



Universidad Michoacana de San
Nicolás de Hidalgo



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Dos Teoremas Tauberianos

T E S I S

que para obtener el grado de

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

presenta

Yashar Linares Marín

Asesor:

Eugenio Balanzario Gutiérrez

Morelia, Michoacán, México
octubre, 2021

Índice general

Resumen	ii
Dedicaciones	iii
Agradecimientos	iv
1 Introducción	1
1.1 Teoría tauberiana	1
1.2 Teoría tauberiana y el Teorema de los Números Primos	2
1.3 Teoría tauberiana y cadenas de Markov	2
2 Teorema tauberiano de Newman	3
2.1 Demostración del Teorema Analítico de Newman	3
2.2 Aplicación al Teorema de los Números Primos	7
2.2.1 Preámbulo	7
2.2.2 El Teorema de los Números Primos	19
2.3 Aplicación a una versión débil del Teorema de Wiener-Ikehara	22
2.4 Demostración del Teorema de Wiener-Ikehara	24
3 Teorema tauberiano de Erdős, Feller y Pollard (ERP)	28
3.1 Lema de Riemann Lebesgue	28
3.2 Demostración de Pinsky del Teorema Tauberiano de Erdős, Feller y Pollard	30
3.3 Conceptos básicos sobre cadenas de Markov	34
3.4 Aplicación del Teorema de Erdős, Feller y Pollard a las cadenas de Markov	39
4 Conclusiones	41
4.1 Comparación entre las pruebas de los teoremas de Wiener-Ikehara y de Erdős Feller y Pollard	41
4.2 Comparación entre el Teorema Simple de Wiener e Ikehara y el Teorema de Wiener e Ikehara	41
Bibliografía	43

Resumen

En esta tesis se presentan dos teoremas del análisis matemático, sus aplicaciones en la teoría de la probabilidad y en la teoría de números, así como las características que estos teoremas pudiesen compartir.

Palabras Clave: análisis matemático, aplicaciones, probabilidad, teoría de números, teoremas.

Abstract

In this thesis we show two theorems related to the mathematical analysis, it's applications in both probability theory and number theory, as well as the characteristics both of them might share.

Keywords: mathematical analysis, applications, probability theory, number theory, theorems.

Dedicaciones

A mi madre Maria Esther, mi padre Marcos Luciano, mi hermano Aynni y mi hermana Yaretzi Atlai.

Agradecimientos

Por el excesivo amor a la vida,
Por la esperanza y el temor liberados,
Brevemente agradecemos a los dioses,
Sin importar quiénes sean,
Que la vida no sea eterna,
Que nunca los muertos se levanten,
Que hasta el río más perezoso
Llegue en sus giros al reposo del mar.

En primera instancia quiero agradecer a mis padres por todo su apoyo incondicional, nunca bajaron las manos, incluso cuando parecía que no llegaba a ningún lugar. A todos mis amigos, pues fue gracias a ellos que tuve la fuerza de llegar hasta donde estoy, a mis maestros y mi asesor, por apoyarme incluso aunque a veces era un cabeza dura, por último pero no menos importante a todas personas que me han marcado a lo largo de vida.

Capítulo 1

Introducción

El estudio del comportamiento de sucesiones, series y funciones es un tema muy recurrente en las matemáticas y no es una casualidad. Este tema ha sido estudiado por varias generaciones de matemáticos que se interesaron en la convergencia de sucesiones, series y funciones. Presumiblemente uno de los primeros intentos lo hizo Guido Grandi (1671-1742) quien consideró la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ y concluyó que esta debería ser $1/2$ dado que si se considera la fórmula:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x^2 + x^3 - \dots \quad (1.1)$$

y se hace $x = 1$ entonces la parte izquierda resulta ser $1/2$.

Por otro lado, en 1713 Leibniz llegó al mismo resultado al razonar que las series finitas $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \pm 1$ podrían ser o bien 1, o bien 0 dependiendo de si el número de términos es par o impar. Como estos dos valores ocurren con la misma frecuencia concluyó que $1/2$ es el valor *más probable* de la suma.

Hoy en día estos razonamientos podrían parecer extraños para alguien con conocimiento de series pero en su momento representó un considerable avance en la teoría de series.

Si bien la historia de la formación de esta teoría resulta singularmente interesante, daremos un salto hasta 1897, donde A. Tauber probaría uno de muchos resultados que a posteriori se conocerían como la Teoría Tauberiana.

1.1 Teoría tauberiana

Actualmente se conocen una gran cantidad de teoremas tauberianos en honor a A. Tauber (los dos teoremas importantes en esta tesis son una parte de estos teoremas), sin embargo en esta sección sólo se mencionará el que a veces se suele conocer como *Primer Teorema Tauberiano*, cuya demostración se omitirá en esta tesis, no obstante, tanto el enunciado como su respectiva demostración se pueden encontrar en [Apo76] (páginas 300-301).

Primer Teorema de Tauber 1. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $-1 < x < 1$, y supóngase que $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. Si $f(x) \rightarrow S$ cuando $x \rightarrow 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y tiene suma S .

Es importante mencionar que este resultado se puede entender como un posible recíproco del Teorema Límite de Abel [Apo76] (página 298). Nótese sin embargo que el Primer Teorema de Tauber posee una importante restricción, la cual es $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, pues si sólo se considerara

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ si } -1 < x < 1,$$

esto no sería cierto, para ello apelemos a la ecuación (1.1) y sea $a_n = (-1)^n$, entonces cuando $x \rightarrow 1$, la ecuación (1.1) tiende a $1/2$, pese a ello a_n diverge.

1.2 Teoría tauberiana y el Teorema de los Números Primos

E. Landau sería uno de los primeros en considerar las condiciones tauberianas y de ahí deducir una demostración para el teorema de los números primos. Para ese entonces ya existían las pruebas de C.J. de la Valle-Poussin y J. Hadamard, no obstante la prueba hecha por E. Landau se consideró más simple en ese entonces.

Un poco después, en 1921, Hardy y Littlewood en una parte de su artículo “*On Tauberian theorem for Lambert series*”, darían una demostración simple del Teorema de los Números Primos, cuyo carácter era tauberiano (para más información de esta prueba remítase a [Roy11]).

En 1980 D.J. Newman daría otra prueba del teorema de los números primos utilizando otro teorema tauberiano (cuyo enunciado y demostración se encuentran en esta tesis) en su trabajo “*Simple analytic proof of the Prime Number Theorem*”.

1.3 Teoría tauberiana y cadenas de Markov

Como se puede notar arriba, la teoría tauberiana ofrece un amplio campo de aplicación en otras áreas de las matemáticas, como es el caso de la probabilidad, en particular en las cadenas de Markov. Si bien en esta área no hay tantos resultados que utilicen la teoría tauberiana, sí se puede encontrar uno que otro como es el caso del Teorema Tauberiano de Erdős-Feller-Pollard (la demostración de este teorema, con una condición extra se puede leer en esta tesis) cuya aplicación incluye al Teorema Límite de las cadenas de Markov (el enunciado y demostración de este teorema también se encuentran en esta tesis).

Capítulo 2

Teorema tauberiano de Newman

En este capítulo se enunciará y se demostrará el Teorema Tauberiano de Newman, también conocido como Teorema Analítico de Newman. Además se verán varias aplicaciones a otros campos de las matemáticas.

2.1 Demostración del Teorema Analítico de Newman

A continuación se enunciará y demostrará el Teorema Analítico de Newman, la respectiva demostración se puede encontrar en [Ram03]:

Teorema Analítico de Newman. *Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Supóngase que f es integrable en cada intervalo finito $[a, b] \subset [0, \infty)$. Sea $z = x + iy$. Para $x > 0$ sea:*

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt.$$

Si $g(z)$ se extiende analíticamente al semiplano cerrado $x \geq 0$, entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t)dt = g(0).$$

Demostración. Sea

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}dt.$$

Para $T > 0$ la función g_T es entera. Sea $R \in \mathbb{R}$ un número muy grande; debido a que $g(z)$ es analítica en $x \geq 0$ entonces es analítica en el segmento $[-Ri, Ri]$ y para cada punto z tal que $\text{Im}(z) = y \in [-Ri, Ri]$ existe una vecindad V_z con radio δ_z en donde $g(z)$ es analítica. De esta manera se tiene una cubierta del conjunto $\{iy : -R \leq y \leq R\}$ que al ser cerrado y acotado es compacto, así por el Lema del Número de Lebesgue,

Demostración del Teorema Analítico de Newman

existe un $\delta > 0$ tal que si Γ es la frontera de la región $\{z = x + iy : |z| \leq R, x \geq -\delta/2\}$ entonces $g(z)$ es analítica dentro y sobre el contorno de Γ .

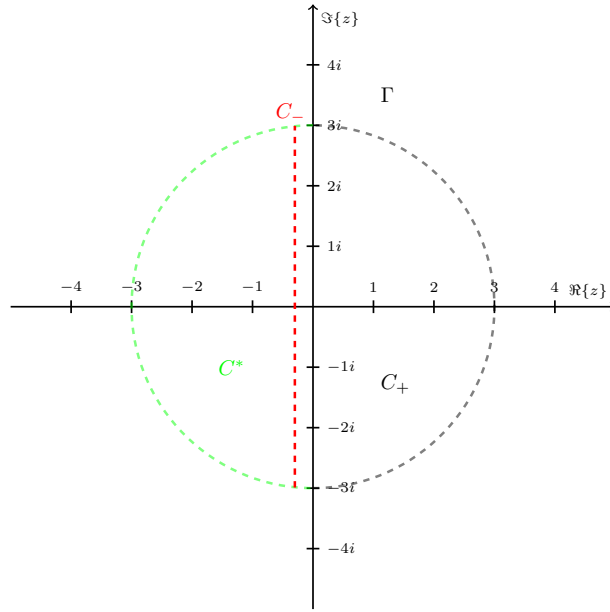


Figura 2.1: Aquí se puede observar la forma de Γ con $R = 3$, nótese que el contorno correspondiente a δ es la línea roja punteada, además se presentan los respectivos contornos de C_+ , C_- y C^*

Sea $G_T = (g(z) - g_T(z))e^{zt}(1 + \frac{z^2}{R^2})$. Debido a que G_T es una multiplicación y suma de funciones analíticas en Γ , entonces G_T es analítica en Γ y $G_T(0) = g(0) - g_T(0)$, pues para $z = 0$, $e^{zt}(1 + \frac{z^2}{R^2}) = 1$. Por la fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned} G_T(0) &= g(0) - g_T(0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G_T(z)}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (g(z) - g_T(z))e^{zt}(1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Veamos que sobre el semicírculo $C_+ = \Gamma \cap \{z = x + iy : x > 0\}$ el termino $g(0) - g_T(0)$ está acotado por B/R , en donde $B = \sup\{|f(t)| : t \geq 0\}$.

Demostración del Teorema Analítico de Newman

Sea $z = x + iy$, así:

$$\begin{aligned}|g(z) - g_T(z)| &= \left| \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt - \int_0^T f(t)e^{-zt} dt \right| \\&= \left| \int_T^\infty f(t)e^{-zt} dt \right| \\&\leq B \int_T^\infty |e^{-zt}| dt \\&= B \int_T^\infty e^{-xt} dt \\&= B \frac{e^{-Tx}}{x}.\end{aligned}$$

Considérese ahora $z = x + iy = Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned}\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| &= e^{xT} \left| \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \\&= e^{xT} \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right|.\end{aligned}$$

Como $\cos \theta = \frac{x}{R}$,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| &= \left| \frac{R}{z} + \frac{z}{R} \right| \cdot \frac{1}{R} \\&= |e^{-i\theta} + e^{i\theta}| \cdot \frac{1}{R} \\&= \frac{2x}{R^2}.\end{aligned}$$

De esta manera se tiene

$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = \frac{2x}{R^2} e^{xT}.$$

Así, el valor absoluto de $g(0) - g_T(0)$ en la integral sobre C_+ está acotado por B/R .

Puesto que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \frac{B e^{-xT}}{x} \cdot \frac{e^{xT} 2x}{R^2} \cdot \pi R = \frac{B}{R}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si se considera la integral sobre $C_- = \Gamma \cap \{z = x + iy : x < 0\}$ se tomarán a $g(z)$ y $g_T(z)$ de manera separada. Ya que g_T es entera, entonces el contorno de integración C_- se puede remplazar por el semicírculo $C^* = \{z = x + iy : |z| = R, x < 0\}$.

De esta manera considérense las siguientes integrales:

$$I_1(T, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z},$$

$$I_2(T, R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

Para I_1 obsérvese que:

$$\begin{aligned} |g_T(z)| &= \left| \int_0^T f(t) e^{-zt} dt \right| \\ &\leq B \int_0^T |e^{-zt}| dt \\ &\leq B \int_{-\infty}^T e^{-xt} dt \\ &= B \frac{e^{-xT}}{|x|}, \end{aligned}$$

puesto que $x < 0$.

Bajo el mismo razonamiento de arriba, pero considerando $z \in C^*$ (con $x < 0$) se cumple:

$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = \frac{2|x|}{R^2} e^{xT}.$$

Así

$$|I_1(T, R)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{B}{|x|} e^{-xT} \cdot \frac{2|x|}{R^2} e^{xT} \cdot \pi R = \frac{B}{R}.$$

Nótese ahora que en $I_2(T, R)$ la función $g(z)(1 + \frac{z^2}{R^2}) \frac{dz}{z}$ es independiente de T y al hacer tender $T \rightarrow \infty$ la función $e^{zT} \rightarrow 0$ dado que $z \in C_-$. Por lo tanto:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |I_2(T, R)| = 0$$

y dado el análisis se concluye pues que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |g(0) - g_T(0)| \leq 2 \frac{B}{R}.$$

Debido a que R es arbitrario, esto termina la demostración. □

2.2 Aplicación al Teorema de los Números Primos

En esta sección se utilizará el teorema analítico para demostrar el teorema de los números primos.

2.2.1 Preámbulo

Primero se definirán algunas funciones especiales, así como algunas de sus características, pues con la ayuda de estas funciones se podrá demostrar el Teorema de los Números Primos.

Definición 1. Para un número complejo $s = \sigma + it$ tal que $\sigma > 1$, se define la función de Riemman mediante:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Proposición 2. La función ζ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos del semiplano $\sigma > 1$. Por lo tanto $\zeta(s)$ representa una función analítica en $\sigma > 1$.

Demostración. Por el Teorema de Convergencia Analítica de Weierstrass ([Tit91], página 95) únicamente bastará probar que la sucesión de funciones analíticas:

$$f_k(s) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s}, \quad k \in \mathbb{N}$$

converge uniformemente en conjuntos compactos $\sigma > 1$. Se demostrará aún más, esto es, que la convergencia uniforme se da en semiplanos $\sigma \geq \sigma_0$, donde $\sigma_0 > 1$. Para $s = \sigma + it$ se tiene:

$$\begin{aligned} |n^s| &= |n^{\sigma+it}| \\ &= |n^\sigma n^{it}| \\ &= |e^{\sigma \log n} e^{it \log n}| \\ &= |e^{\sigma \log n}| |e^{it \log n}| \\ &= e^{\sigma \log n} \\ &= n^\sigma, \end{aligned}$$

dado que $\sigma \geq \sigma_0$, entonces $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma_0}} dx \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} - \frac{1^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} \\ &= 1 - \frac{1}{1-\sigma_0} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0-1}. \end{aligned}$$

De esta manera la serie que define $\zeta(s)$ converge uniformemente en el semiplano $\sigma \geq \sigma_0$. □

Definición 3. Para $s = \sigma + it$ tal que $\sigma > 1$ se define la función $\Phi(s)$ como

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}.$$

Donde la suma es sobre los números primos.

Observación 4. Para $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\delta} = 0.$$

Demostración. Considérese

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\log n}{n^\delta}\right) &= \log \log n - \delta \log n \\ &= \log n \left(\frac{\log \log n}{\log n} - \delta\right).\end{aligned}$$

Si $y = \log n$, entonces

$$\log n \left(\frac{\log \log n}{\log n} - \delta\right) = y \left(\frac{\log y}{y} - \delta\right),$$

como $\frac{\log y}{y} \rightarrow 0$ si $y \rightarrow \infty$ entonces

$$y \left(\frac{\log y}{y} - \delta\right) \rightarrow -\infty, \quad \text{si } y \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Así $\log n < n^\delta$ y por lo tanto $\frac{\log n}{n^\delta} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. □

Lema 5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma}$ converge si $\sigma > 1$.

Demostración. Supóngase $\sigma > 1$. Sean ϵ y δ números positivos tales que $\sigma = 1 + \delta + \epsilon$. Por la Observación 4, existe M tal que:

$$0 \leq \frac{\log n}{n^\delta} \leq M, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta+\epsilon}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\delta} \cdot \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{1+\epsilon}} < \infty.\end{aligned}$$

□

Proposición 6. La función $\Phi(s)$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos del semiplano $\sigma > 1$. Por lo tanto, $\Phi(s)$ representa una función analítica en

$\sigma > 1$.

Demostración. Sea $\sigma \geq \sigma_0$, en donde $\sigma_0 > 1$. Entonces

$$\sum_p \left| \frac{\log p}{p^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma_0}}.$$

Por el Lema 5 la serie de la derecha converge. Así, la serie $\Phi(s)$ converge absoluta y uniformemente en el semiplano $\sigma \geq \sigma_0$ para cada $\sigma_0 > 1$. Aplicando nuevamente el Teorema de la Convergencia Analítica de Weierstrass se obtiene que $\Phi(s)$ es una función analítica en $\sigma > 1$. $\square$

Proposición 7. Para $\sigma > 1$ se cumple $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$

Demostración. Consideremos p_k como el k -ésimo número primo. Entonces, considérese el producto parcial

$$Q_N = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-p_k^{-s}}.$$

Se demostrará que $Q_N \rightarrow \zeta(s)$ cuando $N \rightarrow \infty$, para cada s , tal que $\sigma > 1$.

Para ello, véase que $|1/p^s| = 1/p^\sigma < 1$ para todo p y $\sigma > 1$. Por lo tanto,

$$Q_N = \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \frac{1}{p_k^{3s}} + \cdots \right);$$

de esta manera Q_N se puede expresar como un producto finito de series convergentes. Efectuando el producto y reordenando los términos se obtiene:

$$\left(\frac{1}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_N^{a_N}} \right)^s = \frac{1}{n^s} \quad \text{y cada } a_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Y así

$$Q_N = \sum \frac{1}{n^s} = \sum \left\{ \frac{1}{n^s} : p \text{ es primo, } p|n, p \leq p_N \right\}$$

Es decir, $\sum$ es la suma de los $1/n^s$, en donde n tiene una descomposición en factores primos menores o iguales que p_N . El Teorema Fundamental de la Aritmética implica que cada n^s aparece en $\sum$ solo una vez (de lo contrario existirían dos números naturales

n, m con la misma descomposición en primos, lo cual contradice el Teorema).

De esta manera si se resta Q_N de $\zeta(s)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\zeta(s) - Q_N &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - Q_N \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum \frac{1}{n^s} \\ &= \sum \ddot{\frac{1}{n^s}},\end{aligned}$$

en donde $\sum \ddot{}$ se extiende a los n cuya descomposición posee al menos un primo mayor estricto que p_N . Por consiguiente se obtiene

$$|\zeta(s) - Q_N| \leq \sum_{n > p_N} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n > p_N} \frac{1}{n^\sigma}.$$

De esta manera, si $N \rightarrow \infty$, entonces $p_N \rightarrow \infty$, por lo tanto, la última suma tiende a 0. En consecuencia $Q_N \rightarrow \zeta(s)$ cuando $N \rightarrow \infty$. $\square$

Proposición 8. La función

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

admite una extensión analítica al semiplano $\sigma > 0$.

Demostración. Al igual que en las proposiciones anteriores, en esta basta demostrar la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\sigma > 0$, para posteriormente hacer uso del Teorema de Convergencia Analítica de Weierstrass.

Sea K un subconjunto compacto contenido en $\sigma > 0$. Sean $\sigma_0 = \min\{\sigma : \sigma + it \in K\}$ y $M = \max\{|s| : s \in K\}$. Si $\sigma > 1$ entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \int_n^{n+1} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx.\end{aligned}$$

Donde la serie obtenida converge absolutamente en $\sigma \geq \sigma_0$. Pues

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| &= \left| -s \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{du}{u^{s+1}} dx \right| \\ &\leq |s| \int_n^{n+1} \int_n^x \left| \frac{du}{u^{s+1}} \right| dx \\ &= |s| \int_n^{n+1} \int_n^x \frac{du}{u^{\sigma+1}} dx. \end{aligned}$$

Si $n \leq u \leq x \leq n+1$, entonces $1/u^{\sigma+1} \leq 1/n^{\sigma_0+1}$ de esta manera

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| &\leq \frac{|s|}{n^{\sigma_0+1}} \int_n^{n+1} \int_n^{n+1} du dx \\ &= \frac{|s|}{n^{\sigma_0+1}}. \end{aligned}$$

De donde, si $s \in K$ entonces $|s| \leq M$ y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{\sigma_0+1}} < \infty.$$

Por lo tanto la convergencia es uniforme en K . □

Definición 9. Para $x \in \mathbb{R}$, se define la función $\vartheta(x)$ mediante

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p; \tag{2.2}$$

donde p son todos los primos menores o iguales a x .

Observación 10. Si f y g son funciones definidas en $\mathbb{R}$ y $g(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$ entonces la notación $f(x) = O(g(x))$ significa que existen dos constantes $A > 0$ y x_0 tales que $|f(x)| \leq A g(x)$ siempre que $x \geq x_0$.

Proposición 11. La función $\vartheta(x)$ satisface $\vartheta(x) = O(x)$.

Demostración. Por la expansión binomial se tiene que

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \cdots + \binom{2n}{2n} \geq \binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p,$$

donde

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n!} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p,$$

ya que si $n < p \leq 2n$ entonces p aparece en la descomposición de $\frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n!}$ al menos una vez. Así

$$\begin{aligned} 2^{2n} &\geq \prod_{n < p \leq 2n} p \\ &= \exp\{\log \prod_{n < p \leq 2n} p\} \\ &= \exp\{\sum_{n < p \leq 2n} \log p\} \\ &= \exp\{\vartheta(2n) - \vartheta(n)\}. \end{aligned}$$

Como la función logaritmo es una función creciente. De la desigualdad anterior se obtiene

$$\log(2^{2n}) = 2n \log 2 \geq \vartheta(2n) - \vartheta(n).$$

De esta manera, para todo $x \geq 1$ se cumple que

$$\vartheta(2x) - \vartheta(x) \leq Mx,$$

en donde $M = 2(\log 2 + 1)$. Por lo cual,

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) &\leq \frac{Mx}{2}, \\ \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) - \vartheta\left(\frac{x}{4}\right) &\leq \frac{Mx}{4}, \\ \vartheta\left(\frac{x}{4}\right) - \vartheta\left(\frac{x}{8}\right) &\leq \frac{Mx}{8}, \dots \end{aligned}$$

Al sumar los términos de la desigualdad de manera vertical se obtiene

$$\vartheta(x) \leq xM \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = Mx \quad x \geq 1.$$

□

Proposición 12. Si $\sigma \geq 1$ entonces $\zeta(s) \neq 0$ y además

$$\Phi(s) = \frac{1}{s-1}$$

se extiende analíticamente en el semiplano $\sigma \geq 1$.

Demostración. Por la Proposición 7 se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| &= \prod_p \left| 1 - \frac{1}{p^s} \right| \\ &\leq \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} \right) \\ &\leq \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma} + \frac{1}{p^{2\sigma}} + \cdots \right) \\ &= \prod_p \frac{1}{1 - p^{-\sigma}} = \zeta(\sigma) < \infty, \quad \text{por la Proposición 2.} \end{aligned}$$

Y así, para $\sigma > 1$, $\zeta(s) \neq 0$. Ahora, evaluando el logaritmo de $\zeta(s)$ en la rama $-\pi < \arg \zeta(s) < \pi$, se obtiene

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \\ &= - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right); \end{aligned}$$

Por la Proposición 7, para $\sigma > 1$ el producto $|\prod_p 1/(1 - p^{-s})|$ converge uniformemente, así, por la derivada logarítmica del producto infinito de funciones analíticas, se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \frac{d}{ds} \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \\ &= \sum_p \frac{p^{-s} \log p}{\frac{p^s - 1}{p^s}} \\ &= \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} &= \sum_p \frac{p^s \log p}{p^s(p^s - 1)} \\
 &= \sum_p \frac{p^s \log p + \log p - \log p}{p^s(p^s - 1)} \\
 &= \sum_p \frac{(p^s - 1) \log p + \log p}{p^s(p^s - 1)} \\
 &= \sum_p \left[\frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)} \right].
 \end{aligned}$$

Por ende

$$\begin{aligned}
 -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} \\
 &= \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}.
 \end{aligned}$$

De la Proposición 6 se observa que $\Phi(s)$ converge absolutamente. Ahora se demostrará que para $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$$

converge absolutamente. Para ello, obsérvese que

$$|p^s - 1| \geq |p^\sigma| - 1 = |p^\sigma| - 1 > \frac{p^\sigma}{10}.$$

Ahora, tomando inversos,

$$\frac{10}{p^\sigma} > \frac{1}{|p^s - 1|}.$$

Y por lo tanto,

$$\sum_p \left| \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)} \right| = \sum_p \frac{\log p}{|p^s| |p^s - 1|} \leq 10 \sum_p \frac{\log p}{p^{2\sigma}}.$$

Aplicación al Teorema de los Números Primos

Por el Lema 5 esta serie converge para $\sigma > \frac{1}{2}$ así, por el Teorema de Convergencia Analítica, la serie

$$F(s) := \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$$

representa una función analítica en el semiplano $\sigma > \frac{1}{2}$.

$$\Phi(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - F(s).$$

De la proposición 8, se tiene que la función $h(s) := \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ es analítica en $\sigma > 0$.

Despejando $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + h(s).$$

Sea $H(s) = (s-1)h(s)$, entonces

$$h(s) = \frac{(s-1)h(s)}{s-1} = \frac{H(s)}{s-1},$$

donde

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}(1 + H(s)).$$

Haciendo $G(s) = 1 + H(s)$, queda

$$\zeta(s) = \frac{G(s)}{s-1}$$

y así $\zeta(s)$ ha quedado expresada como producto de funciones, aplicando logaritmo nos queda

$$\log \zeta(s) = \log\left(\frac{G(s)}{s-1}\right) = \log G(s) - \log(s-1).$$

Si derivamos, entonces

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{G'(s)}{G(s)};$$

por lo que

$$\Phi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{G'(s)}{G(s)} - F(s).$$

De esta forma $\Phi(s)$ se extiende meromórficamente al semiplano $\sigma > \frac{1}{2}$. Es decir $\Phi(s)$ es analítica en $\sigma > \frac{1}{2}$ salvo $s = 1$ que es un polo simple de $\zeta(s)$ y aquellos puntos en donde $\zeta(s) = 0$, esto es en sus respectivos polos. Ahora veamos que $s = 1$ es el único polo de $\zeta(s)$

Como $\zeta(s)$ es analítica en $\sigma > 1$, entonces por el Principio de Reflexión de Schwartz (ver [Tit91], página 155) $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$.

Consecuentemente, si ρ es un cero de $\zeta(s)$ entonces $\bar{\rho}$ también lo es. Supóngase que $\zeta(s)$ tiene un cero de orden μ en $s_1 = 1 \pm i\alpha$ y un cero de orden ν en $s_2 = 1 \pm 2i\alpha$.

Por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{1 + \epsilon - 1} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{G'(1 + \epsilon)}{G(1 + \epsilon)} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon F(1 + \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1 \end{aligned}$$

ya que el segundo y tercer límite se anulan, pues $G(1) = 1 \neq 0$ y $F(s)$ es analítica en $\sigma > \frac{1}{2}$. Además por definición $\zeta(x) = (s - s_1)^\mu g(s)$ para una función $g(s)$ analítica y no cero en s_1 , por lo que $\zeta'(s) = \mu(s - s_1)^{\mu-1}g(s) + (s - s_1)^\mu g'(s)$, de esta manera

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon + i\alpha) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\epsilon \frac{\zeta'(1 + \epsilon + i\alpha)}{\zeta(1 + \epsilon + i\alpha)} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon F(1 + \epsilon + i\alpha) \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\mu}{1 + \epsilon + i\alpha - s_1} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon F(1 + \epsilon + i\alpha) \\ &= -\mu. \end{aligned}$$

De la misma manera, se puede proceder con s_2 y así

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon + 2i\alpha) = -\nu.$$

Por la definición 3, se tiene

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \Phi(1 + \epsilon + ir\alpha) &= \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon+ir\alpha}} \\
 &= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \frac{1}{p^{ir\alpha}} \\
 &= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} (6 + 4(\frac{1}{p^{i\alpha}} + \frac{1}{p^{-i\alpha}}) + (\frac{1}{p^{2i\alpha}} + \frac{1}{p^{-2i\alpha}}))
 \end{aligned}$$

multiplicando por $2/2$ y haciendo $p^{i\alpha} = e^{i\alpha \log p}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 2 \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} (3 + 4 \cos(\alpha \log p) + \cos(2\alpha \log p)) \\
 = 4 \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} (1 + \cos(\alpha \log p))^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned}
 3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta &= 3 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\
 &= 3 + 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1 \\
 &= 2(1 + \cos \theta)^2 \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

De esta manera

$$\sum_{r=-2}^2 \binom{4}{2+r} \Phi(1 + \epsilon + ir\alpha) \geq 0.$$

Multiplicando por ϵ y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 -\nu - 4\mu + 6 - 4\mu - \nu &= \binom{4}{0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon - 2i\alpha) + \binom{4}{1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon - i\alpha) \\
 + \binom{4}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \phi(1 + \epsilon) &+ \binom{4}{3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon + i\alpha) + \binom{4}{4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Phi(1 + \epsilon + 2i\alpha) \geq 0,
 \end{aligned}$$

así $6 \geq 8\mu + 2\nu \geq 8\mu$. Dado que μ es un entero no negativo, entonces solo queda que $\mu = 0$. Por lo tanto $\zeta(1 + i\alpha) \neq 0$, así el único polo de $\Phi(s)$ es $s = 1$ que es un polo simple, de donde $\Phi(s) - 1/(s - 1)$ es analítica en $\sigma \geq 1$. $\square$

2.2.2 El Teorema de los Números Primos

En esta parte se utilizarán las propiedades de la función $\Phi(s)$, obtenidas anteriormente, además del Teorema Analítico de Newman, demostrado en la sección 2.1.

Observación 13. Sea $\sigma > 1$. Entonces si $x = e^t$

$$g(s) = \int_0^\infty f(e^t)e^{-st}dt = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Proposición 14. Se cumple que la integral $\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}$ es convergente.

Demostración. Para n primo se cumple que $\vartheta(n) - \vartheta(n-1) = \log n$, por otro lado, si n no es primo $\vartheta(n) - \vartheta(n-1) = 0$, por esto y recordando la Definición 3, se tiene que para $\sigma > 1$

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s} = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^s} (\vartheta(n) - \vartheta(n-1)).$$

Nótese que $\vartheta(1) = 0$ y $\sum_{n=2}^\infty \frac{\vartheta(n)}{n^s} = \sum_{n=2}^\infty \frac{\vartheta(n-1)}{(n-1)^s} - \vartheta(1) = \sum_{n=2}^\infty \frac{\vartheta(n-1)}{(n-1)^s}$; así

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^s} (\vartheta(n) - \vartheta(n-1)) &= - \sum_{n=2}^\infty \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n-1)^s} \right) \vartheta(n-1) \\ &= s \sum_{n=2}^\infty \vartheta(n-1) \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^{s+1}} \\ &= s \sum_{n=2}^\infty \int_{n-1}^n \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx \\ &= s \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

Entonces, recopilando:

$$\frac{1}{s} \Phi(s) = \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Y así

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \Phi(s) - \frac{1}{s-1} &= \int_1^\infty \frac{\vartheta(s)}{x^{s+1}} - \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \\ &= \int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^{s+1}} dx. \end{aligned}$$

Puesto que la función $\vartheta(x) - x$ está acotada y es integrable; y la función $\frac{1}{s}\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ es analítica en el semiplano cerrado $\sigma \geq 1$, entonces el Teorema Analítico de Newman implica que la integral

$$\int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx$$

converge. □

Proposición 15. La función $\vartheta(x)$ satisface

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Demostración. Por contradicción. Supóngase que existe $\lambda > 1$ tal que $\vartheta(x)/x \geq \lambda$, para x arbitrariamente grandes. Dado que $\vartheta(x)$ es creciente, entonces $\vartheta(t) \geq \vartheta(x) \geq \lambda x$ si $x \leq t \leq \lambda x$.

De esta manera

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt.$$

Si se hace $t = xu$, se obtiene

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_1^\lambda \frac{\lambda x - xu}{(xu)^2} x du = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du > 0$$

Pues $\lambda > \log \lambda + 1$ para $\lambda > 1$. Sin embargo, el resultado de la integral contradice el Criterio de Cauchy para integrales impropias. De esta manera no existe λ tal que $\frac{\vartheta(x)}{x} \geq \lambda$ para x arbitrariamente grande.

Por otro lado, si $\vartheta(x) \leq \lambda x$, para valores arbitrariamente grandes de x y $\lambda < 1$, entonces

$$\int_{\lambda x}^x \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_\lambda^1 \frac{\lambda x - xu}{(xu)^2} x du = \int_\lambda^1 \frac{\lambda - u}{u^2} du < 0$$

que también contradice el Criterio de Cauchy. □

Ahora se hará uso de la Proposición 15 para demostrar el Teorema de los Números Primos.

Teorema de los Números Primos. Sea $\pi(x)$ la función contadora de los primos menores o iguales que x , entonces se cumple

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

Demostración. Para comenzar la prueba es importante notar que

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p \\ &\leq \sum_{p \leq x} \log x \\ &= \pi(x) \log x. \end{aligned}$$

Por otro lado, para toda $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\geq \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} \log p \\ &\geq \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} (1 - \epsilon) \log x \\ &= (1 - \epsilon) \log x [\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})] \\ &\geq (1 - \epsilon) \log x [\pi(x) - x^{1-\epsilon}]. \end{aligned}$$

De donde, tomando la primera y segunda desigualdad

$$\frac{\vartheta(x)}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{\vartheta(x)}{(1 - \epsilon) \log x} + x^{1-\epsilon},$$

multiplicando por $\log x$ y dividiendo por x , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta(x)}{x} &\leq \frac{\pi(x) \log x}{x} \\ &\leq \frac{\vartheta(x)}{x} \frac{1}{(1 - \epsilon)} + \frac{\log x}{x^\epsilon}. \end{aligned}$$

Tomando límite inferior en la primera igualdad y límite superior en la segunda igualdad

$$\begin{aligned} 1 &\leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \\ &\leq \frac{1}{(1 - \epsilon)}. \end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x}.$$

De donde, el límite que buscamos existe y por Teorema del sándwich es igual a uno, es decir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

Lo cual termina la demostración del Teorema de los Números Primos. $\square$

2.3 Aplicación a una versión débil del Teorema de Wiener-Ikeraha

En esta sección se demostrará una versión débil del Teorema de Wiener e Ikehara.

Versión débil del Teorema de Wiener e Ikehara. Sea $f(x)$ una función monótona no decreciente definida para $x \geq 1$ tal que $f(x) = O(x)$. Sea

$$g(s) = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1} dx$$

definida para $\operatorname{Re}(s) > 1$. Sea $c \neq 0$ de tal manera que

$$g(s) - \frac{c}{s-1}$$

admite una extensión analítica al semiplano cerrado $\operatorname{Re}(s) \geq 1$. Entonces se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = c$.

Demostración. Sea

$$F(t) = e^{-t} f(e^t) - c.$$

Entonces F está acotada en todo $0 < t < \infty$ y es integrable en cada subintervalo cerrado de su dominio. Sea $G(s)$ la Transformada de Laplace de $F(t)$, así tenemos

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty (e^{-t} f(e^t) - c) e^{-st} dt; \quad \text{haciendo } e^t = x \\ &= \int_1^\infty f(x) x^{-s-2} dx - \frac{c}{s} \\ &= g(s+1) - \frac{c}{s} \end{aligned}$$

Aplicación a una versión débil del Teorema de Wiener-Ikeraha

es bien definida en $Re(s) > 0$, además de que por hipótesis la parte derecha admite una extensión analítica en el semiplano cerrado $Re(s) \geq 0$. De esta manera, por el Teorema Analítico de Newman y haciendo $t = \log x$ la integral impropia

$$G(0) = \int_0^\infty (e^{-t}f(e^t) - c)dt = \int_1^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2}dx$$

converge.

Supóngase ahora que $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x)/x > c$, entonces existe un número $\delta > 0$, tal que para un y arbitrariamente grande se cumple $f(y) > (c + 2\delta)y$. De esta manera, para toda x tal que

$$y < x < y \frac{c + 2\delta}{c + \delta} \quad \text{entonces} \quad f(x) > f(y) > (c + 2\delta)y > (c + \delta)x.$$

Puesto que f es monótona no decreciente. Dado que

$$\begin{aligned} \int_y^{y \frac{c+2\delta}{c+\delta}} \frac{f(x) - cx}{x^2} dx &> \int_y^{y \frac{c+2\delta}{c+\delta}} \frac{\delta x}{x^2} dx \\ &= \int_y^{y \frac{c+2\delta}{c+\delta}} \frac{\delta}{x} dx \\ &= \delta \cdot \log\left(\frac{c + 2\delta}{c + \delta}\right) \end{aligned}$$

esta desigualdad se cumple para una infinidad de valores de y arbitrariamente grandes, se obtiene una contradicción ya que la integral converge. De esta manera

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \leq c.$$

Por otro lado, si $\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x)/x < c$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para una infinidad de valores de y arbitrariamente grandes se cumple $f(y) < (c - 2\delta)y$ (con $c - 2\delta > 0$). Así, para todo x tal que

$$y \frac{c - 2\delta}{c - \delta} < x < y \quad \text{entonces} \quad f(x) < f(y) < (c - 2\delta)y < (c - \delta)x.$$

Así, se llega a una contradicción análoga y, por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

□

2.4 Demostración del Teorema de Wiener-Ikehara

A continuación se enunciará y demostrará el Teorema de Wiener-Ikehara, la demostración de este teorema se encuentra en [Cha68] (páginas 124-128) y en [Bal08], es importante mencionar que en esta demostración se hará uso del Lema de Riemman Lebesgue cuyo enunciado y posterior demostración se pueden encontrar más adelante dentro de las paginas de esta tesis. La diferencia entre el Teorema de Wiener-Ikehara y la versión débil del teorema demostrada por Hlawka se discutirán en la conclusión.

Pero antes se demostrará un lema que será de ayuda para el teorema.

Lema 16. Sea g una función analítica en $\sigma \geq 0$. Entonces $g(\sigma + it)$ converge uniformemente a $g(it)$ en $[-\lambda, \lambda]$, conforme $\sigma \rightarrow 0$, en donde λ es una constante real positiva.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supónganse $\lambda = 1$. Para $t \in [-1, 1]$, sea $\theta_t = \{s : |s - it| < \delta_t/2\}$ en donde δ_t , es tal que si $|s - it| < \delta_t$ entonces $|f(s) - f(it)| < \epsilon/2$. Sea $A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_n}$ una cubierta de $[-1, 1]$. Sea $\delta = \min\{\delta_{t_j}/2\}$. Sea $t \in [-1, 1]$ y t_j tal que $t \in \delta_{t_j}$. Si $0 \leq \sigma \leq \delta$ entonces

$$|\sigma + it - it_j| \leq |\sigma| + |it - it_j| < \delta + \frac{\delta_{t_j}}{2} \leq \delta_{t_j}.$$

Y así

$$\begin{aligned} |g(\sigma + it) - g(it)| &\leq |g(\sigma + it) - g(it_j)| + |g(it_j) - g(it)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Teorema de Wiener-Ikehara. Sea $A(x)$ una función no negativa y no decreciente, definida para $0 \leq x \leq \infty$. Sea

$$f(s) = \int_0^\infty A(x)e^{-xs}dx, \quad s = \sigma + it,$$

suponga que f es analítica en $\sigma \geq 1$, excepto por un polo simple en $s = 1$, con residuo 1. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} A(x) = 1.$$

Demostración. Para este teorema se considerarán dos partes, pero antes de eso, sea

$$B(x) = e^{-x} A(x).$$

Primera parte. Para $\sigma > 1$ se tiene

$$f(s) = \int_0^\infty A(x)e^{-xs}dx \quad \text{y} \quad \frac{1}{s-1} = \int_0^\infty e^{-(s-1)x}dx,$$

de esta manera

$$f(s) - \frac{1}{s-1} = \int_0^\infty (B(x) - 1)e^{-(s-1)x} dx, \quad \sigma > 1.$$

Para cada $\epsilon > 0$ sean

$$g(s) = f(s) - \frac{1}{s-1} \quad \text{y} \quad g_\epsilon(t) = g(1 + \epsilon + it)$$

entonces g es analítica para $\sigma \geq 1$ por la hipótesis respecto a f .

Para $\lambda > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} g_\epsilon(t) \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} dt \\ = \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} \left(\int_0^\infty (B(x) - 1)e^{-(\epsilon+it)x} dx\right) dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Buscamos cambiar el orden de integración en (2.2), para ello obsérvese que $|g_\epsilon(t)| = |\int_0^\infty (B(x)-1)e^{-(\epsilon+it)x} dx| \leq \int_0^\infty |(B(x)-1)e^{-(\epsilon+it)x}| dx \leq \int_0^\infty |(B(x))e^{-\epsilon+it}| dx = |(A(x))e^{-(1+\epsilon+it)}| dx = A(x)e^{-(1+\epsilon+it)} dx < \infty$, puesto que $1 + \epsilon > 1$.

Por otro lado, por el Lema 16 $g_\epsilon(t) \rightarrow g(1 + it)$, conforme $\epsilon \rightarrow 0$ en $-2\lambda \leq t \leq 2\lambda$ y así $g_\epsilon(t)$ es analítica en $[-2\lambda, 2\lambda]$, por lo que el valor absoluto en (2.2) converge y por el Teorema de Fubini podemos cambiar el orden de integración.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} g_\epsilon(t) \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} dt &= \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} \left(\int_0^\infty (B(x) - 1)e^{-(\epsilon+it)x} dx\right) dt \\ &= \int_0^\infty (B(x) - 1)e^{-\epsilon x} \left(\int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{i(y-x)t} dt\right) dx \\ &= \int_0^\infty (B(x) - 1)e^{-\epsilon x} \frac{\sin^2 \lambda(y-x)}{\lambda(y-x)^2} dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

El Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue [Apo76] (página 330, teorema 10.27) implica

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon x} \frac{\sin^2 \lambda(y-x)}{\lambda(y-x)^2} dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda(y-x)}{\lambda(y-x)^2} dx. \quad (2.5)$$

Por otro lado, dado que el integrando es no negativo y creciente cuando $\epsilon \rightarrow 0$, entonces el Teorema de Levi para convergencia monótona de funciones integrables [Apo76] (página 327, teorema 10.24) implica

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty B(x) e^{-\epsilon x} \frac{\sin^2 \lambda(y-x)}{\lambda(y-x)^2} dx = \int_0^\infty B(x) \frac{\sin^2 \lambda(y-x)}{\lambda(y-x)^2} dx. \quad (2.6)$$

De esta manera, por (2.3), (2.4) y (2.5), se obtiene

$$\frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} g_\epsilon(t) \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{iyt} dt = \int_0^\infty B(x) \frac{\sin^2 \lambda(y-x)}{\lambda(y-x)^2} dx - \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda(y-x)}{\lambda(y-x)^2} dx. \quad (2.7)$$

Si $y \rightarrow \infty$, puesto que $g_\epsilon(t)(1 - |t|/2\lambda)$ es integrable en $[-2\lambda, 2\lambda]$, entonces el corolario 3.1.1 (página 37) implica que el lado izquierdo de la igualdad tiende a cero, mientras que en el segundo termino del lado derecho, haciendo $v = \lambda(y - x)$ se obtiene

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda(x - y)}{\lambda(x - y)^2} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda y} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv = \pi$$

y así

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda y} B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv = \pi \quad (2.8)$$

Esto concluye la primera parte.

Segunda parte. Considérese dos números positivos a y λ tal que $y > a/\lambda$. De (2.7) se obtiene

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \int_{-a}^a B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \leq \pi.$$

Como $A(u) = B(u)e^u$ es no decreciente, entonces para $-a \leq v \leq a$

$$e^{y - \frac{a}{\lambda}} B\left(y - \frac{a}{\lambda}\right) \leq e^{y - \frac{v}{\lambda}} B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right),$$

de esta manera

$$B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \geq e^{\frac{v-a}{\lambda}} B\left(y - \frac{a}{\lambda}\right) \geq e^{-\frac{2a}{\lambda}} B\left(y - \frac{a}{\lambda}\right).$$

Así

$$e^{-\frac{2a}{\lambda}} \int_{-a}^a \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \limsup_{y \rightarrow \infty} B\left(y - \frac{a}{\lambda}\right) \leq \pi.$$

Supóngase que $a \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$ tal que $a/\lambda \rightarrow 0$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \limsup_{y \rightarrow \infty} B(y) \leq \pi,$$

que es $\pi \limsup_{y \rightarrow \infty} B(y) \leq \pi$. Es decir $\limsup_{y \rightarrow \infty} B(y) \leq 1$.

Ahora nótese que $|B(x)| \leq C$, para alguna constante C , pues B es no negativa y acotada superiormente. Sean a y λ dos números positivos fijos, entonces

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\lambda y} B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \\ & \leq C \left[\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^\infty \right] \frac{\sin^2 v}{v^2} dv + \int_{-a}^a B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Demostración del Teorema de Wiener-Ikehara

De un razonamiento anterior, para $-a \leq v \leq a$ se tiene

$$B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \leq e^{\frac{2a}{\lambda}} B\left(y + \frac{a}{\lambda}\right).$$

Y así

$$\int_{-a}^a B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \leq B\left(y + \frac{a}{\lambda}\right) e^{\frac{2a}{\lambda}} \int_{-a}^a \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \quad (2.10)$$

ya que $\liminf_{y \rightarrow \infty} B(y + a/\lambda) = \liminf_{y \rightarrow \infty} B(y)$ de (2.7), (2.8) y (2.9) se obtiene

$$\pi \leq C \left[\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty} \right] \frac{\sin^2 v}{v^2} dv + e^{\frac{2a}{\lambda}} \int_{-a}^a \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \liminf_{y \rightarrow \infty} B(y).$$

Si $a \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$ y $a/\lambda \rightarrow 0$, se obtiene

$$\pi \leq \pi \liminf_{y \rightarrow \infty} B(y).$$

que es

$$1 \leq \liminf_{y \rightarrow \infty} B(y) \quad (2.11)$$

De esta manera, por (2.7) y (2.10) se llega a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} A(x) = 1$$

□

Capítulo 3

Teorema tauberiano de Erdős, Feller y Pollard (ERP)

En este capítulo se analizará y demostrará el Teorema de Erdős, Feller y Pollard, utilizando la demostración de Mark. A. Pinsky que se puede encontrar en [Pin76]; sin embargo, antes se demostrará el Lema de Riemann Lebesgue, pues este lema es importante en la demostración de Pinsky. Por último se dará una pequeña introducción a las cadenas de Markov, para concluir con la demostración del Teorema Límite de las cadenas de Markov.

3.1 Lema de Riemann Lebesgue

En esta parte se demostrará el Lema de Riemann Lebesgue que proporcionará una extraordinaria ayuda al momento de demostrar el Teorema Tauberiano de Erdős Feller y Pollard.

Consideremos una notación importante: Designaremos por $L(I)$ al conjunto de todas las funciones integrables según Lebesgue en el intervalo I .

Lema de Riemann Lebesgue. *Supóngase que $f \in L(I)$. Entonces para cada número real β se tiene*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta) dt = 0. \quad (3.1)$$

Demostración. Si f es la función característica en un intervalo compacto $[a, b]$, se tiene

$$\left| \int_a^b \sin(\alpha t + \beta) dt \right| = \left| \frac{\cos(a\alpha + \beta) - \cos(b\alpha + \beta)}{\alpha} \right| \leq \frac{2}{\alpha}, \quad \text{si } \alpha > 0.$$

Por otro lado, si f es constante en (a, b) y cero fuera de $[a, b]$, la desigualdad también se cumple, independientemente de los valores de $f(a)$ y $f(b)$. De esta manera (3.1) es válido también para funciones escalonadas.

Lema de Riemann Lebesgue

Ahora, sea $\epsilon > 0$, entonces existe una función escalonada s tal que $g = f - s$ satisface que $\int_I |f - s| = \int_I |g| < \frac{\epsilon}{2}$. Esto en virtud de la caracterización de funciones integrables según Lebesgue que se puede encontrar en [Apo76] (página 322, teorema 10.19 (b)). Además, como (3.1) es válida para funciones escalonadas, entonces existe un número $M > 0$ tal que si $\alpha \geq M$ entonces

$$\left| \int_I s(t) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Así, si $\alpha \geq M$ se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| &\leq \left| \int_I (f(t) - s(t)) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_I s(t) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| \\ &\leq \left| \int_I (f(t) - s(t)) dt \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta) dt = 0.$$

□

Antes de continuar se probará un corolario que nos ayudará en las demostraciones que hacen uso del Lema de Riemann Lebesgue.

Corolario 3.1.1. Supóngase que $f \in L(I)$. Entonces se cumple

(a) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) \cos(\alpha t) dt = 0.$

(b) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) e^{-i\alpha t} dt = 0.$

Demostración. Para (a) obsérvese que si $\beta = \pi/2$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) \sin(\alpha t + \frac{\pi}{2}) dt &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) (\sin(\alpha t) \cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha t) \sin(\frac{\pi}{2})) dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) \cos(\alpha t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para (b) se hará uso de la Fórmula de Euler y de (a), de esta manera

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) e^{-i\alpha t} &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) \cos(\alpha t) - i \sin(\alpha t) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) \cos(\alpha t) - i \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_I f(t) \sin(\alpha t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

3.2 Demostración de Pinsky del Teorema Tauberiano de Erdős, Feller y Pollard

En esta sección se demostrará el Teorema Tauberiano de Erdős, Feller y Pollard; la demostración se puede encontrar en [Pin76]. Por otro lado, este importante resultado se utilizará para demostrar el Teorema del Límite de Cadenas de Markov contables.

Teorema Tauberiano de Erdős, Feller y Pollard. Sean $\{u_n\}_{n \geq 0}$, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ secuencias de números reales, tales que

$$f_n \geq 0, \sum_1^\infty f_n = 1, \sum_1^\infty n f_n = m < \infty; \quad (3.2)$$

$$u_0 = 1, u_n = f_n + f_{n-1}u_1 + \cdots + f_1 u_{n-1}, \quad (n \geq 1); \quad (3.3)$$

$$\text{El m.c.d. de } \{n : f_n > 0\} \text{ es } 1; \quad (3.4)$$

$$\sum_1^\infty (n \log n) f_n < \infty. \quad (3.5)$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/m$.

Demostración. Primeramente defínanse las siguientes funciones generadoras:

$$U(s) = \sum_0^\infty u_n s^n, \quad F(s) = \sum_1^\infty f_n s^n, \quad (3.6)$$

donde s es un número complejo y $|s| < 1$. De (3.3), se obtiene

$$\begin{aligned}U(s)(1 - F(s)) &= U(s) - F(s)U(s) \\ &= \sum_0^\infty u_n s^n - F \sum_1^\infty f_n s^n \sum_0^\infty u_n s^n \\ &= \sum_0^\infty u_n s^n - \left(\sum_0^\infty u_n s^n - 1 \right) \\ &= 1;\end{aligned}$$

por lo tanto, las ecuaciones en (3.6) están conectadas por la relación

$$U(s) = \frac{1}{1 - F(s)}, \quad |s| < 1. \quad (3.7)$$

De (3.2) y (3.3) se sigue que las únicas raíces de $F(s) = 1$ se encuentran en $s = 1$. Para ver esto, supóngase que existe $e^{i\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$ tal que $F(e^{i\theta}) = 1$. De esta manera

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1 = F(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(n\theta).$$

Pues la parte imaginaria es cero. De esta manera $\cos(n\theta) = 1$ siempre que $f_n > 0$. De ahí que para todo n tal que $f_n > 0$ se cumple que $n\theta = 2\pi v_n$, donde $v_n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $\theta = 2\pi h/m$ donde $h, m \in \mathbb{N}$ y $(h, m) = 1$. De esta manera

$$mv_n = m \frac{n\theta}{2\pi} = nh$$

y $m|n$. Como $1 = \text{m.c.d.} \{n : f_n > 0\}$ entonces $m = 1$. Así $F(e^{i\theta}) = 1$ solo si $\theta = 2\pi h$, con $h \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado por la ecuación integral de Cauchy

$$U(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{U(z)}{z-s} dz, \quad \text{de donde,} \quad \frac{1}{z-s} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{z^{n+1}},$$

por lo que

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U(z)s^n}{z^{n+1}} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{U(z)}{z^{n+1}} s^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n. \end{aligned}$$

De esta manera

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{U(z)}{z^{n+1}} dz. \quad (3.8)$$

Considérese ahora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1-s)^{-1}}{ms^{n+1}} ds &= \frac{1}{m} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\sum_{j=0}^{\infty} s^j}{s^{n+1}} ds \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint s^{j-n-1} ds. \end{aligned}$$

Sea $s = re^{i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq \pi$ y $ds = ire^{i\theta} d\theta$, entonces

$$\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^{j-n-1} re^{i\theta} d\theta = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r^{j-n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(j-n)} d\theta.$$

Nótese que la integral es cero excepto en donde $j = n$, en cuyo caso es igual a 2π y toda la operación es igual a $1/m$; de donde,

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1-s)^{-1}}{ms^{n+1}} ds, \quad (3.9)$$

integrando sobre el círculo $s = re^{i\theta}$, $r < 1$. Para poder continuar con la demostración, primero hay que tener en cuenta la siguiente observación:

Lema 3.2.1. Bajo la condición de (3,5), $1/(1 - F(e^{i\theta})) - 1/(m(1 - e^{i\theta}))$ es integrable en $[-\pi, \pi]$.

Demostración. Como la función es continua para $\theta \neq 0$, es suficiente probar su integrabilidad en $[-\delta, \delta]$ para algún $\delta > 0$. Sea $r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j$, $R(s) = \sum_0^{\infty} r_n s^n$ entonces

$$\begin{aligned} R(s)(1-s) &= R(s) - R(s)s \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n s^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_n s^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n s^n - \sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1} s^n \\ &= r_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n s^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_{n-1} s^n \\ &= r_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (r_n - r_{n-1}) s^n = r_{-1} - \sum_0^{\infty} f_n s^n, \end{aligned}$$

considerando $f_0 = 0$, se tiene entonces que $r_{-1} = \sum_0^{\infty} f_n = 1$ y por lo tanto

$$R(s) = \frac{1 - F(s)}{1 - s},$$

de esta manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - F(s)} - \frac{1}{m(1 - s)} &= \frac{1}{(1 - s)R(s)} - \frac{1}{m(s - 1)} \\ &= \frac{m - R(s)}{mR(s)(s - 1)} \\ &= \frac{R(1) - R(s)}{m(1 - F(s))} \\ &= \frac{R(s) - R(1)}{m(F(s) - 1)} \\ &= \left[\frac{1 - s}{(1 - F(s))m} \right] \left[\frac{R(s) - R(1)}{s - 1} \right]. \end{aligned}$$

Demostración de Pinsky del Teorema Tauberiano de Erdős, Feller y Pollard

Donde el primer factor es continuo y no nulo en una vecindad de $s = 1$. Para verificar la integrabilidad del segundo factor, véase que

$$\frac{R(e^{i\theta}) - R(1)}{e^{i\theta} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n c_n(\theta), \quad (3.10)$$

donde

$$\begin{aligned} c_n(\theta) &= \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{\frac{in\theta}{2}} (e^{\frac{in\theta}{2}} - e^{-\frac{in\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}})} \\ &= e^{i(n-\frac{1}{2})\theta} \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} |c_n(\theta)| d\theta &= \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right| d\theta \\ &\leq K_1 \int_0^{\delta} \left| \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\theta} \right| d\theta \\ &= K_2 \int_0^{\frac{n\delta}{2}} \left| \frac{\sin \phi}{\phi} \right| d\phi = K_2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k\delta}{2}}^{\frac{(k+1)\delta}{2}} \left| \frac{\sin \phi}{\phi} \right| d\phi \\ &\leq K_2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k\delta}{2}}^{\frac{(k+1)\delta}{2}} \left| \frac{1}{\phi} \right| d\phi = K_2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k\delta}{2}}^{\frac{(k+1)\delta}{2}} \frac{1}{\phi} d\phi \\ &= K_2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\log\left(\frac{(k+1)\delta}{2}\right) - \log\left(\frac{k\delta}{2}\right) \right) \\ &\leq K_2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\log\left(\frac{(k+1)\delta}{2}\right) \right) \\ &\leq K \log n. \end{aligned}$$

Así por (3.5)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\delta}^{\delta} |r_n c_n(\theta)| d\theta &\leq K_2 \sum_{n=0}^{\infty} r_n \log n \\
 &\leq K_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \log n \\
 &= K_2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} f_{k-1} \log n \\
 &\leq K_3 \sum_{k=1}^{\infty} (k \log k) f_k \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha probado que (3,10) representa una función integrable en $[-\delta, \delta]$, que es lo que se buscaba.

Por último, obsérvese que $|U(s)|$ es acotada en $s = re^{i\theta}$, $r < 1$. De modo que si se resta (3.9) de (3.8) y se hace $r \rightarrow 1$, entonces por El Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue [Apo76] (página 330, teorema 10.27) se obtiene

$$u_n - \frac{1}{m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{1 - F(e^{i\theta})} - \frac{1}{m(1 - e^{i\theta})} \right] e^{-in\theta} d\theta. \quad (3.11)$$

Donde el integrando es una función integrable de $[-\pi, \pi]$. Y además se ha escrito $u_n - 1/m$ como una función integrable multiplicada por $e^{-in\theta}$, de esta manera, por el Corolario 3.1.1, haciendo $n \rightarrow \infty$, obtenemos que $u_n - 1/m \rightarrow 0$, que es lo que se buscaba. $\square$

3.3 Conceptos básicos sobre cadenas de Markov

En esta sección se hará un repaso de algunas definiciones básicas de cadenas de Markov, así como algunos resultados importantes para la subsecuente demostración del teoremas del límite de cadenas de Markov.

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto numerable. Para fines de la tesis, se considerará de aquí en adelante a $\mathcal{S}$ como un subconjunto de números enteros.

Definición 3.3.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $X_n : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ una variable aleatoria. La sucesión $\{X_n\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$, si para cualesquiera $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x_0, x_1, \dots, x_n, s \in \mathcal{S}$, se cumple que

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} = s | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} = \mathbf{P}\{X_{n+1} = s | X_n = x_n\}.$$

Conceptos básicos sobre cadenas de Markov

Es decir la probabilidad de que ocurra el evento $X_{n+1} = s$ solo depende de la probabilidad del evento anterior. Se dice que $\{X_n\}$ es una cadena homogénea si para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todos los índices $i, j \in \mathcal{S}$

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \mathbf{P}\{X_1 = j | X_0 = i\}.$$

La probabilidad de transición del estado i al estado j se denota como

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\}.$$

La matriz

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

se llama matriz de transición de la cadena $\{X_n\}$. Nótese que los renglones de $\mathbf{P}$ suman 1. Una matriz cuyos renglones suman 1, se llama matriz estocástica.

Si los renglones y las columnas de una matriz suman 1, se dice que la matriz es doblemente estocástica. Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea

$$\mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

el vector columna con entradas $p_j(n) = \mathbf{P}\{X_n = j\}$, para $j \in \mathcal{S}$. Para designar al vector $\mathbf{p}_0$ se utilizará π , mediante π_j se denotan a los elementos del vector π . Con este vector queda especificada la distribución inicial de la cadena de Markov. Se denotará por $\mathbf{P}_i\{A\}$ a $\mathbf{P}\{A | X_0 = i\}$ para cada $A \in \mathcal{F}$. Aplicando la fórmula de la probabilidad total, se obtiene

$$p_j(n+1) = p_1(n)p_{1j} + p_2(n)p_{2j} + \dots = \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i(n)p_{ij}$$

que en términos matriciales se ve como $\mathbf{p}_{n+1}^T = \mathbf{p}_n^T \mathbf{P}$ en donde $\mathbf{p}_n^T$ es la transpuesta de $\mathbf{p}_n$.

Definición 3.3.2. La matriz de transición después de n pasos $\mathbf{P}_n$ es la matriz cuyas entradas son $p_{ij}(n) = \mathbf{P}_i\{X_n = j\}$.

Definición 3.3.3. Se dice que un estado es absorbente si $p_{ii} = 1$.

Ejemplo 3.3.4. (Caso particular de caminata aleatoria). Supongamos un espacio de

Conceptos básicos sobre cadenas de Markov

estados finito, en el cuál los incrementos de la caminata son $X_n = \pm 1$ y el primero y último de los estados son absorbentes. Cuya matriz de transmisión está dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $p_i + r_i + q_i = 1$. Para este ejemplo uno puede imaginarse caminado sobre un segmento de la recta real, en el que cada paso es de tamaño 1 y se tienen tres opciones, quedarse en su respectivo punto con probabilidad r_i , ir para atrás con probabilidad q_i o ir hacia adelante con probabilidad p_i ; además si uno llega al inicio o al final del segmento, entonces la única opción es quedarse ahí. Puesto que la probabilidad de donde nos movamos solo requiere del punto anterior en el que estuvimos entonces X_n es una Cadena de Markov.

Definición 3.3.5. El estado $i \in \mathcal{S}$ se llama recurrente si, con probabilidad 1 el proceso $\{X_n\}$ finalmente regresa al estado i cuando empieza en i , es decir,

$$\mathbf{P}_i\{\exists n \geq 1 : X_n = i\} = 1.$$

En caso contrario, se dice que i es transitorio.

Definición 3.3.6. Se dice que el estado i se comunica con el estado j si

$$\mathbf{P}_i\{\exists n \geq 0 : X_n = j\} > 0.$$

Es decir que la probabilidad de llegar al estado j , dado que comenzamos en el estado i , es mayor que cero. Si i se comunica con j , entonces escribimos $i \rightarrow j$. Decimos que i se intercomunica con j si $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$. En este caso escribimos $i \leftrightarrow j$.

Definición 3.3.7. Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con valores en $\mathcal{S}$. El estado $i \in \mathcal{S}$ se llama cero recurrente, si es recurrente y además

$$m_i := \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) = \infty.$$

Donde

$$f_{ij} = P_i\{X_n = j, X_k \neq j \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

es la probabilidad de que en el estado i , la cadena visite al estado j por primera vez en n pasos. El estado $i \in \mathcal{S}$ es positivo recurrente si es recurrente y además $m_i < \infty$.

Definición 3.3.8. Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estado $\mathcal{S}$. Sean $i \in \mathcal{S}$ y

$$d(i) = \text{mcd}\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}(n) > 0\}.$$

Donde $\text{mcd}\{n_1, \dots, n\}$ es el máximo común divisor de los números enteros $n_1, \dots, n$. Si $d(i) = 1$, entonces se dice que i es un estado aperiódico. Si $d \geq 2$ entonces a i se le llama estado periódico con periodo igual a $d(i)$.

Definición 3.3.9. Un estado aperiódico y positivo recurrente se llama estado ergódico.

A continuación se enunciarán una serie de proposiciones y teoremas que no se demostrarán en esta tesis, sin embargo sus respectivas demostraciones se pueden encontrar en [Bal19].

Proposición 3.3.10 Supóngase que $i, j \in \mathcal{S}$ y que $i \leftrightarrow j$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- (a) i es transitorio $\Leftrightarrow j$ es transitorio.
- (b) i es recurrente $\Leftrightarrow j$ es recurrente.
- (c) i es cero recurrente $\Leftrightarrow j$ es cero recurrente.
- (d) i es positivo recurrente $\Leftrightarrow j$ es positivo recurrente.
- (e) $d(i) = d(j)$.
- (f) i es ergódico $\Leftrightarrow j$ es ergódico.

Definición 3.3.11. Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S}$.

- (a) Un conjunto $C \subset \mathcal{S}$ se dice que es cerrado si

$$\mathbf{P}\{\exists k \geq n : X_k \in \mathcal{S} - C | X_n \in C\} = 0$$

se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Un conjunto $C \in \mathcal{S}$ se llama irreducible si para cualesquiera $i, j \in C$ se cumple que $i \leftrightarrow j$.

Teorema 3.3.12. Supóngase que $\{X_n\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S}$ numerable. Entonces

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \cup \bigcup_{j=1}^N C_j$$

en donde la unión es disjunta, $\mathcal{T}$ es el conjunto de los estados transitorios de $\mathcal{S}$ y cada C_j es un conjunto de estados cerrado e irreducible.

De esta manera, la clasificación de estados de una cadena de Markov se define en el diagrama 3.1

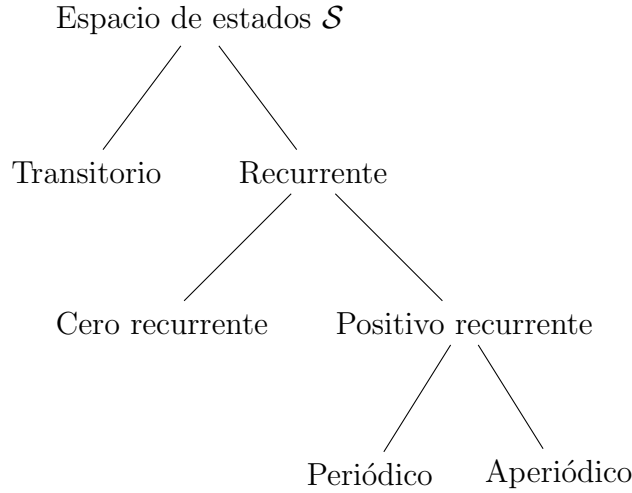


Figura 3.1: Clasificación de estados

Definición 3.3.13. Se dice que una distribución $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathcal{S}}$ es estacionaria si se cumple que

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

para toda $j \in \mathcal{S}$.

Proposición 3.3.14. Supóngase que $i, j \in \mathcal{S}$ y que $i \leftrightarrow j$. Entonces i es positivo recurrente si y sólo si j es positivo recurrente.

Antes de demostrar el teorema de comportamiento asintótico, se enunciará un último teorema.

Teorema 3.3.15. Toda cadena de Markov que sea irreducible y positivo recurrente tiene una única distribución estacionaria dada por

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}.$$

Donde $m_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}(n)$.

En particular, toda cadena finita e irreducible tiene una única distribución estacionaria.

3.4 Aplicación del Teorema de Erdős, Feller y Pollard a las cadenas de Markov

Por último esta sección está dedicada a demostrar uno de los teoremas del límite de cadenas de Markov.

Teorema del límite. *Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov irreducible, aperiódica y positivo recurrente. Se cumple que para cualesquiera $i, j \in \mathcal{S}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j$$

en donde $\pi_j = 1/m_j$.

Demostración. Primeramente obsérvese que

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= \mathbf{P}_i\{X_n = j\} \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ij}(k) \mathbf{P}_i\{X_n = j | X_k = j\} \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ij}(k) p_{jj}(n-k). \end{aligned}$$

Ahora, considérese el caso en que $j = i$, p_n y f_n se utilizarán en lugar de $p_{jj}(n)$ y $f_{jj}(n)$, de esta manera se obtienen los siguientes resultados

$$f_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n f_n = m < \infty; \quad (3.12)$$

$$p_0 = 1, \quad p_n = f_n + f_{n-1}p_1 + \dots + f_1p_{n-1}; \quad (3.13)$$

$$\text{mcd}\{n \in \mathbb{N} : f_n > 0\} \text{ es uno.} \quad (3.14)$$

La prueba estándar se puede encontrar en [EFP49], en la cual se hace un análisis de las propiedades de p_n en (3.13). Por otro lado en [Sto65] se hace una prueba diferente.

En esta tesis se considerará la hipótesis adicional

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n \log n) f_n < \infty \quad (3.15)$$

De esta manera, haciendo uso del Teorema Tauberiano de Erdős, Feller y Pollard se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \pi_j = \frac{1}{m_j}. \quad (3.16)$$

Por otro lado, considérese el caso en que $j \neq i$, sean

Aplicación del Teorema de Erdős, Feller y Pollard a las cadenas de Markov

$$T_j = \min\{n > 0 : X_n = j\}, \quad u_k = \mathbf{P}\{T_j = k | X_0 = i\}.$$

De este modo,

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^n u_k p_{jj}(n-k).$$

Dado que $i \leftrightarrow j$, se tiene que

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \mathbf{P}\{X_k = j \text{ para alguna } k \geq 1 | X_0 = i\}.$$

Sean $0 < \epsilon < 1$ y N tal que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k \leq \frac{\epsilon}{4} \quad \text{y} \quad |p_{jj}(n) - \pi_j| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Para cada $n \geq N$. Supóngase ahora que $n \geq 2N$, de esta manera

$$\begin{aligned} |p_{ij}(n) - \pi_j| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k p_{ij}(n-k) - \pi_j \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n-N} u_k (p_{ij}(n-k) - \pi_k) + \sum_{k=n-N+1}^n u_k p_{ij}(n-k) - \sum_{k=n-N+1}^{\infty} u_k \pi_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-N} u_k |p_{ij}(n-k) - \pi_k| + \sum_{k=n-N+1}^n u_k p_{ij}(n-k) + \sum_{k=n-N+1}^{\infty} u_k \pi_k. \end{aligned}$$

Dado que $n - N + 1 \geq N + 1$, se obtiene

$$|p_{ij}(n) - \pi_j| \leq \sum_{k=1}^{n-N} u_k \frac{\epsilon}{2} + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Lo cual termina la demostración. □

Capítulo 4

Conclusiones

4.1 Comparación entre las pruebas de los teoremas de Wiener-Ikehara y de Erdős Feller y Pollard

En este apartado enunciaremos las similitudes de las demostraciones entre los teoremas de Wiener e Ikehara (WI) y Erdős Feller y Pollard (EFP).

Primeramente obsérvese que en ambos teoremas el objetivo se basa en obtener el comportamiento asintótico de cada una de las funciones.

En ambas demostraciones se presentan dos herramientas cruciales al querer garantizar un resultado, una de las cuales nos permite expandir el dominio original de cada función, mientras que la otra es resultado de un importante lema que se ha demostrado en esta tesis.

Obsérvese la gran utilidad que es para ambas demostraciones el poder eliminar los polos, simplemente restando $\frac{1}{s-1}$ en el caso de Wiener e Ikehara y $\frac{1}{m(1-s)}$ en el caso de Erdős, Feller y Pollard. Por un lado, esto ayuda a que ambas funciones logren ser analíticas en dominios más grandes que sus dominios de definición originales, eliminar el polo que les afecta (en ambos casos $s = 1$). Esto es sumamente importante, pues da la oportunidad de que a las integrales de las funciones generatrices se les pueda aplicar el Lema de Rieman-Lebesgue y así llegar a nuestro resultado en el caso de Erdős, Feller y Pollard y demostrar la primera parte, en el caso de Wiener e Ikehara.

4.2 Comparación entre el Teorema Simple de Wiener e Ikehara y el Teorema de Wiener e Ikehara

En esta sección se hablará de las diferencias entre el teorema simple de Wiener e Ikehara y el teorema de Wiener e Ikehara.

En 1980 Newman encontraría una demostración más sencilla al teorema de los números primos, con análisis de variable compleja; es importante entender esto, pues este mismo teorema es crucial al demostrar (como se vio en el capítulo dos) la versión simple del teorema de Wiener e Ikehara.

La razón es la hipótesis que en ambos teoremas, tanto la versión simple del teorema

Comparación entre el Teorema Simple de Wiener e Ikehara y el Teorema de Wiener e Ikehara

de Wiener e Ikehara como en el teorema de Wiener e Ikehara se nos presentan dos funciones, a saber $f(x)$ y $A(x)$ que a simple vista podrían parecer similares. No obstante, en el teorema simple de Wiener e Ikehara se da una fuerte condición, la cual es $f(x) = O(x)$, cosa que no pasa con la función $A(x)$ en el teorema de Wiener e Ikehara. Gracias a la condición del teorema simple se puede hacer uso del teorema tauberiano de Newman.

Bibliografía

- [Apo76] **Apostol, Tom.** *Análisis matemático*. World Student Series Edition. Editorial Reverte, 1976.
- [Bal08] **Balanzario, Eugenio.** *Breviario de teoría analítica de los números*. Textos 24. Editorial Reverte, 2008.
- [Bal19] **Balanzario, Eugenio.** *Notas en cadenas de Markov*. Jul. de 2019.
- [Cha68] **Chandrasekharan, Komaravolu.** *Introduction to Analytic Number Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1968.
- [EFP49] **Erdős, P, Feller, W y Pollard, H.** *A property of power series with positive coefficients*. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), págs. 201-204.
- [Pin76] **Pinsky, Mark.** *A note on the Erdős-Feller-Pollar Theorem*. *The American Mathematical Monthly* 83.9 (1976), págs. 729-731.
- [Ram03] **Ramos, Jaime.** *El teorema de los números primos*. *Miscelánea matemática* 1.38 (2003), págs. 15-31.
- [Roy11] **Roy, Ranjan.** *Sources in the Development of Mathematics: Infinite Series and Products from the Fifteenth to the Twenty-First Century*. Cambridge University Press, 2011.
- [Sto65] **Stone, Charles.** *On Characteristic Function And Renewal Theory*. *Bull. Amer. Math. Soc.* 120 (1965), págs. 327-342.
- [Tit91] **Titchmarsh, E.C.** *The theory of functions*. Universitexts. Oxford Univ., 1991.