



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**EFFECTO DE CAOS ELECTROMAGNÉTICO EN GUÍA DE ONDAS DE
CRISTAL FOTÓNICO CON INCLUSIONES CILÍNDRICAS**

TESIS

Para obtener el grado de

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ALEJANDRO BUCIO GUTIÉRREZ

ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica
HÉCTOR I. PÉREZ AGUILAR

CO-ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Ingeniería Física
HUGO ENRIQUE ALVA MEDRANO

Morelia, Michoacán, Febrero de 2021

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra un estudio teórico y numérico para guías de ondas de cristal fotónico (PCW) de tamaño infinito y finito. Ambos sistemas están compuestos por superficies planas paralelas con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares de conductor perfecto (PEC). En el sistema infinito se calcularon los modos normales del sistema; el cual se modeló por medio de una celda unitaria. En el sistema finito se mide la respuesta óptica, obteniendo modos normales de propagación del campo electromagnético mediante la reflectancia. En ambos sistemas se calcularon las intensidades del campo. Para abordar ambos problemas, se hace uso de una técnica numérica conocida como el Método de la Ecuación Integral, que permite obtener un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas el campo y su derivada normal evaluados en las superficies involucradas. Al discretizar el sistema, se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas homogéneas para el sistema infinito, cuya solución determina la relación de dispersión y un sistema inhomogéneo de ecuaciones algebraicas para el sistema finito, donde, a partir de sus soluciones se puede obtener la reflectancia. Estos cálculos se realizaron bajo el protocolo de la programación en paralelo con MPI para reducir los tiempos de cálculo. Además, se calcularon algunas propiedades estadísticas de las intensidades obtenidas; en particular, la función de autocorrelación (ACF) y la longitud de correlación. Bajo ciertas circunstancias los sistemas muestran patrones de la intensidad del campo desordenados; además, se obtiene que a modos con frecuencias asociadas mayores le corresponden valores de la longitud de correlación menores. Este tipo de comportamiento está asociado con el fenómeno de caos y es bien sabido que sistemas clásicos con geometrías análogas, como los billares de Sinai, presentan este fenómeno. Con estos argumentos asociamos nuestros resultados al fenómeno de caos electromagnético.

Palabras clave: Campo electromagnético, Caos electromagnético, Función autocorrelación, Guía de ondas, Método de la ecuación integral.

ABSTRACT

In the present work a theoretical and numerical study for photonic crystal waveguides (PCWs) of infinite and finite size is shown. Both systems are composed of parallel planar surfaces with a periodic arrangement of circular cylindrical inclusions of perfect electric conductors (PECs). In the finite system, the optical response is measured, obtaining normal modes of propagation of the electromagnetic field through reflectance. In both systems the field intensities were calculated. To address both problems, a numerical technique known as the Integral Equation Method, which allows to obtain a system of coupled integral equations that involve as unknowns the field and its normal derivative evaluated on the involved surfaces. By discretizing the system, a set of homogeneous algebraic equations is obtained for the infinite system, whose solution determines the dispersion relation and an inhomogeneous system for the finite system, whose solution determines the reflectance. These calculations were performed under the protocol of parallel programming with MPI to reduce computational times. In addition, some statistical properties of the obtained intensity were calculated; in particular, the autocorrelation function (ACF) and the correlation length. The analyzed systems present disordered field intensity patterns; moreover, it is obtained that modes with higher associated frequencies correspond to lower values of the correlation length. This type of behavior is associated with the phenomenon of chaos and it is well known that classical systems with analogous geometries, such as the Sinai billiards, exhibit this phenomenon. With these arguments we associate our results with the phenomenon of electromagnetic chaos.

Keywords: Electromagnetic field, Electromagnetic chaos, Autocorrelation function, Waveguide, Integral equation method.

DEDICATORIA

A mi familia, mi padre Juan A. Bucio S., mi madre Brenda del Rocio G. G., mi abuela M. Magdalena G. S. y mi hermana Kenia A. B. G., por ser mis cómplices con su gran apoyo, todo lo que hoy soy es gracias a ellos. Mis maestros de vida.

A mi novia Herlinda Tututi G., mi mayor pilar moral. Por tu motivación y ayuda mi eterno amor a ti.

Agradecimientos

El presente trabajo es resultado de un esfuerzo individual y colectivo, que no hubiera sido posible sin la intervención de personas e instituciones que proporcionaron el apoyo, comentarios, sugerencias y consejos para enriquecerlo y concluirlo gratamente.

Mis más sinceros agradecimientos a mi asesor, el Dr. Héctor Igor Pérez Aguilar, por la valiosa guía que me proporcionó lo cual permitió concluir este trabajo, gracias a sus valiosas aportaciones y su infinita paciencia. A mi coasesor, el Dr. Hugo Enrique Alva Medrano por su apoyo, orientación y ayuda en las dudas surgidas. A los docentes y administrativos de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas por su ardua labor durante mi estancia en dicha institución así como los consejos y experiencias que me brindaron muchos de ellos. Mi respeto y admiración.

A todo el personal la Dirección de Archivos de la UMSNH nombrando como representantes a la Lic. Mónica Gutiérrez L. y a la Lic. Bárbara Tinoco F. por las facilidades y consejos para continuar mis estudios, proporcionadas durante mi periodo de trabajo en esta dependencia.

A mi tíos, tías, primos, sobrinos, abuelos y abuelas y demás familiares quienes durante el trayecto que conllevo a este punto de mi vida siempre me brindaron su empatía, felicidad, apoyo y cariño.

A mis amigos de ayer, hoy, mañana y siempre: Juan Fernando, Yashar, Raúl, Enrique, Grisel, Flor, Norma, Emanuel, Fernando, Salma, Marisol, Ángeles, Shessid, Leti, Carlo, Daniel, Juan, el Sr. Socorrito y muchos otros más que han formado parte de mi vida dejando hermosos recuerdos que valoro y atesoro. Mi eterno agradecimiento, amistad y cariño.

Contenido

	Página
Resumen	i
Abstract	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1. Estructura de la Tesis	4
II. CAOS CLÁSICO	6
II.1. Desarrollo histórico	6
II.2. Sistemas Dinámicos	9
II.2.1. Tipos de sistemas dinámicos	10
II.2.2. Linealidad y no Linealidad	13
II.2.3. Caos	14
II.3. Cuantificación del Caos	15
II.3.1. Exponentes de Lyapunov	16
II.3.2. Mapas de Poincaré	17
II.3.3. Función de Autocorrelación	19
II.4. Sistema de billares	20
II.4.1. Sistema de billares con paredes sinusoidales	21
II.4.2. Billar plano con inclusión circular	23
III. EL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL	25
III.1. Descripción del Método Integral	25
III.2. Ecuación de Helmholtz	26
III.3. Función de Green en la Ecuación de Helmholtz	28
III.4. Forma Integral de la Ecuación de Helmholtz	29
III.5. Discretización de Integrales	30
III.6. PCW Infinita	33
III.7. PCW Finita	36
III.7.1. Campo incidente	39
III.7.2. El campo esparcido	40

Contenido (continuación)

	Página
III.8. Verificación de los métodos numéricos implementados	42
III.8.1. Verificación del método numérico en el sistema infinito	42
III.8.2. Verificación del método numérico en el sistema finito	44
IV. Resultados	46
IV.1. Función de autocorrelación en sistemas electromagnéticos	46
IV.2. PCW infinita con inclusiones cilíndricas de PEC	47
IV.2.1. Polarización TE	48
IV.2.2. Polarización TM	52
IV.3. PCW finita con inclusiones cilíndricas de PEC	55
IV.3.1. Polarización TE	55
V. Conclusiones	58
A. CONDICIONES DE FRONTERA	61
A.1. Caso TE (polarización s)	62
A.2. Caso TM (polarización p)	63
B. FUNCIÓN DE GREEN	65
REFERENCIAS	69

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Atractor extraño del sistema de Lorenz.	9
2	Conjunto fractal de Mandelbrot.	9
3	Sección de Poincaré para trayectorias en un espacio fase m -dimensional.	18
4	Diagrama del sistema en (a). Mapas de Poincaré en (b), (c) y (d), obtenidos por Herrera-Gonzalez <i>et al.</i> (2011) para distintos parámetros del sistema.	22
5	(a) Diagrama de la mesa de billar. Las gráficas de Husimi en (b), (c) y (d), son obtenidas por Luna-Acosta <i>et al.</i> (1996b) para diferentes parámetros del sistema.	23
6	Diagrama de movimiento de fotones en billar periódico con un obstáculo convexo tomado de la Ref. Suppes and Acacia-de Barros (1996).	24
7	Diagrama de una guía de ondas infinita con inclusiones cilíndricas de conductor perfecto. Las líneas punteadas en rojo delimitan la región de la celda unitaria.	33
8	Diagrama de una guía de ondas finita con inclusiones cilíndricas de conductor perfecto.	37
9	Estructura de bandas para una PCW formada por dos paredes planas y paralelas. Comparación del modelo analítico (círculos) con el numérico (puntos).	44
10	(a) Estructura de bandas para una PCW formada por dos paredes planas y paralelas con inclusiones cilíndricas bajo polarización TE. (b) Respuesta óptica de una PCW finita al considerar un haz Gaussiano que incide de forma normal sobre la guía y con polarización TE. Ambas gráficas muestran una buena correspondencia entre ambos sistemas.	45
11	Diagrama de una PCW infinita formada por paredes planas y paralelas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones circulares de conductor perfecto.	48

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
12	Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 1.1854$, (c) $\omega_r = 90.0751$ y (e) $\omega_r = 140.0501$. En (b), (d) y (f) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente. En todos los casos se tiene que $k_r = 0$ para polarización TE.	50
13	Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 240.0290$ y (c) $\omega_r = 640.0681$. En (b) y (d) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a) y (c), respectivamente. En todos los casos se tiene que $k_r = 0$ para polarización TE. . .	51
14	Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 1.0726$, (c) $\omega_r = 90.01503$ y (e) $\omega_r = 140.2355$. En (b), (d) y (f) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente. En todos los casos se tiene que $k_r = 0$ para polarización TM.	53
15	Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 240.0892$ y (c) $\omega_r = 640.1614$. En (b) y (d) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a) y (c), respectivamente. En todos los casos se tiene que $k_r = 0$ para polarización TM. . .	54
16	Diagrama de guía de ondas finita con paredes planas e inclusiones cilíndricas de conductor perfecto.	55
17	Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 0.7744$, (c) $\omega_r = 50.6902$ y (e) $\omega_r = 100.5368$. En (b), (d) y (f) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente. En todos los casos se tiene polarización TE.	57

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Durante el siglo XIX se creía que la Física, una de las ciencias más rigurosas e importantes de la época, estaba a punto de cerrar su estudio pues se pensaba que prácticamente cualquier fenómeno podía ser explicado con el marco teórico que tenían hasta ese momento. En Física, las leyes se expresaban de manera estrictamente determinista a diferencia de cualquier otra ciencia que no podía decir lo mismo. Fue a finales del mismo siglo cuando esta idea se fue abajo; por un lado, surgiendo la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica, y por otro lado las pequeñas chispas de la teoría del caos. Sin embargo, el caos mejor estructurado llegó hasta mediados del siglo XX, cuando el físico Edward Norton Lorenz (1917-2008) con ayuda de una computadora de gran velocidad resolvió un conjunto de ecuaciones no lineales las cuales modelaban el clima, observó que al graficar la solución del conjunto de ecuaciones se formaba una especie de mariposa. Dicho fenómeno lo llamó “atractor extraño” con lo que se estableció la existencia de fenómenos caóticos. El fenómeno del caos está asociado a sistemas dinámicos, que usualmente están definidos por una o más variables y que evolucionan con el tiempo, en los cuales la respuesta no es proporcional al estímulo. Aunque la

palabra caos¹ no tiene una definición formalmente aceptada por Físicos y Matemáticos, hay una clara relación entre la sensibilidad de las condiciones iniciales y un comportamiento caótico. Este punto de vista fue compartido años antes por el físico James Clerk Maxwell (1831-1879) (Fernández-Sanjuán, 2016); así como el contemporáneo a Lorenz, el físico americano Richard Phillips Feynman (1918-1988), hace unas reflexiones similares en su conocido libro titulado Lecciones de Física (Feynman *et al.*, 1963), donde explica que el indeterminismo no pertenece exclusivamente a la mecánica cuántica, sino que es una propiedad básica de muchos sistemas físicos.

Como es natural, existen tantos sistemas dinámicos como variables que tienen una evolución temporal, lo que nos da idea de la naturaleza interdisciplinar y del alcance de la dinámica no lineal. Por lo que, una gran variedad de los sistemas son complejos. Este tipo de sistemas complejos existen en biología, en química, en física, en sociología, en economía, etc (Akter and Ahmed, 2019). Existen diferentes caminos que han llevado a la comprensión del caos tal y como lo entendemos hoy en día. De entre estos diferentes caminos cabe señalar:

1. La ecuación logística y la dinámica de las poblaciones.
2. Los osciladores no lineales.
3. El problema de los tres cuerpos y la mecánica celeste.
4. La turbulencia y la dinámica de los fluidos.
5. La irreversibilidad y la mecánica estadística.

Siendo las propiedades estadísticas las que vislumbran comportamientos desordenados en los sistemas donde se presenta el fenómeno de caos.

¹De origen Griego “*khaos*” que designa un abismo oscuro, desordenado y tenebroso.

Por otro lado el estudio de sistemas en los que hay una propagación y esparcimiento de ondas clásicas y cuánticas es un tema de gran interés actual desde un punto de vista científico y aplicado (Torrent and Sánchez-Dehesa, 2009). Esto no es de sorprenderse puesto que las ondas al interactuar con la materia exhiben comportamientos peculiares, cuyo estudio ha sido resultado en grandes avances de la comunicación, detección y medición (Shinohara, 2018; Giordani and Zorzi, 2020). Este panorama presenta problemáticas actuales que se vuelven cada vez más difíciles de abordar, englobando con ello, una gran cantidad de fenómenos electromagnéticos, ópticos, acústicos, cuánticos, etc. Así, entre los sistemas que presentan el fenómeno de caos podemos destacar las guías de ondas de cristal fotónico (PCWs²) o cuánticas; las cuales, bajo ciertas circunstancias, presentan el fenómeno de caos (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a,b). Algunos de estos sistemas pueden ser comparados con sistemas clásicos de geometrías análogas que presentan el fenómeno de caos (Herrera-Gonzalez *et al.*, 2011; Alonso *et al.*, 2002; Castaldi *et al.*, 2008; Berry, 1997). Claro esto no sólo es cuestión de un análisis teórico, también se han obtenido resultados experimentales sobre el comportamiento caótico, en particular, en fibras ópticas con sección transversal no circulares donde los rayos de luz exhiben una dinámica caótica (Doya *et al.*, 2002). Esta dinámica en sistemas de guías de ondas, puede ser modelada a través de la intensidad del campo al interactuar en la guía, mostrando bajo ciertas condiciones, patrones irregulares.

Estos patrones irregulares se describen mejor mediante métodos de teoría de probabilidad y estadísticas. Para explicar estos patrones irregulares, en algunos trabajos se ha considerado que la geometría de las guías de onda infinitas tienen una analogía a sistemas clásicos conocidos como billares de Sinai. Esto permite estudiar sus propiedades de transporte cuánticas y clásicas (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a). Además es bien sabido

²Por sus siglas en inglés, *Photonic Crystal Waveguides*.

que una guía de ondas de cristal fotónico infinita tiene asociada una estructura de bandas (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011), lo cual es de vital importancia en el estudio de propiedades estadísticas en este tipo de sistemas. Es importante recalcar que para frecuencias altas se tiene el límite de la óptica geométrica, de donde se obtiene una analogía con sistemas clásicos que presentan el fenómeno de caos electromagnético (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013a). Un entendimiento pleno del caos en este tipo de sistemas podría dar lugar a grandes aportes en áreas como la criptografía y en circuitos ópticos integrados.

En la siguiente sección se menciona la estructura de la tesis.

I.1. Estructura de la Tesis

La tesis está estructurada de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se mencionan los sistemas dinámicos y el caos clásico. En este capítulo se introducirán los conceptos necesarios para el desarrollo de esta tesis, así como su clasificación y cuantificación. Además se mostrarán resultados de trabajos de distintos autores con geometrías similares al problema que se aborda en este trabajo de investigación. Dichos resultados son para trayectorias de partículas en sistemas balísticos (generalmente llamados billares), que en el caso clásico presentan el fenómeno de caos.
- En el capítulo 3 se describe el método numérico de la ecuación integral. El cual, es un método que se basa en el uso del teorema de Green bidimensional para calcular las intensidades del campo electromagnético en sistemas finitos e infinitos.
- En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos al analizar el comportamiento de la intensidad del campo electromagnético para los sistemas infinito y finito considerados en este trabajo. Ambos sistemas están formados por placas

paralelas que envuelven un arreglo de inclusiones cilíndricas circulares de conductor perfecto. Para observar cuantitativamente el desorden del sistema se utilizó la función de autocorrelación, así como la longitud de correlación.

- En el capítulo 5 se dan las conclusiones después de analizar los resultados obtenidos en los sistemas planteados.

Capítulo II

CAOS CLÁSICO

La palabra caos y el adjetivo caótico se usan para describir un sistema que aparentemente tiene un comportamiento aleatorio. Un claro ejemplo de esto es el llamado “efecto mariposa”, que es tal vez la analogía más divulgada para dar a entender que en sistemas dinámicos las pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden conducir a resultados inesperados. Esto involucra una de las preguntas fundamentales en la física, ¿Cuan precisas son nuestras teorías al predecir el comportamiento de un sistema a largo plazo? así, no es de sorprender que el comportamiento caótico en sistemas físicos sea en la actualidad tema de sumo interés científico. En este capítulo se explican términos básicos presentes al hablar de sistemas dinámicos y de la teoría del caos, así como el desarrollo histórico de esta teoría. Además, se enuncian algunas formas para cuantificar el fenómeno del caos en los sistemas dinámicos.

II.1. Desarrollo histórico

Las leyes de movimiento y de gravitación universal de I. Newton (1642-1727) combinadas con las leyes de J. Kepler (1571-1630) resolvían problemas como el de las órbitas de la Tierra alrededor del Sol como un sistema de dos cuerpos. Newton resuelve el

problema al reducir el movimiento de los dos cuerpos al movimiento de cada uno de ellos alrededor del llamado centro de masas, que es un punto al que se le asocia la masa total del sistema. Sin embargo, se da cuenta de que no era posible solucionar de forma analítica el sistema para tres cuerpos, resultando imposible tratar con un problema similar para nueve cuerpos.

Uno de los mayores progresos de esta teoría fue la solución de problemas matemáticos como el anterior mencionado, siendo el matemático francés H. Poincaré (1854-1912) el primero en vislumbrar la posibilidad de caos, en el sentido de que un sistema determinista exhibe un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, lo que hace imposible la predicción a largo plazo. Esto cambió el principal enfoque filosófico determinista de la ciencia que se tenía hasta antes del siglo XIX. Precisamente Poincaré publicó su magna obra “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste” en tres volúmenes donde aparecen numerosos conceptos nuevos que han dado lugar al desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos, como acostumbra a llamarla los matemáticos o dinámica no lineal; término éste más usado por los físicos (Fernández-Sanjuán, 2016). Poincaré es así, considerado como uno de los padres de la teoría del caos, ya que muchas ideas fundamentales de la teoría están contenidas en este libro. Muchos otros matemáticos y físicos contribuyeron al desarrollo de estas ideas, entre ellos podemos destacar a Alexander M. Lyapunov (1857-1918), de quien hemos heredado conceptos tales como el de estabilidad de los sistemas dinámicos y también los útiles exponentes de Lyapunov, que nos sirven para caracterizar cuando un sistema dinámico dado es o no caótico (estos conceptos se describen más adelante). Siendo también mérito de mención Edward Lorenz (1917-2008), quien desarrolló un modelo de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual está dado por

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad (1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \quad (1b)$$

y

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \quad (1c)$$

donde σ es el número de Prandtl, ρ el número de Rayleigh y β es un parámetro que por lo regular vale $8/3$ (Strogatz, 2001). Con estas ecuaciones se describe el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico en un sistema simplista. Lorenz descubrió que las soluciones a las Ecs. (1), nunca establecen un equilibrio, sino al contrario oscilan de una manera aperiódica irregular y cambiando ligeramente las condiciones iniciales en sus simulaciones, los comportamientos resultantes pronto llegaron a ser totalmente diferente (llamado efecto mariposa). La implicación fue que las soluciones resultaron impredecibles y en caso de tener diminutos errores en la medición inicial del estado de la atmósfera, los errores crecen rápidamente, llevando eventualmente a predicciones erróneas. Tales experimentos condujeron a Lorenz en 1963 al descubrimiento del movimiento caótico al que denominó como “atractor extraño” como se observa en la Fig. 1 (Strogatz, 2001).

Aunque el caos se apoderó de la atención durante muchos años, también hubo otros grandes avances en la dinámica en los años 70. Mandelbrot (1924-2010) codificó y popularizó fractales como el conjunto que lleva su mismo nombre, uno de ellos se muestra en la Fig. 2. Mandelbrot mostró cómo podrían ser aplicados en una variedad de temas como por ejemplo, el análisis de sistemas biológicos oscilantes como el ritmo del corazón al palpar (Strogatz, 2001).

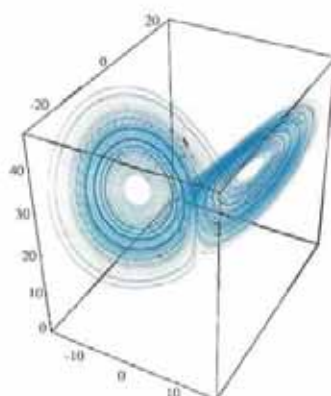


Figura 1. Atractor extraño del sistema de Lorenz.

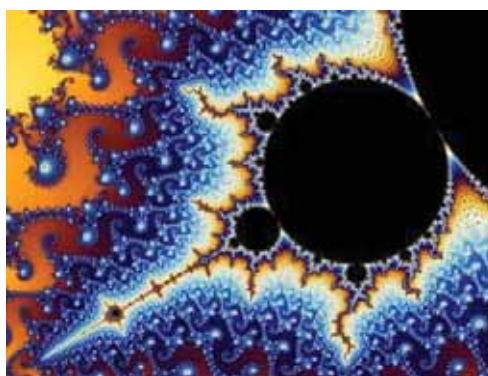


Figura 2. Conjunto fractal de Mandelbrot.

II.2. Sistemas Dinámicos

La dinámica es la ciencia que estudia la variación en el tiempo de diferentes magnitudes, es decir su movimiento. Básicamente existen tres tipos de movimientos: los estacionarios y de equilibrio; los periódicos y cuasi periódicos; y los caóticos, siendo este último en los que la predicción del movimiento en un tiempo lo suficientemente grande es casi imposible. En general, para saber cuál de estos tres comportamientos tiene un sistema se necesita conocer las ecuaciones de evolución en el tiempo del sistema, los valores de los parámetros que describen el sistema y las condiciones iniciales. Los sistemas dinámicos tienen diferente comportamiento después de un lapso de tiempo. Estos se

clasifican en tres tipos:

1. Estables, ocurre cuando dos soluciones que tienen condiciones iniciales muy cercanas siguen siendo casi igual de cercanas a lo largo de un tiempo. Así, un sistema estable después de un transcurso de tiempo suficientemente largo tiende a un punto, u órbita, según su dirección (atractor o sumidero).
2. Inestables, cuando dos soluciones con condiciones iniciales que difieren por muy poco acaban divergiendo. Así un sistema inestable no va hacia algún punto.
3. Caóticos, se presenta cuando un sistema es tanto estable como inestable; es decir dos soluciones que inicialmente están a una distancia finita se mantienen así después de un lapso de tiempo y se aproximan a un atractor. Mientras que algunas otras soluciones que son vecinas inicialmente divergen de manera exponencial con el tiempo, aunque suelen ser cualitativamente similares y a pesar que no tienden a un atractor, el sistema permanece en una zona de su espacio de estados.

II.2.1. Tipos de sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos con alguno de los tres tipos de movimientos previamente mencionados suelen clasificarse en discretos y continuos en función de si el tiempo se mide de modo discreto o continuo:

- **Sistemas dinámicos continuos.** Descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y parciales (EDPs). Un sistema dinámico continuo es descrito por

EDOs que, de manera general, están dadas por:

$$\frac{d^N u_1}{dt^N} = f_1 \left(t, u_i, \frac{du_i}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}u_i}{dt^{N-1}} \right), \quad (2a)$$

...

$$\frac{d^N u_{M-1}}{dt^N} = f_{M-1} \left(t, u_i, \frac{du_i}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}u_i}{dt^{N-1}} \right), \quad (2b)$$

y

$$\frac{d^N u_M}{dt^N} = f_M \left(t, u_i, \frac{du_i}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}u_i}{dt^{N-1}} \right), \quad (2c)$$

donde $u_i = u_i(t)$, con $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, es la i -ésima componente del **vector solución** $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_M) = \mathbf{u}(t)$, el cual hace variar la dinámica del sistema en el tiempo, N es el orden de las M ecuaciones y $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M)$ se puede interpretar como un **vector de campo**. Además una EDO de orden N se puede descomponer en N EDOs de orden 1, por lo que, con un abuso de notación reescribiremos las Ecs. (2) como:

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_i), \quad (3a)$$

...

$$\frac{du_{M-1}}{dt} = f_{M-1}(t, u_i) \quad (3b)$$

y

$$\frac{du_M}{dt} = f_M(t, u_i). \quad (3c)$$

Por otro lado, el sistema dinámico continuo descrito por EDPs de manera general está dado por

$$\frac{\partial^N u_1}{\partial x_1^N} = f_1 \left(x_1, \dots, x_n, u_i, \frac{\partial^{l+m+\dots+p} u_i}{\partial x_1^l \partial x_2^m \dots \partial x_n^p} \right), \quad (4a)$$

...

$$\frac{\partial^N u_{M-1}}{\partial x_1^N} = f_{M-1} \left(x_1, \dots, x_n, u_i, \frac{\partial^{l+m+\dots+p} u_i}{\partial x_1^l \partial x_2^m \dots \partial x_n^p} \right) \quad (4b)$$

y

$$\frac{\partial^N u_M}{\partial x_1^N} = f_{M-1} \left(x_1, \dots, x_n, u_i, \frac{\partial^{l+m+\dots+p} u_i}{\partial x_1^l \partial x_2^m \dots \partial x_n^p} \right), \quad (4c)$$

donde $u_i = u_i(x_1 = t; x_2, \dots, x_n)$, son funciones de las n variables independientes, siendo $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, u_i es la i -ésima componente del vector solución $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_M) = \mathbf{u}(x_1 = t; x_2, \dots, x_n)$, tal que las derivadas parciales de orden l , m y p deben satisfacer que $l < N$ y $l + m + p \leq N$. El orden de las M ecuaciones es N si la derivada parcial de mayor orden es ésta y $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M)$ se puede interpretar como un vector de campo con n variables independientes. Además en las Ecs. (4) debe considerarse que las derivadas parciales representan todas las combinaciones posibles incluyendo las derivadas parciales cruzadas.

- **Sistemas dinámicos discretos.** Este tipo de sistemas están descritos por los denominados mapas iterados con la ecuación general dada por

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

donde el índice k señala una iteración que está ligada al modo discreto de medir el tiempo. La Ec. (5) puede interpretarse de la siguiente forma: si el sistema adopta en un instante k un estado descrito a través de un cierto elemento x_k , entonces en el instante $k + 1$ el estado del sistema será x_{k+1} .

Además se dice que un sistema dinámico es **autónomo** si las ecuaciones que describen al sistema, como en las Ecs. (3) ó (4), no dependen en forma explícita del tiempo, en caso contrario será un sistema dinámico **no autónomo**. En el sistema autónomo no se tiene influencia externa que estimule el comportamiento del sistema, mientras que los sistemas no autónomos son afectados por factores externos. Otro concepto a tener en cuenta cuando se habla de sistemas dinámicos es el de **espacio fase** (o espacio de estados), cuya dimensión es determinada por el número de variables

necesarias para identificar el estado dinámico del sistema. El estado momentáneo del sistema corresponde a un **vector de estado** que no es más que un punto \mathbf{P} de dicho espacio; es decir cada punto del espacio fase es una condición inicial diferente, mientras que una secuencia de dichos estados define una **trayectoria** $\tau(t)$ en el espacio de las fases. Si tomamos un conjunto de trayectorias las cuales inicialmente son cercanas entre ellas y permanecen cercanas después de un lapso de tiempo largo incluso si éstas se perturban, entonces el conjunto de estas es llamado un **atractor**. Estas son formas geométricas, en el espacio de las fases, que caracterizan el comportamiento a largo plazo de un sistema. Además también se tienen los **puntos fijos** (también llamados punto de equilibrio, puntos críticos o puntos singulares), que representan soluciones de equilibrio; es decir, los puntos de estabilidad donde caen las trayectorias después de un lapso de tiempo (nótese que la idea es que las trayectorias son atraídas a puntos de equilibrio).

Algebraicamente esto sería igualar a cero las derivadas temporales de las Ecs. (3) ó (4), dependiendo si el sistema dinámico es descrito por EDOs o EDPs. Finalmente se tienen también los **ciclos límite**, que son trayectorias cerradas y aisladas del espacio fase que representan un comportamiento cíclico o periódico del sistema dinámico. Decimos que estas trayectorias son aisladas en el sentido que atraen o repelen a trayectorias cercanas a ésta.

II.2.2. Linealidad y no Linealidad

La **linealidad** en un sistema lleva implícito asumir propiedades tales como: Proporcionalidad, es decir, pequeñas causas provocan pequeños efectos: Aditividad: el todo es igual a la suma de las partes; Replicación: la misma acción en las mismas condiciones producen el mismo resultado y relaciones claras entre causa y efecto (basta conocer un poco acerca del comportamiento de un sistema para conocerlo por completo). Usamos

el término “no lineal” para contraponerlo lógicamente al término “lineal”, ya que la aproximación lineal es la que tradicionalmente se ha usado en la ciencia debido a su sencillez matemática dada de manera general por el principio de superposición: en un sistema lineal el efecto de la actuación conjunta de dos causas distintas consiste sólo en la superposición de los efectos que cada una de las causas hubiera generado por sí misma. Es decir si $\mathbf{u}_1(t)$ y $\mathbf{u}_2(t)$ son soluciones linealmente independientes en el sistema dinámico, esto es que $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = 0$, se cumple sólo para $\alpha = 0 = \beta$ en cualquier tiempo t , entonces también es solución la combinación lineal $\mathbf{u}_3 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$, donde a y b son números reales.

La **no linealidad** no conduce a soluciones múltiples, es decir, que \mathbf{u} sea solución de un sistema no lineal no implica que un múltiplo de \mathbf{u} lo sea. Cuando existen relaciones de no linealidad en el sistema, puede darse un comportamiento caótico (no todos los sistemas dinámicos no lineales son caóticos) que presenta las siguientes propiedades:

- No hay proporcionalidad: pequeñas causas pueden provocar grandes efectos.
- No hay aditividad: el todo es mayor que la suma de las partes.
- Dependencia sensible a las condiciones iniciales: lo que puede llevar a que nunca se pueda reproducir de modo exacto el mismo experimento.
- La no linealidad puede generar inestabilidades, discontinuidades e imprevisibilidad, lo que hace necesario la flexibilidad, la adaptabilidad, el cambio dinámico, la innovación y la capacidad de reacción.

II.2.3. Caos

En base a conceptos ya previamente mencionados se tiene una noción de lo que se refiere al decir que un sistema dinámico tiene un comportamiento caótico. Aunque no existe

una definición matemática universalmente aceptada de caos, se puede dar una grata definición de lo que implica que un sistema sea caótico. Como ya se ha mencionado antes la no linealidad de las ecuaciones puede conducir a un comportamiento caótico en el sistema, pues todo sistema con comportamiento caótico es descrito por ecuaciones no lineales. Sin embargo no necesariamente se tendrá que un sistema descrito por ecuaciones no lineales sea caótico, para que podamos decir que esto último ocurre se debe cumplir los siguientes requisitos (Hilborn, 2004):

1. Movimiento oscilante. Las trayectorias no tienden a un punto fijo, órbita periódica o cuasiperiódica cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$, debido a la oscilación. Aunque también se tienen casos en que las trayectorias van a puntos fijos como en los ciclos límite.
2. Determinismo. El sistema no depende del azar pues el comportamiento que presenta no cambia, si se repite varias veces con las mismas condiciones iniciales y el azar tampoco está involucrado en tiempos posteriores. El comportamiento irregular surge de la no linealidad y además puede ser modelado por una serie de ecuaciones diferenciales o algoritmos bien definidos, que se pueden resolver matemáticamente e incluso algunas veces no resultan ser muy complicados.
3. Sensibilidad a las condiciones iniciales. Las trayectorias que en un inicio son bastante cercanas en un lapso de tiempo mayor se separan exponencialmente. Es decir, condiciones iniciales muy similares acaban dando lugar a comportamientos totalmente diferentes después de un tiempo suficientemente largo.

II.3. Cuantificación del Caos

En la naturaleza, los sistemas de ecuaciones lineales idealizados son poco comunes, esto se debe a que el comportamiento de las soluciones suelen ser impredecibles, complejas

y no cumplen el principio de superposición; es decir, son no lineales y muchas veces son caóticos. Sin embargo, distinguir si el sistema tiene comportamiento caótico o hay “ruido” ocasionado por factores externos en el sistema no es tarea fácil. Para ello se debe hacer una identificación cuantitativa calculando parámetros que determinen si el sistema presenta caos. Los sistemas caóticos regularmente no tienen una solución exacta y en estos casos se recurre a métodos numéricos con lo que se puede hacer una aproximación, sin perder las soluciones propias del sistema. A continuación algunos de los parámetros más conocidos se describen brevemente.

II.3.1. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov miden la tasa de separación exponencial de dos trayectorias inicialmente próximas en el espacio fase. Tómese por ejemplo el caso del espacio fase de una dimensión y el sistema dado por

$$f(x) = \frac{dx}{dt}. \quad (6)$$

Sean $x_0(t)$ y $x(t)$ un par de trayectorias que surgen de un par de puntos iniciales cercanos del espacio fase x_0 y x , respectivamente. Entonces la distancia $s(t) = x(t) - x_0(t)$ crece o se contrae exponencialmente en el tiempo. Además, expandiendo hasta el primer orden de su serie de Taylor la función $f(x)$ en la Ec. (6), se tiene que el cambio en la distancia con la evolución del tiempo está dado por

$$\dot{s}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0). \quad (7)$$

Como esperamos que s cambie exponencialmente en el tiempo, introducimos el exponente λ de Lyapunov como la cantidad que satisface

$$s(t) = s(t=0)e^{\lambda t}. \quad (8)$$

Al comparar las Ecs. (7) y (8) es sencillo notar que el exponente de Lyapunov está dado por la expresión

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}. \quad (9)$$

Similarmente se puede hallar que para un sistema discreto del caso unidimensional, el exponente de Lyapunov está dado por (Strogatz, 2001)

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df}{dx} \Big|_{x_i} \right| \right\}, \quad (10)$$

donde n es el número de iteraciones. En ambos casos ya sea un sistema dinámico continuo o discreto, el exponente de Lyapunov es negativo para un atractor de punto fijo, cero para un ciclo límite o un atractor toroidal y positivo para un atractor extraño (Strogatz, 2001; Hilborn, 2004). La forma de calcular los exponentes de Lyapunov en las Ecs. (9) y (10) nos permite conocer el mayor de los diferentes exponentes de un sistema, ya que hay tantos exponentes de Lyapunov como la dimensión del sistema. Si la dimensión es mayor a uno se puede entender que los exponentes de Lyapunov como la tasa de expansión o contracción de trayectorias para cada una de las direcciones en el espacio fase; es decir, cada exponente mide el grado de divergencia del atractor en una dirección diferente.

II.3.2. Mapas de Poincaré

Poincaré inventó una técnica matemática muy útil que permite reducir el problema de obtener información sobre la naturaleza de las soluciones de sistemas dinámicos a uno más simple con menos dimensiones. Se trata de cortar el atractor m -dimensional de un sistema descrito por la Ec. (3) con una “superficie” $(m - 1)$ -dimensional. Esta geometría simplificada, sin embargo, contiene la información “esencial” sobre la periodicidad, la cuasiperiodicidad, bifurcaciones y caos de la dinámica del sistema. La Fig.

3 muestra la superficie $(m - 1)$ -dimensional denotada por S . Se requiere que S sea transversal al flujo; es decir, todas las trayectorias que comienzan en S fluyen a través de ella, no paralelas a ella.

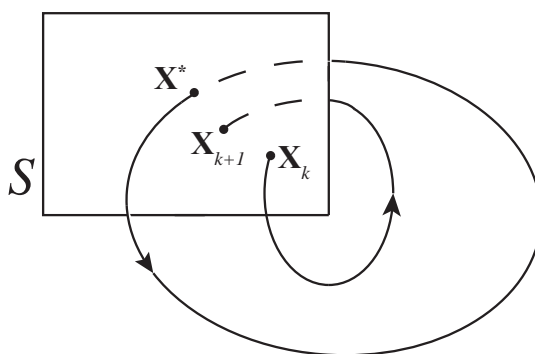


Figura 3. Sección de Poincaré para trayectorias en un espacio fase m -dimensional.

El determinismo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema implican la existencia de una función que relacione un punto de intersección \mathbf{x}_i de trayectoria con el siguiente punto de intersección \mathbf{x}_{i+1} . La representación de estos puntos constituye lo que se ha denominado como **mapa de Poincaré**. El mapa de Poincaré P es un mapeo de S a sí mismo, el cual se obtiene siguiendo trayectorias de una intersección con S con la siguiente. En general, el mapa de Poincaré es descrito por

$$\mathbf{x}_{i+1} = P(\mathbf{x}_i). \quad (11)$$

La función P no depende sólo de las ecuaciones originales que describen el sistema, sino también de la elección de la sección de Poincaré. Una forma directa de evaluar el resultado de una sección de Poincaré es evaluando el aspecto de ésta, que si es complejo es indicativo de que puede ser caos. Suponiendo que \mathbf{x}^* es un punto fijo de la Ec. (11), esto es, se cumple que $\mathbf{x}^* = P(\mathbf{x}^*)$. Entonces, una trayectoria que empieza en \mathbf{x}^* vuelve a \mathbf{x}^* después de algún tiempo t , y por lo tanto es una órbita cerrada para el sistema original. Además, al observar el comportamiento de P cerca de este punto

fijo, podemos determinar la estabilidad de la órbita cerrada. Así, el mapa de Poincaré convierte los problemas de las órbitas cerradas en problemas de los puntos fijos de un mapeo, aunque no siempre es posible encontrar una fórmula para P .

II.3.3. Función de Autocorrelación

La **correlación** se denota por C_m , donde m es un valor proporcional al tiempo de predicción o estudio del comportamiento de una función. La función de correlación analiza la posible relación de los valores de una función o una serie temporal respecto de los anteriores de esa misma serie, con m intervalos de tiempo antes. Cuando se pretende usar la función en el análisis del comportamiento de un sistema del que se conocen series temporales de datos se procede a representar C_m para valores de $m = 1, 2, \dots, n$, siendo:

$$C_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-m} (x_j - \bar{x})(x_{j+m} - \bar{x}), \quad (12)$$

donde, n es el número de datos que se manejan, \bar{x} es el promedio de los datos y x_j es el dato j -ésimo. Estudios como los de Sugihara and May (1990), sugieren que una función de correlación que decrece deprisa con los intervalos de tiempo m indica caos, mientras que una que no lo hace o lo hace y vuelve a aumentar, indica regularidad. La **función de autocorrelación** o ACF¹ se deriva de la Ec. (12) y responde a la pregunta de qué similitud hay entre el comportamiento de una serie de tiempo en cierto momento y su comportamiento en cualquier momento posterior. Ésta se calcula mediante

$$A_m(t) = \frac{C_m}{C_0}, \quad (13)$$

siendo C_m y C_0 la correlación descrita por la Ec. (12) y el coeficiente de correlación es la **desviación estándar** σ de la función de autocorrelación y refleja el nivel de caos de una serie temporal, ya que es una medida que se usa para cuantificar la dispersión de

¹Por sus siglas en inglés, *Autocorrelation Function*.

un conjunto de datos numéricos. Así mientras la desviación estándar sea más cercana a cero, los datos se encuentran menos dispersos. Es decir, la mayor parte de los datos de una muestra tienden a estar agrupados cerca de su media; mientras que un coeficiente de autocorrelación alto indica que los datos se extienden sobre un rango de valores más amplio (Doya *et al.*, 2002; Montenegro-García, 1989). Esta técnica será utilizada en el capítulo de resultados para nuestro sistema de estudio.

II.4. Sistema de billares

En la física clásica un gas en un recipiente cerrado puede considerarse como muchísimas moléculas que se mueven y chocan entre sí. Si no hay intercambio de energía con el exterior esta situación puede modelarse como un sistema conservativo. Sin embargo, el diagrama de fases, que incluye las posiciones y velocidades de todas las moléculas, dista mucho de ser simple. Este sistema, así como muchos otros ejemplos interesantes de sistemas dinámicos de problemas dentro de la mecánica clásica, cuántica, estadística, acústica y óptica (especialmente aquellos en que la interacción entre partículas involucra colisiones elásticas) pueden ser reducidos a sistemas de billares. El hablar de sistemas de billares significará hablar de partículas puntuales moviéndose sobre alguna región (la “mesa de billar”) que puede o no contener obstáculos convexos suaves y sufriendo colisiones elásticas contra ellos. Centramos nuestra atención en los billares periódicos, los cuales tienen la característica de que, las partículas al colisionar con el límite de la mesa desaparecen para reaparecer en el lado opuesto. Además, algunas clases de billares presentan un destacable comportamiento caótico. Con esto en consideración, realza la importancia del estudio de sistemas de billares en el que los fotones son las partículas en interacción. Describir trayectorias de las partículas requiere un análisis matemático más profundo, como el que puede ser consultado en el trabajo de Fraczek

and Ulcigrai (2014).

El obtener resultados de comportamientos caóticos en estos sistemas es subjetivamente sencillo. Sistemas de billares con geometrías similares a la que se abordarán en este trabajo ya han sido estudiadas por diversos autores, quienes utilizan las propiedades estadísticas del sistema para concluir efectivamente la presencia del fenómeno de caos. Las propiedades estadísticas de una clase particular de billares fueron estudiadas por Sinai, quien es uno de los precursores más destacados en esta área de estudio (Sinai, 1970).

II.4.1. Sistema de billares con paredes sinusoidales

En el trabajo de Herrera-Gonzalez *et al.* (2011) se consideró una PCW formada por paredes onduladas periódicas como el diagrama de la Fig. 4(a). Este trabajo toma las distintas trayectorias para partículas puntuales, de donde los autores obtienen mapas de Poincaré. En la misma Fig. 4 se tienen mapas de Poincaré obtenidos por Herrera-Gonzalez *et al.* (2011) para los parámetros $A = 0.001$, que es la amplitud de las paredes y diferencias de fase (b) $\Delta\phi = \frac{1}{2}$ y (c) $\Delta\phi = \frac{1}{3}$. Además en las Figs. 4(b) y 4(c) se tiene que el periodo $l = 1$ y la separación entre las paredes es $2B = 0.1$. Mientras que en la Figs. 4(d) se tiene que $A = 0.008$, $\Delta\phi = \frac{1}{3}$, $l = 1$ y $2B = 2.5$ (en u.a.). Los autores concluyen que bajo ciertos parámetros de las amplitudes y fase de las paredes sinusoidales, el sistema presenta un comportamiento caótico, pues en el caso de la guía estrecha, desaparecen las trayectorias elípticas. Un análisis similar es tratado en Luna-Acosta *et al.* (1996a) que obtiene mapas de Poincaré similares.

En ambos trabajos previamente mencionados se considera un sistema clásico, sin embargo, un sistema cuántico análogo es considerado por Luna-Acosta *et al.* (1996b), en el que una de las paredes es plana y cuyo análisis es semejante a lo que se pretende

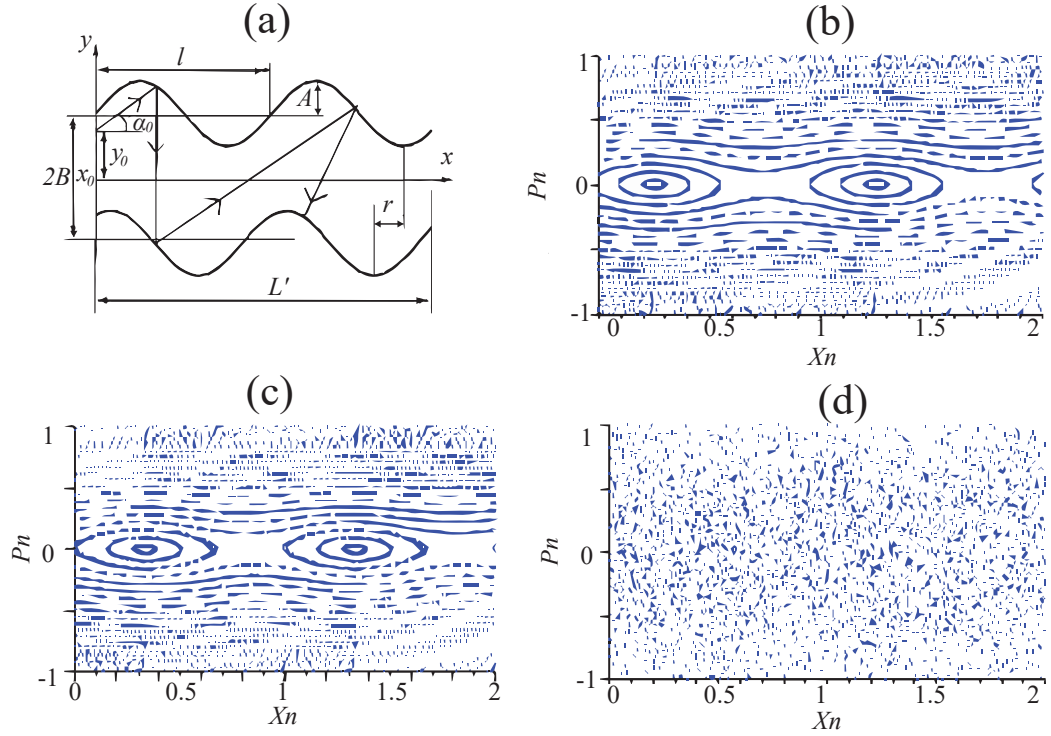


Figura 4. Diagrama del sistema en (a). Mapas de Poincaré en (b), (c) y (d), obtenidos por Herrera-Gonzalez *et al.* (2011) para distintos parámetros del sistema.

realizar en este trabajo. Las gráficas de Husimi² de Luna-Acosta *et al.* (1996b) muestran patrones desordenados con el aumento de la energía al considerar el vector de Bloch $k = 0$. En la Fig. 5(a) (obtenida del mismo artículo) se muestra el diagrama de la mesa de billar. En la misma Fig. 5 se muestran las gráficas de Husimi para los parámetros $d = \frac{2\pi}{10}$, $a = \frac{2\pi}{30}$ y nivel de energía 5 para (b) y $d = \frac{2\pi}{10}$, $a = \frac{2\pi}{25}$ en (c) y (d) para niveles de energía 1001 y 1005, respectivamente (en u.a.). El sistema presenta patrones desordenados en el espacio de fases similarmente de su análogo sistema clásico.

²Una distribución de cuasiprobabilidad usada para representar la distribución del espacio de fase de un estado cuántico.

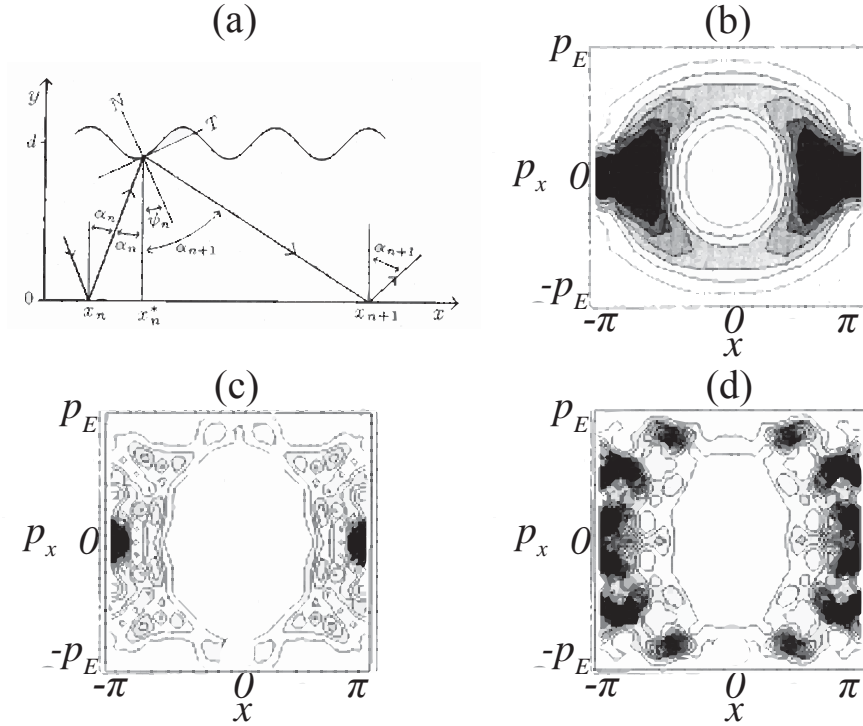


Figura 5. (a) Diagrama de la mesa de billar. Las gráficas de Husimi en (b), (c) y (d), son obtenidas por Luna-Acosta *et al.* (1996b) para diferentes parámetros del sistema.

II.4.2. Billar plano con inclusión circular

Considerando lo mencionado hasta ahora, el sistema clásico análogo al presentado en este proyecto de tesis consta de un sistema de billar periódico con un obstáculo circular en medio como se muestra en la Fig. 6. Si consideramos fotones como las partículas emitidas por un láser ideal que incide sobre el billar periódico de la Fig. 6, descartamos el concepto de elasticidad para choques elásticos, por una reflexión que tiene lugar sin pérdidas de energía. También se asume que las paredes reflectantes son conductores perfectos continuos en el sentido de la teoría electromagnética clásica. Además asumimos que (Suppes and Acacia-de Barros, 1996):

1. Los fotones son tratados como partículas sin propiedades ondulatorias.
2. Los fotones son emitidos por fuentes que oscilan armónicamente.

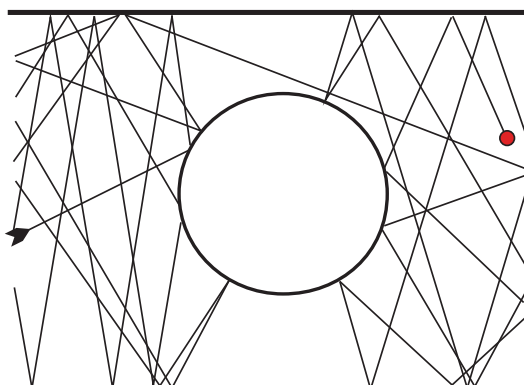


Figura 6. Diagrama de movimiento de fotones en billar periódico con un obstáculo convexo tomado de la Ref. Suppes and Acacia-de Barros (1996).

3. Los fotones tienen trayectorias bien definidas.
4. Los fotones tienen una probabilidad de esparcirse o absorberse en presencia de la materia cercana.
5. Los fotones tienen estados positivos y negativos que interfieren localmente; es decir, se aniquilan entre sí cuando son absorbidos.

En este sentido las trayectorias de los fotones pueden moverse de manera similar a bolas de billar en una mesa de billar con características similares a las planteadas en el sistema de la Fig. 6. Puesto que este tipo de sistemas es tema de interés, nuestro trabajo de tesis toma este arreglo del sistema para estudio y será desarrollado en los siguientes capítulos.

Capítulo III

EL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL

En este capítulo se describe una técnica numérica que puede ser usada para modelar la interacción de la luz con un sistema de cuerpos bidimensionales que forman una guía de onda con obstáculos cilíndricos y puede considerarse infinita y finita. La técnica en cuestión se conoce como el Método de la Ecuación Integral. En el presente trabajo se presenta un planteamiento teórico de este método aplicado a los problemas en cuestión, en los cuales es necesario calcular las estructuras de bandas correspondientes para el sistema infinito y obtener la respuesta óptica para el sistema finito.

III.1. Descripción del Método Integral

Aplicaremos el método numérico de la ecuación integral para calcular las estructuras de bandas correspondiente a una PCW infinita con inclusiones cilíndricas circulares y para una PCW finita análoga mediante el cálculo de la reflectancia. Consideraremos que la guía de ondas está compuesta por superficies planas paralelas de conductor perfecto (PEC¹) con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares, también de con-

¹Por sus siglas en inglés, *Perfect Electric Conductor*.

ductor perfecto. El método parte del segundo teorema integral de Green en la ecuación de Helmholtz permitiendo obtener un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el campo y su derivada normal evaluados en las superficies involucradas. Posteriormente se procede a la discretización del sistema de las ecuaciones integrales, que resulta en un conjunto de ecuaciones lineales bajo condiciones de frontera (ver Apéndice A) que pueden ser mejor representadas en una sola ecuación matricial homogénea en el sistema infinito, e inhomogénea para el sistema finito, cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular las estructuras de bandas o la reflectancia según sea el caso. Es importante mencionar que, sólo se toma en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos que definen la superficie del sistema bajo estudio, lo que permite ahorrar recursos computacionales. Una vez calculadas las funciones fuente nos permiten modelar la estructura de bandas en sistemas perfectamente periódicos; además de la propagación de ondas electromagnéticas a través de sistemas periódicos finitos, calculando la reflectancia. Enseguida daremos la descripción del método correspondiente a la PCW infinita y finita.

III.2. Ecuación de Helmholtz

Al hablar de guías de onda de cristal fotónico nos estamos refiriendo a un sistema nanoscópico de estructura periódica, el cual interactúa con un campo electromagnético. Es por esto que, las guías de ondas de cristal fotónico tienen una estrecha relación entre la ciencia de estado sólido y la teoría del electromagnetismo, ya que las estructuras cristalinas forman parte de la física de estado sólido, pero en las guías de ondas los electrones son sustituidos por ondas electromagnéticas. Además, también podemos tomar propiedades de la ciencia de estado sólido, como la estructura de bandas perteneciente a la guía de ondas infinita, la cual, será necesaria para obtener los modos del sistema

y sus correspondientes intensidades, como veremos en las siguientes secciones. Así, es natural describir el comportamiento del campo electromagnético en la guía de ondas (o cualquier sistema clásico análogo) a través de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (17)$$

donde hemos considerado medios donde no existen densidades superficiales tanto para la carga $\sigma = 0$, como para la corriente $\mathbf{J} = 0$ (pues esta última sólo es distinta de cero para un medio con una conductividad finita). Además, consideramos que los materiales son lineales, por lo que requerimos las ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (19)$$

donde ϵ es la constante dieléctrica y μ es la permeabilidad magnética del material, las cuales son constantes en los materiales a consideración. Además, consideramos que los campos son armónicos en el tiempo, esto es

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (20)$$

donde $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ es el vector de posición en el punto de observación que es independiente del eje z , $\Psi(\mathbf{r}, t)$ representa a cualquiera de los dos campos, y dependiendo el caso $\Psi(\mathbf{r})$ representa el campo perpendicular al plano de incidencia, por lo que puede ser una función escalar para el campo H_z para la polarización p (transversal magnético TM) o E_z para la polarización s (transversal eléctrico TE). Así, bajo estas condiciones, junto con las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas para materiales lineales

(Ecs. (14) a (20)) obtenemos la ecuación de onda independiente del tiempo, o también conocida como ecuación de Helmholtz dada por

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (21)$$

donde se ha definido $k^2 = \mu\epsilon\omega^2$ como la magnitud del vector de onda y al tomar en cuenta que la velocidad de la luz en el vacío está dada por $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ y que el índice de refracción está dado por $n = c/v$, se tiene la relación de dispersión

$$k = \frac{\omega}{c}n. \quad (22)$$

III.3. Función de Green en la Ecuación de Helmholtz

De la Ec. (21) partiremos para el desarrollo del método numérico integral. En primera instancia usaremos una técnica conocida para resolver ecuaciones diferenciales (Dennery and Krzywycki, 1996), que consiste en hallar la función de Green que sea solución al operador de la Ec. (21). Tomamos entonces la función de Green que satisface

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (23)$$

donde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo debido a una fuente de luz puntual que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' , y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la delta de Dirac definida por

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \end{cases}. \quad (24)$$

La función de Green que es solución de la Ec. (23) para nuestro sistema independiente del eje z (bidimensional) está dada entonces por (ver Apéndice B)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (25)$$

donde $H_0^{(1)}(\xi)$ es la función de Hankel de primera clase y orden cero.

III.4. Forma Integral de la Ecuación de Helmholtz

Tomando la segunda identidad de Green dada por (Dennerly and Krzywycki, 1996)

$$\int_V dV (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) = \int_S dS \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (26)$$

donde $u(\mathbf{r})$ y $v(\mathbf{r})$ son campos escalares arbitrarios definidos en un volumen V rodeado por una superficie cerrada S , y $\partial\xi/\partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\xi$ es la derivada a lo largo de la normal a la superficie dirigida hacia afuera del volumen V . En el caso particular de que los campos escalares son independientes de la variable z , la Ec. (26) es de la forma

$$\oint_S dA (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) = \oint_\Gamma dS \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (27)$$

siendo Γ el contorno cerrado que limita la superficie S . Así, si multiplicamos la Ec. (21) por $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y a la Ec. (23) por $-\Psi(\mathbf{r})$, las sumamos e integramos sobre la superficie cerrada S obtenemos

$$\oint_S dA (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = 4\pi \oint_S dA (\Psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')), \quad (28)$$

donde es posible aplicar la identidad de la Ec. (27) al lado izquierdo de la Ec. (28) y el lado derecho es la definición de una función escalón. Por lo que la Ec. (28) resulta como

$$\oint_\Gamma ds' \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) = 4\pi \Psi(\mathbf{r}') \Theta(\mathbf{r}'), \quad (29)$$

donde por convención la normal va hacia afuera y $\Theta(\mathbf{r}')$ es la función escalón dada por

$$\Theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in S \\ 0, & \xi \notin S \end{cases}. \quad (30)$$

Si consideramos la convención de que \mathbf{r} representa la posición del observador, que es donde se mide el campo, podemos entonces intercambiar las variables \mathbf{r} y \mathbf{r}' en la Ec. (29), resultando en

$$\frac{1}{4\pi} \oint_\Gamma ds \left(G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right) = \Psi(\mathbf{r}) \Theta(\mathbf{r}), \quad (31)$$

donde ahora \mathbf{r}' se desplaza sobre los contornos. Por lo tanto la Ec. (31) representa la forma integral de la ecuación de Helmholtz para campos electromagnéticos en sistemas 2D, donde se debe tener presente la ecuación de Green para medios homogéneos dada en la Ec. (25).

III.5. Discretización de Integrales

La ecuación integral que hemos obtenido (Ec. (31)) es una integral de línea cuya variable de integración es el parámetro de longitud de arco s . Debido a esto conviene representar los integrandos en términos de dicho parámetro y para hacerlo consideraremos una representación paramétrica de los puntos que forman el contorno Γ . Tomaremos las formas paramétricas de las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario $(x(s), y(s))$ y de sus derivadas de primer $(x'(s), y'(s))$ y segundo $(x''(s), y''(s))$ orden, donde por la simplicidad de los sistemas bajo estudio que todas estas funciones son continuas al menos por tramos. Además, será de utilidad nombrar las integrales de la Ec. (31) como

$$I_G(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} ds \left(G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \quad (32)$$

y

$$I_{\Psi}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} ds \left(\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right). \quad (33)$$

Para resolver numéricamente las Ecs. (32) y (33) realizamos una discretización, dividiendo el contorno Γ en N pequeños segmentos de longitud de arco Δs . De este modo, las ecuaciones anteriores pueden expresarse como

$$I_G(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \sum_n \oint_{s_n - \frac{\Delta s}{2}}^{s_n + \frac{\Delta s}{2}} ds \left(G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \quad (34)$$

y

$$I_{\Psi}(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \sum_n \oint_{s_n - \frac{\Delta s}{2}}^{s_n + \frac{\Delta s}{2}} ds \left(\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right). \quad (35)$$

Si Δs es suficientemente pequeño, entonces podemos considerar que el campo $\Psi(\mathbf{r}')$ y su derivada normal $\partial\Psi(\mathbf{r}')/\partial n'$ son aproximadamente constantes entre dos puntos consecutivos de la discretización, podremos sacarlos de las integrales, obteniendo una aproximación de las ecuaciones anteriores dadas por

$$I_G(\mathbf{r}') \approx \sum_n \Phi_n L_{mn}, \quad (36)$$

$$I_\Psi(\mathbf{r}') \approx \sum_n \Psi_n N_{mn}, \quad (37)$$

siendo

$$\Phi_n = \left. \frac{\partial\Psi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}, \quad (38)$$

$$\Psi_n = \Psi(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}, \quad (39)$$

y los elementos de matriz,

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \oint_{s_n-\frac{\Delta s}{2}}^{s_n+\frac{\Delta s}{2}} ds (G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r})), \quad (40)$$

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \oint_{s_n-\frac{\Delta s}{2}}^{s_n+\frac{\Delta s}{2}} ds \left(\frac{\partial G(\mathbf{r}'_m, \mathbf{r})}{\partial n'} \right), \quad (41)$$

donde el subíndice m indica el punto de observación y el n el punto de integración. Los elementos de matriz de las Ecs. (40) y (41) están dadas por (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011)

$$L_{mn} = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n|)\Delta s & \text{si } m \neq n \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\frac{\Delta s}{2e})\Delta s & \text{si } m = n \end{cases}, \quad (42)$$

$$N_{mn} = \begin{cases} \frac{i}{4} k \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n|} \right) H_1^{(1)}(k|\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n|)\Delta s & \text{si } m \neq n \\ \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n & \text{si } m = n \end{cases}, \quad (43)$$

donde

$$|\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n| = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}, \quad (44)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot (\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n) = -y'(s_n)(x_m - x_n) + x'(s_n)(y_m - y_n), \quad (45)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n = x'(s_n)y''(s_n) - y'(s_n)x''(s_n), \quad (46)$$

$\hat{\mathbf{n}}_n$ es la normal al contorno Γ en el punto de integración \mathbf{r}_n y $\hat{\mathbf{t}}'_n$ es la derivada del vector tangente al contorno Γ en el punto \mathbf{r}_n . Nótese que de las Ecs. (36) y (37) se puede tener una representación aproximada de la Ec. (31) dada por

$$\sum_n \Phi_n L_{mn} - \sum_n \Psi_n N_{mn} \approx \Psi(\mathbf{r})\Theta(\mathbf{r}). \quad (47)$$

Así, hemos obtenido un sistema de ecuaciones lineales en el que habrá un conjunto de estas ecuaciones por cada interface implicada, en las cuales deben considerarse las condiciones de frontera, que toman la forma (ver Apéndice A)

$$\Psi_i^{(j)} = \Psi_i^{(j')}, \quad (48)$$

$$\frac{1}{f_j} \frac{\partial \Psi_i^{(j)}}{\partial n} = \frac{1}{f_{j'}} \frac{\partial \Psi_i^{(j')}}{\partial n}, \quad (49)$$

donde, $f_j \approx 1$ en TM (polarización p) y $f_j = \varepsilon_j$ en TE (polarización s) y el índice j denota la j -ésima región en el sistema con el i -ésimo contorno Γ_i . En el caso particular de conductor perfecto se simplifica notablemente como veremos en las siguientes secciones. El sistema homogéneo obtenido para un sistema periódico puede ser representado en forma algebraica por un sistema matricial,

$$M(\mathbf{K}, \omega) X(\mathbf{K}, \omega) = 0, \quad (50)$$

donde la matriz M es función de la frecuencia ω y del vector de Bloch \mathbf{K} , el cual aparece, como veremos más adelante, gracias a que se considera un sistema con periodicidad infinita. Además M está formada por los elementos L_{mn} y N_{mn} (Ecs. (42) y (43)) la matriz X contiene las funciones fuentes Φ_n y Ψ_n . Ahora tenemos un problema de eigenvalores, en el que es posible encontrar una solución no trivial del sistema cuando el determinante del mismo es cero. Por tanto, para determinar las frecuencias que generan soluciones no triviales definimos la función

$$D(\mathbf{K}, \omega) = \ln(|\det(M)|), \quad (51)$$

que nos proporciona la relación de dispersión numérica $\omega = \omega(\mathbf{K})$, con la cual podemos calcular los modos del sistema al obtener la estructura de bandas y su correspondiente intensidad del campo electromagnético.

III.6. PCW Infinita

El método descrito hasta ahora asume que el sistema contiene varios cuerpos con los que el campo electromagnético interactúa, por lo que deben considerarse las condiciones de frontera de cada interacción. Dicho sistema está formado por dos superficies planas infinitas y un arreglo periódicamente perfecto de inclusiones cilíndricas circulares de PEC, cuyo eje de simetría va a lo largo del eje z , como se muestra en la Fig. 7. Consideremos que se tiene un periodo P en los perfiles planos, una separación entre las placas de la guía dada por b y las inclusiones cilíndricas circulares de radio r , el cual puede estar en términos de la fracción de llenado f . Con el objetivo de mostrar

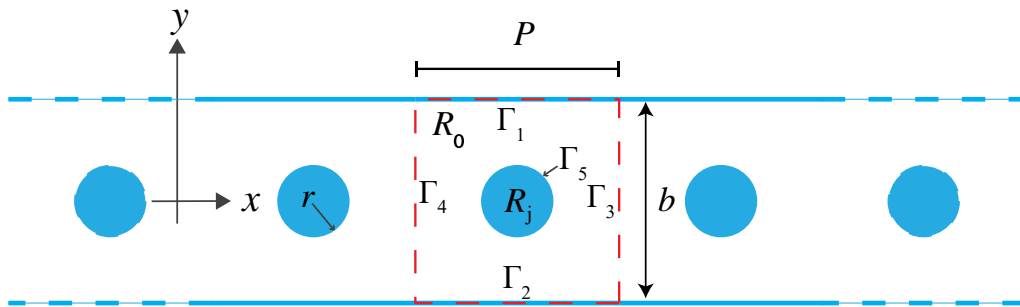


Figura 7. Diagrama de una guía de ondas infinita con inclusiones cilíndricas de conductor perfecto. Las líneas punteadas en rojo delimitan la región de la celda unitaria.

el procedimiento de usar el método integral en la guía de ondas infinita, procedemos a utilizar las Ecs. (21), (23), (31) y (25) para el sistema infinito considerando la geometría

de la celda unitaria. Así, para el j -ésimo medio tendrá una ecuación de la forma

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} ds \left(G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right) = 0, \quad (52)$$

donde se ha igualado a cero porque el vector del punto de observación \mathbf{r} no está dentro del j -ésimo medio correspondiente.

Cabe mencionar que, la geometría de la celda unitaria de la Fig. 7 puede ser descrita por la representación de puntos a lo largo de las curvas cerradas $C_I = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ y $C_{II} = \Gamma_5$ con coordenadas $x(s)$ y $y(s)$ como funciones paramétricas de la longitud de arco s y sus respectivas derivadas hasta el segundo orden, $x'(s)$, $y'(s)$, $x''(s)$ y $y''(s)$. Cada contorno Γ_j es dividido en N_j pequeños segmentos de longitud Δs . Sea $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ el número total de puntos en la celda unitaria. Además para cada Γ_j corresponde un vector normal $\hat{\mathbf{n}}_j$ que apunta hacia afuera de la celda unitaria. Por consiguiente, obtenemos las ecuaciones integrales para cada región; por ejemplo, para la región R_0

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \oint_{C_I} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right) = \\ & \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\Gamma_1} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_1} - \Psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_1} \right) + \right. \\ & \quad + \int_{\Gamma_2} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_2} - \Psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_2} \right) + \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_3} - \Psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_3} \right) + \\ & \quad + \int_{\Gamma_4} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_4} - \Psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_4} \right) + \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_5} ds \left(G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'_5} - \Psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'_5} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

donde \mathbf{r}' corresponde a cualquier punto de la curva Γ_i correspondiente a la integral en la que se encuentra. Ahora aplicando la discretización en la Ec. (53) se obtiene el

siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn}^{(0,1)} \Phi_n^{(0,1)} - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn}^{(0,1)} \Psi_n^{(0,1)} + \\
& + \sum_{n=N_1+1}^{N_1+N_2} L_{mn}^{(0,2)} \Phi_n^{(0,2)} - \sum_{n=N_1+1}^{N_1+N_2} N_{mn}^{(0,2)} \Psi_n^{(0,2)} + \\
& + \sum_{n=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} L_{mn}^{(0,3)} \Phi_n^{(0,3)} - \sum_{n=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} N_{mn}^{(0,3)} \Psi_n^{(0,3)} + \\
& + \sum_{n=N-N_5}^{N-N_5-N_4+1} L_{mn}^{(0,4)} \Phi_n^{(0,4)} - \sum_{n=N-N_5-N_4+1}^{N-N_4} N_{mn}^{(0,4)} \Psi_n^{(0,4)} + \\
& + \sum_{n=N-N_5+1}^N L_{mn}^{(0,5)} \Phi_n^{(0,5)} - \sum_{n=N-N_5+1}^N N_{mn}^{(0,5)} \Psi_n^{(0,5)} = 0,
\end{aligned} \tag{54}$$

donde $m = 1, 2, \dots, N$. El primer índice superior entre paréntesis se refiere a la región y el segundo al perfil del contorno correspondiente.

Notemos que las incógnitas son Ψ_n y Φ_n , de manera que en el sistema se tienen $2N$ incógnitas y N ecuaciones; es decir la matriz asociada al sistema no es una matriz cuadrada. Ahora consideraremos las condiciones de frontera entre cada interfaz que separa el medio PEC y el medio que lo rodea, entonces para los perfiles Γ_1 y Γ_2 se tiene que:

para polarización TE

$$\Psi_n^{(0,1)} = \Psi_n^{(0,2)} = 0 \tag{55}$$

y para polarización TM

$$\Phi_n^{(0,1)} = \Phi_n^{(0,2)} = 0. \tag{56}$$

Es decir el campo o su derivada normal son cero en la superficie de un conductor perfecto para polarización TE o TM, respectivamente.

Por otro lado, debido a la periodicidad en el eje x del sistema infinito considerado, es posible hacer uso del teorema de Bloch, el cual establece que el campo Ψ se puede escribir como el producto de una onda plana y una función periódica $u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r} + \mathbf{R})$, donde \mathbf{R} es un vector de traslación en la red:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{r}), \tag{57}$$

donde \mathbf{K} es el vector de Bloch y en este sistema particular $\mathbf{R}=(P,0)$. La Ec. (57) nos permitirá relacionar las fuentes de los perfiles Γ_3 y Γ_4 de donde obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\Psi_n^{(0,4)} = e^{-iK_x P} \Psi_n^{(0,3)} \quad (58)$$

y

$$\Phi_n^{(0,4)} = -e^{-iK_x P} \Phi_n^{(0,3)}. \quad (59)$$

De manera que finalmente obtenemos un sistema de N ecuaciones y N incógnitas. Sustituyendo las Ecs. (55), (56), (58) y (59) en la Ec. (54) obtenemos (Mendoza-Suárez and Villa-Villa, 2006);

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{N_1} L_{mn}^{(0,1)} \Phi_n^{(0,1)} + \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn}^{(0,2)} \Phi_n^{(0,2)} \right) (1 - \delta_{l2}) \\ & - \left(\sum_{n=1}^{N_1} N_{mn}^{(0,1)} \Psi_n^{(0,1)} + \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn}^{(0,2)} \Psi_n^{(0,2)} \right) (1 - \delta_{l1}) \\ & + \sum_{n=1}^{N_3} [L_{mn}^{(0,3)} - e^{-iK_x P} L_{mn}^{(0,4)}] \Phi_n^{(0,3)} - \sum_{n=1}^{N_3} [N_{mn}^{(0,3)} + e^{-iK_x P} N_{mn}^{(0,4)}] \Psi_n^{(0,3)} \\ & + \left(\sum_{n=1}^{N_5} L_{mn}^{(0,5)} \Phi_n^{(0,5)} \right) (1 - \delta_{l2}) - \left(\sum_{n=1}^{N_5} N_{mn}^{(0,5)} \Psi_n^{(0,5)} \right) (1 - \delta_{l1}) = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

con $m = 1, 2, \dots, N$ en la Ec. (60); además $l = 1$ para polarización TE y $l = 2$ para polarización TM. Por consiguiente, el sistema puede ser expresado en términos de un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas como la Ec. (50), que de donde usando la Ec. (51) podemos calcular sus mínimos, que serán los modos del sistema y así, obtener las fuentes y la intensidad del campo electromagnético.

III.7. PCW Finita

El método numérico creado hasta el momento no sólo nos permite el cálculo de estructuras de bandas, sino que además podemos calcular la intensidad del campo corre-

spondiente a modos electromagnéticos dentro de la celda unitaria. Sin embargo, en la realidad los sistemas tienen longitud finita, razón por la que es de suma importancia poder tratar los problemas físicos reales. Como parte de este trabajo se implementó un método numérico capaz de calcular la respuesta óptica mediante el cálculo de la reflectancia, la transmitancia y el campo esparcido por una PCW finita que contiene inclusiones de PEC. El sistema está formado por dos placas paralelas y un arreglo de diez inclusiones cilíndricas, por lo que, el problema se considera como un sistema de M cuerpos como se ve en la Fig. 8.

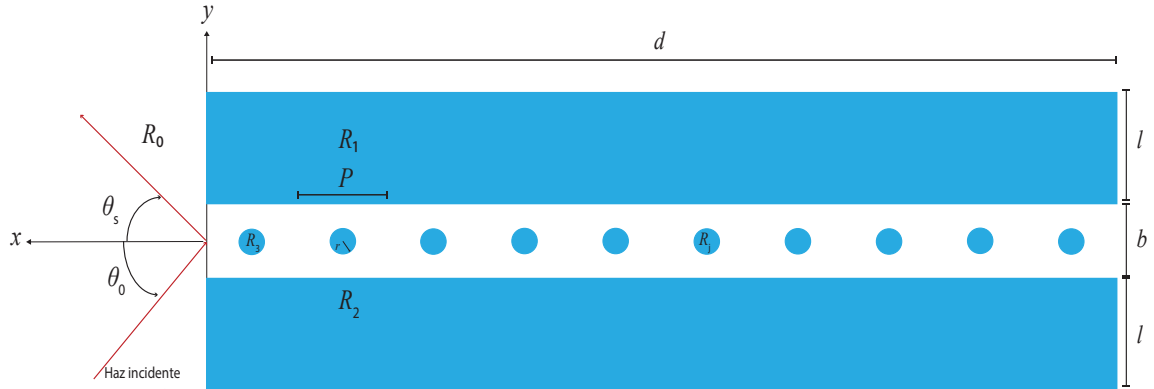


Figura 8. Diagrama de una guía de ondas finita con inclusiones cilíndricas de conductor perfecto.

La región R_0 se caracteriza por un índice de refracción $n_0(\omega) = \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$ y las regiones desde 1 a M están definidas por las curvas Γ_j y se caracterizan por los correspondientes índices de refracción $n_j(\omega) = \sqrt{\varepsilon_j(\omega)\mu_j(\omega)}$, que involucran las propiedades de los materiales que se dan en términos de la permeabilidad magnética $\mu_j(\omega)$ y de la permitividad eléctrica $\varepsilon_j(\omega)$.

Como ya se ha descrito el procedimiento del método integral, ahora utilizaremos las

Ecs. (21), (23), (31) y (25) de tal modo que podemos expresar el campo en R_0 como:

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds. \quad (61)$$

En esta expresión, $\Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r})$ representa el campo incidente y la suma de las integrales representa el campo esparcido.

Siguiendo los mismos pasos, para la j -ésima región, el campo $\Psi^{(j)}(\mathbf{r})$ puede expresarse como:

$$\Psi^{(j)}(\mathbf{r})\Theta_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds, \quad (62)$$

donde $\Theta(\mathbf{r}) = 1$ si \mathbf{r} está dentro del medio j -ésimo o $\Theta(\mathbf{r}) = 0$ en caso contrario. Las Ecs. (61) y (62) forman un sistema de ecuaciones con las que se puede obtener el campo total en cualquier parte.

Para encontrar el campo esparcido usando el segundo término del lado derecho de la Ec. (61), es necesario encontrar una forma de obtener las funciones fuente a partir de las ecuaciones integrales. Para esto, se hace una aproximación del punto de observación en la región 0 a la superficie de la j -ésima región. Por tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds \quad (63)$$

y

$$\Psi^{(j)}(\mathbf{r})\Theta_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[\frac{1}{f_{oj}} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] \delta_{ij} ds. \quad (64)$$

En este caso δ_{ij} es la delta de Kronecker, $f_{oj} = \mu_0/\mu_j$ o $f_{lm} = \varepsilon_l/\varepsilon_m$ para polarización TE o TM, respectivamente, $i = 1, 2, \dots, M$. Nuevamente se hace una discretización sobre la geometría del sistema. En nuestro caso las paredes de la guía son consideradas de PEC, de manera que las Ecs. (63) y (64) logran simplificarse de manera análoga

al caso infinito que depende de la polarización que se desee analizar (Mendoza-Suárez *et al.*, 2007).

III.7.1. Campo incidente

Para tratar el problema de la PCW finita con el método previamente descrito es necesario hacer ciertas consideraciones. Como el tamaño del sistema es finito, para evitar efectos de borde se utilizará un haz Gaussiano incidente. La longitud horizontal total del sistema $L = 2l + b$ y l lo suficientemente grande comparado con b , para descartar los efectos de borde (ver Fig. 8). Además, el campo incidente se expresa en términos de su espectro angular (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013b)

$$\Psi_{inc}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} A(q, k) \exp[iqx - \alpha_0(q)y] dq, \quad (65)$$

donde $\alpha_0(q) = [(n_0(\omega/c))^2 - q^2]^{1/2}$, además

$$A(q, k) = \Psi_0 \sqrt{\pi} \exp[-g^2(q - k)^2/4 + i\alpha_0(q)d], \quad (66)$$

siendo Ψ_0 una constante con unidades apropiadas. Para calcular la potencia incidente total a través del plano $L_y L_z$, se emplea el vector de Poynting \mathbf{S} , el cual proporciona la dirección y magnitud del flujo y energía por unidad de tiempo, dado por

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (67)$$

La parte real de \mathbf{S} proporciona una medida de la irradiancia. Para polarización TE la componente del vector de Poynting a lo largo del eje y es

$$S_y = \frac{c}{8\pi} \text{Re}\{H_x^* E_z\} = \frac{c}{8\pi\omega} \text{Re}\left\{-iE_z \frac{\partial E_z}{\partial y}\right\}. \quad (68)$$

Mientras que para polarización TM se tiene que

$$S_y = \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)} \text{Re}\left\{-iH_z \frac{\partial H_z}{\partial y}\right\}. \quad (69)$$

De modo que la potencia incidente total es

$$P_{inc}(k) = L_z \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha_0(q) \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)} |\Psi_0|^2 = L_z \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha_0(q) \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)}, \quad (70)$$

donde se ha considerado que $(\omega/c) \gg 1$.

III.7.2. El campo esparcido

El campo esparcido es representado por el segundo término de la Ec. (61). Para obtener una expresión para los campos reflejado y transmitido se usa una expansión en términos de ondas planas para la función de Green (Maradudin *et al.*, 1990) dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \exp\{iq(x-x') + i\alpha_0(q)|y-y'|\}, \quad (71)$$

que nos permite encontrar el campo esparcido de la forma

$$\begin{aligned} \Psi_{sc}^{(0)}(\mathbf{r}) = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[\frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} [-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}] \Psi^0(s) - \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \frac{\partial \Psi^0(s)}{\partial n} \right] \\ & \times \exp\{iq(x-x') + i\alpha_0(q)|y-y'(s)|\} ds, \end{aligned} \quad (72)$$

donde $\mathbf{Q} = (q, \pm\alpha_0(q))$. Considerando la geometría de la Fig. 8 y la Ec. (72), para $x > d$ se tiene que el campo transmitido es

$$\Psi_{sc}^{(0)+}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^+(q, k) \times \exp\{iqx + i\alpha_0(q)y\}, \quad (73)$$

donde

$$S^+(q, k) = \frac{-i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[[i\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}] \Psi^0(s) + \frac{\partial \Psi^0(s)}{\partial n} \right] \exp\{-i[qx' + \alpha_0(q)y'(s)]\} ds, \quad (74)$$

y para el caso $x < 0$, el campo reflejado tiene la forma

$$\Psi_{sc}^{(0)-}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^-(q, k) \times \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\}, \quad (75)$$

con

$$S^-(q, k) = \frac{-i}{2\alpha_0(q)} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[[i\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}] \Psi^0(s) + \frac{\partial \Psi^0(s)}{\partial n} \right] \exp\{-i[qx' - \alpha_0(q)y'(s)]\} ds. \quad (76)$$

Por tanto el campo total para la región $x < 0$ es

$$\Psi_{tot}^{(0)-}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S^-(q, k) \times \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\} \quad (77)$$

y para la región $x > d$ es de la forma

$$\Psi_{tot}^{(0)+}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} [A(q, k) + S^+(q, k)] \times \exp\{iqx - i\alpha_0(q)y\}, \quad (78)$$

donde $S^\pm(q, k)$ es el espectro angular del campo esparcido.

Para el caso de reflexión, $S^-(q, k)$ y $q < n_0(\omega/c)$, las componentes del vector de onda son $q = n_0(\omega/c)\sin\theta_r$ y $\alpha_0(q) = n_0(\omega/c)\cos\theta_r$. Para el caso de transmisión $S^+(q, k)$ y $q < n_0(\omega/c)$, las componentes del vector de onda son $q = n_0(\omega/c)\sin\theta_t$ y $\alpha_0(q) = n_0(\omega/c)\cos\theta_t$.

De las Ecs. (68), (69), (73) y (75) se obtiene la **potencia esparcida**, la cual está dada en términos del espectro angular,

$$P_{sc}^\pm(k) = \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)} \int dy \operatorname{Re} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq'}{2\pi} S^\pm(q, k) \times \exp\{i(q - q')y \pm i(\alpha_0(q) - \alpha_0^*(q'))x\} \quad (79)$$

$$= \pm L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon(\omega)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^\pm(q, k)|^2. \quad (80)$$

De las Ecs. (70) y (80) podemos calcular el coeficiente de reflexión diferencial

$$\left(\frac{\partial R}{\partial k} \right) = \frac{P_{sc}^\pm(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{F(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^\pm(q, k)|^2, \quad (81)$$

donde

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g \alpha_0(k) |\Psi_0|^2. \quad (82)$$

Finalmente se obtiene la Reflectancia R y la Transmitancia T , como:

$$R(k) = \frac{P_{sc}^-(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{F(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S^-(q, k)|^2, \quad (83)$$

$$T(k) = \frac{P_{sc}^+(k)}{P_{inc}(k)} = \frac{1}{F(k)} \int_{-n_0(\omega/c)}^{n_0(\omega/c)} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |A(q, k) + S^+(q, k)|^2. \quad (84)$$

En la Ec. (84) aparece el campo incidente debido a que el campo en la región 0 es el resultado de la interferencia de los campos incidente y esparcido.

III.8. Verificación de los métodos numéricos implementados

Se verifica la fiabilidad de los métodos numéricos implementados para los sistemas infinito y finito considerados en este trabajo de investigación.

III.8.1. Verificación del método numérico en el sistema infinito

Con la finalidad de ver la funcionalidad del método de la ecuación integral en sistemas electromagnéticos infinitos, comparamos los resultados analíticos con los obtenidos numéricamente para el caso particular de la PCW infinita con paredes planas y sin inclusiones (ver Fig. 7 con $r = 0$). La relación de dispersión en este caso es (Luna-Acosta *et al.*, 1996b)

$$\omega(K_x) = c \sqrt{\left(K_x + \frac{2\pi n}{P}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{P}\right)^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ y } m = 1, 2, \dots \quad (85)$$

La relación de dispersión dada por esta ecuación es similar a la de una placa de cristal fotónico, donde el espesor finito en la dirección y da un comportamiento diferente del presentado por el sistema infinito cuando comparamos este sistema con el caso de los cristales fotónicos unidimensionales. Consideremos el siguiente análisis utilizando

esta ecuación. El lado derecho de Ec. (85) tiene dos términos dentro del símbolo de raíz cuadrada. La primera representa la estructura de la banda en la primera zona Brillouin². Este término depende del vector Bloch K_x (en este caso es unidimensional en la dirección x) y un entero n . El segundo término está presente porque el sistema es finito en la dirección y , y depende del entero m . En este caso, la frecuencia depende de una variable continua y dos variables discretas. Un cristal fotónico unidimensional tiene una relación de dispersión que depende sólo de una variable continua (vector de Bloch) y una variable discreta; esto se debe a que no hay restricción en la dirección y . Sin embargo, en el caso de los cristales fotónicos bidimensionales la frecuencia depende de dos variables continuas (las dos componentes del vector de Bloch) y dos variables discretas. Esto conduce a diferentes fenómenos físicos que no pueden estar presentes en nuestro sistema, ya que tenemos un vector de Bloch con una componente en lugar de dos.

En la Fig. 9 con círculos azules, mostramos la estructura de bandas calculada con el método de la ecuación integral, la cual está en términos de una frecuencia reducida $\omega_r = \left(\frac{P}{2\pi c}\right)\omega$ y un vector de Bloch reducido $-\frac{\pi}{P} \leq k_r \leq \frac{\pi}{P}$, con $P = 2\pi$ y $b = 3$ en unidades adimensionales (u.a.). Además, la estructura de bandas analítica calculada a partir de la Ec. (85) se encuentra en la misma figura representada por puntos rojos.

²Definida por una celda primitiva de la red recíproca en el dominio de frecuencias. Su importancia radica en la descripción de las ondas que se propagan en un medio periódico y que pueden ser descritas a partir de ondas de Bloch dentro de la zona de Brillouin.

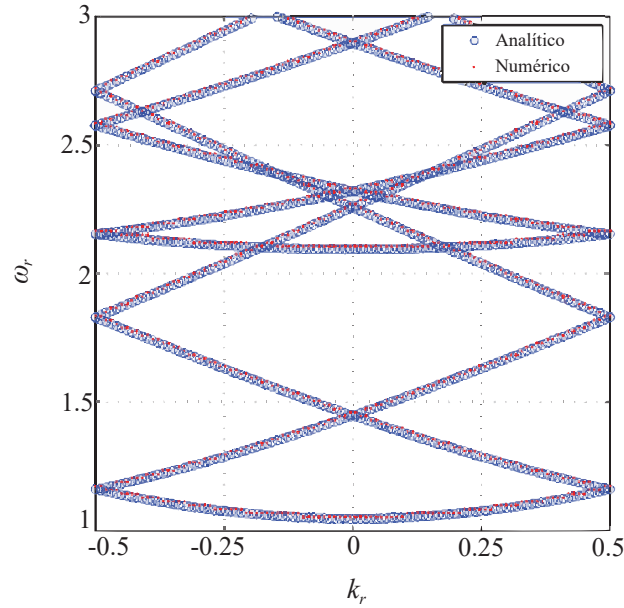


Figura 9. Estructura de bandas para una PCW formada por dos paredes planas y paralelas. Comparación del modelo analítico (círculos) con el numérico (puntos).

III.8.2. Verificación del método numérico en el sistema finito

Se realiza una comparación entre la estructura de bandas para un PCW de paredes planas con inclusiones cilíndricas de PEC y la reflectancia para un sistema finito análogo que es iluminado por un haz Gaussiano a incidencia normal. La Fig. 10 (a) muestra la estructura de bandas en términos de la frecuencia reducida ω_r , donde $-\frac{\pi}{P} \leq k_r \leq \frac{\pi}{P}$, $P = 2\pi$, $b = \pi$ y el radio de las inclusiones es $r = 1.1772$. En el caso de la guía finita se toma una longitud $d = 20\pi$ (10 periodos) y un ancho de las placas $l = 30$, que bajo estos parámetros la Fig. 10 (b) muestra la respuesta óptica del sistema. Al comparar ambas gráficas se tiene que la reflectancia $R \approx 1$ en las regiones delimitadas por las bandas prohibidas, por lo que los modos discretos corresponden en gran medida con los mínimos ω_r de la reflectancia. Los métodos numéricos utilizados para calcular la estructura de bandas y la reflectancia son independientes, aunque ambos hacen uso del teorema de Green. Las gráficas anteriores nos permiten constatar que el uso del

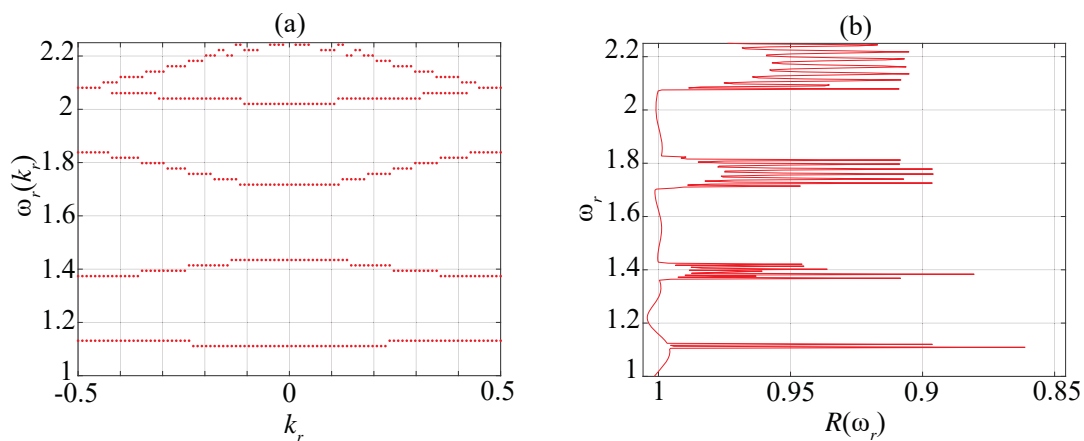


Figura 10. (a) Estructura de bandas para una PCW formada por dos paredes planas y paralelas con inclusiones cilíndricas bajo polarización TE. (b) Respuesta óptica de una PCW finita al considerar un haz Gaussiano que incide de forma normal sobre la guía y con polarización TE. Ambas gráficas muestran una buena correspondencia entre ambos sistemas.

método numérico integral es válido para calcular la respuesta óptica de los sistemas considerados en este trabajo.

Capítulo IV

RESULTADOS

En esta sección mostraremos los resultados numéricos más sobresalientes obtenidos para cada sistema considerado. En estos cálculos es común introducir cantidades adimensionales, por lo que nuestros resultados serán expresados en términos de una frecuencia reducida dada por $\omega_r = (P/2\pi c)\omega$ y un vector de Bloch reducido dado por $k_r = (P/2\pi)k = 0$. Para la obtención de resultados confiables en el caso de altas frecuencias, es necesario utilizar intervalos de discretización Δs pequeños comparados con las dimensiones del sistema.

IV.1. Función de autocorrelación en sistemas electromagnéticos

Una herramienta matemática importante para la interpretación de caos en sistemas electromagnéticos es la función de autocorrelación (Doya *et al.*, 2002; Luna-Acosta *et al.*, 1996b). La función de autocorrelación para un patrón de intensidad electromagnética, $I(\mathbf{r})$, en la celda unitaria se define como:

$$ACF_j = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{(I(\mathbf{r}_i) - \mu)(I(\mathbf{r}_{i-j}) - \mu)/N_p}{\sigma^2}, \quad (86)$$

con

$$\mu = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{I(\mathbf{r}_i)}{N_p} \quad (87)$$

y

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{(I(\mathbf{r}_i) - \mu)^2}{N_p}, \quad (88)$$

donde μ es el valor medio de I y σ^2 es la varianza; N_p es el número de puntos de muestreo con coordenadas $(x_i, y(x_i))$, siendo para este caso $y(x)$ fija, con $0 < x < P$ en el sistema infinito y $0 < x < 10P$ en el sistema finito y el subíndice j indica el valor de la ACF respecto al j -ésimo punto coordenado. De esta manera, la autocorrelación se calculó utilizando puntos localizados en la sección media superior de la guía. Las autocorrelaciones de los patrones de intensidad que mostraremos en este trabajo resultan de las correlaciones entre los valores de la propia intensidad $I(\mathbf{r})$. Una cantidad que podría ser aún más importante es la longitud de correlación l_c , la cual se define como la desviación estándar de la autocorrelación espacial. Para sistemas donde se presenta el fenómeno de caos la longitud de correlación tiende a cero (Sugihara and May, 1990).

IV.2. PCW infinita con inclusiones cilíndricas de PEC

Primeramente consideraremos el sistema de la Fig. 11, el cual está formado por dos superficies planas que contienen un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas circulares de radio $r = \sqrt{fPb/\pi}$, el cual está en términos de la fracción de llenado f , la separación entre las superficies planas b y el periodo P . Además, el programa computacional requirió del protocolo de paralelización MPI¹ para reducir el tiempo de cómputo para

¹Por sus siglas en inglés *Message Passing Interface*. Es una especificación para programación de paso de mensajes, que proporciona una librería de funciones Fortran que son empleadas en los programas

la obtención de los resultados. Para calcular la distribución de campo dentro de la

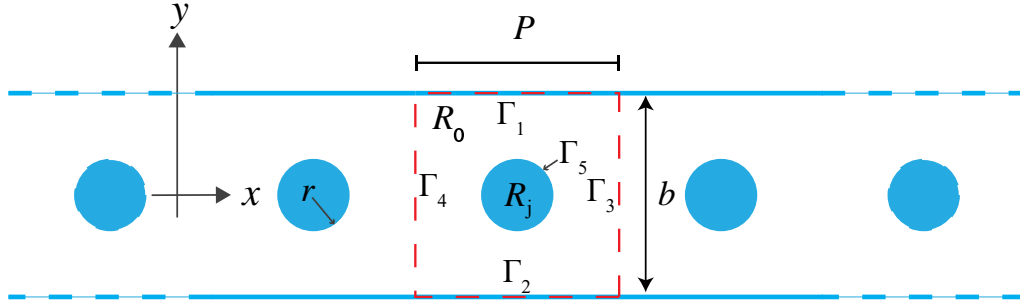


Figura 11. Diagrama de una PCW infinita formada por paredes planas y paralelas que envuelven un arreglo periódico de inclusiones circulares de conductor perfecto.

celda de unitaria de la Fig. 11, para un modo resonante en un punto dado ($k_r = 0, \omega_r$), consideramos el siguiente procedimiento en dos pasos:

1. Encontramos numéricamente las funciones de la fuente resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneas. Es decir, obtenemos la función determinante $D(k_r = 0, \omega_r)$ previamente descrita y tomamos sus mínimos locales para obtener las funciones fuente.
2. Sustituimos las funciones fuente para obtener el campo $\Psi(\mathbf{r})$ en cualquier punto de la celda unitaria. Con éste obtenemos fácilmente la intensidad $I(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$.

Posteriormente obtuvimos las ACFs y la longitud de correlación l_c .

A continuación se presentarán los resultados obtenidos para ambas polarizaciones.

IV.2.1. Polarización TE

Para este trabajo, en primera instancia se consideró la polarización TE (o polarización s). Los resultados mostrados a continuación son obtenidos considerando los siguientes

para comunicar datos entre procesos.

parámetros. Se trata de una guía que consideraremos con una separación entre las placas $b = \pi$, con fracción de llenado $f = 0.1$, periodicidad $P = 2\pi$ y radio de las inclusiones $r = 0.79$ para $\Delta s = 1/70$. Además, la función determinante $D(k_r = 0, \omega_r)$ fue calculada para un número de frecuencias dado por $n_\omega = 400$, que en el primer caso nos da un mínimo local a la frecuencia $\omega_r = 1.1854$. En la Fig. 12(a) se muestra la intensidad del campo electromagnético, $I(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$, obtenido para esta frecuencia. En la Fig. 12(b) se muestra la función de autocorrelación calculada a partir de $N_p = 619$ puntos de muestreo y $y(x) = 2.5$. A partir de la función se obtiene la longitud de correlación de $l_c = 0.3838$. Consideremos ahora otro mínimo local dado por la frecuencia de $\omega_r = 90.0751$. En la Fig. 12(c) se muestra la intensidad del campo electromagnético con su respectiva función de autocorrelación (Fig. 12(d)), obteniendo una longitud de correlación de $l_c = 0.0831$. Otro más es obtenido para $\omega_r = 140.0501$, mostrando el campo resultante en la Fig. 12(e) y mostrando en la Fig. 12(f) su respectiva ACF y $l_c = 0.0706$.

Posteriormente calculamos el campo para frecuencias superiores, comenzando por la de $\omega_r = 240.0290$. En la Fig. 13(a) se muestra la intensidad del campo electromagnético calculada para esta frecuencia y en la Fig. 13(b), se muestra la ACF junto con su longitud de correlación dada $l_c = 0.0596$. Finalmente la mayor frecuencia obtenida con estos parámetros es de $\omega_r = 640.0681$ con su campo mostrado en la Fig. 13(c) y su ACF y $l_c = 0.0562$ en Fig. 13(d). Noté que, con el aumento de ω_r , se tiene que, $l_c \rightarrow 0$. Sin embargo, llega un punto que $l_c \rightarrow 0$ muy lentamente.

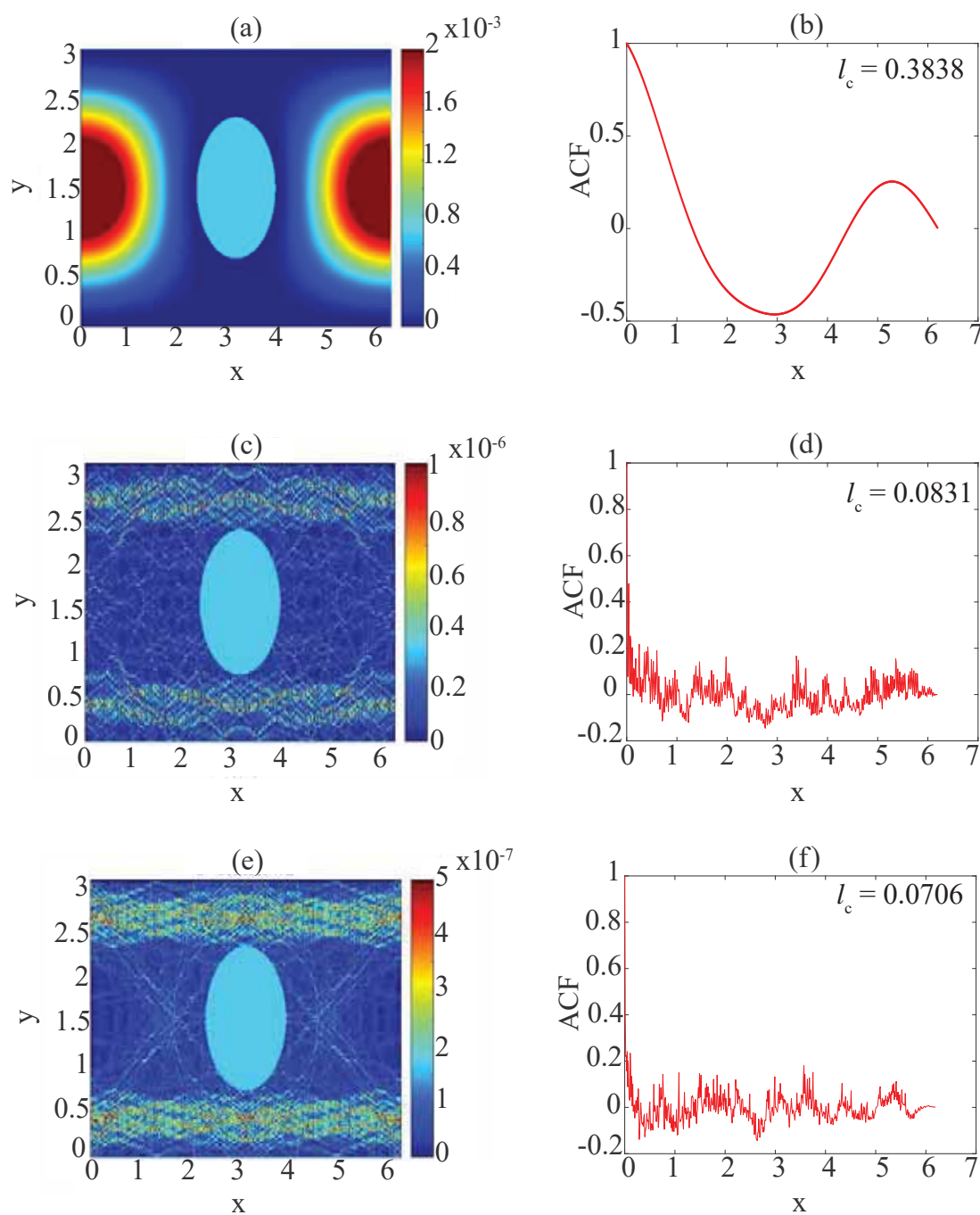


Figura 12. Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 1.1854$, (c) $\omega_r = 90.0751$ y (e) $\omega_r = 140.0501$. En (b), (d) y (f) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente. En todos los casos se tiene que $k_r = 0$ para polarización TE.

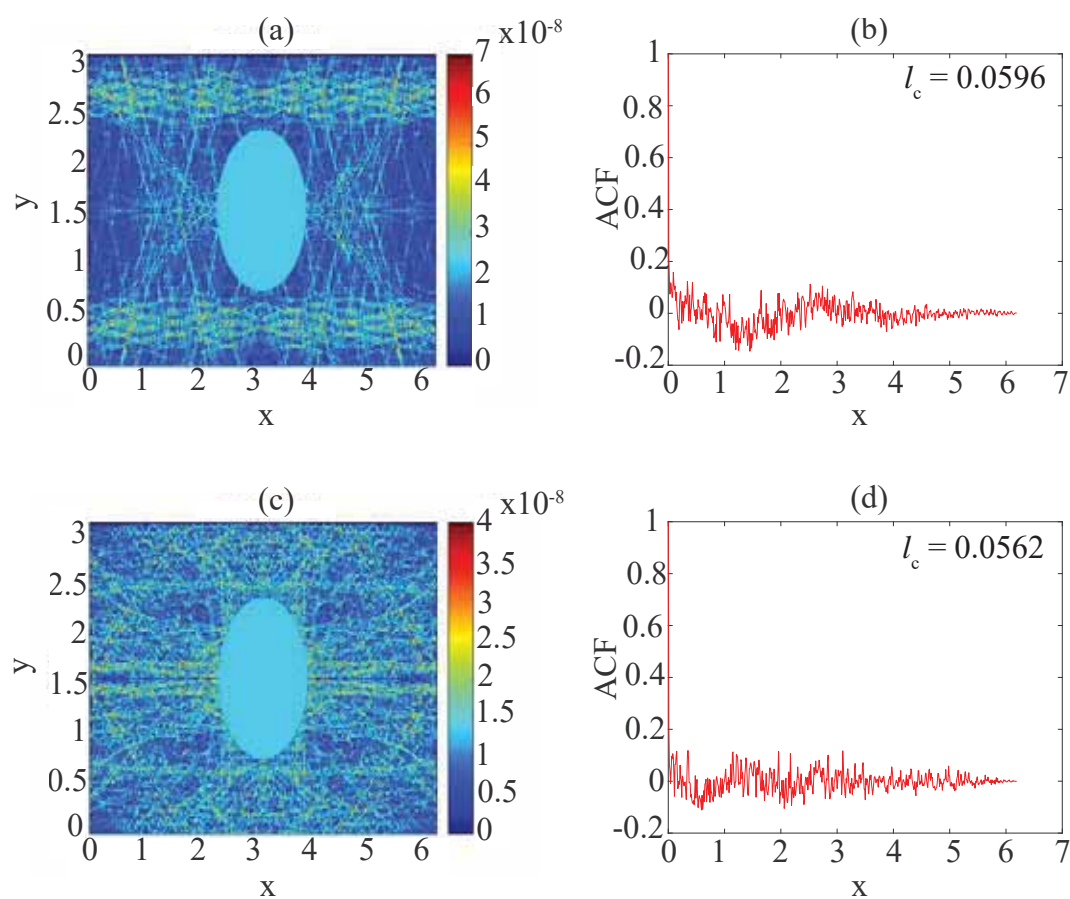


Figura 13. Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 240.0290$ y (c) $\omega_r = 640.0681$. En (b) y (d) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a) y (c), respectivamente. En todos los casos se tiene que $k_r = 0$ para polarización TE.

IV.2.2. Polarización TM

Continuando con los resultados obtenidos en la guía de ondas infinita, consideraremos ahora la polarización TM (o polarización p). Usando los mismos parámetros que en la polarización TE: $b = \pi$, $f = 0.1$, $P = 2\pi$ y $r = 0.79$ para $\Delta s = 1/70$, $n_\omega = 400$, $N_p = 619$ y $y(x) = 2.5$ pero ahora se considera el campo electromagnético TM. Obtenemos así, mínimos locales en las frecuencias $\omega_r = 1.0726$, $\omega_r = 90.01503$, $\omega_r = 140.2355$, $\omega_r = 240.0892$ y $\omega_r = 640.1614$. En las Figs. 14(a), (c), (d) y 15 (a), (c) se muestran las intensidades del campo electromagnético para las frecuencias previamente mencionadas. En las Figs. 14(b), (d), (f) y 15 (b), (d) se muestra las funciones de autocorrelación calculadas de manera similar que en la polarización TE, obteniendo, las longitudes de correlación de $l_c = 0.3909$, $l_c = 0.0819$, $l_c = 0.0759$, $l_c = 0.0641$ y $l_c = 0.0620$, para cada modo de vibración respectivamente. De donde notamos que, la ACF, así como la longitud de correlación l_c decaen conforme la frecuencia es mayor. También hay que hacer mención de que, los modos del campo son muy semejantes entre ambas polarizaciones. Además en ambas polarizaciones con el aumento de ω_r , se tiene que los patrones de campo obtenidos entre ambas polarizaciones son muy semejantes, lo cual es de esperarse, ya que para frecuencias altas se tiene el límite de la óptica geométrica. En este límite nuestro sistema sería análogo a los billares de Sinai, que presentan caos clásico.

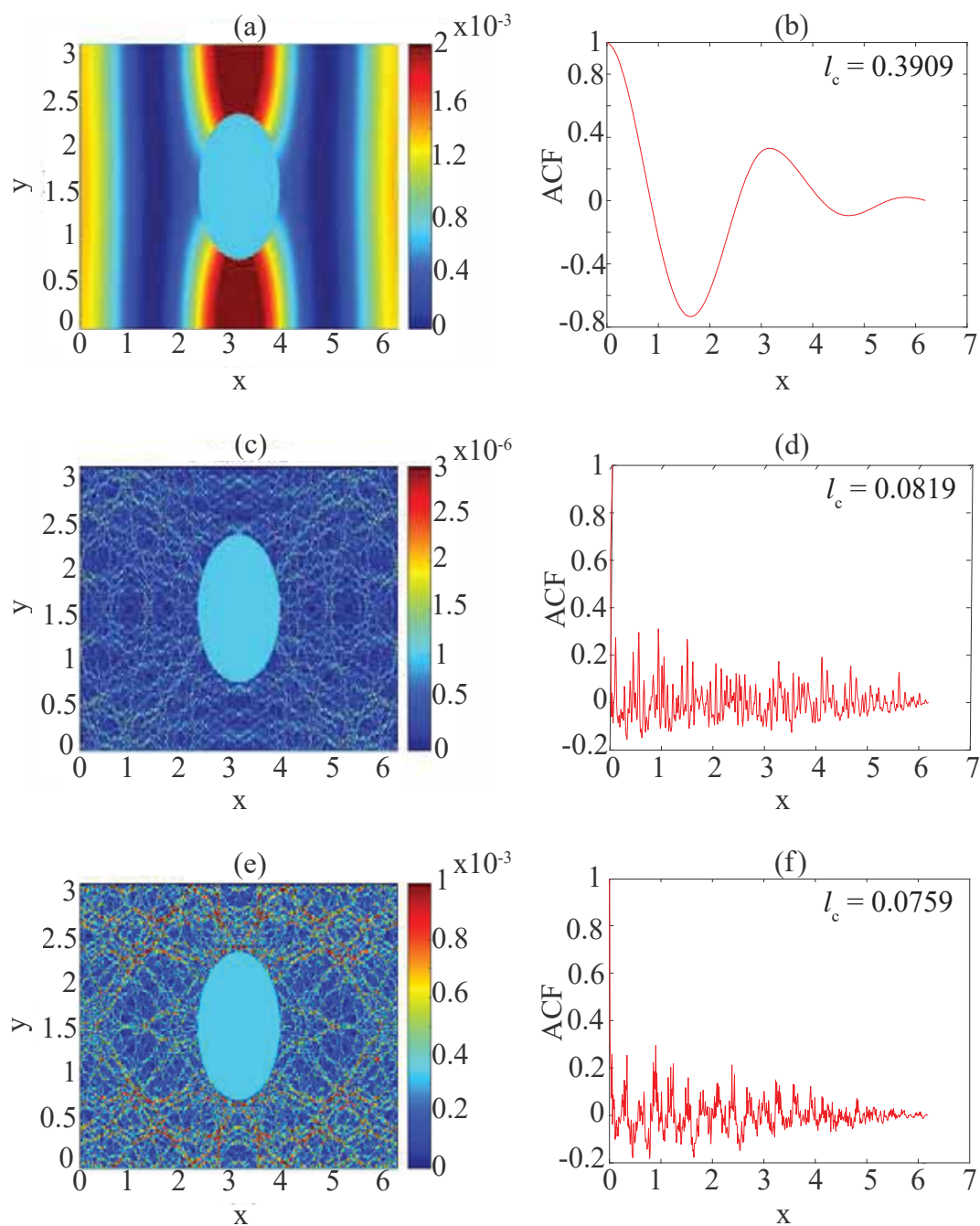


Figura 14. Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 1.0726$, (c) $\omega_r = 90.01503$ y (e) $\omega_r = 140.2355$. En (b), (d) y (f) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente. En todos los casos se tiene que $k_r = 0$ para polarización TM.

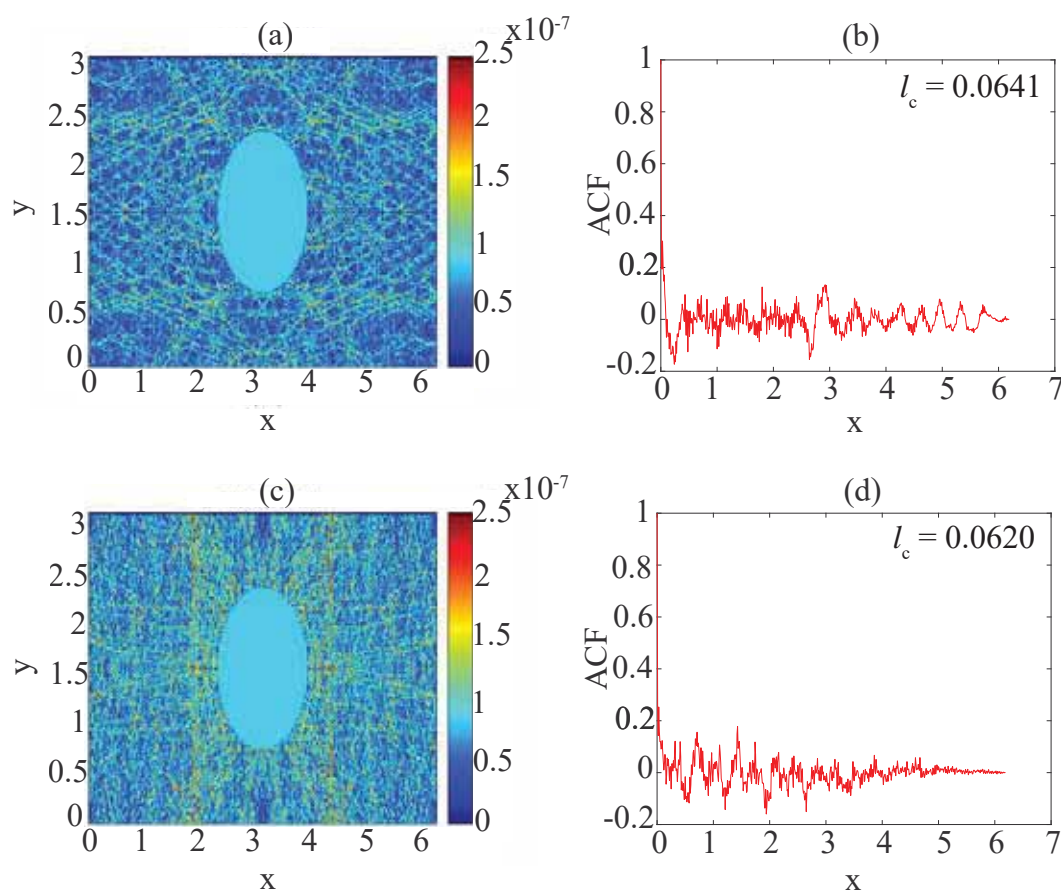


Figura 15. Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 240.0892$ y (c) $\omega_r = 640.1614$. En (b) y (d) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a) y (c), respectivamente. En todos los casos se tiene que $k_r = 0$ para polarización TM.

IV.3. PCW finita con inclusiones cilíndricas de PEC

En el sistema de la PCW finita (ver Fig. 16) se consideraron 10 inclusiones y las paredes de la guía tienen un grosor $l = 30$ para una mayor fiabilidad en los datos obtenidos. Además, se considera un haz Gaussiano a incidencia normal, es decir, $\theta_0 = 0^\circ$. Consideramos que la separación entre las placas es de $b = 4\pi$ y al igual que el sistema infinito, se tiene el radio en función de la fracción de llenado $r = \sqrt{fPb/\pi}$. Además, para calcular los patrones del campo dentro de la guía y en una región cercana

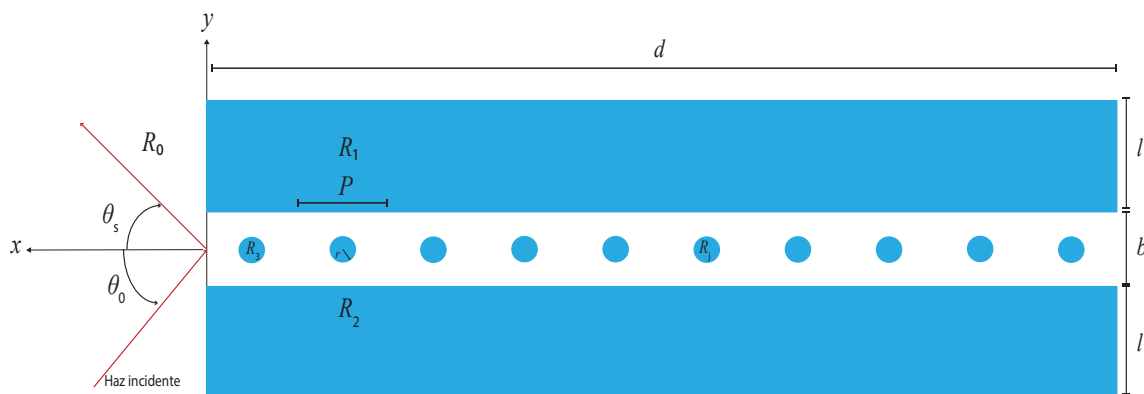


Figura 16. Diagrama de guía de ondas finita con paredes planas e inclusiones cilíndricas de conductor perfecto.

a la entrada y salida del haz incidente, se toman los modos donde ω_r tiene asociada una reflectancia distinta de 1, con ello se obtiene el campo $\Psi(\mathbf{r})$ en cualquier punto del sistema. Con éste obtenemos fácilmente la intensidad $I(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$. Posteriormente obtuvimos las ACFs y la l_c .

IV.3.1. Polarización TE

Los resultados mostrados a continuación son obtenidos considerando los siguientes parámetros: separación entre las placas $b = 4\pi$, fracción de llenado $f = 0.1$, periodicidad

dad $P = 2\pi$ y radio de las inclusiones $r = 0.12$ para $\Delta s = 1/70$. La respuesta óptica es calculada a partir del mínimo local de la reflectancia, dada por cierto valor de ω_r . Así, la reflectancia fue calculada para distintos intervalos con un número de frecuencias dado por $n_\omega = 400$, que en el primer caso nos da un mínimo local a la frecuencia $\omega_r = 0.7744$. En la Fig. 17(a) se muestra la intensidad del campo electromagnético, obtenido para esta frecuencia. En la Fig. 17(b) se muestra la función de autocorrelación calculada a partir de $N_p = 6279$ puntos de muestreo y similarmente se trató de que $y(x) = 2.5$ obteniendo la longitud de correlación de $l_c = 0.2867$. Consideremos ahora otro mínimo local dado por la frecuencia de $\omega_r = 50.6902$. En la Fig. 17(c) se muestra la intensidad del campo electromagnético con su respectiva ACF ilustrada en la Fig. 17(d), obteniendo una longitud de correlación de $l_c = 0.1326$. Otro más es obtenido para $\omega_r = 100.5368$, mostrando el campo resultante en la Fig. 17(e) y su respectiva ACF y $l_c = 0.0996$. De acuerdo con los resultados presentados, se puede observar que en el sistema infinito a grandes frecuencias los patrones de la intensidad del campo son similares en ambas polarizaciones. Además, en la mayor parte de los modos se tienen frecuencias similares en ambas polarizaciones. Mientras que, en el sistema finito las frecuencias mayores además de requerir un mayor tiempo de cómputo, se requiere un paso de discretización menor, también muestran unos patrones de la intensidad del campo similares en las frecuencias mayores obtenidas. Además de las longitudes de correlación obtenidas de las ACFs, en ambos sistemas decrecen, esto puede ser interpretado como un indicio del fenómeno de caos electromagnético en los sistemas propuestos bajo estudio.

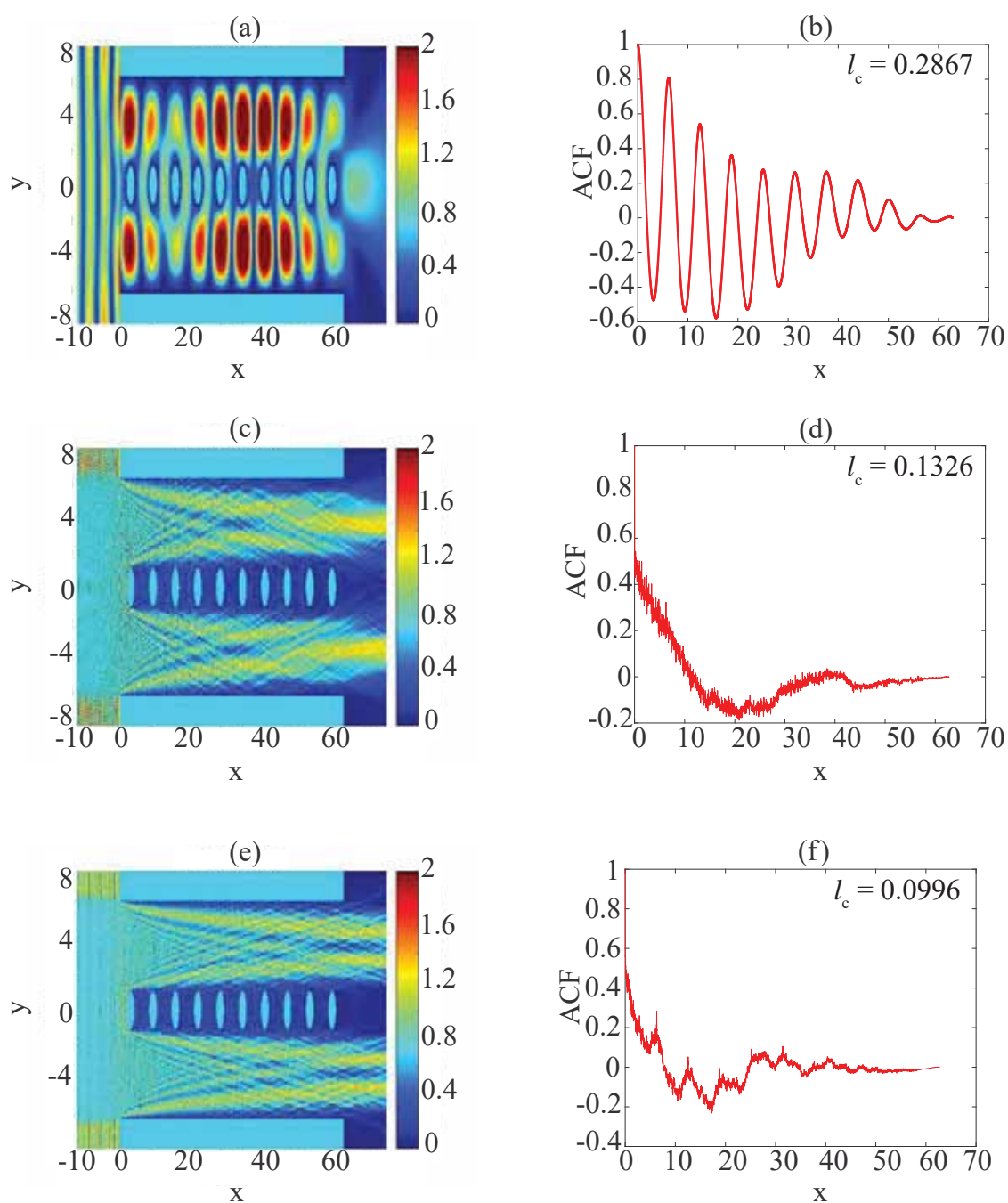


Figura 17. Intensidades del campo electromagnético calculadas para (a) $\omega_r = 0.7744$, (c) $\omega_r = 50.6902$ y (e) $\omega_r = 100.5368$. En (b), (d) y (f) se muestran las correspondientes funciones de autocorrelación calculadas a partir de (a), (c) y (e), respectivamente. En todos los casos se tiene polarización TE.

Capítulo V

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos mostrado un estudio teórico y numérico de la intensidad del campo electromagnético dentro una guía de ondas de cristal fotónico bidimensional, considerando el sistema finito e infinito. Para ello, se aplicó un método integral numérico partiendo de la ecuación de Helmholtz para estudiar las intensidades del campo electromagnético. Para ambos sistemas se consideró como vacío el medio entre los PECs. El método de la ecuación integral que se utilizó en este trabajo parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un sistema de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas al campo y su derivada normal, evaluadas en las superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea en el caso infinito, cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular las estructuras de bandas. Por otro lado, la ecuación matricial es inhomogénea en el caso finito, de donde las funciones fuentes nos permiten calcular la reflectancia.

Dado que el sistema infinito se encuentra caracterizado por una celda unitaria cuadrada (compuesta de PEC) con inclusión cilíndrica circular de superficie suave de PEC, se realizó una comparación entre la estructura de bandas obtenida con nuestro

método numérico y la estructura de bandas obtenida de forma analítica al considerar un radio igual a cero. Ambas estructuras muestran una excelente concordancia. Al comparar la estructura de bandas y la reflectancia obtenidas, se hace constar que las secciones donde la reflectancia es máxima delimita las bandas prohibidas del sistema análogo, mientras que los mínimos de la reflectancia muestran los modos del sistema.

Por otro lado, se obtuvieron patrones desordenados de la intensidad del campo electromagnético en la PCW infinita con el aumento de frecuencias reducidas (desde $\omega_r \approx 1$ hasta $\omega_r \approx 640$), mediante los mínimos locales de la función determinante, para los casos de las polarizaciones TE y TM. Estos patrones desordenados están asociados con sistemas caóticos. Otra forma de corroborar esta aseveración es mediante el valor de la longitud de correlación de la función de autocorrelación calculada, que tiende a cero (siendo las obtenidas desde $l_c \approx 0.4$ hasta $l_c \approx 0.05$) cuando la frecuencia aumenta.

De igual manera se obtuvieron patrones de la intensidad del campo electromagnético en la PCW finita con el aumento de frecuencias reducidas (desde $\omega_r \approx 0.7$ hasta $\omega_r \approx 100$), mediante la reflectancia, transmitancia y el campo esparcido, para la polarización TE. De igual manera, el valor de la longitud de correlación de la función de autocorrelación tiende a cero (siendo las obtenidas desde $l_c \approx 0.2$ hasta $l_c \approx 0.09$) cuando la frecuencia aumenta. Debido a que el primer sistema es una guía con separación entre las placas menor que en el segundo sistema, podemos concluir que bajo ciertas condiciones, que la intensidad describe un comportamiento caótico con el aumento de la frecuencia, la cual depende de la presencia de la inclusión.

El uso de estos métodos numéricos resultó ser bastante útil, ya que se obtuvo lo esperado si lo comparamos con los sistemas clásicos de geometrías semejantes como son los billares de Sinaí. Además, la optimización de estos métodos numéricos jugó un papel sumamente importante, ya que la implementación de la paralelización MPI en

los métodos numéricos ayudó a reducir en gran medida el tiempo de obtención de los cálculos, reduciéndolos de días a horas. Esto nos lleva a concluir, que las limitaciones computacionales son uno de los factores por los cuales no se llegó a un “caos total” puesto que no se pudo utilizar un paso de discretización más pequeño, lo que daría más fiabilidad a los datos resultantes.

Concluimos de grata manera, que el método numérico utilizado en la obtención de las intensidades del campo electromagnético dan resultados preliminares satisfactorios y que los datos obtenidos de las ACFs y las correspondientes longitudes de correlación nos permiten vislumbrar el fenómeno del caos en los problemas electromagnéticos abordados. Sin embargo, esto permite tener posibles aplicaciones como en criptografía.

Apéndice A

CONDICIONES DE FRONTERA

Se analizarán las condiciones de frontera para el campo eléctrico transversal (TE) y el campo magnético transversal (TM), las cuales pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Maxwell (Reitz *et al.*, 1996). En particular en un sistema donde no existen densidades superficiales tanto para la carga $\sigma = 0$, como para la corriente $\mathbf{J} = 0$ (pues esta última sólo es distinta de cero para un medio con una conductividad finita). Bajo este par de consideraciones, las condiciones para campos electromagnéticos para la componente normal a una superficie pequeña que encierra la interface son

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (89)$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (90)$$

donde las componentes normales de \mathbf{D} y \mathbf{H} son continuas a través de la superficie. Por otro lado, las componentes tangenciales están dadas de la siguiente manera

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0, \quad (91)$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0, \quad (92)$$

donde las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} son continuas a través de la interfaz. Ahora vamos a considerar el caso de las derivadas normales de ambos campos y para

ello vamos a toma el siguiente vector normal a la superficie que encierra ambos medios

$$\hat{\mathbf{n}} = -\frac{dy}{ds}\hat{i} + \frac{dx}{ds}\hat{j}, \quad (93)$$

y el vector tangente a la curva (en el plano x - y)

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{dx}{ds}\hat{i} + \frac{dy}{ds}\hat{j} = n_y\hat{i} - n_x\hat{j}, \quad (94)$$

donde ds es el diferencial de arco y en el espacio euclídeo $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

A.1. Caso TE (polarización s)

Para el caso de la polarización s, los campos armónicos eléctrico y magnético están dados por

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} E_z(x, y), \quad (95)$$

$$\mathbf{H} = \hat{i} H_x(x, y) + \hat{j} H_y(x, y). \quad (96)$$

Considerando que los campos de las Ecs. (95) y (96) son armónicos, de la ecuación de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, se puede encontrar que

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \mu (i\omega H_x), \quad (97)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \mu (-i\omega H_y). \quad (98)$$

Por otra parte, tenemos que

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{E} = n_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + n_y \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (99)$$

Sustituyendo las Ecs. (97) y (98) en la Ec. (99), obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = i\omega\mu [-n_x H_y + n_y H_x]. \quad (100)$$

Haciendo uso de la forma del vector tangente en la Ec. (94), podemos sustituir el producto $\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}}$ en la Ec. (100) para obtener que

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = i\omega\mu\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{t}}, \quad (101)$$

y usando la condicion de frontera de la Ec. (92), para los medios 1 y 2 se tiene que

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial n}. \quad (102)$$

La Ec. (102) nos indica que en general la derivada normal del campo eléctrico es discontinua; sin embargo, a frecuencias ópticas (espectro visible) para medios dieléctricos o metálicos $\mu_1 \approx \mu_2$.

A.2. Caso TM (polarización p)

De manera análoga hacemos el análisis para el campo magnético H_z en el caso de la polarización TM. Así, los campos magnético y eléctrico están representados como

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}}H_z(x, y), \quad (103)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_x(x, y) + \hat{\mathbf{j}}E_y(x, y). \quad (104)$$

Al desarrollar la ecuacion de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, y sustituyendo en ésta las Ecs. (103) y (104), se pueden hallar las siguientes relaciones al considerar los campos como armónicos

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \varepsilon (-i\omega E_x), \quad (105)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \varepsilon (i\omega E_y). \quad (106)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{H} = n_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + n_y \frac{\partial H_z}{\partial y}. \quad (107)$$

Sustituyendo las Ecs. (105) y (106) en la Ec. (107), obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n} = \varepsilon i \omega [n_x E_y - n_y E_x]. \quad (108)$$

Haciendo uso de la forma del vector tangente en la Ec. (94), podemos sustituir el producto $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{t}}$ en la Ec.(108) para obtener para los medios 1 y 2 que

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial n}. \quad (109)$$

Así, para $\Psi_i^{(j)}$ que representa cualquiera de ambos campos en el medio j -ésimo y un contorno Γ_i , las condiciones de continuidad de los campos y su derivada normal serán

$$\Psi_i^{(j)} = \Psi_i^{(j')}, \quad (110)$$

$$\frac{1}{f_j} \frac{\partial \Psi_i^{(j)}}{\partial n} = \frac{1}{f_{j'}} \frac{\partial \Psi_i^{(j')}}{\partial n}, \quad (111)$$

donde, $f_j \approx 1$ en TM y $f_j = \varepsilon_j$ en TE.

Apéndice B

FUNCIÓN DE GREEN

En el presente apéndice se obtiene la función de Green asociada a la ecuación de Helmholtz en un sistema que es independiente del eje z .

Consideremos la función de Green que satisface

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (112)$$

donde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo debido a una fuente de luz puntual que emite a la frecuencia ω en la posición \mathbf{r}' , y $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la delta de Dirac definida por

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \end{cases}. \quad (113)$$

Para un medio homogéneo, el campo producido por la fuente puntual \mathbf{r}' posee simetría radial en $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Expresando el laplaciano de la Ec. (112) en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 G(R) = \frac{d^2 G}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dG}{dR} = \frac{1}{R} \frac{d^2 (RG)}{dR^2}, \quad (114)$$

que sustituyendo se tiene que la Ec. (112), se puede reescribir como

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 (RG)}{dR^2} + k^2 G(R) = -4\pi\delta(R). \quad (115)$$

Como $R \neq 0$ podemos aplicar que $\delta(R) = 0$ y la Ec. (115) se transforma en

$$\frac{d^2(RG)}{dR^2} + k^2RG = 0, \quad (116)$$

la cual posee una solución armónica simple como $RG \approx e^{ikR}$, por lo que la función de Green es de la forma

$$G = a \frac{e^{-ikR}}{R} + b \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (117)$$

Podemos encontrar las constantes a y b al considerar que la función de Green satisface la condición de radiación de Sommerfeld, que nos dice que la energía es radiada desde la fuente hacia el infinito y que no puede ser radiada desde el infinito hacia la fuente, esto es, la función de Green satisface

$$\lim_{kR \rightarrow \infty} G \rightarrow 0, \quad (118)$$

por lo que consideramos sólo el segundo término del lado derecho de la Ec. (117). Para encontrar la constante b , sustituimos el segundo término de la Ec. (117) en la Ec. (112) y la integramos sobre una esfera de radio r ,

$$\int_V dV \left(\nabla \cdot \nabla b \frac{e^{ikR}}{R} + k^2 b \frac{e^{ikR}}{R} \right) = -4\pi \int_V dV \delta(R). \quad (119)$$

Posteriormente usamos el teorema de la divergencia al primer término de la Ec. (119),

$$\begin{aligned} \int_V dV \left(\nabla \cdot \nabla b \frac{e^{ikR}}{R} \right) &= \int_S dS \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla b \frac{e^{ikR}}{R} \right) \\ &= 4\pi b \lim_{r \rightarrow 0} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right]_{R=r} \\ &= -4\pi b. \end{aligned} \quad (120)$$

Para el segundo término de la Ec. (119) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_V dV \left(k^2 b \frac{e^{ikR}}{R} \right) &= 4\pi k^2 b \int_0^r dR \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \\ &= 4\pi k^2 b \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_0^r dR \left(b \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right]_{R=r} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (121)$$

Finalmente el miembro del lado derecho de la Ec. (119) es

$$\begin{aligned}
-4\pi \int_V dV \delta(R) &= -4\pi \left(\int_0^r dR \delta(R) \right) \\
&= -4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_0^r dR \delta(R) \right]_{R=r} \\
&= -4\pi.
\end{aligned} \tag{122}$$

Así, sustituyendo lo obtenido en las Ecs. (120), (121) y (122) en la Ec.(119) se obtiene que $b = 1$ y la solución de la Ec. (112) es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{123}$$

Como el sistema en consideración es independiente del eje z , y la Ec. (123) es para una sistema tridimensional, consideramos la superposición de un número infinito de fuentes puntuales a lo largo del eje z e integramos la Ec. (123),

$$G(x, y, ; x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{e^{ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}. \tag{124}$$

Aplicando un cambio de variable a la ecuación anterior en $z = 0$ y $z' = z_0$ y redefiniendo a $R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$ que por ser función par, tenemos

$$G(x, y, ; x', y') = 2 \int_0^{\infty} dz_0 \frac{e^{ik\sqrt{R^2+z_0^2}}}{\sqrt{R^2+z_0^2}}. \tag{125}$$

Para obtener su resolución aplicamos otro cambio de variable $u = \sqrt{R^2+z_0^2}$ y $du = z_0(dz_0)/u$ que sustituyendo en la Ec. (125) se tiene que

$$G(x, y, ; x', y') = 2 \int_R^{\infty} du \frac{e^{iku}}{\sqrt{u^2-R^2}}, \tag{126}$$

en la cual se sustituye $u = Rx$ y $du = Rdx$ resultando en

$$G(x, y, ; x', y') = 2 \int_1^{\infty} dx \frac{e^{ikRx}}{\sqrt{x^2-1}} = i\pi H_0^{(1)}(kR), \tag{127}$$

donde $H_0^{(1)}(\xi)$ es la función de Hankel de primera clase y de orden cero.

Por lo tanto, la función de Green para sistemas en 2D cuya geometría es independiente de z será

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (128)$$

Referencias

- Akter, R. and Ahmed, P. (2019). Some real-life applications of dynamical systems. *IRE.*, **2**(7): 5–15.
- Alonso, D., Ruiz, A., and de Vega, I. (2002). Polygonal billiards and transport: Diffusion and heat conduction. *Physica E*, **66**: 066131.
- Berry, M. V. (1997). Regular and irregular semiclassical wave functions. *Phys. A. Math. Gen.*, **10**(12): 2083–2091.
- Castaldi, G., Galdi, V., and Pinto, I. M. (2008). A study of ray-chaotic cylindrical scatterers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **56**(8): 2638–2648.
- Dennerly, F. and Krzywycki, A. (1996). *Mathematics for Physicists*. Harper & Row and Jhon Weatherhill, Inc., New York, Evaston, London and Tokyo, primera edición.
- Doya, V., Legrand, O., and Mortessagne, F. (2002). Light scarring in an optical fiber. *Physical Review Letters*, **88**(1).
- Fernández-Sanjuán, M. A. (2016). Dinámica no lineal, teoría del caos y sistemas complejos: una perspectiva histórica. *R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp)*, **109**(1): 107–126.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (1963). *The Feynman Lectures on Physics, Mainly Mechanics, Radiations and Heat*. Adison-Wesley, primera edición. Vol. 1.
- Fraczek, K. and Ulcigrai, C. (2014). Ergodic directions for billiards in a strip with periodically located obstacles. *Commun. Math. Phys.*, **327**: 643–663.
- Giordani, M. and Zorzi, M. (2020). Satellite communication at millimeter waves: a key enabler of the 6g era. En *2020 International Conference on Computing, Networking and Communications (ICNC)*, páginas 383–388.
- Herrera-Gonzalez, I., Arroyo-Correa, G., Mendoza-Suárez, A., and Tututi, E. S. (2011). Study of the resistivity in a channel with dephased ripples. *Int.J. Mod. Phys. B.*, **25**(5): 683–698.
- Hilborn, R. C. (2004). *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, USA., segunda edición.
- Luna-Acosta, G. A., Krokhin, A. A., Rodríguez, M. A., and Hernández-Tejeda, P. H. (1996a). Classical chaos and ballistic transport in a mesoscopic channel. *Physical Review B*, **54**(16): 11410–11416.

- Luna-Acosta, G. A., Na, K., Reichl, L. E., and Krokhin, A. (1996b). Band structure and quantum poincaré sections of a classically chaotic quantum rippled channel. *Physical Review E*, **53**(4): 3271–3283.
- Maradudin, A. A., Michel, T., McGurn, A. R., and Méndez, E. R. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Annals of Physics*, **203**(2): 255–307.
- Mendoza-Suárez, A. and Villa-Villa, F. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and twodimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**(10): 2249–2256.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., and Gaspar-Armenta, J. A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive lefthanded materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**(12): 3091–3098.
- Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H. I., and Villa-Villa, F. (2011). Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves a photonic crystal. *Progress In Electromagnetics Research*, **121**: 433–452.
- Montenegro-García, A. (1989). La función de autocorrelación y su empleo en el análisis de series de tiempo. *Rev. Desarrollo y Sociedad*, (23): 117–132.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., and Herrera-González, I. F. (2013a). Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces. *Progress In Electromagnetics Research B*, **48**: 329–346.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., and Herrera-González, I. F. (2013b). Chaotic behavior of a quantum waveguide. *Physica B*, **411**: 93–98.
- Reitz, J. R., Milford, F. J., and Christy, R. W. (1996). *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Addison Wesley, cuarta edición.
- Shinohara, N. (2018). *Recent Wireless Power Transfer Technologies via Radio Waves*. River Publishers, primera edición.
- Sinai, Y. G. (1970). Dynamical systems with elastic reflections. ergodic properties of dispersing billiards. *Usp. Mat. Nauk*, **25**: 141–192.
- Strogatz, S. H. (2001). *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Chaos-Westview Press, USA., primera edición.
- Sugihara, G. and May, R. M. (1990). Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature*, **344**(6268): 734.
- Suppes, P. and Acacia-de Barros, J. (1996). *Photons, Billiards and Chaos*, capítulo 8, páginas 189–201. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, primera edición.
- Torrent, D. and Sánchez-Dehesa, J. (2009). Radial wave crystals: Radially periodic structures from anisotropic metamaterials for engineering acoustic or electromagnetic waves. *Phys. Rev. Lett.*, **103**: 064301.