



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

ESTRUCTURA GEOMÉTRICA DE LOS ESPACIOS
DE RAÍCES DE POLINOMIOS Y SOLUCIÓN POR
RADICALES DE ECUACIONES POLINOMIALES

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

Presenta:

Néstor Uriel Anguiano Huitrón

Director de Tesis:

Dr. Jorge Luis López López



Morelia, Mich.

Octubre de 2021

Agradecimientos y dedicaciones

Este trabajo se lo dedico principalmente a mis padres Miguel Anguiano Mincítar y María Dolores Huitrón Zamudio. Aprovecho para agradecerles sus incansables esfuerzos por hacerme crecer en todos los sentidos. Agradezco a mi padre, quien desde niño me inculcó el valor del esfuerzo, el amor por el conocimiento y siempre me alentó a seguir adelante. Agradezco a mi madre, quien ha sido y es mi principal soporte emocional, gracias por ayudarnos a seguir adelante.

También le dedico este trabajo a mis abuelos Miguel y Guadalupe. Agradezco a mi abuelo por haberme enseñado el valor del trabajo duro y a mi abuela por su infinito cariño.

Agradezco a todos los profesores de la Facultad que han contribuido en mi formación. En especial, le agradezco a mi director de tesis Jorge Luis López López por sus consejos, enseñanzas y paciencia que me brindó durante la creación de esta tesis y en general durante la carrera. Agradezco también a mis sinodales Luis Valero Elizondo, Gloria Guadalupe Andablo Reyes, Fernando Hernández Hernández y Reynaldo Rojas Hernández por tomarse el tiempo de leer mi trabajo y darme su valiosa opinión.

Agradezco a mis hermanos, con quienes crecí y quienes siempre han sido un soporte fundamental en mi vida. En particular agradezco a Iris, por haberse tomado el tiempo de leer mi tesis.

Finalmente agradezco a mis amigos, por su compañía y ayuda.

Resumen

En este proyecto estudiamos el problema de resolver ecuaciones polinomiales de tercer, cuarto y quinto grado con un enfoque geométrico. Primero, mostramos que cualquier polinomio de grado $k \in \{3, 4, 5\}$ se puede transformar a un polinomio de la forma $z^k + a_1z + a_2$, esto mediante una transformación de Tschirnhausen. Posteriormente, estudiamos el espacio de raíces de estos polinomios bajo cierta relación de equivalencia (la proyección de rectas complejas por el origen), obteniendo que el conjunto de clases de las raíces de $\{z^3 + a_1z + a_2\}$ es la esfera de Riemann, el conjunto de clases de las raíces de $\{z^4 + a_1z + a_2\}$ también es la esfera de Riemann, sin embargo el conjunto de clases de las raíces de $\{z^5 + a_1z + a_2\}$ resulta ser una superficie de género 4 (*i.e.* una esfera con cuatro asas). Finalmente, con la teoría utilizada previamente, construimos un algoritmo general para resolver ecuaciones de tercer grado, un algoritmo general para resolver ecuaciones de cuarto grado y bosquejamos las obstrucciones geométricas que impiden la construcción de un algoritmo general por radicales que resuelva ecuaciones de quinto grado.

Abstract

In this project we study the problem of solving cubic, quartic and quintic equations with a geometric approach. First, we show that any polynomial of k degree, with $k \in \{3, 4, 5\}$ could be transformed to a polynomial of the form $z^k + a_1z + a_2$, using a Tschirnhausen's transformation. Subsequently, we study the set of equivalence classes of an equivalence relation on the spaces of roots of that kind of polynomials, (where the equivalence relation is the projection of complex lines intersecting the origin), getting that the set of equivalence classes of roots of $\{z^3 + a_1z + a_2\}$ is the Riemann's sphere, the set of equivalence classes of roots of $\{z^4 + a_1z + a_2\}$ also is the Riemann's sphere, nevertheless, the set of equivalence classes of roots of $\{z^5 + a_1z + a_2\}$ is a surface with genus 4 (*i.e.* a sphere with four handles). Finally, with the theory used previously, we build a general algorithm for solving cubic equations, quartic equations and we sketch the geometric obstructions that prevent the construction of a general algorithm by radicals that solves quintic equations.

Palabras clave: polinomios, transformación de Tschirnhausen, superficies de Riemann, función biholomorfa, clases de equivalencia.

Índice general

Introducción	II
Notación	IV
1 Transformaciones de Tschirnhausen.	1
1.1 Polinomios de tercer grado.	2
1.2 Polinomios de cuarto grado.	3
1.3 Polinomios de quinto grado	12
2 Estructura analítica de los subespacios de polinomios	15
2.1 Espacio de raíces de los polinomios de tercer grado	15
2.2 Espacio de raíces de los polinomios de cuarto grado	23
2.3 Espacio de raíces de los polinomios de quinto grado	30
3 Construcción de algoritmos para encontrar raíces de polinomios	37
3.1 Algoritmo para los polinomios de tercer grado	37
3.2 Algoritmo para los polinomios de cuarto grado	46
3.3 ¿Qué pasa con los polinomios de quinto grado?	55
A Teoremas de Topología	58
A.1 Variedades Analíticas	59
A.2 Clasificación de Superficies	62
Bibliografía	64

Introducción

Durante nuestra vida académica, e incluso laboral, es normal tener que resolver ecuaciones de muchos tipos (exponenciales, logarítmicas, racionales, trigonométricas...), muchas veces resolver estas ecuaciones se reduce a encontrar las raíces de cierto polinomio. Este problema es uno de los más antiguos en matemáticas. Crear fórmulas para encontrar las raíces de polinomios de primer y segundo grado fue sencillo, sin embargo, crear métodos para encontrar las raíces de polinomios de grado superior fue complicado. Fue hasta el siglo XVI que el matemático italiano Niccolo Fontana, desarrolló un método para encontrar las raíces de cierto tipo de polinomios de tercer grado. Este método fue publicado por el matemático italiano Gerolamo Cardano en su obra *Ars Magna* en 1570. Fue en esta misma obra que se publicó el método para encontrar raíces de polinomios de cuarto grado. Este método fue descubierto por Ludovico Ferrari, alumno de Cardano y consiste en reducir el problema a encontrar las raíces de cierto polinomio de tercer grado.

Durante siglos se intentó encontrar una fórmula general para encontrar las raíces de los polinomios de quinto grado. Fue hasta 1823 cuando se probó el Teorema de Abel-Ruffini, enunciado y demostrado parcialmente por el matemático italiano Paolo Ruffini en 1799 y demostrado totalmente por el matemático noruego Niels Henrik Abel en 1823. En este teorema se demuestra que es imposible construir una fórmula general por radicales para encontrar raíces de polinomios de quinto grado o superior. La esencia de la prueba dada por Abel es la teoría de Galois.

Esta tesis presenta un enfoque geométrico que permite explicar la razón por la que los polinomios de tercer y cuarto grado se pueden resolver por radicales, a diferencia de los polinomios de grado cinco o más. Este aspecto geométrico fue descrito por el matemático alemán Felix Klein en su libro *Lectures on the icosahedron, and the solution of equations of the fifth degree* en 1884 y fue retomado en 1978 por Mark Green en *On the analytic solution of the equation of fifth degree* [7]. Esta tesis esta basada en la tesina de maestría de Ana Cristina Chávez Cáliz [4], completando detalles que no se justifican en esta.

En el Capítulo 1 se demuestra que cualquier polinomio con coeficientes complejos de tercer, cuarto o quinto grado puede transformarse en un polinomio de forma $P(z) = z^k + a_1z + a_2$, con $k \in \{3, 4, 5\}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Se demuestra que para transformar un polinomio de tercer grado en uno de la forma $z^3 + a_1z + a_2$, es suficiente resolver una ecuación lineal, para los polinomios de cuarto grado es suficiente resolver una ecuación de segundo grado, mientras que para los polinomios de quinto grado es suficiente resolver una ecuación de tercer grado.

En el Capítulo 2 se describe la topología y estructura analítica de los espacios de raíces de polinomios de la forma $P(z) = z^k + a_1z + a_2$, con $k \in \{3, 4, 5\}$. Se demuestra que estas son sub-variedades complejas de dimensión 2 de $\mathbb{C}^k \setminus \{0\}$. Al identificar en un solo elemento todos los puntos de cada recta compleja por el origen en $\mathbb{C}^k \setminus \{0\}$, se descubre que tales variedades bidimensionales complejas poseen estructura de superficies de Riemann. A estas superficies las denotamos como $\mathcal{V}_3$, $\mathcal{V}_4$ y $\mathcal{V}_5$ respectivamente. Más adelante, específicamente en los Corolarios 2.1.10 y 2.2.10 se demuestra que las superficies $\mathcal{V}_3$ y $\mathcal{V}_4$ tienen característica de Euler 2, lo que significa que estas superficies son en esencia la esfera. El Corolario 2.3.10 demuestra que la superficie de Riemann $\mathcal{V}_5$ tiene característica de Euler -6 , lo que significa que $\mathcal{V}_5$ es en esencia una esfera con cuatro asas.

En el Capítulo 3, con ayuda de la estructura encontrada para las superficies $\mathcal{V}_3$, $\mathcal{V}_4$ y $\mathcal{V}_5$ y el Teorema de Uniformización, se demuestra que existe una solución analítica al problema de encontrar las raíces de los polinomios de tercer, cuarto y quinto grado. De hecho, en este capítulo se construyen algoritmos por radicales para encontrar las raíces de cualquier polinomio de tercer o cuarto grado y se bosquejan las obstrucciones geométricas que impiden la construcción de un algoritmo general por radicales para encontrar las raíces de un polinomio de quinto grado.

Notación

$\mathbb{N}$	el conjunto de los números enteros no negativos.
$\mathbb{Z}$	el anillo de los números enteros.
$\mathbb{R}$	el campo de los números reales.
$\mathbb{C}$	el campo de los números complejos.
$\mathbb{C}[z]$	el espacio de polinomios con coeficientes complejos.
$\mathbb{R}^n$	el producto cartesiano $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-veces}}$.
$\mathbb{C}^n$	el producto cartesiano $\underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n\text{-veces}}$.
$\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$	es el espacio $\mathbb{C}^n$ sin el origen $(0, \dots, 0)$.
$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$	un elemento arbitrario de $\mathbb{C}^n$.
$\text{Arg}(z)$	el argumento principal del número complejo z .
$\ \mathbf{x}\ $	es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$.
$\ \mathbf{z}\ $	es la norma “euclidiana” en $\mathbb{C}^n$.
$\sim$	denota una relación de equivalencia.
$[\]$	denota las clases de equivalencia.
$\Im(z)$	es la parte imaginaria del número complejo z .
$\Re(z)$	es la parte real del número complejo z .

$P(z), Q(z)$	polinomios arbitrarios con coeficientes complejos.
$\text{gr}(P(z))$	el grado del polinomio $P(z)$.
$S_m = \sum_{i=1}^n z_i^m$	donde $z_1, \dots, z_n$ son las raíces del polinomio $P(z)$ de grado n .
π	función proyección a las clases.
i	función inclusión.

Variedades.

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$	es la esfera de Riemann.
$\mathbb{H}$	es el semiplano superior $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$.
$\mathbb{H}^-$	es el semiplano inferior $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) < 0\}$.
S^n	es la esfera de dimensión n $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ \mathbf{x}\ = 1\}$.
$\mathbb{T}$	es el toro $S^1 \times S^1$.
$P(\mathbb{C}^n)$	es el espacio proyectivo complejo de dimensión compleja $n - 1$.

Capítulo 1

Transformaciones de Tschirnhausen.

Un polinomio mónico de grado n sobre los complejos puede escribirse de la siguiente manera

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = z^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} z^i,$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. En consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra $P(z)$ tiene n raíces complejas, es decir, existen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tales que $P(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$.

Dado $1 \leq m < n$, para cada z_i raíz de $P(z)$ se define w_i como

$$w_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_i + \cdots + \alpha_m z_i^m, \quad (1.1)$$

donde para cada $0 \leq k \leq m$, α_k es un número complejo fijo para toda z_i . Cada w_i será raíz de un nuevo polinomio de grado n , digamos

$$Q(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n = z^n + \sum_{i=1}^{n-1} A_{n-i} z^i. \quad (1.2)$$

Este procedimiento es conocido como Transformación de Tschirnhausen y es útil cuando los coeficientes α_m son elegidos de tal manera que sea más fácil trabajar con el polinomio $Q(z)$. Una vez que se encuentran las raíces de $Q(z)$ es posible encontrar las raíces de $P(z)$ resolviendo las ecuaciones (1.1).

Las Transformaciones de Tschirnhausen son usualmente utilizadas para simplificar ecuaciones cuando los coeficientes α_k de (1.1) son elegidos de tal manera que algunos coeficientes A_i de (1.2) son cero. Esto puede lograrse usando las relaciones de Newton,

las cuales son relaciones entre las sumas de las potencias de las raíces de un polinomio y sus coeficientes. Más adelante se conocerán y usaran algunas de ellas.

El objetivo de este capítulo es demostrar que para cualquier polinomio de grado $k \in \{3, 4, 5\}$, existe una Transformación de Tschirnhausen adecuada que lo transforma en un polinomio de la forma $z^k + a_1z + a_2$.

1.1. Polinomios de tercer grado.

Consideramos un polinomio mónico complejo de tercer grado arbitrario

$$P(z) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3,$$

con $a_1 \neq 0$. Si z_1, z_2 y z_3 son las raíces de $P(z)$ entonces

$$P(z) = \prod_{i=1}^3 (z - z_i).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sum_{i=1}^3 z_i, \\ a_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} z_i z_j, \\ a_3 &= -\prod_{i=1}^3 z_i. \end{aligned}$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ se define w_i como sigue

$$w_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_i. \tag{1.3}$$

Cada w_i es raíz del polinomio de tercer grado

$$Q(z) = \prod_{i=1}^3 (z - w_i) = z^3 - \left(\sum_{i=1}^3 w_i \right) z^2 + \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} w_i w_j \right) z - \prod_{i=1}^3 w_i.$$

Se busca que el término cuadrático se anule, por lo que el problema se reduce a resolver

$$\sum_{i=1}^3 w_i = 3\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^3 z_i = 3\alpha_0 - \alpha_1 a_1 = 0.$$

Como $a_1 \neq 0$ la ecuación siempre tiene soluciones no triviales, particularmente $\alpha_0 = a_1/3$, $\alpha_1 = 1$ es una solución.

El coeficiente del término lineal se encuentra de la siguiente manera

$$A_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} w_i w_j = \frac{a_1^2}{3} + 2\frac{a_1}{3} \sum_{i=1}^3 z_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} z_i z_j = \frac{a_1^2}{3} - 2\frac{a_1^2}{3} + a_2 = -\frac{a_1^2}{3} + a_2.$$

El término independiente se encuentra de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A_3 &= -\prod_{i=1}^3 w_i = -\prod_{i=1}^3 (a_1/3 + z_i) \\ &= -\left(\frac{a_1^3}{27} + \frac{a_1^2}{9} \sum_{i=1}^3 z_i + \frac{a_1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} z_i z_j + \prod_{i=1}^3 z_i \right) \\ &= \frac{2}{27}a_1 - \frac{1}{3}a_1 a_2 + a_3. \end{aligned}$$

Una vez halladas las raíces del polinomio $Q(z) = z^3 + A_2 z + A_3$ es fácil obtener las raíces del polinomio $P(z)$, simplemente para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ se resuelve la ecuación (1.3).

1.2. Polinomios de cuarto grado.

Un polinomio mónico de cuarto grado con coeficientes complejos es de la forma

$$P(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4. \quad (1.4)$$

Si z_1, z_2, z_3 y z_4 son las raíces de $P(z)$, entonces

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \\ &= z^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)z^3 \\ &\quad + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4)z^2 \\ &\quad - (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4)z + z_1 z_2 z_3 z_4. \end{aligned}$$

Inmediatamente se tienen las siguientes igualdades

$$a_1 = - \sum_{i=1}^4 z_i, \quad (1.5)$$

$$a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} z_i z_j, \quad (1.6)$$

$$a_3 = - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} z_i z_j z_k, \quad (1.7)$$

$$a_4 = \prod_{i=1}^4 z_i. \quad (1.8)$$

Otras igualdades importantes son las siguientes

$$\sum_{i=1}^4 z_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^4 z_i + 2a_2 = 0, \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^4 z_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^4 z_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^4 z_i + 3a_3 = 0, \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^4 z_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^4 z_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^4 z_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^4 z_i + 4a_4 = 0. \quad (1.11)$$

Estas identidades son conocidas como Identidades de Newton y se pueden generalizar para cualquier polinomio de grado n . Para probar esto se considera un polinomio mónico arbitrario de grado n con raíces $z_1, \dots, z_n$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \\ &= \prod_{i=1}^n (z - z_i). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Definición 1.2.1. Consideramos $P(z)$ un polinomio mónico arbitrario de grado n , el *polinomio recíproco* se define como

$$P^*(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1. \quad (1.13)$$

Nótese que si 0 es raíz de $P(z)$ con multiplicidad $m \leq n$, entonces $\text{gr}(P^*(z)) = n - m$.

Lema 1.2.2. El recíproco de $P(z)$ se puede expresar como sigue

$$P^*(z) = z^n P(1/z).$$

Además, para toda $z_i \neq 0$ raíz de $P(z)$ se tiene que $1/z_i$ es raíz de $P^*(z)$.

Demostración. Se tiene que,

$$P(1/z) = \left(\frac{1}{z}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \frac{1}{z} + a_n,$$

por lo que

$$z^n P(1/z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = P^*(z).$$

Luego, si $z_k \neq 0$ es raíz de $P(z)$ se tiene que

$$P^*(1/z_k) = \left(\frac{1}{z_k}\right)^n P\left(\frac{1}{1/z_k}\right) = \left(\frac{1}{z_k}\right)^n P(z_k) = 0.$$

□

A partir de este lema se puede demostrar el siguiente corolario.

Corolario 1.2.3. *Consideramos $P(z)$ un polinomio mónico arbitrario de grado n , $Q(z)$ y $R(z)$ polinomios no nulos tales que $P(z) = Q(z)R(z)$. Entonces*

$$P^*(z) = Q^*(z)R^*(z).$$

Demostración. Si $m \leq n$ es el grado de $Q(z)$, es claro que $\text{gr}(R(z)) = n - m$. Se tiene que

$$\begin{aligned} P^*(z) &= z^n P(1/z) \\ &= z^n Q(1/z)R(1/z) \\ &= z^m Q(1/z)z^{n-m} R(1/z) \\ &= Q^*(z)R^*(z). \end{aligned}$$

□

Es fácil observar que este corolario es verdadero en general para productos arbitrarios finitos. Este corolario se utilizará para probar las identidades de Newton.

Teorema 1.2.4. Identidades de Newton. *Dados $m \in \mathbb{N}$ y $P(z)$ un polinomio mónico arbitrario de grado n , entonces*

$$\begin{aligned} ma_m + \sum_{i=1}^m a_{m-i} S_i &= 0, \quad \text{si } m \leq n, \\ \sum_{i=0}^n a_i S_{m-i} &= 0, \quad \text{si } m > n, \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde $a_0 = 1$ y $S_m = \sum_{i=1}^m z_i^m$.

Demostración. Hay varias maneras de demostrar el teorema, la demostración que se presenta aquí se encuentra en [6].

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que 0 no es raíz de $P(z)$. En efecto, si 0 es raíz de $P(z)$ con multiplicidad m simplemente se trabaja con el polinomio $P(z)/z^m$ de grado $(n - m)$.

En primer lugar

$$P^*(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + 1 = \left(\prod_{i=1}^n (z - z_i) \right)^*.$$

De la generalización del Corolario 1.2.3 se sigue que

$$\begin{aligned} P^*(z) &= \prod_{i=1}^n (z - z_i)^* \\ &= \prod_{i=1}^n (-z_i z + 1) \\ &= (-1)^n \prod_{i=1}^n z_i \prod_{i=1}^n \left(z - \frac{1}{z_i} \right) \\ &= a_n \prod_{i=1}^n \left(z - \frac{1}{z_i} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, es fácil observar inductivamente que al evaluar la k -ésima derivada de $P^*(z)$ en 0 se tiene

$$\begin{aligned} P^{*(k)}(0) &= k! a_k, \quad \text{si } k \leq n, \\ 0, &\quad \text{si } k > n. \end{aligned}$$

Definimos $V(z)$ como la función racional siguiente

$$V(z) := \frac{P^{*'}(z)}{P^*(z)}.$$

Es sencillo demostrar por inducción que la derivada de un polinomio escrito de la forma $P(z) = a \prod_{i=1}^n (z - a_i)$ es $P'(z) = a \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (z - a_j)$. En particular, la derivada de $P^*(z)$ en términos de su factorización está dada por

$$P^{*'}(z) = a_n \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \left(z - \frac{1}{z_j} \right).$$

Usando esta expresión se puede reescribir $V(z)$ de la siguiente manera

$$V(z) = \frac{P^{*'}(z)}{P^*(z)} = \sum_{i=1}^n \left(z - \frac{1}{z_i} \right)^{-1}.$$

Nuevamente por inducción, es fácil comprobar que

$$V^{(k)}(z) = k!(-1)^k \sum_{i=1}^n \left(z - \frac{1}{z_i} \right)^{-(k+1)},$$

por lo que

$$V^{(k)}(0) = -k! \sum_{i=1}^n z_i^{(k+1)} = -k! S_{k+1}.$$

Por otro lado $P^{*'}(z) = V(z)P^*(z)$, por lo que

$$P^{*(k)}(z) = [V(z)P^*(z)]^{(k-1)},$$

donde $[V(z)P^*(z)]^{(k-1)}$ denota la $(k-1)$ -derivada de $V(z)P^*(z)$. De donde se sigue que

$$P^{*(k)}(z) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} V^{(i)}(z) P^{*(k-1-i)}(z),$$

luego

$$P^{*(k)}(0) = (k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!(k-1-i)!} V^{(i)}(0) P^{*(k-1-i)}(0).$$

Usando los valores de las derivadas de estas funciones evaluadas en 0 obtenidos previamente se sigue que

$$\frac{k!}{(k-1)!} a_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!(k-1-i)!} (-i! S_{i+1}) (k-1-i)! a_{k-1-i},$$

donde $a_k = 0$ si $k > n$. Finalmente se concluye que

$$k a_k + \sum_{i=0}^{k-1} S_{i+1} a_{k-1-i} = 0, \quad \text{si } k \leq n,$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} S_{i+1} a_{k-1-i} = 0, \quad \text{si } k > n.$$

Dicho de otra forma

$$\begin{aligned} ka_k + \sum_{i=1}^k a_{k-i} S_i &= 0, \quad \text{si } k \leq n, \\ \sum_{i=0}^n a_i S_{k-i} &= 0, \quad \text{si } k > n. \end{aligned}$$

□

De este modo quedan probadas las igualdades (1.9)–(1.11).

Retomando las intenciones de encontrar una Transformación de Tschirnhausen para el polinomio $P(z)$, para cada $1 \leq i \leq 4$ se define w_i de la siguiente manera

$$w_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_i + \alpha_2 z_i^2. \quad (1.15)$$

Se define

$$Q(z) = z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4, \quad (1.16)$$

como el polinomio mónico con raíces w_1, w_2, w_3 y w_4 . Se busca que $A_1 = 0 = A_2$ por lo que se deben satisfacer $\sum w_i = -A_1 = 0$ y $\sum w_i^2 = A_1^2 - 2A_2 = 0$ simultáneamente. Por otro lado,

$$\begin{aligned} w_i &= \alpha_0 + \alpha_1 z_i + \alpha_2 z_i^2, \\ w_i^2 &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 z_i^2 + \alpha_2^2 z_i^4 + 2\alpha_0 \alpha_1 z_i + 2\alpha_0 \alpha_2 z_i^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 z_i^3, \end{aligned} \quad (1.17)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 w_i &= 4\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^4 z_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^4 z_i^2, \\ \sum_{i=1}^4 w_i^2 &= 4\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \sum_{i=1}^4 z_i^2 + \alpha_2^2 \sum_{i=1}^4 z_i^4 + 2\alpha_0 \alpha_1 \sum_{i=1}^4 z_i + 2\alpha_0 \alpha_2 \sum_{i=1}^4 z_i^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sum_{i=1}^4 z_i^3. \end{aligned} \quad (1.18)$$

En este punto es importante realizar la siguiente observación.

Observación 1.2.5. Dado $P(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$ un polinomio mónico arbitrario de cuarto grado con raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 . Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_{i=1}^4 z_i^n$ puede expresarse en términos de a_1, a_2, a_3 y a_4 .

Demostración. Es inmediata usando el Teorema 1.2.4. □

Las primeras cuatro sumas en términos de los coeficientes están dadas explícitamente por

$$\begin{aligned} S_1 &= -a_1, \\ S_2 &= a_1^2 - 2a_2, \\ S_3 &= -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3, \\ S_4 &= a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2 - 4a_4. \end{aligned} \tag{1.19}$$

De este modo, el problema se traduce en resolver el sistema

$$\begin{aligned} 4\alpha_0 + S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2 &= 0, \\ 4\alpha_0^2 + S_2\alpha_1^2 + S_4\alpha_2^2 + 2S_1\alpha_0\alpha_1 + 2S_2\alpha_0\alpha_2 + 2S_3\alpha_1\alpha_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Para encontrar una solución del sistema de ecuaciones homogéneas se puede proceder de la siguiente manera. De la primera ecuación se tiene que

$$\alpha_0 = -\left(\frac{S_1}{4}\alpha_1 + \frac{S_2}{4}\alpha_2\right).$$

Al sustituir esto en la segunda ecuación se obtiene una ecuación homogénea de segundo orden de la forma

$$B_1\alpha_1^2 + B_2\alpha_1\alpha_2 + B_3\alpha_2^2 = 0, \tag{1.21}$$

donde B_1 , B_2 y B_3 pueden escribirse en términos de a_1 , a_2 , a_3 y a_4 . Hay tres casos

Caso 1. $B_1 = B_2 = B_3 = 0$. Una solución no trivial es $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_0 = -(S_1 + S_2)/4$.

Caso 2. $B_1 = B_2 = 0$, y $B_3 \neq 0$. Una solución no trivial es $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_0 = -S_1/4$.

Caso 3. $B_1 \neq 0$ o $B_2 \neq 0$. En este caso se encuentran soluciones con $\alpha_2 = 1$. Esto transforma la ecuación (1.21) en una ecuación de primer o segundo orden para α_1 que siempre tiene solución.

Con esto se demuestra que el sistema (1.20) tiene soluciones no triviales.

Ahora solo resta encontrar los coeficientes A_3 y A_4 del polinomio (1.16). Por la Observación 1.2.5 es posible escribir $\sum_{i=1}^4 z_i^n$ en términos de los coeficientes de $P(z)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$, por lo que es posible obtener $\sum_{i=1}^4 w_i^3$ y $\sum_{i=1}^4 w_i^4$ en términos de los coeficientes de (1.4) y de las α 's ya encontradas. Usando las igualdades de (1.14)

correspondientes para $Q(z)$ se pueden obtener los coeficientes A_3 y A_4 . Sin embargo, este método puede resultar muy tedioso por lo que se procederá de una manera distinta. La idea para encontrar dichos coeficientes se encuentra en la sección 6.3 de [9].

Consideramos el polinomio

$$P(z)^* = P(z - \alpha_1) = z^4 + a_1^* z^3 + a_2^* z^2 + a_3^* z + a_4^*. \quad (1.22)$$

Es fácil observar que las raíces de $P(z)^*$ son $z_k^* = z_k + \alpha_1$, con z_k raíz de $P(z)$ y α_1 solución de (1.21). Además, se tiene que los coeficientes de (1.22) están dados por

$$\begin{aligned} a_1^* &= -4\alpha_1 + a_1 = \frac{P^{(3)}(-\alpha_1)}{3!}, \\ a_2^* &= 6\alpha_1^2 - 3a_1\alpha_1 + a_2 = \frac{P^{(2)}(-\alpha_1)}{2!}, \\ a_3^* &= -4\alpha_1^3 + 3a_1\alpha_1^2 - 2a_2\alpha_1 + a_3 = P'(-\alpha_1), \\ a_4^* &= \alpha_1^4 - a_1\alpha_1^3 + a_2\alpha_1^2 - a_3\alpha_1 + a_4 = P(-\alpha_1). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Regresando al polinomio $Q(z)$ se tiene que

$$Q(z) = z^4 + A_3 z + A_4 = \prod_{i=1}^4 (z - w_i). \quad (1.24)$$

Al evaluar (1.24) en α_0 se obtiene

$$\begin{aligned} Q(\alpha_0) &= \alpha_0^4 + A_3 \alpha_0 + A_4 = \prod_{i=1}^4 (\alpha_0 - (\alpha_0 + \alpha_1 z_i + z_i^2)) \\ &= \prod_{i=1}^4 (\alpha_1 z_i + z_i^2) \\ &= \prod_{i=1}^4 z_i (z_i + \alpha_1) \\ &= \prod_{i=1}^4 z_i \prod_{i=1}^4 (\alpha_1 + z_i). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Usando la Identidad (1.8) se tiene que

$$\alpha_0^4 + \alpha_0 A_3 + A_4 = a_4 a_4^* = a_4 P(-\alpha_1).$$

De donde se sigue que

$$A_4 = a_4 P(-\alpha_1) - \alpha_0^4 - \alpha_0 A_3. \quad (1.26)$$

Para encontrar A_3 se considera la derivada de $Q(z)$

$$\begin{aligned} Q'(z) &= 4z^3 + A_3 = \frac{d}{dw} \left(\prod_{i=1}^4 (z - w_i) \right) \\ &= \sum_{j=1}^4 \prod_{i \neq j} (z - w_i). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Sustituyendo $w_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_i + z_i^2$ y evaluando en α_0 se tiene que

$$\begin{aligned} Q'(\alpha_0) &= 4\alpha_0^3 + A_3 = - \sum_{j=1}^4 \prod_{i \neq j} (\alpha_1 z_i + z_i^2) \\ &= - \sum_{j=1}^4 \prod_{i \neq j} z_i \prod_{i \neq j} (\alpha_1 + z_i). \end{aligned}$$

Suponiendo que 0 y -1 no son raíces de $P(z)$ (en caso de que lo sean se puede estudiar el polinomio $P(z + \beta)$ con $\beta \in \mathbb{R}$ fijo, de modo que 0 y -1 no sean raíces de $P(z + \beta)$). Se tiene que

$$\begin{aligned} 4\alpha_0^3 + A_3 &= - \sum_{j=1}^4 \prod_{i \neq j} z_i \prod_{i \neq j} (\alpha_1 + z_i) \frac{z_j(\alpha_1 + z_j)}{z_j(\alpha_1 + z_j)} \\ &= - \sum_{j=1}^4 \prod_{i=1}^4 z_i \prod_{i=1}^4 (\alpha_1 + z_i) \frac{1}{z_j(\alpha_1 + z_j)} \\ &= -a_4 P(-\alpha_1) \sum_{j=1}^4 \frac{1}{z_j(\alpha_1 + z_j)} \\ &= -a_4 P(-\alpha_1) \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{1}{z_j} - \frac{1}{\alpha_1 + z_j} \right). \end{aligned}$$

Además, para cualquier polinomio de grado n con raíces $z_1, z_2, \dots, z_n$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_k} = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} z_j}{\prod_{i=1}^n z_i} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Por lo que

$$Q'(\alpha_0) = \frac{a_4}{\alpha_1} P(-\alpha_1) \left(\frac{a_3}{a_4} - \frac{a_3^*}{a_4^*} \right) = \frac{a_4}{\alpha_1} P(-\alpha_1) \left(\frac{a_3}{a_4} - \frac{P'(-\alpha_1)}{P(-\alpha_1)} \right).$$

Finalmente se tiene que

$$A_3 = \frac{a_4}{\alpha_1} P(-\alpha_1) \left(\frac{a_3}{a_4} - \frac{P'(-\alpha_1)}{P(-\alpha_1)} \right) - 4\alpha_0^3. \quad (1.28)$$

1.3. Polinomios de quinto grado

Un polinomio mónico de quinto grado es de la forma

$$P(z) = z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5. \quad (1.29)$$

Consideramos $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \in \mathbb{C}$ las cinco raíces de $P(z)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5) \\ &= z^5 - \left(\sum_i z_i \right) z^4 + \left(\sum_{i < j} z_i z_j \right) z^3 - \left(\sum_{i < j < k} z_i z_j z_k \right) z^2 + \\ &\quad + \left(\sum_{i < j < k < l} z_i z_j z_k z_l \right) z - \prod_i z_i, \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde i, j, k, l son subíndices que varían en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Al comparar (1.29) y (1.30) inmediatamente se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} a_1 &= - \sum_i z_i, \\ a_2 &= \sum_{i < j} z_i z_j, \\ a_3 &= - \sum_{i < j < k} z_i z_j z_k, \\ a_4 &= \sum_{i < j < k < l} z_i z_j z_k z_l, \\ a_5 &= - \prod_i z_i. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Utilizando el Teorema 1.2.4 se tiene que para cualquier polinomio de quinto grado con coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y raíces z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 se cumple

$$\sum_{i=1}^5 z_i^k + a_1 \sum_{i=1}^5 z_i^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \sum_{i=1}^5 z_i + k a_k = 0, \quad (1.32)$$

para $1 \leq k \leq 5$. Además, si $k > 5$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^5 z_i^k + a_1 \sum_{i=1}^5 z_i^{k-1} + \cdots + a_5 \sum_{i=1}^5 z_i^{k-5} = 0. \quad (1.33)$$

Ahora para cada z_i se define w_i como sigue

$$w_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_i + \alpha_2 z_i^2 + \alpha_3 z_i^3, \quad (1.34)$$

con $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Se considera

$$Q(z) = z^5 + A_1 z^4 + A_2 z^3 + A_3 z^2 + A_4 z + A_5, \quad (1.35)$$

el polinomio mónico con raíces w_i .

Se busca que $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, del Teorema 1.2.4 se sigue que esto se satisface si y solo si $\sum_i w_i = \sum_i w_i^2 = \sum_i w_i^3 = 0$. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} w_i &= \alpha_0 + \alpha_1 z_i + \alpha_2 z_i^2 + \alpha_3 z_i^3, \\ w_i^2 &= \sum_{\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \alpha_\mu \alpha_\lambda z_i^{\mu+\lambda}, \\ w_i^3 &= \sum_{\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \alpha_\nu \alpha_\mu \alpha_\lambda z_i^{\nu+\mu+\lambda}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Por lo que el sistema a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 w_i &= \sum_{\lambda=0}^3 \alpha_\lambda \left(\sum_{i=1}^5 z_i^\lambda \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^5 w_i^2 &= \sum_{\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \alpha_\mu \alpha_\lambda \left(\sum_{i=1}^5 z_i^{\mu+\lambda} \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^5 w_i^3 &= \sum_{\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \alpha_\nu \alpha_\mu \alpha_\lambda \left(\sum_{i=1}^5 z_i^{\nu+\mu+\lambda} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

el cual es un sistema de tres ecuaciones polinómicas homogéneas de tercer grado con 4 variables $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, con coeficientes en términos de a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 . En la primera ecuación se obtiene α_0 en términos de las demás α 's, por lo que el sistema

de ecuaciones (1.37) se transforma de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 B_{\lambda,\mu} \alpha_{\mu} \alpha_{\lambda} &= 0 \\ \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 C_{\lambda,\mu,\nu} \alpha_{\nu} \alpha_{\mu} \alpha_{\lambda} &= 0 \end{aligned} \tag{1.38}$$

donde $B_{\lambda,\mu}$, $C_{\lambda,\mu,\nu}$ son coeficientes que están dados en términos de los coeficientes de $P(z)$. Para ver que este sistema siempre tiene soluciones no triviales se puede realizar un análisis parecido al que se hizo para comprobar que la ecuación (1.21) tiene soluciones no triviales. En esta ocasión hay más casos. El más común es cuando no todos los coeficientes que involucran a α_1 y α_2 son cero simultáneamente. En este caso se encuentran soluciones con $\alpha_3 = 1$. Esto resulta en un sistema de dos ecuaciones homogéneas en α_1 y α_2 , la primera de segundo grado y la segunda de tercer grado. De la ecuación de segundo se puede obtener α_2 términos de α_1 usando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado. Sustituyendo esto en la ecuación de tercer grado se obtiene una ecuación de tercer grado para α_1 que como se sabe, siempre tiene soluciones.

Además, como para toda $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_i z_i^m$ se puede escribir en términos de los coeficientes de $P(z)$, se tiene que es posible encontrar A_4 y A_5 en términos de los coeficientes de $P(z)$ y de las α' s ya encontradas.

Con esto se concluye que es posible transformar todo polinomio de quinto grado en uno de la forma $z^5 + A_4 z + A_5$. Esta forma es conocida como la forma de Bring-Jerrard.

Capítulo 2

Estructura analítica de los subespacios de polinomios

En este capítulo se encontrarán propiedades topológicas y analíticas de algunos subespacios de polinomios y los espacios de sus raíces. Como se anticipó anteriormente, se trabajará con los polinomios de tercer grado de la forma $z^3 + az + b$, los polinomios de cuarto grado de la forma $z^4 + az + b$ y los polinomios de quinto grado de la forma $z^5 + az + b$. Como se vio en el capítulo anterior, cualquier polinomio de tercer, cuarto o quinto grado puede transformarse a uno de este tipo, por lo que estos subespacios caracterizan bastante bien a los espacios de polinomios de estos grados. Se usarán algunas definiciones y teoremas de topología, mismas que se encuentran en el Apéndice A.

2.1. Espacio de raíces de los polinomios de tercer grado

Se define $\mathcal{P}_3$ como la familia de polinomios de tercer grado siguiente

$$\mathcal{P}_3 = \{z^3 + a_1z + a_2 \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}.$$

Esta familia también es conocida como la familia de polinomios de tercer grado en su forma reducida. Dotamos a $\mathcal{P}_3$ con la estructura analítica de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ mediante

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}_3 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ z^3 + a_1z + a_2 &\longmapsto (a_1, a_2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se define $\mathcal{S}_3 \subset \mathbb{C}^3$ como la familia de raíces de $\mathcal{P}_3$, es decir,

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \prod_{i=1}^3 (z - z_i) \in \mathcal{P}_3 \right\}.$$

Dado $(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{S}_3$ es sencillo saber de qué polinomio en $\mathcal{P}_3$ son raíces, esto está dado por la función siguiente

$$\begin{aligned} h : \mathcal{S}_3 &\longrightarrow \mathcal{P}_3 \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto z^3 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - z_1 z_2 z_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se pueden hacer tres observaciones importantes de la función h .

Observaciones 2.1.1.

- a) *Por el teorema fundamental del álgebra se tiene que h es sobreyectiva.*
- b) *Como que $\mathbb{C}[z]$ es un dominio de factorización única se concluye que h es inyectiva módulo permutaciones.*
- c) *Al dotar a $\mathcal{S}_3$ con la estructura analítica de subconjunto de $\mathbb{C}^3$ se obtiene que h es una función continua.*

Puesto que $P(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 \in \mathcal{P}_3$ si y solo si $a_1 = 0$ y $(a_2, a_3) \neq (0, 0)$, otra manera de definir $\mathcal{S}_3$ es

$$\mathcal{S}_3 = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0 \}.$$

Del hecho de que el coeficiente del término cuadrático de los polinomios de $\mathcal{P}_3$ es cero se pueden realizar las siguientes observaciones.

Observaciones 2.1.2.

- a) *Si $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es raíz con multiplicidad 2 de $P(z) \in \mathcal{P}_3$, entonces la otra raíz es -2ξ .*
- b) *Si 0 es raíz de $P(z) \in \mathcal{P}_3$ entonces las otras dos raíces son distintas de cero y son inversas aditivas una de la otra.*

Ahora introduciremos una relación de equivalencia en $\mathcal{S}_3$.

Definición 2.1.3. Dados $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, diremos que $(z_1, z_2, z_3) \sim (w_1, w_2, w_3)$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(z_1, z_2, z_3) = \alpha(w_1, w_2, w_3)$.

Es bastante conocido y sencillo de verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Como $\mathcal{S}_3 \subset \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{S}_3$, simplemente se restringen las clases originales a $\mathcal{S}_3$. Más aún, para toda $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{S}_3$ entonces $\alpha(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{S}_3$, de este modo se concluye que toda clase que interseca a $\mathcal{S}_3$ está contenida en $\mathcal{S}_3$.

Proposición 2.1.4. $\mathcal{V}_3 := \mathcal{S}_3 / \sim$ es superficie de Riemann compacta.

Demostración. En la demostración de esta proposición se utilizarán las definiciones y resultados de la sección 1 del Apéndice A.

Primero se verificará que $\mathcal{V}_3$ es superficie. En el Ejemplo A.1.8 se demuestra que el espacio proyectivo complejo $P(\mathbb{C}^3)$ es variedad holomorfa de dimensión 2. En este mismo ejemplo se observa que los subconjuntos $U_k = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P(\mathbb{C}^3) \mid z_k \neq 0\}$ con $k \in \{1, 2, 3\}$ son abiertos en $P(\mathbb{C}^3)$, por lo que cada U_k es una variedad holomorfa de dimensión 2. Ahora, para cada $k = 1, 2, 3$ se define la función f^k como sigue

$$\begin{aligned} f^k : U_k &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [z_1 : z_2 : z_3] &\longmapsto \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_k}, \end{aligned}$$

f^k es función bien definida entre variedades. Además es holomorfa, pues

$$\begin{aligned} f^k \circ \phi_k^{-1} : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) &\longmapsto z_1 + z_2 + 1 \end{aligned}$$

es holomorfa. Para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$ se tiene que la matriz de la transformación lineal $df_{\mathbf{z}}^k$ (en la base canónica) es $(1 \ 1)$. Observe que esta matriz es de rango máximo por lo que $df_{\mathbf{z}}^k$ es sobreyectiva para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$. Lo que implica que f^k no tiene valores singulares y por el Lema A.1.12 $(f^k)^{-1}(0)$ es subvariedad holomorfa de U_k de dimensión 1. Por otro lado, es claro que

$$\mathcal{V}_3 = \bigcup_{k=1}^3 (f^k)^{-1}(0).$$

Observe que

$$\begin{aligned} (f^k)^{-1}(0) &= \{[z_1 : z_2 : z_3] \in U_k \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \\ &= \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P(\mathbb{C}^3) \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \cap U_k \\ &= \mathcal{V}_3 \cap U_k, \end{aligned}$$

por lo que $(f^k)^{-1}(0)$ es abierto en $\mathcal{V}_3$. Consecuentemente, $\mathcal{V}_3$ es variedad topológica de dimensión 2. Más aún, como la estructura holomorfa de $f_k^{-1}(0)$ es inducida por la

estructura holomorfa de U_k , se tiene que los cambios de coordenadas en el atlas de $\mathcal{V}_3$ son biholomorfismos, por lo que $\mathcal{V}_3$ es variedad analítica de dimensión 1, en otras palabras $\mathcal{V}_3$ es superficie de Riemann.

Ahora se demostrará que $\mathcal{V}_3$ es espacio compacto. Se considera la proyección a las clases

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow P(\mathbb{C}^3) \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto [z_1 : z_2 : z_3].\end{aligned}$$

Se considera el subespacio compacto $S^5 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 \mid \|\mathbf{z}\| = 1\}$. Dado $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ se tiene que $\mathbf{z}/\|\mathbf{z}\| \in S^5$, por lo que $\pi(S^5) = P(\mathbb{C}^3)$ es compacto. Por otro lado se tiene que $\mathcal{V}_3 = \bigcup_{k=1}^3 f_k^{-1}(0)$, por lo que $\mathcal{V}_3$ es subconjunto cerrado de $P(\mathbb{C}^3)$. Se concluye que $\mathcal{V}_3$ es superficie de Riemann compacta. $\square$

Para poder definir la función (2.2) en $\mathcal{V}_3$ es necesaria la relación de equivalencia siguiente.

Definición 2.1.5. Dados $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, diremos que $(a_1, a_2) \sim_1 (b_1, b_2)$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(a_1, a_2) = (\alpha^2 b_1, \alpha^3 b_2)$.

Proposición 2.1.6. La relación $\sim_1$ es relación de equivalencia.

Demostración. Dados $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Se debe probar que se satisfacen las propiedades siguientes

- *Reflexividad.* Es inmediata considerando $\alpha = 1$.
- *Simetría.* Supongamos que $(a_1, a_2) \sim_1 (b_1, b_2)$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que satisface $(a_1, a_2) = (\alpha^2 b_1, \alpha^3 b_2)$. Esto implica que $a_1 = \alpha^2 b_1$ y $a_2 = \alpha^3 b_2$. Como $\alpha \neq 0$ se tiene que $b_1 = (1/\alpha)^2 a_1$ y $b_2 = (1/\alpha)^3 a_2$, lo que implica que $(b_1, b_2) = ((1/\alpha)^2 a_1, (1/\alpha)^3 a_2)$.
- *Transitividad.* Supongamos que $(a_1, a_2) \sim_1 (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) \sim_1 (c_1, c_2)$. Deben existir $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $(a_1, a_2) = (\alpha^2 b_1, \alpha^3 b_2)$ y $(b_1, b_2) = (\beta^2 c_1, \beta^3 c_2)$. Se tiene que

$$(a_1, a_2) = (\alpha^2 b_1, \alpha^3 b_2) = (\alpha^2 \beta^2 c_1, \alpha^3 \beta^3 c_2) = ((\alpha\beta)^2 c_1, (\alpha\beta)^3 c_2).$$

Consecuentemente $(a_1, a_2) \sim_1 (c_1, c_2)$.

Puesto que se satisfacen las tres condiciones anteriores se concluye que $\sim_1$ es una relación de equivalencia. $\square$

Ahora se considera el espacio cociente $P(\mathbb{C}^2)^* := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim_1$. Puesto que $P(\mathbb{C}^2)^*$ se construyó de manera similar que $P(\mathbb{C}^2)$ (véase Ejemplo A.1.8), es natural preguntarse la relación entre estos. La siguiente proposición muestra que este espacio también es homeomorfo a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, consecuentemente a $P(\mathbb{C}^2)$.

Proposición 2.1.7. *Consideremos f definida por*

$$f : P(\mathbb{C}^2)^* \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$[a_1 : a_2] \longmapsto \begin{cases} \frac{a_2^2}{a_1^3} & \text{si } a_1 \neq 0, \\ \infty & \text{si } a_1 = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

f es homeomorfismo.

Demostración. Primero se verificará que f está bien definida, *i.e.* dos elementos $\sim_1$ -relacionados deben tener la misma imagen. Dados $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tales que $(a_1, a_2) \sim_1 (b_1, b_2)$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que satisface $(a_1, a_2) = (\alpha^2 b_1, \alpha^3 b_2)$. Se tiene que

$$f(a_1, a_2) = \frac{a_2^2}{a_1^3} = \frac{(\alpha^3 b_2)^2}{(\alpha^2 b_1)^3} = \frac{\alpha^5 b_2^2}{\alpha^5 b_1^3} = \frac{b_2^2}{b_1^3} = f(b_1, b_2).$$

La función f es sobreyectiva. Dados $z \in \mathbb{C}$ y $\omega_0 \in \mathbb{C}$ una raíz cuadrada de z . Se tiene que $f([1 : \omega_0]) = \omega_0^2 = z$, por lo que $[1 : \omega_0]$ es preimagen de z . Por otro lado, como para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f([0 : z]) = \infty$ se concluye que f es sobreyectiva.

Para verificar que f es inyectiva se considera $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tal que $f([a_1 : a_2]) = z$. Es fácil observar que si $z = 0$ o $z = \infty$ entonces (a_1, a_2) está $\sim_1$ -relacionado a $(1, 0)$ o $(0, 1)$ respectivamente, por lo que se supondrá que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se tiene que

$$\frac{a_2^2}{a_1^3} = z.$$

Consideramos ω_0 una raíz cuadrada de z , se sabe que $[1 : \omega_0]$ es preimagen de z . Además, $(1, \omega_0)$ está $\sim_1$ -relacionado con $(1, -\omega_0)$ usando $\alpha = -1$, por lo que es suficiente verificar que (a_1, a_2) está $\sim_1$ -relacionado con alguno de los dos. Consideremos r una raíz cuadrada de a_1 . Por un lado se tiene que $r^2 = a_1$. Por otro lado, como

$$a_2^2 = \omega_0^2 a_1^3,$$

se tiene que a_2 es alguna raíz cuadrada de $\omega_0^2 a_1^3$, es decir, $a_2 = (r)^3 (-1)^k \omega_0$, con $k \in \{0, 1\}$. Con esto se concluye que (a_1, a_2) está $\sim_1$ -relacionado con $(1, \omega_0)$ o con $(1, -\omega_0)$, por lo que f es inyectiva.

Para ver que f es continua se puede proceder de la siguiente manera. Por el Teorema de la Función Cociente A.0.2, basta ver que la función $f^* : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida por $f^*(a_1, a_2) = a_2^2/a_1^3$ es continua, lo cual es inmediato pues f^* es una función racional, y para los puntos $(0, a) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ se eligió ∞ , el valor que precisamente hace continua esta función.

Ahora se probará que $P(\mathbb{C}^2)^*$ es un espacio compacto. Se definen

$$\begin{aligned} i : S^3 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4), \\ \pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow P(\mathbb{C}^2)^* \\ (a_1, a_2) &\longmapsto [a_1 : a_2]. \end{aligned}$$

π e i son funciones continuas, por lo que $\pi(i(S^3))$ es compacto en $P(\mathbb{C}^2)^*$. Veamos que $\pi(i(S^3)) = P(\mathbb{C}^2)^*$. Es claro que las clases $[0 : 1]$ y $[1 : 0]$ intersecan a $i(S^3)$, por lo que es suficiente demostrar que para $(1, z)$ con $z \neq 0$, existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $(\alpha^2, \alpha^3 z) \in i(S^3)$, es decir, $\|(\alpha^2, \alpha^3 z)\| = 1$. Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se define f_z como sigue

$$\begin{aligned} f_z : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \alpha &\longmapsto \|(\alpha^2, \alpha^3 z)\|, \end{aligned}$$

f_z es función continua y además

$$f_z(0) = 0, \quad f_z(1) = \sqrt{1 + \|z\|^2} > 1.$$

Por teorema del valor intermedio debe existir $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha) = 1$. Con ello se tiene que $\pi(i(S^3)) = P(\mathbb{C}^2)^*$. Utilizando el Teorema A.0.1 se concluye que f es homeomorfismo. $\square$

Ahora tiene sentido definir

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{V}_3 &\longrightarrow \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim_1} \\ [z_1 : z_2 : z_3] &\longmapsto [h(z_1, z_2, z_3)], \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde h es la función (2.2). Para comprobar que φ está bien definida es suficiente demostrar que si dos elementos de $\mathcal{S}_3$ están $\sim$ -relacionados, entonces sus imágenes están $\sim_1$ -relacionadas. Así pues, dados $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{S}_3$ $\sim$ -relacionados. Se tiene que

$$\begin{aligned} h(w_1, w_2, w_3) &= (w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3, -w_1 w_2 w_3) \\ &= (\alpha z_1 \alpha z_2 + \alpha z_1 \alpha z_3 + \alpha z_2 \alpha z_3, -\alpha z_1 \alpha z_2 \alpha z_3) \\ &= (\alpha^2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3), -\alpha^3 z_1 z_2 z_3), \end{aligned}$$

para algún $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se concluye que $h(z_1, z_2, z_3) \sim_1 h(w_1, w_2, w_3)$ por lo que φ está bien definida.

También se tiene que φ es función continua. Observe el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_3 & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ \pi_1 \downarrow & \searrow h \circ \pi_2 & \downarrow \pi_2 \\ \mathcal{V}_3 & \xrightarrow{\varphi} & P(\mathbb{C}^2)^*, \end{array}$$

donde las funciones π_1 y π_2 son las proyecciones a las clases. La función $h \circ \pi_2$ es continua pues es composición de continuas. Aplicando el Teorema de la Función Cociente A.0.2 se tiene que φ es continua.

Ahora consideremos

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{V}_3 &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \\ [z_1 : z_2 : z_3] &\longmapsto f \circ \varphi([z_1 : z_2 : z_3]), \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde f es la función (2.3). Se estudiará la función ψ para encontrar propiedades en $\mathcal{V}_3$.

Corolario 2.1.8. *Consideremos $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{S}_3$ las raíces de los polinomios de $\mathcal{P}_3$, $z^3 + a_1z + a_2$ y $z^3 + b_1z + b_2$ respectivamente. Entonces $\psi([z_1 : z_2 : z_3]) = \psi([w_1 : w_2 : w_3])$ si y solo si $(a_1, a_2) \sim_1 (b_1, b_2)$.*

Demostración. La demostración de este corolario se sigue inmediatamente de la Proposición 2.1.7. El hecho de que $(a_1, a_2) \sim_1 (b_1, b_2)$ implica que $\psi([z_1 : z_2 : z_3]) = \psi([w_1 : w_2 : w_3])$ se sigue de que la función (2.3) está bien definida. El hecho de que $\psi([z_1 : z_2 : z_3]) = \psi([w_1 : w_2 : w_3])$ implica que $(a_1, a_2) \sim_1 (b_1, b_2)$ se sigue de que f es inyectiva. $\square$

La función ψ puede reescribirse de la siguiente manera

$$\psi([z_1 : z_2 : z_3]) = \frac{(z_1 z_2 z_3)^2}{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)^3}.$$

Teorema 2.1.9. *Consideremos la función $\psi : \mathcal{V}_3 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida anteriormente. ψ es continua, sobreyectiva y para cada $z \in \hat{\mathbb{C}}$ existen a lo más 6 elementos en $\mathcal{V}_3$ que son preimágenes de z . Más aún, solo existen 3 puntos con un número menor de preimágenes y son*

- a) $-\frac{2^2}{3^3}$ con tres preimágenes.
- b) ∞ con dos preimágenes.
- c) 0 con tres preimágenes.

Demostración. ψ es continua y sobreyectiva pues es composición de funciones continuas y sobreyectivas. Por el Corolario 2.1.8 y la Observación 2.1.1.b) se tiene que un punto puede tener a lo más 6 preimágenes, pues es el número de formas de permutar (z_1, z_2, z_3) y solo son menos cuando existen $\tau : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ permutación y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $(z_1, z_2, z_3) = \alpha(z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)})$. Para encontrar estos puntos notemos que

$$\begin{aligned} \|(z_1, z_2, z_3)\| &= \|\alpha(z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)})\| \\ &= \|\alpha\| \cdot \|(z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)})\|. \end{aligned}$$

Por lo que $\|\alpha\| = 1$. De esta manera se tienen los siguientes casos:

- a) $\alpha = 1$. Este caso es no trivial únicamente cuando existen raíces múltiples. Por Observaciones 2.1.2.a) y 2.1.2.b) los polinomios de $\mathcal{P}_3$ pueden a lo más tener una raíz de multiplicidad 2 y debe de ser distinta de 0, por lo que se puede suponer que la raíz múltiple es 1. Por Observación 2.1.2.a) se tiene que la raíz restante debe ser -2 . La imagen bajo ψ de $[1 : 1 : -2]$ es

$$\begin{aligned} \psi([1 : 1 : -2]) &= \frac{(-2)^2}{(-2 - 2 + 1)^3} \\ &= \frac{2^2}{-3^3} \\ &= -\frac{2^2}{3^3}. \end{aligned}$$

Lo que implica que $\frac{2^2}{3^3}$ tiene menos de 6 preimágenes. Es fácil observar que estas son $[1 : 1 : -2]$, $[1 : -2 : 1]$ y $[-2 : 1 : 1]$.

- b) $\alpha = e^{i\theta}$, con $0 < \theta < 2\pi$, y con $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $z_j = 0$. Por Observación 2.1.2.b), para $k, l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$ distintos se debe tener que $z_l = -z_k \neq 0$. De este modo se debe tener

$$\begin{aligned} z_{\tau(j)} &= z_j = 0, \\ z_{\tau(k)} &= z_l = -z_k, \\ z_{\tau(l)} &= z_k. \end{aligned}$$

Como $z_k \neq 0$ se puede suponer que $z_k = 1$, así (z_1, z_2, z_3) debe de ser una permutación de $(0, 1, -1)$. Además, $\psi([0 : 1 : -1]) = 0$, por lo que 0 tiene menos de 6

preimágenes. Es fácil observar que sus preimágenes son $[0 : 1 : -1]$, $[1 : 0 : -1]$ y $[1 : -1 : 0]$.

- c) $\alpha \neq 1$ y para todo $j \in \{1, 2, 3\}$, $z_j \neq 0$. En particular $z_1 \neq 0$, por lo que se puede suponer que $z_1 = 1$. Se tiene que los siguientes conjuntos son iguales

$$\{1, z_2, z_3\} = \{\alpha, \alpha z_2, \alpha z_3\}.$$

Puesto que $1 \in \{\alpha, \alpha z_2, \alpha z_3\}$, $1/\alpha \in \{1, z_2, z_3\}$. Además $\alpha \neq 1$, esto implica que

$$\left\{1, \alpha, \frac{1}{\alpha}\right\} = \{1, z_2, z_3\} = \{\alpha, \alpha z_2, \alpha z_3\} = \{\alpha, \alpha^2, 1\}.$$

Consecuentemente $\alpha^2 = 1/\alpha$, por lo tanto $\alpha = \omega$, donde $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una raíz cúbica de la unidad. De aquí se concluye que $(1, z_2, z_3)$ es una permutación de $(1, \omega, \omega^2)$. Observe que para $\{1, \omega, \omega^2\}$ existen dos clases distintas y son $[1 : \omega : \omega^2]$ y $[1 : \omega^2 : \omega]$. Se concluye que ∞ tiene solo dos preimágenes.

□

Corolario 2.1.10. $\mathcal{V}_3$ es homeomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$.

Demostración. La Proposición 2.1.4 demuestra que $\mathcal{V}_3$ es superficie de Riemann compacta. Se calculará su Característica de Euler. En $\hat{\mathbb{C}}$ se considera una triangulación conformada por dos triángulos, tres aristas y tres vértices, donde los vértices elegidos son $\frac{2}{3^3}, 0, \infty$. Al considerar el conjunto de las imágenes inversas de estos dos triángulos se obtiene una triangulación para $\mathcal{V}_3$. Por Teorema 2.1.9 se tiene que esta triangulación está conformada por 12 triángulos, 18 aristas y 8 vértices, por lo que la Característica de Euler de $\mathcal{V}_3$ es $\chi(\mathcal{V}_3) = 8 - 18 + 12 = 2$. Por Teorema A.2.5 $\mathcal{V}_3$ es homeomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$.

□

2.2. Espacio de raíces de los polinomios de cuarto grado

En esta sección se replicarán las ideas utilizadas en la sección anterior para estudiar la estructura del espacio de raíces de los polinomios de cuarto grado.

Se considera $\mathcal{P}_4$, la familia de polinomios de cuarto grado siguiente

$$\mathcal{P}_4 := \{P(z) = z^4 + a_1 z + a_2 \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}.$$

Como en el caso de $\mathcal{P}_3$, se puede dotar a $\mathcal{P}_4$ con la topología y estructura analítica de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ mediante

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}_4 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \\ z^4 + a_1 z + a_2 &\longmapsto (a_1, a_2). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ahora se define $\mathcal{S}_4 \subset \mathbb{C}^4$ como la familia de raíces de $\mathcal{P}_4$, es decir,

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \left| \prod_{i=1}^4 (z - z_i) \in \mathcal{P}_4 \right. \right\}.$$

Dado $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{S}_4$ se le asigna el polinomio de $\mathcal{P}_4$ con raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 mediante la siguiente función.

$$\begin{aligned} h : \mathcal{S}_4 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto \left(-\sum_{i=1}^4 \prod_{j \neq i} z_j, \prod_{i=1}^4 z_i \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Observaciones 2.2.1.

- a) h es sobreyectiva.
- b) h es inyectiva módulo permutaciones.
- c) h es continua.

Demostración. Cada inciso se demuestra de manera análoga que su homónimo de las Observaciones 2.1.1. $\square$

Recordemos que los elementos de $\mathcal{P}_4$ son polinomios de cuarto grado cuyos coeficientes de los términos cúbico y cuadrático son cero. Del Teorema 1.2.4 se sigue que esta condición es equivalente a que sus raíces satisfagan $\sum_{i=1}^4 z_i = \sum_{i=1}^4 z_i^2 = 0$, por lo que es equivalente definir $\mathcal{S}_4$ de la manera siguiente

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \left| \sum_{i=1}^4 z_i = 0 = \sum_{i=1}^4 z_i^2 \right. \right\}.$$

De esta definición de $\mathcal{S}_4$ se pueden realizar las siguientes observaciones.

Observaciones 2.2.2.

- a) Si 0 es raíz de un polinomio de $\mathcal{P}_4$, entonces las otras tres raíces son distintas de cero y distintas entre si.
- b) Si z_1 es raíz de multiplicidad 2 de un polinomio de $\mathcal{P}_4$, entonces las otras dos raíces son distintas de z_1 , distintas de cero y distintas entre si.

Demostración.

- a) Supongáse que 0 es raíz de multiplicidad 2 de un polinomio de $\mathcal{P}_4$. Consideremos z_1 y z_2 las otras dos raíces, se debe satisfacer que

$$\begin{cases} z_1 = -z_2, \\ z_1^2 = -z_2^2. \end{cases}$$

Lo cual es imposible. Por otro lado si z_1 es raíz de multiplicidad 2 y z_2 es la raíz restante, se debe cumplir que

$$\begin{cases} 2z_1 = -z_2, \\ 2z_1^2 = -z_2^2. \end{cases}$$

Nuevamente imposible.

- b) Ahora supóngase que ξ es raíz de multiplicidad 2 de un polinomio de $\mathcal{P}_4$. Consideremos z_1 y z_2 las raíces restantes. Si $z_1 = \xi$, se debe satisfacer

$$\begin{cases} 3\xi = -z_2, \\ 3\xi^2 = -z_2^2. \end{cases}$$

Nuevamente imposible. Análogamente se puede comprobar que $z_1 \neq 0$ y $z_1 \neq z_2$.

□

Definición 2.2.3. Dados $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}_4$, diremos que $\mathbf{z} \sim \mathbf{w}$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{w}$.

Es inmediato observar que $\sim$ es relación de equivalencia. Además, si una $\sim$ -clase de $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ interseca a $\mathcal{S}_4$ entonces está contenida en $\mathcal{S}_4$.

Proposición 2.2.4. $\mathcal{V}_4 := \mathcal{S}_4 / \sim$ es superficie de Riemann compacta.

Demostración. Nuevamente se considera el Ejemplo A.1.8, de donde se sigue que $P(\mathbb{C}^4)$ es 3-variedad holomorfa. Además, los subconjuntos $U_k = \{[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in P(\mathbb{C}^4) \mid z_k \neq 0\}$ con $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ son abiertos de $P(\mathbb{C}^4)$, por lo que cada U_k es variedad holomorfa de dimensión 3.

Para cada U_k se define la función

$$\begin{aligned} f^k : U_k &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] &\longmapsto \left(\frac{1}{z_k} \sum_{i=1}^4 z_i, \frac{1}{z_k^2} \sum_{i=1}^4 z_i^2 \right). \end{aligned}$$

Cada f^k es función bien definida entre variedades. Además es holomorfa, pues

$$\begin{aligned} f^k \circ \phi_k^{-1} : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto (1 + z_1 + z_2 + z_3, 1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \end{aligned}$$

es holomorfa. Para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$ tenemos que la matriz de la transformación lineal $df_{\mathbf{z}}^k$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 \end{pmatrix}.$$

Nótese que los puntos singulares de f^k son $\mathbf{z} = (z, z, z)$. Estos no son preimagen de 0, por lo que 0 es valor regular de f^k . Consecuentemente $(f^k)^{-1}(0)$ es variedad holomorfa de dimensión 1.

Es claro que $\mathcal{V}_4 = \bigcup_{k=1}^4 (f^k)^{-1}(0)$, siguiendo el razonamiento realizado en la demostración de la Proposición 2.1.4 se tiene que $\mathcal{V}_4$ es superficie de Riemann.

Por otro lado, como cada f^k es continua $(f^k)^{-1}(0)$ es cerrado de $P(\mathbb{C}^4)$ se tiene que $\mathcal{V}_4$ es cerrado en $P(\mathbb{C}^4)$. Como $P(\mathbb{C}^4)$ es compacto se concluye que $\mathcal{V}_4$ es compacto. $\square$

Para poder definir la función (2.7) en $\mathcal{V}_4$ es necesaria la relación de equivalencia siguiente.

Definición 2.2.5. Dados $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, diremos que $(a_1, a_2) \sim_2 (b_1, b_2)$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(a_1, a_2) = (\alpha^3 b_1, \alpha^4 b_2)$.

Análogamente que en la sección anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.6. La relación $\sim_2$ es relación de equivalencia.

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 2.1.6. $\square$

Nuevamente consideramos el espacio cociente $\frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim_2}$ y denotaremos como $[a_1 : a_2]$ a la clase de equivalencia de (a_1, a_2) . Puesto que este espacio se construyó de manera análoga que para los polinomios de tercer grado, es natural que también sea la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Proposición 2.2.7. Consideramos f definida por

$$\begin{aligned} f : \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim_2} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ [a_1 : a_2] &\longmapsto \begin{cases} \frac{a_2^3}{a_1^4} & \text{si } a_1 \neq 0, \\ \infty & \text{si } a_1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

f es homeomorfismo.

Demostración. Que f está bien definida y es sobreyectiva se obtiene prácticamente de manera análoga que para la función (2.3).

Para verificar que f es inyectiva se considera (a_1, a_2) preimagen de z . Es fácil observar que si $z = 0$ o $z = \infty$, entonces (a_1, a_2) está $\sim_2$ -relacionada a $(1, 0)$ o $(0, 1)$ respectivamente, por lo que se supondrá que $z \neq 0$, consecuentemente $a_1 \neq 0 \neq a_2$. Obsérvese que si σ es una raíz cúbica de z , entonces $(1, \sigma)$ es preimagen de z , por lo que es suficiente probar que $(a_1, a_2) \sim_2 (1, \sigma)$. Nótese que si ω es alguna raíz cúbica de 1 se tiene que $(1, \sigma) \sim_2 (1, \omega\sigma)$, simplemente se usa $\alpha = \omega^2$. Consideremos r una raíz cúbica de a_1 . Por un lado se tiene que $r^3 \cdot 1 = a_1$. Por otro lado $a_2^3 = a_1^4 \sigma^3$, de donde se sigue que $a_2 = (\sqrt[3]{a_1})^4 \sigma = r^4(\omega\sigma)$. Con lo que se tiene que $(a_1, a_2) \sim_2 (1, \omega\sigma)$ y por consiguiente $(a_1, a_2) \sim_2 (1, \sigma)$. Así cualquier preimagen de z está $\sim_2$ -relacionada a $(1, \sigma)$. Se concluye que f es inyectiva.

Para comprobar la continuidad de f y la compacidad de $\frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim_2}$ se puede realizar un análisis similar al realizado en la demostración del Teorema 2.1.7. $\square$

Ahora tiene sentido definir la función (2.7) en $\mathcal{V}_4$.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{V}_4 &\longrightarrow \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim_2} \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] &\longmapsto [h(z_1, z_1, z_3, z_4)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde h es la función (2.7). Es fácil de ver que φ es una función bien definida gracias a la definición de $\sim_2$. Ahora si, se define

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{V}_4 &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] &\longmapsto f \circ \varphi([z_1 : z_2 : z_3 : z_4]), \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde f es la función (2.8). Como es de esperar, para este caso se tiene una versión del Corolario 2.1.8.

Corolario 2.2.8. *Consideremos $(z_1, z_2, z_3, z_4), (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathcal{S}_4$ las raíces de los polinomios de $\mathcal{P}_4$, $z^4 + a_1 z + a_2$ y $z^4 + b_1 z + b_2$ respectivamente. Entonces $\psi([z_1 : z_2 : z_3 : z_4]) = \psi([w_1 : w_2 : w_3 : w_4])$ si y solo si $(a_1, a_2) \sim_2 (b_1, b_2)$.*

Demostración. Nuevamente la demostración se sigue del hecho de que la función (2.8) está bien definida y es inyectiva. $\square$

Se puede reescribir ψ en términos de los elementos de $\mathcal{S}_4$,

$$\psi([z_1 : z_2 : z_3 : z_4]) = \frac{(\prod_{i=1}^4 z_i)^3}{\left(\sum_{i=1}^4 \prod_{j \neq i} z_j\right)^4}. \quad (2.11)$$

Teorema 2.2.9. *Consideremos la función $\psi : \mathcal{V}_4 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida anteriormente. ψ es continua sobreyectiva y para cada $z \in \hat{\mathbb{C}}$ existen a lo más 24 elementos en $\mathcal{V}_4$ que son preimágenes de z . Más aún, solo existen 3 puntos con un número menor de preimágenes y son*

- a) $\frac{3^3}{4^4}$ con 12 preimágenes.
- b) ∞ con 6 preimágenes.
- c) 0 con 8 preimágenes.

Demostración. Nuevamente ψ es continua y sobreyectiva pues es composición de funciones continuas y sobreyectivas. Por el Corolario 2.2.8 y la Observación 2.2.1.b) un punto de $\hat{\mathbb{C}}$ tiene a lo más 24 preimágenes. Solo existen menos cuando existen $\tau : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ permutación y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \alpha(z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}, z_{\tau(4)})$. Consecuentemente $\|\alpha\| = 1$. Nuevamente hay tres casos.

- a) $\alpha = 1$. Observe que para que este caso no resulte en la permutación neutra se deben tener raíces múltiples. Por Observación 2.2.2.b) los polinomios en $\mathcal{P}_4$ tienen a lo más una raíz de multiplicidad 2. Además, las otras dos raíces deben de ser distintas de cero y distintas entre si. Como la raíz múltiple debe de ser distinta de cero se puede suponer que es 1. Consideremos z_1 y z_2 las otras dos raíces, se debe satisfacer

$$\begin{cases} 2 + z_1 + z_2 = 0, \\ 2 + z_1^2 + z_2^2 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene que las otras raíces deben ser $\sigma = -1 + i\sqrt{2}$ y $\bar{\sigma}$. Observe que para cada permutación de $(1, 1, \sigma, \bar{\sigma})$ solo existe otra permutación que está $\sim$ -relacionada (la que intercambia las raíces múltiples), por lo que existen 12 clases distintas. Para finalizar con este caso se calcula su imagen.

$$\psi([1 : 1 : \sigma : \bar{\sigma}]) = \frac{(\sigma\bar{\sigma})^3}{(\sigma + \bar{\sigma} + 2\sigma\bar{\sigma})^4} = \frac{(\|\sigma\|^2)^3}{(2(\|\sigma\|^2 - 1))^4} = \frac{3^3}{4^4}.$$

- b) Si $\alpha = e^{i\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$ y existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $z_i = 0$. Se debe tener que $z_i = 0 = z_{\tau(i)}$. Por Observación 2.2.2.a) las otras raíces deben ser distintas de

cero. Consecuentemente $\tau(i) = i$. Además, las otras tres raíces son distintas entre sí, por lo que se debe tener que τ fija al 0 y rota al resto de raíces. Como se vio en la demostración del Teorema 2.1.9 esto implica que $\alpha = \omega$, con $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que $(0, z_1, z_2, z_3)$ debe de ser equivalente a una permutación de $(0, 1, \omega, \omega^2)$. Claramente la imagen de esta clase es 0. Por otro lado, en la demostración del Teorema 2.1.9 se probó que estas rotaciones relacionan las permutaciones de tres elementos en dos clases, por lo que para cada posición del 0 hay dos preimágenes distintas, *i.e.* 0 tiene 8 preimágenes, como se esperaba.

- c) Si $\alpha = e^{i\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$ y para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $z_i \neq 0$. Se puede suponer que $z_1 = 1$. Así, se debe satisfacer la igualdad de conjuntos

$$\{1, z_2, z_3, z_4\} = \{\alpha, \alpha z_2, \alpha z_3, \alpha z_4\}.$$

Como $\alpha \neq 1$, $\alpha \in \{z_2, z_3, z_4\}$ y $1/\alpha \in \{z_2, z_3, z_4\}$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que

$$\{1, z_2, z_3, z_4\} = \{1, \alpha, \frac{1}{\alpha}, z_4\},$$

por lo que

$$\{1, \alpha, \frac{1}{\alpha}, z_4\} = \{\alpha, \alpha^2, 1, \alpha z_4\}.$$

De modo que se debe satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z_4 = \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} = \alpha z_4. \end{cases}$$

De aquí se obtiene que $\alpha = \sqrt[4]{1}$, los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$ conducen a conjuntos de raíces que no están en $\mathcal{S}_4$. Consecuentemente, $\alpha \in \{i, -i\}$.

Se concluye que $(1, z_2, z_3, z_4)$ debe ser alguna permutación de $(1, -1, i, -i)$. Observe que cada permutación está relacionada con otras tres (usando $\alpha = -1, i, -i$), por lo que las permutaciones de $(1, -1, i, -i)$ están $\sim$ -relacionadas 4 a 4, esto implica que en total hay 6 clases distintas. Por último,

$$\psi([1 : -1 : i : -i]) = \infty.$$

□

Corolario 2.2.10. $\mathcal{V}_4$ es superficie homeomorfa a la esfera de Riemann.

Demostración. La Proposición 2.2.4 prueba que $\mathcal{V}_4$ es superficie de Riemann compacta. Se calculará su Característica de Euler. En $\hat{\mathbb{C}}$ se considera una triangulación

conformada por dos triángulos, tres aristas y tres vértices, donde los vértices elegidos son $\frac{3^3}{4^4}, 0, \infty$. Al considerar las imágenes inversas de estos dos triángulos se obtiene una triangulación para $\mathcal{V}_4$. Por Teorema 2.2.9 tenemos que esta triangulación está conformada por 48 triángulos, 72 aristas y 26 vértices, por lo que la Característica de Euler de $\mathcal{V}_4$ es $\chi(\mathcal{V}_4) = 26 - 72 + 48 = 2$. Del Teorema A.2.5 se sigue que $\mathcal{V}_4$ es homeomorfo a $\hat{\mathbb{C}}$. $\square$

2.3. Espacio de raíces de los polinomios de quinto grado

En esta sección nuevamente se replicarán las ideas utilizadas en las secciones anteriores para estudiar las propiedades topológicas y analíticas del espacio de raíces de los polinomios de quinto grado.

Definimos $\mathcal{P}_5$ como la familia de polinomios de quinto grado de la forma

$$\{P(z) = z^5 + a_1 z + a_2 \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}.$$

Esta familia es también conocida como la familia de ecuaciones de Bring-Jerrard. Como en las secciones anteriores, se puede dotar $\mathcal{P}_5$ con la topología y estructura analítica de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ mediante la función

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}_5 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \\ z^5 + a_1 z + a_2 &\longmapsto (a_1, a_2). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por otro lado se define $\mathcal{S}_5 \subset \mathbb{C}^5$ como la familia de raíces de $\mathcal{P}_5$, es decir,

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5 \mid \prod_{i=1}^5 (z - z_i) \in \mathcal{P}_5 \right\}.$$

Dado $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathcal{S}_5$ se le asigna el polinomio de $\mathcal{P}_5$ (parametrizado por $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$), con raíces z_1, z_2, z_3, z_4 y z_5 mediante la siguiente función

$$\begin{aligned} h : \mathcal{S}_5 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \\ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^5 \prod_{j \neq i} z_j, -\prod_{i=1}^5 z_i \right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Para esta función h se tienen las mismas observaciones, por los mismos motivos, que para sus funciones homónimas de las secciones 2.1 y 2.2.

Observaciones 2.3.1.

- a) h es sobreyectiva.
- b) h es inyectiva módulo permutaciones.
- c) h es continua.

Demostración. La prueba es análoga a la de las Observaciones 2.1.1. □

Se estudian los polinomios de la forma $z^5 + a_1z + a_2$, dicho de otra manera, polinomios de quinto grado cuyo coeficientes de los términos de cuarto, tercer y segundo grado son cero. En la sección 1.3 se probó que es equivalente definir $\mathcal{S}_5$ como el conjunto siguiente

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5 \setminus \{0\} \mid \sum_{i=1}^5 z_i = \sum_{i=1}^5 z_i^2 = \sum_{i=1}^5 z_i^3 = 0 \right\}.$$

De esta definición de $\mathcal{S}_5$ se pueden realizar las siguientes observaciones.

Observaciones 2.3.2.

- a) Si 0 es raíz de un polinomio de $\mathcal{P}_5$, entonces las otras cuatro raíces son distintas de cero y distintas entre si.
- b) Si z_1 es raíz de multiplicidad 2 de un polinomio de $\mathcal{P}_5$, entonces las otras tres raíces son distintas de z_1 , distintas de cero y distintas entre si.

Demostración.

- a) Supóngase que 0 es raíz de multiplicidad 2 de un polinomio $P(z) \in \mathcal{P}_5$, $P(z) = z^5 + a_1z + a_2$. Como 0 es raíz de $P(z)$ se debe tener que $a_2 = 0$. Además, 0 es raíz de multiplicidad 2 de $P(z)$, lo que implica que 0 es raíz de $P'(z) = 5z^4 + a_1$. Consecuentemente $a_1 = 0$. Pero esto no es posible, pues z^5 no es un elemento de $\mathcal{P}_5$.

Ahora supóngase que un polinomio $P(z) = z^5 + a_1$ tiene una raíz múltiple $\zeta \neq 0$. Se debe satisfacer

$$\begin{cases} \zeta^5 + a_1\zeta = 0 \\ 5\zeta^4 + a_1 = 0. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene solo la solución trivial $a_1 = 0$. Nuevamente no corresponde a un polinomio de $\mathcal{P}_5$.

- b) Primero véase que $P(z) = z^5 + a_1z + a_2$ no puede tener una raíz de multiplicidad tres. En efecto, si $\zeta \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad 3 de $P(z)$ se debe satisfacer

$$\begin{cases} \zeta^5 + a_1\zeta + a_2 = 0 \\ 5\zeta^4 + a_1 = 0 \\ 20\zeta^3 = 0. \end{cases}$$

De donde se obtiene que $\zeta = 0$, en el inciso anterior se demostró que esto no corresponde a un elemento de $\mathcal{P}_5$.

Ahora se probará que no puede haber varias raíces múltiples. Nuevamente si ζ es raíz de multiplicidad 2 de $P(z)$ debe satisfacer

$$\begin{cases} \zeta^5 + a_1\zeta + a_2 = 0 \\ 5\zeta^4 + a_1 = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación se tiene que $\zeta^4 = -a_1/5$. Sustituyendo esto en la primera ecuación se tiene que $\zeta(4a_1/5) = -a_2$, por lo que $\zeta = -5a_2/4a_1$, *i.e.* la raíz múltiple está totalmente determinada por los coeficientes de $P(z)$.

□

Definición 2.3.3. Dados $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}_5$, diremos que $\mathbf{z} \sim \mathbf{w}$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{w}$.

Es inmediato observar que $\sim$ es relación de equivalencia. Además, observe que las clases de $\mathbb{C}^5 \setminus \{0\}$ que intersecan a $\mathcal{S}_5$ están contenidas en $\mathcal{S}_5$.

Proposición 2.3.4. $\mathcal{V}_5 := \mathcal{S}_5 / \sim$ es superficie de Riemann compacta.

Demostración. Del Ejemplo A.1.8 se sigue que $P(\mathbb{C}^5)$ es 4-variedad holomorfa y que los subconjuntos $U_k = \{[z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \in P(\mathbb{C}^5) \mid z_k \neq 0\}$ con $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ son abiertos de $P(\mathbb{C}^5)$. De donde se sigue cada U_k es variedad holomorfa de dimensión 4.

Para cada U_k se define la función

$$\begin{aligned} f^k : U_k &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] &\longmapsto \left(\frac{1}{z_k} \sum_{i=1}^5 z_i, \frac{1}{z_k^2} \sum_{i=1}^5 z_i^2, \frac{1}{z_k^3} \sum_{i=1}^5 z_i^3 \right). \end{aligned}$$

Cada f^k es función bien definida entre variedades. Además es holomorfa, pues

$$\begin{aligned} f^k \circ \phi_k^{-1} : \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto \left(1 + \sum_{i=1}^4 z_i, 1 + \sum_{i=1}^4 z_i^2, 1 + \sum_{i=1}^4 z_i^3 \right) \end{aligned}$$

es holomorfa. Para cualquier $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^4$ se tiene que $df_{\mathbf{z}}^k$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2z_1 & 2z_2 & 2z_3 & 2z_4 \\ 3z_1^2 & 3z_2^2 & 3z_3^2 & 3z_4^2 \end{pmatrix}$$

Nótese que los puntos singulares de f^k son los $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^4$ que tienen tres elementos iguales, estos no son preimagen de 0 por lo que 0 es valor regular de f^k . Consecuentemente $(f^k)^{-1}(0)$ es variedad holomorfa de dimensión 1.

Siguiendo el razonamiento utilizado en las secciones anteriores se tiene que $\mathcal{V}_5 = \bigcup_{k=1}^5 (f^k)^{-1}(0)$ es superficie de Riemann.

Por otro lado, como cada f^k es continua, $(f^k)^{-1}(0)$ es un cerrado de $P(\mathbb{C}^5)$. Consecuentemente, $\mathcal{V}_5$ es cerrado en $P(\mathbb{C}^5)$. Como $P(\mathbb{C}^5)$ es compacto se concluye que $\mathcal{V}_5$ es compacto. $\square$

Para poder definir la función (2.13) en $\mathcal{V}_5$ es necesario definir la relación de equivalencia siguiente.

Definición 2.3.5. Dados $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, diremos que $(a_1, a_2) \sim_3 (b_1, b_2)$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(a_1, a_2) = (\alpha^4 b_1, \alpha^5 b_2)$.

Análogamente que en las dos secciones anteriores se tiene la proposición siguiente.

Proposición 2.3.6. La relación $\sim_3$ es relación de equivalencia.

Demostración. La demostración es análoga que la de la Proposición 2.1.6. $\square$

Consideramos el espacio cociente $\frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim_3}$. Este espacio se construyó de manera análoga que para los polinomios de tercer y cuarto grado, es natural que también sea la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Teorema 2.3.7. Consideramos f definida por

$$\begin{aligned} f : \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim_3} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ [a_1 : a_2] &\longmapsto \begin{cases} \frac{a_2^4}{a_1^5} & \text{si } a_1 \neq 0, \\ \infty & \text{si } a_1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

f es homeomorfismo.

Demostración. La demostración de este teorema se puede seguir de las demostraciones de los Teoremas 2.1.7 y 2.2.7, haciendo unas modificaciones puntuales. En particular, la inyectividad se puede probar mostrando que cualquier preimagen de un punto $z \in \mathbb{C}$ está $\sim_3$ -relacionada a $(1, \sigma)$, con σ una raíz cuarta de z . $\square$

Ahora tiene sentido definir la función siguiente

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{V}_5 &\longrightarrow \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim_3}, \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] &\longmapsto [h(z_1, z_1, z_3, z_4, z_5)], \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde h es la función (2.13). Puesto que esta función se construyó utilizando el razonamiento de las secciones anteriores, es obvio que φ está bien definida y es continua.

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{V}_5 &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] &\longmapsto f \circ \varphi([z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5]), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde f es la función (2.14). Nuevamente se tiene una versión del Corolario 2.1.8

Corolario 2.3.8. *Consideremos $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5), (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \in \mathcal{S}_5$ las raíces de los polinomios de $\mathcal{P}_5$, $z^5 + a_1 z + a_2$ y $z^5 + b_1 z + b_2$ respectivamente. Entonces $\psi([z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5]) = \psi([w_1 : w_2 : w_3 : w_4 : w_5])$ si y solo si $(a_1, a_2) \sim_2 (b_1, b_2)$.*

Demostración. La demostración se sigue del hecho de que la función (2.14) está bien definida y es inyectiva. $\square$

Al reescribir ψ en términos de los elementos de $\mathcal{S}_5$ se tiene

$$\psi([z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5]) = \frac{(\prod_{i=1}^5 z_i)^4}{\left(\sum_{i=1}^5 \prod_{j \neq i} z_j\right)^5}.$$

Teorema 2.3.9. *Consideremos la función $\psi : \mathcal{V}_5 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida anteriormente. ψ es continua sobreyectiva y para cada $z \in \hat{\mathbb{C}}$ existen a lo más 120 elementos en $\mathcal{V}_5$ que son preimágenes de z . Más aún, solo existen 3 puntos con un número menor de preimágenes y son*

- a) $-\frac{4^4}{5^5}$ con 60 preimágenes.
- b) ∞ con 24 preimágenes.
- c) 0 con 30 preimágenes.

Demostración. Nuevamente ψ es continua y sobreyectiva pues es composición de funciones continuas y sobreyectivas. Por el Corolario 2.3.8 y la Observación 2.3.1.b) un punto de $\hat{\mathbb{C}}$ puede tener a lo más 120 preimágenes, pues es el número de formas de permutar un conjunto con cinco elementos. Solo tiene menos cuando existen $\tau : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ permutación y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = \alpha(z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)}, z_{\tau(4)}, z_{\tau(5)})$. Consecuentemente $\|\alpha\| = 1$. Nuevamente hay tres casos.

- a) $\alpha = 1$. Para que este caso no sea trivial es necesario que existan raíces múltiples. Por Observación 2.3.2.b) los polinomios en $\mathcal{P}_5$ pueden tener a lo más una raíz de multiplicidad 2. En este caso las otras tres raíces deben de ser distintas de cero y distintas entre sí. Como la raíz múltiple debe de ser distinta de cero se puede suponer que es 1. Consideremos z_1, z_2 y z_3 las otras tres raíces. Como se vio las secciones anteriores, en este caso para cada permutación de $(1, 1, z_1, z_2, z_3)$ existe una única permutación no trivial con la que está $\sim$ -relacionada. Por lo que la imagen de $(1, 1, z_1, z_2, z_3)$ bajo ψ tiene 60 preimágenes distintas. Para encontrar la imagen de $(1, 1, z_1, z_2, z_3)$ se puede seguir el razonamiento siguiente. Como 1 es raíz doble del polinomio $z^5 + a_1z + a_2$ también lo es de su derivada $5z^4 + a_1$, por lo que el sistema siguiente debe satisfacerse

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_2 = 0, \\ 5 + a_1 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se tiene que $a_1 = -5$, $a_2 = 4$. Por lo que la imagen de $(1, 1, z_1, z_2, z_3)$ bajo ψ es $-\frac{4^4}{5^5}$.

- b) Si $\alpha = e^{i\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$ y existe $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $z_i = 0$. Por Observación 2.3.2.a) las otras raíces deben ser distintas de cero y distintas entre sí, por lo que τ fija al 0 y rota al resto de raíces, *i.e.* $\tau(i) = i$ si y solo si $z_i = 0$. Esto conduce al caso c) de la demostración del Teorema 2.2.9, lo que implica que $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ está relacionado con alguna permutación de $(0, 1, -1, i, -i)$. Así que para cada posición del 0 se tienen 6 clases distintas, por lo que en total hay $5 \cdot 6 = 30$ clases distintas. Finalmente $\psi([0 : 1 : -1 : i : -i]) = 0$.
- c) Si $\alpha = e^{i\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$ y para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $z_i \neq 0$. Dado que $\alpha \neq 1$, todas las raíces deben de ser distintas entre sí. Sin pérdida de generalidad supóngase que $z_1 = 1$. Así,

$$\{1, z_2, z_3, z_4, z_5\} = \{\alpha, \alpha z_2, \alpha z_3, \alpha z_4, \alpha z_5\}.$$

Como $\alpha \neq 1$, $\{\alpha, 1/\alpha\} \subset \{z_1, z_3, z_4, z_5\}$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $z_2 = \alpha$, $z_3 = 1/\alpha$, por lo que

$$\{1, \alpha, 1/\alpha, z_4, z_5\} = \{\alpha, \alpha^2, 1, \alpha z_4, \alpha z_5\}.$$

Como consecuencia se tienen dos casos $z_4 = \alpha^2$, $z_5 = \alpha z_4$ y $1/\alpha = \alpha z_5$ o bien $z_5 = \alpha^2$, $z_4 = \alpha z_5$ y $1/\alpha = \alpha z_4$, observe que ambos casos son equivalentes luego de un renombramiento. Así,

$$\alpha^2 = z_4 = \frac{z_5}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^3}.$$

Consecuentemente, $\alpha^5 = 1$, por lo que α es una raíz quinta de la unidad distinta de 1. Esto implica que $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ está relacionado con alguna permutación de $(1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4)$, con $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$. Como las raíces quintas de la unidad forman un grupo con la multiplicación, cada permutación de $(1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4)$ está $\sim$ -relacionada con otras cuatro, lo que implica que en total hay $120/5 = 24$ clases distintas. Por último,

$$\psi([1 : \sigma : \sigma^2 : \sigma^3 : \sigma^4]) = \infty.$$

□

Corolario 2.3.10. *La superficie $\mathcal{V}_5$ es homeomorfa a la suma conexa de 4 toros.*

Demostración. Como $\mathcal{V}_5$ es una superficie compacta es posible calcular su Característica de Euler como sigue. En $\hat{\mathbb{C}}$ se considera una triangulación conformada por dos triángulos, tres aristas y tres vértices, donde los vértices elegidos son $-\frac{4^4}{5^5}, 0, \infty$. Al considerar el conjunto de las imágenes inversas de estos dos triángulos se obtiene una triangulación para $\mathcal{V}_5$. Por Teorema 2.3.9 se tiene que esta triangulación está conformada por 240 triángulos, 360 aristas y 114 vértices. Consecuentemente, la Característica de Euler de $\mathcal{V}_5$ es $\chi(\mathcal{V}_5) = 114 - 360 + 240 = -6$. Además, $\mathcal{V}_5$ es superficie de Riemann, por lo tanto es orientable. Por Teorema A.2.5 $\mathcal{V}_5$ es homeomorfa a una suma conexa de 4 toros. □

Capítulo 3

Construcción de algoritmos para encontrar raíces de polinomios

3.1. Algoritmo para los polinomios de tercer grado

En el Corolario 2.1.10 se demostró que el espacio $\mathcal{V}_3$ es homeomorfo a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Recordemos que $\mathcal{V}_3$ es el cociente del espacio $\mathcal{S}_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ bajo la relación de equivalencia $(z_1, z_2, z_3) \sim (w_1, w_2, w_3)$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(z_1, z_2, z_3) = \alpha(w_1, w_2, w_3)$.

También se probó que $\mathcal{V}_3$ tiene estructura de superficie de Riemann. En consecuencia del Teorema de Uniformización se tiene que $\mathcal{V}_3$ es de hecho biholomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$. Se dan más detalles del Teorema de Uniformización en la sección 3.3.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \gamma : \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathcal{V}_3 \\ \zeta &\longmapsto \begin{cases} [1 : \zeta : -1 - \zeta], & \text{si } \zeta \neq \infty \\ [0 : 1 : -1], & \text{si } \zeta = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Es sencillo observar que γ está bien definida, es biyectiva y es continua para todo $\zeta \in \mathbb{C}$. Para ver que es continua en ∞ observe que

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} [1 : \zeta : -1 - \zeta] &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\zeta} : 1 : -\frac{1}{\zeta} - 1 \right] = \\ &= \left[\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta} : \lim_{\zeta \rightarrow \infty} 1 : \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\zeta} - 1 \right) \right] = \\ &= [0 : 1 : -1]. \end{aligned}$$

De este modo se confirma que γ es continua en $\hat{\mathbb{C}}$. Por Teorema A.0.1 se concluye γ es homeomorfismo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y $\mathcal{V}_3$. No es difícil comprobar que γ es de hecho biholomorfismo entre superficies de Riemann.

Usando la parametrización γ se puede reescribir la función (2.5) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\psi : \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ \zeta &\longmapsto -\frac{\zeta^2(1+\zeta)^2}{(1+\zeta+\zeta^2)^3}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Observación 3.1.1. $\psi(\zeta)$ es invariante bajo:

- a) $1/\zeta$;
- b) $-(1+\zeta)$;
- c) $-1/(1+\zeta)$;
- d) $-(1+\zeta)/\zeta$;
- e) $-\zeta/(1+\zeta)$

Demostración. Nótese primero que c), d) y e) son composiciones de a) y b). En efecto,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{1+\zeta} &= \left(\frac{1}{\zeta}\right) \circ -(1+\zeta); \\ -\frac{1+\zeta}{\zeta} &= -(1+\zeta) \circ \left(\frac{1}{\zeta}\right); \\ -\frac{\zeta}{1+\zeta} &= -\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right) \circ -(1+\zeta).\end{aligned}$$

De este modo, basta demostrar que ψ es invariante bajo a) y b).

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{\zeta}\right) &= -\frac{\frac{1}{\zeta^2}\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta^2}\right)^3} = -\frac{\frac{1}{\zeta^2}\left(\frac{\zeta+1}{\zeta}\right)^2}{\left(\frac{1+\zeta+\zeta^2}{\zeta^2}\right)^3} \\ &= -\frac{\frac{1}{\zeta^4}(1+\zeta)^2}{\frac{1}{\zeta^6}(1+\zeta+\zeta^2)^3} = -\frac{\zeta^2(1+\zeta)^2}{(1+\zeta+\zeta^2)^3} = \psi(\zeta);\end{aligned}$$

$$\psi(-(1+\zeta)) = -\frac{(-1-\zeta)^2(-\zeta)^2}{(1-1-\zeta+(1+\zeta)^2)^3} = -\frac{\zeta^2(1+\zeta)^2}{(1+\zeta+\zeta^2)^3} = \psi(\zeta).$$

□

Esta observación tiene un trasfondo interesante, las funciones bajo las que ψ es invariante forman un grupo con la composición que es isomorfo al grupo de permutaciones de tres letras. Esto es de esperarse pues la función (2.5) es invariante bajo permutaciones. Es sencillo comprobar que los puntos fijos de estas funciones son preimágenes de alguno de los puntos especiales de ψ , *i.e.* si $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ es punto fijo de alguna de esas funciones, entonces $\psi(\zeta) \in \{-2^2/3^3, 0, \infty\}$. De manera análoga, si $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ es tal que $f(\zeta) = g(\zeta)$, con f y g funciones distintas de la Observación 3.1.1, entonces $\psi(\zeta) \in \{-2^2/3^3, 0, \infty\}$. De este modo, dado $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que $\psi(\zeta) = \xi$, se tiene que

$$\psi^{-1}(\xi) = \left\{ \zeta, \frac{1}{\zeta}, -(1 + \zeta), -\frac{1}{1 + \zeta}, -\frac{1 + \zeta}{\zeta}, -\frac{\zeta}{1 + \zeta} \right\}.$$

En la prueba del Teorema 2.1.9 se encontraron las preimágenes de los puntos $\{-2^2/3^3, 0, \infty\}$, al usar la parametrización γ estas son:

- $\psi^{-1}(-2^2/3^3) = \{1, -2, -1/2\}$;
- $\psi^{-1}(0) = \{\infty, 0, -1\}$;
- $\psi^{-1}(\infty) = \{\omega = -1/2 + i\sqrt{3}/2, \omega^2\}$.

Ahora se consideran las curvas $\Im(\zeta) = 0$, $\Re(\zeta) = -1/2$, $\|\zeta\| = 1$ y $\|\zeta + 1\| = 1$. Estas curvas forman una triangulación para $\hat{\mathbb{C}}$ con vértices en las preimágenes de $-2^2/3^3$, 0 y ∞ , llamémosle $\mathfrak{M}$. Esta triangulación está conformada por 8 vértices, 18 aristas y 12 caras. Al proyectar estereográficamente a $\mathbb{C}$ se ve la Figura 3.1.

Ahora se considera la función

$$\begin{aligned} \varphi : \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ \zeta &\longmapsto \frac{\zeta - \omega}{\zeta - \omega^2}, \end{aligned}$$

donde $\omega = e^{2\pi i/3}$. Es sencillo observar que φ es transformación de Möbius. Recuerde que las transformaciones de Möbius mapean circunferencias en circunferencias (las rectas se consideran circunferencias de radio infinito). De este modo, para conocer la imagen de una recta o de una circunferencia basta conocer su imagen en tres puntos distintos. Con esto en mente, se tiene que

- $\varphi(\Im(\zeta) = 0) = (\|\zeta\| = 1)$.

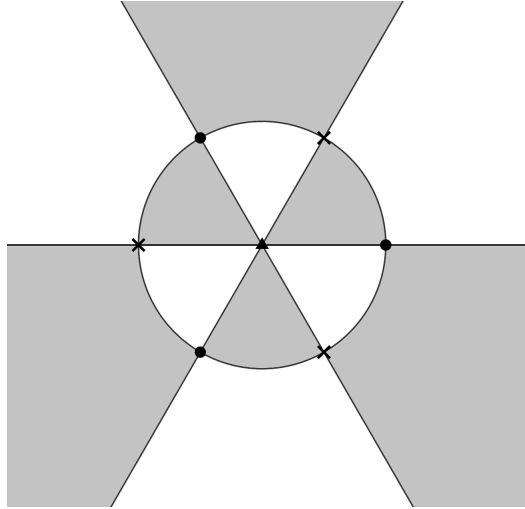


Figura 3.2: Triangulación en $\mathbb{C}$ conformada por las curvas $\Im(\zeta) = 0$, $\|\zeta\| = 1$, $x\omega$ y $x\omega^2$, donde x es una variable real. Las preimágenes bajo ψ de $-2^2/3^3$ están representadas por $\times$, las preimágenes bajo ψ de 0 están representadas por $\bullet$ y las preimágenes bajo ψ de ∞ están representadas por $\blacktriangle$.

Se verifica observando que

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= 0, \\ \varphi(\omega^2) &= \infty, \\ \varphi(-1) &= \frac{\omega^2}{\omega} = \omega.\end{aligned}$$

La recta que contiene a estos puntos es ωt , con $t \in \mathbb{R}$.

- $\varphi(\|\zeta + 1\| = 1) = \omega^2 t$, con $t \in \mathbb{R}$.

Se verifica observando que

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \omega^2, \\ \varphi(\omega) &= 0, \\ \varphi(\omega^2) &= \infty.\end{aligned}$$

La recta que contiene a estos puntos es $\omega^2 t$, con $t \in \mathbb{R}$.

Por lo que la transformación de Möbius φ transforma la triangulación $\mathfrak{M}$ de la Figura 3.1 en la triangulación $\mathfrak{M}'$ cuya proyección estereográfica es mostrada en la Figura 3.2.

Ahora nótese que

$$(\zeta^2 + \zeta + 1)^3 = [(\zeta - \omega)(\zeta - \omega^2)]^3.$$

Por otro lado se tiene que

$$-\zeta^2(\zeta + 1)^2 = [i\zeta(\zeta + 1)]^2 = [i(\zeta^2 + \zeta)]^2.$$

Como $\omega^2 - \omega = \sqrt{3}i$ se tiene que

$$\begin{aligned} -\zeta^2(\zeta + 1)^2 &= \frac{1}{3}[(\omega^2 - \omega)(\zeta^2 + \zeta)]^2 \\ &= \frac{1}{3}[(-\omega\zeta^2 + \omega^2\zeta - (-\omega^2\zeta^2 + \omega\zeta))]^2 \\ &= \frac{1}{27}[(-3\omega\zeta^2 + 3\omega^2\zeta) - (-3\omega^2\zeta^2 + 3\omega\zeta)]^2 \\ &= \frac{1}{27}[(\zeta^3 - 3\omega\zeta^2 + 3\omega^2\zeta - 1) - (\zeta^3 - 3\omega^2\zeta^2 + 3\omega\zeta - 1)]^2 \\ &= \frac{1}{27}[(\zeta - \omega)^3 - (\zeta - \omega^2)^3]^2 \\ &= \frac{1}{27}[(\zeta - \omega)^6 - (\zeta - \omega^2)^6 - 2(\zeta - \omega)^3(\zeta - \omega^2)^3]. \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en ψ se obtiene que

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \frac{1}{27} \frac{(\zeta - \omega)^6 - (\zeta - \omega^2)^6 - 2(\zeta - \omega)^3(\zeta - \omega^2)^3}{(\zeta - \omega)^3(\zeta - \omega^2)^3} \\ &= \frac{1}{27} \left[\frac{(\zeta - \omega)^3}{(\zeta - \omega^2)^3} + \frac{(\zeta - \omega^2)^3}{(\zeta - \omega)^3} - 2 \right] \\ &= \frac{1}{27} \left[\left(\frac{\zeta - \omega}{\zeta - \omega^2} \right)^3 + \left(\frac{\zeta - \omega}{\zeta - \omega^2} \right)^{-3} - 2 \right]. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye que $\psi(\zeta) = \phi \circ \varphi(\zeta)$,

donde $\varphi = \frac{\zeta - \omega}{\zeta - \omega^2}$ y $\phi = \frac{z^3 + z^{-3} - 2}{27}$.

Proposición 3.1.2. $\psi^{-1}(\Im(\zeta) = 0) = \mathfrak{M}$.

Demostración. Como $\mathfrak{M}' = \varphi(\mathfrak{M})$, es suficiente probar que $\phi^{-1}(\Im(z) = 0) = \mathfrak{M}'$. Se puede ver a ϕ como composición de dos funciones más sencillas,

$$\phi(z) = \frac{z + z^{-1} - 2}{27} \circ z^3.$$

Por un lado se tiene que $\Im(z^3) = 0$ si y solo si $\text{Arg}(z) = k\pi/3$, con $k \in \{1, 2, 3\}$. De donde se sigue que $\Im(z^3) = 0$ si y solo si $z \in (\Im(z)) \cup (-t/2 + i\sqrt{3}t/2) \cup (-t/2 - i\sqrt{3}t/2)$, con t un parámetro real.

Por otro lado

$$\Im\left(\frac{z + z^{-1} - 2}{27}\right) = 0$$

si y solo si $\Im(z + z^{-1}) = 0$. Esto último se satisface si y solamente si $\Im(z\|z\|^2 + \bar{z}) = 0$. Sustituyendo $z = x + iy$ se tiene que esto se satisface si y solamente si

$$iy(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

De donde se concluye que $\Im(z + z^{-1}) = 0$ si y solo si $z \in (\Im(z) = 0) \cup (\|z\| = 1)$. Consecuentemente, $\Im(\phi(z)) = 0$ si y solo si $z \in (\Im(z)) \cup (-t/2 + i\sqrt{3}t/2) \cup (-t/2 - i\sqrt{3}t/2) \cup (\|z\| = 1)$, donde t es un parámetro real. Con esto se concluye que $\phi^{-1}(\Im(z) = 0) = \mathfrak{M}$. Consecuentemente $\psi^{-1}(\Im(\zeta) = 0) = \mathfrak{M}$. $\square$

Ahora el objetivo es construir la inversa multivaluada de ψ .

Por un lado φ es transformación de Möbius por lo que su inversa es fácil de calcular, de hecho

$$\varphi^{-1}(\zeta) = \frac{\omega^2 z - \omega}{z - 1}.$$

Por el otro lado ϕ es función con inversa multivaluada. Dado $\xi \in \hat{\mathbb{C}}$ se busca $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} z^3 + z^{-3} - 2 &= 27\xi \\ (z^3)^2 - (2 + 27\xi)z^3 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$z^3 = \frac{(2 + 27\xi) + \sqrt{(2 + 27\xi)^2 - 4}}{2}.$$

Consecuentemente,

$$z = \sqrt[3]{\frac{(2 + 27\xi) + \sqrt{27\xi(27\xi + 4)}}{2}}.$$

Así la inversa multivaluada de ψ puede calcularse fácilmente con la composición de ϕ^{-1} y φ^{-1}

$$\psi^{-1}(\xi) = \frac{\omega^2 \sqrt[3]{\frac{(2 + 27\xi) + \sqrt{27\xi(27\xi + 4)}}{2}} - \omega}{\sqrt[3]{\frac{(2 + 27\xi) + \sqrt{27\xi(27\xi + 4)}}{2}} - 1}. \quad (3.2)$$

Finalmente se tiene un algoritmo para encontrar raíces de polinomios de tercer grado

Algoritmo 3.1.3.

- a) Dado un polinomio de tercer grado $Q(w) = w^3 + aw^2 + bw + c$, si $a \neq 0$ se le aplica una la transformación de Tishirnhausen para convertirlo en un polinomio de la forma $P(z) = z^3 + a_1z + a_2$, esto se obtiene con el cambio de variable $w = z - a/3$.
- b) Se calcula la clase del polinomio $P(z) = z^3 + a_1z + a_2$ en $\hat{\mathbb{C}}$, esta es a_2^2/a_1^3 .
- c) A $\xi = a_2^2/a_1^3$ se le aplica la función multivaluada ψ^{-1} .
- d) Si $\zeta = \psi^{-1}(\xi)$, entonces $[1 : \zeta : -1 - \zeta] = [z_1 : z_2 : z_3]$, por lo que debe existir $\lambda \neq 0$ tal que

$$(z - \lambda)(z - \lambda\zeta)(z + \lambda + \lambda\zeta) = z^3 + a_1z + a_2.$$

Se sabe que $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = a_1$ y $z_1z_2z_3 = -a_2$, por lo que se debe satisfacer el sistema

$$\begin{cases} \lambda^2 = -\frac{a_1}{1+\zeta+\zeta^2} \\ \lambda^3(\zeta(1+\zeta)) = a_2. \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de λ^2 en la segunda ecuación se obtiene la ecuación lineal siguiente

$$\lambda \left(-\frac{a_1}{1+\zeta+\zeta^2} \right) (\zeta(1+\zeta)) = a_2.$$

Finalmente se tiene que

$$\lambda = -\frac{a_2}{a_1} \left(\frac{1+\zeta+\zeta^2}{\zeta(1+\zeta)} \right). \quad (3.3)$$

- e) Las raíces del polinomio $P(z) = z^3 + a_1z + a_2$ son

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda, \\ z_2 &= \lambda\zeta, \\ z_3 &= -(\lambda + \lambda\zeta). \end{aligned}$$

- f) En caso de que el polinomio no haya sido de la forma $z^3 + a_1z + a_2$ se calculan las raíces del polinomio original

$$w_i = z_i - a/3,$$

con $i \in \{1, 2, 3\}$.

A primera vista podría parecer que el algoritmo anterior no está bien definido pues en el punto c) hay 6 formas de elegir la preimagen de $\xi \in \hat{\mathbb{C}}$ bajo ψ , esto no representa ningún inconveniente pues γ es un biholomorfismo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y $\mathcal{V}_3$, lo que implica que $\psi(\zeta_1) = \psi(\zeta_2)$ si y solo si $\gamma(\zeta_1)$ es una permutación de $\gamma(\zeta_2)$.

Ejemplo 3.1.4. Consideremos el polinomio $Q(z) = z^3 - 3z^2 + 4$. Utilicemos el algoritmo para encontrar sus raíces.

- a) Como el coeficiente del término cuadrático de $Q(z)$ no es cero se hace el cambio de variable $w_i = z_i + 1$. El cual transforma el polinomio $Q(z)$ en el polinomio $P(z) = z^3 - 3z + 2$.
- b) La clase de $P(z)$ en $\hat{\mathbb{C}}$ es $-4/27$.
- c) Recuerde que $-4/27$ es un punto especial, una de sus preimágenes bajo ψ es $-1/2$.
- d) Se utiliza la fórmula (3.3) para calcular λ

$$\lambda = -\frac{2}{-1} \left(\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})} \right) = -2.$$

- e) Las raíces del polinomio $P(z)$ son:

$$\begin{aligned} z_1 &= -2, \\ z_2 &= 1, \\ z_3 &= 1. \end{aligned}$$

- f) Las raíces del polinomio original $Q(z)$ son:

$$\begin{aligned} w_1 &= -1, \\ w_2 &= 2, \\ w_3 &= 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.5. Encontremos las raíces del polinomio $Q(z) = z^3 - z^2 + z - 1$.

- a) Para usar el algoritmo es necesario usar el cambio de variable en las raíces $w_i = z_i + 1/3$. Que transforma el polinomio $Q(z)$ en $P(z) = z^3 + 2z/3 - 20/27$.
- b) La clase de $P(z)$ en $\hat{\mathbb{C}}$ es $50/27$.
- c) Se calcula su imagen inversa bajo ψ

$$\zeta = \psi^{-1} \left(\frac{50}{27} \right) = \frac{\omega^2(2 + \sqrt{3}) - \omega}{2 + \sqrt{3} - 1} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

d) La clase de las raíces en $\mathcal{V}_3$ es $[1 : -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i : -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i]$.
Se aplica la fórmula (3.3) para encontrar λ

$$\lambda = \frac{10}{9} \left(\frac{1 + \zeta + \zeta^2}{\zeta(1 + \zeta)} \right) = \frac{10}{9} \left(\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{10}{4}} \right) = \frac{2}{3}.$$

e) Las raíces de $P(z)$ son:

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda = \frac{2}{3}, \\ z_2 &= \lambda\zeta = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right) = -\frac{1}{3} - i, \\ z_3 &= \lambda\bar{\zeta} = -\frac{1}{3} + i. \end{aligned}$$

f) Las raíces del polinomio original $Q(z)$ son:

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 + \frac{1}{3} = 1, \\ w_2 &= z_2 + \frac{1}{3} = -i, \\ w_3 &= z_3 + \frac{1}{3} = i. \end{aligned}$$

3.2. Algoritmo para los polinomios de cuarto grado

A continuación se muestra un resumen de los resultados relacionados con el espacio de polinomios de cuarto grado que se han ido obteniendo.

- Se demostró que cualquier polinomio de cuarto grado puede transformarse a un polinomio de la forma $P(z) = z^4 + a_1z + a_2$, para ello se debe resolver una ecuación cuadrática.
- El espacio de raíces de este tipo de polinomios es

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \mid \sum_{i=1}^4 z_i = \sum_{i=1}^4 z_i^2 = 0 \right\}.$$

- Se definió $\mathcal{V}_4 := \mathcal{S}_4 / \sim$ donde $(z_1, z_2, z_3, z_4) \sim (w_1, w_2, w_3, w_4)$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \alpha(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

- Se demostró que $\mathcal{V}_4$ es una superficie de Riemann compacta.
- La relación de equivalencia anterior induce una relación de equivalencia $\sim_2$ en $\mathcal{P}_4$, el espacio de polinomios de cuarto grado de la forma $P(z) = z^4 + a_1z + a_2$, donde $z^4 + a_1z + a_2 \sim_2 z^4 + b_1z + b_2z$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(a_1, a_2) = (\alpha^3 b_1, \alpha^4 b_2)$.
- $\mathcal{P}_4 / \sim_2$ es biholomorfo a $\hat{\mathbb{C}}$.
- Estas relaciones de equivalencia permiten definir de manera correcta la función

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{V}_4 &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] &\longmapsto \frac{(\prod_{i=1}^4 z_i)^3}{\left(\sum_{i=1}^4 \prod_{j \neq i} z_j\right)^4}. \end{aligned}$$

- En el Teorema 2.2.9 se probó que ψ es función continua, sobreyectiva y es $24 \mapsto 1$ excepto en tres puntos $3^3/4^4$ con 12 preimágenes, 0 con 8 preimágenes e ∞ con 6 preimágenes, incluso se encontraron estas preimágenes
 - $\psi^{-1}(3^3/4^4)$ es el conjunto de las clases de permutaciones de $(1, 1, \sigma, \bar{\sigma})$, donde $\sigma = -1 + i\sqrt{2}$. Es fácil observar que para cada permutación existe únicamente otra permutación con la que está relacionada;
 - $\psi^{-1}(0)$ es el conjunto de clases de permutaciones de $(0, 1, \omega, \omega^2)$. En este caso por cada posición del 0 existen otras dos permutaciones que están relacionadas (se obtienen al multiplicar por ω o ω^2);
 - $\psi^{-1}(\infty)$ es el conjunto de clases de permutaciones de $(1, -1, i, -i)$. En este caso por cada posición del uno se tienen otras tres permutaciones relacionadas, las cuales se obtienen al multiplicar por $-1, i$ o $-i$.
- Se considera R la triangulación en $\hat{\mathbb{C}}$ conformada por los triángulos $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^-$ donde estos son el semiplano superior e inferior respectivamente, con aristas $[-\infty, 0]$, $[0, 3^3/4^4]$, $[3^3/4^4, \infty]$ y vértices $3^3/4^4, 0, \infty$. Al considerar su imagen inversa bajo ψ se obtiene una triangulación $\mathfrak{M}$ de la superficie compacta $\mathcal{V}_4$ conformada por 48 triángulos, 72 aristas y 26 vértices. Es posible calcular la Característica de Euler de $\mathcal{V}_4$, obteniendo que $\chi(\mathcal{V}_4) = 26 - 72 + 48 = 2$. Esto implica que $\mathcal{V}_4$ es homeomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$.
- Sn consecuencia del Teorema de Uniformización la superficie de Riemann $\mathcal{V}_4$ es biholomorfa a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

En la sección anterior se parametrizó la superficie $\mathcal{V}_3$ con la esfera de Riemann de una manera muy intuitiva. la parametrización ayudó a encontrar explícitamente la

triangulación $\psi^{-1}(R)$ y posteriormente a encontrar su inversa multivaluada. En el caso de $\mathcal{V}_4$ sucede algo análogo.

Teorema 3.2.1. *Existe parametrización biholomorfa de $\mathcal{V}_4$ en términos de $\hat{\mathbb{C}}$ tal que la función (2.11) se reescribe como*

$$\begin{aligned}\psi : \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ \zeta &\longmapsto \frac{1}{2^{10}} \frac{(\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1)^3}{(\zeta(\zeta^4 - 1))^4}.\end{aligned}$$

Demostración. Como $\mathcal{V}_4 \cong \hat{\mathbb{C}}$ debe existir biholomorfismo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y $\mathcal{V}_4$. Se comienza definiendo

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \mid \sum_{i=1}^4 z_i = 0 \right\} \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto (z_1, z_2, z_3, -z_1 - z_2 - z_3).\end{aligned}$$

Es sencillo observar que γ es biholomorfismo. Se calcula

$$\gamma^{-1}(\mathcal{S}_4) = \left\{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + (z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0 \right\}.$$

Observe que la última condición es equivalente a que $(z_1 + z_2)^2 + (z_1 + z_3)^2 + (z_2 + z_3)^2 = 0$.

Ahora se considera la siguiente transformación

$$\begin{aligned}T : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto (z_1 + z_2, i(z_2 + z_3) + (z_1 + z_3), i(z_2 + z_3) - (z_1 + z_3)) \\ &= (w_1, w_2, w_3).\end{aligned}$$

Es sencillo verificar que T es una transformación lineal, por lo que para verificar que T es biholomorfismo basta comprobar que es inyectiva. Para ello, observe que

$$\text{Ker } T := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid T(z_1, z_2, z_3) = 0\} = \{0\},$$

con lo que se concluye que T es biholomorfismo.

Se busca encontrar la imagen de $\gamma^{-1}(\mathcal{S}_4)$ bajo T . Nótese que

$$\begin{aligned}w_2 w_3 &= [i(z_2 + z_3) + (z_1 + z_3)][i(z_2 + z_3) - (z_1 + z_3)] \\ &= -(z_2 + z_3)^2 - (z_1 + z_3)^2.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$w_1^2 = (z_1 + z_2)^2,$$

por lo que

$$T(\gamma^{-1}(\mathcal{S}_4)) = \mathcal{S}_4' := \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mid w_1^2 - w_2 w_3 = 0\}.$$

Se define ahora

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathcal{S}_4' \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (u_1 u_2, u_1^2, u_2^2). \end{aligned}$$

Veamos que φ está bien definida, para ello es suficiente verificar que para cualquier $(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $\varphi(u_1, u_2) \in \mathcal{S}_4'$. Claramente

$$(u_1 u_2)^2 - u_1^2 u_2^2 = 0$$

por lo que φ está bien definida.

Dado $(w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{S}_4'$ se tiene que $(\sqrt{w_2}, \sqrt{w_3})$ o bien $(\sqrt{w_2}, -\sqrt{w_3})$ es preimagen de (w_1, w_2, w_3) , ya que

$$\varphi(\sqrt{w_2}, -\sqrt{w_3}) = (\sqrt{w_2} \sqrt{w_3}, w_2, w_3) = (\pm w_1, w_2, w_3).$$

Por lo que φ es sobreyectiva.

φ es función dos a uno, observe que $\varphi(u_1, u_2) = \varphi(-u_1, -u_2)$. Sin embargo, este no es un problema pues el espacio que nos interesa es el cociente $\mathcal{V}_4$. Para ver como es este espacio en $\mathcal{S}_4'$ obsérvese el diagrama (3.4).

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}_4 & \xrightarrow{\gamma^{-1}} & \left\{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \mid \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (z_i + z_j)^2 = 0 \right\} & \xrightarrow{T} & \mathcal{S}_4' \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\ \mathcal{V}_4 & \xrightarrow{\tilde{\gamma}^{-1}} & \left\{ [z_1 : z_2 : z_3] \in P(\mathbb{C}^3) \mid \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (z_i + z_j)^2 = 0 \right\} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \mathcal{V}_4'. \end{array} \quad (3.4)$$

Nótese que la relación de equivalencia que permite que las funciones $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{T}$ estén bien definidas son, en cada caso, $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$, $\mathbf{z} \sim \mathbf{w}$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{w}$.

Ahora consideramos $\pi_3 \circ \varphi$. Dados $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tales que $(u_1, u_2) = \alpha(v_1, v_2)$, donde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$(u_1 u_2, u_1^2, u_2^2) = (\alpha^2 v_1 v_2, \alpha^2 v_1^2, \alpha^2 v_2^2) = \alpha^2 (v_1 v_2, v_1^2, v_2^2).$$

Consecuentemente,

$$\pi_3 \circ \varphi(u_1, u_2) \sim \pi_3 \circ \varphi(v_1, v_2).$$

Por el Teorema de la Función Cociente la función $\tilde{\varphi}$ que hace conmutar el diagrama (3.5) está bien definida y es continua. Además, si $\pi_3 \circ \varphi(u_1, u_2) = \pi_3 \circ \varphi(v_1, v_2)$ entonces

$$(u_1 u_2, u_1^2, u_2^2) = \beta(v_1 v_2, v_1^2, v_2^2),$$

donde $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $\alpha = \sqrt{\beta}$, se tiene que

$$(u_1 u_2, u_1^2, u_2^2) = (\alpha v_1 \alpha v_2, (\alpha v_1)^2, (\alpha v_2)^2)^1,$$

lo que implica que $[u_1 : u_2] = [v_1 : v_2]$. Se concluye que $\tilde{\varphi}$ es inyectiva. Como $P(\mathbb{C}^2)$ es compacta, concluye que $\tilde{\varphi}$ es biholomorfismo entre $P(\mathbb{C}^2)$ y $\mathcal{V}'_4$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{S}'_4 \\ \pi \downarrow & \searrow \pi_3 \circ \varphi & \downarrow \pi_3 \\ P(\mathbb{C}^2) \cong \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{V}'_4. \end{array} \quad (3.5)$$

Finalmente se considera el biholomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow P(\mathbb{C}^2) \\ \zeta &\longmapsto \begin{cases} [\zeta : 1], & \text{si } \zeta \neq \infty, \\ [1 : 0], & \text{si } \zeta = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora buscamos encontrar explícitamente $\psi \circ \tilde{\gamma} \circ \tilde{T}^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ \phi$. Por simplicidad de notación se denotará esta composición como ψ . Comencemos observando que la expresión matricial de T es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 1+i \\ -1 & i & -1+i \end{pmatrix}.$$

Por lo que para calcular T^{-1} es suficiente calcular A^{-1} .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1+i & -1+i \\ 2 & -1-i & 1-i \\ -2 & 1-i & -1-i \end{pmatrix}.$$

¹Nótese que no pueden usarse dos raíces distintas de β simultáneamente

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} 4z_1 &= 2w_1 + (1+i)w_2 + (-1+i)w_3; \\ 4z_2 &= 2w_1 + (-1-i)w_2 + (1-i)w_3; \\ 4z_3 &= -2w_1 + (1-i)w_2 + (-1-i)w_3; \\ 4z_4 &= -4z_1 - 4z_2 - 4z_3 = -2w_1 + (-1+i)w_2 + (1+i)w_3. \end{aligned}$$

Por otro lado, es sencillo comprobar que $\tilde{\varphi} \circ \phi = (\zeta, \zeta^2, 1)$, por lo que al componer con $\tilde{\gamma} \circ \tilde{T}^{-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 4z_1 &= 2\zeta + (1+i)\zeta^2 + (-1+i); \\ 4z_2 &= 2\zeta + (-1-i)\zeta^2 + (1-i); \\ 4z_3 &= -2\zeta + (1-i)\zeta^2 + (-1-i); \\ 4z_4 &= -2\zeta + (-1+i)\zeta^2 + (1+i). \end{aligned}$$

Finalmente se compone con ψ , obteniendo

$$2^{10}\psi(\zeta) = \frac{(\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1)^3}{(\zeta(\zeta^4 - 1))^4}.$$

□

Ahora se encontrarán las preimágenes de los puntos especiales de esta función.

Observaciones 3.2.2.

- a) Las ocho preimágenes de 0 bajo ψ son $\sqrt[4]{-7 + \sqrt{48}}$ y $\sqrt[4]{-7 - \sqrt{48}}$;
- b) las seis preimágenes de ∞ bajo ψ son $1, -1, i, -i, 0$ e ∞ ;
- c) las doce preimágenes de $3^3/4^4$ bajo ψ son $\sqrt[4]{-1}, \sqrt[4]{-17 + 12\sqrt{2}}$ y $\sqrt[4]{-17 - 12\sqrt{2}}$.

Demostración. a) Al aplicar el cambio de variable $z = \zeta^4$ numerador $(\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1)^3$ se obtiene $(z^2 + 14z + 1)^3$. Obteniendo las raíces de este polinomio de segundo grado se tiene que las preimágenes de 0 bajo ψ son $\sqrt[4]{-7 + \sqrt{48}}$ y $\sqrt[4]{-7 - \sqrt{48}}$.

b) Es claro que $1, -1, i, -i$ y 0 son preimágenes de orden 4 de ∞ pues son raíces con esa multiplicidad del denominador $(\zeta(\zeta^4 - 1))^4$. Puesto que $\text{gr}(\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1)^3 - \text{gr}(\zeta(\zeta^4 - 1))^4 = 4$, ∞ es preimagen de orden cuatro del ∞ .

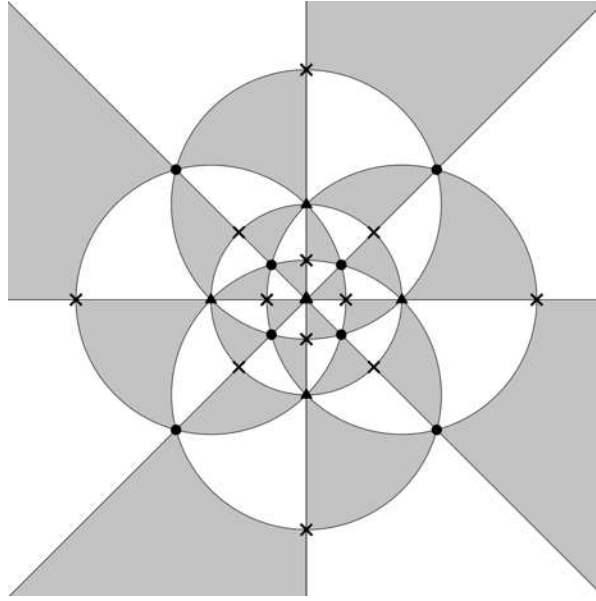


Figura 3.3: Triangulación $\mathfrak{M}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ conformada por las curvas $\Im(\zeta) = 0$, $\Re(\zeta) = 0$, $\Re(\zeta) = \Im(\zeta)$, $\Re(\zeta) = -\Im(\zeta)$, $\|\zeta\| = 1$, $\|\zeta - 1\| = \sqrt{2}$, $\|\zeta + 1\| = \sqrt{2}$, $\|\zeta - i\| = \sqrt{2}$ y $\|\zeta + i\| = \sqrt{2}$. Las preimágenes bajo ψ de $3^3/4^4$ están representadas por $\times$, las preimágenes bajo ψ de 0 están representadas por $\bullet$ y las preimágenes bajo ψ de ∞ están representadas por $\blacktriangle$.

c) La derivada de $2^{10}\psi$ es

$$\frac{4(z^8 + 14z^4 + 1)^2(z^{12} - 33z^8 - 33z^4 + 1)}{z^5(z^4 - 1)^5}$$

de donde se sigue que solamente existen 12 puntos críticos más, y están dados por las raíces de

$$z^{12} - 33z^8 - 33z^4 + 1 = (z^4 + 1)(z^4 + 17 - 12\sqrt{2})(z^4 + 17 + 12\sqrt{2}).$$

Es sencillo comprobar que estos puntos son preimágenes de $3^3/4^4$ bajo ψ . □

La triangulación explícita $\mathfrak{M} = \psi^{-1}(\Im(\zeta) = 0)$ de $\hat{\mathbb{C}}$ se muestra en la Figura 3.3. Dado un triángulo de $T \in \mathfrak{M}$, ψ lo mapea de manera biholomorfa en $\mathbb{H}$ o en $\mathbb{H}^-$, de este modo se obtiene una rama analítica de ψ^{-1} . Por el Principio de Reflexión de Schwartz (véase [1], p.172) la función puede extenderse a todo $\hat{\mathbb{C}}$ produciendo ψ^{-1} .

Ahora se procederá a encontrar la inversa multivaluada ψ^{-1} . Dado $\xi \in \hat{\mathbb{C}}$, se busca

$\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que

$$\xi = \frac{(\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1)^3}{2^{10}(\zeta(\zeta^4 - 1))^4},$$

dicho de otra manera, para todo $\xi \in \hat{\mathbb{C}}$ se desea resolver la ecuación

$$(\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1)^3 - 2^{10}\xi(\zeta(\zeta^4 - 1))^4 = 0. \quad (3.6)$$

Dividiendo entre ambos lados de la ecuación ζ^{12} y utilizando el cambio de variable $x = \zeta^4 + \zeta^{-4} + 14$ la ecuación (3.6) se reescribe de la siguiente manera

$$x^3 - 2^{10}\xi x^2 + 2^{15}\xi x - 2^{18}\xi = 0. \quad (3.7)$$

Para resolver la ecuación (3.7) se puede utilizar el algoritmo descrito en la sección anterior para encontrar raíces de polinomios cúbicos. Por lo que se comienza buscando la transformación de Tschirnhausen para transformar (3.7) en una ecuación compatible con dicho método.

De la sección 1.1 se sabe que el cambio de variable $x = y + 2^{10}\xi/3$ transforma la ecuación (3.7) en

$$y^3 + A_1y + A_2 = 0, \quad (3.8)$$

donde

$$A_1 = -\frac{2^{20}}{3}\xi \left(\xi - \frac{3}{2^5} \right), \quad (3.9)$$

$$A_2 = -\frac{2^{31}}{27}\xi \left(\xi^2 - \frac{9}{2^6}\xi + \frac{27}{2^{13}} \right). \quad (3.10)$$

Posteriormente se encuentra la clase de la ecuación cúbica (3.8) en $\hat{\mathbb{C}}$

$$\pi(\xi) = \frac{A_2^2}{A_1^3} = -\frac{2^2 \left(\xi^2 - \frac{9}{2^6}\xi + \frac{27}{2^{13}} \right)^2}{27\xi \left(\xi - \frac{3}{2^5} \right)^3}. \quad (3.11)$$

Al valor $\pi(\xi)$ se le aplica la fórmula (3.2) y posteriormente la fórmula (3.3), obteniendo así

$$\Phi(\xi) = -\frac{\omega^2 \sqrt[3]{\frac{(2 + 27\pi(\xi)) + \sqrt{27\pi(\xi)(27\pi(\xi) + 4)}}{2}} - \omega}{\sqrt[3]{\frac{(2 + 27\pi(\xi)) + \sqrt{27\pi(\xi)(27\pi(\xi) + 4)}}{2}} - 1}, \quad (3.12)$$

$$\Lambda(\xi) = -\frac{A_2}{A_1} \left(\frac{1 + \Phi(\xi) + \Phi(\xi)^2}{\Phi(\xi)(1 + \Phi(\xi))} \right). \quad (3.13)$$

Finalmente se tiene una solución de la ecuación (3.8), consecuentemente, se tiene que una solución de la ecuación (3.7) es

$$x(\xi) = \Lambda(\xi) + \frac{2^{10}\xi}{3}. \quad (3.14)$$

A partir de aquí es sencillo encontrar una solución de la ecuación (3.6). Simplemente se resuelve una ecuación cuadrática y después se calcula una raíz cuarta.

$$\zeta(\xi) = \sqrt[4]{\frac{-(14 + x(\xi)) + \sqrt{(14 - x(\xi))^2 - 4}}{2}}. \quad (3.15)$$

Finalmente se ha construido un método para encontrar una preimagen de ξ bajo ψ . Ahora, dado un polinomio $P(z) = z^4 + a_1z + a_2$ se puede encontrar la clase de sus raíces en $\hat{\mathbb{C}}$. Anteriormente ya se vio que una clase en $\hat{\mathbb{C}}$ se puede representar en $\mathcal{V}_4$ mediante

$$\begin{aligned} 4z_1 &= 2\zeta(\xi) + (1+i)\zeta(\xi)^2 + (-1+i); \\ 4z_2 &= 2\zeta(\xi) + (-1-i)\zeta(\xi)^2 + (1-i); \\ 4z_3 &= -2\zeta(\xi) + (1-i)\zeta(\xi)^2 + (-1-i); \\ 4z_4 &= -2\zeta(\xi) + (-1+i)\zeta(\xi)^2 + (1+i). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para encontrar las raíces de $P(z)$ se puede proceder como sigue. Debe existir $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\{\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3, \lambda z_4\}$ sean las raíces del polinomio $P(z)$. Recuerde que los coeficientes pueden escribirse en términos de las raíces, en este caso, mediante las ecuaciones (1.7) y (1.8). Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda^3 \left(\sum_{i=1}^4 \prod_{j < i} 4z_j \right) = -a_3, \\ \lambda^4 \left(\prod_{i=1}^4 4z_i \right) = a_4. \end{cases}$$

Desarrollando se tiene que

$$\begin{cases} \lambda^3 (4^2 i \zeta (\zeta^4 - 1)) = -a_3, \\ \lambda^4 (4(\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1)) = a_4. \end{cases}$$

Despejando λ^3 de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se tiene que

$$\lambda = -\frac{4ia_4}{a_3} \left(\frac{\zeta(\zeta^4 - 1)}{\zeta^8 + 14\zeta^4 + 1} \right). \quad (3.17)$$

Reuniendo los resultados obtenidos se puede escribir un algoritmo que permita encontrar las raíces de cualquier polinomio de cuarto grado.

Algoritmo 3.2.3.

- a) Dado $Q(z) = z^4 + b_1z^3 + b_2z^2 + b_3z + b_4$ se sigue el procedimiento descrito en la sección 1.2 para transformarlo en un polinomio de la forma $P(z) = z^4 + a_1z + a_2$.
- b) Se calcula la clase de $P(z)$ en $\hat{\mathbb{C}}$, esta está dada por $\xi = a_2^3/a_1^4$.
- c) Se calcula una preimagen de ξ bajo ψ con la fórmula (3.15), para ello se deben calcular previamente $x(\xi)$, $\Lambda(\xi)$, $\Phi(\xi)$, $\pi(\xi)$, $A_1(\xi)$ y $A_2(\xi)$ usando las fórmulas (3.14), (3.13), (3.12), (3.11), (3.9), (3.10) respectivamente.
- d) Se calcula el representante de la clase de las soluciones $(4z_1, 4z_2, 4z_3, 4z_4)$ utilizando las fórmulas de (3.16).
- e) Se calcula λ utilizando la fórmula (3.17).
- f) Las raíces del polinomio $P(z)$ son $4\lambda z_1$, $4\lambda z_2$, $4\lambda z_3$ y $4\lambda z_4$.

3.3. ¿Qué pasa con los polinomios de quinto grado?

En el Corolario 2.3.10 se probó que $\mathcal{V}_5$ es una superficie de Riemann biholomorfa a la esfera con cuatro asas. Para entender por qué no es posible construir un método general por radicales para encontrar las raíces de un polinomio de quinto grado es necesario comprender el siguiente teorema, este es consecuencia topológica del Teorema de Uniformización. Recuerde que el Teorema de Uniformización enuncia que toda superficie de Riemann *simplemente conexa*, (i.e. su grupo fundamental es trivial), es biholomorfa a una y solo una de las siguientes tres superficies: el plano complejo $\mathbb{C}$, la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ o el semiplano superior $\mathbb{H}$.

Teorema 3.3.1. *Toda superficie de Riemann Y es biholomorfa a un cociente de la forma X/G , donde X es una superficie de Riemann simplemente conexa y G es un subgrupo discreto de $\text{Aut}(X)$, i.e. los biholomorfismos de X en X , y cada $g \in G$ tal que $g \neq \text{Id}_X$ actúa sin puntos fijos. A la superficie X se le conoce como el cubriente universal de Y .*

Nos interesa encontrar la cubierta universal de la superficie $\mathcal{V}_5$, para ello observemos lo siguiente

Observación 3.3.2. *La clasificación de las superficies de Riemann de acuerdo a su cubriente universal es:*

- *esfera de Riemann es cubriente universal únicamente de ella misma;*

- el plano complejo es cubriente universal de: el plano complejo, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, el toro $\mathbb{T}$;
- el semiplano superior es cubriente universal del resto de superficies de Riemann.

Demostración. Encontremos las superficies tales que la esfera de Riemann es su cubriente universal. $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ son las transformaciones de Möbius. Como toda transformación de Möbius tiene puntos fijos, la única posibilidad es que $G = \{Id_{\hat{\mathbb{C}}}\}$. De donde se sigue que $\hat{\mathbb{C}}$ es cubriente universal de $\hat{\mathbb{C}}/\{Id_{\hat{\mathbb{C}}}\} \simeq \hat{\mathbb{C}}$.

$Aut(\mathbb{C}) = \{f(z) = az + b : a, b \in \mathbb{C}\}$. Para que f no tenga puntos fijos se debe satisfacer $a = 1$. Como G debe ser un grupo discreto solo hay a tres casos

- a) $G = \{Id_{\mathbb{C}}\}$. Este caso es el trivial, $\mathbb{C}$ es cubriente universal de $\mathbb{C}$;
- b) $G = \langle f(z) = z + a \rangle$, donde a es un número complejo fijo y no nulo. En este caso G es isomorfo a $\{f(z) = z + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, consecuentemente $\mathbb{C}$ es cubriente universal de $\mathbb{C}/G \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- c) $G = \langle f(z) = z + a, g(z) = z + b \rangle$, con a y b números complejos fijos, no nulos y linealmente independientes. En este caso G es isomorfo a $\{f(z) = z + a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, por lo que $\mathbb{C}$ es cubriente universal de $\mathbb{C}/G \simeq \mathbb{T}$.

Una demostración completa de que estas son las únicas posibilidades de subgrupos discretos de $\mathbb{C}$ puede encontrarse en [1] pp. 265-268.

Como consecuencia del Teorema 3.3.1, las superficies de Riemann restantes deben tener como cubriente universal al semiplano superior $\mathbb{H}$.

□

Por consecuencia de la Observación 3.3.2 se concluye que $\mathbb{H}$ es el cubriente universal de la superficie $\mathcal{V}_5$. De donde se sigue que existe función cubriente $\mu : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{V}_5$. Como $\mathcal{V}_5$ es superficie compacta μ es necesariamente infinito a uno. Esto es consecuencia del siguiente lema.

Lema 3.3.3. *Consideremos X espacio cubriente del espacio compacto Y . Si existe función cubriente $p : X \longrightarrow Y$ tal que para toda $y \in Y$, $|p^{-1}(y)| < \infty$, entonces X es compacto.*

Demostración. Como Y es compacto es posible escoger $U_1, U_2, \dots, U_n$ una cubierta finita de Y , de tal manera que cada U_i es un abierto uniformemente cubierto por p , i.e. cada $p^{-1}(U_i)$ es unión de abiertos disjuntos de X y homeomorfos a U_i .

Como Y es normal (pues es compacto) y $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una cubierta punto finito, es posible construir $\{V_i\}_{i=1}^n$ una cubierta por abiertos finita de Y de tal manera que cada $\overline{V_i} \subset U_i$, esto es posible gracias al Teorema 6.1 de [5].

Cada $\overline{V_i}$ es compacto y es cubierto uniformemente por p . Como para toda $y \in Y$, $p^{-1}(y) < \infty$ se debe tener que

$$p^{-1}(\overline{V_i}) = \bigcup_{j=1}^{m_i} K_j^i,$$

con cada K_j^i homeomorfo a $\overline{V_i}$.

De este modo de tiene que X es unión finita de compactos, consecuentemente X es compacto. $\square$

No es difícil probar que para $p : X \longrightarrow Y$ función cubriente con Y conexo se satisface que $p^{-1}(y)$ es constante.

De este modo,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & & \\ \downarrow \varphi & \searrow \mu & \\ & \mathcal{V}_5 & \xrightarrow{i} P(\mathbb{C}^5). \\ \uparrow \psi & & \\ \hat{\mathbb{C}} & & \end{array}$$

(3.18)

Consideramos la triangulación $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{V}_5$ descrita en el Corolario 2.3.10. Una teselación $\mu^{-1}(\mathfrak{M}) := \{\mu^{-1}(T) \mid T \in \mathfrak{M}\}$ de $\mathbb{H}$, con μ alguna uniformización de $\mathcal{V}_5$, es descrita en [7].

Dado $T \in \mu^{-1}(\mathfrak{M})$, φ lo mapea de manera biholomorfa en $\mathbb{H}$ o $\mathbb{H}^{-1}$, de este modo existe $\varphi^{-1} : \mathbb{H} \longrightarrow T$. Por el Principio de Reflexión de Schwartz, φ^{-1} puede extenderse a todo $\hat{\mathbb{C}}$. De este modo $\psi^{-1} = \mu \circ \varphi^{-1}$ existe, sin embargo, como φ es una función ∞ a 1, es imposible expresar φ^{-1} en términos de una cantidad finita de radicales.

Apéndice A

Teoremas de Topología

En este anexo se encuentran algunas definiciones y teoremas de topología que se usaron durante este trabajo.

Teorema A.0.1. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua, X espacio compacto, Y espacio de Hausdorff. Si f es inyectiva, entonces $f : X \rightarrow f(X) \subset Y$ es homeomorfismo

Demostración. Basta demostrar que la imagen de un cerrado en X es cerrado en Y . Sea $C \subset X$ cerrado, entonces es compacto. Como f es continua $f(C)$ es compacto en Y . Como Y es espacio de Hausdorff $f(C)$ es cerrado en Y . $\square$

Teorema A.0.2. Sea $p : X \rightarrow Y$ una función cociente. Sea Z un espacio y sea $g : X \rightarrow Z$ una función que es constante sobre el conjunto $p^{-1}(y)$, para cada $y \in Y$. Entonces g induce una función $f : Y \rightarrow Z$ tal que $f \circ p = g$. La función f es continua si y solo si g es continua; f es una función cociente si y solo si g es una función cociente.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow g & \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Este teorema es bastante famoso y se puede encontrar en cualquier libro de topología. Esta versión en particular es de [11].

A.1. Variedades Analíticas

Las definiciones y teoremas de esta sección se encuentran principalmente en la secciones A y C del capítulo 1 de [8] y en la sección 1 de [2]

Definición A.1.1. Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}^n$ abierto es *analítica*, si para cada $\mathbf{w} \in D$ existe una vecindad abierta U de $\mathbf{w}$ donde f admite una expansión en series de potencias

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\nu_1 \dots \nu_n = 0}^{\infty} a_{\nu_1 \dots \nu_n} (z_1 - w_1)^{\nu_1} \dots (z_n - w_n)^{\nu_n}$$

En general, puede no ser trivial demostrar que una función de varias variables es analítica, pero sabemos que para funciones de una sola variable, que una función sea analítica es equivalente a que la función sea holomorfa, i.e. diferenciable en el sentido complejo.

Lema A.1.2. (de Osgood). Si una función continua $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}^n$ abierto, es analítica en D para cada variable por separado, entonces es analítica en D .

Véase Teorema 2 de la sección A de [8].

Observación A.1.3. Del lema anterior tenemos que una función continua $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}^n$ abierto es analítica si es holomorfa en D para cada variable por separado.

En consecuencia, diremos que una función de varias variables es analítica si es holomorfa.

Definición A.1.4. Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}^m$ con $D \subset \mathbb{C}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ con $f_k : D \longrightarrow \mathbb{C}$, es holomorfa en D , si cada función coordenada f_k es holomorfa en D . Diremos que una función holomorfa es *biholomorfismo* si es biyectiva y su inversa es holomorfa.

Con estas bases podemos comenzar a introducir el concepto de variedad analítica

Definición A.1.5. Una n -variedad topológica M^n es un espacio topológico de Hausdorff segundo numerable que es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Esto es, para cada punto $p \in M^n$ existe una vecindad abierta U de p , $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\phi : U \longrightarrow V$ homeomorfismo.

A un par (U, ϕ) , con $U \subset M^n$ abierto, $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfismo y $\phi(U)$ abierto en $\mathbb{R}^n$ se le denomina *carta*.

Una colección de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ es un *atlas* para M^n si $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M^n$.

Dados (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, al homeomorfismo

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

se le conoce como *cambio de coordenadas*.

Si $n = 2m$, el espacio $\mathbb{R}^{2m}$ puede identificarse con $\mathbb{C}^m$, consecuentemente las imágenes $\phi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$ pueden verse como subconjuntos de $\mathbb{C}^m$. Un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ es llamado *holomorfo* o *analítico* si todos sus cambios de coordenadas son biholomorfismos. Dos atlas holomorfos son *equivalentes* si su unión es de nuevo un atlas holomorfo. Es fácil observar que esta relación es de equivalencia puesto que la composición de funciones holomorfas es holomorfa. Una clase de equivalencia de atlas holomorfos se conoce como *estructura holomorfa*. El siguiente ejemplo muestra que dos atlas pueden no ser equivalentes.

Ejemplo A.1.6. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ subconjunto abierto. Un atlas analítico para U es $\{\text{Id} : U \longrightarrow U\}$, otro atlas es $\{h : U \longrightarrow U\}$ con h homeomorfismo, este último es atlas holomorfo pues $h \circ h^{-1} = \text{Id} = h^{-1} \circ h$ son funciones holomorfas, sin embargo, es equivalente al atlas $\{\text{Id}\}$ si y solo si h es biholomorfismo.

Definición A.1.7. Una variedad topológica de dimensión $2m$ es *variedad holomorfa* o *analítica* de dimensión m si admite una estructura holomorfa.

Ejemplo A.1.8. (*Espacio proyectivo complejo*). Consideremos en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ la relación de equivalencia $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\mathbf{w} \sim \mathbf{z}$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{z}$. El cociente $P(\mathbb{C}^n) := (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) / \sim$ es variedad analítica de dimensión compleja $n - 1$.

Demostración. Dado $[z_1 : \dots : z_n] \in P(\mathbb{C}^n)$ debe existir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $z_k \neq 0$. Consideramos $U_k = \{[z_1 : \dots : z_n] \in P(\mathbb{C}^n) \mid z_k \neq 0\}$. Por definición, U_k es abierto en $P(\mathbb{C}^n)$ si y solo si $\pi^{-1}(U_k)$ es abierto en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, donde $\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow P(\mathbb{C}^n)$ es la proyección a las clases. En efecto,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) &= \pi^{-1}\left(\{[z_1 : \dots : z_n] \in P(\mathbb{C}^n) \mid z_k \neq 0\}\right) \\ &= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mid z_k \neq 0\}, \end{aligned}$$

claramente $\pi^{-1}(U_k)$ es abierto en $\mathbb{C}^n$, consecuentemente en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Definimos ahora para cada U_k

$$\begin{aligned} \phi_k : U_k &\longrightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ [z_1 : \dots : z_n] &\longmapsto \left(\frac{z_1}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k} \right). \end{aligned}$$

Es fácil observar que cada ϕ_k es un homeomorfismo entre U_k y $\mathbb{C}^{n-1}$. Además, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) &\longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \\ [z_1 : \dots : z_n] &\longmapsto \phi_i(z_1, \dots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \dots, z_n) \\ &= \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right), \end{aligned}$$

que es un biholomorfismo pues $z_i \neq 0$ en $U_i \cap U_j$. Con esto tenemos que $\{(U_k, \phi_k)\}$ con $k = 1, 2, \dots, n$ es un atlas analítico para $P(\mathbb{C}^n)$ y que su clase provee a $P(\mathbb{C}^n)$ una estructura analítica, por lo que $P(\mathbb{C}^n)$ es una variedad analítica de dimensión $n - 1$. $\square$

Definición A.1.9. Sean $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ dos variedades analíticas de dimensiones m y n respectivamente y

$$f : M \longrightarrow N$$

una función continua. Decimos que f es holomorfa en $p \in M$ si existen $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, con $p \in U$, $f(U) \subset V$ tales que la función

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{C}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{C}^n$$

es holomorfa en $\phi(p)$. f es holomorfa si lo es para todo $p \in M$. f es biholomorfismo si es holomorfa y biyectiva.

Observación A.1.10. Esta definición es independiente de la definición de las cartas en X y Y

Demostración. Sea $f : (M, \mathcal{A}) \longrightarrow (N, \mathcal{B})$ función holomorfa en $p \in M$, existen $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ con $p \in U$, $f(U) \subset V$ tales que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Sean $(\tilde{U}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{A}$ y $(\tilde{V}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{B}$ con $p \in \tilde{U}$ y $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$. Tenemos que

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1} = \tilde{\psi} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})$$

que es holomorfa en $\tilde{\phi}(p)$ pues es composición de funciones holomorfas. $\square$

Si M es una variedad holomorfa tal que $M \subset \mathbb{C}^n$, es bastante evidente que para cada $p \in M$ existe un cierto subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$ definido por todos los elementos de $\mathbb{C}^n$ que son tangentes a M en p . Es posible generalizar esta idea para cualquier variedad holomorfa aunque no es trivial. Una construcción formal de este espacio para variedades diferenciables (variedades topológicas donde los cambios de coordenadas son difeomorfismos) es dada en el capítulo 2 de [3]

Para nuestros fines, podemos definir la diferencial de una función holomorfa $f : M \rightarrow N$ en $p \in M$ como la diferencial de la función $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ con ϕ y ψ cartas alrededor de p y $f(p)$ como en la Definición A.1.9. Así, df_p es una transformación lineal de $\mathbb{C}^m$ a $\mathbb{C}^n$.

Definición A.1.11. Sea $f : M \rightarrow N$ función holomorfa entre variedades holomorfas. Decimos que

- $p \in M$ es *punto regular* si df_p es sobreyectiva;
- $p \in M$ es *punto singular* si no es punto regular;
- $q \in N$ es *valor regular* si todo $p \in f^{-1}(q)$ es punto regular;
- $q \in N$ es *valor singular* si no es valor regular.

Lema A.1.12. Si q es valor regular de una función holomorfa entre variedades holomorfas $f : M^m \rightarrow N^n$, entonces $f^{-1}(q)$ es subvariedad de M de dimensión $m - n$.

Demostración. Es análoga a la del Lema 5.9 de [3]. □

A.2. Clasificación de Superficies

Las definiciones y teoremas presentados en esta sección fueron tomados de las secciones 5, 6, 7 y 8 del capítulo 1 de [10]. Se entenderá como superficie compacta a una 2-variedad compacta.

Teorema A.2.1. (*Clasificación de Superficies*). *Cualquier superficie compacta orientable y sin frontera es homeomorfa a la esfera, o a la suma conexa de toros. Cualquier superficie compacta no orientable y sin frontera es homeomorfa a la suma conexa de planos proyectivos.*

En términos simples, una superficie es orientable si puede decirse sin ambigüedad cuál es cada uno de los lados de la superficie. En términos más formales, una superficie S

es *orientable* si existe función continua $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que a cada $q \in S$ le asocia un vector $N(q) \in \mathbb{R}^3$ ortogonal a S en q .

Definición A.2.2. Una *triangulación* de una superficie compacta S consiste en una familia de conjuntos cerrados $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ que cubren a S y una familia de homeomorfismos $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$, $i = 1, \dots, n$, donde cada T'_i es un triángulo en $\mathbb{R}^2$ (i.e., un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ acotado por tres líneas rectas distintas). Los subconjuntos T_i son llamados triángulos, los subconjuntos de T_i que son imágenes bajo φ_i de vértices y aristas del triángulo T'_i también son llamados vértices y aristas respectivamente. Finalmente, es requerido que para cualesquiera dos triángulos distintos T_i, T_j , sean, o bien, disjuntos, tengan un vértice en común, o tengan una arista completa en común.

Definición A.2.3. (*Función característica de Euler*). Sea M una superficie compacta con una triangulación $\{T_1, \dots, T_n\}$. Sean

$$\begin{aligned} v &= \text{número total de vértices de } M, \\ a &= \text{número total de aristas de } M, \\ t &= \text{número total de triángulos de } M \text{ (en este caso } n). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\chi(M) = v - a + t \quad (\text{A.1})$$

es conocida como la característica de Euler de M .

Proposición A.2.4. Sean S_1 y S_2 superficies compactas. Las características de Euler de S_1, S_2 y su suma conexa, $S_1 \# S_2$, están relacionadas por la fórmula

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Usando esta proposición y una inducción obvia, partiendo de los resultados conocidos para la esfera, el toro, y el plano proyectivo podemos obtener los valores de la característica de Euler para las distintas posibilidades de superficies compactas.

<i>Superficie</i>	<i>Característica de Euler</i>	(A.2)
Esfera	2	
Suma conexa de n toros	$2 - 2n$	
Suma conexa de n planos proyectivos	$2 - n$	

Teorema A.2.5. Sean S_1 y S_2 superficies compactas. Entonces S_1 y S_2 son homeomorfos si y solo si sus características de Euler son iguales y ambas son orientables o no orientables.

Bibliografía

- [1] Lars Valerian Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, tercera edición, 1966
- [2] Renato Mario Benazic Tomé, *Algunas obsevaciones sobre el concepto de foliación analítica*, Revista de la F.C.M de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Vol XII, no. 2, pp. 32-50, 2009.
- [3] Theodor Bröcker, Klaus Jänich, *Introduction to differential topology*, English Edition, Cambridge University Press, 1982.
- [4] Ana Cristina Chávez Cáliz, *Soluciones de la ecuación de Bring-Jerrard*, Tesina de maestría, 2016.
- [5] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, segunda edición, 1966
- [6] John Alan Eidswick, *A Proof of Newton's Power Sum Formulas*, The American Mathematical Monthly, Vol. 75, no. 4 (April, 1968), pp. 396-397.
- [7] Mark Lee Green, *On the analytic solution of the equation of fifth degree*, Compositio Mathematica, tome 37 (1978), no. 3, pp. 233-241.
- [8] Robert Clifford Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables, Vol I: Function theory*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.
- [9] Robert Bruce King, *Beyond the Quartic Equation*, Birkhäuser, Berlin, 1996.
- [10] William Schumacher Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1991.
- [11] James Raymond Munkres, *Topología*, Prentice Hall, segunda edición, 2000.