



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS "LUIS MANUEL
RIVERA GUTIERREZ"

CAOS ADVECTIVO EN FENÓMENOS DE CONVECCIÓN:
APLICACIÓN DE MODELOS DINÁMICOS TIPO LORENZ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

VALERIA MONTSERRAT MAYA GONZÁLEZ

TUTOR:

DR. RICARDO BECERRIL BÁRCENAS

Morelia, Michoacán, Agosto 2021



Dedicatoria ...

Este trabajo lo dedico a todos los maestros que he tenido la oportunidad de conocer y que han influido en mi educación. Cada momento grato y no tan grato que he enfrentado, me han dejado huella y cada uno de ellos representa un aprendizaje importante para mí; son ahora parte de mis pilares sobre los que quiero seguir construyendo.

A mi maestra Yolanda Galván R., desde mi educación básica, por impulsarme siempre a conseguir mejores resultados, y al Maestro Hugolino Ramos P., por su apoyo y su cariño. Dejaron una llama que sigue prendida hoy en día.

A mi profesor de la facultad y asesor, el Dr. Ricardo Becerril B., por todo su apoyo, su paciencia, sus consejos y su dedicación incluso fuera de lo que dicta el deber. Me ha inspirado a seguir teniendo ambición y confianza en mi misma.

A mis amigos que han sido ángeles y no me dejaron caer ni rendirme, vamos juntos hacia adelante.

A toda mi familia que con su apoyo, tuve la oportunidad de estudiar en la Universidad Michoacana. A mis abuelos que me abrieron las puertas de su casa y fueron mi segunda familia. A mis padres y hermanos por todo el amor incondicional. Esto es por ustedes.

Resumen

En los últimos años, el fenómeno de convección en fluidos ha sido estudiado ampliamente debido a su presencia en múltiples sistemas físicos. Genera también mucho interés el transporte de partículas pasivas en un flujo dado, y la posible aparición caos advectivo. Binson Joseph (1998) estudió el transporte de partículas pasivas (de advección pasiva) en un modelo de dimensión 6 del problema de la convección de Rayleigh Bénard (RB) propuesto por Howard and Krishnamurti (1986) (HK). Una manera de caracterizar el proceso de transporte es a través de la relación $\Delta X^2(t) \sim t^m$ para tiempos grandes, donde $\Delta X^2(t)$ es la distancia cuadrática media que viajan las partículas desde una nube inicial. Por otra parte, recientemente se ha estudiado la convección de RB inclinada encontrándose una dinámica más compleja (Tesis doctoral de Karen Daniels (2002)). En el presente trabajo, se construye un modelo tipo Lorenz para la convección con inclinación, haciendo una modificación al modelo extendido de HK; la obtención de su solución mediante integración numérica, nos dará la pauta para realizar el estudio de la advección pasiva de este modelo con inclinación a través del cálculo de distancias cuadráticas medias y el coeficiente de difusión para establecer el efecto de la inclinación sobre estas cantidades.

Abstract

In recent years, the phenomenon of convection in fluids has been studied extensively due to its presence in multiple physical systems. The transport of passive particles in a given flow, and the possible appearance of advective chaos generate a special interest. Binson Joseph (1998) studied passive particle transport (passive advection) in a 6-dimensional model of the Rayleigh Bénard (RB) convection problem proposed by Howard and Krishnamurti (1986). One way to characterize the transport process is through the relation $\Delta X^2(t) \sim t^m$ for long times, where $\Delta X^2(t)$ is the mean square distance that particles travel from an initial cloud. On the other hand, the convection of inclined RB has recently been studied, finding a more complex dynamics (Karen Daniels PhD thesis (2002)). In the present work, a Lorenz-type model for convection with inclination is built, making a modification to the extended HK model; Obtaining its solution through numerical integration will give us the guideline to carry out the study of the passive advection of this model with inclination through the calculation of mean square distances and the diffusion coefficient to establish the effect of the inclination on these quantities.

Key words: Advección, Inclinación, Flujo, Transporte, Difusión.

Índice general

1	Introducción	1
2	Modelo de Lorenz Clásico	7
§2.1	Ecuaciones de Movimiento	8
§2.2	Variables Adimensionales	11
§2.3	Expansión de Fourier, Truncación de Galerkin y Condiciones de Frontera	11
§2.4	Forma Convencional del Modelo de Lorenz	13
3	Modelos tipo Lorenz: Extendido e Inclinado	15
§3.1	Modelo extendido de Howard-Krishnamurti (HK)	15
§3.1.1	Ansatz extendido: 6 modos de Fourier	15
§3.1.2	Modelo Dinámico HK	16
§3.2	Modelo HK con inclinación	16
§3.2.1	Ecuaciones de Movimiento	16
§3.2.2	Velocidad del estado conductivo	18
§3.2.3	Sistema dinámico del sistema inclinado de RB	20
4	Caos Advectivo y Propiedades de Difusión	22
§4.1	Trayectorias en el espacio fase	23
§4.1.1	Modelo de Lorenz Clásico	23
§4.1.2	Modelo Extendido HK	24
§4.1.3	Modelo Inclinado	26
§4.2	Trayectorias de partículas pasivas	29
§4.2.1	Modelo Extendido de HK	29
§4.2.2	Modelo Inclinado	30
§4.3	Coefficiente de Difusión y Desplazamiento Cuadrático Medio	41
§4.3.1	Modelo Extendido	42
§4.3.2	Modelo Inclinado	45
5	Conclusiones y Comentarios Finales	48

Índice de figuras

1.1	Diagrama del sistema físico de un fluido bajo condiciones de Rayleigh-Bénard con las placas que delimitan la capa de fluido a temperaturas T_1 (placa inferior) y T_2 (placa superior), con $T_1 < T_2$. a) Estado de Conducción donde no hay movimiento del fluido, es decir $v = 0$; además la temperatura tiene una dependencia lineal con la altura z . b) En el estado de Convección, el movimiento de las partículas del fluido forman celdas semi-circulares con sus trayectorias: las llamadas celdas de convección.	2
1.2	En el umbral de la convección. F_B representa la fuerza de flotación que aparece cuando el elemento de fluido (en rojo) es más caliente y por tanto una densidad menor que la de sus alrededores (elementos de fluido en azul), esta fuerza acelera al elemento de fluido hacia arriba. F_v es la fuerza viscosa, esta fuerza junto con la difusión de la temperatura frenan el movimiento del fluido (vea los detalles en el texto).	3
2.1	Diagrama del sistema clásico usado para el estudio del fenómeno de convección R-B. Dos placas a diferentes temperaturas T_1 y T_2 , ($T_1 > T_2$), una paralela eje x , y la otra a una altura h . El gradiente de temperatura será entonces $\Delta T = T_1 - T_2$	7
3.1	Diagrama del sistema inclinado para el fenómeno de convección de R-B. Dos tapas a diferentes temperaturas T_1 y T_2 , ($T_1 > T_2$), una a lo largo del eje x , y la otra a lo largo de la línea $z = \pi$ (en las coordenadas ya sin dimensiones) . El gradiente de temperatura será entonces $\Delta T = T_1 - T_2$. El sistema de R-B es infinito en la dirección horizontal x . El plano $x - z$ está inclinado un ángulo γ , con respecto al plano $x' - z'$, siendo x' la horizontal. Tenemos entonces que el vector de aceleración de la gravedad tendrá componentes rectangulares para el plano $x - z$	17
3.2	Perfil de velocidad del estado conductivo, en el plano XZ de variables adimensionales. El grosor entre las tapas es de π	19
4.1	Tomando los parámetros: $\sigma = 10$, $b = 2.666$ y $r = 26$ (r el número de Rayleigh reducido), tenemos el retrato fase, en 3D (a) y 2D (b), del Modelo de Lorenz Clásico.	24
4.2	Proyección de las órbitas periódicas del plano fase $A - C$ del modelo HK, para diferentes valores del número de Rayleigh R . Después de un tiempo, las trayectorias son órbitas periódicas distintas para cada caso. Se consideró $a = 1.2$ y $\sigma = 1$	25

4.3	Proyección de las órbitas periódicas en el plano de fase AC , correspondientes al modelo inclinado. Se graficaron tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 44.6$; tomando diferentes inclinaciones. a) Sin inclinación. b) 0.3° c) 0.5° , d) 0.8° , e) 1° f) 2°	27
4.4	Proyección de la órbita preperiódica para 10° del plano fase AC , y de las trayectorias que convergen al punto fijo $(0, 0)$ para ángulos mayores señalados en el diagrama. $a = 1.2$, $\sigma = 1$ y $R = 44.6$	28
4.5	Líneas de flujo del modelo HK (sin inclinación), correspondientes a 4 condiciones iniciales (CI's) (x_0, z_0) diferentes para cada diagrama, y con un valor de tiempo $t = 100$. Tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$, para diferentes valores de R . (a) $R = 17.47$, con las CI's: $[(-0.5,0.3),(-1.25,1.25),(-1.25,1.25),(1.5,0.25)]$; (b) $R = 27.35$, con las CI's: $[(2,0.25),(-1.25,1.25),(-1.25,0.9),(-0.5,0.3)]$; (c) $R = 37.20$, con las CI's: $[(1.5,0.25),(1.5,1.25),(-1.5,0.1),(-4,3.2)]$; (d) $R = 38.6369$, con las CI's: $[(-1,0.5),(-1,0.1),(-4,1.5),(-3,1.5)]$	32
4.6	Trayectorias de partículas individuales correspondientes al modelo extendido, tomadas a un tiempo $t = 300$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$, para diferentes valores de R . a) $R = 40.27628$ y b) $R = 44.6$	33
4.7	Posiciones como función del tiempo para dos condiciones iniciales muy cercanas, a un tiempo $t = 600$, el valor de $R = 44.6$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$	34
4.8	Trayectorias de partículas con diferentes condiciones iniciales, correspondientes al modelo inclinado, con ángulo de inclinación de 0.3° . Se calcularon a un tiempo $t = 100$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$, para diferentes valores de R : a) $R = 38.72421$ y b) $R = 44.6$	35
4.9	Trayectorias de partículas con diferentes condiciones iniciales, correspondientes al modelo inclinado, con ángulo de inclinación de 0.5° . Se calcularon a un tiempo $t = 100$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$, para diferentes valores de R : a) $R = 38.72421$ y b) $R = 44.6$	36
4.10	Trayectorias de partículas con diferentes condiciones iniciales, correspondientes al modelo inclinado, con ángulo de inclinación de 1.5° . Se calcularon a un tiempo $t = 100$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$, para diferentes valores de R : a) $R = 38.72421$ y b) $R = 44.6$	37
4.11	Trayectorias de una partícula individual para el modelo. Cada línea representa un ángulo de inclinación distinto señalado en la figura (10, 20, 30 y 60°). Se usó $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$. Para cada caso se conservó la misma condición inicial $(0.1,0.4)$ y el valor de $R = 38.9$	38
4.12	Trayectorias de una partícula individual para el modelo. Cada línea representa un ángulo de inclinación distinto señalado en la figura (10, 20, 30 y 60°). Se usó $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$. Para cada caso se conservó la misma condición inicial $(0.1,0.4)$ y el valor de $R = 44.6$	39
4.13	Posición como función del tiempo para dos condiciones iniciales muy cercanas, correspondientes al modelo inclinado con ángulo de inclinación de 0.3° . Se usó un tiempo $t = 600$, $a = 1.2$, $\sigma = 1.0$ y $R = 44.6$	40
4.14	Condiciones iniciales de partículas generadas aleatoriamente para el cálculo del desplazamiento cuadrático medio. Suman un total de 5000 condiciones iniciales, en la región $[0, 1] \times [0, 1]$	42

4.15	Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido HK, tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 38.62683$ y a un tiempo total $t = 2 \times 10^3$. Se encontró un valor de $m = 1.998$	43
4.16	Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido HK, tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 38.72421$, y a un tiempo total $t = 2 \times 10^3$, Se encontró un valor de $m = 1.1412$	43
4.17	Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido HK, tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 40.27628$, y a un tiempo total $t = 2 \times 10^3$, se calculó $m = 0.9941$	44
4.18	Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido HK, tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 42.38361$, y a un tiempo total $t = 2 \times 10^3$, se calculó $m = 1.0499$	44
4.19	Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido inclinado. Tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 44.6$, para diferentes ángulos de inclinación etiquetados en la figura.	46
4.20	Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido inclinado. Tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 42.8361$, para diferentes ángulos de inclinación etiquetados en la figura.	47

Capítulo 1

Introducción

La existencia de gradientes de temperatura en un fluido puede alterar su estado de movimiento; éste es un fenómeno muy común e importante en la naturaleza. Los fenómenos de convección juegan un papel central en varios procesos que ocurren en nuestro planeta, tales como la circulación de la atmósfera, que a su vez influye en el comportamiento climático a corto plazo, o bien, en el movimiento de las placas tectónicas que determina el movimiento (a muy largo plazo) de los continentes. Los fenómenos de convección también influyen en la dinámica de las corrientes marítimas, últimamente afectadas por los cambios climáticos. A nivel astrofísico, la convección tiene mucha relevancia en la dinámica solar (estelar en general). El sistema en el que una capa de fluido se calienta desde la base del contenedor de fluido y se enfría en la parte superior, se conoce como sistema de Rayleigh - Bénard (RB). Los primeros experimentos sistemáticos iniciaron con el físico francés Bénard en 1900 [1].

A lo largo de los años, los fenómenos de convección se han estudiado en diversas situaciones y geometrías. Hay recopilaciones importantes de estos estudios como se muestra en el trabajo de revisión de Bodenschatz et al. (2000) [2], donde se consideran casos con diferentes condiciones de frontera, inclinaciones del sistema y el efecto de las rotaciones del mismo. Actualmente es un campo muy amplio de estudio.

Lord Rayleigh (1916) [4], introdujo un parámetro adimensional que da información central sobre los fenómenos experimentales de Bénard. El parámetro mencionado introducido por Rayleigh, y nombrado en su honor, está definido como:

$$R = \frac{\alpha g h^3 \Delta T}{D_T \nu}, \quad (1.1)$$

donde ΔT es el gradiente de temperatura, originalmente entre la base del contenedor y la parte superior del mismo, α es el coeficiente de expansión térmico, g es la aceleración de la gravedad, ν viscosidad cinemática, D_T el coeficiente de difusión térmica y h el grosor de la capa de fluido. Una vez que se elige un recipiente para un experimento y el lugar donde se realizará, h y g quedan fijas. Una vez que se ha elegido el fluido que se utilizará, α , ν y D_T quedan básicamente fijas. La única cantidad que un experimental puede variar es el

gradiente de temperatura entre las placas superior e inferior del contenedor, ΔT . Podemos entonces tomar el número de Rayleigh (1.1) como el parámetro de control experimental, y relacionar entonces el valor de R con la dinámica. En el estudio realizado por Rayleigh, se encontró el valor de R_c tal que para $R < R_c$ el sistema en reposo es estable (estado de conducción, figura 1.1a), y para $R > R_c$ es inestable, esto es, inicia un estado de movimiento que ya no se detiene y se dice que el sistema ha entrado a un estado de convección figura 1.1b.

Otro parámetro importante conocido como número de Prandtl, se define como el cociente entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica o coeficiente de difusión:

$$\sigma \equiv \frac{\nu}{D_T}. \quad (1.2)$$

Ambos parámetros servirán para clasificar la dinámica y ello se analizará con detalle en los capítulos posteriores, aunque a diferencia de R , evidentemente σ no es un parámetro que pueda variarse establecido el fluido a utilizar.

El sistema de Bénard consta de un fluido (casi) incompresible delimitado por dos placas horizontales a diferentes alturas y temperaturas, donde la placa inferior es más caliente que la superior. La distancia h de separación entre las placas es constante, el sistema se muestra esquemáticamente en la figura 1.1a.

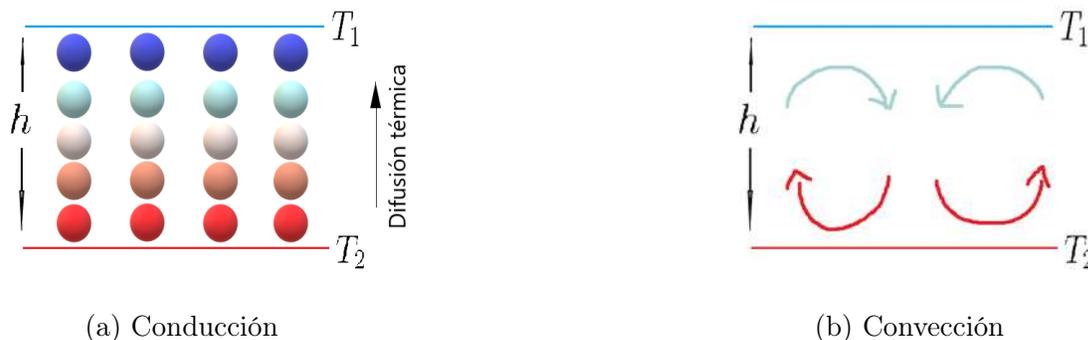


Figura 1.1: Diagrama del sistema físico de un fluido bajo condiciones de Rayleigh-Bénard con las placas que delimitan la capa de fluido a temperaturas T_1 (placa inferior) y T_2 (placa superior), con $T_1 < T_2$. a) Estado de Conducción donde no hay movimiento del fluido, es decir $v = 0$; además la temperatura tiene una dependencia lineal con la altura z . b) En el estado de Convección, el movimiento de las partículas del fluido forman celdas semi-circulares con sus trayectorias: las llamadas celdas de convección.

La diferencia de temperatura entre las placas $\Delta T = T_2 - T_1$, puede variarse, generalmente elevando la temperatura de la base. Si $\Delta T = 0$ la capa es isotérmica y la densidad del fluido permanece constante y el fluido permanece en reposo. Cuando ΔT aumenta ligeramente desde cero, el fluido todavía permanece en reposo y la temperatura (como

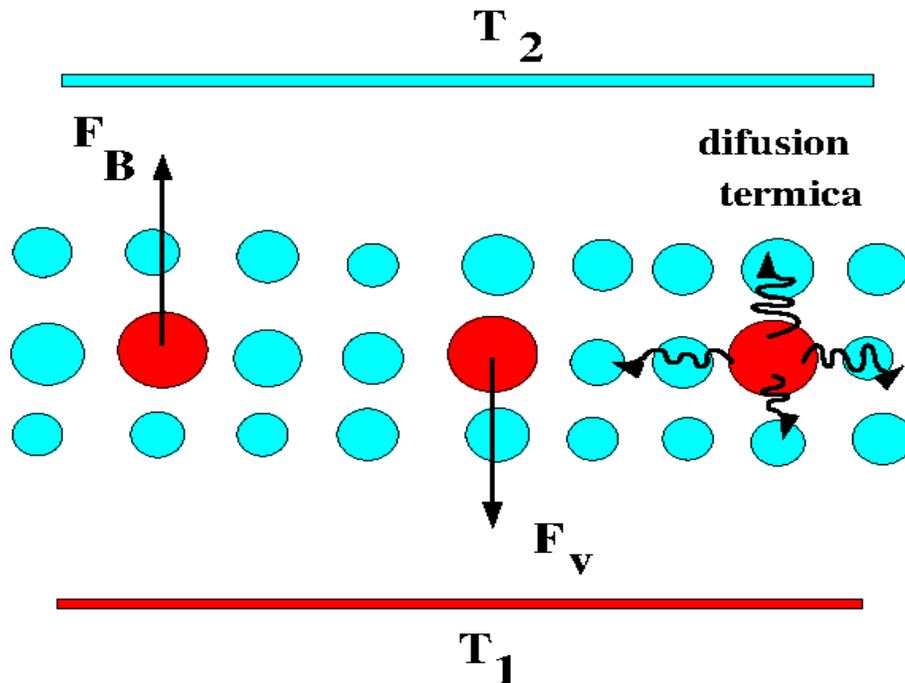


Figura 1.2: En el umbral de la convección. F_B representa la fuerza de flotación que aparece cuando el elemento de fluido (en rojo) es más caliente y por tanto una densidad menor que la de sus alrededores (elementos de fluido en azul), esta fuerza acelera al elemento de fluido hacia arriba. F_v es la fuerza viscosa, esta fuerza junto con la difusión de la temperatura frenan el movimiento del fluido (vea los detalles en el texto).

veremos en detalle) mantiene una dependencia lineal de ésta con la altura z , es decir, sólo se transfiere el calor por conducción, este estado del sistema se conoce por tanto, como estado conductivo. Cuando $\Delta T \neq 0$, para una partícula de fluido que está cerca de la base que es más caliente (y por tanto la densidad es menor), debido a una perturbación, se mueve a una altura superior más fría (y por tanto las partículas a esa nueva altura son más densas), esta partícula de fluido ligera, experimentará una fuerza de flotación F_B por estar rodeada de partículas más densas (ver figura 1.2) y ganará altura. La viscosidad del fluido F_v se opondrá al movimiento. Por la difusión térmica, la partícula caliente irá reduciendo su temperatura, y por ende, reduciendo su densidad y por tanto también disminuyendo la fuerza de flotación. Es por esto que se dice que tanto la viscosidad como la difusión térmica tienen efectos estabilizadores, pues se oponen al movimiento creado por el gradiente de temperatura. Ese gradiente se dice que tiene efectos desestabilizadores, porque conlleva una estratificación de la capa de fluido, con densidades mayores en la parte superior de la capa de fluido y densidades menores en la parte inferior de la capa de fluido, lo cual crea una situación de inestabilidad.

El número de Rayleigh es, de hecho, la razón entre los efectos desestabilizadores del gradiente de temperatura y los efectos estabilizadores de la viscosidad y la difusión térmica. Cuando estos efectos estabilizadores no pueden contrarrestar los efectos desestabilizadores del gradiente de temperatura, se llega al umbral de la convección, iniciado el flujo de con-

vección.

El estudio de la estructura espacial de la convección es muy importante pues comúnmente suelen aparecer patrones en las trayectorias de las partículas del fluido. Para el flujo R-B en el sistema físico descrito, el patrón más simple que puede ocurrir es el de rollos de convección rectos y paralelos a las tapas. Debido a la naturaleza simétrica del fenómeno, puede estudiarse dentro de un plano 2-D. Vemos entonces la proyección de los rollos como celdas de convección; para nuestro estudio elegiremos el plano x-z, tanto para ilustrar este modelo sencillo de flujo R-B, como en los que se propondrán analizar en los siguientes capítulos. En la figura 1.1, se ilustran los dos estados descritos de conducción y de convección en su patrón simple de celdas de convección.

El problema de convección de Bénard se presenta también en la dinámica de la atmósfera donde aparecen gradientes de temperatura. Así que en el estudio de la dinámica atmosférica, se requeriría encontrar soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes junto con las ecuaciones de difusión de calor y de continuidad.

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, entre los que se encuentran, las diferencias finitas, volumen finito, métodos espectrales, entre otros [3]. En los métodos espectrales, uno expande en serie de funciones ortogonales conocidas a las cantidades incógnita de las ecuaciones hidrodinámicas. Para condiciones de frontera periódicas, se escoge usualmente la base de Fourier para esta expansión, es en los coeficientes de los modos de Fourier donde se acomoda la dependencia temporal, de modo que el objetivo del método espectral, es encontrar como evolucionan en el tiempo estos coeficientes.

Edward Lorenz (1963) [5], quien estaba interesado en encontrar un modelo matemático que permitiera predecir el comportamiento de grandes masas de aire y que pudiera resolverse con las grandes limitaciones computacionales de la década de los 60's del siglo XX, propuso un modelo simplificado de rollos de convección de la atmósfera, reteniendo sólo tres modos de Fourier, teniendo por resultado un sistema dinámico de 3 ecuaciones diferenciales no lineales para estos tres coeficientes dependientes del tiempo. Estas tres ecuaciones constituyen el famoso sistema dinámico, conocido como Modelo de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}$$

donde X es proporcional a la función de corriente (que es un potencial de velocidad); Y por su parte, es proporcional a la variación horizontal de la temperatura y Z es proporcional a la variación vertical de la temperatura.

Una de las observaciones fundamentales de Lorenz cuando estudiaba su modelo fue que, cambios muy pequeños en las condiciones iniciales pueden generar grandes cambios

en las predicciones. En otras palabras, su modelo era altamente sensible a las condiciones iniciales. Esto tiene fuertes implicaciones, en el caso hipotético en que se pudieran conocer con toda precisión las condiciones iniciales del campo de velocidad y temperatura de la atmósfera, pero revoloteara repentinamente una mariposa cambiándolas, esa pequeña variación en las condiciones iniciales podría cambiar en forma drástica la predicción del modelo, por lo que sería imposible tener pronósticos del clima a largo plazo. Este efecto, lo explicó Lorenz en el 139th Meeting of the American Association for the Advancement of Science (Diciembre de 1972), el título de su presentación fue: “Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?”. Los detalles de su experiencia con su modelo pueden leerse en el libro “The Essence of Chaos” [6].

Las ecuaciones de Lorenz jugaron de esta manera, un papel importante en el descubrimiento del fenómeno de caos que se presenta cotidianamente en sistemas no lineales y una de sus características es su sensibilidad a las condiciones iniciales, pues pequeñas diferencias en las condiciones iniciales de su modelo llevan a grandes diferencias en las predicciones del mismo.

Cuando uno resuelven las ecuaciones hidrodinámicas de movimiento (Navier Stokes más la ecuación de difusión o bien modelos como el de Lorenz), ya sea analítica o numéricamente, se obtiene el campo de velocidades $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ en el esquema Euleriano, y uno puede preguntarse cómo se transportarían partículas pasivas en dicho campo. Si se tiene un conjunto de partículas en una pequeña región del sistema, una de las preguntas que uno se hace es cómo se esparcen con el flujo. Para contestar a estas preguntas, uno trabaja en el esquema Lagrangiano. En este esquema se busca estudiar las trayectorias de partículas individuales a través del estudio de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t), \quad (1.3)$$

donde v_i son las componentes del campo de velocidades. Este sistema constituye un sistema dinámico, de dimensión 3. Lo que varios autores encontraron hace casi cuatro décadas, es que aún con campos de velocidades simples, pueden encontrarse que las partículas se mueven en forma aleatoria en algunas regiones del sistema. En el año de 1984, Hassan Aref [7], introdujo el término de caos advectivo, refiriéndose precisamente al hecho de que un campo de velocidades Euleriano puede producir una respuesta estocástica en la advección de partículas pasivas.

El estudio del caos advectivo ha tenido grandes desarrollos. En experimentos recientes, Aref ha presentado también el caos advectivo como una alternativa para un mezclado rápido, tal como lo mencionan en Aref et al. (2017) [8], ya que hay muchas aplicaciones en las que se requiere maximizar el tiempo de mezclado de un fluido, se emplea el proceso de advección, y la advección caótica tiene ventaja sobre la turbulencia que no requiere una gran cantidad de energía para mantenerlo. Dicho proceso, lo definimos como la imposición del movimiento de las partículas del fluido ya sea de forma natural por la presencia de un gradiente de temperatura, o forzado, haciendo uso de máquinas que impongan el inicio del

movimiento. Por tanto se exalta su importancia y su influencia en el proceso de mezclado y por tanto en el transporte.

En el capítulo 2, se expone la dinámica de un fluido con condiciones de Rayleigh-Bénard y se estudia a través de modelos tipo Lorenz. Primeramente, se muestra la deducción del modelo de Lorenz clásico a partir de las ecuaciones de movimiento, que son: las ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de continuidad, y la ecuación de difusión térmica. El análisis de Fourier, junto con el procedimiento Galerkin y las condiciones de frontera, nos llevarán a la construcción del célebre modelo 3-D de Lorenz.

En el capítulo 3 se presenta el modelo extendido con 6 modos de Fourier propuesto por Howard y Krishnamurti, en donde la introducción de esos 3 modos extras a partir del modelo clásico, nos dará un modelo de 6 ecuaciones diferenciales, y eso permite se presente un cambio en la simetría del movimiento al poder considerar un flujo a larga escala en el eje x . Veremos entonces celdas de convección inclinadas y celdas en forma de pluma. También se analizará un sistema Rayleigh-Bénard inclinado. En este modelo modificado se quiere medir la influencia de la aparición de una velocidad del estado de conducción, y cómo lo anterior afecta a la evolución de las variables del modelo y al proceso de difusión en un fluido de este tipo.

En el capítulo 4 nos adentraremos en el uso de métodos numéricos para la construcción de los retratos de fase, útiles herramientas para el análisis geométrico de los modelos estudiados. Veremos la aparición de ciclos límite y atractores extraños propios de modelos que presentan caos dinámico. Se exponen también los resultados numéricos correspondientes a las trayectorias de las partículas presentes en cada tipo de modelo dinámico que se estudia en este trabajo. Analizaremos el caos advectivo usando como métrica el desplazamiento cuadrático medio de 5,000 partículas pasivas, tal como sugiere Binson (1998) [9], para el modelo extendido, y como aportación para el modelo inclinado, respectivamente. Se pretende entonces hacer una comparación del proceso de difusión en ambos sistemas. Finalmente, en el capítulo 6 se tienen las conclusiones y comentarios finales.

Capítulo 2

Modelo de Lorenz Clásico

En este capítulo haremos una exposición de las ecuaciones hidrodinámicas que se usan en el estudio de la convección de Rayleigh-Bénard. Más específicamente, deduciremos las ecuaciones de movimiento en la aproximación de Boussinesq para el problema de Rayleigh-Bénard 2-dimensional, que consiste de una capa de fluido confinada entre dos placas horizontales y paralelas, bajo la acción de la gravedad; la placa inferior se encuentra a temperatura T_1 y la superior a temperatura $T_2 < T_1$. La separación entre placas es h , como se muestra en la figura 2.1. A partir de las ecuaciones hidrodinámicas, mostraremos la metodología para encontrar modelos tipo Lorenz, empezando con el clásico sistema de Lorenz 3-dimensional.

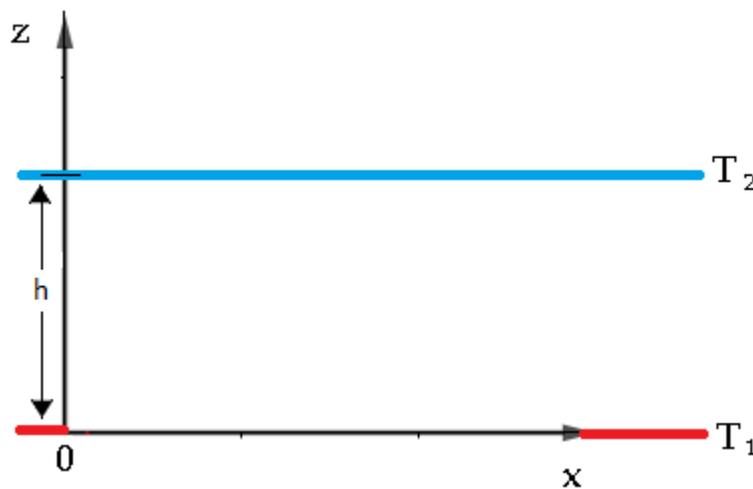


Figura 2.1: Diagrama del sistema clásico usado para el estudio del fenómeno de convección R-B. Dos placas a diferentes temperaturas T_1 y T_2 , ($T_1 > T_2$), una paralela eje x , y la otra a una altura h . El gradiente de temperatura será entonces $\Delta T = T_1 - T_2$.

2.1. Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones del modelo de Lorenz se derivan a partir de la ecuación de Navier-Stokes (N-S), que gobiernan el movimiento de un fluido, y de la ecuación de difusión de energía térmica, que describe el comportamiento de la temperatura en la capa de fluido y la ecuación de continuidad. Estas ecuaciones son respectivamente:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \vec{v} + \rho F^{(e)} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = D_T \nabla^2 T \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.3)$$

Aquí $F^{(e)}$ representa las fuerzas externas ejercidas sobre el sistema, ρ es la densidad de masa del fluido, p la presión, \vec{v} el campo de velocidades, $\nu = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática y D_T la constante de difusión térmica. El sistema lo consideraremos infinito en las direcciones horizontales, por lo que trataremos al sistema como 2-dimensional, esto es, todas las cantidades relevantes serán funciones de (x, z, t) .

Nos detendremos un momento en la ecuación de difusión para el caso en que el fluido está en reposo y la temperatura no depende del tiempo. La ecuación queda entonces sólo como:

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad (2.4)$$

Siguiendo a Howard y Krishnamurti, [10], consideraremos que la capa de fluido tiene un grosor $h = d\pi$, que la temperatura $T(0) = T_1$ (caliente) y $T(d\pi) = T_2$ (frio) con $T_1 > T_2$. Con estas condiciones de frontera, la solución de la ecuación (2.4) es:

$$T_c(z) = -\frac{\Delta T}{d\pi} z + T_1 \quad (2.5)$$

donde $\Delta T = T_1 - T_2$ es la diferencia de temperatura entre las placas de recipiente de fluido. $T_c(z)$ es la temperatura en el *estado de conducción*, que está caracterizado por tener velocidad nula y temperatura lineal en z dada por (2.5). Sin embargo, al entrar al régimen convectivo, se pierde esa linealidad, pues hay un cambio en cuanto a la difusión de la temperatura, y entonces debemos considerar una función adicional que llamaremos $\tau(x, z, t)$, para considerar esa perturbación de su valor lineal correspondiente. Por lo tanto, la construcción de la función de temperatura, en general, sería la suma de la temperatura en el estado conductivo y la perturbación,

$$T(x, z, t) = T_c(z) + \tau(x, z, t) \quad (2.6)$$

es decir:

$$T(x, z, t) = -\frac{\Delta T}{d\pi}z + T_1 + \tau(x, z, t) \quad (2.7)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de difusión, obtenemos:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \tau - v_z \frac{\Delta T}{d\pi} = D_T \nabla^2 \tau, \quad (2.8)$$

que es la ecuación de evolución para $\tau(x, z, t)$.

La fuerza externa que aparece en la ecuación de Navier-Stokes, será solamente la de la gravedad $-\rho g \hat{k}$, por lo que se sustituye en el término de las fuerzas externas, obteniéndose la ecuación:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \nu (\nabla)^2 \vec{v} - \rho g \hat{k} \quad (2.9)$$

No poseemos una expresión para la densidad, pero dado que ésta depende de la temperatura, se puede escribir en serie de Taylor como:

$$\rho(T) = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} (T - T_1) + \dots \quad (2.10)$$

donde ρ_0 es la densidad correspondiente a la temperatura T_1 , que es la temperatura de la tapa inferior (caliente). Si además introducimos el coeficiente de expansión térmica α :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (2.11)$$

entonces podemos reescribir la función de densidad haciendo una aproximación a primer orden:

$$\rho(T) = \rho_0 - \alpha \rho_0 \left[-\frac{z}{d\pi} \Delta T + \tau(x, z, t) \right] \quad (2.12)$$

La aproximación de Boussinesq [11], usada frecuentemente en dinámica de fluidos nos dice que podemos ignorar la variación de la densidad en todos los términos excepto en los que

involucren en ellos a la fuerza debida a la gravedad. Así, la ecuación de Navier-Stokes la reescribimos de la forma:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \rho_0 \nu \nabla^2 \vec{v} - \hat{k} \left[\rho_0 g + \alpha g \rho_0 \frac{z}{d\pi} \Delta T - \alpha g \rho_0 \tau(x, z, t) \right] \quad (2.13)$$

La ecuación de continuidad, debido a la aproximación de Boussinesq, queda simplemente como $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Por otro lado, para sistemas 2-dimensionales es conveniente introducir la función de corriente $\Psi(x, z, t)$ que funge como un potencial de velocidad, está definida a través de

$$\vec{v} = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

Aquí el signo de las componentes de las velocidades se elige por convección, dependiendo de la literatura puede escribirse con los signos invertidos. Con la introducción de la función de corriente dada por (2.14), la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ se satisface idénticamente, por tanto, las únicas ecuaciones relevantes son la ecuación de N-S y la de difusión térmica.

En la ecuación de N-S aparece un término para la presión, esto implica que se requeriría una ecuación de estado. Podemos esconder esta variable al tomar el rotacional de la ecuación de N-S que nos permite expresar la ecuación en términos de Ψ , y obtendremos entonces la ecuación de transporte de vorticidad. Dividimos toda la expresión entre la densidad ρ_0 , y calculamos el rotacional:

$$\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \vec{v} - \hat{k} \left[g + \alpha g \frac{z}{d\pi} \Delta T - \alpha g \tau(x, z, t) \right] \right] \quad (2.15)$$

En el desarrollo vemos que aparecen términos de productos de derivadas de Ψ y $\nabla^2 \Psi$. Éstos se pueden agrupar para que queden de la forma:

$$J(f, g) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (2.16)$$

que es la definición de un paréntesis de Poisson (f, g) . Esto nos permite escribir la ecuación de N-S y la de difusión en forma más compacta.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \nu \nabla^4 \Psi + g \alpha \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + J(\Psi, \tau) - \frac{\Delta T}{d\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = D_T \nabla^2 \tau \quad (2.18)$$

En resumen, el sistema a resolver será entonces el compuesto por las ecuaciones (2.17) y (2.18).

2.2. Variables Adimensionales

El siguiente paso es expresar las ecuaciones anteriores en términos de variables adimensionales, lo que permite simplificar el cálculo de las soluciones numéricas. Para ello se usan combinaciones de parámetros importantes para el sistema. Así, obtenemos las siguientes variable primadas sin dimensiones:

$$t' = \frac{D_T}{d^2}t, \quad x' = \frac{x}{d}, \quad z' = \frac{z}{d}, \quad \tau' = \frac{\alpha d^3 g}{\nu D_T} \tau. \quad (2.19)$$

Con lo anterior podemos definir las velocidades adimensionales, los gradientes adimensionales y el resto de los términos. Al introducir estas variables adimensionales, aparecerán parámetros importantes mencionados en la introducción. Aparece σ que es el número de Prandtl y también R que es el número de Rayleigh.

Desde ahora vamos a omitir las primas en todas las variables; lo anterior para que las ecuaciones no tengan un exceso de notación. Debemos tener en cuenta que las ecuaciones que presentamos a continuación son las correspondientes adimensionales:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + J(\Psi, \tau) - R \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nabla^2 \tau \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \right] = \frac{\partial \tau}{\partial x} + \nabla^4 \Psi \quad (2.21)$$

que son con las ecuaciones con las que trabajaremos.

2.3. Expansión de Fourier, Truncación de Galerkin y Condiciones de Frontera

Se proponen la siguiente forma de soluciones como expansiones de Fourier. Así para Ψ :

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m,n} e^{w_{m,n}t} \{A_m \cos(\lambda_m z) + B_m \sin(\lambda_m z)\} \cdot \{C_n \cos(\lambda_n x) + D_n \sin(\lambda_n x)\} \quad (2.22)$$

donde las λ son las longitudes de onda de los modos espaciales de Fourier y w_{mn} sus frecuencias correspondientes. Consideramos una construcción similar para τ . La dependencia temporal va anidada en los coeficientes de la expansión, así que lo que se busca es encontrar (numéricamente) estos coeficientes como función del tiempo. Tales expansiones se sustituyen en las ecuaciones hidrodinámicas (método de Galerkin) obteniéndose un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas (no lineales) para esos coeficientes. De la ecuación (2.22), vemos que estamos considerando un número infinito de términos para ambas funciones $\Psi(x, z, t)$ y $\tau(x, z, t)$. En la práctica se tiene una truncación de dichas series.

Para simplificar el sistema, Lorenz (1963) [5] hizo una propuesta con un ansatz truncado a 3 modos de Fourier; ello tomando como referencia los trabajos previos de Saltzman (1962) [12], donde éste último, mediante integración numérica había logrado mostrar que un ansatz con 6 modos ya contenía suficiente información del fenómeno y se apegaba a resultados experimentales. Lorenz concluyó además que de los resultados de Saltzman, en algunos casos, todas las variables del sistema de ecuaciones excepto 3 tienden a cero, por lo que él usó esta última aproximación.

Como la temperatura de las placas inferior y superior se mantienen constantes, las condiciones de frontera para la función de perturbación τ , es que ésta se anula en las placas. Para la velocidad, Lorenz uso condiciones de frontera de superficie libre [13]. Acorde al sistema de referencia elegido, podemos expresar las condiciones de frontera como:

$$\tau = \Psi = \nabla^2 \Psi = 0, \quad z = 0, \pi \quad (2.23)$$

El siguiente ansatz propuesto por Lorenz satisface las condiciones de frontera :

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= A(t) \sin(z) \sin(ax) \\ \tau(x, z, t) &= B(t) \sin(z) \cos(ax) - C(t) \sin(2z) \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde hay que determinar los coeficientes $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$. Más precisamente, hay que encontrar las ecuaciones de evolución de estos coeficientes y de este modo se tiene una solución aproximada del sistema 2-dimensional de Bénard. Se están usando sólo tres modos de Fourier: $\mathcal{F}_1 = \sin ax \sin z$, $\mathcal{F}_2 = \sin z \cos ax$ y $\mathcal{F}_3 = \sin 2z$. Al sustituir el ansatz en la ecuaciones de N-S y de difusión, se obtienen dos expresiones que son combinaciones de los tres modos de Fourier usados en (2.24), más otros modos de Fourier que surgen de los términos no lineales de las dos ecuaciones de movimiento, específicamente:

$$-\frac{1}{\sigma}(1+a^2)\dot{A} \sin z \sin(ax) = -aB \sin z \sin(ax) + (1+a^2)^2 A \sin z \sin(ax) \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{B} \cos ax \sin z - \dot{C} \sin 2z &= -aAB \cos z \sin z + 2aAC \cos ax \sin z \cos 2z \\ &+ RaA \cos ax \sin z - (1+a^2)B \cos ax \sin z \\ &+ 4C \sin 2z \end{aligned}$$

Para mantenernos en el subespacio de Fourier generado por la aproximación del ansatz, (2.24) se hace la proyección de estas dos expresiones con cada modo de Fourier del ansatz:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{a}} \int_0^{\pi} f(x, z, t) \sin(ax) \sin(z) dz dx \quad (2.26)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{a}} \int_0^{\pi} f(x, z, t) \cos(ax) \sin z dz dx \quad (2.27)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{a}} \int_0^{\pi} f(x, z, t) \sin(2z) dz dx \quad (2.28)$$

donde la función f representa a cada una de las dos ecuaciones (2.25). El resultado es un sistema de 3 ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\sigma(1+a^2)A + \frac{a\sigma}{(1+a^2)}B \\ \dot{B} &= -(1+a^2)B + aRA - aAC \\ \dot{C} &= \frac{a}{2}AB - 4C \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde R es el número de Rayleigh, que es el parámetro experimental.

2.4. Forma Convencional del Modelo de Lorenz

El sistema (2.29) no está aún en la forma en que suele aparecer en los libros de texto. Para llevarlo a su forma convencional se hacen algunos cambios de variable. En primer lugar, para la variable temporal, se hace el cambio:

$$t' = (1 + a^2)t \quad (2.30)$$

y luego las sustituciones:

$$\begin{aligned} X(t') &= \frac{a}{\sqrt{2}(1 + a^2)} A(t) \\ Y(t') &= \frac{a^2}{\sqrt{2}(1 + a^2)^3} B(t) \\ Z(t') &= \frac{a^2}{(1 + a^2)^3} C(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

además que definimos un nuevo parámetro b , como:

$$b = \frac{4}{(1 + a^2)} \quad (2.32)$$

y el llamado número de Rayleigh reducido:

$$r = \frac{a^2}{(1 + a^2)^3} R \quad (2.33)$$

Con lo que obtenemos el Modelo de Lorenz en su forma convencional:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= rX - XZ - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \quad (2.34)$$

En el siguiente capítulo, se deriva el modelo extendido de Howard-Krishnamurti.

Capítulo 3

Modelos tipo Lorenz: Extendido e Inclinado

3.1. Modelo extendido de Howard-Krishnamurti (HK)

Howard y Krishnamurti [10], publicaron su artículo en 1986. Ellos profundizaron su estudio en el modelo matemático de convección que contiene 6 ecuaciones, en lugar de 3, que son los correspondientes al Modelo de Lorenz Clásico. Esto lo hicieron porque querían mostrar para este modelo extendido la aparición de celdas inclinadas y con forma de pluma, apegadas al comportamiento experimental (Malkus (1954) [14]; Willis Deardorff (1967) a [15], b [16]; Krishnamurti 1970 a [17], b [18]) del flujo de R-B para valores altos de número de Rayleigh. Es decir, muestra en un contexto manejable la posibilidad del cambio espontáneo de simetría sugerido por los experimentos gracias a que permite un flujo a gran escala en la dirección x , esto en comparación la longitud de la altura entre las capas.

3.1.1. Ansatz extendido: 6 modos de Fourier

El ansatz correspondiente al modelo de Howard y Krishnamurti (HK) tiene todos sus términos positivos. Sin embargo, la elección de los signos para la velocidad en su artículo, están invertidos con respecto a los elegidos en este trabajo y que se expresan en la ecuación (2.14). Esto nos lleva a una pequeña modificación del ansatz propuesto en su artículo, tomando negativos los términos que contengan el factor de $\sin(2z)$. Así, el ansatz que usaremos será:

$$\begin{aligned}\Psi(x, z, t) &= A \sin(ax) \sin(z) + B \sin(z) - C \cos(ax) \sin(2z) \\ \tau(x, z, t) &= D \cos(ax) \sin(z) - E \sin(2z) - F \sin(ax) \sin(2z)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Se sigue un procedimiento similar al visto en el capítulo anterior. Notemos que para la obtención del modelo clásico del capítulo anterior, ya se usó un factor negativo del $\sin(2z)$ en la expresión para τ . Lo que es congruente con lo propuesto en este ansatz modificado.

3.1.2. Modelo Dinámico HK

Hacemos la sustitución del ansatz en las ecuaciones de movimiento (2.20) y (2.21). Para las ecuaciones obtenidas, hacemos la proyección con las integrales de Fourier, obteniendo el modelo:

$$\dot{A} + \sigma(1 + a^2)A - \frac{\sigma a}{(1 + a^2)}D - \frac{1}{2}a\frac{(3 + a^2)}{(1 + a^2)}BC = 0 \quad (3.2a)$$

$$\dot{B} + \sigma B + \frac{3}{4}aAC = 0 \quad (3.2b)$$

$$\dot{C} + \sigma(4 + a^2)C + \frac{a\sigma}{(4 + a^2)}F + \frac{a^3}{2(4 + a^2)}AB = 0 \quad (3.2c)$$

$$\dot{D} + (1 + a^2)D - RaA + aAE + \frac{1}{2}aBF = 0 \quad (3.2d)$$

$$\dot{E} + 4E - \frac{1}{2}aAD = 0 \quad (3.2e)$$

$$\dot{F} + (4 + a^2)F + RaC - \frac{1}{2}aBD = 0 \quad (3.2f)$$

Este modelo es el propuesto en el artículo de HK [10], usado después por Binson (1998) [9], donde este autor se enfocó en las características del transporte de partículas pasivas para este modelo extendido, lo que discutiremos con más detalle en el capítulo 4.

Como es de esperarse, se puede recuperar el modelo de Lorenz clásico conformado ahora por los coeficientes A , D y E al tomar $B = C = F = 0$.

3.2. Modelo HK con inclinación

En esta sección analizaremos la construcción de las ecuaciones hidrodinámicas para el sistema R-B, con una inclinación dada por un ángulo γ respecto a la horizontal. Ver figura 3.1.

3.2.1. Ecuaciones de Movimiento

Para encontrar las ecuaciones de movimiento, se hace un análisis similar al que se desarrolló en el capítulo 2. Veremos que en la ecuación de Navier-Stokes, ahora aparecerán dos componentes para el vector de la aceleración de la gravedad. Usando nuevamente la aproximación de Boussinesq, la ecuación de N-S se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu(\nabla)^2\vec{v} + \frac{\rho}{\rho_0}(g \sin \gamma \hat{i} - g \cos \gamma \hat{k}) \quad (3.3)$$

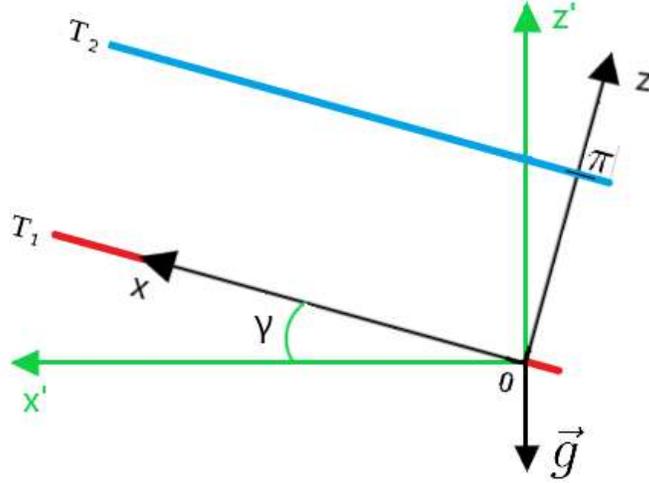


Figura 3.1: Diagrama del sistema inclinado para el fenómeno de convección de R-B. Dos tapas a diferentes temperaturas T_1 y T_2 , ($T_1 > T_2$), una a lo largo del eje x , y la otra a lo largo de la línea $z = \pi$ (en las coordenadas ya sin dimensiones). El gradiente de temperatura será entonces $\Delta T = T_1 - T_2$. El sistema de R-B es infinito en la dirección horizontal x . El plano $x - z$ está inclinado un ángulo γ , con respecto al plano $x' - z'$, siendo x' la horizontal. Tenemos entonces que el vector de aceleración de la gravedad tendrá componentes rectangulares para el plano $x - z$.

Tenemos una expresión para la densidad obtenida anteriormente dada por la ecuación (2.12). Entonces:

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} &= \left[1 + \alpha \frac{z}{\pi} \Delta T - \alpha \tau(x, z, t) \right] (g \sin \gamma \hat{i} - g \cos \gamma \hat{k}) \\
 &= \left(g \sin \gamma + \alpha g \sin \gamma \frac{z}{\pi} \Delta T - \alpha g \sin \gamma \tau(x, z, t) \right) \hat{i} \\
 &\quad + \left(-g \cos \gamma - \alpha g \cos \gamma \frac{z}{\pi} \Delta T + \alpha \cos \gamma \tau(x, z, t) \right) \hat{k}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si sustituimos esta última ecuación en la ecuación de N-S y tomamos el rotacional, obtenemos:

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = \nu \nabla^4 \Psi - J(\Psi, \nabla^2 \Psi) + g\alpha \left[\sin \gamma \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\Delta T}{\pi} \right) + \cos \gamma \frac{\partial \tau}{\partial x} \right]$$

La ecuación de difusión térmica no se ve alterada por la presencia de un ángulo de inclinación ya que no contiene ningún término que incluya al vector \vec{g} . Ésta entonces tiene

la forma de la ecuación (2.18):

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -J(\Psi, \tau) + \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + D_T \nabla^2 \tau$$

Luego, las ecuaciones adimensionales correspondientes de la ecuación de Navier Stokes y la de difusión térmica, quedan como:

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} = \sigma \nabla^4 \Psi - J(\Psi, \nabla^2 \Psi) - R \sigma \sin \gamma + \sigma \left(\sin \gamma \frac{\partial \tau}{\partial z} + \cos \gamma \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -J(\Psi, \tau) + R \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \nabla^2 \tau \quad (3.6)$$

3.2.2. Velocidad del estado conductivo

Enseguida nos enfocaremos a estudiar el efecto que tiene el ángulo de inclinación en el estado conductivo del sistema. Cuando tuvimos un sistema totalmente horizontal, el estado conductivo se caracterizaba por tener al fluido en reposo $\vec{v} = \vec{0}$ y un perfil lineal de la temperatura en la coordenada z ; ello implicaba que, tanto la función $\Psi(x, z, t)$ como $\tau(x, z, t)$ eran nulas. Sin embargo, podemos inferir que la inclinación del sistema puede generar un movimiento en el fluido aún cuando el perfil de la temperatura siga siendo lineal en z .

Recordemos que las condiciones que se cumplen para el estado de conducción son que se tiene una dependencia lineal de la temperatura con la altura entre las tapas, es decir, $\tau = 0$. Además es un estado estacionario, esto es, no hay dependencia temporal de las variables. En tal caso, la ecuación de difusión (3.6) toma la forma:

$$\frac{\partial \Psi_c}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

lo que nos dice que la función de corriente conductiva Ψ_c , depende únicamente de la variable z . Entonces la ecuación de N-S nos queda como:

$$\frac{d^4 \Psi_c}{dz^4} = R \sin \gamma \quad (3.8)$$

cuya solución tiene la forma:

$$\Psi_c = R \sin \gamma \frac{z^4}{24} + C_3 \frac{z^3}{6} + C_2 \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_0 \quad (3.9)$$

Si aplicamos las condiciones de frontera dadas por la ecuación (2.23), esto es $\Psi(z) = 0$ y $\frac{d^2\Psi}{dz^2} = 0$ en $z = 0, \pi$, se encuentran las constantes C_1 , C_2 y C_3 . La solución será:

$$\Psi_c = R \sin \gamma \left(\frac{z^4}{24} - \frac{\pi z^3}{12} + \frac{\pi^3 z}{24} \right). \quad (3.10)$$

Tendremos entonces un perfil de velocidades para el modelo inclinado en su estado conductivo, que es el siguiente:

$$v_x^{(c)} = -R \sin \gamma \left(\frac{z^3}{6} - \frac{\pi z^2}{4} + \frac{\pi^3}{24} \right), \quad (3.11)$$

El estado conductivo para el sistema de RB inclinado está caracterizado por el perfil lineal en z de la temperatura y el perfil de velocidades dado por la ecuación (3.11) y mostrado en la figura 3.2.

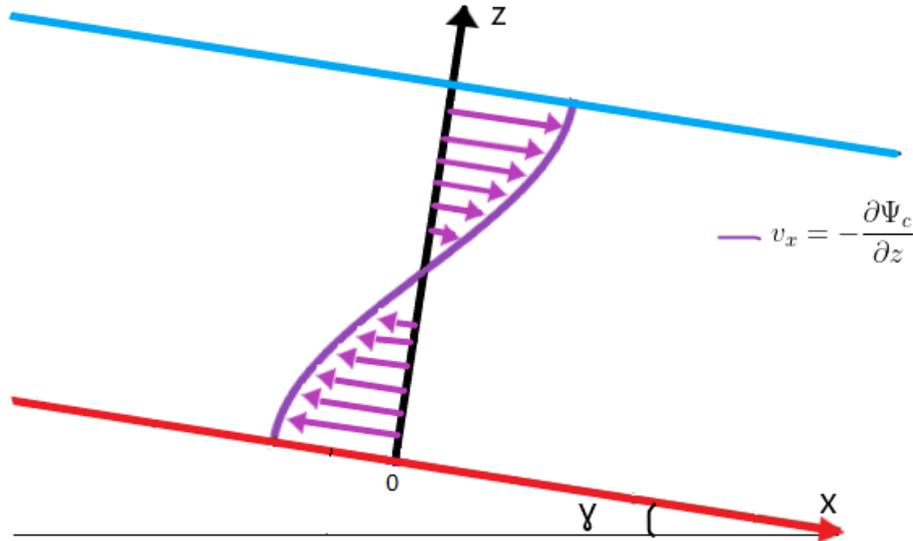


Figura 3.2: Perfil de velocidad del estado conductivo, en el plano XZ de variables adimensionales. El grosor entre las tapas es de π .

3.2.3. Sistema dinámico del sistema inclinado de RB

El paso siguiente para la obtención del modelo tipo Lorez extendido para el sistema RB inclinado, es la construcción del ansatz tanto para la temperatura como para la función de corriente. Para ambas funciones, utilizaremos la suma de de las correspondientes funciones del estado conductivo, $T_c(z)$ dada por la ecuación (2.5) y $\Psi_c(z)$ de la ecuación (3.10), más la suma de los modos de Fourier usados en el caso del sistema horizontal; en otras palabras

$$\begin{aligned}\Psi &= A(t) \sin(ax) \sin(z) + B(t) \sin z - C(t) \cos ax \sin 2z + R \sin \gamma \left[\frac{z^4}{24} - \frac{\pi z^3}{12} + \frac{\pi^3 z}{24} \right] \\ \tau &= -\frac{\Delta T}{d\pi} z + T_1 + D(t) \cos ax \sin z - E(t) \sin 2z - F(t) \sin ax \sin 2z\end{aligned}\quad (3.12)$$

Se sustituye el ansatz en las ecuaciones (3.5) y (3.6). Posteriormente se hacen las integrales de proyección de Fourier:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{a}} \int_0^{\pi} \mathcal{F}_i(x, z) f(x, z, t) dz dx \quad (3.13)$$

donde la función $f(x, z, t)$, representa a las ecuaciones de movimiento en las que hemos sustituido el ansatz, y los \mathcal{F}_i son los modos de Fourier correspondientes, que en este caso serán seis

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \sin ax \sin z, & \mathcal{F}_2 &= \sin z, & \mathcal{F}_3 &= \cos ax \sin 2z, \\ \mathcal{F}_4 &= \cos ax \sin z, & \mathcal{F}_5 &= \sin 2z, & \mathcal{F}_6 &= \sin ax \sin 2z.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Lo que nos lleva al siguiente modelo de seis ecuaciones diferenciales acopladas para el sistema de convección inclinado:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\sigma(1+a^2)A + \frac{a(3+a^2)}{2(1+a^2)}BC + \frac{a\sigma}{(1+a^2)}\cos\gamma D - \frac{8\sigma}{3\pi(1+a^2)}\sin\gamma F \\ \dot{B} &= -\sigma B - \frac{3a}{4}AC + \frac{4R\sigma}{\pi}\sin\gamma \\ \dot{C} &= -\sigma(4+a^2)C - \frac{a^3}{2(4+a^2)}AB - \frac{\sigma a}{(4+a^2)}\cos\gamma F + \frac{8}{3\pi(4+a^2)}\sin\gamma D \\ \dot{D} &= -(1+a^2)D - aAE + aRA - \frac{a}{2}BF \\ \dot{E} &= -4E + \frac{a}{2}AD \\ \dot{F} &= -(4+a^2)F - aRC + \frac{a}{2}BD\end{aligned}\quad (3.15)$$

y sus funciones de velocidad correspondientes son:

$$\begin{aligned}
v_x &= -A(t) \sin ax \cos z - B(t) \cos z + 2C(t) \cos ax \cos 2z - R \sin \gamma \left[\frac{z^3}{6} - \frac{\pi z^2}{4} + \frac{\pi^3}{24} \right] \\
v_z &= aA(t) \cos ax \sin z + aC(t) \sin ax \sin 2z
\end{aligned} \tag{3.16}$$

El modelo obtenido es congruente con el extendido de HK (ecuación (3.2)) si tomamos $\gamma = 0$. A su vez recuperamos el modelo de Lorenz clásico (2.30) al tomar $B = C = F = 0$.

Capítulo 4

Caos Advectivo y Propiedades de Difusión

Para el modelo de Lorenz hemos de distinguir entre el comportamiento de las variables dinámicas del modelo en sí (que llamamos $X(t)$, $Y(t)$ y $Z(t)$ en el modelo de Lorenz 3D), y de partículas que son arrastradas por el campo de velocidades. En el primer caso, para el conjunto de ecuaciones diferenciales del modelo, puede presentarse el que llamaremos caos dinámico. En su libro, Strogatz señala que no hay una definición de caos universalmente aceptada, pero casi todos concordarían en que *Caos es un comportamiento aperiódico en un sistema determinístico con alta sensibilidad a las condiciones iniciales*. Por una *alta sensibilidad a las condiciones iniciales*, se quiere decir que, dos trayectorias en el espacio de estados, que inician con condiciones iniciales muy cercanas, pueden alejarse una de la otra en tiempos breves. En el segundo caso, nos referiremos al caos advectivo, el cual está relacionado con el comportamiento de las partículas del fluido, es decir, hablamos del caos en las trayectorias de partículas que se mueven con el fluido. Se habla de *advección* o *advección pasiva* para referirnos a partículas inertes que simplemente siguen el flujo del fluido, de modo que, ajustan su propia velocidad a la del campo de velocidades del fluido. De esta forma podemos escribir $\vec{v}_{particula} = \vec{v}_{fluido}$ como la expresión formal de la advección pasiva. Reconocemos la advección caótica tal que ya no se cumple dicha condición.

Las ecuaciones diferenciales de los modelos dinámicos tipo Lorenz son deterministas, es decir, no tienen términos aleatorios. Los comportamientos irregulares que puedan presentar, se deben a su carácter no lineal y no a términos estocásticos. Los modelos considerados, que tienen la forma general $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ se resuelven usando el método de Runge-Kutta de orden 4. Teniendo soluciones numéricas para $\vec{x}(t)$, variable dinámica (no confundir con la variable espacial x): para el modelo de Lorenz, tenemos las ecuaciones para \dot{X} , \dot{Y} , \dot{Z} , dadas por (2.34). Pueden calcularse, tanto el campo de velocidades como el de la temperatura del fluido. Con el campo de velocidades disponible, es posible estudiar el movimiento de partículas en el fluido, y se hace plausible el cálculo de los coeficiente de difusión. Esto haremos en las siguientes secciones.

4.1. Trayectorias en el espacio fase

Dado un sistema dinámico n -dimensional $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$, el conjunto de puntos $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in [a, b]\}$ es una trayectoria en el espacio fase. Un retrato de fase es una representación geométrica de (varias) trayectorias de un sistema dinámico, pueden ser en 1, 2 ó 3 dimensiones, que son las que se pueden dibujar. La configuración de las curvas en el espacio de fase puede sugerir o revelar, la existencia de atractores, repulsores, ciclos límite [13, 3].

Queremos comparar el comportamiento de los modelos tipo Lorenz para diferentes valores del parámetro de Rayleigh R . Para resolver los sistemas dinámicos, se hace uso del método integrador de Runge Kutta de orden 4 (vea por ejemplo: Numerical Recipes in C (1992) [19]). Mientras no se mencione lo contrario, en los siguientes diagramas se considera un tiempo total $t = 100$.

4.1.1. Modelo de Lorenz Clásico

Dado un sistema dinámico, un punto fijo \vec{x}^* es uno que hace $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$. El modelo de Lorenz clásico

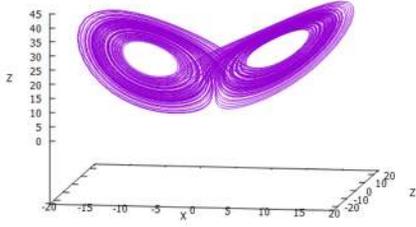
$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= rX - XZ - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ,\end{aligned}\tag{4.1}$$

tiene un punto fijo trivial $(0, 0, 0)$. Para establecer la estabilidad de un punto fijo, se realiza el bien conocido análisis de estabilidad lineal (ver por ejemplo el texto de Strogatz [20]), que requiere del cálculo de la matriz

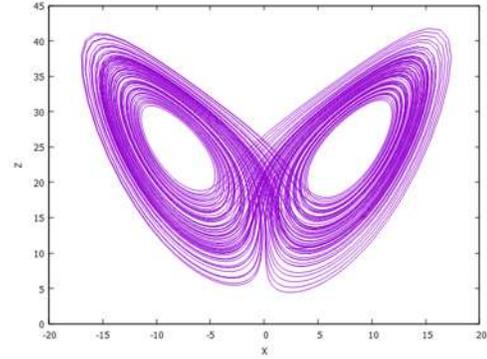
$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x^*},$$

y el cálculo de los valores propios de esta matriz. Resulta que $(0, 0, 0)$ es estable para valores de $r < 1$. Para $r > 1$ hay un par de puntos fijos simétricos $x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $z^* = r-1$, que en el caso de que $\sigma - b - 1 > 0$, es estable para $1 < r < r_H$ siendo $r_H = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$. Para $r > r_H$ el sistema (4.1) se hace caótico.

Recordemos que $X(t)$ está relacionada con la función de corriente Ψ y que $Y(t)$ y $Z(t)$ con la función de perturbación de la temperatura τ . En la figura 4.1, la gráfica (a), muestra una trayectoria en el espacio fase tridimensional (X, Y, Z) con los valores de los parámetros $\sigma = 10$, $b = 2.666$ (que son valores típicos usados en los libros de texto) y $r = 26 > r_H \approx 24.74$. Para $r > r_c = 24.74$ el sistema es caótico, altamente dependiente de las condiciones iniciales. En la figura 4.1, la gráfica (b) es una proyección 2-dimensional.



(a) Retrato Fase - Modelo de Lorenz Clásico 3D



(b) Retrato Fase - MLC 2D

Figura 4.1: Tomando los parámetros: $\sigma = 10$, $b = 2.666$ y $r = 26$ (r el número de Rayleigh reducido), tenemos el retrato fase, en 3D (a) y 2D (b), del Modelo de Lorenz Clásico.

Las Figuras 4.1 (a) y (b) son bien conocidas en la teoría de la dinámica caótica debido a que la aparición de estos atractores 'extraños', es común en sistemas dinámicos no lineales para ciertos valores de sus correspondientes parámetros. Existe una caracterización importante de esos atractores extraños, ya que son en realidad fractales, tal como lo muestran Grassberger y Procaccia (1983) [21]. No estudiaremos el concepto de fractales en este trabajo. Sólo estamos ilustrando trayectorias en el espacio fase del modelo de Lorenz clásico. Dado que usamos la versión convecional del Modelo de Lorenz, no se usa el número R , directamente, si no su versión reducida, dada por la ecuación (2.33).

4.1.2. Modelo Extendido HK

El análisis de estabilidad lineal del modelo extendido de Howard y Krishnamurti [10]

$$\dot{A} + \sigma(1 + a^2)A - \frac{\sigma a}{(1 + a^2)}D - \frac{1}{2}a\frac{(3 + a^2)}{(1 + a^2)}BC = 0 \quad (4.2a)$$

$$\dot{B} + \sigma B + \frac{3}{4}aAC = 0 \quad (4.2b)$$

$$\dot{C} + \sigma(4 + a^2)C + \frac{a\sigma}{(4 + a^2)}F + \frac{a^3}{2(4 + a^2)}AB = 0 \quad (4.2c)$$

$$\dot{D} + (1 + a^2)D - RaA + aAE + \frac{1}{2}aBF = 0 \quad (4.2d)$$

$$\dot{E} + 4E - \frac{1}{2}aAD = 0 \quad (4.2e)$$

$$\dot{F} + (4 + a^2)F + RaC - \frac{1}{2}aBD = 0 \quad (4.2f)$$

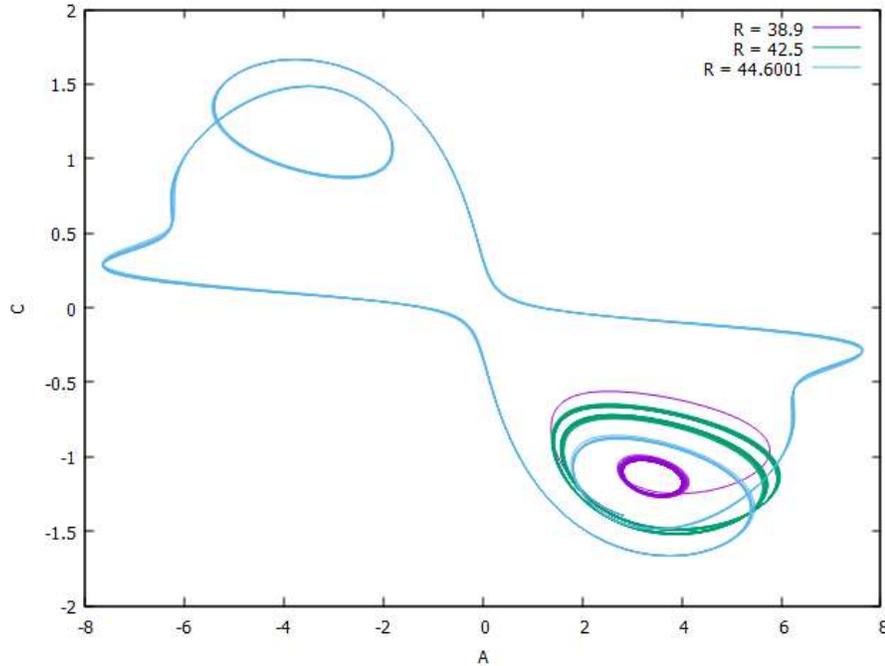


Figura 4.2: Proyección de las órbitas periódicas del plano fase $A - C$ del modelo HK, para diferentes valores del número de Rayleigh R . Después de un tiempo, las trayectorias son órbitas periódicas distintas para cada caso. Se consideró $a = 1.2$ y $\sigma = 1$.

es mucho más complicado que el del modelo clásico de Lorenz; éste se condensa en el diagrama de la figura 1 de ese artículo. Al integrar las ecuaciones de este modelo, se encuentra la función de corriente de acuerdo a

$$\Psi(x, z, t) = A \sin(ax) \sin(z) + B \sin(z) - C \cos(ax) \sin(2z) \quad (4.3)$$

como se vió en el capítulo 4. Como el campo de velocidades está relacionado con esta función de corriente de acuerdo con $v_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ y $v_z = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$, para estudiar el movimiento de partículas pasivas se resuelven simultáneamente las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.4)$$

que tienen la forma de un sistema Hamiltoniano, con función de Hamilton Ψ . Si este sistema no depende del tiempo, entonces las partículas siguen contornos de Ψ constante. Pero para cuando el lado derecho de (4.4) es periódica en el tiempo, las trayectorias de las partículas pueden exhibir un comportamiento caótico [7]. Queremos revisar el transporte advectivo en convección térmica modelada por el sistema HK. Y en particular, estamos interesados en el caso en que se tengan soluciones periódicas en el tiempo como el que

obuvieron Howard y Krishnamuti (1986) [10], y mostraron en las variables dinámicas A vs C (figura 5 del artículo de HK). Lo hemos reproducido (salvo diferencias de ubicación) y lo presentamos en la figura 4.2, ahí se observa la evolución de las trayectorias desde un mismo punto fijo, para tres diferentes valores de R , tomando $\sigma = 1$ y $a = 1.2$, son los valores sugeridos en los experimentos [9, 10]. Podemos apreciar la formación de órbitas periódicas para cada caso. Es para ese tipo de órbitas periódicas del modelo, que se estudia mayormente, el transporte advectivo.

4.1.3. Modelo Inclinado

El análisis de estabilidad lineal del modelo extendido inclinado que se construyó en el capítulo anterior

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\sigma(1+a^2)A + \frac{a(3+a^2)}{2(1+a^2)}BC + \frac{a\sigma}{(1+a^2)}\cos\gamma D - \frac{8\sigma}{3\pi(1+a^2)}\sin\gamma F \\ \dot{B} &= -\sigma B - \frac{3a}{4}AC + \frac{4R\sigma}{\pi}\sin\gamma \\ \dot{C} &= -\sigma(4+a^2)C - \frac{a^3}{2(4+a^2)}AB - \frac{\sigma a}{(4+a^2)}\cos\gamma F + \frac{8}{3\pi(4+a^2)}\sin\gamma D \\ \dot{D} &= -(1+a^2)D - aAE + aRA - \frac{a}{2}BF \\ \dot{E} &= -4E + \frac{a}{2}AD \\ \dot{F} &= -(4+a^2)F - aRC + \frac{a}{2}BD\end{aligned}$$

no se llevó a cabo en la tesis; sin embargo, es posible a través de experimentos numéricos encontrar, dado un valor del ángulo de inclinación γ , el valor del número de Rayleigh para el cual se tienen órbitas periódicas. Tomando $a = 1.2$, $\sigma = 1.0$ y $R = 44.6$, empezamos a variar los ángulos de inclinación γ para determinar el efecto del ángulo sobre la forma de las trayectorias periódicas en el espacio fase, esto se muestra en la figura 4.3; aquí se muestran órbitas periódicas correspondientes a 0° (gráfica (a)), al incrementar levemente el ángulo, se observa una morfología similar en la trayectoria hasta llegar a 0.8° ; posterior a esos valores, se van formando órbitas periódicas alargadas, que se van ensanchando al incrementar el ángulo de inclinación. Para ángulos 2° a cerca de 10° , se encuentran órbitas periódicas; no obstante, para ángulos más grandes, los ciclos límite desaparecen y aparecen puntos fijos, como se muestra en la figura 4.4. Ciertamente, deberemos realizar el análisis de estabilidad lineal del modelo extendido inclinado en el futuro cercano, sería de utilidad para determinar como se ve afectado el diagrama de bifurcación de HK con al ángulo de inclinación. Vemos entonces que para una inclinación entre 10° y 20° , el comportamiento de las variables analizadas tiende a un punto fijo que identificamos en el diagrama cerca del origen para el plano AC . De lo anterior podemos decir que al menos para el sistema dinámico (4.2), sus variables aparentemente no presentan caos en un régimen de ángulos grandes para el modelo inclinado, y solamente sería posible encontrarlo en esa región de ángulos pequeños, menores a 10° . Las órbitas periódicas encontradas son además estables.

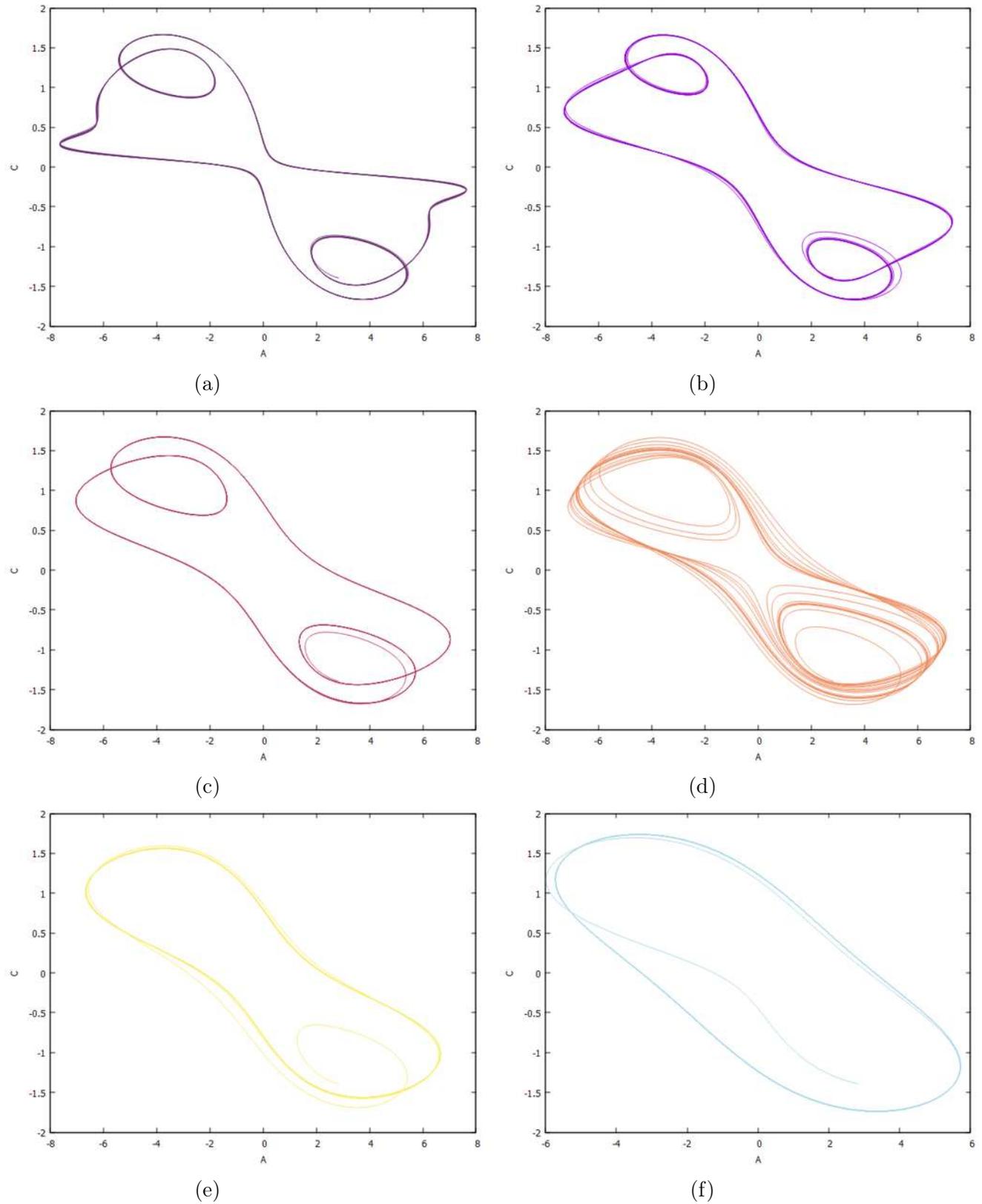


Figura 4.3: Proyección de las órbitas periódicas en el plano de fase AC , correspondientes al modelo inclinado. Se graficaron tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 44.6$; tomando diferentes inclinaciones. a) Sin inclinación. b) 0.3° c) 0.5° , d) 0.8° , e) 1° f) 2° .

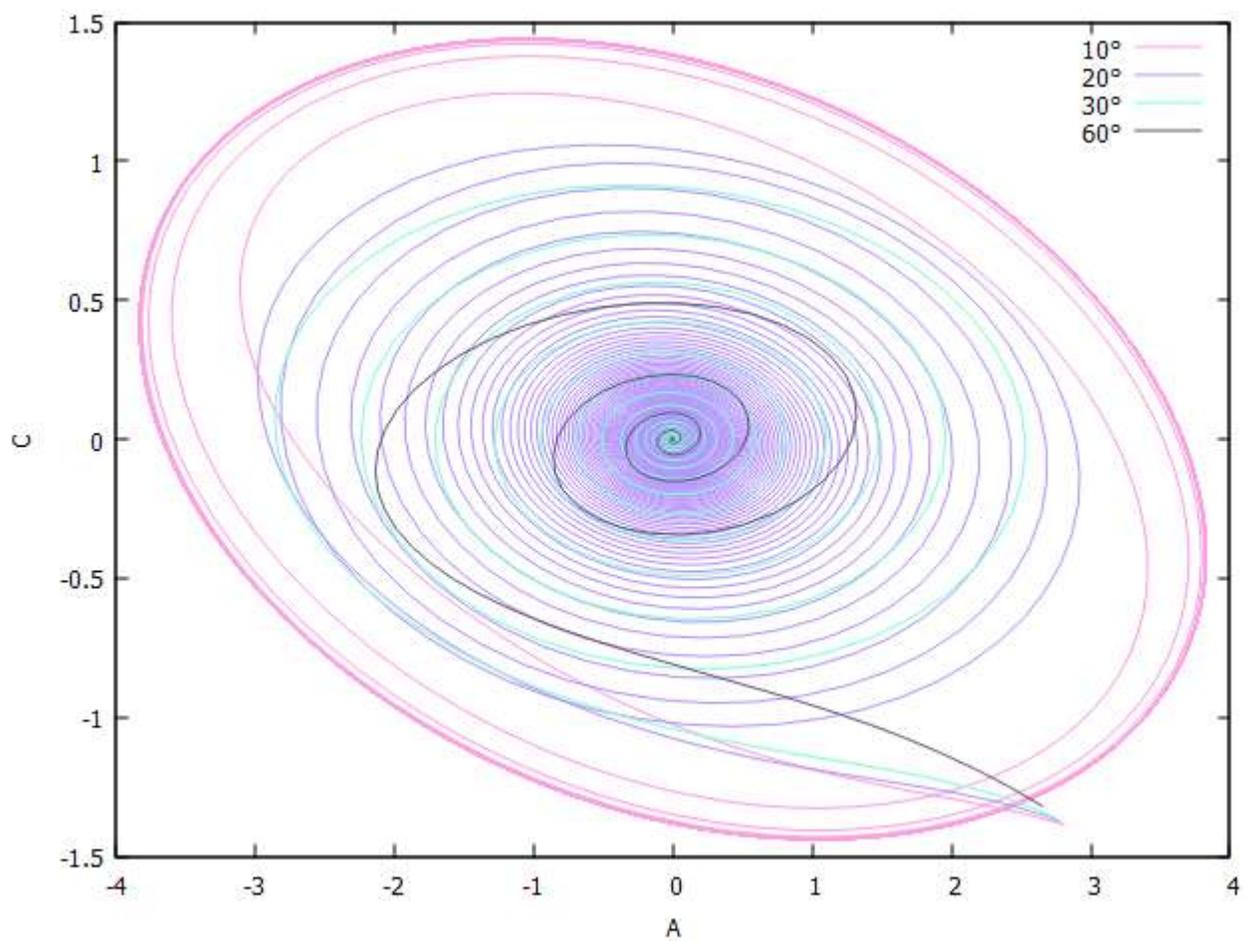


Figura 4.4: Proyección de la órbita periódica para 10° del plano fase AC , y de las trayectorias que convergen al punto fijo $(0,0)$ para ángulos mayores señalados en el diagrama. $a = 1.2$, $\sigma = 1$ y $R = 44.6$

4.2. Trayectorias de partículas pasivas

En esta sección analizaremos la advección pasiva tanto del modelo extendido (trabajo realizado por Bison [9]) y del caso con inclinación. Esto es, estudiaremos las propiedades de las trayectorias de partículas pasivas en los modelos extendidos horizontal e inclinado para cuando el flujo es periódico.

4.2.1. Modelo Extendido de HK

Al resolver numéricamente el sistema dinámico 6-dimensional de HK, se obtienen los coeficientes $A(t), \dots, F(t)$ y por tanto se pueden calcular la función de corriente $\Psi(x, z, t)$ y la temperatura $T(x, z, t) = T_c(x) + \tau(x, z, t)$. Para los propósitos de esta sección, ponemos atención en la función de corriente para estudiar el transporte advectivo que se lleva a cabo al resolver conjuntamente el sistema de ecuaciones de evolución para $A(t), \dots, F(t)$ y las dos ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.5)$$

que proporcionan las trayectorias de partículas pasivas. En la figura 4.5, se graficaron las trayectorias de un conjunto de partículas con diferentes condiciones iniciales, elegidas convenientemente para empatar con las gráficas mostradas en los resultados que obtuvo Binson (1998) [9]; en total son cuatro gráficas en los que para cada uno se tomó un número de Rayleigh distinto. Tomamos además los mismos valores de parámetros sugeridos: $\sigma = 1$ y $a = 1.2$.

Notamos que para un R no muy grande, como lo es $R = 17.47$, se mantiene la misma forma de las celdas tradicionales de convección tal como las que aparecen en el modelo clásico de Lorenz. Notamos la formación de trayectorias de celdas convectivas inclinadas para el valor de $R = 27.35$ y mayores, como las que se muestran en las gráficas (c) ($R = 37.2$) y (d) ($R = 38.6369$); en estas dos últimas gráficas, se nota la aparición de celdas en forma de gotas más pequeñas en los espacios que quedan entre las celdas más grandes. Para este sistema extendido ya hemos de reconocer una diferencia notable con respecto al sistema clásico por el cambio en la simetría de sus celdas al incrementar el valor de R .

Los siguientes diagramas siguen la evolución de las trayectorias de partículas individuales a tiempo grandes ($t > 300$). Ver figura 4.6. Se tomaron los valores $\sigma = 1$ y $a = 1.2$. En el primer diagrama tomamos $R = 40.2762$, y notamos que la forma de las celdas es todavía simétrica; la partícula viaja de una órbita a otra, pasando incluso por los atractores de gota y regresando a las celdas más grandes. Se tiene en este caso un movimiento en el que el desplazamiento en x , tiene un rango aproximadamente cuatro veces mayor que la altura entre las placas limítrofes del sistema. Cabe mencionar que para el modelo clásico de Lorenz, el rango de distancia recorrida en la dirección x era apenas de una unidad de altura entre las placas, esto es, usualmente no escapaban de una celda convectiva; el modelo extendido de HK sí posibilita el estudio del transporte advectivo.

En el segundo diagrama, con $R = 44.6$, la trayectoria es muy irregular, probablemente caótica. Observamos una pérdida de simetría entre las celdas formadas por el paso de la partícula; estas celdas están cada vez más 'aplastadas' y observamos cambios espontáneos. En la figura 4.7, para un tiempo de simulación de $t = 600$, se evolucionan dos partículas con condiciones iniciales muy cercanas, sin embargo sus posiciones finales quedan muy distantes una de otra, quedan en posiciones sumamente diferentes con aproximadamente 20 unidades de distancia entre ellas. Esto podría ser una indicación de que, en efecto, tenemos un comportamiento caótico. No obstante, sería necesario el cálculo de los exponentes de Lyapunov para determinar si en efecto tenemos trayectorias caóticas, este es un trabajo que queremos realizar en el futuro cercano.

4.2.2. Modelo Inclinado

En el caso del modelo inclinado, analizaremos la evolución de las trayectorias de partículas pasivas primero para incrementos pequeños del ángulo de inclinación y después continuar el análisis para ángulos más grandes. De la sección anterior vimos que el $R = 44.6$ es de interés debido a la formación de una órbita periódica en el retrato de fase.

En la figura 4.8 para un ángulo $\gamma = 0.3^\circ$, la figura 4.9 para $\gamma = 0.5^\circ$ y la figura 4.10 para $\gamma = 1.5^\circ$, se muestran trayectorias de partículas pasivas. Para todos los diagramas utilizamos $\sigma = 1$ y $a = 1.2$. En la primera figura 4.8, vemos que para este primer ángulo pequeño de 0.3° , con valor de $R = 38.72421$, se mantienen la forma simétrica de las celdas; no se nota a primera vista, por las escalas, pero estas celdas son más anchas que las del modelo sin inclinación. Una característica importante de esta gráfica, es que si la condición inicial se fija en la región cerca de la mitad de la altura, las partículas se mantienen oscilando en una sola celda. Al tomar condiciones iniciales más cercanas a las tapas, éstas viajan más distancia brincando de una celda a otra.

Para la misma figura pero del inciso b), tomando $R = 44.6$, notamos un comportamiento básicamente sin simetría. Aquí las partículas recorren un rango de x considerablemente más grande con respecto al sistema sin inclinación. Para ángulos ligeramente más grandes como son 0.5° y 0.8° se dejan de ver marcadas las celdas más exteriores, a tal punto que la partícula sigue un camino similar a un zig-zag suave cerca de las tapas. El rango de distancia recorrida es considerablemente más grande, para los dos valores de R analizados.

Posteriormente comparamos las trayectorias para ángulos grandes, y mostramos las gráficas correspondientes para $R = 38.9$ (figura 4.11) y para $R = 44.6$ (figura 4.12). La tendencia mostrada en los diagramas 4.9 y 4.10, en el que se ve como las celdas más exteriores se van 'rompiendo' y en su lugar las partículas comienzan a tener un movimiento en zig-zag se hace aún más evidente para ángulos mayores de 10° , donde éste (el zig-zag) se vuelve la totalidad de la forma de la trayectoria de las partículas, además que ese movimiento se va amortiguando, tendiendo para cada ángulo particular, a un valor de z ; en la segunda figura se observa un poco mejor que las trayectorias se acercan más respecto

a su posición final en z , en un valor que está entre $z = 0.4$ y $z = 0.45$. En el caso de un valor mayor de R ese cambio es más abrupto. Además, otra característica relevante para inclinaciones grandes es que al aumentar el número de R , la partícula se mueve con más rapidez, alcanzando un rango de recorrido mayor en la dirección x .

Finalmente visualizamos la posición x como función de tiempo de dos partículas con condiciones iniciales muy cercanas, a un tiempo $t = 600$, considerando uno de los valores de ángulos pequeños de interés, en este caso 0.3° , y tomando $R = 44.6$ (vea la figura 4.13). Comparando esta gráfica con la correspondiente al modelo sin inclinación (figura 4.7) vemos que si incrementamos ligeramente la inclinación del sistema, las partículas tienen trayectorias tales que éstas se alejan más rápido una de la otra; es decir, tienden a posiciones finales con mayor diferencia; nuevamente, esto es un indicio de caos advectivo, pero como se ha dicho, es con el cálculo de los exponentes de Lyapunov, que se puede establecer en forma definitiva la aparición del caos.

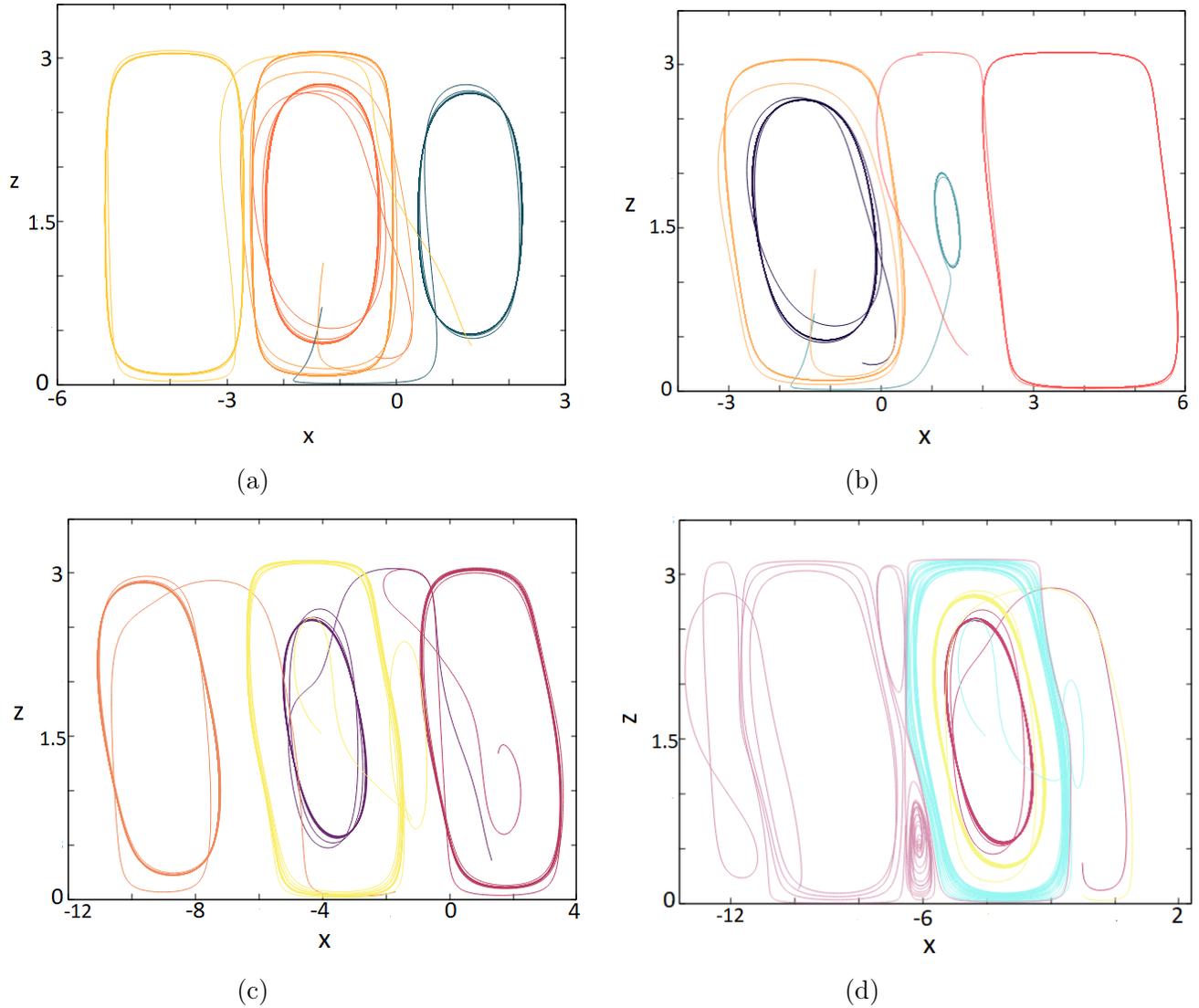
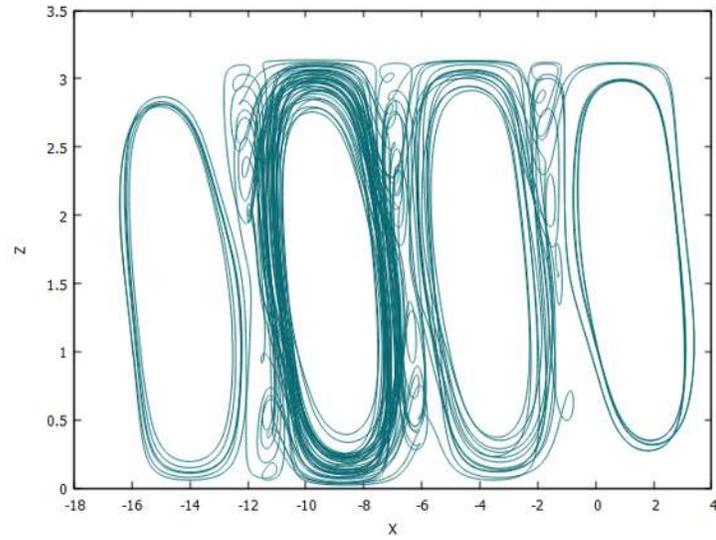
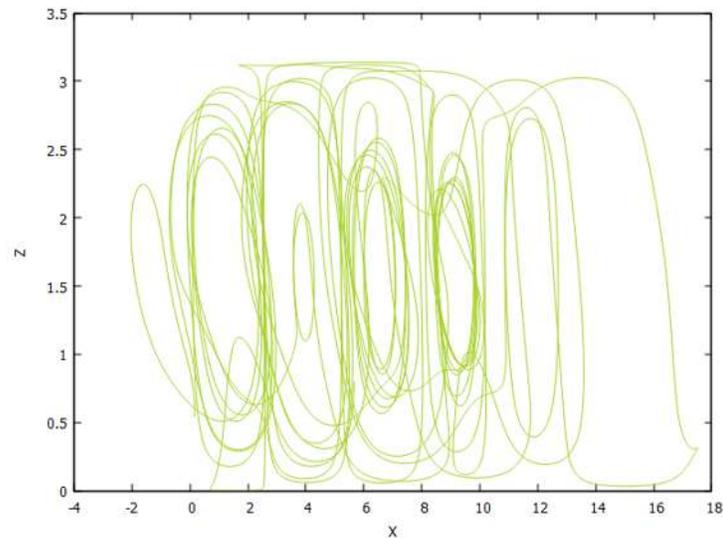


Figura 4.5: Líneas de flujo del modelo HK (sin inclinación), correspondientes a 4 condiciones iniciales (CI's) (x_0, z_0) diferentes para cada diagrama, y con un valor de tiempo $t = 100$. Tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$, para diferentes valores de R . (a) $R = 17.47$, con las CI's: $[(-0.5, 0.3), (-1.25, 1.25), (-1.25, 1.25), (1.5, 0.25)]$; (b) $R = 27.35$, con las CI's: $[(2, 0.25), (-1.25, 1.25), (-1.25, 0.9), (-0.5, 0.3)]$; (c) $R = 37.20$, con las CI's: $[(1.5, 0.25), (1.5, 1.25), (-1.5, 0.1), (-4, 3.2)]$; (d) $R = 38.6369$, con las CI's: $[(-1, 0.5), (-1, 0.1), (-4, 1.5), (-3, 1.5)]$



(a)



(b)

Figura 4.6: Trayectorias de partículas individuales correspondientes al modelo extendido, tomadas a un tiempo $t = 300$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$, para diferentes valores de R . a) $R = 40.27628$ y b) $R = 44.6$

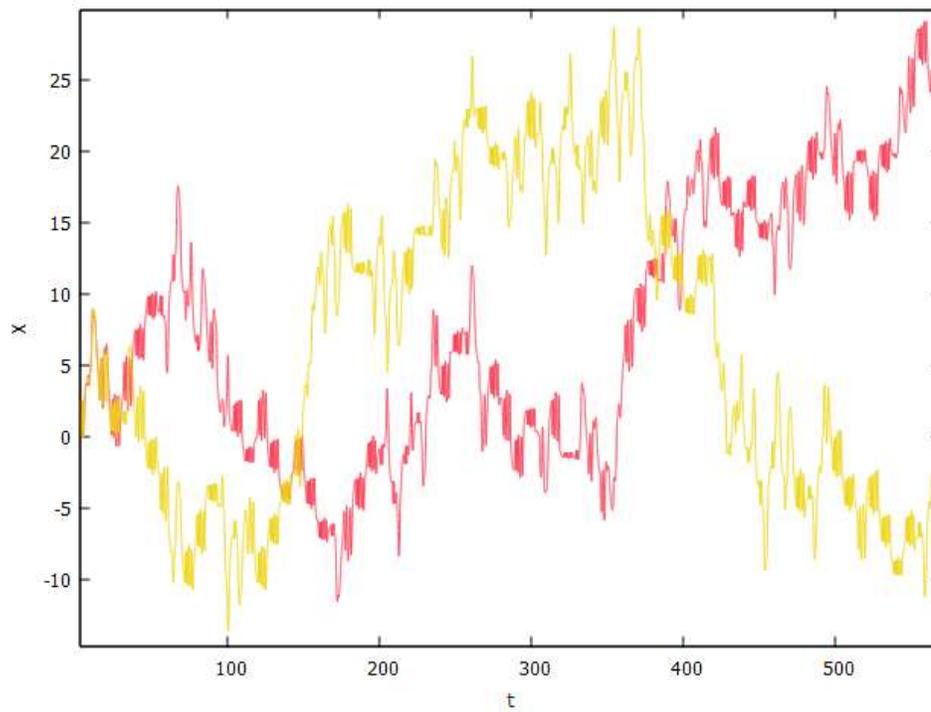
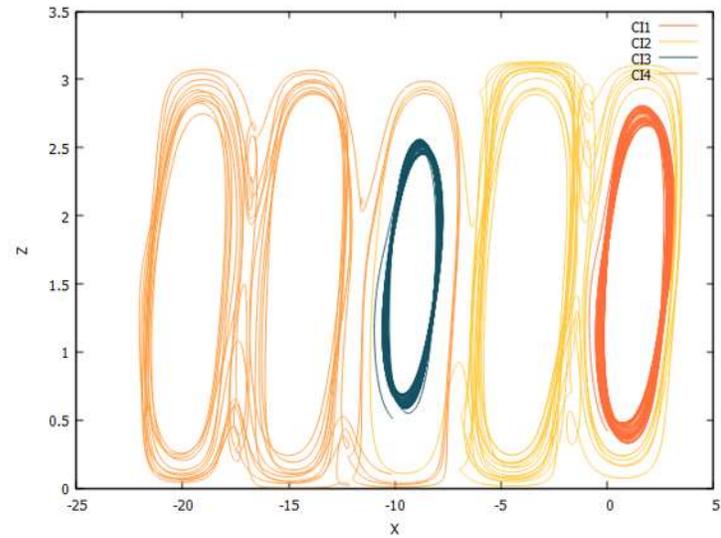
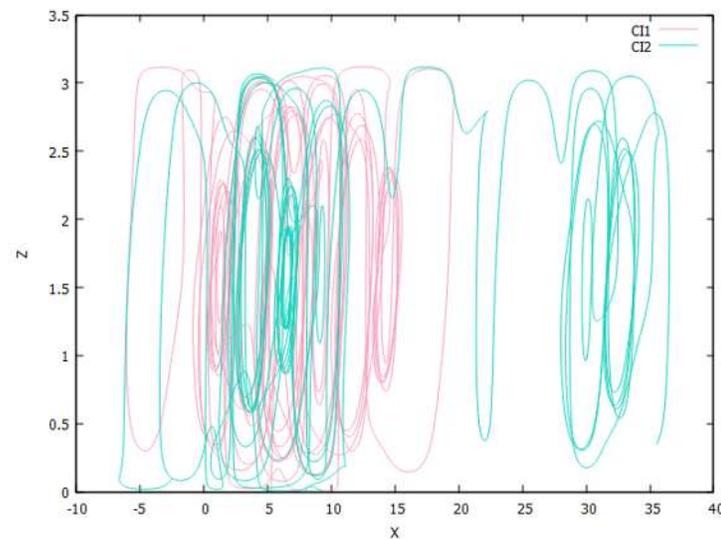


Figura 4.7: Posiciones como función del tiempo para dos condiciones iniciales muy cercanas, a un tiempo $t = 600$, el valor de $R = 44.6$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$.

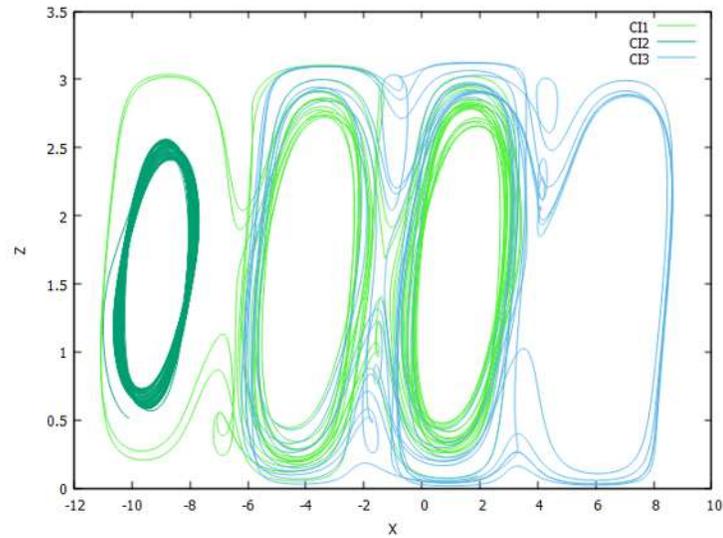


(a)

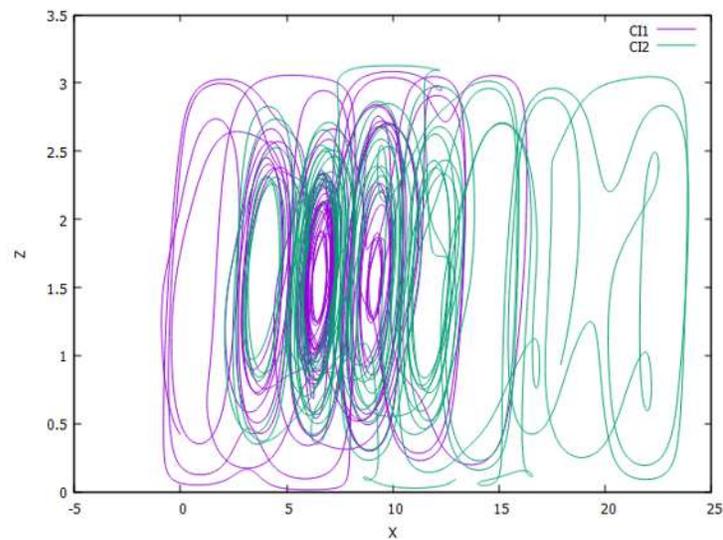


(b)

Figura 4.8: Trayectorias de partículas con diferentes condiciones iniciales, correspondientes al modelo inclinado, con ángulo de inclinación de 0.3° . Se calcularon a un tiempo $t = 100$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$, para diferentes valores de R : a) $R = 38.72421$ y b) $R = 44.6$.

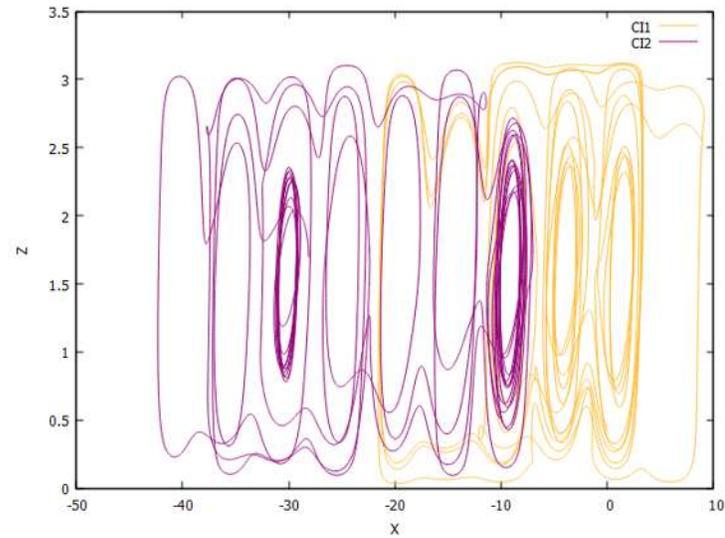


(a)

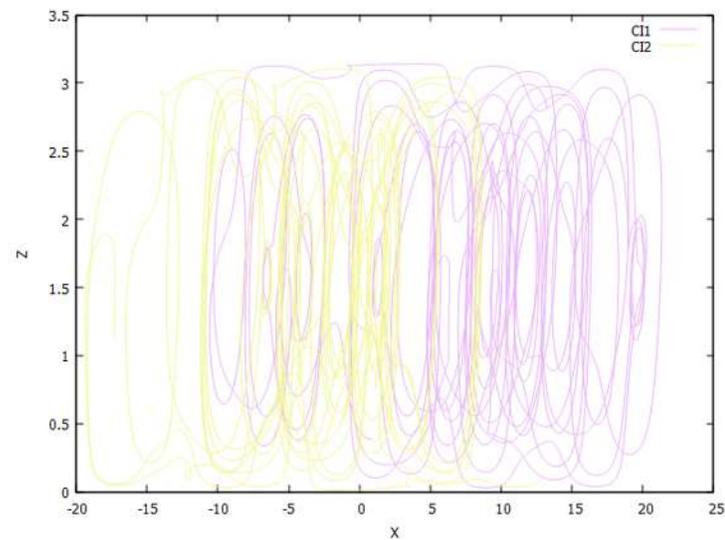


(b)

Figura 4.9: Trayectorias de partículas con diferentes condiciones iniciales, correspondientes al modelo inclinado, con ángulo de inclinación de 0.5° . Se calcularon a un tiempo $t = 100$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$, para diferentes valores de R : a) $R = 38.72421$ y b) $R = 44.6$.



(a)



(b)

Figura 4.10: Trayectorias de partículas con diferentes condiciones iniciales, correspondientes al modelo inclinado, con ángulo de inclinación de 1.5° . Se calcularon a un tiempo $t = 100$, $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$, para diferentes valores de R : a) $R = 38.72421$ y b) $R = 44.6$.

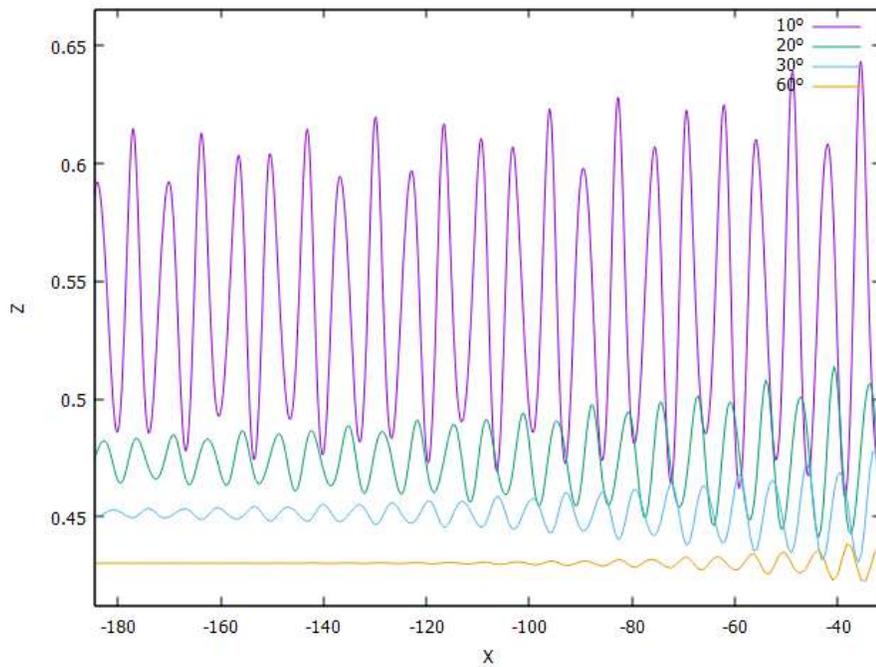


Figura 4.11: Trayectorias de una partícula individual para el modelo. Cada línea representa un ángulo de inclinación distinto señalado en la figura (10° , 20° , 30° y 60°). Se usó $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$. Para cada caso se conservó la misma condición inicial $(0.1, 0.4)$ y el valor de $R = 38.9$.

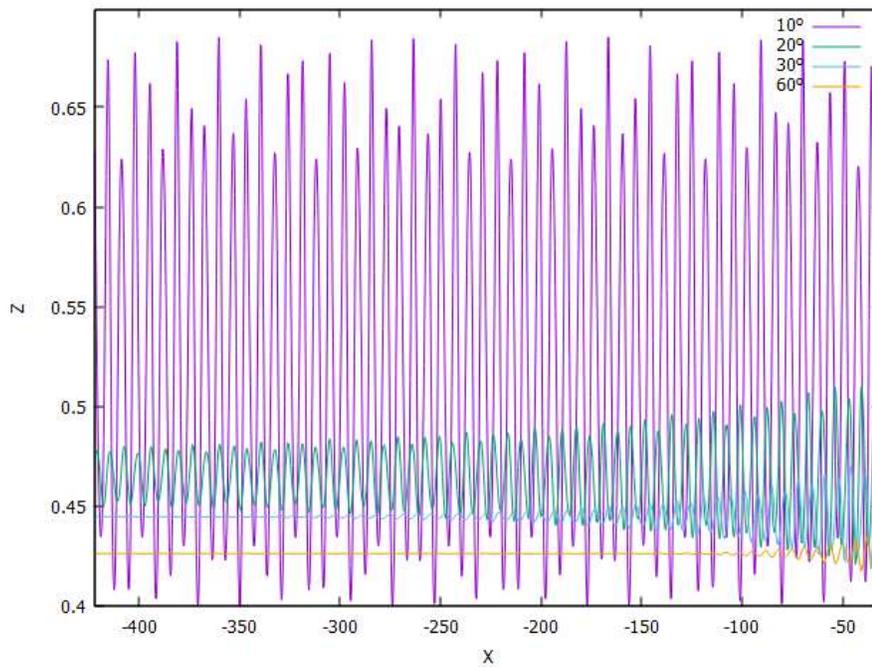


Figura 4.12: Trayectorias de una partícula individual para el modelo. Cada línea representa un ángulo de inclinación distinto señalado en la figura (10° , 20° , 30° y 60°). Se usó $a = 1.2$ y $\sigma = 1.0$. Para cada caso se conservó la misma condición inicial $(0.1, 0.4)$ y el valor de $R = 44.6$.

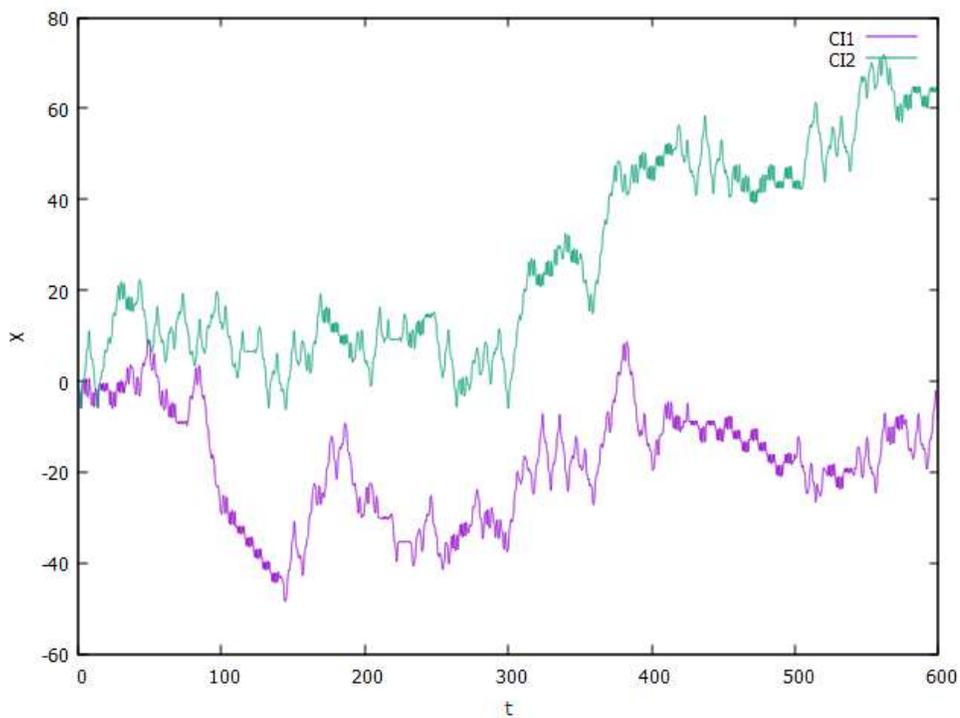


Figura 4.13: Posición como función del tiempo para dos condiciones iniciales muy cercanas, correspondientes al modelo inclinado con ángulo de inclinación de 0.3° . Se usó un tiempo $t = 600$, $a = 1.2$, $\sigma = 1.0$ y $R = 44.6$.

4.3. Coeficiente de Difusión y Desplazamiento Cuadrático Medio

La difusión de partículas pasivas en un fluido con flujo R-B se considerara esencialmente un proceso unidimensional debido a que consideramos que en la dirección x se considera que el sistema se extiende infinitamente. Para la difusión a lo largo de una línea calculamos el desplazamiento cuadrático medio de un conjunto de partículas que inicialmente consideramos en una nube que es liberada en el dominio del flujo; el desplazamiento cuadrático medio es:

$$\Delta X^2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle (x - x_0)^2 \rangle \quad (4.6)$$

donde el subíndice '0' hace referencia a la posición inicial de las partículas y el símbolo $\langle \rangle$ representa el promedio hecho sobre todas las partículas en esa nube. El coeficiente de difusión está definido como:

$$D(t) = \frac{\Delta X^2(t)}{2t} \quad (4.7)$$

Esta expresión fue usada desde los primeros estudios de movimiento browniano [22]. Inferimos sobre el proceso de transporte a partir de una relación

$$\Delta X^2(t) \sim \text{constante} \times t^m, \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

Para analizar más a detalle las características de ese exponente de difusión, se reprodujeron los resultados obtenidos por Binson (1998) [9], al hacer el cómputo de una nube de 5000 partículas distribuidas aleatoriamente (vea figura 4.14). Para un proceso de difusión de tipo Browniano, el exponente de difusión es $m = 1$, y entonces el coeficiente de difusión D , es independiente del tiempo (una constante). Por otro lado, cuando se analiza la distancia recorrida por una partícula en un flujo de tipo cortante, ésta es proporcional al tiempo, y entonces $m = 2$. Puede haber procesos de transporte intermedios con $1 < m < 2$. En los cálculos numéricos, evidentemente se realizan a un tiempo grande pero finito y con un número también finito de partículas en la nube.

Analizaremos entonces el proceso de difusión para el modelo de Howard y Krishnamurti, tal como lo hizo Binson en su artículo. Posteriormente se hará el mismo análisis para el modelo inclinado, pues nos interesa conocer el efecto en la difusión debida a la inclinación del sistema que en su estado conductivo genera una velocidad con perfil cúbico y esta velocidad debe tener algún efecto que deseamos determinar.

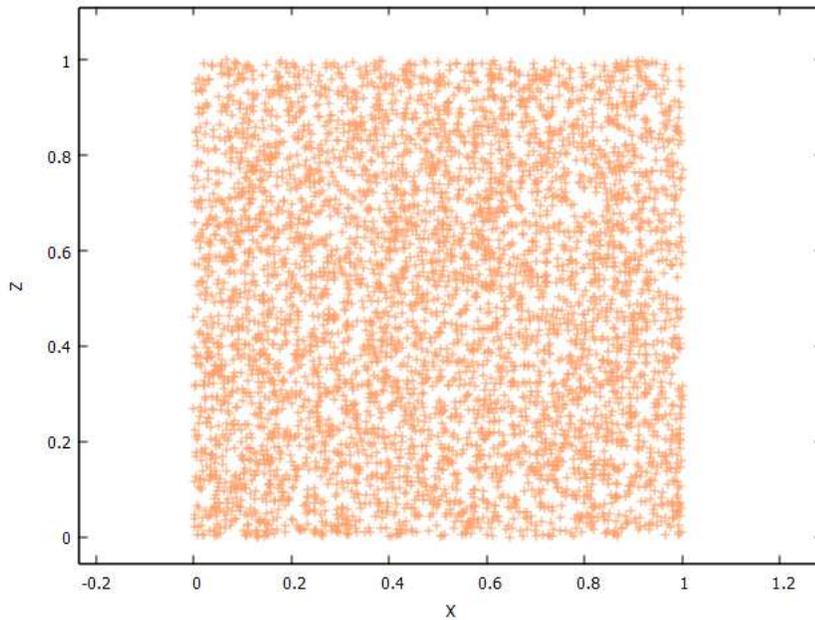


Figura 4.14: Condiciones iniciales de partículas generadas aleatoriamente para el cálculo del desplazamiento cuadrático medio. Suman un total de 5000 condiciones iniciales, en la región $[0, 1] \times [0, 1]$.

En el código utilizado (escrito por el Dr. Becerril en el lenguaje de programación C) se definen condiciones iniciales aleatorias para las posiciones (x_0, z_0) de cada una de las partículas en la nube. En el mismo, se resuelve el modelo dinámico juntamente con las dos ecuaciones del transporte advectivo, usando el método integrador Runge Kutta de orden 4 [19]. Posterior a ello, se hace el cálculo del promedio de los desplazamientos para cada partícula, dado por la ecuación (4.6).

4.3.1. Modelo Extendido

Los resultados obtenidos para el caso del modelo extendido se presentan en las figuras 4.15 a la 4.18. Se reprodujeron las gráficas presentadas en el artículo de Binson [9]. En la figura 4.15, se grafica el Coeficiente de Difusión, como al ajuste del desplazamiento cuadrático medio, ambas respecto del tiempo. En la grafica (b) se tomó el logaritmo de la ecuación (4.8) y se hizo un ajuste lineal para encontrar el coeficiente de difusión m , como la pendiente de la recta. Se tomaron los valores sugeridos de $\sigma = 1$ y de $a = 1.2$. Para $R = 38.62683$, vemos una tendencia lineal del coeficiente de difusión y corresponde a un coeficiente con valor $m = 1.996$, muy cercano a 2, por lo que correspondería a un flujo de tipo cortante.

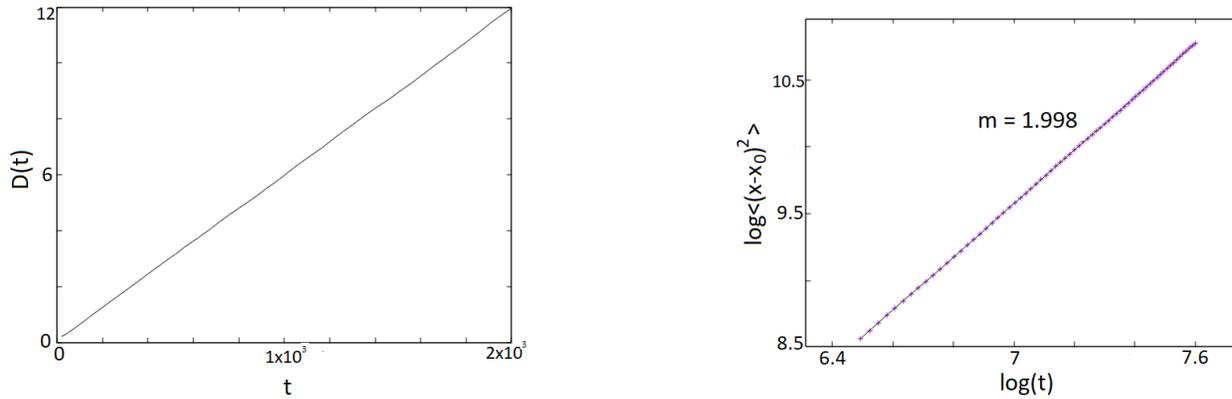


Figura 4.15: Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido HK, tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 38.62683$ y a un tiempo total $t = 2 \times 10^3$. Se encontró un valor de $m = 1.998$.

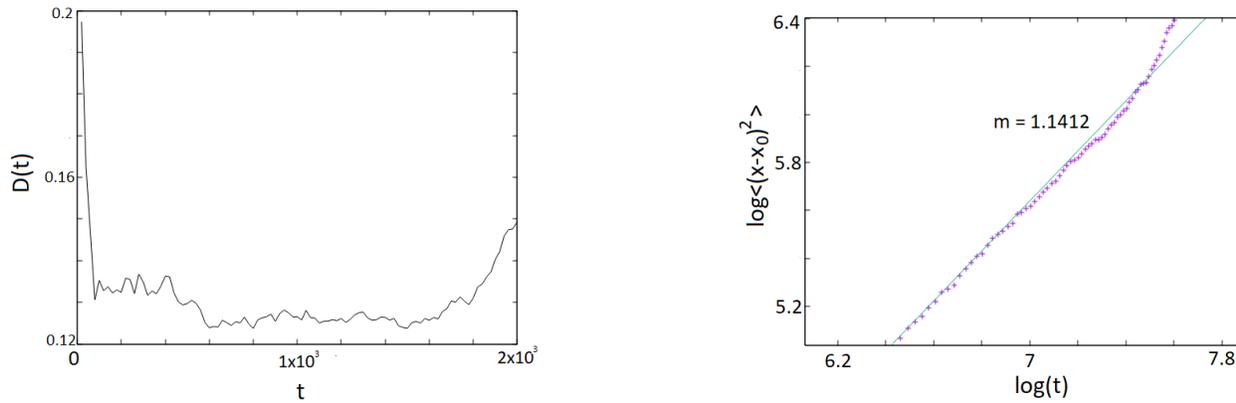


Figura 4.16: Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido HK, tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 38.72421$, y a un tiempo total $t = 2 \times 10^3$. Se encontró un valor de $m = 1.1412$.

Para los siguientes tres valores de R (las figuras 4.16, 4.17 y 4.18) los exponentes m , son más acercados al valor de $m = 1$, en especial para $R = 40.2762$ (ver figura 4.17, que correspondería al valor el exponente m de un flujo de tipo Browniano; en los casos restantes se tiene valores de m en el rango $1 < m < 2$, por lo que nos encontramos en un régimen intermedio entre flujo de tipo B y cortante, tal como sugerían los experimentos previos.

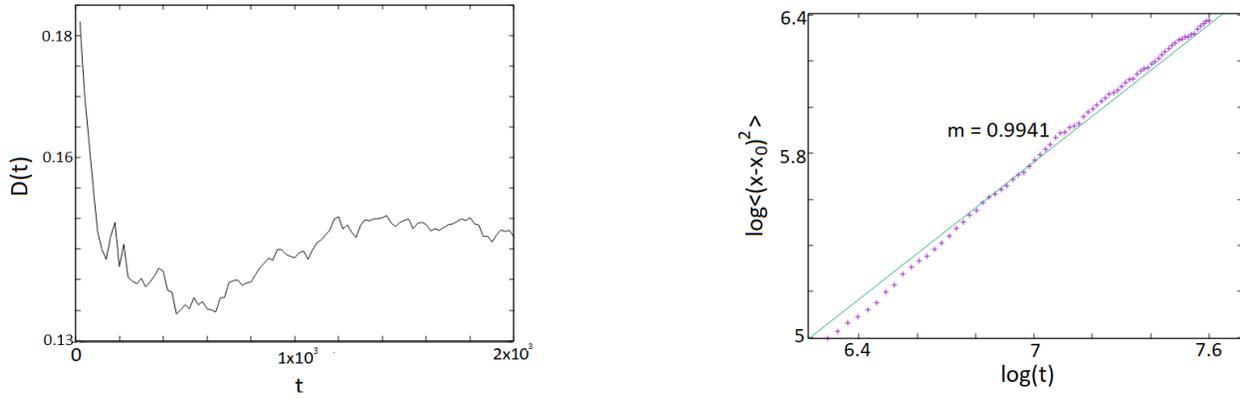


Figura 4.17: Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido HK, tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 40.27628$, y a un tiempo total $t = 2 \times 10^3$, se calculó $m = 0.9941$

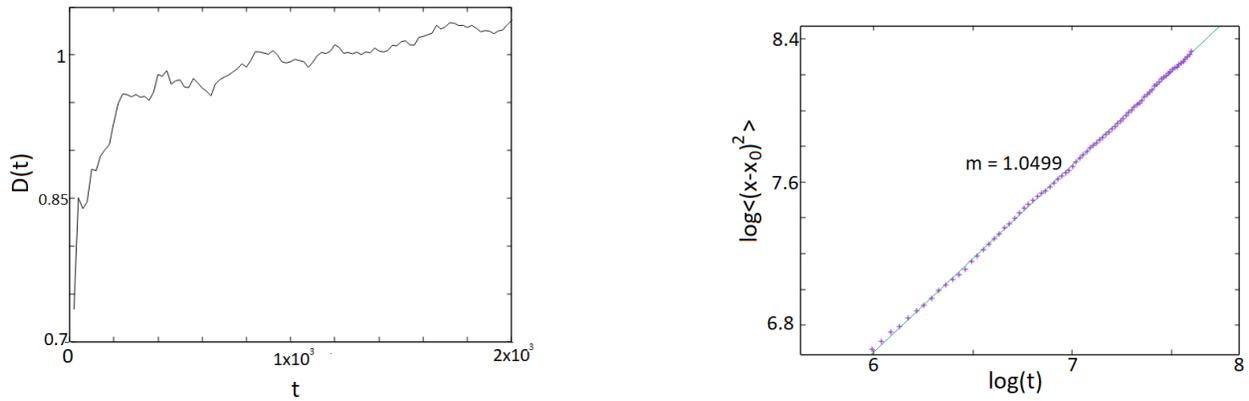


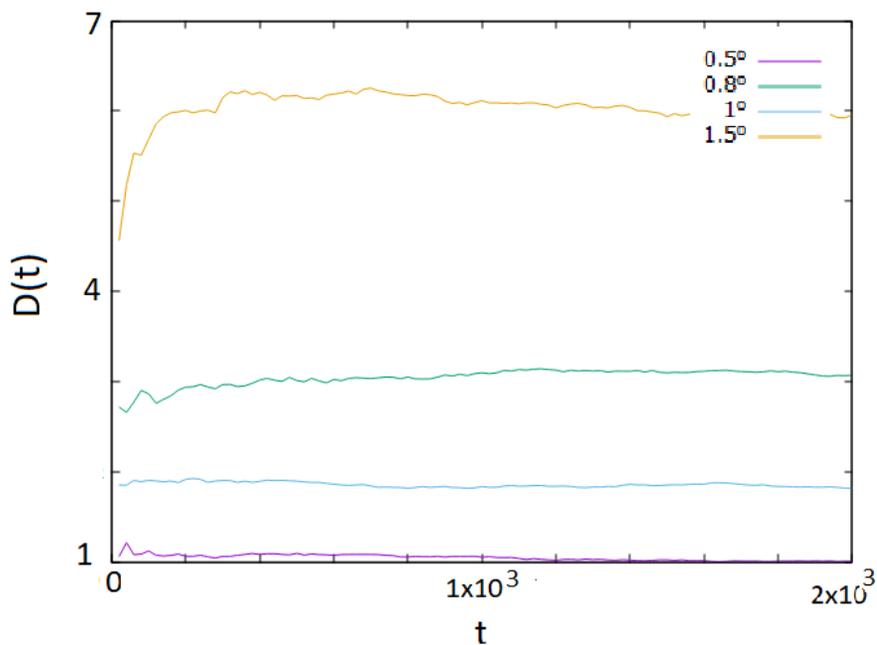
Figura 4.18: Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido HK, tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 42.38361$, y a un tiempo total $t = 2 \times 10^3$, se calculó $m = 1.0499$

4.3.2. Modelo Inclinado

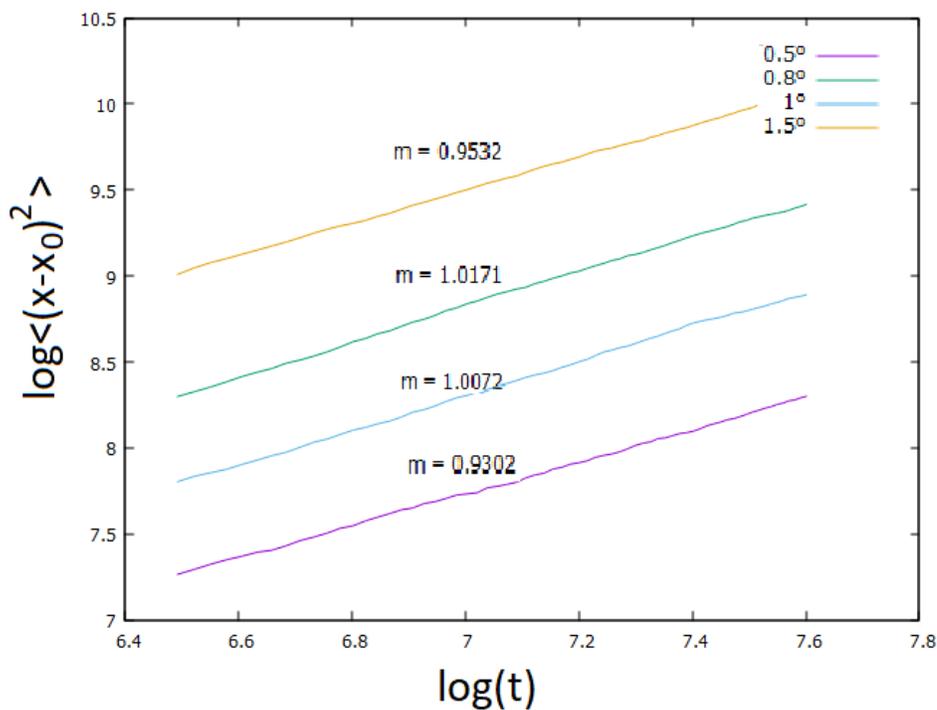
Se calculan tanto el coeficiente de difusión $D(t) = \frac{\Delta X^2(t)}{2t}$ y el exponente m para el caso del modelo tipo Lorenz inclinado. Son las figuras 4.19 donde se presentan los resultados para ángulos γ pequeños, y ?? para ángulos de inclinación mayores.

Tomamos los valores de los parámetros sugeridos para $\sigma = 1.0$ y $a = 1.2$, y tomamos como valor del número de Rayleigh el valor $R = 44.6$. De la figura 4.19, resulta evidente que para valores pequeños del ángulo de inclinación γ , el flujo de las partículas presenta un exponente bastante cercano a $m = 1$, donde el ángulo γ lo hacemos variar desde 0.3° a 1.5° . Por lo que observamos que para intervalos de ángulos pequeños, el flujo está descrito con un comportamiento de tipo Browniano.

De la figura 4.20, vemos que a partir de un ángulo de 3° en adelante, el valor del exponente m ya es casi 2, por lo que el flujo es de tipo cortante. No hay un régimen intermedio muy grande, salvo para valores de inclinación de 2° y 3° . Otra característica importante que notamos para ángulos grandes es que el coeficiente de difusión tiende a valores muy grandes, al incrementar el ángulo de inclinación.



(a)



(b)

Figura 4.19: Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido inclinado. Tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 44.6$, para diferentes ángulos de inclinación etiquetados en la figura.

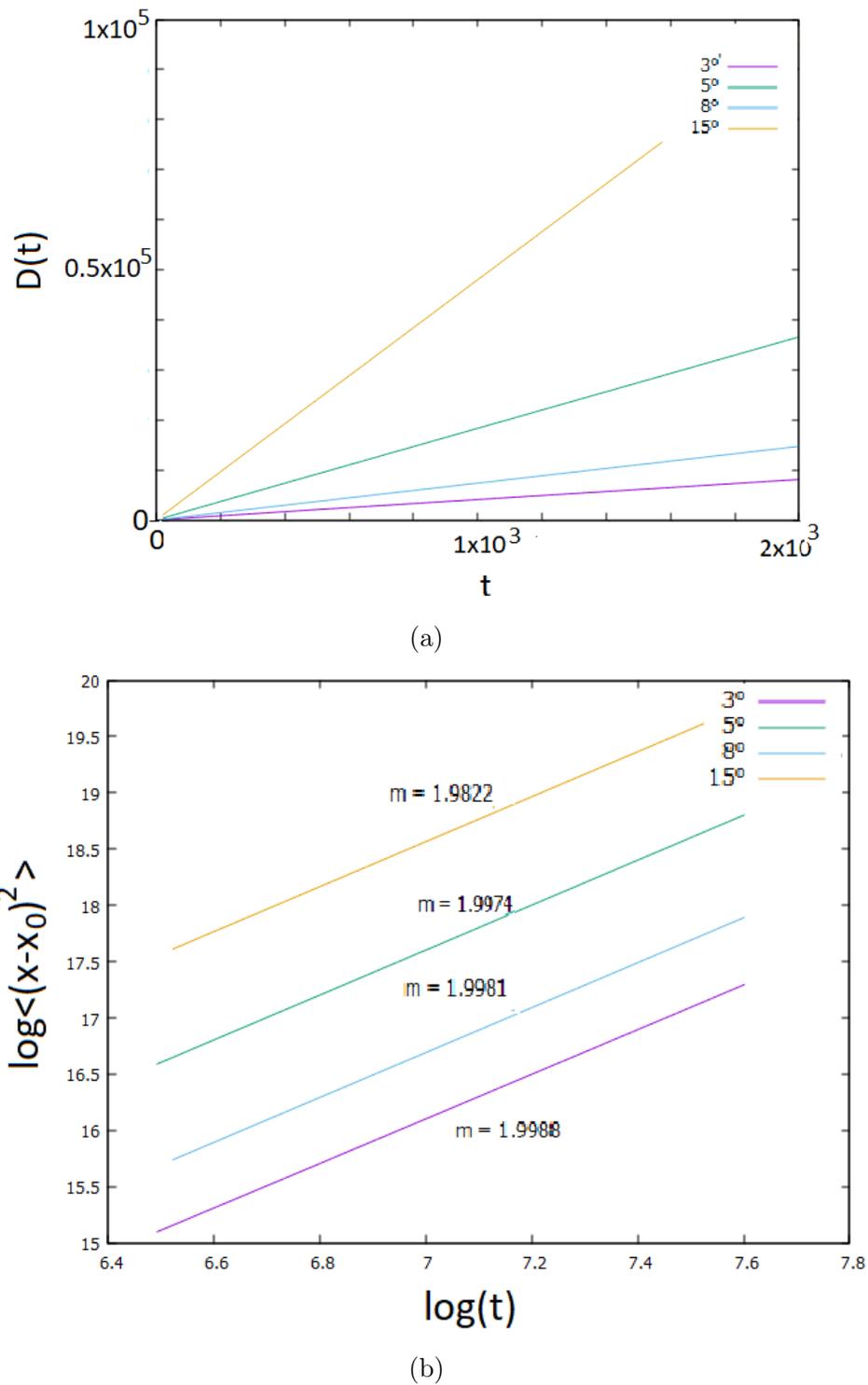


Figura 4.20: Gráficas del coeficiente de difusión $D(t)$ (a), y del desplazamiento cuadrático medio (b) como función del tiempo, para el modelo extendido inclinado. Tomando $\sigma = 1$, $a = 1.2$ y $R = 42.8361$, para diferentes ángulos de inclinación etiquetados en la figura.

Capítulo 5

Conclusiones y Comentarios Finales

Esta tesis estuvo enfocada en el estudio del transporte advectivo en un flujo de Rayleigh Bénard con inclinación, para el cual construimos un modelo tipo Lorenz siguiendo las pautas del modelo de Howard Krishnamurti. El modelo con inclinación se reduce al de HK al tomar el valor de inclinación $\gamma = 0$.

Reprodujimos comportamientos periódicos (ciclos límite) para algunos valores del parámetro de Rayleigh R del artículo [10], tomando dichos valores en el rango $38.802 < R < 140$, correspondiente al inicio de aparición de órbitas estables. Basados en esos ciclos límite encontrados para el modelo HK, observamos que para valores del ángulo de inclinación del sistema γ menores de 10° , aunque la forma del ciclo límite va cambiando lentamente, sigue existiendo un ciclo límite, pero para valores de γ mayores que 10° esos ciclos límite desaparecen y se crean puntos fijos atractores. De los valores de ángulos analizados, permanece ese comportamiento hasta el valor de $gamma = 60^\circ$, sin haber encontrado en este estudio, un ángulo máximo que lo presente.

Con estas soluciones periódicas del modelo inclinado, se calcularon los coeficientes de difusión que Binson [9] presentó en un estudio previo, para el cual $\gamma = 0$. Respecto a las trayectorias de partículas individuales en el plano $x - z$, encontramos que para el modelo inclinado se tiene un comportamiento similar al que se obtiene de analizar el modelo sin inclinación, pero solamente para el régimen de ángulos muy pequeños entre 0° y 1° . Una morfología diferente se hace notar cerca de $\gamma = 10^\circ$, donde las trayectorias dejan de estar regidas por celdas de convección (inclinadas) y son reemplazadas por trayectorias que oscilan en un movimiento tipo zig-zag en la dirección z mientras recorren distancias considerables en la dirección x . Algunas de estas oscilaciones además, se van amortiguando, con un amortiguamiento mayor al incrementar el ángulo. Por tanto, el modelo inclinado está caracterizado en su mayor parte por trayectorias que no son celdas de convección, si no que tiene una apariencia sinusoidal con amplitudes que disminuyen a medida que el ángulo crece. De los valores de ángulos analizados, permanece ese comportamiento hasta el valor de $gamma = 60^\circ$, sin haber encontrado en este estudio, un ángulo máximo que lo presente.

Al analizar además las trayectorias en x como función del tiempo para condiciones iniciales muy cercanas, notamos que para ángulos pequeños las trayectorias se separan,

esto es un indicativo de sensibilidad a las condiciones iniciales, la marca de la aparición del caos. Este comportamiento continua todavía hasta un ángulo de inclinación menor de 8° , posterior a eso, con condiciones iniciales cercanas, se generan trayectorias de partículas pasivas que no se alejan significativamente aún en tiempos muy grandes.

Respecto a los diagramas del coeficiente de difusión, se reprodujeron los correspondientes al sistema extendido estudiados por Binson para nubes de 5000 partículas con condiciones iniciales aleatorias acotadas en una región pequeña del sistema. Para el modelo inclinado encontramos que todos los coeficientes de difusión fueron muy cercanos a 1 para ángulos pequeños entre 0° y 2° , lo que muestra un flujo de tipo Browniano. Posterior a ese valor de inclinación, los exponentes m dados por la ecuación (4.8), son muy cercanos a 2, desde 3° en adelante. Podemos concluir que en su mayoría, el sistema inclinado presenta un flujo de tipo cortante, a excepción de ángulos pequeños. En los experimentos numéricos realizados, no se encontraron valores de los exponentes de un régimen intermedio.

En el futuro, pretendemos construir el espectro de los exponentes de Lyapunov que nos permitirían identificar los intervalos de R donde existe caos y dónde existe orden para el modelo HK. Para el sistema inclinado, también pretendemos construir este espectro, aunque deberá ser un espectro biparamétrico (R, γ) . La construcción del diagrama de bifurcaciones es también una asignatura pendiente. Los códigos utilizados, escrito en lenguaje C, están disponibles a todos los que lo soliciten al Dr. Becerril.

Bibliografía

- [1] Bénard, H. (1900). Étude expérimentale des courants de convection dans une nappe liquide.—Régime permanent: tourbillons cellulaires. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 9(1), 513-524.
- [2] Bodenschatz, E., Pesch, W., Ahlers, G. (2000). Recent developments in Rayleigh-Bénard convection. *Annual review of fluid mechanics*, 32(1), 709-778.
- [3] Borrelli, R., Coleman, C. S. (2002). *Ecuaciones Diferenciales: una perspectiva de modelación*. Oxford University Press.
- [4] Rayleigh, L. (1916). LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 32(192), 529-546.
- [5] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2), 130-141
- [6] Lorenz, E. N. (1994) *The Essence of Chaos*. University of Washington Press, Seattle.
- [7] Aref, H. (1984). Stirring by chaotic advection. *Journal of fluid mechanics*, 143, 1-21.
- [8] Aref, H., Blake, J. R., Budišić, M., Cardoso, S. S., Cartwright, J. H., Clercx, H. J., ... Tuval, I. (2017). Frontiers of chaotic advection. *Reviews of Modern Physics*, 89(2), 025007.
- [9] Binson, J. (1998). Chaotic advection in large-scale convection. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(01), 57-71.
- [10] Howard, L. N., Krishnamurti, R. (1986). Large-scale flow in turbulent convection: a mathematical model. *Journal of fluid mechanics*, 170, 385-410.
- [11] Gray, D. D., Giorgini, A. (1976). The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(5), 545-551.
- [12] Saltzman, B. (1962). Finite amplitude free convection as an initial value problem - I. *Journal of the Atmospheric Sciences* 19, 329-41.
- [13] Hilborn, R. C. (2000). *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press on Demand.

- [14] Malkus, W. V. R. (1954). Discrete transitions in turbulent convection. Proc. R. SOC. Lond. A225, 185-195.
- [15] Willis, G. E. Deardroff, J.W. 1967a Development of short-period temperature fluctuations in thermal convection. Phys. Fluids 10, 931-937.
- [16] Willis, G. E. Deardroff, J. W. 1967 b Confirmation and renumbering of the discrete heat flux transitions of Malkus. Phys. Fluids 10, 1861-1866.
- [17] Krishnamurti, R.1970a On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow. J. Fluid Mech. 42, 295-307.
- [18] Krishnamurti, R. 1970b On the transition to turbulent convection. Part 2. The transition to time-dependent flow. J. Fluid Mech. 42, 309-320.
- [19] Teukolsky, S. A., Flannery, B. P., Press, W. H., Vetterling, W. T. (1992). Numerical recipes in C. SMR, 693(1), 59-70.
- [20] Strogatz, S. H., Fox, R. F. (1995). Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Physics Today.
- [21] Grassberger, P., Procaccia, I. (1983). Characterization of strange attractors. Physical review letters, 50(5), 346.
- [22] Einstein, A. (1956). Investigations on the Theory of the Brownian Movement. Courier Corporation.