



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS PARA LA
CONSTRUCCIÓN E INTERPRETACIÓN DE
FUNCIONES MATEMÁTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

P R E S E N T A :

CARLOS DANIEL TORRES GARDUÑO

ASESOR

DR. JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA

MORELIA MICHOACÁN, DICIEMBRE 2021



«Dedicada a mi familia.»

Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer a mi asesor el Dr. José Carlos Cortés Zavala por el apoyo brindado para la realización de este trabajo, la atención y el acompañamiento a lo largo de todo este proceso.

Agradezco a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Agradezco infinitamente a mis padres Carlos y Maria Manuela por estar incondicionalmente en cada momento de mi vida, momentos buenos y malos, pero siempre apoyandome con una enorme sonrisa y sin pedir nada a cambio, por darme amor en cada etapa de vida y ayudarme a crecer como persona.

Le doy las gracias a mis hermanos (Jonathan, Rosa, Karla y Miguel) por compartir cada momento de la vida conmigo y en los momentos más difíciles brindarme su apoyo.

Agradezco a mis compañeros y amigos de la Facultad (Mauricio, Pamela, Apolo, Cecilia y Jonathan) por cada momento compartido.

Le doy las gracias a mis tíos, primos, sobrinos y cuñados, por su acompañamiento a lo largo de este proceso.

A todos mis amigos por regalarme experiencias, recuerdos y momentos importantes a lo largo de los últimos años.

Al Dr. Luis Valero Elizondo, a la Dra. Karina Mariela Figueroa Mora, al Dr. José Vega Cabrera y a la Dra. Patricia Manríquez Zavala por tomarse el tiempo requerido para revisar esta tesis y formar parte de la mesa de sinodales.

Y finalmente quiero agradecer a Dios por la vida.

Resumen

La presente tesis propone una metodología dentro del ámbito de la matemática educativa para fomentar en los niveles de educación media superior el uso de la modelación matemática así como la utilización de múltiples representaciones (como lo son representaciones numéricas y gráficas) esto con la finalidad de familiarizar al estudiante a asociar problemas de la vida real con la matemática de manera abstracta, con ello se pretende en este estudio proponer actividades donde el estudiante construya funciones matemáticas a través de la experimentación y observe el comportamiento de las mismas, además de introducir un enfoque sobre el aprendizaje del cálculo con conceptos básicos como lo son la función razón de cambio para construir posteriormente el concepto de derivada. Si bien es cierto que la problemática del aprendizaje del cálculo en el nivel medio superior es bastante amplia se tiene como objetivo promover la utilización de trabajos manipulativos para el entendimiento de funciones matemáticas, posteriormente haciendo uso de la modelación matemática y las múltiples representaciones se pretende familiarizar al estudiante con la forma abstracta de las funciones, es decir, con las ecuaciones que definen una función así como el significado de algunas operaciones dentro de la interpretación matemática de algún problema real.

Palabras clave: Modelación matemática, múltiples representaciones, funciones, razón de cambio, interpretación.

Abstract

This thesis proposes a methodology within the field of educational mathematics to promote the use of mathematical modeling at the levels of upper secondary education as well as the use of multiple representations (such as numerical and graphic representations) this in order acquaint the student to associate real life problems with mathematics in an abstract way, with this the aim of this study is to propose activities where the student builds mathematical functions through experimentation and observe their behavior, in addition to introducing a focus on learning calculus with basic concepts such as the rate of change function to later build the concept of derivative. Although it is true that the problem of learning calculus at the upper secondary level is quite broad, the objective is to promote the use of manipulative works for the understanding of mathematical functions, later making use of mathematical modeling and the multiple representations it is intended to familiarize the student with the abstract form of functions, that is, with the equations that define a function as well as the meaning of some operations within the mathematical interpretation of some real problem.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
1. Introducción	1
1.1. Objetivo General	2
1.1.1. Objetivos específicos	2
2. Marco Teórico	3
2.1. La enseñanza del cálculo	3
2.1.1. Problemas en la enseñanza del cálculo	3
2.1.2. Problemas con el concepto de función	4
2.1.3. Funciones Matemáticas	4
2.1.4. Función razón de cambio.	7
2.1.5. La derivada a nivel límite (derivada puntual).	8
2.2. Distintos tipos de representaciones.	9
2.2.1. Representaciones mentales internas.	9
2.2.2. Representaciones Semióticas	10
2.2.3. Representaciones en la enseñanza de las matemáticas.	11
2.3. Uso de tecnología.	12
2.3.1. Uso de herramientas en el desarrollo de actividades para la enseñanza de funciones.	14
2.4. Modelación matemática: una estrategia de enseñanza	17
2.4.1. Modelos matemáticos	18
2.5. Comentarios.	19
3. Exposición de las actividades.	20
3.1. Distancia entre objetos.	20
3.2. Variación de voltaje.	27
3.3. Variación de Amperaje.	32

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
4. Conclusiones y recomendaciones	37
4.1. Conclusiones	37
4.2. Recomendaciones	41
Bibliografía	42
Anexo A. Actividades Propuestas.	

Índice de figuras

2.1. Secantes que se aproximan a la tangente, dicha figura se extrajo de [Sealey and Flores, 2005]	8
2.2. Medidor láser de distancia.	14
2.3. Tacómetro digital.	15
2.4. Multímetro digital.	16
2.5. Módulo regulador de voltaje.	16
2.6. Motor y hélice.	17
2.7. Fuente de poder.	17
3.1. Esquema de división del perímetro Act. 1.	21
3.2. Tabla de Posición y distancia Act.1.	22
3.3. Tabla de diferencias Act. 1	24
3.4. Tabla de posición y razón de cambio Act.1.	25
3.5. Arreglo experimental para el desarrollo de la actividad 2.	27
3.6. Tabla de variación de voltaje (0.5) y RMP Act.2.	28
3.7. Tabla de variación de voltaje (1V) y RMP Act. 2.	29
3.8. Tabla de Diferencias 0.5V.	30
3.9. Tabla de Diferencias 1V	30
3.10. Función razón de cambio Act.2.	31
3.11. Tabla de valores de variación de amperes y RPM Act.3.	33
3.12. Tabla de diferencias Act.3.	34
3.13. Fórmula función razón de cambio Act.3.	34
3.14. Función razón de cambio.	35
A.1. Esquema de división del perímetro Act. 1.	1
A.2. Tabla de Posición y distancia Act.1.	2
A.3. Tabla de diferencias Act. 1	3
A.4. Tabla de posición y razón de cambio Act.1.	3
A.5. Tabla de variación de voltaje (0.5) y RMP Act.2.	5
A.6. Tabla de variación de voltaje (1V) y RMP Act. 2.	5
A.7. Tabla de Diferencias 0.5V.	6
A.8. Tabla de Diferencias 1V	6
A.9. Función razón de cambio Act.2.	6
A.10. Tabla de valores de variación de amperes y RPM Act.3.	7
A.11. Tabla de diferencias Act.3.	8

A.12.Fórmula función razón de cambio Act.3.	8
A.13.Función razón de cambio.	9

1 Introducción

Mucho se ha comentado a lo largo de la historia acerca del concepto de las funciones matemáticas, en primera instancia el estudio de las mismas es un tema complicado tanto para el profesor como para los estudiantes, en algunas ocasiones se presentan complicaciones al momento de concebir los conceptos que conllevan la exposición del tema. Por distintas razones algunas veces no se logra generar el conocimiento deseado en los estudiantes y esto claramente afecta al desarrollo posterior del conocimiento del cálculo, como sabemos es una materia que tiene una estrecha relación entre cada uno de los temas que se imparten.

Como nos menciona [Hitt, 2005a] el principal problema con el que se encuentran los estudiantes al momento de trabajar con el tema de funciones es abordarlas desde un enfoque únicamente algebraico

Dentro del desarrollo de esta tesis se plantean una serie de actividades con fines didácticos para la explicación, creación e interpretación de las funciones matemáticas. La investigación se basa en cuatro principales teorías, se propone abordar la temática desde el punto de vista del uso de la tecnología dentro de la enseñanza de las matemáticas, se sugiere la utilización de múltiples representaciones con la finalidad de desarrollar un pensamiento bien estructurado que culmine en la generación de un conocimiento de calidad para los estudiantes, el uso de los modelos matemáticos con la finalidad de matemátizar situaciones con problemas de la vida real.

La investigación está dirigida a la enseñanza del cálculo en el nivel medio superior que es donde los estudiantes tienen un primer acercamiento con este tipo de temas. Como parte de la investigación se realizaron experimentos (usando medidores láser, tacómetros, etc.) con la finalidad de obtener datos que permitan planear y proponer actividades que sirvan de apoyo para introducir el tema de funciones, el proyecto estaba planeado para trabajar con un grupo de estudiantes que resolvieran las actividades planteadas y a partir de esto obtener datos sobre cómo hacían uso de estas actividades para entender el concepto de función y el de derivada. Debido a la pandemia por Covid-19 no se pudo realizar este proceso, ya que no se podía trabajar de manera presencial con un grupo de estudiantes. Es importante mencionar que esta tesis es parte de un proyecto más general relacionado con el estudio del desarrollo del pensamiento covariacional en estudiantes de entre 14 y 20 años el cual es efectuado por mi asesor y dentro del mismo actualmente se está desarrollando otro trabajo en donde se están probando las actividades con un grupo.

La motivación principal que llevó a realizar esta investigación es promover un cambio en el modelo de enseñanza aprendizaje al menos de temas que se pueden abordar

desde otros enfoques, en este caso y con base en lo expuesto más adelante, proponer la enseñanza del tema de las funciones desde un enfoque más experimental, lo cual favorece el desarrollo (incluso creativo del estudiante). Desde mi punto de vista podemos motivar a un estudiante a que despierte su interés por la ciencia y a su vez siga un proceso que le permita llevar una situación general a una particular y viceversa.

1.1. Objetivo General

El objetivo general de la investigación consiste en diseñar y desarrollar una serie de actividades de apoyo al aprendizaje del tema de funciones y derivada en las cuales se realicen experimentos que permitan obtener datos que al manipularlos le permitan al estudiante entender los conceptos de función y derivada.

1.1.1. Objetivos específicos

- Diseñar y desarrollar una serie de actividades experimentales en donde estén involucrados los conceptos de función y derivada.
- Promover el uso de este tipo de actividades con la finalidad de ampliar el material de apoyo para la exposición de los temas.
- Mostrar la importancia del uso de la tecnología en las aulas con el fin de promover el trabajo con múltiples representaciones.
- Usar múltiples representaciones para explicitar los conceptos antes señalados.

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera, en el capítulo 2 se aborda la teoría en la cual se fundamentan las actividades que se proponen para la enseñanza de las funciones matemáticas, a grandes rasgos se aborda el contexto histórico del concepto de función, los problemas en torno a este desarrollo, la función razón de cambio como una primera aproximación del concepto de derivada, el uso de múltiples representaciones, el uso de la tecnología como herramienta para el desarrollo de conocimiento matemático y el uso de la modelación.

En el Capítulo 3 se desglosan las actividades propuestas y se explica qué es lo que esperamos que el estudiante pueda aprender con cada punto a tratar.

Finalmente en el Capítulo 4 se muestran las conclusiones obtenidas así como recomendaciones para posteriores proyectos de investigación con un enfoque parecido al descrito en el documento.

2 Marco Teórico

2.1. La enseñanza del cálculo

En general hablar sobre conceptos matemáticos es una tarea un tanto difícil, sin embargo, hoy en día contamos con suficientes herramientas para ejemplificar y explicar de manera más objetiva ciertos conceptos a los estudiantes, en esta sección se abordan los problemas de la enseñanza del cálculo, la función razón de cambio y la introducción al concepto de derivada.

2.1.1. Problemas en la enseñanza del cálculo

Dentro de la enseñanza del cálculo regularmente se presentan varias problemáticas al momento de comenzar a introducir conceptos que son fundamentales dentro de la materia, como sabemos el término de infinito es base para el desarrollo de muchos otros temas, sin embargo, en general el estudiante tiene una idea intuitiva del infinito asociado muy probablemente con aspectos de la vida real, todo esto sin reflexionar sobre aspectos propios de este en matemáticas.

Dentro del cálculo se reúne una gran cantidad de subtemas que se encuentran en estrecha relación por lo que nos conduce a un problema que el estudiante de nivel medio no cuenta con una base sólida y una profundización de los subconceptos, ya que esto limita y dificulta el desarrollo de los conceptos del cálculo tales como límite, continuidad, funciones, derivada e integral [Hitt, 2005b].

Cuando hablamos de problemas que están estrechamente relacionados con el aprendizaje del cálculo debemos tener en cuenta que a medida que avanza un curso en nivel medio y el estudiante no tiene una concepción clara y un entendimiento sólido de los conceptos del precálculo¹ al momento de comenzar a relacionarse con conceptos propios del cálculo solo se logrará que el estudiante avance en el curso con dudas que se agrandarán todo ello producto del mal entendimiento de conceptos del precálculo. Otra de las cuestiones que generan dudas en el estudiante es la didáctica con la que el profesor trata de expresar y transmitir los conocimientos un claro ejemplo que nos muestra [Hitt, 2005b] es al momento de introducir el concepto de función, ya que generalmente se restringen a una manipulación algebraica que desencadena una limitación en la comprensión del concepto.

¹El precálculo consiste fundamentalmente en un análisis del comportamiento de las funciones excluyendo los procesos infinitos. [Hitt, 2005b]

2.1.2. Problemas con el concepto de función

Como se sabe el concepto de funciones matemáticas es una parte fundamental en el desarrollo del estudio del cálculo, sin embargo, se ha detectado la problemática a la que los estudiantes del nivel medio tienen que hacer frente para la comprensión del término.

En primera instancia los alumnos tienen un acercamiento por primera vez a la forma abstracta de las matemáticas con el concepto de función matemática al introducir otros términos como dominio e imagen, cabe señalar que no es nada fácil comprender en su totalidad el término ya que muchos de los estudiantes no tenían idea de este concepto como tal.

Uno de los problemas que con mayor frecuencia se muestra tanto en alumnos como en profesores de nivel medio es que con regularidad conciben la función como una noción de función-continuidad como un solo concepto en matemáticas y esto es un error grave.

2.1.3. Funciones Matemáticas

Uno de los conceptos matemáticos de vital importancia para el cálculo es sin dudar el de función, en un contexto histórico la necesidad del hombre por comprender y describir su entorno lo ha llevado a buscar relaciones entre los distintos fenómenos que ocurren en su día a día, podemos decir entonces que no es nada extraño que la construcción del concepto de las funciones matemáticas vayan estrechamente relacionadas con la necesidad de entender el funcionamiento del entorno humano. [Ugalde, 2013]

Sin duda alguna nos debe quedar claro que el concepto de función está presente en cualquier rama de las matemáticas. A lo largo de la historia se ha construido un concepto general de las funciones, pero no fue sino hasta el año de 1837 que se consolida tal y como se entiende hoy en día todo esto gracias al matemático Gustav Dirichlet, sin embargo, existen autores que atribuyen la introducción del concepto de manera formal a Galileo Galilei.

A continuación se hablará de manera breve sobre las distintas épocas a través de las cuales se fue formando el concepto de función.

Nos remontaremos hasta la época de los babilonios y los egipcios, en dichas culturas se muestra un concepto rudimentario de funciones escribiendo en las tablas de arcilla y en los papiros respectivamente que se trataba de una dependencia entre cantidades, si bien es cierto que este concepto no es para nada formal nos da una buena base en el desarrollo de lo que hoy en día conocemos, en dichas culturas era común elaborar tablas de mediciones de los fenómenos observados en su entorno y es una representación de las funciones.

Posteriormente, hablaremos de la cultura griega entre los años 600a.C a 400d.C, en esta época se habla de que era un poco más clara la concepción de la dependencia entre cantidades un caso particular es con Arquímedes y sus leyes de la mecánica.

En el periodo 600a.C y el siglo XIV, la matemática árabe en un periodo de tiempo que comprende entre el siglo VII y XIII nos brinda las primeras evidencias de lo que

hoy conocemos con el nombre de razones trigonométricas, si bien es cierto que los textos árabes no se parecen para nada a los textos actuales, esta cultura para el siglo X ya contaba con tablas para las funciones trigonométricas, además de esto sentaron las bases del álgebra y la aritmética estas desarrolladas a través de la trigonometría hindú.

Por otro lado, en Europa entre el siglo V y XIV que corresponden a la edad media, se desarrollaban ideas sobre dependencia entre cantidades y no se tenía un desarrollo sobre el concepto de función, de hecho comienza a surgir el uso de representaciones simbólicas en matemáticas a través de la invención del álgebra.

Durante el renacimiento, se inicia el desarrollo del álgebra simbólica con Francisco Viète después Fermat y Descartes inventan la geometría analítica.

Newton y Leibniz en el siglo XVII utilizan expresiones algebraicas en la invención del cálculo donde hacen más explícita la existencia de variables (dependientes e independientes) pero ellos aún no hablan sobre el concepto de función. Es hasta 1699 cuando apareció el primer concepto de función en un artículo de Johann Bernoulli.

Se muestra una lista de los principales avances de la época:

- En 1570 Viète inicia el uso de símbolos para representar objetos matemáticos dando comienzo al desarrollo del álgebra de símbolos.
- Descartes en su “Discurso del método” expone su visión de los sistemas coordenados, si bien no considera los números negativos sienta las bases para lo que se conoce en su honor como “sistema cartesiano de coordenadas” .
- En 1629 Fermat usó ecuaciones para representar ciertas curvas, cabe resaltar que para la fecha ya se habían encontrado las ecuaciones de la recta, la circunferencia centrada en el origen, la elipse y la hipérbola.
- Galileo empleó el uso de fórmulas para relacionar ciertas cantidades, en particular relaciones generadas entre variables al momento de estudiar algún fenómeno.
- Un importante avance que sentó las bases para la formalización del concepto de función fue sin duda la teoría de Fluxiones de Newton pues las magnitudes están descritas como movimientos continuos de tal manera que la variable “dependiente” se va generando en forma continua a partir de la variable “independiente”.
- En 1699 cuándo apareció la primera definición de función en un artículo de Johann Bernoulli.
- En 1755 el matemático Euler en su obra titulada “Instituciones Calculi Diferentials” hace los siguientes señalamientos sobre el concepto de función:
 - “... Es una expresión algebraica que puede ser anotada por una sola fórmula analítica tal como un polinomio, un seno, un coseno, un logaritmo o aún una integral de cualquiera de estas expresiones.”

- Unos años más tarde en 1787 Lagrange con el propósito de dotar al cálculo de un fundamento algebraico expresó consideró al álgebra como la teoría de funciones y expresó lo siguiente:
 - Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran en cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariantes, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles.

Entre los años 1750 y 1801 el concepto de función definido por Euler generó la discusión de si la función debía o no expresarse mediante una fórmula, a lo largo de esa época se debatía la solución propuesta por Bernoulli y la planteada por D'alambert al problema de las cuerdas vibrantes hasta que en 1801, Jean Fourier demostró que la suma de una serie infinita de funciones trigonométricas puede expresarse en intervalos diferentes mediante fórmulas diferentes, de donde se concluyó que las soluciones de Bernoulli y D'alambert no eran distintas.

Para el siglo XIX, se da lo que será el concepto más aceptado, Cauchy, Lobachevshy, Dirichlet y Riemman se encargaron de dar un concepto finalmente satisfactorio de función.

Sin embargo, el primer matemático en dar una de las definiciones más acertadas fue Gustav Dirichlet en el año de 1837, la cual fue propuesta de las siguientes dos maneras:

- “Una cantidad variable y se llama función de la cantidad variable x si a cada valor de x le corresponde un solo y determinado y ”.
- “Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x ”.

Se puede observar, entonces con estas dos implicaciones que el concepto era mucho más claro y preciso.

En 1858 Riemman asentó la definición de función de la siguiente forma:

- “Se dirá que y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la manera de la relación que une a x y a y .”

Lo que precedió a este concepto fue una aportación de Dirichlet quién propone que las funciones pueden ser expresadas incluso con palabras, esto con la finalidad de desligar el concepto de función de los fenómenos físicos o fórmulas concretas.

Para el siglo XX sería la tarea de los matemáticos desarrollar dentro de la teoría de conjuntos la generalización del concepto de función, de una manera bien definida y abstracta.

2.1.4. Función razón de cambio.

Es bien sabido que existe una estrecha relación entre la función razón de cambio y la derivada que nos brinda una idea para construir un camino hacia una noción de derivada.

[Sealey and Flores, 2005] sugieren que para que un estudiante logre una comprensión avanzada del concepto de derivada, es necesario que logre entender el concepto en los tres niveles; como razón de cambio, límite y función. Así que comenzaremos hablando de la función razón de cambio que es de primordial interés en este estudio, ya que en este concepto se centran las actividades propuestas más adelante.

Primero necesitamos que los estudiantes estén familiarizados con los conceptos de razón y cambio promedio.

Razón

Entendemos como razón una comparación de dos magnitudes, también se le atribuye a un cociente de magnitudes, el estudiante tiene que comprender en un sentido amplio el concepto de razón, puesto que la función razón de cambio no será otra cosa, sino, un cociente de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Cambio Promedio

Hace referencia a repartir en partes iguales una cantidad que cambia respecto a otra. Para poder encontrarlo lo que se debe realizar es un cociente. Una manera de entender y explicar el resultado es haciendo ver que este nos expresa como es que cambia la cantidad del numerador por cada unidad de cambio del denominador como sigue: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ con x_1, x_2 y $f(x_1), f(x_2)$ cualesquiera puntos en el plano XY.

Forma algebraica de determinar la razón de cambio.

Como se describe en [Martínez González, 2020], sea f una función y sean x_1 y x_2 cualesquiera valores en el eje X calculamos la razón de cambio promedio.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ahora si deseamos calcular la razón de cambio en x_1 considerando que tenemos un eje coordenado XY, nuestro incremento en el eje X debe modificarse en función de x_1 , por lo que:

Si $\Delta x = x_2 - x_1$ entonces $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Entonces tendremos que si Δx es negativo x_2 está a la izquierda de x_1 y si Δx es positivo, x_2 está a la derecha de x_1 .

Por lo que la razón de cambio promedio será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

tenemos que enfatizar que Δx tiene que ser pequeño, casi cero.

2.1.5. La derivada a nivel límite (derivada puntual).

Comúnmente a este nivel utilizamos la notación simbólica siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

dicha expresión la conocemos como derivada puntual y la estudiamos como la pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto, este punto será fijo y lo denotaremos como x_0 .

Para este nivel el estudiante debe mostrar una buena comprensión del nivel razón de cambio, el cual está representado por la expresión $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ y posteriormente comprender el nivel límite $\lim_{h \rightarrow 0}$. Para tal comprensión se estudian las pendientes de rectas secantes que pasan por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ y el objetivo es variar la h llevándola al $\lim_{h \rightarrow 0}$ de tal manera que la línea secante se convierta en línea tangente, recordando que la derivada es la pendiente de la tangente, este proceso se muestra la Figura 2.1.

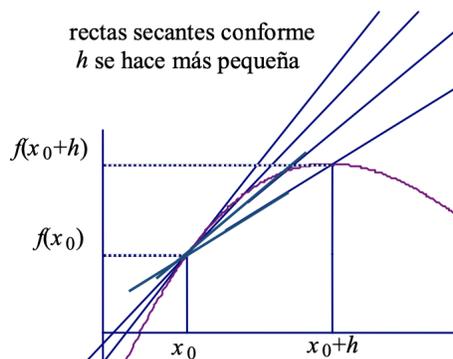


Figura 2.1: Secantes que se aproximan a la tangente, dicha figura se extrajo de [Sealey and Flores, 2005]

La derivada como función (función derivada.)

Posteriormente a la comprensión de los niveles razón de cambio $(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$ y límite ($\lim_{h \rightarrow 0}$) el estudiante deberá ser capaz de calcular la derivada puntual de una función en cualquier punto x_0 donde esto sea posible.

Podrán lograrlo de manera gráfica haciendo uso de la pendiente de la tangente y también lograrán hacerlo de manera simbólica usando el límite del cociente de diferencias, hasta este momento el estudiante debe ser capaz de entender que esta representación:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

permite calcular la derivada puntual de la función en cualquier punto, al menos donde f sea diferenciable.

Después se requiere que el estudiante sea capaz de comprender la derivada de manera global, es decir, donde x_0 que es un punto fijo cambia a x que es el punto en el que la variable toma el valor de x y entender que la expresión siguiente:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

está generando una nueva función a la cual llamaremos función derivada.

2.2. Distintos tipos de representaciones.

Para garantizar y facilitar al estudiante nuevas herramientas para el enriquecimiento en la obtención y generación de nuevos conocimientos, se sugiere que cuenten con el apoyo y noción de múltiples representaciones todo ello en cuanto a conocer y comprender conceptos matemáticos.

Con relación al proceso de la enseñanza de la matemática analizaremos y describiremos las representaciones mentales o proposicionales en la estrategia de la resolución de un problema matemático.

Hablando desde la perspectiva de las ciencias cognitivas se considera que una representación es cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que tienen un significado puede ser en el mundo exterior o en nuestro mundo interior.

En nuestro día a día en común convivir con múltiples representaciones pues podemos crearlas con cosas cotidianas, como lo son un olor, un sabor, una textura, etc. ya que podemos interpretarlos en nuestra mente.

Debemos señalar que el conjunto de signos o símbolos que representan algo para nosotros pueden ser externos como internos.

Hablemos de ejemplos simples, un diagrama, un mapa, un dibujo son representaciones externas que utilizamos con frecuencia para procesos comunicativos y estamos hablando de representaciones externas, otro ejemplo es el uso de símbolos y palabras que a menudo son utilizadas en campos como la física y la matemática. A este tipo de representaciones externas, también podemos denominarlas como representaciones semióticas.

2.2.1. Representaciones mentales internas.

Ahora hablando sobre las representaciones mentales internas, podemos decir que son todas aquellas que de cierta manera están “ocupando un lugar” en nuestra mente. Para ejemplificar, pueden ser conceptos, ideas, fantasías, modelos mentales, imágenes, etc. Según Johnson-Laird(1983), las representaciones mentales pueden ser analógicas, proposicionales y modelos mentales.

A continuación se exponen las ideas de cada una de estas representaciones.

Para empezar las representaciones mentales analógicas son asociadas a las imágenes mentales, dichas imágenes son idiosincrásicas y muy específicas (pueden ser visuales, auditivas, etc.).

En cambio las representaciones mentales proposicionales son del tipo-lenguaje, estas son abstractas y tienen que cumplir ciertas normas de combinación, estas se pueden expresar de manera verbal. De ellas también sabemos que pueden ser verdaderas o falsas respecto al mundo real.

Por último los modelos mentales son como tales análogos estructurales del mundo, este tipo de representación tiene como función principal mantener la estructura que caracteriza al objeto o fenómeno que está representando, en otras palabras su estructura tiene una correspondencia directa con la estructura que los origina, pueden ser manipulados mentalmente para hacer explicaciones casuales.

Podemos considerar las representaciones de modelos mentales como una de las más importantes puesto que el uso de las mismas nos permite manejar información de manera más compacta.

Observando los modelos mentales desde la perspectiva del proceso enseñanza-aprendizaje son altamente importantes en el proceso de entendimiento de conceptos, modelos y teorías científicas.

2.2.2. Representaciones Semióticas

Las representaciones semióticas hacen referencia a todos aquellos sistemas que tienen como función expresar y representar, ellos incluyen números, notaciones simbólicas, gráficas, esquemas, entre otros. Se considera que no es posible el estudio de un fenómeno en relación al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Gracias a la pluralidad de sistemas semióticos se tiene la posibilidad de diversificar las representaciones de un mismo objeto y con ello se amplían las capacidades cognitivas de los sujetos.

Como se menciona en [Sfard, 1991] si se realiza un análisis de distintas definiciones y representaciones matemáticas se llega a la conclusión de que las nociones abstractas como número o función, pueden concebirse de dos maneras fundamentales; estructuralmente como objetos y operacionalmente como procesos.

Sfard, nos expone que para pasar de la concepción operacional a la estructural se deben abarcar tres fases: interiorización, condensación y cosificación.

Tomando como base lo que se menciona en [Camargo and Hederich, 2010] sobre la definición de representaciones según Bruner² hablaremos de una de sus mayores aportaciones al tema.

Bruner, propone la existencia de tres sistemas básicos de representaciones presentes en la cognición humana:

- La representación enactiva, o de esquemas motores.

²Bruner definió la representación como “un conjunto de reglas mediante las cuales se puede conservar aquello experimentado en diferentes acontecimientos”

- La representación icónica, esta se da mediante imágenes de objetos o eventos.
- La representación simbólica, usando sistemas formales como el lenguaje.

2.2.3. Representaciones en la enseñanza de las matemáticas.

Para el año de 1996 David Tall se da a la tarea de adaptar las tres clasificaciones de los sistemas básicos de representaciones de Bruner, pero ahora al uso de las representaciones en el cálculo y lo hace de la siguiente manera:

- Representaciones enactivas.
 - Las describe como acciones humanas que dan sensación de cambio, velocidad o aceleración.
- Representaciones numéricas y simbólicas.
 - Se refiere a todas aquellas que pueden ser manipuladas manualmente o con computadora.
- Representaciones visuales.
 - Estas representaciones pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o con ordenadores dinámicos.
- Representaciones formales.
 - Dichas representaciones dependen de definiciones y pruebas.

Una vez establecida esta clasificación hablaremos acerca de tres tipos de representaciones: numéricas, gráficas y algebraicas, las cuales son utilizadas en el desarrollo de este estudio. Todas ellas pertenecen al grupo de representaciones semióticas y cada una de ellas contiene diferentes características por ejemplo la numérica puede ser manipulada manualmente o con computadora (la forma en que se utiliza en las actividades diseñadas es la toma de mediciones y la tabulación de las mismas).

Las representaciones gráficas tienen características visuales que se pueden reproducir de manera mental o bien de manera virtual usando un graficador y finalmente las algebraicas tienen características simbólicas y pertenecen a las representaciones formales y en muchas ocasiones son las más difíciles de comprender.

Lo primero que se expondrá es la clasificación de estas representaciones.

En el estudio de algún problema matemático en ocasiones no es posible tener los tres tipos de representación (numérico, gráfico y simbólico), sino que alguna de las tres se obtiene con mayor facilidad, sin embargo, éstas pueden construirse una a partir de la otra, pues en realidad son complementarias, así que se puede realizar una conversión entre ellas, a continuación se da un breve ejemplo de ello.

Proponemos una actividad a algunos estudiantes, donde este tenga que tomar mediciones de algún fenómeno y llenar una tabla con los datos recabados (se empleo

una representación numérica) posteriormente se le indica que en un plano cartesiano grafique dichos datos (ahora estará utilizando una conversión de una numérica a una visual.) y después haciendo uso de conceptos geométricos se le pide que de la gráfica obtenga la pendiente (llegamos a una representación algebraica).

2.3. Uso de tecnología.

Hoy en día el uso de la tecnología se ha convertido sin lugar a dudas en una parte fundamental del desarrollo educativo.

Actualmente un estudiante de nivel medio superior cuenta con al menos una herramienta tecnológica para apoyarse en el desarrollo de sus estudios.

Aunque se sugiere que no es del todo favorable el uso de tecnología en las aulas, debemos considerar el impacto positivo que puede tener en el desarrollo de nuevos conocimientos.

Lo que debemos dejar en claro es que el uso adecuado de una herramienta tecnológica (calculadoras, computadoras, celulares) proveerá al estudiante una herramienta que fortalezca el conocimiento que se está mostrando en clase.

Como se menciona en [Gómez, 2004] “El diseño y puesta en práctica de actividades que utilicen la tecnología debe ser un procedimiento sistemático que tenga en cuenta la complejidad de los aspectos conceptuales, procedimentales y cognitivos del tema que se pretende tratar; que se base en las potencialidades de la tecnología dentro del contexto de los problemas que se pretenden abordar; y que utilice coherentemente la información que surge de estos análisis.”

Debemos señalar que las computadoras y calculadoras en gran parte nos sirven, para enseñar, aprender y hacer matemáticas, sin embargo, cabe señalar que la tecnología por sí sola no es más que un recurso o herramienta dentro del aprendizaje de las matemáticas.

La finalidad en sí de la integración de la tecnología en el aprendizaje es buscar la manera de diseñar y desarrollar actividades que muestren a los estudiantes una manera distinta de vivir experiencias matemáticas nuevas.

El uso de herramientas tecnológicas le proporcionan a los estudiantes condiciones óptimas para identificar, examinar y comunicar distintas ideas matemáticas. Cuando los estudiantes pretenden resolver algún problema matemático de la manera tradicional generalmente buscan mediante procesos algebraicos llegar a la solución.

Y cuando se le presenta a un estudiante un problema en donde tenga que enfrentarse a un distinto tipo de representación, ya sean tablas o gráficas, el estudiante buscará la manera de encontrar una solución algebraica y puede que en el proceso de solución se complique mucho o bien fracase en encontrar la solución a dicho problema.

Además del uso de calculadoras y computadoras el empleo de algunas herramientas digitales promueve en el estudiante el interés por el estudio de situaciones y fenómenos que se pueden cuantificar.

En el desarrollo de este estudio se presentará el funcionamiento de dichos aparatos. Una de las claves de la introducción del uso de herramientas tecnológicas consiste en estudiar situaciones cotidianas pero con este nuevo enfoque.

Dentro de estas herramientas (calculadoras, computadoras) podemos encontrar distintos tipos de software utilizados para tareas distintas dentro del enfoque de la enseñanza de las matemáticas, por mencionar algunos: Mathematica, Maple y Derive proporcionan ayuda a los estudiantes en cálculos de expresiones aritméticas, algebraicas, logarítmicas, trigonométricas y soluciones a sistemas de ecuaciones; Mathcad, es un programa creado para el estudio e interpretación, gráfica y numérica de funciones. Excel que es un programa que fácilmente pueden manipular los estudiantes de nivel medio superior es un software que puede ser de gran utilidad en el desarrollo de temas de estadística y funciones.

El diseño de sistemas computacionales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un proceso complejo, pues por un lado nos encontramos con las restricciones técnicas, estas determinan qué se puede y qué no se puede hacer en el sistema, por otro lado tenemos que comprender que el diseño de todo sistema requiere de una conceptualización del conocimiento matemático a enseñar desde el punto de vista de modo que dicho conocimiento se define, se representa y es implantado dentro del sistema y por último nos encontramos con las restricciones didácticas, estas nos determinan qué es lo que buscamos desde el punto de vista de la comprensión del estudiante y la manera en que dichos propósitos se deben lograr.

La manera en la que el sistema está determinado por el tipo de fenómenos que le presenta al estudiante (objetos, relaciones, problemas) y el modo en que estos fenómenos son expuestos.

Estas características determinan el campo de experimentación que se ofrece y el tipo de respuesta de nuestro sistema a las actividades del estudiante.

Finalmente el resultado de esto será la experiencia matemática que el estudiante experimenta cuando interactúa con el sistema.

Como nos señala [Gamboa, 2007] un objetivo fundamental dentro del salón de clases debe ser fomentar en el estudiante un pensamiento analítico, crítico y que aprenda a extraer conclusiones a partir de la información que se le suministre.

Hacer uso de recursos tales como tablas y gráficas le va a permitir al estudiante observar el comportamiento de un fenómeno en particular y lograr la comprensión de este.

Tanto el profesor como el alumno deben tener en claro que durante todo este proceso la tecnología refuerza el trabajo en lápiz y papel y les ofrece una nueva forma de explorar ideas matemáticas.

La manera en la que los estudiantes interactúen con la tecnología, debe aportar información valiosa a la hora de plantear una actividad, cómo se deben dirigir y los alcances a los que se pueden llegar con dicha actividad.

Durante este estudio se trabajo con herramientas de medición para el planteamiento de actividades.

2.3.1. Uso de herramientas en el desarrollo de actividades para la enseñanza de funciones.

Como ya se mencionó en la sección anterior debemos entender como es que un estudiante interactúa con la tecnología para poder proponer alguna actividad que funcione para obtener resultados positivos durante el desarrollo de esta por cuenta del estudiante.

En este caso el planteamiento de actividades se propuso después de realizar una serie de experimentaciones que son fenómenos no muy complejos de entender para los estudiantes, dentro de las experimentaciones se hizo uso de herramientas tales como un medidor láser de distancia, tacómetro digital, multímetro, módulo regulador ajustable de voltaje, un motor, hélices y una fuente de poder. A continuación se mostrará cada una de las herramientas y su funcionamiento.

Medidor láser de distancia

Comenzaremos hablando del medidor láser de distancia (Figura 2.2) es un aparato profesional con un alcance de 60 metros, que tiene un nivel de burbuja para obtener la horizontalidad o verticalidad del aparato, cuenta con una memoria que almacena datos de mediciones tomadas, es utilizado en general para medir el espacio entre un objeto y otro.

Para su uso únicamente es necesario encenderlo y apuntar el láser de un objeto a otro para saber cuál es la longitud entre ambos objetos, se sugiere que se coloque de manera horizontal para que apunte al objeto de manera perpendicular y así obtener la medida más corta entre ambos objetos.



Figura 2.2: Medidor láser de distancia.

Tacómetro digital

Un tacómetro digital (Figura 2.3) es una herramienta que se utiliza para medir la velocidad de rotación de un eje marcando la cantidad de revoluciones por minuto (RPM), en el caso de los tacómetros digitales que funcionan con un láser no es necesario que este tenga contacto directo con el eje de un motor ya que trabaja mediante

una luz infrarroja que se apunta hacia este eje. Este tipo de herramienta mide el ritmo mediante el cual se refleja la luz de vuelta en el tacómetro.

Los tacómetros digitales están constituidos por una pantalla LED y una memoria para almacenar las mediciones.

Para su funcionamiento únicamente encendemos la herramienta y apuntamos el láser hacia el eje del motor para que este refleje el infrarrojo de vuelta al tacómetro y nos muestre en la pantalla el número de revoluciones por minuto del motor.



Figura 2.3: Tacómetro digital.

Multímetro

Un multímetro digital (Figura 2.4) es una herramienta que se utiliza principalmente para tomar mediciones de tensión (voltios), corriente (amperaje) y resistencia (ohms). Los multímetros digitales reemplazaron a los analógicos por su precisión en las mediciones.

Podemos decir que el multímetro es la combinación de tres herramientas distintas: El voltímetro, el amperímetro y el ohmímetro.

El multímetro consta de una pantalla donde se muestra el valor medido, un selector que generalmente es una perilla que gira para seleccionar la opción que se desea medir (voltios, amperes u ohms), los conectores de entrada que es donde se conectan los cables de prueba (dichos cables son cables aislados generalmente uno negro y uno rojo).



Figura 2.4: Multímetro digital.

Módulo regulador de voltaje

Un regulador de voltaje (Figura 2.5) es un convertidor de potencia que suministra el voltaje deseado en nuestro caso al motor (12V), el regulador de voltaje que se usó en este estudio varía entre 0 y 12 voltios. Para su funcionamiento es necesario conectarlo a una fuente de poder en la entrada del regulador y posteriormente conectar el motor a la salida del regulador para después girar una perilla y comenzar a variar el voltaje.



Figura 2.5: Módulo regulador de voltaje.

Motor y hélice

Para la planificación de las actividades se usó un motor que tiene una capacidad máxima de 12V y que comienza a funcionar al rededor de 0.4V, el modo en que se emplea el motor es conectado a la salida del regulador de voltaje y comenzando a girar la perilla del regulador para aumentar la cantidad de voltaje a la salida de la misma, conectado al motor tenemos la hélice (Figura 2.6) que girará conforme el voltaje au-

mente. En una de las hojas de la hélice se colocó un pequeño pedazo de aluminio que nos servirá para que el infrarrojo del tacómetro se refleje.



Figura 2.6: Motor y hélice.

Fuente de poder

Se trata de una herramienta muy importante para el desarrollo de la experimentación pues es lo que provee energía al sistema para llevar a cabo las variaciones de voltaje. En este caso se hace uso de tres baterías (Figura 2.7) de 4.2V cada una para tener una salida en total de 12.6V y, funcione adecuadamente nuestro regulador de voltaje.

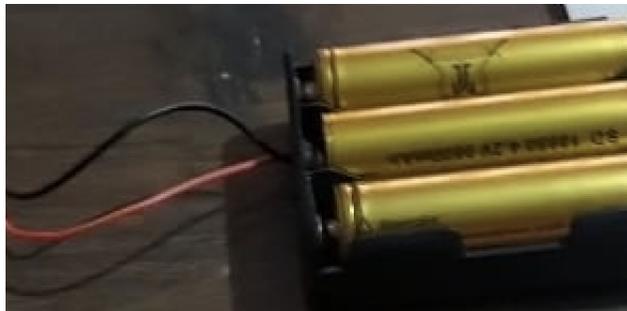


Figura 2.7: Fuente de poder.

2.4. Modelación matemática: una estrategia de enseñanza

Hoy en día es una realidad que la modelación matemática esta siendo fuertemente defendida en distintos países, ya que no solo permite al estudiante que comprenda las matemáticas aplicadas a otras áreas del conocimiento sino que fomenta en él la capacidad de leer, interpretar, formular y resolver situaciones problema. Una manera de contextualizar el conocimiento en los estudiantes es precisamente la presentación de

situaciones problema reales que sean factibles de representarse mediante un modelo matemático.

Desde una perspectiva realista, el interés se enfoca en la resolución de problemas reales que tengan sentido práctico para los estudiantes.

Existe una perspectiva dentro del modelado que se puede categorizar como una modelación educativa y esta tiene un objetivo claramente pedagógico. Dentro de este enfoque se pueden distinguir dos corrientes, una corriente didáctica en la que los modelos se utilizan para estructurar y promover el proceso de aprendizaje de los estudiantes y otra corriente que se puede considerar conceptual, donde el papel de la modelación es la base para introducir nuevos conceptos y desarrollarlos.

Podemos ver el proceso de modelado como un contexto de aprendizaje donde se incita al estudiante a cuestionar e investigar situaciones reales a través de las matemáticas, con la finalidad de brindarle la oportunidad de discutir el papel de las matemáticas en la sociedad y por otra parte la naturaleza del modelo matemático. Sin embargo, uno de los inconvenientes que ha surgido al momento de introducir la modelación matemática al aula de estudio es que el tiempo de convivencia entre estudiantes y profesores con la forma tradicional de la enseñanza de las matemáticas no es fácil de reemplazarse.

La investigación acerca de la solución de problemas muestra claramente las enormes dificultades que presenta un estudiante al momento de “traducir” al lenguaje matemático un problema verbal y debemos recalcar que en el caso de la modelación real la situación es aún más compleja. Pues en estos casos los estudiantes deben ser capaces de reconocer las variables que pueden ser importantes para realizar el modelo, proponer una hipótesis que permita simplificar de manera adecuada la situación y representarla a través de una función matemática.

Como podemos observar en [Trigueros Gaisman, 2009] hace aproximadamente 30 años en Holanda surgió un movimiento de reforma que se consolidó en una postura teórica que hoy se conoce como enseñanza realista de las matemáticas. Esta considera la matemática como una actividad humana y, como tal, se desarrolla a partir de modelos originados de situaciones ya sean reales, de fantasía o formales. La importancia de esta perspectiva es que los contextos pueden ser reales para los estudiantes. Así pues los modelos matemáticos funcionan entonces como un puente que conduce hacia una mayor comprensión de las matemáticas con el objetivo de que el conocimiento evolucione y progrese.

2.4.1. Modelos matemáticos

Podemos describir la modelación matemática como un proceso que involucra la obtención de un modelo matemático. Ahora bien un modelo matemático de un fenómeno o situación es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno que se estudia. Un modelo no solo nos presenta una solución particular, sino que nos permite buscar la manera en que pueda ser el soporte de otras aplicaciones o teorías.

Nos basaremos en [Salett Biembengut, 2004a] para describir el proceso, como nos sugiere la primera parte para llegar a una modelación matemática exitosa debemos

analizar y reconocer la situación o problema para después delimitar nuestro problema; debemos estar plenamente familiarizados con el tema que pretendemos sea modelado, sustentar el estudio con un referencial teórico; ahora debemos formular como tal nuestro problema a estudiar, proponer una hipótesis; a este punto debemos comenzar la formulación de un modelo matemático, desarrollarlo; buscar la resolución del problema a partir de la propuesta; averiguar la aplicación; posteriormente la interpretación de la solución y la validación del modelo; y finalmente la evaluación.

Dentro de la propuesta de la modelación matemática como herramienta de enseñanza se requiere que el modelador posea además de conocimientos matemáticos una buena dosis de intuición y creatividad para poder interpretar el contexto y discernir de las variables involucradas.

2.5. Comentarios.

El propósito final del desarrollo del marco teórico es justificar la serie de actividades planteadas para el proceso de enseñanza aprendizaje del tema de funciones y de la primera aproximación de la definición de derivada desde la función razón de cambio. Se habla de las funciones porque pretendemos que los ejercicios sean justificados desde este punto de vista, además de todos los procesos utilizados para planificar las tareas damos razón del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas pues se requiere un programa para llevar a cabo partes dentro del ejercicio que se trabaja, las actividades tienen como objetivo que el estudiante entienda temas desde el enfoque de diferentes representaciones matemáticas así como de modelos matemáticos que debe construir en distintas fases durante el desarrollo de estas.

3 Exposición de las actividades.

En este capítulo nos daremos a la tarea de exponer las actividades planeadas para el proceso de aprendizaje del tema de funciones y el primer acercamiento del concepto de derivada mediante la función razón de cambio se hablará de los puntos importantes de cada una de las tareas propuestas y se justificará el por qué de cada parte que se propone, además hablaremos del contexto físico mediante el cual se propone cada una (es decir, qué experimento motivo cada ejercicio y como se realizó). Se hablará de manera breve sobre el experimento para después exponerlas punto por punto.

3.1. Distancia entre objetos.

Para la propuesta de esta actividad se realizó un experimento con un medidor láser de distancia, el experimento consistió en dividir el perímetro de una habitación de $3m \times 4m$ en segmentos de $1m$ y posteriormente en segmentos de $0.5m$, se colocó un teléfono en distintas partes de la habitación y se avanzó a través de cada uno de los segmentos del perímetro en cada punto se tomó la distancia (perpendicular) al teléfono y se tabularon los datos medidos, posteriormente al desarrollo del experimento se planeó una actividad a escala para realizarse en un ambiente de papel y lápiz. La actividad lleva por nombre:

Introducción a la construcción de funciones matemáticas.

Una función matemática es la relación que hay entre una magnitud y otra, cuando el valor de la primera depende de la segunda. Variable dependiente: Es la que depende del valor de la otra magnitud. Variable independiente: Es la que define la variable dependiente.

- *En primera instancia nos interesa introducir una idea sencilla de la definición de la función para que el estudiante vaya familiarizándose con la idea de funciones, además de mostrarle que una función tiene dos tipos de variables en este caso.*

Ejercicio 1

Ahora bien, nos interesa explicar de dónde salen estas relaciones entre variables, para ello se le pide analizar la siguiente situación:

Una persona se encuentra en la entrada de una habitación rectangular de 4m x 3m cuando comienza a sonar su teléfono que se encuentra casi en la esquina contraria de la habitación, por lo que se pregunta: “¿A qué distancia estará mi teléfono?” “¿Cuál será la distancia más corta entre mi teléfono y yo respecto a mi posición en la habitación?” “¿Cuál será la mayor distancia entre el teléfono y yo, si me desplazo a lo largo del perímetro de la habitación?”.

- *Siguiendo las recomendaciones propuestas en [Salett Biembengut, 2004b] se hace el planteamiento del problema, en esta instancia se pretende despertar el interés del estudiante por asociar problemas de la vida real y tratar de matematizarlos para poder resolver situaciones reales con modelos matemáticos, pretendemos que el estudiante comience a pensar de manera crítica y creativa en problemas que le gustaría modelar en lenguaje matemático.*

Si pensó en posibles respuestas ahora realice las siguientes actividades:

1. En su cuaderno trace un rectángulo de 4cm x 3cm para simular la habitación.
2. Divida el perímetro del rectángulo en segmentos de un centímetro como se muestra en la Figura 3.1.

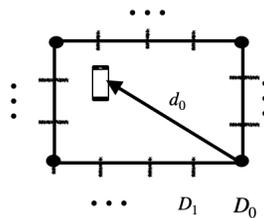


Figura 3.1: Esquema de división del perímetro Act. 1.

3. Tenemos un total de 14 posibles posiciones a lo largo del perímetro del rectángulo nombre a cada punto D_0, D_1 , etc. hasta D_{13}
4. Con ayuda de una regla mida la distancia diagonal entre la posición D_0 y el teléfono, y repita esto con las otras 13 posiciones, es decir, la distancia entre D_1 y el teléfono, y así sucesivamente hasta llegar a la distancia entre la posición D_{13} y el teléfono.

- Durante esta fase de la actividad lo que pretendemos es que el alumno figure una serie de representaciones acerca de la situación, con esto nos referimos a que aparte de realizar lo que se le pide que haga en papel, estará utilizando una representación mental que ayudará a desarrollar su capacidad de imaginar y de realizar ejemplos análogos de situaciones de la vida real.

Nos interesa que empiece a trabajar también con símbolos (que recordemos que es un tipo de representación en matemáticas) introducimos datos tales como d_0 para que posteriormente él los identifique como un dato numérico, de manera no muy complicada esperamos que los estudiantes comiencen a hacer uso de herramientas matemáticas que pronto pueden producir un conocimiento bien estructurado y de buena calidad.

1. Genere una tabla de valores como se muestra a continuación:

POSICIÓN	DISTANCIA AL TELÉFONO
0	d_0
1	d_1
2	d_2
3	d_3
...	...

Figura 3.2: Tabla de Posición y distancia Act.1.

2. Finalmente, grafique Posición Vs. Distancia.

- Llegamos a un punto crucial dentro de la actividad, para este momento el estudiante estará trabajando de lleno con múltiples representaciones matemáticas, en el caso del punto número 3.1, debe desarrollar una tabla de valores, dependiendo de la posición donde se encuentre debe colocar cuál es la distancia al objeto, posteriormente se sugiere que se introduzca dicha tabla de valores a un sistema tecnológico (para el nivel medio superior funcionaria bien usar el programa Excel por su fácil manejo) por primera vez en el desarrollo de la actividad se introduce el uso de la tecnología para favorecer la representación en forma de tabla, en el punto número dos el alumno deberá graficar los valores de la tabla

generada en el punto número 1, para ello también se puede utilizar un programa para facilitar y obtener una gráfica más precisa que si se realizara directamente en papel.

Hasta el momento se espera que el estudiante vaya preparándose para manejar de manera eficiente el uso de múltiples representaciones, hasta aquí se pretende que el alumno comience a identificar las transformaciones entre las distintas representaciones, en este caso, pasa de una representación numérica (la tabla) a una representación visual (la gráfica).

Ahora según sus resultados, puede responder:

1. ¿Cuál es la variable independiente?
2. ¿Cuál es la variable dependiente?
3. Según su gráfica, ¿Cuál es la distancia menor? ¿En qué posición?
4. ¿Cuál es la mayor distancia entre la persona y el teléfono?

-
- Finalmente al término de este primer ejercicio se le hacen una serie de preguntas al estudiante, ¿para qué ese tipo de preguntas?, bien la respuesta es sencilla, queremos hacer que el estudiante desarrolle la capacidad de manipular las representaciones a las que llegó con su experimentación en este caso es la primera actividad desarrollada, no se tiene un conocimiento previo de una situación así pretendemos que el estudiante genere confianza en sus capacidades de resolución de un problema y que pueda notar la información que le proporcionan en este caso la tabla y la gráfica, por ejemplo, a simple vista el estudiante podrá notar cuál es la distancia menor entre los objetos analizando la gráfica, queremos que note que esta información en sí la puede corroborar con los datos obtenidos en la tabla, entonces hasta esta situación el alumno debe ser capaz de entender la conexión directa entre ambas representaciones, además de esto el alumno debe ser capaz de notar la dependencia de una de las variables en este caso debe llegar a la conclusión de que la distancia (d) depende de la posición del sujeto.

Introducción a la función razón de cambio

La razón de cambio es la proporción en la que una variable cambia con respecto a otra, de manera más explícita hablamos de la pendiente de una curva en una gráfica, es decir el cambio en el eje “y” entre el cambio del eje “x”.

- *El tema de funciones es complicado para muchos estudiantes de nivel medio superior e incluso de nivel superior, una manera de abordar este tema es con cosas que sean más familiares para los estudiantes, en este caso damos una breve idea de la función razón de cambio como una división de cantidades, así el estudiante se sentirá más cómodo a la hora de comenzar con las actividades.*

Ejercicio 2

Haciendo uso de la gráfica y de la tabla del Ejercicio 1 propuesto anteriormente encontraremos la función razón de cambio.

¿Cómo se construye esta función?

Como su nombre lo dice es una razón (división) entre los cambios que van a tener nuestras variables, en nuestro caso la posición y la distancia al teléfono.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haciendo uso de los datos de la tabla POSICIÓN | DISTANCIA AL TELÉFONO del Ejercicio 1 llenaremos la siguiente tabla: .

DIFERENCIA DE LA POSICIÓN (X)	POSICIÓN (P)	DISTANCIA AL TELÉFONO (d)	DIFERENCIA DE LAS DISTANCIAS AL TEL. (Y)
$X_1 = P_2 - P_1$	P_1	d_1	$Y_1 = d_2 - d_1$
$X_2 = P_3 - P_2$	P_2	d_2	$Y_2 = d_3 - d_2$
$X_3 = P_4 - P_3$	P_3	d_3	$Y_3 = d_4 - d_3$
$X_4 = P_5 - P_4$	P_4	d_4	$Y_4 = d_5 - d_4$
...	P_5	d_5	...
	

Figura 3.3: Tabla de diferencias Act. 1

2. Recordemos que tenemos un total de 14 posibles posiciones a lo largo del perímetro del rectángulo, así que tendremos un total de 13 posiciones en las columnas de las diferencias a las que denominaremos, en el caso de la diferencia de la posición, será X_n y en el caso de la distancia al teléfono será llamada Y_n donde $n = 1, 2, \dots$

3. Cuando tengamos la tabla llena con los datos nos centraremos en las columnas DIFERENCIA DE LA POSICIÓN (X) Y DIFERENCIA DE LAS DISTANCIAS AL TELÉFONO (Y).

- *En este punto del ejercicio 2 se pretende que el estudiante con base en lo realizado en el ejercicio 1 desarrolle de nuevo una representación numérica en forma de tabla para llegar posteriormente al punto de interés de esta actividad, haciendo uso de la tabla de valores del Ejercicio 1 el estudiante debe llenar la tabla de valores de la Figura 3.3 que no es otra cosa que obtener la diferencia entre dos mediciones, esto debe realizarlo con la finalidad de saber como es que incrementa un valor respecto a otro.*

Nuevamente introducimos variables con nombres diferentes, en el caso de la diferencia de posición X_n y en la diferencia de distancia al teléfono Y_n todo con el objetivo de que el estudiante pierda ese “miedo” de manejar cualquier tipo de representación simbólica. Nos interesa en esta parte de la actividad que el estudiante centre totalmente su atención en las columnas de las diferencias, ¿por qué?, en realidad porque a partir de ellas, él podrá encontrar la razón de cambio y se le podrá empezar a hablar sobre el comportamiento de esta función.

1. Ahora vamos a construir una tabla nueva que será de posiciones y la razón de las diferencias que acabamos de obtener. Para ello haga uso del siguiente ejemplo:

POSICIÓN (Z)	RAZÓN CAMBIO (R)
0	$R_1 = Y_1 \div X_1$
1	$R_2 = Y_2 \div X_2$
2	$R_3 = Y_3 \div X_3$
3	$R_4 = Y_4 \div X_4$
4	$R_5 = Y_5 \div X_5$
5	$R_6 = Y_6 \div X_6$
...	...

Figura 3.4: Tabla de posición y razón de cambio Act.1.

2. Note que ahora llamaremos a la posición “Z” y a la Razón de diferencias “R”.
3. Grafique Posición (Z) vs. Razón (R).

- *Centremos la atención en la Figura 3.4 ya que en esta figura está la esencia de esta actividad, ya que aquí es donde mediante la razón de los incrementos vamos a comenzar a explicarle a los estudiantes acerca de la razón de cambio que como se menciona en [Martínez González, 2020] nos permite posteriormente hacer una analogía con el concepto de derivada, se pretende que el estudiante con el apoyo del profesor comprenda el porqué la razón de cambio y la derivada son tan parecidas.*

Otro punto interesante de la actividad es que el estudiante observe la gráfica de la posición vs la razón para que visualmente esté convencido también de que en realidad es una función.

Finalmente, hemos encontrado la función razón de cambio, responda:

1. ¿Cómo es la diferencia de la posición en este caso?
2. ¿Cómo describiría la diferencia entre las distancias al teléfono?
3. ¿Qué información nos da la razón Y_n/X_n ?
4. ¿Qué información podemos obtener de nuestra gráfica?

- *En esta instancia comenzamos a hacer preguntas al estudiante, puesto que es importante que empiece a desarrollar el pensamiento científico, nos interesa que llegue a comprender que es lo que ha estado trabajando, qué significa cada una de las operaciones que está realizando, el porque de las distintas representaciones, como es que tienen que verse las funciones matemáticas y que información te pueden dar los datos que tienes.*

Hacemos énfasis en la pregunta 3 puesto que este punto es ideal que se le de una explicación amplia acerca de lo que representa esta razón recordemos que es su primer acercamiento con este tipo de operaciones.

El objetivo que buscamos con esta actividad es que el estudiante a través del uso del medidor de distancia obtenga datos numéricos para que con ellos construya una tabla que posteriormente transforme en una representación gráfica. Al final de esta experiencia se espera que el estudiante sea un poco más eficiente a la hora de realizar tablas y gráficas y poder analizar estas en busca de información relevante, además se busca que comience a entender cómo es que funciona la razón de cambio en este tipo de ejercicios para que más adelante logre comprender el concepto de derivada desde esta representación.

3.2. Variación de voltaje.

Para la siguiente actividad se realizó un experimento con un motor de 12V, se conectó en paralelo a un regulador de voltaje que a su vez estaba conectado a una alimentación de 12.6V y se comenzó a variar el voltaje, esto con la finalidad de medir las revoluciones por minuto con el tacómetro digital, un ejemplo análogo es medir la cantidad de revoluciones por minuto que se generan en un motor de un automóvil. Como se muestra en la Figura 3.5 al girar la hélice tomaremos las medidas con el tacómetro, posteriormente a la experimentación se propone la siguiente actividad. En esta ocasión se plantea una actividad que se apega a lo que teóricamente se esperaría pues las RPM son constantes, con la finalidad de que el estudiante observe una función que sea fácil de analizar con los conocimientos previos que posee el estudiante.



Figura 3.5: Arreglo experimental para el desarrollo de la actividad 2.

Creando funciones.

Después del desarrollo de la actividad pasada ya ha manipulado al menos dos tipos de representaciones, construyó dos funciones y analizó datos, lea con atención la siguiente situación y realice lo que se le pide:

Ejercicio 1

Se tiene un motor(12V) que se encuentra conectado a una fuente de poder y a un regulador de voltaje(0-12V), dicho regulador solo se puede aumentar de 0.5V en 0.5V y de 1V en 1V. Nos interesa saber la cantidad de vueltas que el motor da dependiendo de la variación del voltaje, además como es la razón de cambio de las RPM dependiendo del voltaje, sabemos que la cantidad de vueltas es constante y que en 0.5V nos da un total de 150RPM (RPM: Revoluciones por minuto.)

- *Para el desarrollo eficaz de esta actividad se propone al estudiante una manera distinta de trabajar la situación, nos referimos a lo que se espera teóricamente al hecho de que no tendremos un margen de error como en la actividad pasada,*

ya que las revoluciones por minuto son constantes, entonces sabemos que esto producirá una función lineal, a menos que se tenga el tiempo y espacio para poder trabajar con el estudiante la actividad pero, experimentalmente; manejar las revoluciones constantes sin errores en la medición es una buena estrategia para mostrar este tipo de función.

Con los datos que se proporcionan en el ejercicio responda:

1. ¿Cuántas mediciones se pueden obtener si varía el voltaje de 0.5V en 0.5V?
2. ¿Cuántas mediciones si lo hace de 1V en 1V?
3. ¿Cuántas vueltas da el motor si se le proporciona una alimentación de 5V?

-
- *En esta ocasión se inicia la actividad con una serie de preguntas que se espera el alumno responda de manera correcta puesto que solo debe analizar los datos proporcionados en la explicación de la situación planteada, un punto interesante es la respuesta (que se espera del estudiante) a la pregunta 3, ya que en este caso el estudiante tiene que extrapolar¹ un dato sin aún tener todo el contenido de su tabla de valores.*

-
1. Ahora que ya respondió las preguntas, de acuerdo a los datos proporcionados genere una tabla de valores como se muestra a continuación:
Donde dV es la diferencia de Voltaje, y RPM las revoluciones por minuto.

dV	RPM
0	0
0.5	150
1	d_1
1.5	d_2
...	...

Figura 3.6: Tabla de variación de voltaje (0.5) y RMP Act.2.

¹Según la RAE *Extrapolar* significa: Mat. Averiguar o estimar el valor de una magnitud para valores de la variable que se hallan fuera del intervalo en que dicha magnitud es conocida.

2. Una vez completada su tabla, grafique dV contra RPM.
3. Repita la tabla, pero ahora con dV=1, es decir:

dV	RPM
0	0
1	300
2	600
3	d_3
...	...

Figura 3.7: Tabla de variación de voltaje (1V) y RMP Act. 2.

4. Grafique sus resultados.

- *En esta parte de la actividad se pide al estudiante que realice el llenado de dos tablas, esto con el objetivo de que pueda observar como es que van comportandose los datos dependiendo de los incrementos, ya que una de las tablas lleva incrementos de 0.5V en 0.5V (Figura3.6) y la otra de 1V en 1V (Figura 3.7), buscamos que el estudiante cree una interpretación mental de cómo es que puede comportarse la función y que llegué a la conclusión de que entre más pequeño sea el incremento y más datos pueda generar, su función quedará más exacta, lo que se espera es que el estudiante al graficar sus datos ya sea en Excel o en papel concluya de que la función crece de manera constante y que con sus conocimientos previos de Geometría puede encontrar una expresión analítica (que es otra representación con la que ya está familiarizado) que la describa, aquí es donde mostramos al estudiante el concepto de función lineal, como en [Flores and Chávez, 2013] el objetivo principal de la gráfica en este caso es familiarizar al estudiante con las funciones de este tipo, ya que son de gran utilidad para distintos procesos de la sociedad.*

1. Responda lo siguiente:
 - a)¿Cómo se comporta la gráfica?
 - b)¿Sabe cómo se llama este tipo de funciones?
 - c)¿Se puede obtener una expresión analítica?
 - d)De ser así obtenga la expresión o explique por qué no.

- Finalmente, llegamos a la parte de análisis de la actividad, donde con ayuda del instructor, el alumno debe describir sus resultados y mostrar sus capacidades para transformar la representación gráfica y numérica a una representación simbólica que será la ecuación que describa esa función.

Función Razón de cambio.

Al finalizar la parte uno de la actividad lo siguiente que debe realizar es obtener la función razón de cambio.

Ejercicio 2

Con los datos de las tablas del Ejercicio 1 obtenga nuevamente las diferencias, para construir la función razón de cambio que corresponde a la función obtenida.

- Tome como base la tabla que se muestra en la Figura 3.8 y complete correctamente todos los datos que se le piden.

$DdV_n = Z_n$	dV	RPM	$DRPM_n = Y_n$
$Z_1 = 0.5 - 0$	0	0	$Y_1 = 150 - 0$
$Z_2 = 1 - 0.5$	0.5	150	$Y_2 = 300 - 150$
$Z_3 = dV_3 - 1$	1	300	$Y_3 = d_3 - 300$
...	dV_3	d_3	...
	

Figura 3.8: Tabla de Diferencias 0.5V.

- Donde Z_n es la diferencia entre las variaciones de voltaje y Y_n expresa la diferencia de las revoluciones por minuto.
- Complete ahora la tabla de variaciones de 1V.

$DdV_n = Z_n$	dV	RPM	$DRPM_n = Y_n$
$Z_1 = 1 - 0$	0	0	$Y_1 = 300 - 0$
$Z_2 = 2 - 1$	1	300	$Y_2 = 600 - 300$
$Z_3 = dV_3 - 2$	2	600	$Y_3 = d_3 - 600$
...	dV_3	d_3	...
	

Figura 3.9: Tabla de Diferencias 1V

- Podemos notar que para esta parte de la actividad se maneja una notación un tanto diferente a la de la actividad pasada, pero en realidad debemos mostrarle a los estudiantes que no son más que nombres que se le asignan en este caso a cantidades, muchas veces es una complicación que se le cambie de nombre a las variables y lo que nos interesa es fomentar en el estudiante esa capacidad de desarrollar cualquier actividad con el nombre que se le dé a las variables y no acostumbrarlos a solo tener una notación, en este punto se le pide que llene dos tablas de valores pues las variaciones son de 0.5V y 1V, se pretende que lo haga de una manera efectiva y que pueda distinguir que se trata de los mismos datos una vez que se tienen llenas ambas tablas, ¿a qué nos referimos con los mismos datos?, en principio el estudiante tiene que ser capaz de concluir que estos datos están incluidos todos dentro de la misma función y es de mucha importancia que se dé cuenta de eso, ya que le permitirá darse cuenta que puede hacer incrementos cada vez más pequeños y esto ayudará en el momento de introducir el concepto de función derivada, puesto que en la función derivada el incremento tiene que ir acercándose a cero.

- Después de completar las tablas obtengamos la función razón de cambio, recordemos que es un cociente de diferencias, en este caso está dada por la expresión:

$$FRC_n = \frac{Y_n}{Z_n}$$

Una vez teniendo esta relación llene la siguiente tabla(es libre de elegir la variación con la que desea trabajar 0.5V o 1V) como se indica:

Donde n es el número de datos de la tabla que usted eligió.

P	FRC_n
0	$FRC_1 = \frac{Y_1}{Z_1}$
1	$FRC_2 = \frac{Y_2}{Z_2}$
n	$FRC_n = \frac{Y_n}{Z_n}$

Figura 3.10: Función razón de cambio Act.2.

- Continuamos con la utilización de una representación numérica que nos llevará a la construcción de la función razón de cambio, busquemos que el estudiante note ciertos patrones que se mostrarán al llenar esta tabla, la cuestión en este momento es lograr el objetivo de mostrar al estudiante como cada función tiene

distintos comportamientos pero a su vez mostrarle que cuando tenemos la función razón de cambio de una función lineal, la forma de esta es muy parecida, haciendo una analogía con las derivadas, recordemos que la derivada de una función lineal es constante.

1. Una vez finalizada su tabulación grafique P vs FRC_n y responda lo siguiente:

- a) ¿Cómo es su gráfica?
 - b) ¿Imaginó que su gráfica se vería de esa manera?
 - c) ¿Puede explicar por qué se comporta así la gráfica?
-

- *En este momento se le pide al estudiante que realice la gráfica de la tabla de la figura 3.10 se pretende que el estudiante ya haya pensado por lo menos en cómo es que se comporta dicha gráfica, ya que los datos de la tabla serán claros, y sabemos que se trata de una línea horizontal. Para finalizar la actividad esperamos que el estudiante pueda responder estas preguntas, que brinde un argumento bien estructurado según los resultados que obtuvo.*

Como se puede observar esta actividad está enfocada en especial a mostrar lo que son las funciones lineales y cómo distintos fenómenos que observamos en nuestra vida cotidiana se comportan de esta manera, también es un ejemplo bueno desde la perspectiva del concepto de derivada (al momento de encontrar la función razón de cambio), donde se pretende mostrar al estudiante que en ocasiones el cambio permanece constante siempre y cuando la situación que lo origina también sea constante.

3.3. Variación de Amperaje.

Se plantea una actividad diferente, puesto que no se pudo desarrollar un ejercicio a papel y lápiz (se pretende modificar una vez que se cuenten con las medidas necesarias para realizar los experimentos) se le proporcionan los datos del experimento al estudiante y se le hacen preguntas, también será el encargado de construir la función razón de cambio y brindarnos información y sus observaciones de las funciones que resulten.

Análisis de datos

Ejercicio 1

En este experimento se midieron las revoluciones por minuto que da una rueda, se varía el voltaje de entrada con un regulador este oscila entre 1V y 12V, sin embargo, ahora nos interesaba observar cómo es que variaban las revoluciones por minuto y cómo es que variaba la corriente eléctrica (oscila entre 1.4mA y 4mA), para ello se utilizó un multímetro conectado en serie a nuestro circuito y se tomaron las medidas necesarias. En esta ocasión se le proporcionará una tabla con los datos del experimento ya que es difícil recrearlo.

1. Observando la información que se encuentra en la figura responda:

mA	RPM
1.4	0
1.6	0
1.8	0
2	0
2.4	111
2.6	367
2.8	752
3	997
3.2	1234
3.4	1516
3.6	1868
3.8	2042
4	2349

Figura 3.11: Tabla de valores de variación de amperes y RPM Act.3.

2. Donde mA es la variación de miliamperes y RPM es la cantidad de Revoluciones por minuto.
3. ¿Cuál de las variaciones es constante?
4. ¿Cómo imagina que será la gráfica de estos datos?
5. ¿Puede imaginar como será la función razón de cambio?
6. Grafique los datos proporcionados en la Figura 1.

- En la tercera y última actividad que se propone el enfoque va dirigido hacía una estrategia diferente de presentarle la situación al estudiante pues como se menciona al inicio es difícil crear una actividad a papel y lápiz, ahora se le brindan los datos tomados desde el experimento, en la Figura 3.11, comenzamos la actividad cuestionando ciertos puntos que se espera el estudiante pueda responder de manera precisa y bien estructurada, al menos dos de las tres preguntas, ya que, hasta el momento cuenta con las bases suficientes para crear un modelo mental y tratar de explicar lo que se le presenta y posteriormente en el último punto de la primera parte se le pide que realice una representación semiótica de la tabla de valores que se le da, para este momento esto no deberá ocasionar ningún tipo de problema porque es en lo que ha trabajado en las demás actividades.

1. Ahora la primera parte para llegar a nuestra función razón de cambio será generar nuestra tabla de diferencias, como en ejercicios anteriores está se generará restando como se observa a continuación:

Variación de Corriente

$dvmA_n = Z_n$	vmA	RPM	$dRPM_n = R_n$
$Z_1 = 1.6 - 1.4$	1.4	0	$R_1 = 0 - 0$
$Z_2 = 1.8 - 1.6$	1.6	0	$R_2 = 0 - 0$
$Z_3 = 2 - 1.8$	1.8	0	$R_3 = 0 - 0$
$Z_4 = 2.4 - 2$	2	0	$R_4 = 111 - 0$
...	2.4	111	...
	

Figura 3.12: Tabla de diferencias Act.3.

2. Donde se usará Z_n para sustituir a la diferencia de variación de Amperes y R_n para definir la diferencia de Revoluciones.
3. Complete la tabla según el número de datos de la Figura 1.
4. Una vez completada definimos la función razón de cambio como sigue:

$$FRC_n = \frac{RPM_n - RPM_{n-1}}{dvmA_n - dvmA_{n-1}} = \frac{R_n}{Z_n}$$

Figura 3.13: Fórmula función razón de cambio Act.3.

5. Note que en la fórmula se expresa el cociente de los datos de la tabla de las diferencias, ahora bien con esos datos llegó el momento de construir la gráfica de nuestra función razón de cambio.
6. Construya una tabla donde las posiciones serán representadas con P en la primera columna (n llega hasta el 11) y en la segunda columna pondrá los valores de la Función Razón de cambio, use de ejemplo la siguiente tabla:

P	FRC_n
0	$FRC_1 = \frac{R_1}{Z_1}$
1	$FRC_2 = \frac{R_2}{Z_2}$
n	$FRC_n = \frac{R_n}{Z_n}$

Figura 3.14: Función razón de cambio.

7. Una vez completada su tabla grafique los datos.

- *Este punto de la actividad no es muy diferente a los de las situaciones anteriores, pero buscamos que el estudiante comprenda que un mismo proceso no lleva siempre a una única solución, a lo largo de todo este estudio se ha mostrado que no buscamos una solución a una sola situación aunque el proceso es parecido o ciertamente el mismo, pretendemos que el alumno tenga un dominio en esta manera de construir e interpretar las funciones que ha generado, además se espera que posea un claro avance en el uso de programas como Excel para tratar estos datos.*

1. Responda:
2. ¿Esperaba una gráfica de ese estilo?
3. ¿Puede explicar que representa la función razón de cambio?
4. ¿Considera que es difícil entender el concepto de función razón de cambio?

- *Por último se plantean una serie de preguntas para el estudiante, como en las otras situaciones tenemos un punto que destaca, en este caso será la pregunta número 2 donde se espera que después del desarrollo completo de las actividades, el estudiante presente una explicación buena de que representa la función razón de cambio.*

En particular esta actividad es un refuerzo de las otras dos pues no tiene un enfoque tan claro como las otras, ya que aquí el estudiante en general tiene que manejar solo los datos y no generarlos como en el caso de la actividad 1, o pensar en cómo obtener los datos que no están en la actividad 2, en realidad la actividad se plantea para analizar el pensamiento matemático que ha generado el estudiante, y poner a prueba los conocimientos previos que se han desarrollado después de la realización de las actividades.

4 Conclusiones y recomendaciones

La finalidad de este capítulo es exponer las conclusiones a las que se ha llegado después de concluir la investigación y el desarrollo de esta tesis, así como dar algunas recomendaciones que puedan retomarse en algún momento para dar continuidad a lo aquí escrito.

4.1. Conclusiones

El desarrollo de esta investigación se comenzó a realizar en noviembre del año 2020, se inició realizando una serie de tres experimentos para obtener los datos necesarios y realizar las tabulaciones así como las gráficas que eran necesarias para la planeación de las actividades que posteriormente se pretendía fueran desarrolladas por un grupo de estudiantes, en principio se buscaba escribir un trabajo experimental acerca del uso de este tipo de ejercicios dentro de la enseñanza del cálculo especialmente en temas tan importantes como lo son las funciones matemáticas, desgraciadamente en esos tiempos nos enfrentábamos a la pandemia generada por el virus SARS-CoV-2 causante de la Covid-19 por lo cual nuestro campo de desarrollo era bastante limitado ya que no contábamos con estudiantes que pudieran realizar cada uno de los experimentos, recordemos que estaban prohibidas todas las reuniones en el estado de Michoacán y que en general los estudiantes del nivel medio superior que es a donde está enfocado este estudio, son menores de edad esto realmente complicó el desarrollo planeado de la investigación, pues se requería estar presente durante el desarrollo de cada actividad para resolver cualquier tipo de complicación que se generara al momento de efectuar las mediciones o cálculos requeridos.

Por lo que se tomó la decisión de realizar un trabajo que se basa principalmente en teorías y que esté firmemente sustentado por ellas, se fijó la atención en el estudio de cada actividad que se propone a lo largo de esta tesis, se analizaron cada una de las partes que conforman las mismas, y posteriormente se extrajo información que permitió detectar en que enfoque se podía justificar cada parte de las actividades. Como se menciona con anterioridad las actividades están sustentadas principalmente en cuatro teorías que se enlistan a continuación:

- La enseñanza del cálculo.
- Los distintos tipos de representaciones.

- El uso de la tecnología.
- La modelación matemática.

Un punto importante que cabe destacar es que todas estas teorías se pueden entrelazar con la finalidad de desarrollar actividades didácticas que permitan al profesor el análisis concreto en el proceso de enseñanza aprendizaje de sus estudiantes, en la etapa de la escuela a nivel medio superior el estudiante tiene muy poco interés en temas que conllevan un pensamiento lógico y matemático ya que esto conlleva tiempo, y esfuerzo mental para analizar y proponer una solución pertinente a ciertos eventos que se presentan al rededor del estudio del cálculo, el propósito de plantear este tipo de situaciones problema es fomentar en el estudiante el interés por asociar situaciones de su vida cotidiana y transformarlas en situaciones matematizadas que le permitan desarrollar un criterio científico y un pensamiento deductivo e inductivo es decir que de una situación general pueda llegar a una particular y viceversa.

Realmente debemos mencionar que la creación y/o el planteamiento de nuevas actividades didácticas en el entorno del cálculo no es una tarea nada sencilla de realizar y depende mucho de los conocimientos previos que el desarrollador, ya sea a través de la experiencia o en nuestro caso a través de la investigación posea y la manera en que puede expresarlos, sin duda alguna debe ser preciso y claro en lo que quiere mostrar a los estudiantes, ya que un mal planteamiento de alguna situación problema puede desencadenar un aprendizaje erróneo o nulo, es un tema muy importante para los docentes de matemática que muchas veces no se trata con suficiente objetividad. Existen varios puntos a tratar dentro de las conclusiones y se hablará de cada uno de ellos a continuación.

En el proceso de enseñanza aprendizaje sobre todo del cálculo con un primer acercamiento por parte del alumno es de gran importancia que el profesor cuente con los procesos adecuados para pretender que el estudiante tome con seriedad e interés un tema propuesto para la resolución de problemas como la creación de funciones, no basta con exponer el concepto de una función matemática como generalmente se hace, sino que funcionaría más despertar el pensamiento matemático del estudiante abordando el tema de las funciones desde una perspectiva realista y que asocie con su entorno de vida, para posteriormente comenzar a introducir las definiciones pertinentes.

Con este proyecto no estamos promoviendo que se abandonen las formas “tradicionales” del proceso de enseñanza aprendizaje de temas como funciones y derivadas, lo único que se sugiere es que se incluyan actividades un poco más “frescas” por llamarlo de alguna manera en las aulas del nivel medio superior, pretendemos que el proceso de aprendizaje de funciones matemáticas no sea únicamente de manera abstracta, es decir, a base de expresiones solamente.

En la enseñanza del cálculo se deben de tener sentadas buenas bases de materias que se han llevado con anterioridad, esto es muy importante, ya que el estudiante debe ser capaz de manejar conceptos del precálculo para comenzar a desarrollar nuevos conocimientos que están ligados directamente a conocimientos previos.

De acuerdo a [Duval, 2016] y [Cortés et al., 2005] el profesor debe fomentar en el estudiante el uso de múltiples representaciones matemáticas para generar un conocimiento

sólido. Ya que como se ha comentado en párrafos anteriores cada representación tiene diferentes características y presentan diferente información, de ahí la importancia de que el estudiante haga uso de las distintas representaciones.

Al plantear las actividades se pretende que el estudiante sea capaz de imaginar el problema en su mente antes de atacarlo en papel y lápiz o en alguna herramienta tecnológica, ya que en el nivel medio superior es donde se deben dar las bases para lo que posteriormente desees realizar en una carrera universitaria, y muchas veces el pensamiento lógico de los estudiantes es muy deficiente a la hora de proponer razonamientos que nos lleven a una solución favorable a alguna situación que se nos presente.

El manejo de la tecnología en el mundo escolar debe introducirse de manera pertinente en las aulas para que este desempeñe un papel importante en el desarrollo y creación de nuevos conocimientos para los estudiantes, pero es muy importante señalar que el profesor deberá tener previo conocimiento de lo que pretende exponer con tecnología, ya que si esto no es así la introducción del uso de tecnologías será un fracaso en el proceso de enseñanza aprendizaje en las aulas, esto particularmente en el aprendizaje del cálculo.

Haciendo un uso correcto de las herramientas tecnológicas tendremos grandes beneficios para el estudiante esto de acuerdo a lo dicho por [Alonzo and Cortés, 2016], [Gambboa, 2007], [Nuñez et al., 2018] por ejemplo:

- Una mejor comprensión de lo que está desarrollando.
- Una manera más sencilla de realizar tareas como gráficas, tablas, etc.
- Una mejor experiencia visual al momento de analizar una función(en forma de gráfica por ejemplo).

Terminando estos ejemplos señalamos nuevamente, que con esto no se pretende que el estudiante abandone el entorno del trabajo a papel y lápiz y se mude por completo a un entorno donde solo maneje tecnología, ya que este también sería un grave error, recordemos siempre, que la tecnología solo es una herramienta para reforzar y reafirmar las soluciones que previamente se ha planteado el estudiante.

El uso inadecuado de la tecnología, puede llevarnos a un total fracaso en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas.

Observemos también que como cualquier enfoque, lo que se propone tiene sus ventajas, pero también tiene sus desventajas.

Proponer al estudiante actividades que se realicen con el apoyo de herramientas de medición es un proceso interesante, ya que despierta en el alumno la curiosidad de analizar y explicar los fenómenos que lo acompañan a lo largo de su vida, generan en él la necesidad de tratar de explicar su entorno y esto es ampliamente favorable para el desarrollo de una sociedad científica.

Si bien es cierto que el uso de la modelación matemática es desarrollo complejo en el ámbito del proceso de enseñanza aprendizaje, es una parte útil por la serie de pasos que lo conforman, puesto que realmente plantea los pasos bien estructurados que se

deben seguir para lograr un modelo que se ajuste a lo que estás buscando describir o explicar, muchas veces nos sirve de acompañamiento junto con otros procesos como en el caso de estas actividades, en ninguna ocasión se le pide al estudiante que modele por completo una situación, sin embargo, implícitamente está haciéndolo, ya que llevamos un experimento físico al lenguaje de las matemáticas.

Si bien es cierto que es una manera eficaz de explicar los fenómenos que observamos, cabe mencionar que incluso en nivel superior es bastante complicado llegar a un nivel donde se pueda modelar de manera sencilla una situación, es un verdadero reto introducir la modelación matemática en las aulas del nivel medio superior, ya que, muchas veces es muy complejo incluso transformar una situación verbal simple a un lenguaje matemático.

Una parte muy importante del método de la modelación matemática y que tenemos que destacar es que en el proceso del modelado matemático el estudiante no solo está observando las aplicaciones de las matemáticas a otras áreas, sino que en el proceso aprende a leer, interpretar, formular y finalmente resolver una situación problema y esto verdaderamente es lo que se busca con este tipo de actividades.

El modelo educativo tradicional está estructurado de la siguiente manera:

- Introducción.
- Definición del concepto.
- Explicación.
- Ejemplos.
- Ejercicios y/o aplicaciones.

En el desarrollo de la tesis, se pretende que dentro de este tipo de enseñanza tradicional se agreguen actividades donde el estudiante aprenda con experimentos, múltiples representaciones, uso de tecnología y modelos matemáticos, que en ocasiones no están presentes dentro de este modelo de enseñanza.

Las funciones razones de cambio son de mucha importancia a la hora de introducir de lleno el concepto de función derivada, puesto que en el desarrollo de la función razón de cambio se le propone al estudiante a trabajar con objetos matemáticos que son conocidos y se espera bien manipulados por él.

Y por último, pero no menos importante es que con el planteamiento de este tipo de actividades se pretende desarrollar en el estudiante la capacidad de leer, analizar, entender y finalmente desarrollar la solución de problemas matemáticos, además de fomenta la experimentación física como método de desarrollo de actividades para enseñanza de las matemáticas y se le da un sentido físico a las funciones, se quiere que el estudiante abandone el pensamiento de que las funciones solo aparecen en los libros como objetos puramente algebraicos y que por el contrario se obtienen de situaciones de la vida real.

4.2. Recomendaciones

Las recomendaciones acerca de este trabajo se expondrán a manera de lista para facilitar la lectura y el análisis de las mismas, durante el proceso de investigación hubo situaciones que motivan a sugerir lo siguiente:

- Es un tema muy importante dentro del proceso de enseñanza aprendizaje en el nivel medio superior por lo que se invita a futuros estudiantes que estén interesados en el tema a que profundicen más para llegar a una mejora considerable y un avance importante en este tema, se busca que complementen esta investigación, incluso agregando alguna otra teoría que se apegue a las bases que fomentaron este trabajo.
- Se recomienda que retomen la idea central de este trabajo y que si hay condiciones favorables busquen la manera de realizar el desarrollo experimental para sentar bases de la inclusión de este tipo de actividades dentro del modelo de enseñanza.
- Se sugiere también fomentar el interés por temas similares a este dentro del ámbito de la matemática educativa para proponer cambios dentro del modelo educativo tradicional y buscar la inclusión acertada de la tecnología en las aulas.

Bibliografía

- [Alonzo and Cortés, 2016] Alonzo, E. and Cortés, J. C. (2016). Uso del cas para el aprendizaje de temas de álgebra del bachillerato. *Revista Electrónica AMIUTEM Vol. IV, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática*. ISSN: 2395-955X.
- [Camargo and Hederich, 2010] Camargo, A. and Hederich, C. (2010). Jerome bruner: Dos teorías cognitivas, dos formas de significar, dos enfoques para la enseñanza de la ciencia. *psicogente*, 13(24),329-346. ISSN= 0124-0137.
- [Cortés et al., 2005] Cortés, J., Garcia, J. R., and Nuñez, G. (2005). Software para la enseñanza de la derivada. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, page 175. ISBN=970-703-313-4.
- [Duval, 2016] Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. url = <http://funes.uniandes.edu.co/12213/1/Duval2016Un.pdf>.
- [Flores and Chávez, 2013] Flores, A. and Chávez, G. (2013). *Generalización en el estudio de funciones lineales*, page 1061. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. url=<http://funes.uniandes.edu.co/4202/1/FloresGeneralizacionALME2013.pdf>.
- [Gamboa, 2007] Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2:16. url=<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6890/6576>.
- [Gómez, 2004] Gómez, P. (2004.). Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. *Investigación en el aula de matemáticas: tecnologías de la información y la comunicación*, page 1. url = <http://funes.uniandes.edu.co/385/1/GomezP04-2781.pdf>.
- [Hitt, 2005a] Hitt, F. (2005a). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, page 69. ISBN=970-703-313-4.
- [Hitt, 2005b] Hitt, F. (2005b). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. ISBN=970-703-313-4.

- [Martínez González, 2020] Martínez González, J. (2020). Propuesta metodológica basada en la resolución de problemas para la enseñanza de la derivada de forma significativa mediante razones de cambio. *Tesis de maestría*.
- [Nuñez et al., 2018] Nuñez, E., Cortés, J. C., and Duarte, E. (2018). El concepto de pendiente en un ambiente tecnológico a través de actividades de aprendizaje con el uso de la calculadora ti-nspire cx cas. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM. Vol. V, No. 2. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática*. ISSN: 2395-955X.
- [Salett Biembengut, 2004a] Salett Biembengut, MariaHein, N. (2004a). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*. ISSN = 0187-8298.
- [Salett Biembengut, 2004b] Salett Biembengut, MariaHein, N. (2004b). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, page 109. ISSN = 0187-8298.
- [Sealey and Flores, 2005] Sealey, V. and Flores, A. (2005). Entender la derivada: Sí se puede. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. ISBN=970-703-313-4.
- [Sfard, 1991] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22:1–36. DOI = 10.1007/BF00302715.
- [Trigueros Gaisman, 2009] Trigueros Gaisman, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*. url = <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=179414894008>.
- [Ugalde, 2013] Ugalde, W. J. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 14(1). DOI=10.18845/rdmei.v14i1.1564.

A Actividades Propuestas.

Introducción a la construcción de funciones matemáticas.

Dr. José Carlos Cortés, Alumno: Carlos Daniel Torres Garduño.

Una función matemática es la relación que hay entre una magnitud y otra, cuando el valor de la primera depende de la segunda. Variable dependiente. Es la que depende del valor de la otra magnitud. Variable independiente. Es la que define la variable dependiente.

Ejercicio 1

Ahora bien, nos interesa explicar de dónde salen estas relaciones entre variables, para ello se le pide analizar la siguiente situación:

Una persona se encuentra en la entrada de una habitación rectangular de 4m x 3m cuando comienza a sonar su teléfono que se encuentra casi en la esquina contraria de la habitación, por lo que se pregunta: "¿A qué distancia estará mi teléfono? ¿Cuál será la distancia más corta entre mi teléfono y yo respecto a mi posición en la habitación? ¿Cuál será la mayor distancia entre el teléfono y yo si me desplazo a lo largo del perímetro de la habitación?".

Si pensó en posibles respuestas ahora realice las siguientes actividades:

1. En su cuaderno trace un rectángulo de 4cm x 3cm para simular la habitación.
2. Divida el perímetro del rectángulo en segmentos de un centímetro como se muestra en la Figura A.1.

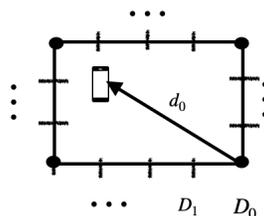


Figura A.1: Esquema de división del perímetro Act. 1.

3. Tenemos un total de 14 posibles posiciones a lo largo del perímetro del rectángulo nombre a cada punto D_0, D_1 , etc. hasta D_{13}

- Con ayuda de una regla mida la distancia entre la posición D_0 y el teléfono, y repita esto con las otras 13 posiciones, es decir, la distancia entre D_1 y el teléfono, y así sucesivamente hasta llegar a la distancia entre la posición D_{13} y el teléfono.
- Genere una tabla de valores como se muestra en la Figura A.2:

POSICIÓN	DISTANCIA AL TELÉFONO
0	d_0
1	d_1
2	d_2
3	d_3
...	...

Figura A.2: Tabla de Posición y distancia Act.1.

- Finalmente grafique Posición Vs. Distancia.

Ahora según sus resultados, podría responder:

- ¿Cuál es la variable independiente?
- ¿Cuál es la variable dependiente?
- Según su gráfica, ¿Cuál es la distancia menor? ¿En que posición?
- ¿Cuál es la mayor distancia entre la persona y el teléfono?

Introducción a la función razón de cambio

La razón de cambio es la proporción en la que una variable cambia con respecto a otra, de manera más explícita hablamos de la pendiente de una curva en una gráfica, es decir el cambio en el eje “y” entre el cambio del eje “x”.

Ejercicio 2

Haciendo uso de la grafica y de la tabla del Ejercicio 1 propuesto anteriormente encontraremos la función razón de cambio.

¿Cómo se construye está función?

Como su nombre lo dice es una razón (división) entre los cambios que van a tener nuestras variables, en nuestro caso la posición y la distancia al teléfono.

ACTIVIDADES A REALIZAR.

1. Haciendo uso de los datos de la tabla POSICIÓN | DISTANCIA AL TELÉFONO del Ejercicio 1 llenaremos la siguiente tabla de la Figura A.3 .

DIFERENCIA DE LA POSICIÓN (X)	POSICIÓN (P)	DISTANCIA AL TELÉFONO (d)	DIFERENCIA DE LAS DISTANCIAS AL TEL. (Y)
$X_1 = P_2 - P_1$	P_1	d_1	$Y_1 = d_2 - d_1$
$X_2 = P_3 - P_2$	P_2	d_2	$Y_2 = d_3 - d_2$
$X_3 = P_4 - P_3$	P_3	d_3	$Y_3 = d_4 - d_3$
$X_4 = P_5 - P_4$	P_4	d_4	$Y_4 = d_5 - d_4$
...	P_5	d_5	...
	

Figura A.3: Tabla de diferencias Act. 1

2. Recordemos que tenemos un total de 14 posibles posiciones a lo largo del perímetro del rectángulo, así que tendremos un total de 13 posiciones en las columnas de las diferencias a las que denominaremos, en el caso de la diferencia de la posición, será X_n y en el caso de la distancia al teléfono será llamada Y_n donde $n = 1, 2, \dots$
3. Cuando tengamos la tabla llena con los datos nos centraremos en las columnas DIFERENCIA DE LA POSICIÓN (X) Y DIFERENCIA DE LAS DISTANCIAS AL TELÉFONO (Y).
4. Ahora vamos a construir una tabla nueva que será de posiciones y la razón de las diferencias que acabamos de obtener. Para ello haga uso del ejemplo de la Figura A.4:

POSICIÓN (Z)	RAZÓN CAMBIO (R)
0	$R_1 = Y_1 \div X_1$
1	$R_2 = Y_2 \div X_2$
2	$R_3 = Y_3 \div X_3$
3	$R_4 = Y_4 \div X_4$
4	$R_5 = Y_5 \div X_5$
5	$R_6 = Y_6 \div X_6$
...	...

Figura A.4: Tabla de posición y razón de cambio Act.1.

5. Note que ahora llamaremos a la posición “Z” y a la Razón de diferencias “R”.
6. Grafique Posición (Z) vs. Razón (R).

Finalmente hemos encontrado la función razón de cambio, responda:

1. ¿Cómo es la diferencia de la posición en este caso?
2. ¿Cómo describiría la diferencia entre las distancias al teléfono?
3. ¿Qué información nos da la razón Y_n/X_n ?
4. ¿Qué información podemos obtener de nuestra grafica?

Creando funciones.

Dr. José Carlos Cortés, Alumno: Carlos Daniel Torres Garduño.

Después del desarrollo de la actividad pasada ya ha manipulado al menos dos tipos de representaciones, construyó dos funciones y analizó datos, lea con atención la siguiente situación y realice lo que se le pide:

Ejercicio 1

Se tiene un motor(12V) que se encuentra conectado a una fuente de poder y a un regulador de voltaje(0-12V), dicho regulador solo se puede aumentar de 0.5V en 0.5V y de 1V en 1V. Nos interesa saber la cantidad de vueltas que el motor da dependiendo de la variación del voltaje, además como es la razón de cambio de las RPM dependiendo del voltaje, sabemos que la cantidad de vueltas es constante y que en 0.5V nos da un total de 150RPM (RPM: Revoluciones por minuto.)

Con los datos que se proporcionan en el ejercicio responda:

1. ¿Cuántas mediciones se pueden obtener si varía el voltaje de 0.5V en 0.5V?
2. ¿Cuántas mediciones si lo hace de 1V en 1V?
3. ¿Cuántas vueltas da el motor si se le proporciona una alimentación de 5V?
4. Ahora que ya respondió las preguntas, de acuerdo a los datos proporcionados genere una tabla de valores como se muestra a continuación en la Figura A.5: Donde dV es la diferencia de Voltaje, y RPM las revoluciones por minuto.
5. Una vez completada su tabla, grafique dV contra RPM.
6. Repita la tabla pero ahora con dV=1, es decir como se muestra en la Figura A.6:

dV	RPM
0	0
0.5	150
1	d_1
1.5	d_2
...	...

Figura A.5: Tabla de variación de voltaje (0.5) y RMP Act.2.

dV	RPM
0	0
1	300
2	600
3	d_3
...	...

Figura A.6: Tabla de variación de voltaje (1V) y RMP Act. 2.

7. Grafique sus resultados.

1. Responda lo siguiente:

- ¿Cómo se comporta la la gráfica?
- ¿Sabe cómo se llama este tipo de funciones?
- ¿Se puede obtener una expresión analítica?
- De ser así obtenga la expresión o explique por qué no.

Función Razón de cambio.

Al finalizar la parte uno de la actividad lo siguiente que debe realizar es obtener la función razón de cambio.

Ejercicio 2

Con los datos de las tablas del Ejercicio 1 obtenga nuevamente las diferencias, para construir la función razón de cambio que corresponde a la función obtenida.

- Tome como base la tabla que se muestra en la Figura A.7 y complete correctamente todos los datos que se le piden.
 - Donde Z_n es la diferencia entre las variaciones de voltaje y Y_n expresa la diferencia de las revoluciones por minuto.

$DdV_n = Z_n$	dV	RPM	$DRPM_n = Y_n$
$Z_1 = 0.5 - 0$	0	0	$Y_1 = 150 - 0$
$Z_2 = 1 - 0.5$	0.5	150	$Y_2 = 300 - 150$
$Z_3 = dV_3 - 1$	1	300	$Y_3 = d_3 - 300$
...	dV_3	d_3	...
	

Figura A.7: Tabla de Diferencias 0.5V.

$DdV_n = Z_n$	dV	RPM	$DRPM_n = Y_n$
$Z_1 = 1 - 0$	0	0	$Y_1 = 300 - 0$
$Z_2 = 2 - 1$	1	300	$Y_2 = 600 - 300$
$Z_3 = dV_3 - 2$	2	600	$Y_3 = d_3 - 600$
...	dV_3	d_3	...
	

Figura A.8: Tabla de Diferencias 1V

- Complete ahora la tabla de variaciones de 1V que se muestra en la Figura A.8.
- Después de completar las tablas obtengamos la función razón de cambio, recordemos que es un cociente de diferencias, en este caso está dada por la expresión:

$$FRC_n = \frac{Y_n}{Z_n}$$

Una vez teniendo esta relación llene la siguiente tabla (es libre de elegir la variación con la que desea trabajar 0.5V o 1V) como se indica en la Figura A.9:

Donde n es el número de datos de la tabla que usted eligió.

P	FRC_n
0	$FRC_1 = \frac{Y_1}{Z_1}$
1	$FRC_2 = \frac{Y_2}{Z_2}$
n	$FRC_n = \frac{Y_n}{Z_n}$

Figura A.9: Función razón de cambio Act.2.

1. Una vez finalizada su tabulación grafique P vs FRC_n y responda lo siguiente:

a) ¿Cómo es su gráfica?

- b) ¿Imagino que su gráfica se vería de esa manera?
 c) ¿Puede explicar por qué se comporta así la gráfica?

Análisis de datos.

Dr. José Carlos Cortés, Alumno: Carlos Daniel Torres Garduño.

Ejercicio 1

En este experimento se midieron las revoluciones por minuto que da una rueda, se varia el voltaje de entrada con un regulador este oscila entre 1V y 12V, sin embargo, ahora nos interesaba observar cómo es que variaban las revoluciones por minuto y cómo es que variaba la corriente electrica (oscila entre 1.4mA y 4mA), para ello se utilizo un multmetro conectado en serie a nuestro circuito y se tomaron las medidas necesarias. En está ocasión se le proporcionara una tabla con los datos del experimento ya que es difícil recrearlo.

1. Observando la información que se encuentra en la Figura A.1 responda:

vmA	RPM
1.4	0
1.6	0
1.8	0
2	0
2.4	111
2.6	367
2.8	752
3	997
3.2	1234
3.4	1516
3.6	1868
3.8	2042
4	2349

Figura A.10: Tabla de valores de variación de amperes y RPM Act.3.

2. Donde vmA es la variación de miliamperes y RPM es la cantidad de Revoluciones por minuto.
 3. ¿Cuál de las variaciones es constante?
 4. ¿Cómo imagina que será la gráfica de estos datos?
 5. ¿Puede imaginar como será la función razón de cambio?
 6. Gráfique los datos proporcionados en la Figura A.10.

Función razón de cambio.

1. Ahora la primera parte para llegar a nuestra función razón de cambio será generar nuestra tabla de diferencias, como en ejercicios anteriores está se generará restando como se observa en la Figura A.11:

Variación de Corriente

$dvmA_n = Z_n$	vmA	RPM	$dRPM_n = R_n$
$Z_1 = 1.6 - 1.4$	1.4	0	$R_1 = 0 - 0$
$Z_2 = 1.8 - 1.6$	1.6	0	$R_2 = 0 - 0$
$Z_3 = 2 - 1.8$	1.8	0	$R_3 = 0 - 0$
$Z_4 = 2.4 - 2$	2	0	$R_4 = 111 - 0$
...	2.4	111	...
	

Figura A.11: Tabla de diferencias Act.3.

2. Donde se usara Z_n para sustituir a la diferencia de variación de Amperes y R_n para definir la diferencia de Revoluciones.
3. Complete la tabla según el número de datos de la Figura A.10.
4. Una vez completada definimos la función razón de cambio como se muestra en la Figura A.12:

$$FRC_n = \frac{RPM_n - RPM_{n-1}}{dvmA_n - dvmA_{n-1}} = \frac{R_n}{Z_n}$$

Figura A.12: Fórmula función razón de cambio Act.3.

5. Note que en la formula se expresa el cociente de los datos de la tabla de las diferencias, ahora bien con esos datos llego el momento de construir la gráfica de nuestra función razón de cambio.
6. Construya una tabla donde las posiciones serán representadas con P en la primera columna (n llega hasta el 11) y en la segunda columna pondra los valores de la Función Razón de cambio, use de ejemplo la tabla de la Figura A.13:

P	FRC_n
0	$FRC_1 = \frac{R_1}{Z_1}$
1	$FRC_2 = \frac{R_2}{Z_2}$
n	$FRC_n = \frac{R_n}{Z_n}$

Figura A.13: Función razón de cambio.

7. Una vez completada su tabla gráfique los datos.
 1. Responda:
 2. ¿Esperaba una gráfica de ese estilo?
 3. ¿Puede explicar que representa la función razón de cambio?
 4. ¿Considera que es difícil entender el concepto de función razón de cambio?