar juntos para alcanzar objetivos comunes. En una situación cooperativa, los individuos procuran obtener resultados que sean beneficiosos para ellos mismos y para todos los demás miembros del grupo. El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. Este método contrasta con el aprendizaje competitivo, en el que cada alumno trabaja en contra de los demás para alcanzar objetivos escolares tales como una calificación de "10" que sólo uno o algunos pueden obtener, y con el aprendizaje individualista, en el que los estudiantes trabajan por su cuenta para lograr metas de aprendizaje desvinculadas de las de los demás alumnos. (1994, p.5)

Estos autores, especifican las ventajas que tiene el aprendizaje cooperativo sobre el aprendizaje por competencias y el aprendizaje individual, y es que, en estos últimos enfoques, los objetivos son individuales, están alejados de la colectividad.

En resumen, el aprendizaje cooperativo es el conjunto de procesos que ayudan a que las personas cooperen e interactúen entre sí para lograr llegar a cumplir un objetivo o meta específica, en un ambiente en donde existe un líder que generalmente es el profesor, las estrategias que componen este tipo de aprendizaje suelen estar basadas en la teoría de la independencia social, la teoría del desarrollo cognitivo y la teoría del aprendizaje conductual (Panitz, 1997).

En contraste, el aprendizaje colaborativo:

> Personifica el pensamiento libre y hasta el disentimiento. Su objetivo final es crear nuevos conocimientos. En esencia, no está estructurado. De hecho, el objetivo del proceso de aprendizaje colaborativo es que los miembros del grupo piensen y resuelvan problemas abstractos, problemas que pueden no tener respuestas especificas o soluciones múltiples. El aprendizaje colaborativo es, fundamentalmente, un proceso intelectual dentro de un marco social de permitir- hacer. (Olivares, 2005).

A diferencia del aprendizaje cooperativo, este tipo de aprendizaje se basa en la interacción y la solución de los propios estudiantes, con un papel del profesor como guía en las actividades, pero no un impostor de los roles de cada uno de los integrantes del equipo, ni metas específicas determinadas con anterioridad. En torno a esta diferencia, Panitz (1997), plante que:

> La colaboración es una filosofía de interacción y estilo de vida personal donde los individuos son responsables de sus acciones, incluyendo el aprendizaje y el respeto de las contribuciones de sus pares. La cooperación es una estructura de interacción diseñada para facilitar la realización de un producto final especifico o meta a través de personas que trabajan juntas en grupos. (p.3).

Es decir, la colaboración no es solo una técnica utilizada en el aula, es una filosofía personal que puede ser utilizada en todas las situaciones en que las personas se reúnen en grupos, en donde se busque el consenso, y la creación conceptual a partir de las contradicciones propuestas por los integrantes del grupo.

Panitz (1997) propone que el aprendizaje colaborativo se basa en los siguientes principios:

1. Trabajar juntos resulta en una mayor comprensión de lo que probablemente habría ocurrido si uno había trabajado independientemente.
2. Las interacciones habladas y escritas contribuyen a esta comprensión creciente.
3. Existe la oportunidad de tomar conciencia, a través de las experiencias en el aula, de las relaciones entre interacciones sociales, y una mayor comprensión.
4. Algunos elementos de esta comprensión creciente son idiosincrásicas e impredecibles.
5. La participación es voluntaria y debe ser libremente celebrada. (p.12)

Dentro de este trabajo de transición de la aritmética al álgebra, la mayoría de estos preceptos pueden ser considerados, en especial esa interacción de las representaciones de los estudiantes analizadas y reflexionadas de manera grupal, en donde se busca el consenso de la resolución del problema.

A partir del aprendizaje colaborativo se busca la creación por parte de los estudiantes, fuera de un guion propuesto por el docente, se les brinda la libertad de métodos y procedimientos generados a partir de contradicciones reconocidas por ellos mismos, para llegar a una conclusión que no es programada como una meta por parte del profesor, que más bien refleja la construcción de los alumnos, este sería generado desde la perspectiva de nuestra investigación, por la estructura de control.

El aprendizaje colaborativo se basa en el trabajo en equipo y el contraste de competencias desarrolladas por los integrantes de estos grupos, su marco de trabajo grupal ésta basado en teorías derivadas de estudios sobre la naturaleza social del

conocimiento humano. Las diferentes raíces del constructivismo han formado la base del aprendizaje colaborativo (Panitz, 1997), como la teoría sociocultural de Vygotsky.

Es por eso que el aprendizaje colaborativo es la base de la metodología ACODESA, ya que en este no hay líderes y todos buscan la construcción del conocimiento sin jugar ningún rol de grupo determinado.

2.1.2 Fundamentación de la metodología ACODESA

La metodología ACODESA es la integración de varios elementos: un aprendizaje en colaboración (Panitz, 1997), un debate científico a la manera de Legrande (1990, 1996, 2001), y la auto-reflexión de acuerdo a las ideas de Hadamard (1945).

En el debate científico son indispensables "las 'suposiciones' que hacen los alumnos con respecto a la solución del problema, las cuales son formalizadas en términos de conjetura, y la validación es realizada por ellos mismos" (Páez, 2004, p.77).

En la auto- reflexión, es relevante saber la estabilidad de las construcciones conceptuales de los alumnos, "Thompson (2002) llevó a cabo una investigación con diecinueve estudiantes y se dio cuenta que algunos de ellos no asimilaron el trabajo individual ni la discusión global, aun cuando habían llegado a un "consenso" en el debate" (Páez, 2004, p. 78).

Además, Hadamard (1945) ha expuesto sus ideas sobre la incubación del conocimiento, incubar en el subconsciente para posteriormente, al retomarlo nuevamente después de un tiempo considerable promueva un mejor análisis, precisión y solución del problema (Páez, 2004)

En la fase de auto-reflexión, además de volver a aplicar el instrumento a los estudiantes, se realizó una entrevista a través del método clínico propuesto por Piaget (2001). Está modificación en la metodología nos parece adecuada para conocer a profundidad las estructuras mentales a partir de las explicaciones dadas por los estudiantes.

Vygotsky reconoció las bondades de este método:

> Piaget debe el hallazgo de nuevos datos, una mina de oro, al nuevo método, introducido por él, al método clínico, cuya potencia y originalidad lo sitúan entre los mejores métodos de investigación psicológica y lo convierten en un elemento insustituible para el estudio del cambio evolutivo de las complejas formaciones del pensamiento infantil. (1934, p.31, citado en Delval, 2001, p.11)

De manera específica, se consideró el método clínico debido a que:

> Constituye un procedimiento de recogida y análisis de datos para el estudio del pensamiento niño (aunque igualmente puede aplicarse al estudio de lo que piensan los adultos) que se realiza mediante entrevistas o situaciones muy abiertas en las

> cuales se trata de seguir el curso del pensamiento del sujeto a lo largo de la situación, planteando nuevas preguntas para aclarar las respuestas anteriores del sujeto. Consta, por tanto, de algunas preguntas básicas y de otras que varían en función de lo que va diciendo el sujeto y de los intereses que guían la investigación que estamos realizando. (Delval, 2001, p. 11)

Este método es extraído de la investigación psicogenética se ha utilizado específicamente en esta etapa de autorreflexión de la metodología ACODESA, por las posibilidades que brinda para conocer las estructuras mentales de los estudiantes.

2.2 MUESTRA

La experimentación se realizó con los alumnos de tercer año de la Escuela Secundaria Técnica Número 30 de Uruapan, Michoacán. Se llevó a cabo desde el día 7 de octubre del 2019 hasta el día 23 de octubre del 2019. El grupo experimental se integró por 6 alumnos, los cuales fueron sorteados al azar de entre todos los diferentes grupos de tercer grado. Para que los alumnos mostraran interés, se les explicó que a los que asistieran y si les iba bien se les darían puntos extras para su evaluación. Si las actividades no se terminaban en la hora de matemáticas se solicitaría la siguiente clase. Además, las cinco actividades se realizaron en dos semanas diferentes, ya que desde el 7 al 9 de octubre fue la primera etapa de las actividades y 2 semanas después, del 21 al 23 de octubre se realizó la segunda etapa.

2.3 DISEÑO DE LA EXPERIMENTACIÓN

En la experimentación se tomaron en cuenta en el diseño de la actividad las etapas de la metodología ACODESA, en donde se busca encontrar las representaciones funcionales surgidas a partir de las representaciones espontáneas que surgen a partir de los alumnos.

2.3.1 Procedimientos de la experimentación

La experimentación se llevó a cabo en dos momentos, primero, una sesión de aproximadamente hora y media de duración cada una, donde se desarrollaron cada una de las actividades. En una tercera fase, se realizó la etapa de autorreflexión 2 semanas después de la experimentación inicial, en las cuales se resolvieron algunas de las mismas cuestiones de las hojas de trabajo para comprobar la construcción conceptual de los estudiantes, y además se realizaron pequeñas entrevistas a través del método clínico.

Las sesiones de trabajo de cada una de las actividades se desarrollaron de la siguiente manera:

- 5 minutos de contextualización y presentación de la actividad.

- 10 minutos(aproximadamente) del trabajo individual a lápiz y papel.
- 15 a 20 minutos de trabajo en equipo también en un entorno a lápiz y papel.

- El debate científico se desarrolla durante aproximadamente 50 minutos, en donde se observa contradicciones, se realiza conjeturas, y se pulen las representaciones funcionales de los alumnos.

- La institucionalización no toma un lapso mayor a 10 minutos, recordemos que esta investigación es una etapa irrelevante.

Las sesiones fueron grabadas por dos cámaras, una móvil y una fija, para poder tener evidencia de todo lo ocurrido dentro del aula donde se realizó la experimentación, también se utilizaron diferentes colores de tinta para reconocer en las hojas de trabajo cada una de las etapas, azul para el trabajo individual, rojo para el trabajo en equipo y verde para el debate.

En las entrevistas realizadas en la etapa de autorreflexión se hicieron preguntas espontáneas que surgieron a partir de la línea de pensamiento que los estudiantes siguen para entender su forma de resolver lo que se les plantea.

2.3.2 Análisis de la experimentación

El análisis de los resultados se realizó a partir de las etapas de la metodología ACODESA, buscando dar un orden al proceso de construcción de expresiones generales para cada una de las actividades. En cada una de las fases se analizan las representaciones y las líneas de pensamiento de los alumnos, y como se van modificando las conjeturas a través de las contradicciones y los procesos de validación durante el trabajo colaborativo.

También es importante mencionar que, en los apartados de estos resultados, por cuestión de economía (en el sentido de Duval, 1993,1995), cualquier cantidad utilizada dentro de la experimentación se escribe con simbolismos numéricos (numerales, 1,2,3,4,5 etc.).

CAPITULO III: ANÁLISIS, DISCUSIÓN Y RESULTADOS DE LA HOJAS DE TRABAJO

ACTIVIDAD A: LA FABRICA DE VENTANAS

En este apartado se darán a conocer los resultados de la experimentación realizada, en donde se buscaba construir una expresión algebraica para calcular rápidamente el número de cuadros de color verde para cualquier tamaño de ventana. Se tiene como fin construir un pensamiento aritmético- algebraico que propicie una entrada natural al álgebra.

Los resultados serán mostrados de diferente manera según la etapa de la metodología ACODESA que se esté analizando. En las etapas de trabajo individual y en equipo, se revisan las diferentes estrategias que utilizaron los alumnos, al igual que las conversaciones entre los integrantes de los equipos formados, en donde confrontan las diferentes conjeturas y razonamientos que siguieron para resolver el problema. En el debate grupal se revisan los "episodios" (fragmentos de grabaciones en donde se observan procedimientos y conjeturas de los diferentes equipos) en donde se ve reflejada la línea de pensamientos que cada uno de los equipos siguió y en análisis de grupo que se hace de dichos procedimientos. En la etapa de auto-reflexión son importantes las producciones de los alumnos y las respuestas que se tuvieron en una pequeña entrevista clínica realizada sobre las respuestas que ellos representaron en sus hojas de trabajo. Además, todas las cantidades se representan con símbolos numéricos por economía en el sentido de Duval (1995).

3.1 TRABAJO INDIVIDUAL

El Trabajo en esta primera etapa se desarrolló aproximadamente en 10 minutos, en donde se observaron las diferentes estrategias que los estudiantes utilizaron de manera individual para tratar de resolver los problemas presentados. En esta etapa se utilizó lapicero azul para identificar las representaciones que realizaron los alumnos. Las estrategias que se desarrollaron fueron las siguientes:

1. Alumnas como Ennya y Abril, demuestran una estrategia muy particular para calcular el número de cuadros de color verde. Por ejemplo, Ennya:

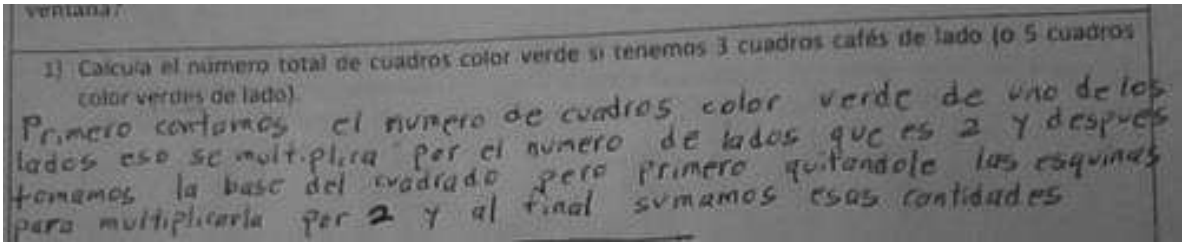


Figura 2 TIFV (Trabajo individual la fábrica de ventanas) Explicación del cálculo de cuadros color verde, Ennya

En su análisis, explica su manera de calcular el número total de cuadros de color verde si tenemos 3 cuadros cafés de lado, pero a pesar de que su estrategia es correcta, nunca nos dice cuál es su resultado ni tampoco hace mención de las

cantidades ahí dichas como lo son los 3 o 5 cuadros de lado. En la siguiente imagen explica:

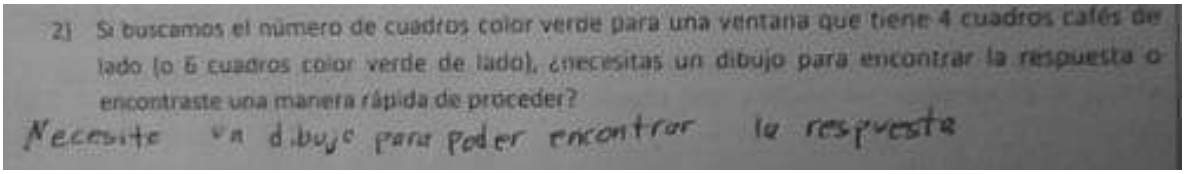


Figura 3 TIFV Respuesta a la pregunta 2 de Ennya

Ella menciona que, para poder contestar de manera más rápida, lo que necesita es apoyarse en una representación icónica. Pero esto es lo que dice a continuación, en la siguiente pregunta:

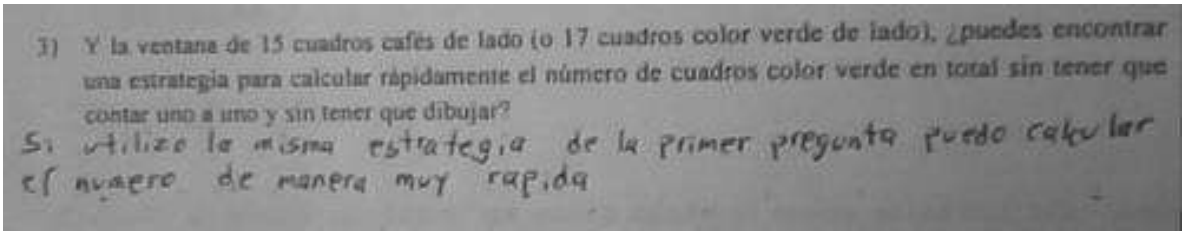


Figura 4 TIFV Ennya explicando su forma de calcular una ventana que tiene 17 cuadros verde de lado

Ennya empezó claramente a resolver el problema por medio de una representación icónica (seguramente usando la del principio de esta actividad porque no hace ningún dibujo en ningún lado) pero después observamos que ella misma comenta que para calcular los cuadros verdes que se necesitan con un número más grande, no debe hacer nuevamente ese tipo de representación sino simplemente usar la estrategia que ya obtuvo anteriormente. Además, debemos notar que en ninguna parte de su trabajo individual hace algún tipo de cálculo de lo que se pide a pesar de que claramente Ennya obtiene una estrategia correcta durante esta.

Otro ejemplo de esto es Abril, quien utiliza la misma estrategia soló que ella si lleva a cabo sus cálculos correspondientes además de que a diferencia de Ennya, hace una pequeña representación icónica en esta parte individual de donde seguramente se basó para obtener esta forma de hacer el problema.

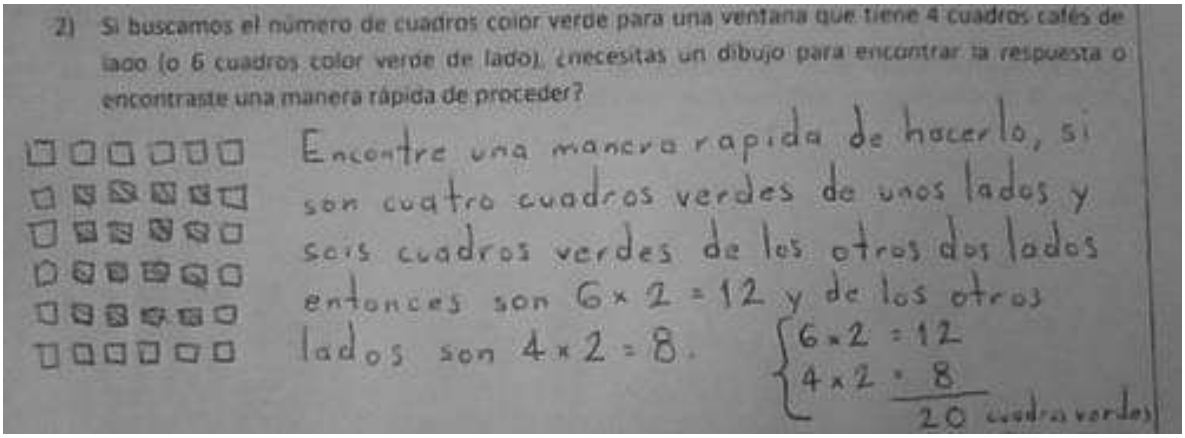


Figura 5 TIFV Explicación de Abril

2. En el caso de Ángel, por ejemplo, él sugirió una estrategia que se basa en una diferencia de áreas, mediante la cual se tiene que calcular el área de ambas ventanas primeramente para así poder restar al área pequeña a la grande. Cuando se le cuestionó sobre esta situación él explica:

Inv.: ¿Cómo le hiciste a ver dime?

Ángel: Encontramos primero cuantos cuadritos se necesitan para la ventana grande y después hacemos lo mismo para la ventana de adentro, para esa quitársela a la grande.

Inv.: ¿Cómo te diste cuenta de eso?

Ángel: Es que comencé contando los cuadritos y mientras lo hacía me di cuenta que el cuadro café estaba dentro del verde, así que, si le quitaba todos los cuadritos cafés, me darían los verdes de las orillas.

Inv.: ¿Y por qué se te ocurrió calcular el área?

Ángel: No lo sé, simplemente empecé a hacer operaciones y eso fue lo que funcionó (en la hoja de trabajo se ve que trato de hacerlo de diferentes maneras)

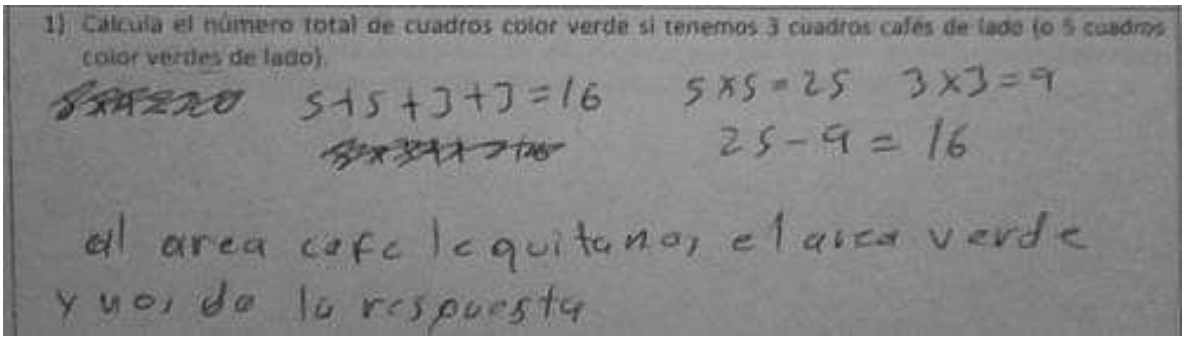


Figura 6 TIFV Estrategia de diferencia de áreas de Ángel

Aunque Ángel no pudo explicar muy bien al final su estrategia, ha iniciado un proceso de reflexión, en donde se dio cuenta de que puede llegar a una respuesta a base de a algo quitarle algo.

3. Una última estrategia utilizada por los estudiantes fue la que desarrollaron Victor y Héctor. Estos alumnos trataron de calcular el número de cuadritos de color verde alrededor por medio de un perímetro.

Sus razonamientos son muy parecidos, aunque la diferencia está en que Victor da una respuesta muy vaga, ya que solamente menciona que hay que sumar las orillas de la ventana 4 veces.

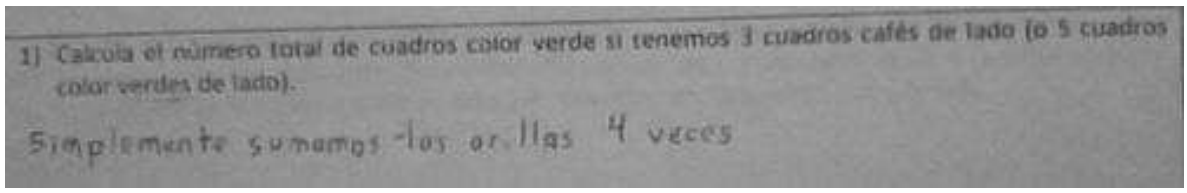


Figura 7 TIFV Pequeña explicación de Victor

Héctor sigue la misma línea de pensamiento, solo que a diferencia de Victor, él explica de una mejor manera lo que está haciendo.

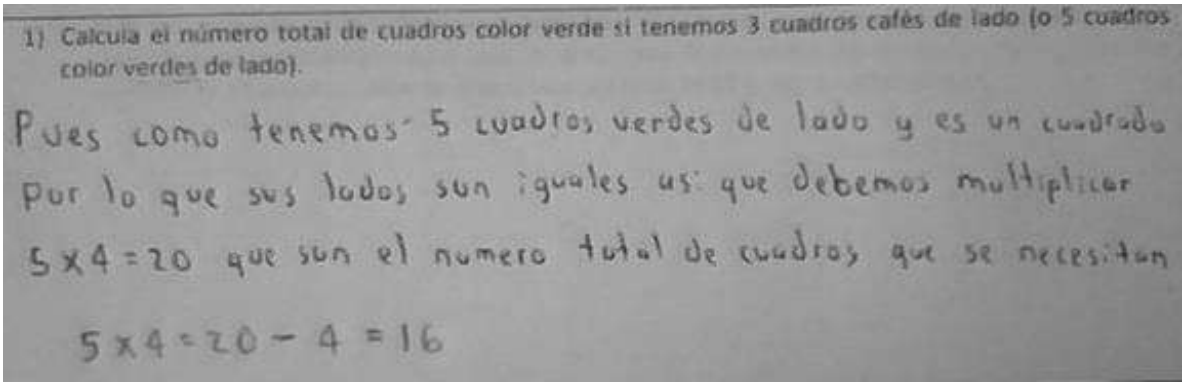


Figura 8 TIFV Estrategia de Héctor basada en la suma de los lados de un cuadrado

Al final nos dice que simplemente hay que multiplicar el número por 4 y obtiene 20 cuadritos verdes en esta parte (esta ventana realmente cuenta con 16 cuadritos verdes). Pero esto más adelante se pone interesante porque en la misma imagen podemos ver que abajo, en la parte del debate, tanto en esta pregunta como en las siguientes, utiliza el color verde para restarle 4 a todas sus respuestas y en una respuesta nos dice:

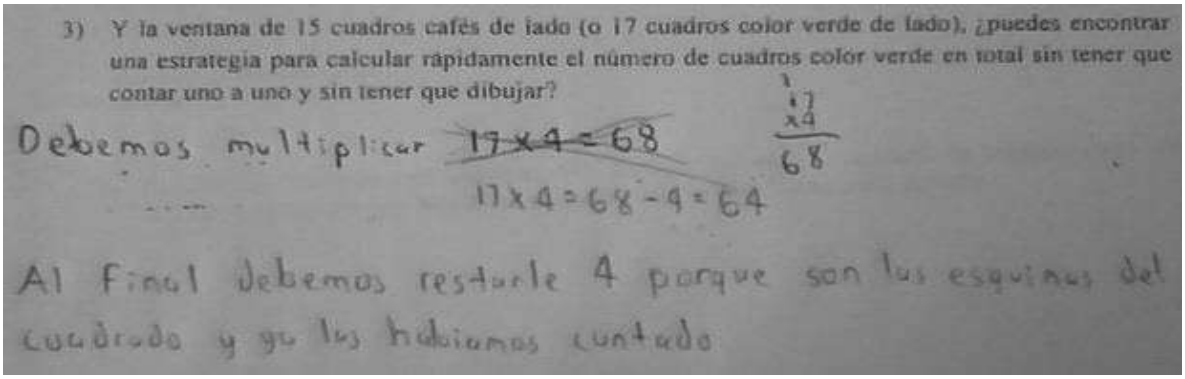


Figura 9 TIFV Explicación y resultado de Héctor después de la etapa del debate

Héctor pudo darse cuenta de que a su estrategia le faltaba algo para llegar a la respuesta correcta, en este caso quitar las esquinas como el menciona, lo que es parecido a lo que nos decía Ángel en su estrategia, a algo hay que quitar algo.

3.2 TRABAJO EN EQUIPO

En esta etapa de la metodología ACODESA se dividieron los alumnos en dos equipos de tres estudiantes cada uno, los equipos se hicieron de manera aleatoria. Los equipos formados fueron:

EQ1: Ennya, Israel y Ángel

EQ2: Héctor, Victor y Abril.

Se inició con el trabajo a lápiz y papel (hay que recordar que en esta etapa se usa lapicero color rojo).

En el EQ1, cada uno de los integrantes utilizó su estrategia previamente obtenida en la parte individual de la actividad, pero, influidos por Ángel, ellos empiezan a utilizar la estrategia de este último mencionado, como se puede ver por ejemplo en la hoja de trabajo de Ennya, donde ella abandono su estrategia para utilizar la que hizo su compañero.

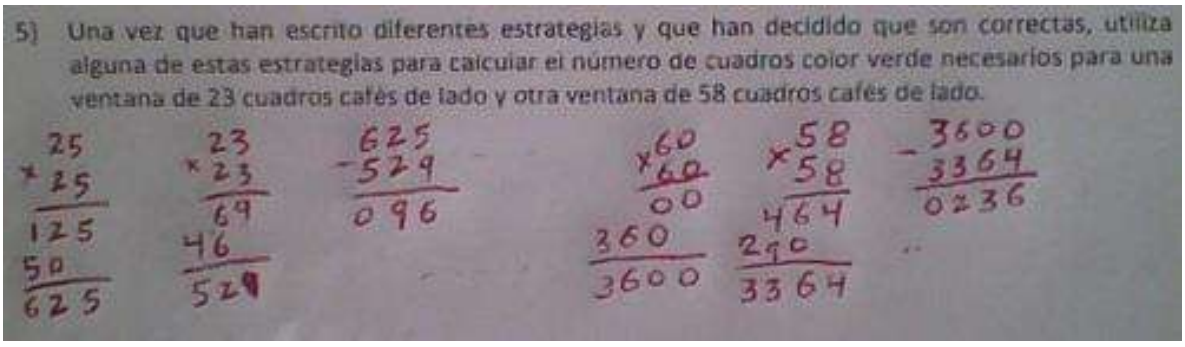


Figura 10 TEFV (trabajo en equipo de la fábrica de ventanas) Ennya utilizando la estrategia de diferencia de áreas de su compañero Ángel

La influencia que recibe Ennya en el trabajo de equipo es notoria. A partir de la discusión con los demás integrantes del equipo, Ángel llega una explicación mucho mejor de su propia estrategia a la que obtuvo en la parte individual.

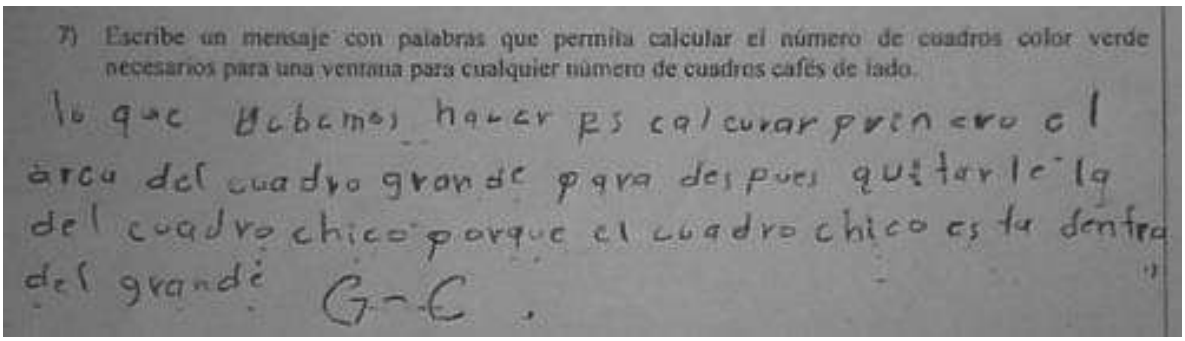


Figura 11 TEFV Idea de formula general de Ángel

Por otro lado, el EQ2 cada uno de los integrantes discute sus estrategias previamente obtenidas más, sin embargo, cada uno de ellos contesta lo que se les pide utilizando su propia estrategia, es decir, ninguno utilizó la estrategia de otro de sus compañeros como sucedió en el EQ1 influenciado por Ángel. Pero a pesar de cada uno lo hizo a su manera, algo interesante es que una vez que compararon sus resultados obtenidos entre ellos, Héctor y Victor se dieron cuenta de que, con su estrategia, ellos obtenían un resultado diferente al de su compañera Abril, lo que les ayudo a preguntarse si su estrategia estaba bien o no.

Abril: ¿Cuánto les dio de resultado en la pregunta 4?
Héctor: 68
Victor: 68
Abril: A mí me dio 64
Héctor: Abril, ¿Por qué te dio diferente resultado al de nosotros?
Abril: No lo sé, pero hay que ver qué onda. Porque en la primera parte si me salió lo que era miren.
Victor: Oh si, ¿Entonces que paso?
Abril: No sé, pero vamos a hacer un dibujo a ver que tal.

Figura 12 TEFV Representación icónica de Abril

Como se puede apreciar, en la hoja de Abril aparece un dibujo tratando de contar el número de cuadros de color verde necesarios para una ventana con 15 cuadros café de lado. Lo interesante aquí es que a pesar de que Abril comenzó su hoja de trabajo con una pequeña representación icónica, está no había vuelto a usarla para resolver preguntas posteriores sino hasta que, junto con sus compañeros, se dieron cuenta de que algo fallaba en algunas de sus estrategias puesto que obtenían resultados diferentes.

3.3 DEBATE GRUPAL

Esta etapa es donde es más visible el trabajo colaborativo de los alumnos en la búsqueda de una expresión general. El EQ1 pasa a explicar sus razonamientos, con lo que empieza una serie de discusiones.

3.3.1 Episodio 1 La representación icónica.

> **Inv.:** ¿Qué estrategias utilizaron para calcular rápidamente el número de cuadros color verde?
> **Abril:** Primero contamos los cuadros verdes de un lado y esos los sumamos con los cuadros verdes del otro lado. Luego contamos los cuadros de la parte de abajo para sumarlos con los de la parte de arriba. Y después sumamos esas dos cantidades.
> **Inv.**: A ver si tenemos 4 cuadros cafés de lado ¿Cuántos cuadros de color verde necesitamos?
> **Abril:** Realiza en el pizarrón lo siguiente:

Figura 13 DFV (debate fábrica de ventanas) Representación icónica

Abril: Nos da 20 (Ella cuenta los cuadritos para comprobar su respuesta)
Inv.: Muy bien y si yo les dijera que ahora tenemos 23 cuadros cafés de lado tal y como nos lo dicen en la pregunta 5 ¿Cuántos cuadros de color verde necesitamos?
Abril:(Ella piensa un poco primero antes de dar una respuesta mientras sus otros dos compañeros están discutiendo entre ellos sus respuestas de esta parte)

Como se puede notar aquí claramente se utilizó la representación icónica para calcular sus respuestas, pero decidieron abandonarla debido a las limitaciones que tienen este tipo de representación al momento de hacerlas cuando están involucradas cantidades grandes.

3.3.2 Episodio 2 Abandono de representaciones icónicas y comparación de las diferentes estrategias entre los estudiantes

Después de pensarlo un poco Abril comenta.

Abril: Pues aquí lo hicimos de una forma diferente (le da la palabra a su compañero Héctor)
Héctor: Lo que nosotros hicimos fue tomar el número de cuadros de un lado y multiplicarlo por 4, lo que nos da 100
Inv.: A ver hazlo en el pizarrón

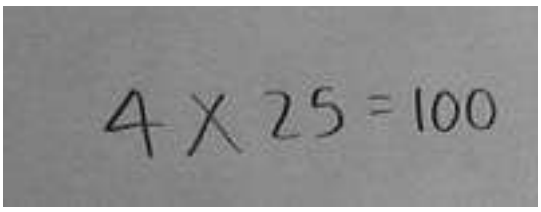


Figura 14 DFV Operación hecha por Héctor usando su estrategia

Inv.: ¿Por qué decidieron hacerlo de esta manera?
Héctor: Porque es más rápido y fácil que andar haciendo el dibujo.

Tal como se pensó, los estudiantes tienen problemas de hacer representaciones icónicas al momento de involucrar cantidades mayores.

Ángel: A nosotros nos dio algo diferente y también lo hicimos de diferente manera.
Inv.: A ver pasa a explicarlo al pizarrón.
Ángel: (El escribe lo siguiente)

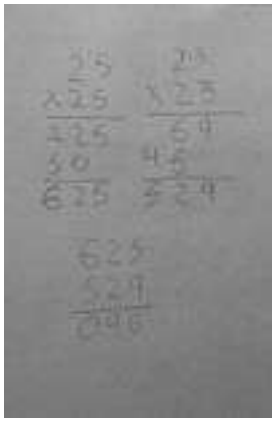


Figura 15 DFV Operaciones de Ángel utilizando su estrategia de diferencia de áreas

Ángel: Pues nosotros le quitamos el cuadro chico al grande y aquí nos dio 96 cuadritos.
Inv.: ¿Y qué les dio en la siguiente pregunta en donde nos dicen que tenemos 58 cuadros cafés de lado?
Ángel: 236
Inv.: ¿Cuánto les dio a ustedes Héctor?
Héctor: A nosotros nos dio 240
Inv.: Muy bien revisen su resultado (En eso Abril interviene)
Abril: ¡A ya! Lo que pasa es que nosotros estamos contando las esquinas 2 veces y si se las quitamos nos da igual que ellos
Héctor: Tienes razón, si es cierto.
Inv.: A ver entonces repitan lo que explicaron antes, en donde nos dijeron cuántos cuadros de color verde son necesarios si tenemos 4 cuadros cafés de lado, pero ahora usando este método que usaron en esta parte.
Abril: Si, nos dio lo mismo.

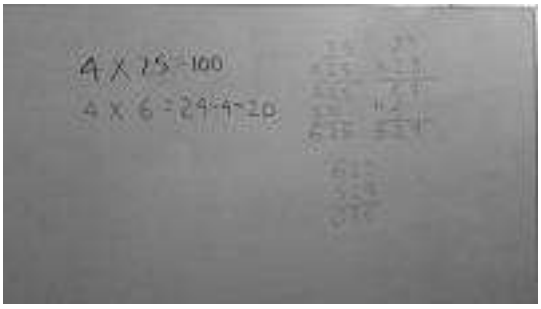


Figura 16 DFV Comparación de resultados de las distintas estrategias

Es interesante ver como los estudiantes al comparar sus diferentes estrategias en el debate frente al grupo, estos llegan a contradicciones y soluciones a las que no pudieron llegar de manera individual e incluso en pequeños equipos.

> **Inv.:** Muy bien, ahora ¿Qué fue lo que hicieron en la pregunta 8, en donde nos pide un mensaje simplificado utilizando solo operaciones?
> **Abril:** A nosotros no nos alcanzó el tiempo de hacer nada, es que como teníamos resultados diferentes nos atoramos ahí.
> **Inv.:** Ok ¿y a ustedes EQ1?
> **Ennya:** Pues nosotros tratamos de hacerlo un poco solamente.
> **Inv.:** A ver qué pasaría si yo les pregunto ¿Cuántos cuadros de color verde necesitamos si tenemos 200 cuadros cafés de lado?

3.3.3 Episodio 3 En busca de una fórmula general

Desde el trabajo individual Ángel ya tenía una pequeña idea de cómo encontrar una fórmula para calcular el número de cuadros de color verde necesarios de manera general. Y siguiendo esa idea Ángel dice:

> **Ángel:** Pues al cuadro grande le quitamos el cuadro chico
> **Inv.:** ¿Por qué?
> **Ángel:** Porque el cuadro chico está dentro del grande, por lo que el área del grande debe ser mayor al área del chico
> **Inv.:** A ver escríbelo ahí
> **Ángel:** G – C (escribe en el pizarrón)
> **Inv.:** A ver eso es lo que acabas de decir en cuanto a lo a que al cuadro grande le quitamos el cuadro chico. ¿Pero cómo representas lo que me dijiste después que tiene que ver con las áreas?
> **Ángel:** No lo se
> **Inv.:** Mira imagínate que tú no sabes nada de este problema y que alguien te da esa fórmula para resolverlo G – C, grande menos chico. ¿Qué es lo que harías entonces?
> **Ángel:** Le preguntaría que quiere decir eso del cuadro grande y el chico

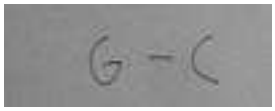


Figura 17 DFV Propuesta de fórmula general de Ángel

Ángel tenía una idea hacer más sin embargo tenía un poco de problemas al momento de pasar a la representación de una fórmula. Pero justo en ese momento sus compañeros del EQ2 intervinieron para poder ayudarlo

3.3.4 Episodio 4 Representación de la fórmula

Mientras Ángel daba su explicación de cómo encontrar una fórmula para resolver lo que se le pedía, los alumnos del EQ2 discutían entre ellos y luego Héctor propone algo respecto a la idea de Ángel.

> **Héctor:** ¿Qué tal si en vez de poner G y C pones área grande y área chica?
> **Ángel:** ¿Cómo así?
> **Héctor:** Si, y ya en vez de poner todo eso simplemente ponemos AG – AC, para así calcular lo que tu dijiste
> **Ángel:** Órale (escribe lo que le menciono su compañero Héctor)
> **Inv.:** Bien ya tienen su fórmula ahora… (Héctor interviene)
> **Héctor:** Nosotros tenemos la fórmula de nuestro método
> **Inv.:** A ver escríbanla en el pizarrón
> **Héctor:** A ver (señala a su compañera Abril para que escriba)
> **Abril:** 4l – 4
> **Inv.:** Bien ahora expliquen qué fue lo que hicieron
> **Abril:** Pues como dijimos que habíamos multiplicado el lado del cuadrado por 4 entonces pusimos l como el lado y después el -4 es porque al final le quitamos las 4 esquinas como habíamos quedado

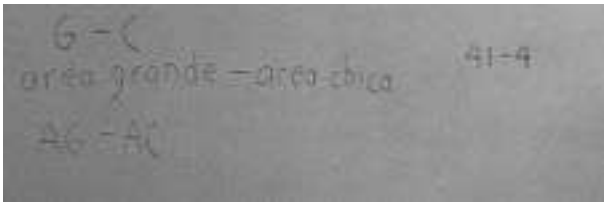


Figura 18 DFV Expresiones generales de los estudiantes

Es interesante ver que entre todos los estudiantes no solo lograron obtener una sola fórmula sino 2 diferentes, entre ambos equipos se estuvieron ayudando hasta qué ambos obtuvieron su fórmula de acuerdo con su estrategia utilizada.

3.3.5 Episodio 5 Comprobación

Se comprueban sus fórmulas obtenidas, esta vez preguntando los cuadros necesarios de color verde con 78 cuadros de color cafés.

Inv.: A ver si ahora tenemos 78 cuadros de color cafés de lado ¿Cuántos cuadros de color verde necesitamos alrededor?
Abril: A ver yo lo hago (empieza es escribir) 4(80)-4=316
Inv.: ¿Igual a 316?
Abril: Si
Inv.: Muy bien ahora ustedes
Ángel: ¿Podemos hacerlo como queramos? Es que al final me pareció más fácil como lo hicieron ellos.
Inv.: A ver inténtalo con su estrategia
Ángel: Bueno (empieza a escribir) 80x80-78x78=
Ennya: ¿Se puede usar la calculadora para más rápido es que ya casi no tenemos tiempo?
Inv.: Bueno a ver hagan las multiplicaciones ahí
Ennya: (Después de hacer las multiplicaciones ella le dice que escriba) 6400-6084
Ennya: Y la resta es 316 (Dice emocionada)
Inv.: Como pueden ver les salió lo mismo que a sus compañeros
Ennya: Si

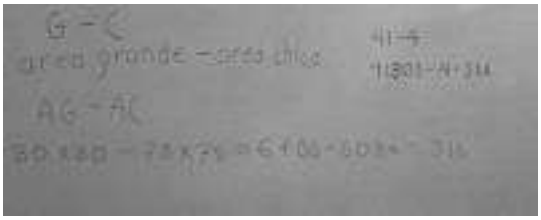


Figura 19 DFV Comprobación de las expresiones generales hechas por los estudiantes

3.4 AUTO-REFLEXIÓN

En esta etapa los procesos de resolución estuvieron basados en distintas estrategias, como la representación icónica, el reconocimiento de un algoritmo iterativo y la reconstrucción de la fórmula utilizada.

En el caso de Israel, tiene complicación para el cálculo de cualquier número de cuadros de color verde y construye reglas arbitrarias para hacer sus cálculos, como se puede notar a continuación:

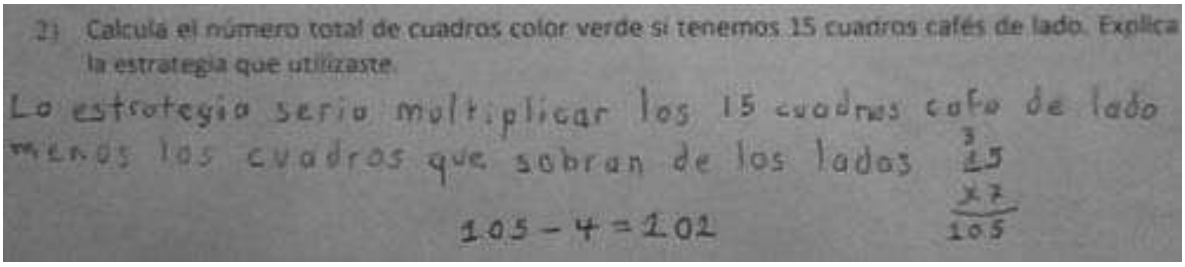


Figura 20 ARFV (auto-reflexión de la fábrica de ventanas) Propuesta para el cálculo de los cuadros de color verde en una ventana de 15 cuadros cafés de lado de Israel

También menciona otra manera de hacerlo en otra de sus respuestas

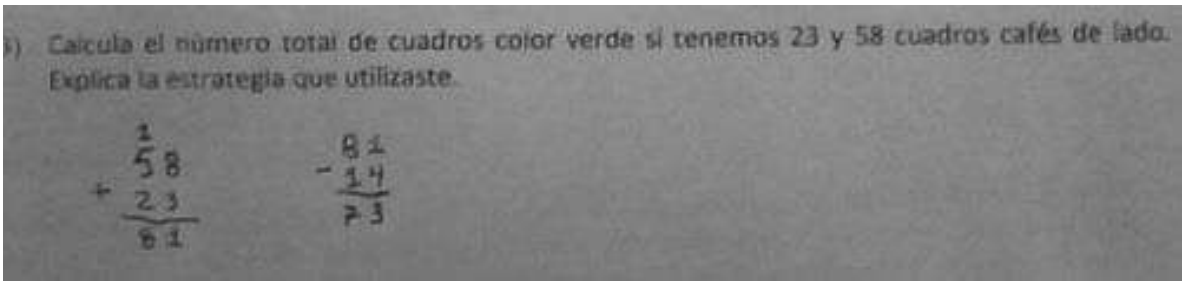


Figura 21 ARFV Segunda estrategia efectuada por Israel

Ennya y Abril utilizaron la representación icónica, lo que nos dice que mostraron un retroceso, regresando a su idea original antes del debate frente al grupo.

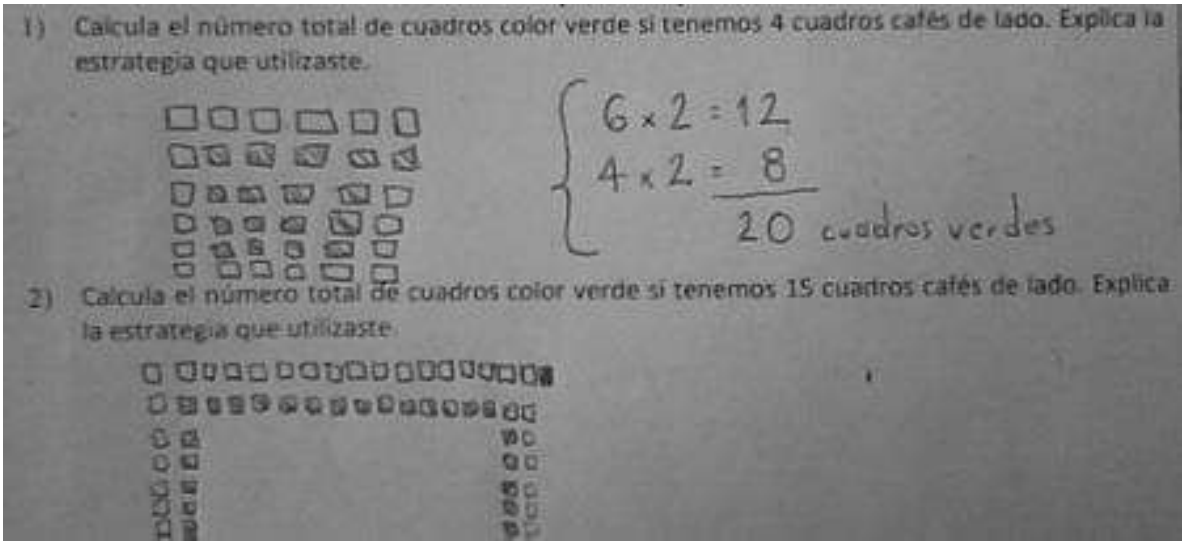


Figura 22 ARFV Hoja de trabajo de Abril

El caso de Héctor es interesante debido a que él intento resolver lo que se le pedía, pero esta vez utilizando una estrategia diferente a la que utilizo la primera ocasión. Esta vez utilizo un algoritmo iterativo para esto.

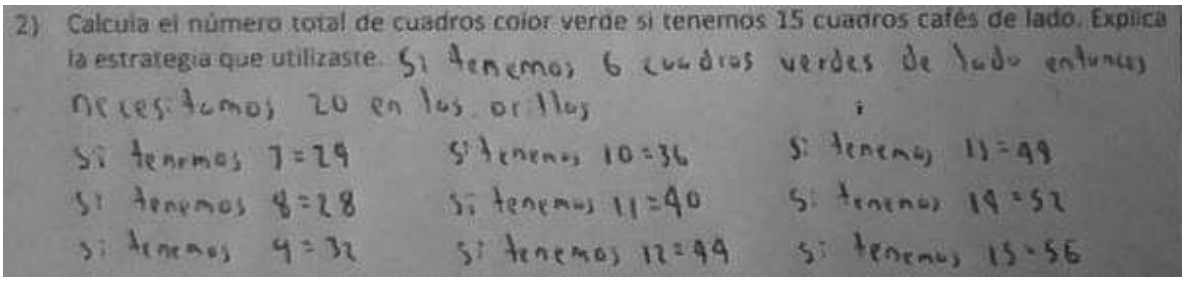


Figura 23 ARFV Calculo de numero de cuadros verdes a partir de un algoritmo iterativo

Más, sin embargo, la limitante de este método apareció al momento de que se le pidió un número mucho mayor donde simplemente no contesto nada.

En cuanto a Ángel, él pudo reconstruir la fórmula para calcular el número de cuadros de color verde que se generó en la experimentación con la cual logra encontrar resultados correctos durante esta etapa.

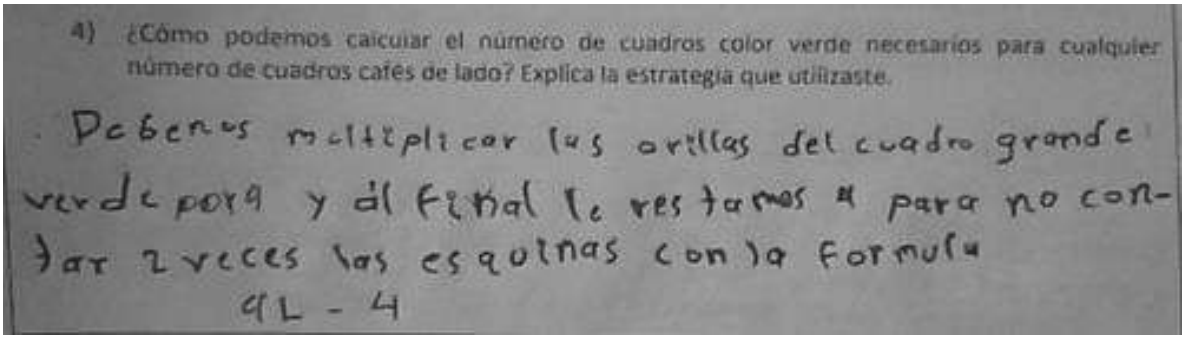


Figura 24 ARFV Reconstrucción de la fórmula obtenida en el debate por parte de Ángel

Es interesante notar que no solo reconstruyo esta fórmula, sino que además si revisamos su proceso en la primera ocasión, vemos que no es la fórmula que el propuso para resolver lo que se pedía sino la que presentaron sus compañeros durante el debate de grupo, lo que nos dice el género conocimiento estable después de este proceso.

Los resultados anteriores nos dicen que no todo el conocimiento fue estable en todos los miembros del grupo que participaron en la experimentación.

CAPITULO IV: ANÁLISIS, DISCUSIÓN Y RESULTADOS DE LA HOJAS DE TRABAJO

ACTIVIDAD B: EL RESTAURANTE DE MARCELO

En este apartado se darán a conocer los resultados de la experimentación realizada, en donde se buscaba construir una expresión algebraica para calcular rápidamente cuantas personas se pueden sentar en cierto número de mesas. Se tiene como fin construir un pensamiento aritmético- algebraico que propicie una entrada natural al álgebra.

4.1 TRABAJO INDIVIDUAL

El Trabajo en esta primera etapa se desarrolló aproximadamente en 10 minutos, en donde se observaron las 2 diferentes estrategias que los estudiantes utilizaron de manera individual para tratar de resolver los problemas presentados. En esta etapa se utilizó lapicero azul para identificar las representaciones que realizaron los alumnos. Las estrategias que se desarrollaron fueron las siguientes:

1. La primera estrategia utilizada por la mayoría de los estudiantes es la que está ligada con las representaciones icónicas.

En los trabajos de los estudiantes podemos notar que, en cada una de sus respuestas, lo que hacen es representar lo que les preguntan para así poder contar y llegar a lo que se les pide. Un ejemplo de esto es Israel, quien no hace más que la representación icónica para llegar al resultado.

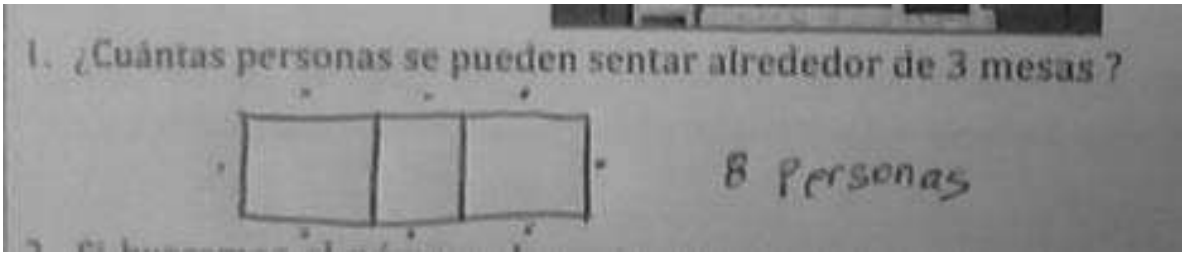


Figura 25 TIRM (trabajo individual restaurante de Marcelo) Representación icónica de Israel

2. Héctor demuestra una estrategia diferente a la de sus compañeros. Este recurre a un algoritmo iterativo.

El primeramente hace lo que sus demás compañeros, simplemente recurre a la representación icónica, pero al querer encontrar el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas sin necesidad de dibujar él dice lo siguiente:

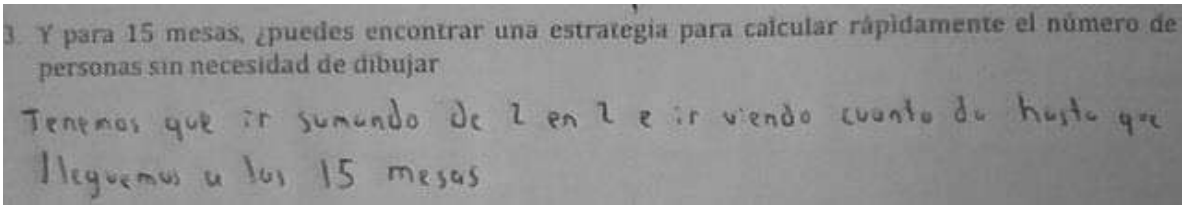


Figura 26 TIRM Lógica iterativa

Aquí Héctor explica cuál fue su estrategia para encontrar lo que se le pide y aunque no hace ningún calculo durante la actividad con ella, podemos notar claramente que su estrategia es del todo correcta.

4.2 TRABAJO EN EQUIPO

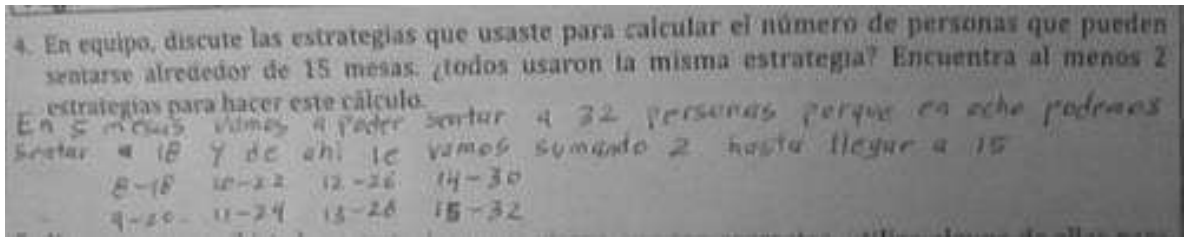
En esta etapa de la metodología ACODESA se dividieron los alumnos en dos equipos de tres estudiantes cada uno, los equipos se hicieron de manera aleatoria. Los equipos formados fueron:

EQ1: Héctor, Ennya y Israel.

EQ2: Victor, Ángel y Abril.

Se inició con el trabajo a lápiz y papel (hay que recordar que en esta etapa se usa lapicero color rojo).

En el EQ1, influidos por Héctor, los demás integrantes de este equipo también realizan una especie de tabla en donde comienzan a calcular el número de personas necesarias por medio de un algoritmo iterativo, se presenta lo realizado en la hoja de trabajo de Israel.


4. En equipo, discute las estrategias que usaste para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿todos usaron la misma estrategia? Encuentra al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.

En 5 mesas vimos a poder sentar a 32 personas porque en ocho podrían sentar a 18 y de ahí le vamos sumando 2 hasta llegar a 15

8-18 10-22 12-26 14-30
9-20 11-24 13-28 15-32

Figura 27 TERM (trabajo en equipo restaurante de Marcelo) Algoritmo iterativo por parte de Israel

La influencia de Héctor en el trabajo de este equipo es notoria. Ya qué como lo vimos antes, Israel utilizó la representación icónica para resolver la parte individual de su trabajo, pero abandonó esa idea una vez que entre ellos discutieron como equipo sus estrategias previamente obtenidas.

Mientras tanto, en el EQ2 sus integrantes continúan utilizando la representación icónica para resolver sus hojas de trabajo, pero conforme más avanzan en ella, más se dan cuenta de las limitantes de esta estrategia, por lo que empiezan a tratar por medio de un algoritmo iterativo como lo hizo el EQ1. Pero después, Ángel comienza a utilizar otro tipo de estrategia junto con el algoritmo iterativo, él empieza a sumar sus resultados para obtener sus respuestas.

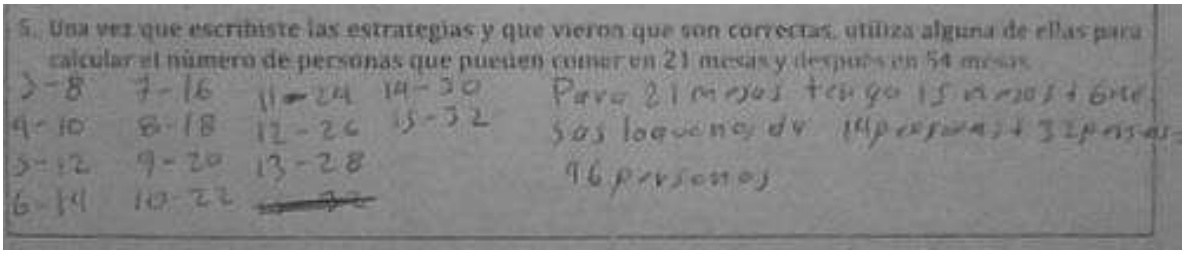


Figura 28 TERM Ángel comienza a utilizar el algoritmo iterativo

En el caso donde tenemos 21 mesas él primero hace sus cálculos para poder sumarlos y al final nos dice que necesitamos 46 personas (Que en realidad son 44 personas), lo que demuestra claramente las limitaciones que tienen este tipo de estrategias, pero es interesante el hecho de ver de qué Ángel trataba de encontrar una manera más eficaz de resolver lo que se le pedía.

4.3 DEBATE GRUPAL

Es aquí en donde los alumnos pasan a explicar sus razonamientos, con lo que empieza una serie de discusiones en busca de una expresión general.

4.3.1 Episodio 1 La representación icónica

Inv.: (Les había preguntado cómo se calculaba el número de personas para colocar alrededor de 4 mesas.
Israel: Pues nosotros lo que hicimos primero fue dibujar para encontrar la respuesta, pero ya después comenzamos a hacer sumas.
Inv.: ¿Lo pueden hacer?
Ennya: A ver Héctor (Héctor comienza a escribir)

Figura 29 DRM (debate restaurante de Marcelo) Representación icónica por parte de Ennya para el caso de 4 mesas

Inv.: Muy bien y si yo les pidiera calcular el número de personas en 21 mesas.
Héctor: Pues…

Como se puede apreciar, los estudiantes para números pequeños generalmente recurren a las representaciones icónicas para encontrar sus respuestas como sucedió en este caso.

4.3.2 Episodio 2 El algoritmo iterativo

Aquí Héctor comienza a utilizar su algoritmo iterativo en vez de solo recurrir a la representación icónica.

Héctor: Hay que dibujar las 21 mesas y vamos sumando.
Inv.: A ver hazlo.
Ennya: Va a ser muy largo jaja.
Héctor: (Dibuja y anota la suma de todas las mesas)

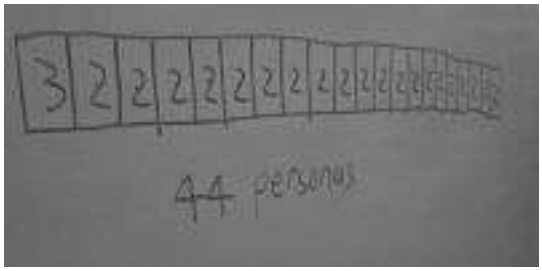


Figura 30 DRM Suma de personas por parte de Héctor

Inv.: Bien ¿Cuál fue el resultado?
Héctor: Sumando todo nos da 44 personas
Inv.: Bien entonces ¿Cuánto les dio de resultado si tenemos 54 mesas?
Héctor: Esa no la alcanzamos a hacer, es que es muy largo
Inv.: ¿Cómo le harían si les pidiera calcular un número más grande, digamos 200 mesas?
Héctor: Pues…
Inv.: O que les pidiera 1000 mesas
Ennya: ¡Hay no!

Se trata de orillar a los estudiantes a buscar una expresión general.

4.3.3 Episodio 3 En búsqueda de la expresión general

Ángel interviene y comparte sus ideas frente a sus compañeros, pero a pesar de que estas ideas no son correctas, esto demuestra la importancia de la interacción de las diferentes líneas de pensamiento entre los estudiantes dentro del aprendizaje colaborativo, ya que llevan a reflexiones que conducen a la creación de nuevas conjeturas en la construcción de la expresión general.

Ángel: Yo lo trate de hacer de otra forma, pero no me salió. Es que ya vi que me salió otro resultado.
Inv.: ¿Cómo lo hiciste Ángel?
Ángel: Empecé a sumar mis resultados hasta llegar a el número que nos pedía, pero no me salió.
Inv.: ¿A ver explícalo en el pizarrón?

Ángel: (Comienza a escribir su método)

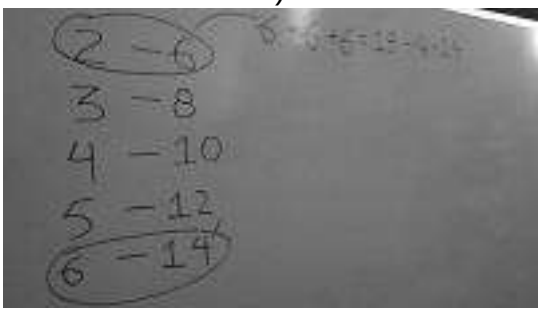


Figura 31 DRM Propuesta de Ángel basada en iteraciones en búsqueda de una expresión general

Ángel: Es que trate de hacer por ejemplo con 6 mesas, obtener el número de personas y como ya sabía que en 2 se pueden sentar 6, entonces sumé 6 3 veces para llegar a 6 mesas, pero si hago eso me sale 18 en vez de 14. Tendríamos que quitarle 4 para que saliera.
Israel: ¿Y si lo haces con otro ejemplo?
Ángel: (Comienza a escribir) entonces debo quitarle otra cosa mira

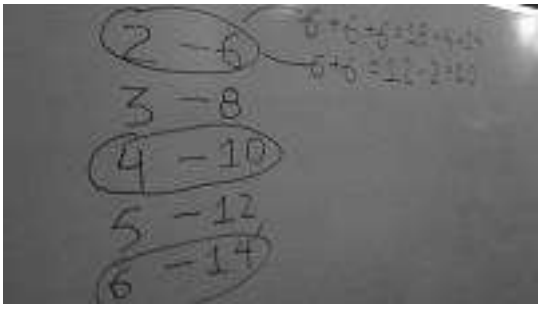


Figura 32 DRM Pruebas de Ángel sobre su línea de pensamiento antes propuesta

Las aportaciones de los alumnos se limitan a este tema por un lapso de tiempo, ya que tratan de encontrar una expresión general a partir de esta línea de pensamiento. Los alumnos nunca pudieron identificar una fórmula a partir de esta idea, pero después surgió una reflexión interesante.

4.3.4 Episodio 4 Representación de la fórmula

Héctor propone una idea que en conjunto a la de a su compañero Ángel, cambia el rumbo del debate.

Héctor: ¿Qué tal si lo hacemos como las ventanas del otro día?
Ángel: ¿Qué?

Héctor: ¿Te acuerdas que le quitábamos algo después de multiplicar, así como dices tu ahí?
Ángel: ¡Ah sí ¡Pero aquí yo no estoy multiplicando
Héctor: No pero allá multiplicábamos los lados primero ¿Qué tal si haces lo mismo?
Ángel: ¿A ver cómo?
Héctor: Mira así es como te digo (Héctor comienza a escribir)
Héctor: 2l
Ángel: Ya, pero entonces si hacemos eso en este caso de las 6 mesas nos queda entonces 6x2 o sea 12 en vez de 14.
Ángel: (Después de un poco de silencio) Ah ya, pero si le sumamos las esquinas ya nos da
Inv.: ¿Entonces como quedaría su fórmula?
Ángel: 2l+2
Abril: Oh my god
Inv.: Muy bien anótala por favor

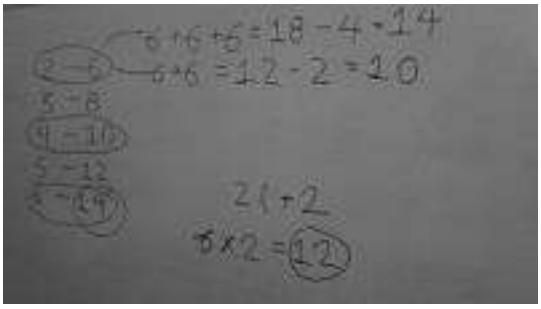


Figura 33 DRM Fórmula general propuesta por los estudiantes

Ángel comenzó con una estrategia la cual claramente no era correcta pero el mismo se pudo dar cuenta de esto, pero al compartirla con sus compañeros hizo que entre todos fueran capaces de desarrollarla y hacerla funcionar, lo que demuestra la importancia de un debate en la búsqueda de una estrategia para solucionar un problema.

4.3.5 Episodio 5 Comprobación

Se comprueba la fórmula obtenida con 54 mesas, cantidad con la cual dentro del debate ya se había preguntado con anterioridad

Inv.: Muy bien ahora que ya tienen su fórmula ¿Recuerdan lo que les pregunte antes y que me dijeron que no pudieron hacer? ¿Cuántas personas caben en 54 mesas?
Héctor: A ver yo lo hago (Comienza a escribir)
Héctor: 110

Inv.: ¿Y habíamos dicho también que en 1000 mesas verdad? ¿Entonces cuantas caben ahí?
Héctor: (Rápidamente contesta) 2002
Inv.: Bien anótalo igual como lo hiciste ahí
Héctor: (Escribe en el pizarrón)
Inv.: Muy bien entonces si les digo cualquier número de mesas entonces ya sabrían cómo hacerlo ¿verdad?
Héctor: Si, usando la fórmula y ya

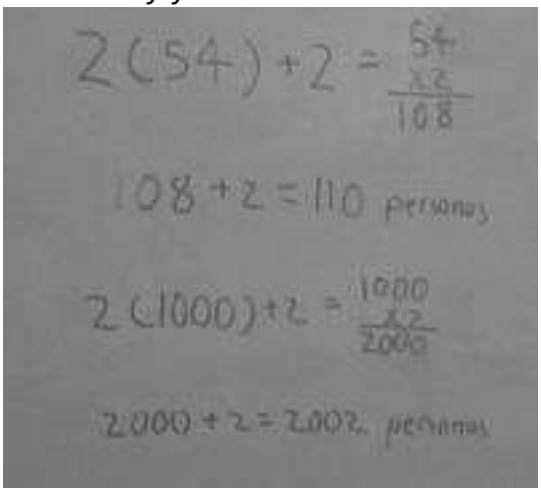


Figura 34 DRM Comprobación de la fórmula 2l+2 por parte de Héctor

4.4 AUTO-REFLEXION

En esta etapa los procesos de resolución estuvieron basados en distintas estrategias, como la representación icónica, el reconocimiento de un algoritmo iterativo y la reconstrucción de la fórmula utilizada.

Con excepción de Ángel, todos los estudiantes utilizaron la misma estrategia que en la parte individual al inicio de sus hojas de trabajo, lo que nos dice que no hubo un avance por parte de los estudiantes aún después del debate frente al grupo.

En el caso de Ángel, él fue capaz de reconstruir la fórmula obtenida durante el debate, la cual utilizo de manera correcta para resolver lo que se pedía.

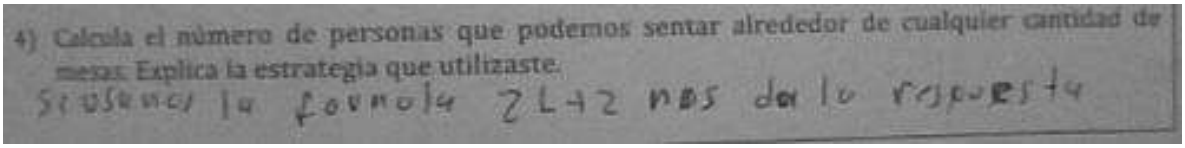


Figura 35 ARRM (auto-reflexión restaurante de Marcelo) Ángel mencionando la fórmula general encontrada durante la etapa del debate

Inv.: A ver explícame ¿Cómo fue que obtuviste esta fórmula?
Ángel: Es que recordé que habíamos hecho algo parecido a lo de las ventanas, que tomábamos un lado.
Inv.: Aja y ya por eso daba esa fórmula y ¿Por qué más 2?
Ángel: Es que al final le sumábamos las orillas porque la multiplicación solo nos da los lados
Inv.: Muy bien

En este caso es interesante notar que este estudiante fue capaz de reconstruir nuevamente la fórmula obtenida durante el debate en grupo, lo que nos dice que este estudiante logro un conocimiento estable durante todo este proceso.

CAPITULO V: ANÁLISIS, DISCUSIÓN Y RESULTADOS DE LA HOJAS DE TRABAJO

ACTIVIDAD C: JOYERIA <<EL DORADO>>

En este apartado se darán a conocer los resultados de la experimentación realizada, en donde se buscaba construir una expresión algebraica para calcular rápidamente el número de barritas que se necesitan para cierta cantidad de eslabones. Se tiene como fin construir un pensamiento aritmético- algebraico que propicie una entrada natural al álgebra.

5.1 TRABAJO INDIVIDUAL

El Trabajo en esta primera etapa se desarrolló aproximadamente en 10 minutos, en donde se observaron las diferentes estrategias que los estudiantes utilizaron de manera individual para tratar de resolver los problemas presentados. En esta etapa se utilizó lapicero azul para identificar las representaciones que realizaron los alumnos. Las estrategias que se desarrollaron fueron las siguientes:

1. La representación icónica fue una de las estrategias que utilizaron algunos de los estudiantes. En cada una de sus respuestas utilizaban esta clase de estrategia para ir contando lo que se les pedía.

Pero en el caso de Abril, ella además de su representación sugirió agregar barritas para la construcción de los eslabones sin necesidad de esta contando de una en una.

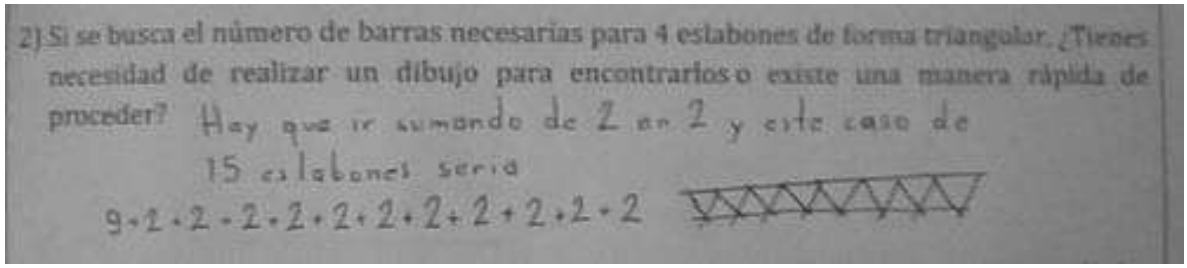


Figura 36 TIJD (trabajo individual joyería El Dorado) Estrategia de Abril a base de suma de eslabones

En este caso, la estrategia de Abril empieza con la representación icónica en sus hojas de trabajo pero luego pasa a un algoritmo iterativo.

2. Otra estrategia utilizada por los estudiantes fue la desarrollada por Ángel y Héctor. Estos estudiantes recurrieron a un algoritmo iterativo sin necesidad de algún dibujo en la cual al siguiente número de eslabones le iban sumando 2 para llegar a lo que deseaban, muy parecido a lo que mencionó Abril. En el caso de Héctor él hizo la siguiente representación funcional:

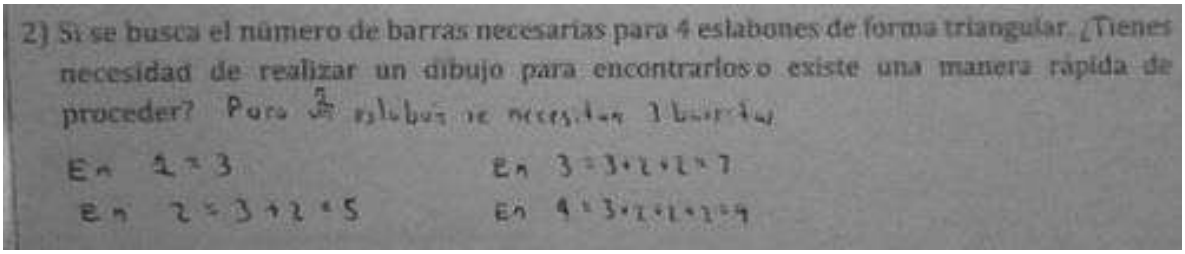


Figura 37 TIJD Representación funcional por parte de Héctor

5.2 TRABAJO EN EQUIPO

En esta etapa de la metodología ACODESA se dividieron los alumnos en dos equipos de tres estudiantes cada uno, los equipos se hicieron de manera aleatoria. Los equipos formados fueron:

EQ1: Héctor, Ángel y Victor

EQ2: Israel, Abril y Ennya

En el EQ1, ellos continúan con su estrategia de hacer una tabla donde comienzan a calcular el número de barritas necesarias para cada uno de los eslabones por medio de un algoritmo iterativo. En el caso de Ángel él hizo la siguiente representación funcional:

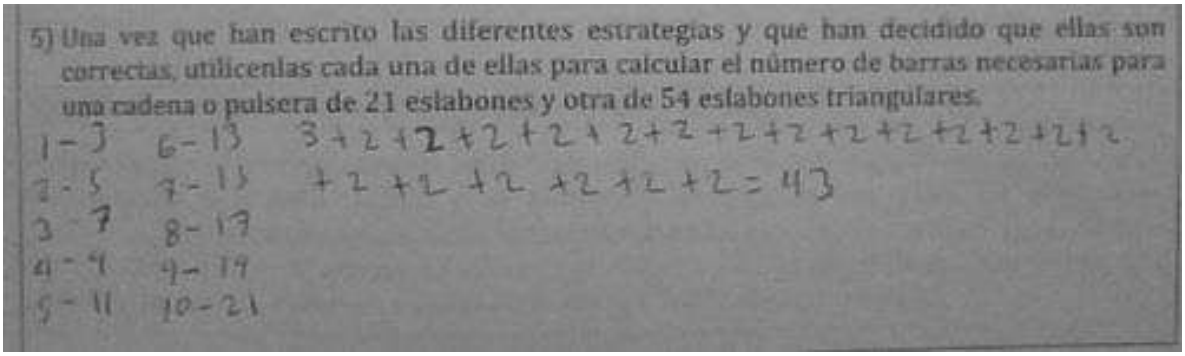


Figura 38 TEJD (trabajo en equipo joyería El Dorado) Representación funcional por parte de Héctor

A partir de la discusión con los demás integrantes del equipo, Héctor llega a una explicación de su algoritmo iterativo para calcular el número de barritas necesarias para cierta cantidad de eslabones que es muy parecido a lo que hizo Abril en la parte individual.

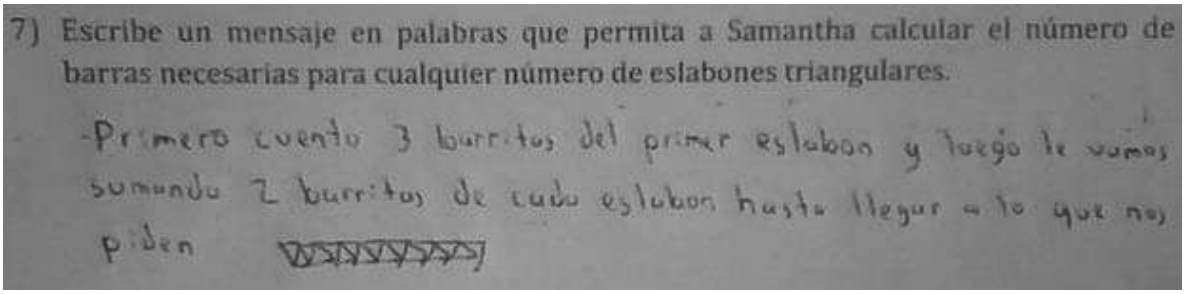


Figura 39 TEJD Explicación de Héctor a su estrategia utilizada

La limitante con conjeturas iterativas es que siempre se necesita el número anterior, por lo tanto, si necesitas calcular las barritas que se necesitan con 500 eslabones, necesariamente tendrías que calcular los 499 que lo anteceden, lo que implica un gaste mayor.

Por otra parte, Los integrantes del EQ2 continúan utilizando la estrategia de la representación icónica. Abril por su parte, les comenta a sus compañeros de equipo que tienen que buscar una fórmula para calcular el número de barras necesarias, sin muchos resultados.

> **Abril:** ¿Como le vamos a hacer para calcular el número de barras para cualquier número de eslabones?
> **Israel:** Pues hay que pensarle
> **Ennya:** Pues dibujando y contando no tenemos de otra
> **Abril:** Yo le estaba sumando de a 2 en 2 pero igual es muy tardado, habrá que multiplicar por algo.
> **Ennya:** ¿Y si lo multiplicamos por 3? Porque cada eslabón necesita 3 barras
> **Abril:** Ah tal vez sí, hay que hacerlo

Lo interesante aquí es que una vez discutieron sobre esto, cada uno de los integrantes del EQ2 hizo esto de multiplicar por 3 el número de eslabones para encontrar la respuesta, más sin embargo después Abril comentó algo diferente a esta idea.

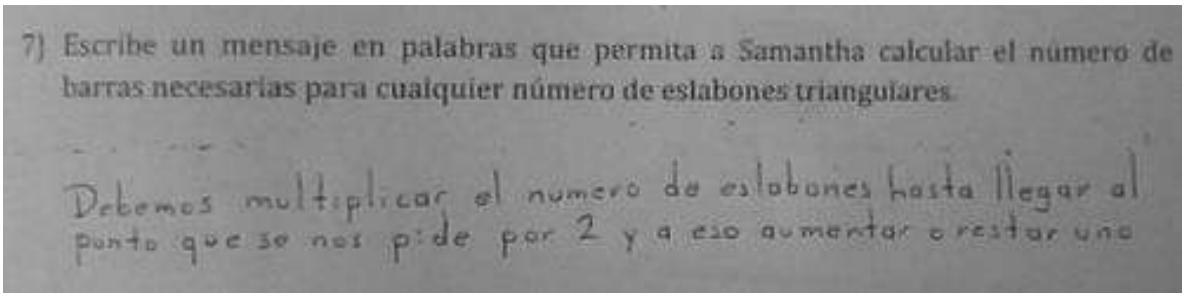


Figura 40 TEJD Propuesta con palabras de fórmula general por parte de Abril para calcular el número de barras necesarias

Después Abril explica al investigador:

> **Inv.:** ¿Qué fue lo que hiciste aquí Abril?
> **Abril:** Es que quería sacar una forma para saber rápidamente cuantas barritas se necesitan dependiendo del número de eslabones
> **Inv.:** Aja, entonces a ver explícame como lo hiciste
> **Abril:** Pues primero lo multiplique por 3 el número de eslabones, pero después de probar no daba y se me ocurrió multiplicar por 2 porque estábamos sumando de a 2 en 2
> **Inv.:** ¿Y por qué dices esto al final de aumentar o restar 1?
> **Abril.:** Porque era lo que le faltaba

Abril estuvo muy cerca de encontrar una expresión general durante esta etapa de la actividad, al menos utilizando sus propias palabras y no por medio de alguna institucionalización.

5.3 DEBATE GRUPAL

5.3.1 Episodio 1 Presentación del algoritmo iterativo

El EQ1 formado por Héctor, Ángel y Victor, pasan a explicar su razonamiento iterativo.

> **Inv.:** ¿Cómo le hicieron para calcular el número de barras necesarias para 4 eslabones?
> **Ángel:** Fuimos sumando de 2 en 2 hasta llegar a 4 eslabones
> **Inv.:** A ver escríbanlo por favor
> **Ángel:** (Comienza a escribir en el pizarrón) Así
> **Inv.:** Bien entonces van sumando hasta llegar al resultado
> **Ángel:** Si
> **Héctor:** A, pero primero sumamos 3 acuérdate
> **Ángel:** ¡A si!
> **Héctor:** Y entonces al final sería 9 no 8

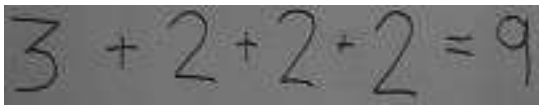


Figura 41 DJD (debate joyería El Dorado) Presentación de la estrategia del equipo 1

> **Inv.:** Bien entonces ahora ¿Cuántas barras se necesitan para 21 eslabones o para 54 que es lo que nos preguntan en el inciso 5?
> **Héctor:** Pues es algo largo, pero si lo hicimos
> **Inv.:** A ver háganlo en el pizarrón

El trabajo con un algoritmo iterativo es visible.

5.3.2 Episodio 2 El algoritmo iterativo

Después de una serie de discusiones, los estudiantes del EQ1 continúan con su algoritmo iterativo.

Ángel: Ahora te toca a ti
Héctor: Pues hicimos lo mismo de irle sumando
Inv.: A ver entonces ¿cuántas barras se necesitan para 21 eslabones?
Héctor: A ver (comienza a escribir la suma en el pizarrón)
Héctor: 3+2+2+2+2… (así continúa hablando hasta que termina)
Inv.: Bien ¿Cuánto les da al final de todo eso?
Héctor: No da 43
Inv.: Muy bien y ahora díganme las barritas necesarias para 54 eslabones
Victor: Va a hacer más largo jaja
Ángel: Ahora te toca Victor, es nomas de sumar y ya
Victor: Bueno pues…

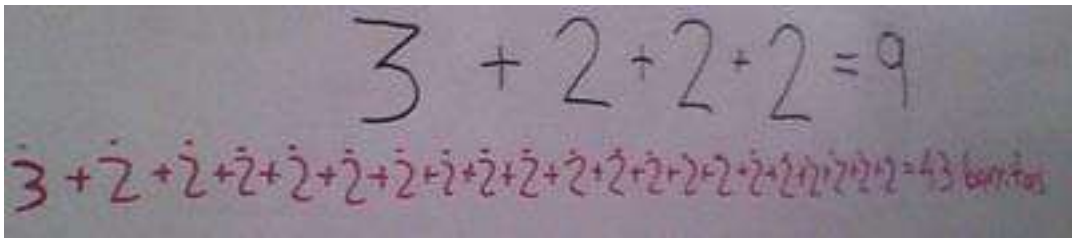


Figura 42 DJD Ángel haciendo sumas igual que su compañero Héctor

Los estudiantes en general son capaces de manejar bien lo que concierne al algoritmo iterativo, pero otra vez, se trata de orillar a los estudiantes a buscar una expresión general para resolver el problema.

5.3.3 Episodio 3 Las limitantes del algoritmo iterativo

Victor: A ver dame pues el marcador
Héctor: Síguele sumando ahí a lo que ya hice
Ángel: Deja que lo haga completo jaja
Inv.: Si, si quieres síguele ahí Victor
Victor: (Comienza a escribir toda la suma en el pizarrón)
Inv.: Muy bien ahora que ya tienen todo eso ¿Cuánto les da de resultado?
Victor: Mmmmmm…
Inv.: Pueden ayudarle a su compañero si quieren
Victor: A ver Héctor
Héctor: Nos da 105 (en realidad es 109)
Inv.: A ver revisen un poco
Ángel: ¿No es lo que da?

Héctor: Hay que contar para ver

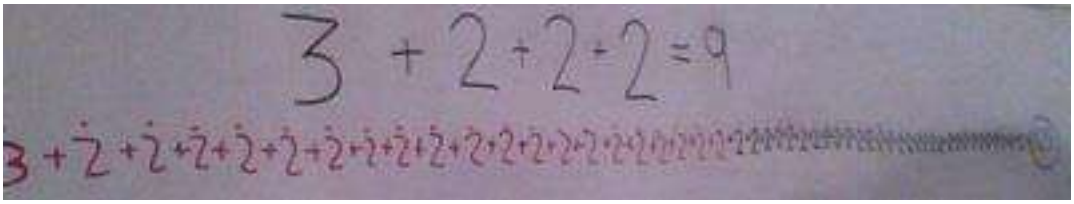


Figura 43 DJD Suma de barritas hecha por Victor

Inv.: ¿Cuánto les dio de resultado a ustedes EQ2?
Ennya: A nosotros nos dio 104
Inv.: ¿Expliquen cómo lo hicieron?
Ennya: Pues dibujamos los 54 triangulitos y fuimos contando
Inv.: Bien es una estrategia valida, pero…
Héctor: Ya, nos dio 109, es que no contamos bien
Inv.: Muy bien, eso es lo que nos debe dar. Pero a ver díganme ¿Qué pasaría si les digo un número grande de eslabones? ¿Por ejemplo cuantas barritas se necesitan en 100 eslabones?
Ángel: Pues seguiríamos sumando
Inv.: ¿Cuántas barras se necesitan para cualquier número de eslabones?

Como ya hemos visto, a pesar de que los estudiantes en general son capaces de manejar bien lo que concierne al algoritmo iterativo, ellos tienen dificultades al momento de involucrar esta estrategia cuando se trata de cantidades grandes, lo que demuestra nuevamente las limitantes de este tipo de estrategia al igual como sucede con la de la representación icónica.

5.3.4 Episodio 4 En búsqueda de la expresión general

Abril por fin comparte su estrategia previamente obtenida a sus compañeros durante el debate.

Abril: Yo más o menos tengo una idea, pero no sé si este bien
Inv.: ¿A ver como lo hiciste? Pasa al pizarrón a explicarlo
Abril: Pues es multiplicar el número de eslabones por 2 y al final le aumentamos o restamos 1.
Inv.: ¿Y comprobaste esa estrategia tuya en alguna parte de la actividad?
Abril: No
Inv.: A ver hazlo ahora con lo mismo que acaban de hacer tus compañeros, en el caso donde nosotros tengamos 21 y 54 eslabones
Abril: (Comienza a escribir) 21x2=42, 42+1=43
Inv.: Muy bien, primero lo multiplicaste y al final le sumaste uno. Ahora el otro caso

Abril: (Comienza a escribir) 54x2=108, 108+1=109
Inv.: Muy bien si te fijas te salió lo mismo que a tus compañeros en los casos que le sumaste 1. ¿Cuándo debemos restarle 1 al resultado, así como lo comentaste antes?
Abril: Pues es lo que estaba pensando

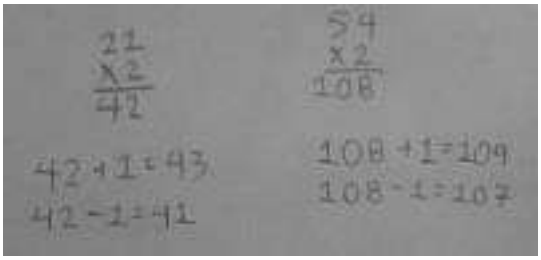


Figura 44 DJD Operaciones hechas por Abril en base a su propuesta de fórmula general

Una vez que Abril compartió su idea frente a sus compañeros, pudo notar que algo fallaba en su idea a pesar de que con ella claramente podía encontrar la respuesta a lo que se le pedía.

5.3.5 Episodio 5 La expresión general

Inv.: A ver piensen el caso del que se nos pide el número de barritas en 4 eslabones
Héctor: Ah ya, siempre hay que sumarle
Inv.: ¿Por qué dime?
Héctor: Si es que estaba pensando ahorita que estamos sumando de a 2 en 2 aquí en lo que hicimos y al final le sumamos un 3 que es un 2+1
Inv.: Bien entonces teniendo eso ¿Cómo harían su fórmula para calcular el número de barritas necesarias para cualquier número de eslabones?
Héctor: Mmmm… seria 2e+1
Inv.: Muy bien anótalo ahí (Héctor escribe en el pizarrón)
Héctor: Ya
Inv.: ¿Y la letra e que es?
Héctor: Es el número de eslabones

Figura 45 DJD Expresión general propuesta por los estudiantes

5.3.6 Episodio 6 Comprobación

Se comprueba la fórmula obtenida durante el debate para el caso en el que tengamos 77 eslabones

Inv.: Muy bien Héctor entonces a ver ¿Cuántas barritas se necesitan si queremos 77 eslabones?
Héctor: (Comienza a escribir su proceso)
Héctor: Necesitamos 155 barritas

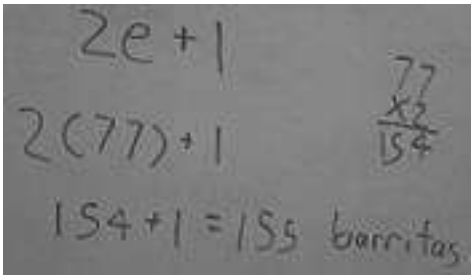


Figura 46 DJD Comprobación de la expresión general

Inv.: Muy bien, entonces ustedes me habían dicho antes que para 54 eslabones se necesitan 109 barritas
Ángel: Aja
Inv.: Entonces partiendo de eso ¿nos da el mismo resultado de 155 barritas si a 109 le vamos sumando 2 en 2 como lo habían hecho antes?
Héctor: Yo pienso que si
Inv.: A ver hazlo por favor
Héctor: ¿Entonces comienzo a escribir desde el 109?
Inv.: Si
Héctor: Muy bien (Comienza a escribir su suma)

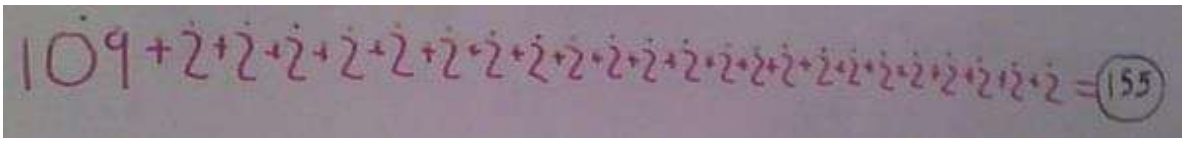


Figura 47 DJD Suma de barritas por parte de Héctor

Héctor: Ya, ahora tenemos que contarle
Ángel: Yo lo hago (Comienza a contar)
Héctor: ¿Si nos dio lo mismo?
Ángel: Si, da lo mismo
Inv.: Como pueden ver, obtuvieron lo mismo con ambas estrategias.
Victor: Si, solo que esta es más larga jaja
Inv.: Claro, por eso como pueden ver es que es importante siempre buscar y tratar de obtener una fórmula general para cualquier tipo de situación o problema.

Al igual que en la actividad anterior, aquí se demuestra claramente la importancia de esta etapa de la metodología ACODESA, ya que al compartir información entre los estudiantes ayuda a originar nuevas ideas o encontrar contradicciones en las mismas.

5.4 AUTO-REFLEXION

Las estrategias que utilizaron en el cálculo del número de barras necesarias fue la representación icónica y el reconocimiento del algoritmo iterativo. Alumnos como Israel y Ennya, construyeron reglas arbitrarias para calcular el número de barritas necesarias, cómo multiplicar por 3 el número de eslabones.

Ángel por su parte, para calcular el número de barras necesarias para cualquier número de eslabones él propuso una fórmula muy parecida a la creada en la experimentación inicial, pero no la utilizó para efectuar ningún calculo.

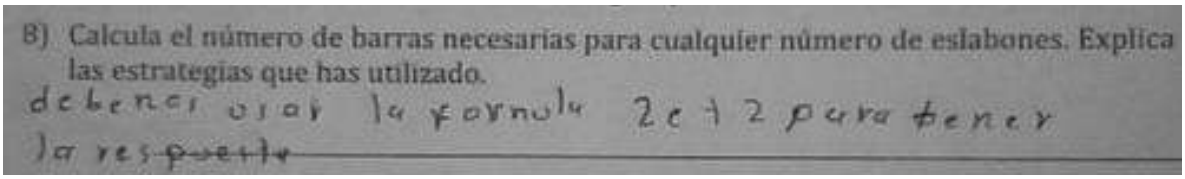


Figura 48 ARJD (auto-reflexión joyería El Dorado) Propuesta de formula general

Como se puede apreciar en la imagen, la reconstrucción de la fórmula que hace Ángel tiene algunas diferencias a la creada en la experimentación en el debate científico de la metodología ACODESA. Cuando se le cuestionó sobre esta situación él explica:

> **Inv.:** ¿Cómo llegaste a esta fórmula Ángel?
> **Ángel:** Es que me acorde de lo que hicimos en la actividad de cuantas personas se podían sentar en las mesas y fue por eso que la hice así
> **Inv.:** ¿Entonces e es el número de eslabones?
> **Ángel:** Aja
> **Inv.:** ¿Y por qué +2?
> **Ángel:** Porque multiplique lo que valía un lado por 2 y al final le sume los extremos, así como le habíamos hecho allá

Por lo que, a pesar de que esta fórmula es muy parecida a la obtenida durante el debate entre los estudiantes la cual es 2e+1, en realidad su línea de pensamiento que la originó es totalmente diferente, lo que nos dice que este caso ningún estudiante originó conocimiento estable durante todo este proceso.

CAPITULO VI:
Reflexiones Finales

En este capítulo se presentan las consideraciones y conclusiones finales de esta investigación, así como las respuestas a los cuestionamientos planteados al inicio del estudio. Es importante recalcar que el fin de esta investigación no era llegar a las representaciones institucionales, ni diseñar una propuesta didáctica específica, sino conocer los procesos cognitivos de los estudiantes en el tránsito de la aritmética al algebra a través del diseño de actividades basadas en el uso de patrones, que permitieran observar la evolución del cambio de razonamiento aritmético al algebraico, construyendo un pensamiento reversible que puede ser la base del pensamiento algebraico.

6.1 LA IMPORTANCIA DE LOS PATRONES

El diseño de la actividad se basó en el reconocimiento de patrones, tuvo sus fundamentos en la metodología ACODESA. Gracias a la experimentación, comprendimos que a través del uso de patrones se puede generalizar el pensamiento aritmético, y promover en los alumnos la creación e interacción de diferentes representaciones, que permitan una construcción conceptual del objeto matemático.

El reconocimiento de patrones es una actividad natural para el ser humano que se ha utilizado desde la antigüedad para encontrar relaciones y regularidades en todo lo que nos rodea. Al haberla usado dentro de la experimentación matemática, produjo este mismo acercamiento natural a un dominio desconocido a través de una reflexión individual y grupal, en donde no se presionó a utilizar simbolismos determinados, resultado de esto fueron las representaciones funcionales de los alumnos que, a nuestro parecer, tienen mayor importancia por ser una construcción original y propia que un acercamiento y explicación de las representaciones institucionales preexistentes.

6.2 LOS BENEFICIOS DE LA METODOLOGIA ACODESA

Esta metodología basada en el aprendizaje colaborativo, tiene una potencialidad impresionante en el trabajo matemático en el aula, desde hace tiempo se ha hablado de construir un micro cosmos dentro de los salones de clase de matemáticas en donde los estudiantes se conviertan en constructores del propio conocimiento (Santos T., 2014), esta forma de trabajo refleja y promueve esta habilidad creadora, a través de las diferentes etapas que la componen.

A diferencia del enfoque de la enseñanza tradicional, con esta metodología se reconoce y se le da importancia a las diferentes estrategias y líneas de pensamiento de los alumnos sobre un dominio determinado, estas se van compartiendo y valiendo a través del trabajo en equipo y el debate científico, en donde los alumnos, pueden exponer su punto de vista y llegar a un aprendizaje mayor al haber trabajado solo de manera individual.

En nuestro caso específico, se buscaron representaciones funcionales de los alumnos para la generalización de patrones de cada una de las actividades y gracias al trabajo colaborativo fue que estas representaciones estuvieron refinándose en el transcurso de la experimentación, en donde se observó, como iban modificándose las conjeturas con el aporte de la mayoría de los alumnos.

En la etapa de auto-reflexión se les preguntó a algunos alumnos sobre las diferencias de haber resuelto el trabajo de forma individual (como en esa ocasión) y el trabajo colaborativo que se llevó a cabo en la experimentación, algunas respuestas fueron las siguientes:

> **Ángel:** Me gustó más cuando discutíamos todos en grupo, porque entre todos nos ayudábamos y con eso se me iban saliendo de la cabeza más cosas que antes no había pensado estando solo.
> **Abril:** Fue más fácil cuando estábamos todos en grupo, porque lo hacíamos entre todos.

La respuesta de Ángel en particular, demuestra como el trabajo colaborativo se aleja de lo monótono y promueve la reflexión a partir de la participación activa de los integrantes del grupo en un ambiente sociocultural. El saber trabajar en equipo para alcanzar objetivos comunes, puede llevarnos a superar retos que en el momento del trabajo individual parecía muy complicados.

Estamos convencidos que, en la actualidad, una de las deficiencias del sistema educativo mexicano es la poca capacidad de colaborar con otros para lograr mejores resultados, esto se ve reflejado a nivel social en la actitud competitiva, poco solidaria y empática de la mayoría de los ciudadanos. Por lo tanto, creemos que algunas modificaciones en este sentido podrían resultar benéficas para el desarrollo no solo de las clases de matemáticas, sino de la interacción en comunidad.

6.3 CONCLUSIONES

A través de la experimentación realizada se ha llegado a algunas conclusiones. En primer lugar, las actividades de aprendizaje aplicadas durante la experimentación, son efectivas en el tránsito de la aritmética al álgebra, ya que propicia, la generalización algebraica. Por lo tanto, este tipo de actividades serían la base para una introducción natural al álgebra por medio del reconocimiento de patrones, con la ayuda de una metodología basada en el aprendizaje colaborativo.

La metodología ACODESA es de mucha ayuda y sirve de base para una introducción natural de la aritmética al álgebra por medio del reconocimiento de patrones. Como ya se ha dicho, con esta metodología se reconoce y se le da importancia a las diferentes estrategias y líneas de pensamiento de los alumnos sobre un dominio determinado, estas se van compartiendo y valiendo a través del trabajo en equipo y

el debate científico, en donde los alumnos, pueden exponer su punto de vista y llegar a un aprendizaje mayor al haber trabajado solo de manera individual.

La evolución que el estudiante de secundaria presenta de manera conceptual, debe ser necesariamente escalonada y natural, no creemos que un acercamiento simbólico sea la solución para la introducción al álgebra. Un acercamiento a través de representaciones funcionales por medio de patrones hará cada vez más accesible las representaciones institucionales de las que habla Duval (1993,1995).

Las líneas de pensamiento que manifestaron los estudiantes en general fueron similares en las tres experimentaciones, es decir, si en una se centraba en las representaciones icónicas intentaban hacer lo mismo en las otras actividades. Aquellos que encontraron un patrón y se basaron en algoritmos iterativos para hacer sus estrategias de igual forma buscaban hacerlo en las otras experimentaciones.

Las conclusiones a las que se ha llegado fueron las siguientes:

- La acción educativa puede y debe atender al contexto en su término más amplio. Todo ello a través de distintas intervenciones: organizando programas y tareas en torno a la mejora de la comunidad, estableciendo niveles de cooperación y coordinando los agentes de la comunidad educativa, favoreciendo su participación en el proceso de enseñanza- aprendizaje. La vinculación de los centros escolares con su entorno es un factor importante para la calidad e innovación educativa

- Las representaciones realizadas por los alumnos son fundamentales para el tránsito de un menor a un mayor conocimiento en cualquier dominio de la matemática. En nuestro caso, para la construcción de un pensamiento que permita pasar de la aritmética al álgebra.

- A partir de la reflexión se entendió que el trabajo en equipo no implica un desarrollo conceptual igualitario, pero la colaboración si promueve la interacción de la línea de pensamiento individual con otras expuestas por otros sujetos, y esa interacción sociocultural puede resultar en un desarrollo cognitivo mayor de los estudiantes.

- La construcción de una fórmula a partir de las conjeturas dentro de un aprendizaje colaborativo, implica convertirlos en creadores, que es importante para el tránsito de la aritmética al álgebra que propicie una entrada más natural y no solo utilizar problemas de corte puramente algebraico.

- La interacción colaborativa hace que las diferencias entre los estudiantes se enriquezcan mediante la discusión y construcción de diferentes estrategias que llevan a la generalización de patrones.

- Las contradicciones o ideas erróneas como se demostró durante esta experimentación en dos de las tres actividades realizadas por parte de los estudiantes, son fundamentales en la construcción de nuevas ideas ya que, aunque no eran correctas, estas ayudan para llegar a las expresiones algebraicas que, si lo son, pero esto sólo se dio gracias al trabajo colaborativo y al exponer los unos con los otros sus distintas ideas para así poder construir sus nuevas conjeturas.

- En las tres experimentaciones realizadas los alumnos fueron capaces de encontrar, por medio de representaciones funcionales, la manera de resolver cada una de estas actividades de manera general, pero gran parte de esto sucedió gracias a todas las ideas y discusiones que surgieron en el debate, lo que demuestra nuevamente la importancia del trabajo colaborativo en las áreas de trabajo.

- Analizando los resultados de las experimentaciones, podemos darnos cuenta de que los estudiantes por sí solos fueron capaces de obtener expresiones generales para encontrar lo que se les pedía, lo que con esto podemos comprobar que un profesor o investigador puede servir como una guía en la construcción del conocimiento y no solo como un proveedor de este.

- Los resultados obtenidos en la etapa de auto-reflexión nos muestran la importancia de crear un conocimiento estable. A pesar de toda la discusión y el trabajo desarrollado por los estudiantes en cada una de las etapas y de las actividades, el hecho de que, 15 días después de la experimentación, solo 1 alumno de 6 pudo reconstruir 2 de las 4 expresiones generales obtenidas por ellos mismos, muestra la fragilidad del conocimiento. Por lo general los estudiantes tienden a regresar a sus ideas originales al principio de cada una de las actividades efectuadas, sin mencionar que algunos de ellos, en su reconstrucción, estaban en posición de contradicción y que ellos mismos no la detectaron.

6.4 RECOMENDACIONES

Esta es una serie de recomendaciones que tienen como propósito ser una referencia a futuras investigaciones o trabajos similares, las cuales estas se notaron durante y después de aplicar las actividades que se realizaron a lo largo de esta investigación y estas son las siguientes:

- La contextualización es importante para que los estudiantes entiendan por completo que es lo que se pide en cada una de las actividades así que es bueno tomarse su tiempo para hacerlo cómo es debido, al principio se pudo

notar la dificultad que presentaron tan solo con entender lo que se les pedía y eso puede originar un estancamiento en las ideas de los estudiantes.

- Se recomienda que en el caso donde están involucrados colores y son importantes tal como en la actividad "la fábrica de ventanas", es preferible utilizar las hojas en donde los estudiantes puedan observar por sí mismos los colores que se están manejando durante la misma, ya que se notó durante la actividad en especial en la parte del debate que la ausencia de estos generaba una serie de confusiones entre los estudiantes lo que originaba ideas erróneas y caminos equivocados en sus soluciones.

- En las cámaras que se utilizan para grabar las ideas y comentarios de los estudiantes, es recomendable que en el caso de la cámara móvil, sea otra persona la encargada de esta labor y no el investigador que guía las actividades, ya que es más difícil y requiere más tiempo estar siguiendo las ideas y conversaciones de los estudiantes al momento de revisar cada uno de los videos para obtener los resultados de cada una de las actividades, sobre todo si no aparecen directamente enfocados en el video.

- Durante la etapa del debate, al momento de que los alumnos presentan sus ideas frente al grupo, se recomienda que estas ideas sean expresadas y escritas en el pizarrón, rota folio o cualquier otro medio para que todos los estudiantes involucrados las vean, analicen y además procurar mantener ahí todas las ideas que surjan de ser posible, debido a que ayuda a que los estudiantes puedan comparar cada una de sus estrategias de manera más sencilla para así generar de manera más fácil nuevas ideas.

- En las entrevistas realizadas en la etapa de auto-reflexión, además de las preguntas espontáneas que surgen a partir de la línea de pensamiento que los alumnos siguen, es recomendable tener algunas preguntas generales que guíen la discusión con el estudiante con el fin de tener una idea más clara de a donde quieres ir en estas pequeñas entrevistas.

FUENTES CONSULTADAS

Alcalá, M. (2002). La construcción del lenguaje matemático. Barcelona: Grao.

Brody, C. (1995). Collaborative or cooperative learning? Complimentary peactives of instructional reform. The Journal of Staff, Program, & Organization Development, 12(3), 133-142.

Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5, 37-65.

Duval, R (1995). Semiosis et pensé humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Cali, Colombia: Suisse: Peter Lang. Traducción: Restrepo, M. (1999) Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del valle.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. BOLEMA, 26(42B), 483-511.

Hadamard, J (1945). The Psycology of Invention in the mathemathical field. Princeton: Princeton University press.

Jhonson, D., Jhonson, R. & Holubec, E. (1994). Cooperative Learning in the Classroom. Virginia: ASCD. Traducción: Gloria Vitale (1999). El aprendizaje colaborativo en el aula. México: Paidós.

Miranda, A., Fortes, C., & Gill, M. D. (2000). Dificultades del aprendizaje de las matemáticas un enfoque evolutivo (segunda ed.). Málaga: Aljibe.

Páez M., R. (2004). Procesos de construcción del concepto de limite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y auto-reflexión. Tesis sin publicar CINVESTAV, Asesor Fernando Hitt.

Palarea Medina, Ma. Mercedes; Socas Robayna, M.M (1994). Algunos Obstáculos Cognitivos en el Aprendizaje Del Álgebra Seminario Nacional Sobre Lenguaje y matemáticas, 91-98.

Palarea Medina, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en algebra por alumnos de 12 a 14 años. Tesis No Publicada Mercedes Paralea, Asesorada por Socas Robayna, Universidad de La Laguna.

Panitz, T. (1997). Collaborative versus Cooperative Learning: Comparing the Two Definitions Helps Understand the Nature on Interactive Learning, Cooperative Learning and College Teaching, 8(2).

Piaget, J. (1979). Investigaciones sobre la abstracción reflexionante 1. Buenos aires: Editorial Huemul S. A.

Piaget, J. (2001). La representación del mundo en el niño. Madrid: Morata.

Resnick, L., & Ford, W. (1998). La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos (primera ed.). España: Paidós.

Santos T., L: M. (2014). La Resolución de Problemas Matemáticos Fundamentos cognitivos (2nd ed.). México Trillas.

Skemp, R. (1993). Psicología del aprendizaje de las matemáticas (segunda ed.). 1993: Morata.

Socas Robayna, M. M., Camacho Machín, M., & Hernández Domínguez, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje Algebraico en la enseñanza secundaria: Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 32(mayo-agosto), 73-86.

Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations, Representations and mathematics visualization. Edited by Hitt, F. pp. 199-206.

DOCUMENTOS ELECTRÓNICOS Y REFERENCIAS DE INTERNET

Bustos, A. & Hitt, F. (2019) Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico. Colección matemática educativa y tecnología, AMIUTEM, 13-24.

http://pmme.mat.uson.mx/publicaciones/MEyT/Actividades/actividades_de_modelacion_matematica_en_un_medio_tecnologico.pdf

Cortés, J. C., Hitt, F., & Saboya, M. (2014). De la Aritmética al Álgebra: Números Triangulares, tecnología y ACODESA. REDIMAT, Vol. 3(3), 220-252. https://www.academia.edu/27397072/De_la_Aritm%C3%A9tica_al_%C3%81lgebra_N%C3%BAmeros_Triangulares_tecnolog%C3%ADa_y_ACODESA

Hitt, F. & Saboya, M (2017) Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad, 151-175 https://www.researchgate.net/publication/318289260_Aprendizaje_de_las_matematicas_a_traves_de_la_modelacion_matematica_en_un_medio_sociocultural_ligado_a_la_teoria_de_la_actividad

OCDE, (2019). Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA 2018) Resultados, https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Olivares, O, J. (2005). Collaborative critical thinking: Conceptualizing and defining a new construct from known construct. Issues In Educational Research, 15(1), 86-100. http://www.iier.org.au/iier15/olivares.html

Prueba PISA 2018: México mantiene los mismos bajos niveles en aprendizaje https://www.eleconomista.com.mx/politica/Prueba-PISA-2018-Mexico-mantiene-los-mismos-bajos-niveles-en-aprendizaje--20191203-0048.html

Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (PLANEA 2015) Resultados

http://www.seslp.gob.mx/consejostecnicosescolares/PRIMARIA/4-3aSesionOrdinaria/RESULTADOSPLANEA.pdf

Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (PLANEA 2017) Resultados http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2017.pdf

Matemáticas. Educación secundaria. Aprendizajes clave para la educación. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación 2017 https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf

Programas de estudio guía para el maestro educación básica matemáticas, 2017 https://nivelacionplandeestudio2011.files.wordpress.com/2011/09/mstematicassec11.pdf

ANEXOS

ANEXO 1. HOJA DE TRABAJO LA FABRICA DE VENTANAS

Las ventanas con vitrales alrededor

Página 1. Las ventanas con vitrales alrededor

Nombre del alumno:

_____

Nombre de los miembros del equipo:

_____

_____

_____

Grupo: _____

Fecha: _____

<u>Instrucciones</u>:

- **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Las ventanas con vitrales alrededor

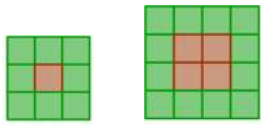


Figura 1 *Figura 2*

Página 2. Situación

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabrican tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadros cafés en el centro y cuadros verdes alrededor. Aquí mostramos algunos ejemplos:

Figura 1 *Figura 2* ? ? *Figura 5*

Los trabajadores necesitan contar el número de cuadros color verde alrededor del gran cuadrado café de la ventana y los cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadros de color verde para cualquier tamaño de ventana?

1. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 3 cuadros cafés de lado (o 5 cuadros color verdes de lado).

2. Si buscamos el número de cuadros color verde para una ventana que tiene 4 cuadros cafés de lado (o 6 cuadros color verde de lado), ¿necesitas un dibujo para encontrar la respuesta o encontraste una manera rápida de proceder?

3. Y la ventana de 15 cuadros cafés de lado (o 17 cuadros color verde de lado), ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de cuadros color verde en total sin tener que contar uno a uno y sin tener que dibujar?

Página 3. Trabajo en equipo

4. En equipo, discutan las estrategias que utilizaron anteriormente para calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana que tenga 15 cuadros cafés de lado. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Encuentren al menos 2 estrategias para calcular el número de cuadros color verde para una ventana que tiene 15 cuadros cafés de lado.

5. Una vez que han escrito diferentes estrategias y que han decidido que son correctas, utiliza alguna de estas estrategias para calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana de 23 cuadros cafés de lado y otra ventana de 58 cuadros cafés de lado.

Página 4. Trabajo en equipo

6. cualquier número de cuadros cafés de lado. Pueden utilizarlo para verificar sus respuestas de la sección anterior.

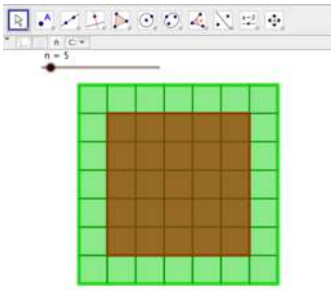


Figura 5

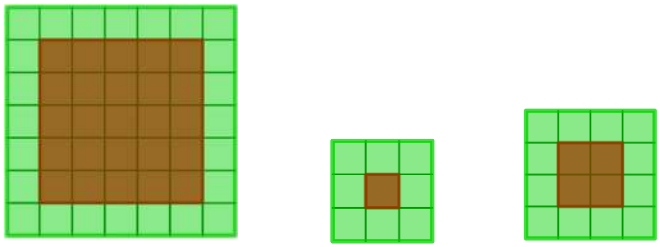
Número de cuadrados en el centro =25
Número de cuadrados en el borde =24

7. Escribe un mensaje con palabras que permita calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana para cualquier número de cuadros cafés de lado.

8. Los mensajes son largos a leer, escriban el mensaje simplificado utilizando solo operaciones.

Página 5. Trabajo individual - Autorreflexión

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabricas tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadros cafés en el centro y cuadros verdes alrededor. Aquí hay algunos ejemplos:



Hay trabajadores que necesitan contar el número de cuadros color verde alrededor de la ventana y cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadros color verde para cualquier tamaño de ventana?

1. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 4 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.

2. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 15 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.

3. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 23 y 58 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.

4. ¿Cómo podemos calcular el número de cuadros color verde necesarios para cualquier número de cuadros cafés de lado? Explica la estrategia que utilizaste.

Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

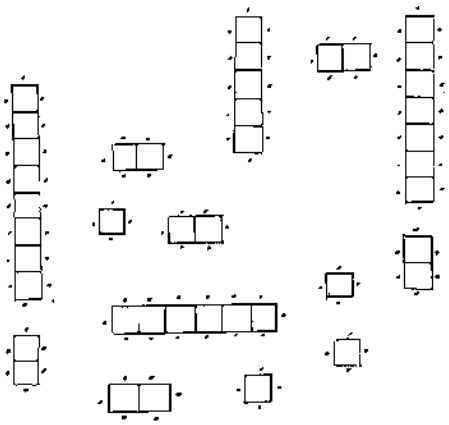
El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

ANEXO 2. HOJA DE TRABAJO EL RESTAURANTE DE MARCELO

El restaurante de Marcelo

Página 1. El restaurante de Marcelo	
Nombre del alumno: _____ Nombre de los miembros del equipo: _____ _____ _____ **Grupo: _____** **Fecha: _____**	**<u>Instrucciones</u>:** ▪ **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma negra o azul.** ▪ **Para el trabajo en equipo, si tú modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.** ▪ **Después de discutir con el grupo, si tú modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.** **El restaurante de Marcelo**

Página 2. Trabajo individual
Página 1 – Situación Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que coloca en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber dónde los pondrá. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin tener la necesidad de contar cada vez el número de sillas.

1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas?

2. Si buscamos el número de personas para colocar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o sabrías alguna manera rápida de hacerlo?

3. Y para 15 mesas, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de personas sin necesidad de dibujar

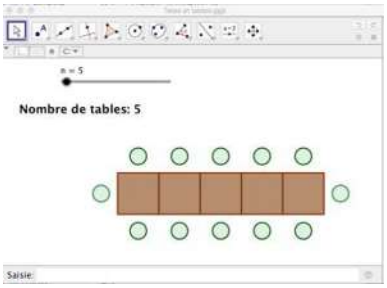
Página 3. Trabajo en equipo

4. En equipo, discute las estrategias que usaste para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿todos usaron la misma estrategia? Encuentra al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.

5. Una vez que escribiste las estrategias y que vieron que son correctas, utiliza alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.

Página 4. Trabajo en equipo

6. La aplicación GeoGebra te mostrará el número de personas que se pueden sentar alrededor de las mesas no importa que tan grandes sean. Utilízalo para verificar tus respuestas del problema 5.

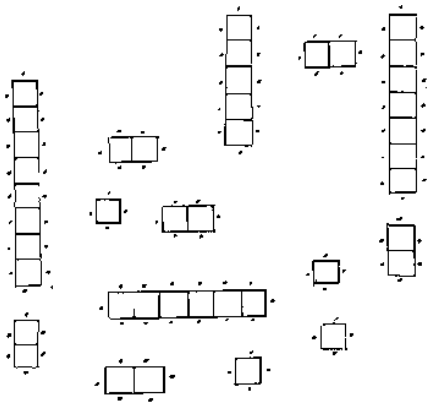


7. Escribe un mensaje escrito a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa no importa qué tan grande sea.

8. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones Marcelo necesita realizar.

Página 5. Trabajo individual – Autorreflexión

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que ubica en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber dónde los podrá colocar. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin contar las sillas.

1. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 4 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

2. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 15 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

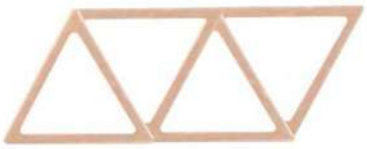
3. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 21 mesas y después de 54 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

4. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora
El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

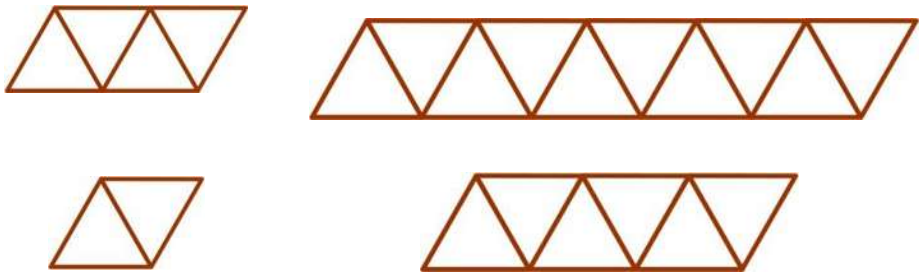
ANEXO 3. HOJA DE TRABAJO JOYERÍA <<EL DORADO>>

Joyería «El Dorado»

Página 1. Joyería «El Dorado»	
Nombre del alumno: _____ Nombre de los miembros del equipo: _____ _____ _____ **Grupo: _____** **Fecha: _____**	**<u>Instrucciones</u>:** ▪ **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.** ▪ **Para el trabajo en equipo, si tú modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.** ▪ **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.** **Pulsera y cadenas de oro** 

Página 2. La situación

En la joyería «El Dorado», Samantha fabrica cadenas de oro en forma triangular como las siguientes:



Ella confecciona pulseras de diferentes tamaños de la cadena. Samantha compra las barritas de oro que ella tiene necesidad, sin necesidad de contar cada 6barrita una a una. Ella quisiera encontrar el número de barritas que necesita sin estar obligada a contar las barritas una a una (¡es demasiado tiempo!). Envía un mensaje a Samantha en el cual le explicas cómo ella podría hacer para encontrar rápidamente el número de barritas que necesita según el número de eslabones deseados sin estar obligadas a contarlas una a una.

Página 3. Trabajo individual

1. Calcula el número de barras necesarias, si se te solicita 3 eslabones en forma de triángulo.

2. Si se busca el número de barras necesarias para 4 eslabones de forma triangular, ¿Tienes necesidad de realizar un dibujo para encontrarlos o existe una manera rápida de proceder?

3. Para 15 eslabones en forma triangular, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de barritas sin necesidad de contarlas una a una y sin necesidad de dibujar?

Página 4. Trabajo en equipo

4. En equipo discute las estrategias que han encontrado para calcular el número de barras para una cadena de 15 eslabones en forma triangular. ¿Los procedimientos de cada uno de los miembros del equipo son iguales? Encuentre al menos 2 estrategias para calcular el número de barras necesarias para una cadena o pulsera de 15 eslabones triangulares.

5. Una vez que han escrito las diferentes estrategias y que han decidido que ellas son correctas, utilícenlas cada una de ellas para calcular el número de barras necesarias para una cadena o pulsera de 21 eslabones y otra de 54 eslabones triangulares.

Página 5. Trabajo en equipo

6. La aplicación que pueden utilizar con *GeoGebra* les proporciona en forma directa el número de eslabones en forma triangular. Utilícenla para verificar sus resultados de la pregunta anterior.

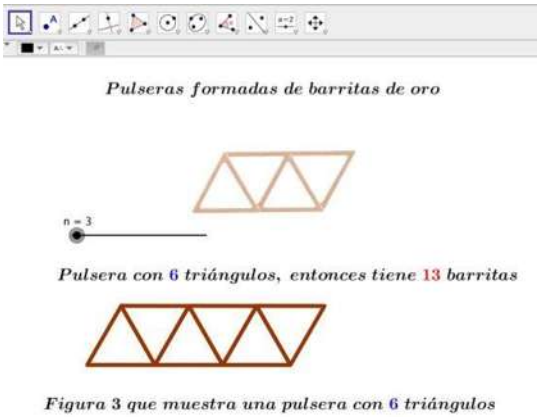


Figura 3 que muestra una pulsera con 6 triángulos

7. Escribe un mensaje en palabras que permita a Samantha calcular el número de barras necesarias para cualquier número de eslabones triangulares.

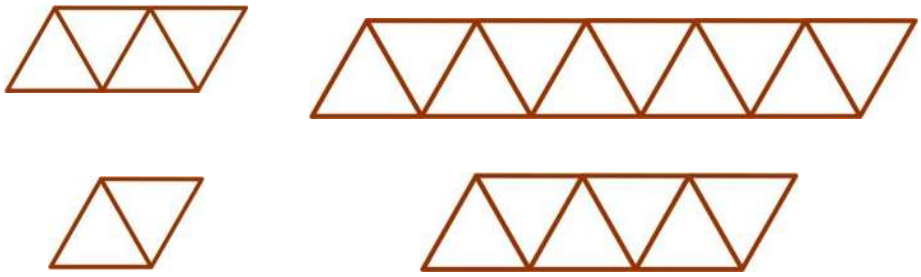
8. Los mensajes son largos para leer. Samantha está de prisas, ella desea que tú le proporciones algo corto indicando las operaciones a realizar en tú mensaje. Escribe un mensaje corto para Samantha.

Comentario para el maestro: Discusión con toda la clase

Discutir lo que se ha realizado en las primeras etapas de la investigación en un consenso basado sobre la argumentación y la validación. Escribir en una tabla las diferentes estrategias producidas. Es importante iniciar por aquellas estrategias erróneas para que los alumnos tengan la oportunidad de discutir, rechazar o validar por toda la clase. Todas las producciones de los alumnos se recolectan una vez finalizada la discusión.

Página 6. Trabajo individual – Autorreflexión

En la joyería «El Dorado», Samantha fabrica pulseras y cadenas de oro en forma de eslabones de triángulos, como los siguientes:



Ella realiza pulseras y cadenas de diferente tamaño. Samantha compra las barras de oro por pieza. Ella quisiera encontrar el número de barras que necesita sin tener que contar las barras una a una (¡es muy largo el proceso!). Te solicitamos enviar un mensaje a Samantha en el cual le vas a explicar cómo podría hacerle para encontrar rápidamente el número de barras que necesita según el número de eslabones deseados sin estar obligada a contarlas una a una.

1. Calcular el número de barras necesarias para 4 eslabones en forma triangular. Explica las estrategias que has utilizado.

2. Calcula el número de barras para 15 eslabones en forma triangular. Explica las estrategias que has utilizado.

3. Calcula el número de barras para 21 eslabones y para 54 eslabones en forma de triángulo. Explica las estrategias que has utilizado.

4. Calcula el número de barras necesarias para cualquier número de eslabones. Explica las estrategias que has utilizado.

Página 7. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.