



Universidad Michoacana de  
San Nicolás de Hidalgo

---

Facultad de Ciencias Físico  
Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Sincronización y Control de Sistemas  
Caóticos de baja dimensionalidad

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias en Físico Matemáticas

P r e s e n t a :

Mauricio Yamil Tame Soria

Asesores:

Dr. Ulises Uriostegui Legorreta

Dr. Eduardo Salvador Tututi Hernández

*Morelia Michoacán, Julio 2022*

*A mis padres y Chayito*

# Agradecimientos

Agradezco a mis padres y familiares cercanos, en particular a mi abuela que fue un gran apoyo en mis años formativos. A mis asesores Eduardo y Ulises que me apoyaron en todo momento y creyeron en mi para realizar esta tesis.

## CAPÍTULO 0. AGRADECIMIENTOS

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Sistemas Dinámicos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	2
1.3. Solución de Sistemas Lineales . . . . .	3
1.4. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Lineales . . . . .	6
1.5. Sistemas Autónomos y No Autónomos . . . . .	9
1.6. Estabilidad del Sistema . . . . .	10
1.7. Caracterización del Espacio Fase . . . . .	11
1.7.1. Ejemplos . . . . .	14
1.8. Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	18
1.9. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	19
<b>2. Dinámica no lineal de los osciladores de van der Pol y de Duffing</b>	<b>21</b>
2.1. Introducción . . . . .	21
2.2. Oscilador van der Pol . . . . .	21
2.2.1. Análisis de la ecuación de van der Pol . . . . .	22
2.2.2. Oscilador de van der Pol forzado . . . . .	31
2.2.3. Oscilador de van der Pol con potencial $\Phi^4$ . . . . .	33
2.2.4. Oscilador de van der Pol con potencial $\Phi^4$ asimétrico . . . . .	37
2.3. Oscilador Duffing . . . . .	41
2.3.1. Análisis de la ecuación de Duffing . . . . .	42
2.3.2. Oscilador de Duffing forzado . . . . .	45
2.3.3. Oscilador de Duffing con potencial $\Phi^4$ asimétrico . . . . .	47
<b>3. Sincronización y Control de Sistemas Caóticos</b>	<b>51</b>
3.1. Introducción . . . . .	51
3.2. Control óptimo . . . . .	52

## ÍNDICE GENERAL

---

3.2.1. Control de bucle abierto ( <i>Open-loop control</i> ) . . . . .	53
3.2.2. Control por retroalimentación de estados ( <i>Control feedback</i> ) . . . . .	53
3.2.3. Principio del máximo . . . . .	53
3.2.4. Ejemplo . . . . .	55
3.3. Control del caos . . . . .	56
3.3.1. Métodos de control del caos . . . . .	57
3.4. Sincronización del caos . . . . .	58
3.4.1. Configuración Maestro-Esclavo . . . . .	60
<b>4. Sincronización de los Osciladores van der Pol y Duffing</b>	<b>63</b>
4.1. Introducción . . . . .	63
4.2. Sistema Duffing maestro y van der Pol esclavo . . . . .	64
4.3. Sistema van der Pol-Duffing maestro y Duffing esclavo con potenciales tipo $\Phi^4$ . . . . .	72
4.3.1. Acoplamiento elástico con $\Phi^4$ simétrico . . . . .	72
4.3.2. Acoplamiento disipativo con $\Phi^4$ simétrico . . . . .	76
4.3.3. Acoplamiento combinado con $\Phi^4$ simétrico . . . . .	78
4.3.4. Acoplamiento elástico con $\Phi^4$ asimétricos . . . . .	80
4.3.5. Acoplamiento disipativo con $\Phi^4$ asimétricos . . . . .	83
4.3.6. Acoplamiento combinado con $\Phi^4$ asimétricos . . . . .	85
<b>5. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

# Introducción

Cum Deus Calculat Fit Mundus.  
(Según Dios calcula se va creando el mundo.)  
Leibniz, c. 1700

La tesis trata sobre el control y sincronización de sistemas caóticos, particularmente los osciladores de van der Pol y Duffing con forzamiento y diferentes potenciales. Se analizó la dinámica de los osciladores y se hicieron simulaciones con diferentes sistemas para ver si existía sincronización. La importancia del estudio de la sincronización de sistemas caóticos viene de sus numerosas aplicaciones en áreas de la tecnología. Las aplicaciones de los osciladores de Duffing y van der Pol abarcan la física, biología, electrónica, química y otros. Algunas de las aplicaciones del control y sincronización del caos son: sincronización de sistemas caóticos con láser, análisis de reacciones químicas, circuitos electrónicos, modelado de sistemas biológicos, modelado de células cardiacas, entre otras. Una posible aplicación de la sincronización de sistemas no idénticos es la implementación de sistemas de comunicación que sean seguros, esto gracias a que las señales caóticas generalmente son de banda ancha, tienen ruido y son impredecibles. En robótica, los osciladores sirven para controlar coyunturas de cadera y rodillas mediante sincronización del sistema mecánico. Los estudios y aplicaciones de la inteligencia artificial cada vez toman más importancia, para este marco, los osciladores se muestran útiles para entrenar redes neuronales y reconocer sistemas caóticos. Los osciladores de van der Pol y Duffing son paradigma del estudio del caos, debido a que representan el prototipo de ciclo límite y el de atractor extraño.

Es posible comentar entonces que la importancia de estudiar el fenómeno de sincronización en distintos osciladores, recae en que numerosos fenómenos pueden ser modelados con los sistemas de osciladores no lineales. Este trabajo aporta resultados originales especialmente en la sincronización caótica de osciladores con potenciales asimétricos. Se investigan estos sistemas desde el punto de vista teórico y numérico.

En el capítulo 1 se repasan temas sobre ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales, también se describe la importancia del estudio de la sincronización y sus aplicaciones. En el capítulo 2 se describen las dinámicas de los osciladores en un marco de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales; se buscan los puntos fijos del sistema y se analiza su estabilidad, se muestran los espacios fase, diagramas de bifurcación y otras herramientas de análisis para los sistemas dinámicos. El capítulo 3 aborda el tema de sincronización y control, se describen algunos métodos y conceptos

## CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

---

de este tema así como un básico de la teoría de control y un ejemplo. El capítulo 4 consiste en las simulaciones de los sistemas bajo distintos esquemas de acoplamiento, elástico , disipativo y uno combinado recientemente propuesto.

# Capítulo 1

## Sistemas Dinámicos

### 1.1. Introducción

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales es tan viejo como el del Cálculo mismo. En 1671 Newton (1643-1729) trabajó sobre la teoría de “Fluxiones” (Una fluxión viene a ser la derivada de una “fluyente”, el cual es el nombre que Newton daba a una variable dependiente). Su investigación se relacionó con “Ecuaciones Fluxionales” que ahora llamaríamos ecuaciones diferenciales. Él dividió a las ecuaciones diferenciales en tres categorías. En la primera, estas tendrían la forma  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  o  $\frac{dy}{dx} = f(y)$ . En la segunda, tendrían la forma  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Y en la tercera categoría están las ecuaciones diferenciales parciales. El método de solución desarrollado por él fue el de series de potencias el cual consideró un método “universalmente válido”.

El matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) también trabajó en ecuaciones diferenciales; encontró el método para las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. En 1690, Jakob Bernoulli (1654-1705) mostró que el problema de determinar la isócrona (curva vertical plana en la cual una partícula que se deslice sobre ella hasta el fondo tardará un tiempo fijo que no depende del punto inicial) es equivalente a resolver una ecuación diferencial de primer orden no lineal; él la resolvió por el método de variables separables (el método general sería enunciado por Leibniz) [1].

La segunda etapa (1728) de la historia de las ED's (Ecuaciones Diferenciales) estuvo dominada por Leonard Euler: Él introdujo varios métodos para ecuaciones de orden inferior, el concepto de factor integrante, la teoría de las ecuaciones lineales de orden arbitrario, el desarrollo del uso del método de series de potencias entre otras cosas. La etapa siguiente (1820) fue una etapa de formalización y en ella hay dos personajes importantes Niels Henrik Abel (1802-1829) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857); los problemas de existencia y unicidad de las solución cobraron importancia.

## 1.2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de varias ecuaciones diferenciales con varias funciones incógnitas y un conjunto de condiciones de contorno. Una solución del mismo es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema. Los sistemas de ecuaciones diferenciales también pueden clasificarse en lineales y no lineales, de primer orden o de orden superior. Pero en esta situación merece hacerse una consideración ya que *“todo sistema de orden superior a dos puede transformarse en uno de orden uno mediante la simple redefinición y agregado de variables”* [2].

Por ejemplo, el movimiento de una masa puntual acoplada a un resorte ideal que sigue la ley de Hooke y que oscila sobre su eje  $x$ . De la segunda ley de Newton y la ley de Hooke tenemos

$$F_x = \ddot{x} = -kx, \quad (1.1)$$

con

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.2)$$

La dinámica del sistema se puede expresar como ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x, \quad (1.3)$$

$$\dot{x} = v, \quad (1.4)$$

donde nuestras variables de estado son  $x$  y  $v$ , donde  $x = u$  y  $v = w$ . Las ecuaciones (1.3) y (1.4) se reducen a

$$\dot{u} = f(u, w),$$

$$\dot{w} = g(u, w).$$

En consecuencia, parte del tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales puede enfocarse en los sistemas de primer orden sin pérdida de generalidad. Un sistema de ecuaciones diferenciales, sujetas a condiciones iniciales, adquiere la forma [3]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Así, si cada una de las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  es lineal en las variables dependientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entonces el sistema es lineal de primer orden. Su estructura general es:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{aligned}$$

el cual se puede expresar en forma matricial como

$$X' = AX + F, \tag{1.5}$$

donde:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix}.$$

La solución general de este sistema no homogéneo se puede expresar como:

$$X = X_p + X_c,$$

donde  $X_p$  es una solución particular de  $X' = AX + F$  y  $X_c$  es la solución del sistema homogéneo formado por  $X' = AX$ , cuando las funciones  $f_i(t)$  no son tomadas en cuenta ( $F = 0$ ). Esta es una generalización del caso de una ecuación diferencial individual. En primer lugar se obtendrá  $X_c$ , la solución complementaria, para luego tratar el caso más general, cuando el sistema no es homogéneo.

### 1.3. Solución de Sistemas Lineales

Por similitud al caso de ecuaciones diferenciales ordinarias  $y' = ax$ , la solución para el sistema  $\vec{y}' = A\vec{x}$  es  $\vec{y} = e^{At}\vec{x}_0$  donde  $\vec{x}_0 = \vec{x}(0)$ , recordemos que [4]

$$e^{At} = I + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i.$$

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

En el caso de una ecuación diferencial lineal de primer orden  $x' = ax + f(t)$  (donde  $a$  es una constante) la solución general está dada por:

$$x = x_c + x_p = ce^{at} + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-as} f(s) ds.$$

Para un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, se puede demostrar que la solución general de  $X' = AX + F$  (donde  $A$  es una matriz de constantes) es:

$$X = X_c + X_p = e^{At}C + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} F(s) ds.$$

La construcción de soluciones de sistemas se pueden generalizar en algunos de los casos partiendo de las conocidas en EDO's (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias). Continuando por ejemplo  $\dot{y} = ax + b$  o su equivalente  $\vec{y}' = A\vec{x} + \vec{b}$ . Otra forma de construir la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo, es resolviendo directamente el sistema  $X' = AX$  con ayuda de la información que brindan los valores propios de la matriz y sus correspondientes vectores propios.

Por analogía del sistema, la solución del sistema es de la forma:

$$\vec{x} = e^{\lambda t} \cdot \vec{v},$$

donde tenemos que

$$\vec{x}' = \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v}, \quad Ae^{\lambda t} \cdot \vec{v} - \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v} = \vec{0},$$

$$(A - I\lambda) \cdot \vec{v} = \vec{0}.$$

La construcción de la solución para la ecuación 1.5 con  $F = 0$  se reduce a un problema de eigenvalores y eigenvectores.

Los valores propios de la matriz cuadrada  $A$  son los ceros del polinomio característico. Es decir, del polinomio:

$$P(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I) = 0.$$

En este análisis jugará un papel fundamental, tanto el signo de los valores propios, como el hecho de que sean diferentes o repetidos.

**Teorema 1.3.1** Sean  $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}$ , ...,  $\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$

solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo. Entonces los

---

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

vectores son linealmente independientes en un intervalo  $I$  si y sólo si el wronskiano es diferente de cero

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son un conjunto linealmente independiente de soluciones (llamado también conjunto fundamental de soluciones). Entonces la solución general del sistema es:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n.$$

Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son valores propios reales y distintos de la matriz  $A$ , y  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  los vectores propios correspondientes. Entonces la solución general del sistema lineal homogéneo  $X' = AX$  es

$$X = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t},$$

o en forma matricial la solución general del sistema homogéneo la podemos expresar como:

$$\vec{X}(t) = M(t) \cdot \vec{C},$$

donde  $M$  se llama Matriz Fundamental (no singular); y  $\text{Det}M \neq 0$

$$\vec{X}'(t) = M'(t) \cdot \vec{C}(t) = A \cdot \vec{x}(t) = A \cdot M \cdot \vec{C},$$

$$M'(t) = A \cdot M(t).$$

Para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo, con condiciones iniciales

$$\vec{X}(t_o) = \vec{X}_o,$$

se tiene que

$$\vec{X}(t_o) = M(t_o) \cdot \vec{C}, \quad \vec{C} = M^{-1}(t_o) \cdot \vec{X}_o.$$

La solución general del sistema homogéneo es

$$\vec{X}(t) = M \cdot M^{-1}(t_o) \cdot \vec{X}_o.$$

Ahora analizaremos la solución de un sistema no homogéneo de la forma  $X' = AX + F$ , la solución del sistema es  $X = X_c + X_p$ , donde  $X_p$  es una solución particular de  $X' =$

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

$AX + F$  y  $X_c$  es la solución del sistema homogéneo asociado formado por  $X' = AX$ . Para encontrar la solución de un sistema no homogéneo se tiene que calcular la  $\vec{X}_c(t)$  que corresponde al sistema homogéneo y después encontrar una solución particular  $\vec{X}_p(t)$  del sistema no homogéneo, de modo que ahora la tarea es encontrar  $X_p$ .

Se tiene que

$$M'(t) = A \cdot M(t), \quad \vec{X}_p' = A \cdot X_p(t) + F(t),$$

$$\vec{X}_c(t) = M(t) \cdot \vec{C}, \quad \vec{X}_p(t) = M(t) \cdot \vec{U}(t),$$

$$\vec{X}_p'(t) = M'(t) \cdot \vec{U}(t) + M(t) \cdot \vec{U}'(t),$$

calculando  $U(t)$  se obtiene

$$\vec{U}(t) = \int_{t_0}^t M^{-1}F(t) dt.$$

La solución particular  $X_p$  para el sistema no homogéneo es

$$X_p(t) = M(t) \int_{t_0}^t M'(t)F(t) dt,$$

entonces la solución general del sistema no homogéneo es:

$$\vec{X}(t) = M \cdot M^{-1}(t_0) \cdot \vec{X}_o + M(t) \int_{t_0}^t M'(t)F(t) dt.$$

### 1.4. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Lineales

En distintas ramas de la ciencia como en física, en la ingeniería y biología se utilizan los sistemas no lineales para modelar por ejemplo circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, procesos químicos, etc. La mayoría de los problemas físicos son implícitamente no lineales en su naturaleza, ejemplos en física de sistemas lineales son relativamente raros. Las ecuaciones no lineales son difíciles de resolver y dan origen a interesantes fenómenos como la teoría del caos [5].

Los sistemas no lineales son sistemas cuyas ecuaciones de evolución en el tiempo no son lineales y no satisfacen el principio de superposición lineal de las soluciones. Las variables dinámicas (velocidad, posición, aceleración, presión, razón de crecimiento, etc) aparecen en forma no lineal

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

$f$ : función no lineal de las variables involucradas.

Empezaremos por mostrar un ejemplo no lineal, la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$(y'')^2 - y^2 = 0,$$

tiene como soluciones

$$y_1 = e^x,$$

$$y_3 = \cos x,$$

$$y_2 = e^{-x},$$

$$y_4 = \operatorname{sen} x.$$

La combinación lineal no es solución de la ecuación diferencial.

$$y = c_1 e^x + c_3 \cos x + c_2 e^{-x} + c_4 \operatorname{sen} x.$$

Los sistemas no lineales son mucho más difíciles de analizar y a menudo exhiben un fenómeno conocido como caos, con comportamientos totalmente impredecibles. Las soluciones analíticas para sistemas no lineales son muy raras, por lo que se usan métodos numéricos, teoría de perturbaciones, análisis cualitativos (geométrico) para entender las soluciones de estos sistemas. Por la complejidad de varios de estos sistemas, se analizan sistemas lineales como una aproximación de los sistemas no lineales [6].

Un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se puede elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema. El sistema dinámico se dice discreto si el tiempo no es continuo; éstos son modelados como relaciones recursivas, tal como la ecuación logística:

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t),$$

donde  $t$  denota los pasos discretos del tiempo y  $x$  es la variable que cambia con éste. Si el tiempo es medido en forma continua, el sistema dinámico continuo resultante es expresado como una ecuación diferencial ordinaria; por ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x),$$

donde  $x$  es la variable que cambia con el tiempo  $t$ . La variable cambiante  $x$  es normalmente un número real, aunque también puede ser un vector en  $R^n$ .

Para describir al sistema en un tiempo  $t$  se necesitan  $N$  variables  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . Al arreglo de  $N$  variables  $\{x_i; i = 1, \dots, N\}$ , se le conoce como vector de estado:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

La colección de vectores EDO's forman un espacio de EDO's  $n$ -dimensional. La regla de evolución puede representarse por medio de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}x_1^n &= F_1[X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)], \\ &\vdots \\ x_N^n &= F_N[X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)].\end{aligned}$$

Dependiendo de la forma que tenga la regla de evolución puede ser un mapa o flujo.

$$X_{t+1} = F(X_t) \Rightarrow \text{Mapa, } t \text{ discreto.}$$

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) \Rightarrow \text{Flujo, } t \text{ continuo.}$$

Existen diferentes sistemas lineales y no lineales, de los cuales es muy difícil poder encontrar soluciones. Por los que se recurren a métodos geométricos y cualitativos ya que es mucho más fácil entender el comportamiento del sistema que hallar su solución general. Algunos sistemas conocidos son el oscilador de van der Pol, la ecuación de Duffing, el sistema de Lorenz, el sistema de Tirón, etc.

En 1963 Edward Lorenz trabajaba en unas ecuaciones, las ecuaciones mundialmente conocidas como ecuaciones de Lorenz, que esperaba predijeran el tiempo en la atmósfera, y trató mediante los ordenadores ver gráficamente el comportamiento de sus ecuaciones. Los ordenadores de aquella época eran muy lentos, por lo que se dice que mientras Lorenz fue a tomar un té mientras el ordenador hacía los cálculos, y cuando volvió se encontró con una figura que ahora se conoce como atractor de Lorenz, donde se observó caos por primera vez como se muestra en la Figura 1.1 [7].

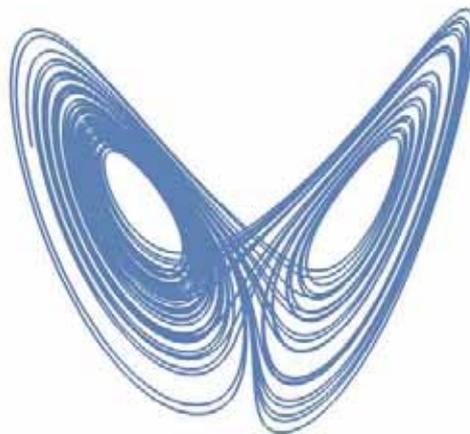


Figura 1.1: Atractor de Lorenz.

El primer sistema de ecuaciones bien caracterizado que exhibía comportamiento caótico fue el sistema de ecuaciones propuesto por Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde  $\sigma$  es el número de Prandtl (viscosidad/conductividad térmica),  $r$  es el número de Rayleigh (John Strutt) (diferencia de temperatura entre base y tope) y  $b$  es la razón entre la longitud y altura del sistema. Lorenz observó dos cosas fundamentales que ocurrían en su ecuación:

- Cualquier diferencia en las condiciones iniciales antes de los cálculos, incluso infinitesimal, cambiaba de forma dramática los resultados. Tan sólo se podía predecir el sistema por cortos períodos. Llevando eso a la meteorología, suponía lo que se llamó efecto mariposa, hipersensibilidad a las condiciones iniciales.
- A pesar de lo anterior, la impredecibilidad del sistema, lejos de ser un comportamiento al azar, tenía una curiosa tendencia a evolucionar dentro de una zona muy concreta del espacio fase, situando una especie de pseudocentro de gravedad de los comportamientos posibles.

Lorenz descubrió que su sistema contenía una dinámica extremadamente errática. Las soluciones oscilaban irregularmente sin llegar a repetirse, aunque lo hacían en una región acotada del espacio fase. Vio que las trayectorias rondaban siempre alrededor de lo que ahora se define como atractor extraño.

La década de 1970 fue el boom de la Teoría del Caos. En 1971 David Ruelle y Floris Takens propusieron una nueva teoría para la turbulencia de fluidos basada en un atractor extraño. Años después el ecólogo teórico Robert May en 1976 encontró ejemplos de caos en dinámica de poblaciones usando la ecuación logística discreta. A continuación llegó el más sorprendente descubrimiento de todos de la mano de Feigenbaum. Él descubrió que hay un conjunto de leyes universales concretas que diferencian la transición entre el comportamiento regular y el caos, por tanto, es posible que dos sistemas evolucionen hacia un comportamiento caótico igual [8].

## 1.5. Sistemas Autónomos y No Autónomos

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) y son dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo [9]. Un sistema dinámico es autónomo si está representado por una ecuación diferencial ordinaria autónoma o no forzada de la forma

$$\dot{X} = F(x), \tag{1.7}$$

mientras que si al sistema dinámico lo modela la EDO no-autónoma o forzada

$$\dot{X} = F(x, t), \tag{1.8}$$

el sistema dinámico es no autónomo. La diferencia entre sistema autónomo y no autónomo radica en que, el sistema autónomo no contiene ningún estímulo externo que force el comportamiento natural de la dinámica del sistema, mientras que el sistema no autónomo sí (aparece explícitamente  $t$ ).

Un sistema es invariante en el tiempo si éste no depende explícitamente del tiempo, se puede concluir que todo sistema autónomo es invariante en el tiempo. En general, un sistema dinámico es invariante en el tiempo si

$$x(0) = x(\delta) = x_0 \Rightarrow x(t) = x(t + \delta) \quad \forall t \in (a, b) \subset \mathbb{R},$$

es decir, para que el sistema sea invariante en tiempo dos trayectorias que pasen por el mismo punto en diferentes tiempos tendrán la misma evolución con un desplazo en el tiempo.

### 1.6. Estabilidad del Sistema

En principio queremos calcular explícitamente todas las soluciones para cada ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales, pero no es posible para la gran mayoría de ellas, por lo que buscamos un comportamiento cualitativo en lugar de resolver las ecuaciones diferenciales explícitamente. Un fenómeno cualitativo de gran interés es la noción de estabilidad de cierto estado o solución de un sistema de ecuaciones diferenciales [10].

La forma de visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico puede ser en forma de serie de tiempo (gráfica de una variable de estado contra tiempo), o en forma de espacio fase. El **espacio fase** de un sistema  $n$ -dimensional  $\dot{X} = F(x)$  es el espacio donde todos los posibles estados de un sistema son representados, cada parámetro del sistema se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada punto del espacio representa cada posible estado de las variables de sistema. En este tipo de representación el tiempo se vuelve un parámetro implícito; como ejemplo se muestra la dinámica del péndulo simple amortiguado como se muestra en la Figura 1.2 una serie de tiempo y el espacio fase de un sistema dinámico.

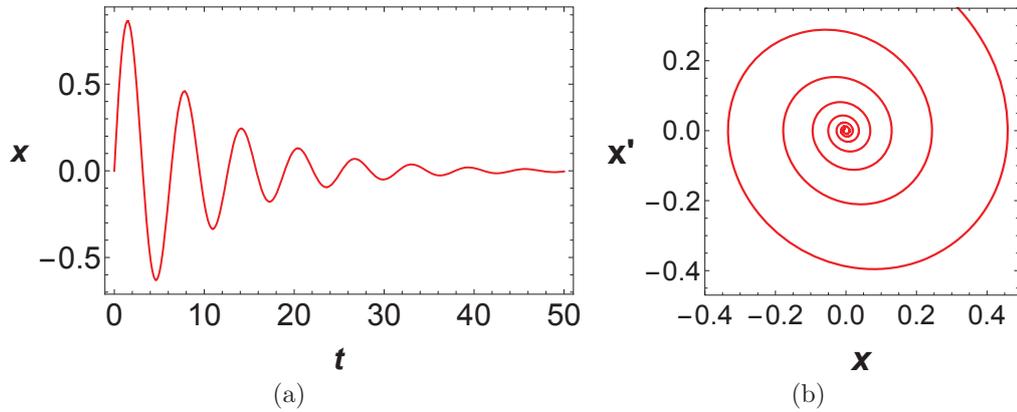


Figura 1.2: En (a) serie de tiempo y en (b) espacio fase de un sistema dinámico.

El espacio fase está descrito por un campo vectorial  $F$  que rige el recorrido de las variables del sistema  $x(t)$  en el tiempo, el recorrido de estas variables recibe el nombre de trayectoria.

Se dice que una singularidad del espacio fase es *estable*, *sumidero* o *atractor* si toda trayectoria que comienza cerca de ella se aproxima a ella conforme el tiempo transcurre, todas las trayectorias se acercan al punto fijo [11]. La importancia de la estabilidad de las singularidades radica en que ésta determina la estabilidad del sistema en el que se presenten las singularidades. En sistemas lineales las singularidades sólo pueden ser puntos, los cuales se conocen como puntos fijos; en cambio los sistemas no lineales pueden presentar puntos fijos, ciclos límite y regiones llamadas atractores extraños.

## 1.7. Caracterización del Espacio Fase

Los puntos  $x^*$  para los cuales  $x^* = F(x^*) = 0$  son llamadas puntos fijos o críticos; en estos puntos el campo vectorial que determina la dirección de las trayectorias en el espacio fase es nulo. Los eigenvalores  $\lambda$  del sistema guardan una estrecha relación con los puntos fijos ya que determinan la forma en que las trayectorias interactúan con el punto fijo [12]. En base al comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos fijos, éstos pueden ser:

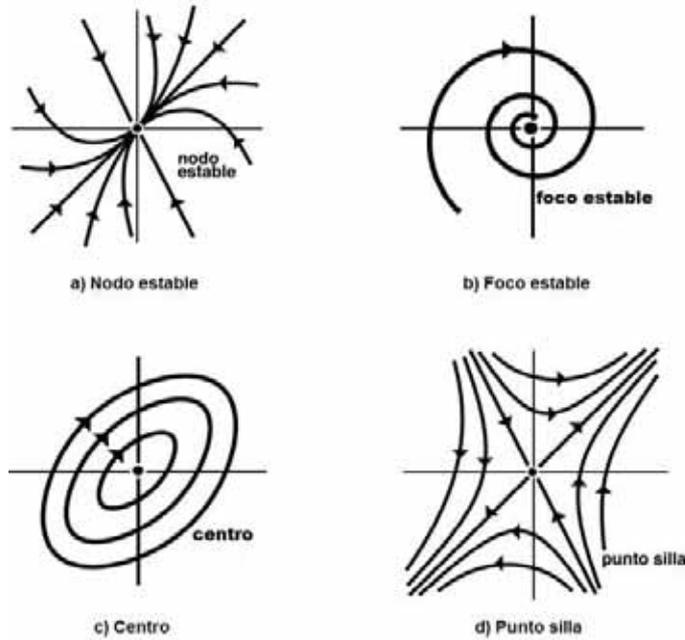


Figura 1.3: Tipos de dinámica asociadas a los diferentes puntos fijos.

- **Nodo**: es un punto tal que en sus proximidades todas las órbitas entran a él. Es asintóticamente estable si las órbitas están direccionadas al punto lo que sucede si los eigenvalores del sistema son reales, negativos y distintos entre sí, ver Figura 1.3 (a). En cambio, si las trayectorias se alejan del nodo, éste es inestable y los eigenvalores del sistema son reales, positivos y diferentes entre ellos.
- **Foco**: Este punto es asintóticamente estable cuando todas las órbitas en sus proximidades tienden a él pero no entran en él; para que esto suceda los eigenvalores del sistema son complejos conjugados con parte real negativa, ver Figura 1.3 (b). Los focos inestables se producen cuando las trayectorias tienden a él en  $t \rightarrow -\infty$  y corresponden a sistemas con eigenvalores complejos conjugados con parte real positiva.
- **Centro**: Es tal que en sus proximidades todas sus órbitas son cerradas. Ninguna órbita entra y ninguna sale. Este punto es neutralmente estable y se presenta cuando los eigenvalores del sistema son imaginarios puros, ver Figura 1.3 (c).
- **Punto Silla**: Las trayectorias inicialmente tienden al punto pero después divergen de él. Este tipo de punto es inestable y se da cuando existen eigenvalores de un sistema que son distintos y de signo opuesto, ver Figura 1.3 (d).

Si se tiene un sistema dinámico lineal  $\dot{X} = AX$ , es fácil conocer qué tipo de punto fijo presenta dicho sistema; simplemente se calculan los eigenvalores  $\lambda$  a partir de la ecuación característica del sistema  $Det(A - \lambda I) = 0$  y se analiza la relación que hay

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

entre los eigenvalores. Los eigenvalores de una matriz están dados por su ecuación característica  $Det(A - \lambda I) = 0$  que para 2 dimensiones es

$$\lambda^2 + \lambda Tr(A) + Det(A) = 0, \quad (1.9)$$

entonces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{[Tr(A)]^2 - 4Det(A)}}{2}. \quad (1.10)$$

Por lo tanto, los eigenvalores dependen de la traza y del determinante de la matriz  $A$ .

Es posible hacer un diagrama general por medio del discriminante de las soluciones de la ecuación característica, graficando  $Tr(A)$  vs  $Det(A)$ , donde existen las relaciones  $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$  y  $Det(A) = \lambda_1 \lambda_2$

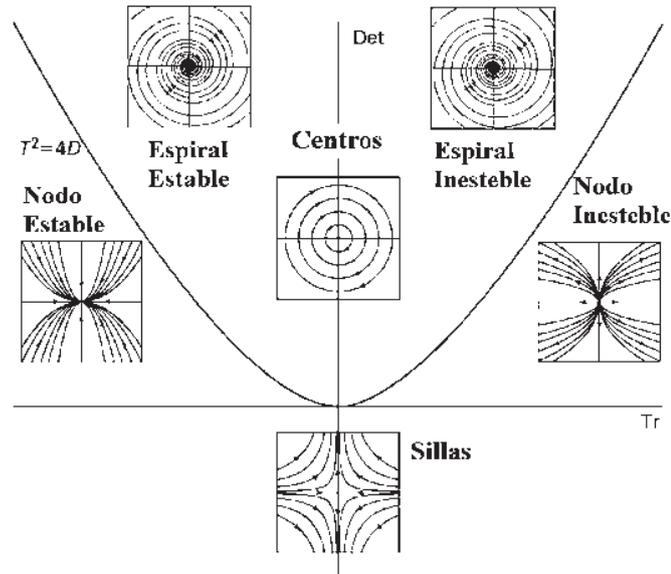


Figura 1.4: Clasificación de puntos fijos.

de la Figura 1.4 podemos observar que

- Si el  $Det(A) < 0$ , los eigenvalores son reales y con signo opuesto tenemos un punto silla.
- Si el  $Det(A) > 0$ , y los eigenvalores son reales con el mismo signo tenemos nodos estables o inestables.
- Si el  $Det(A) > 0$ , y los eigenvalores son complejos conjugados tenemos centros o espirales estables o inestables.

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

- Si el  $Det(A) = 0$ , al menos uno de los eigenvalores es cero y el origen no es un punto fijo aislado, es toda una línea de puntos fijos o un plano de puntos fijos si  $A = 0$ .

Los nodos satisfacen  $Tr(A)^2 - 4Det(A) > 0$  y las espirales satisfacen  $Tr(A)^2 - 4Det(A) < 0$ . La parábola  $Tr(A)^2 - 4Det(A) = 0$  es el borde entre nodos y espirales, los nodos y nodos degenerados viven en esta parábola. La estabilidad de los nodos y las espirales son determinadas por la  $Tr(A)$ , cuando  $Tr(A) < 0$ , ambos eigenvalores son negativos y el punto fijo es estable es mayor que cero para puntos inestables. Los centros estables viven en la línea  $Tr(A) = 0$ , donde los eigenvalores son puramente imaginarios [13].

Un ciclo límite es una trayectoria aislada cerrada, es decir, no existen otras trayectorias cerradas en la vecindad de ésta y por lo tanto las trayectorias vecinas a ésta se mueven en espiral acercándose o alejándose del ciclo límite, ver Figura 1.5.

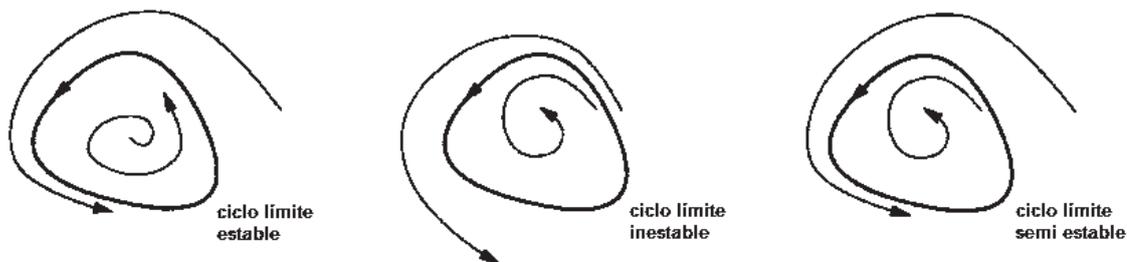


Figura 1.5: Ciclos límite.

Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo, entonces éste es estable. El ciclo es inestable si las trayectorias vecinas se alejan del ciclo; existen casos extraños donde se dice que el ciclo es semi estable y se da cuando algunas trayectorias se alejan del ciclo y otras tienden a él [14].

Los ciclos límite sólo pueden ocurrir en sistemas no lineales; es imposible que sucedan en sistemas lineales. Aunque un sistema lineal puede tener orbitas cerradas, éstas no son aisladas y corresponden a la dinámica causada por un punto fijo tipo centro.

### 1.7.1. Ejemplos

Veremos algunos ejemplos de la estabilidad que tienen algunos sistemas.

#### 1. Problema de Volterra $x$ =conejos, $y$ =zorros

Pretende describir la evolución de la población  $x$  de una especie (presas) que es cazada por otra especie (predadores) cuya población es  $y$ .

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy, \\ \dot{y} &= -y + xy.\end{aligned}$$

- Puntos fijos

$$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (1, 1).$$

- Estabilidad en  $x_1$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontramos la estabilidad del sistema, calculando su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

por lo que es un silla, las direcciones principales son los ejes  $x$  e  $y$  del plano.

- Estabilidad en  $x_2$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i,$$

es un centro cuando  $\delta\lambda > 0 \Rightarrow \delta\dot{y}$ . La curva gira en sentido contrario a las manecillas del reloj.

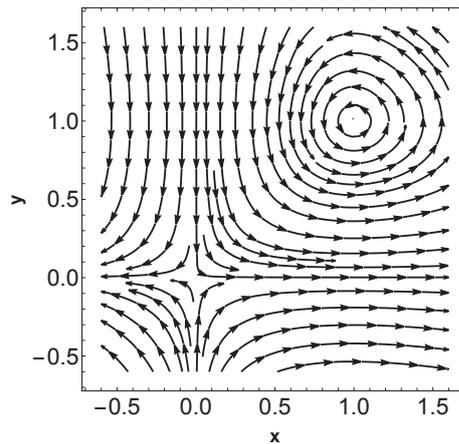


Figura 1.6: Dinámica Silla y Centro.

A continuación algunos sistemas que físicamente no representan nada, pero veremos la dinámica que tienen cada uno de ellos.

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

2. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - 5y, \\ \dot{y} &= x + 3y.\end{aligned}$$

- Punto fijo

$$x_0 = (0, 0).$$

- Estabilidad en  $x_0$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i,$$

luego es un espiral inestable

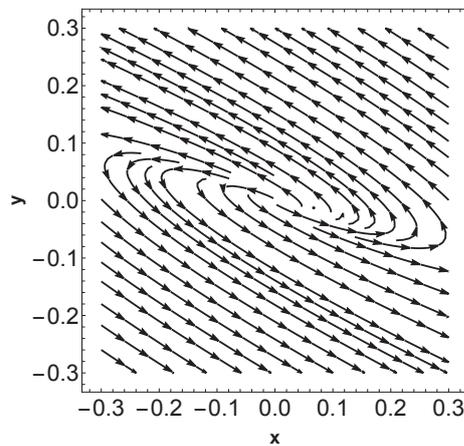


Figura 1.7: Dinámica Espiral Inestable.

3. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + 2y, \\ \dot{y} &= -2x - 2y.\end{aligned}$$

- Punto fijo

$$x_0 = (0, 0).$$

- Estabilidad en  $x_0$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2,$$

es un punto silla

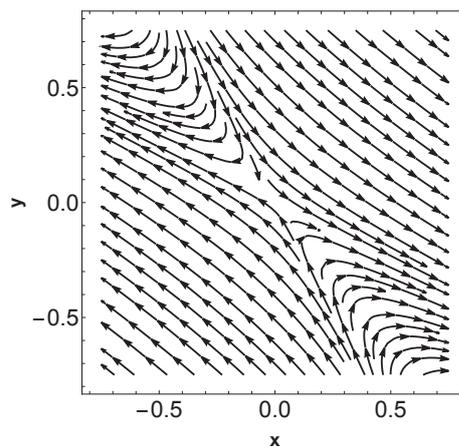


Figura 1.8: Dinámica Silla.

4. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y, \\ \dot{y} &= 3x - 4y. \end{aligned}$$

- Punto fijo

$$x_0 = (0, 0).$$

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

- Estabilidad en  $x_0$

La matriz es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico y sus eigenvalores son:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1,$$

es un punto nodo estable

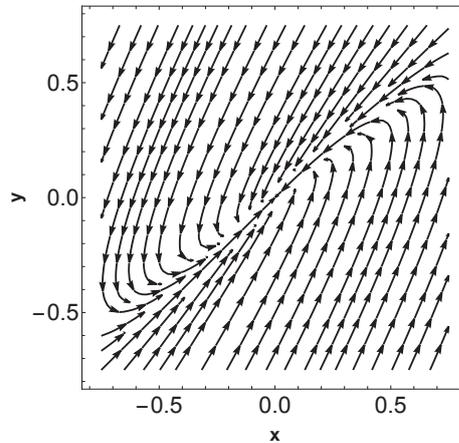


Figura 1.9: Dinámica Nodo Estable.

### 1.8. Teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman nos asegura que los sistemas  $\dot{x} = Ax$  y  $\dot{x} = F(x)$  son localmente topológicamente conjugados (en entornos de 0 y  $x^*$ ) si  $x^*$  es un punto de equilibrio de  $F$  y  $A = J_F(x^*)$  es hiperbólico. El teorema de Hartman-Grobman indica que para estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio de sistemas autónomos mediante un método que es comúnmente usado en las ciencias experimentales, el método de linealización. Un sistema autónomo  $\dot{x} = F(x)$  puede utilizarse su aproximación lineal en algunos casos. Más en concreto: sea  $x^*$  un punto de equilibrio tal que  $F(x^*) = 0$  y su matriz Jacobiana  $J = J_F(x^*)$  no tiene valores propios con parte real nula, entonces  $x^*$  es (asintóticamente) estable si y solo si el origen es (asintóticamente) estable para el sistema linealizado dado por  $\dot{x} = Jx$ .

Por ejemplo consideremos el sistema

$$\dot{x} = x^2 + 2x + y^2, \tag{1.11}$$

$$\dot{y} = -2x^3 + 2y. \tag{1.12}$$

el punto de equilibrio del sistema de ecuaciones 1.11 y 1.12 es  $(0, 0)$ . La matriz Jacobiana en  $(0, 0)$  es

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

y el sistema linealizado será

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x, \\ \dot{y} &= 2y. \end{aligned}$$

Es de esperarse que localmente cerca del punto de equilibrio  $(0, 0)$  el comportamiento asintótico de los sistemas sea parecido.

## 1.9. Teorema de Poincaré-Bendixson

El teorema de Poincaré-Bendixson es uno de los resultados más importantes que ha surgido en el análisis de sistemas no lineales. En resumidas cuentas este teorema dice que las posibilidades en el plano fase (espacio fase de un sistema bidimensional) son muy limitadas: si una trayectoria está confinada a una región cerrada y limitada que no contiene puntos fijos, entonces la trayectoria debe aproximarse a una órbita cerrada eventualmente (ciclo límite) [15].

**Teorema 1.9.1 (Poincaré-Bendixson)** *Supongamos que,*

- *$R$  es un conjunto compacto del plano.*
- *$\dot{x} = f(x)$  es un sistema planar cuyo campo  $f$  es continuamente diferenciable y está definido sobre un conjunto abierto contenido en  $R$ .*
- *$R$  no contiene puntos de equilibrio del sistema.*
- *Existe una trayectoria  $C$  que está confinada en  $R$ , es decir que comienza en  $R$  ya permanece en  $R$  para todo tiempo futuro.*

*Entonces o bien  $C$  es una órbita cerrada, o bien tiende a una órbita cerrada cuando  $t \rightarrow \infty$  En cualquier caso,  $R$  contiene una órbita cerrada.*

Este teorema no aplica para sistemas tridimensionales o de mayor dimensión, cuyas órbitas pueden vagar sin patrón fijo por siempre dentro de una región limitada sin converger a un punto fijo u órbita cerrada, por lo que el teorema de Poincaré-Bendixson nos dice cuando puede aparecer un ciclo límite en el espacio de fase en 2 dimensiones. En algunos casos, las trayectorias son atraídas a un atractor extraño: un conjunto fractal cuyo movimiento es aperiódico y sensible a las condiciones iniciales del sistema.

## CAPÍTULO 1. SISTEMAS DINÁMICOS

---

A este tipo de comportamiento se le conoce como caos, y se presenta para sistemas de orden  $n \geq 3$ .

Por ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -x + y(1 - x^2 - 2y^2).\end{aligned}$$

Obsérvese que el origen es el único punto fijo del sistema. Para ello debemos construir una región anular en la cual podamos aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson, Para ello calculamos la derivada de la función

$$V(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2},$$

a lo largo de las soluciones del sistema, así

$$V'(x, y) = y^2(1 - x^2 - 2y^2).$$

Por lo tanto  $V(x, y) \geq 0$  para  $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ , y  $V'(x, y) \leq 0$  para  $x^2 + y^2 > 1$ , cualquier solución que inicie en la región anular  $\frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 1$  permanecer en esta región anular para  $t \geq 0$ . Ya que el origen no está contenido en la cerradura de la región anular entonces es posible aplicar el teorema de Poincaré-Bendixson. Por lo tanto existe al menos una órbita periódica en la región anular.

# Capítulo 2

## Dinámica no lineal de los osciladores de van der Pol y de Duffing

### 2.1. Introducción

Una de las áreas que han contribuido a la comprensión del fenómeno del caos, es la teoría de las oscilaciones, donde varios modelos eléctricos y electromecánicos exhiben un comportamiento caótico. Las primeras aportaciones provienen de las investigaciones de Duffing con un modelo de una varilla vibrante electromagnetizada, y de van der Pol, quien estudió los circuitos eléctricos con un tridiodo cuya resistencia varía con la intensidad de la corriente.

El estudio formal del oscilador de Duffing, cabe decir en el contexto de la teoría del caos, fue efectuado por Holmes y Moon en 1979. Ellos demostraron que conforme ocurría la variación de un parámetro, el oscilador podía exhibir una secuencia de bifurcaciones del tipo duplicación del periodo, hasta alcanzar un estado caótico.

Van der Pol pudo notar el comportamiento caótico del oscilador que lleva su nombre, aunque no le dedicó más atención. El estudio moderno del oscilador forzado de van der Pol se le debe a Levi 1981.

### 2.2. Oscilador van der Pol

El oscilador de van der Pol fue descrito por el ingeniero y físico holandés Balthasar van der Pol mientras trabajaba en philips company (Holanda), van der Pol encontró oscilaciones estables que llamó oscilaciones de relajación [25], conocidas en la actualidad como ciclos límite en circuitos que usaban válvulas de vacío. Cuando esos circuitos se hacen funcionar cerca del ciclo límite entran en acoplamiento y la señal entra en fase con la corriente. Van der Pol y su colega, Van Der Mark, informaron en el número de septiembre de 1927 de Nature [28] que, para determinadas frecuencias aparecía un ruido irregular, siempre cerca de las frecuencias de acoplamiento. Fue uno de los primeros descubrimientos experimentales del caos.

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

La ecuación de van der Pol tiene una larga historia en la Física y la Biología. Por ejemplo, en Biología, Fitzhugh y Nagumo aplicaron la ecuación a un campo bidimensional en el modelo de FitzHugh-Nagumo para describir el potencial de acción de las neuronas [29, 30]. También se ha usado en sismología para modelar el comportamiento de dos placas en una falla [5]. Aunque se conoce mejor a van der Pol por su trabajo con circuitos eléctricos, descubrió una amplia variedad de sistemas que presentan oscilaciones: el arpa eólica, un martillo neumático, el rechinado de un cuchillo en un plato, el ondear de una bandera al viento, el ocasional zumbido de una llave de agua, la recurrencia periódica de epidemias y crisis económicas y, por último, el latido del corazón [6]. Van der Pol agrupó varios fenómenos en una sola categoría de sistemas que presentan oscilaciones periódicas.

El oscilador de van der Pol es un sistema dinámico consistente en un circuito eléctrico no lineal utilizado a principios del siglo pasado. Este oscilador con amortiguamiento no lineal está descrito por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden homogénea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (2.1)$$

donde  $x$  es la variable dinámica y  $\mu$  el parámetro que indica la no linealidad y la fuerza de amortiguamiento.

### 2.2.1. Análisis de la ecuación de van der Pol

De la Ec. (2.1) podemos ver que cuando  $\mu = 0$  el oscilador se comporta como un oscilador armónico simple. Sin embargo, conforme aumenta el valor de  $\mu$  las formas de onda resultantes se asemejan a las de un oscilador de relajación. A medida que aumenta  $\mu$ , el circuito es más inestable, con lo que las variables abandonarán la vecindad de origen con mayor rapidez [6]. Para poder entender mejor el comportamiento de este oscilador es necesario empezar por resolver la ecuación.

Cuando  $x \ll 1$ , el término cuadrático  $x^2$  es despreciable y la ecuación del sistema se convierte en una ecuación diferencial lineal con amortiguamiento negativo  $-\mu$ , así

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2.2)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden se puede representar, como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu y - x. \end{aligned}$$

Los puntos  $x^*$  para las cuales  $x^* = F(x^*) = 0$  se conocen como puntos fijos o críticos. Calculando el punto fijo del sistema, se tiene como punto fijo  $P(x = 0, y = 0)$ .

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$\begin{aligned}y &= 0, \\ \mu y - x &= 0.\end{aligned}$$

Si se tiene un sistema dinámico lineal  $\dot{X} = AX$ , es fácil conocer qué tipo de punto fijo presenta dicho sistema; simplemente se calculan los eigenvalores  $\lambda$  a partir de la ecuación característica del sistema  $Det(A - \lambda I) = 0$  y se analiza la relación que hay entre los eigenvalores. Los valores propios de una matriz están dados por su ecuación característica  $Det(A - \lambda I) = 0$ , que para 2 dimensiones es

$$\lambda^2 - \lambda Tr(A) + Det(A) = 0, \quad (2.3)$$

entonces:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{[Tr(A)]^2 - 4Det(A)}}{2}. \quad (2.4)$$

Se observa que los valores propios dependen de la traza ( $Tr(A)$ ) y del determinante ( $Det(A)$ ) de la matriz  $A$ . La matriz que corresponde al sistema lineal es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix},$$

donde  $Tr(A) = \mu$  y  $Det(A) = 1 > 0$ . De esta manera, como se puede observar en el diagrama de bifurcación traza-determinante Fig. 1.4, no tendremos puntos Silla y el punto fijo  $P(x = 0, y = 0)$  es inestable (espirales inestables  $0 < \mu < 2$  y nodos inestables para  $\mu \geq 2$ ) Fig. 2.1. Por lo tanto cuando  $x$  es pequeño el sistema es inestable alrededor del punto fijo.

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

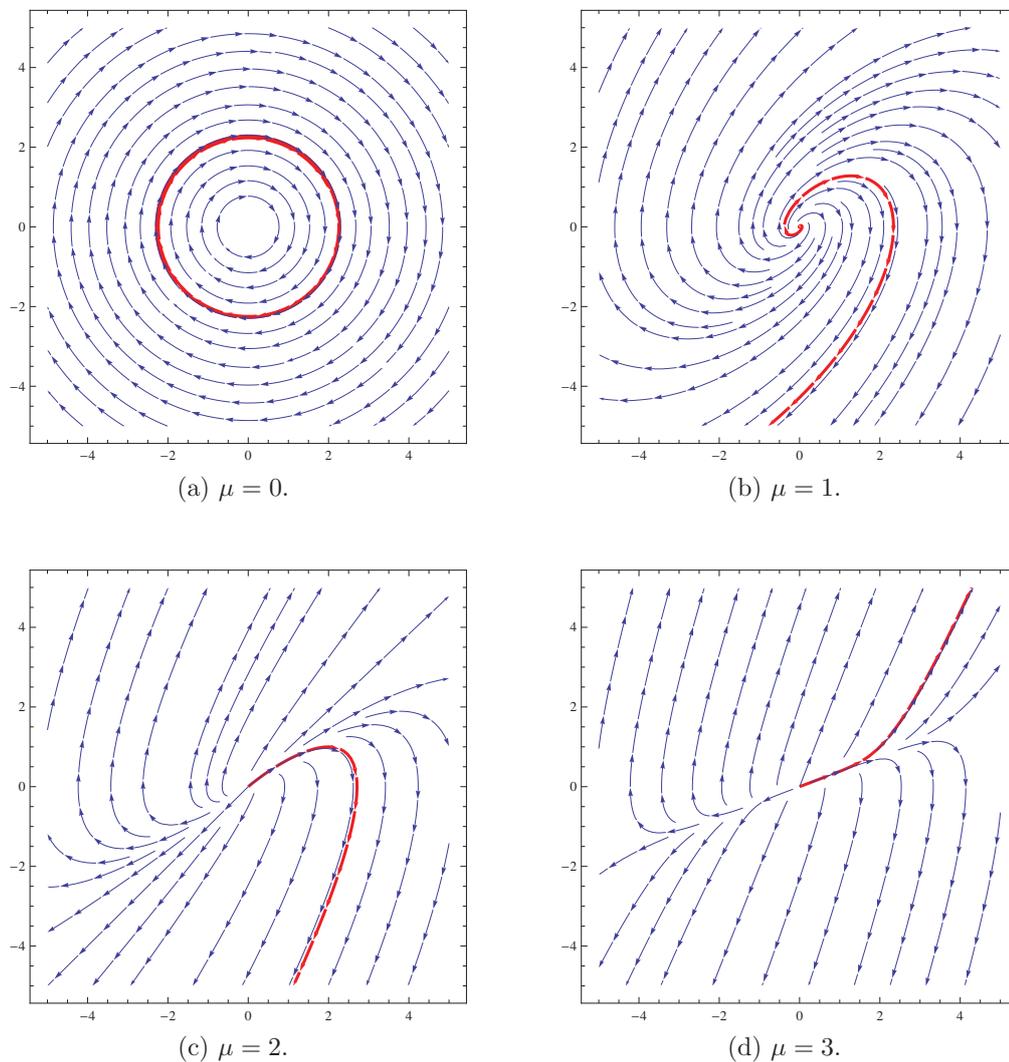


Figura 2.1: Diagramas de fase del sistema para ciertos valores de  $\mu$ .

Para el caso cuando  $x$  es grande, el término  $x^2$  es el dominante y el amortiguamiento es positivo. Por consiguiente, se espera que el comportamiento esté restringido a alguna región alrededor del punto fijo. El sistema de van der Pol satisface el Teorema de Liénard [9], a partir de la Ec. (2.1) tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x,\end{aligned}$$

donde  $f(x) = -\mu(1 - x^2)$  y  $g(x) = x$ . Este sistema se puede reescribir en la forma de la ecuación de Liénard.

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \tag{2.5}$$

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

**Teorema 2.2.1 (Teorema de Liénard)** *Si en la Ec. (2.5)  $f(x)$  y  $g(x)$  satisfacen las siguientes propiedades*

- $f(x)$  y  $g(x)$  son continuamente diferenciables para todo  $x$
- $g(-x) = -g(x)$ , para todo  $x$  la función  $g(x)$  es impar
- $g(x) > 0$  para todo  $x > 0$
- $f(-x) = f(x)$ , para todo  $x$  la función  $f(x)$  es par
- la función impar  $F(x) = \int_0^x f(u)du$  tiene exactamente un cero positivo en  $x = a$ , es negativa para  $0 < x < a$ , es positiva y no decreciente para  $x > a$ , y  $F(x) \rightarrow \infty$ , cuando  $x \rightarrow \infty$

entonces el sistema Ec. (2.5) tiene un único ciclo límite estable en torno al origen del espacio fase.

Entonces, de acuerdo al teorema de Liénard el sistema original de van der Pol tiene una única trayectoria cerrada que rodea al origen y a ella tienden en espiral todas las demás trayectorias, asegurándose con esto que hay un ciclo límite estable en el espacio fase. Usando la transformación de Liénard

$$y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{\dot{x}}{\mu}, \quad (2.6)$$

se obtiene

$$\dot{x} = \mu(x - \frac{x^3}{3} - y). \quad (2.7)$$

Derivando la Ec. (2.6) y despejando  $x$  de la Ec. (2.1).

$$\dot{y} = \dot{x}(1 - x^2) - \frac{\ddot{x}}{\mu}, \quad (2.8)$$

$$\frac{x}{\mu} = -\frac{\ddot{x}}{\mu} + (1 - x^2)\dot{x}, \quad (2.9)$$

igualando las Ecs (2.8) y (2.9)

$$\dot{y} = \frac{x}{\mu}. \quad (2.10)$$

Por lo tanto la Ec. (2.1) puede reescribirse como el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(x - \frac{x^3}{3} - y), \\ \dot{y} &= \frac{x}{\mu}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

Cuando  $\mu \ll 1$ , es conveniente reescribir la Ec. (2.1) como el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - y, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Siguiendo los pasos anteriores para el cálculo de puntos fijos, nuevamente se obtiene el punto fijo  $P(0, 0)$ . Consideremos la Ec. (2.12). Si hacemos  $f = \mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - y$ ,  $g = x$  y derivamos parcialmente cada una de ellas con respecto a  $x$  y  $y$  se obtiene

$$\begin{aligned}f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} &= \mu(1 - x^2), & f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} &= -1, \\ g_x \equiv \frac{\partial g}{\partial x} &= 1, & g_y \equiv \frac{\partial g}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

La matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto fijo  $P(0, 0)$  para  $\mu \ll 1$  está dado por:

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde  $Tr(J) = \mu$ ,  $Det(J) = 1$ , por lo que alrededor del punto de equilibrio se obtienen espirales inestables. El punto de equilibrio en estas condiciones resultó ser, una vez más, inestable (repulsor) Fig. 2.2.

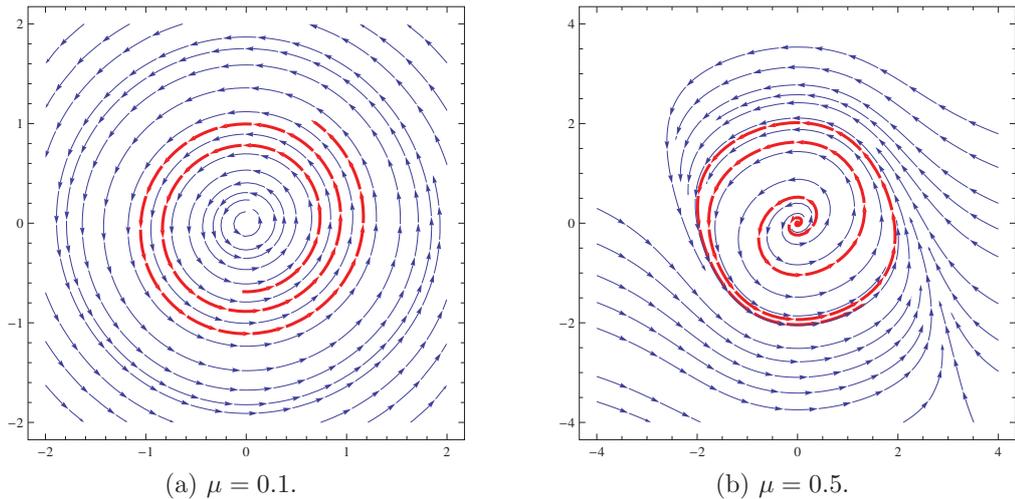


Figura 2.2: Diagrama de fase del sistema para ciertos valores de  $\mu$ .

En el caso límite, para  $\mu = 0$  (amortiguamiento nulo) el sistema es lineal, preserva la energía y se tiene que la matriz del sistema es

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE  
VAN DER POL Y DE DUFFING**

---

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde la  $Tr(\mathbf{B}) = 0$ ,  $Det(\mathbf{B}) = 1$ . Para este caso se obtienen centros Fig. 2.3.

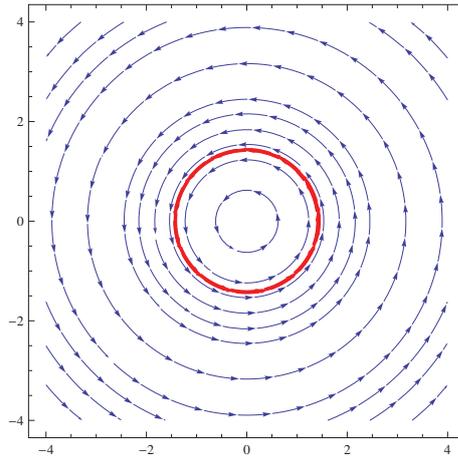


Figura 2.3: Diagrama de fase del sistema para  $\mu = 0$  de la matriz  $\mathbf{B}$ .

El polinomio característico es  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , los valores propios son  $\lambda = \pm i$ . Para  $\lambda_1 = i$ :

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para  $\lambda_1 = i$  se tiene que,  $y = -ix$ , por lo tanto el vector propio asociado es

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Para  $\lambda_1 = -i$  se tiene que,  $y = ix$ , por lo tanto el vector propio asociado es

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Entonces, la solución del sistema en terminos de los vectores propios se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t),$$

de modo que agrupando términos y reescibiendo nuevas constantes  $D$  y  $E$  se obtiene

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$x = D \cos t + E \sin t, \quad (2.13)$$

$$y = D \sin t - E \cos t. \quad (2.14)$$

Para obtener la solución aproximada para pequeños valores de  $\mu$  ( $\mu \ll 1$ ) se consideran nuevas variables  $(u, v)$ , que rotan con la solución sin perturbarla, es decir

$$\begin{aligned} u &= x \cos t + y \sin t, \\ v &= -x \sin t + y \cos t. \end{aligned}$$

Sustituyendolas en las Ecs. (2.13) y (2.14) se obtiene

$$\dot{u} = \mu \left( u \cos t - v \sin t - \frac{1}{3}(u \cos t - v \sin t)^3 \right) \cos t, \quad (2.15)$$

$$\dot{v} = -\mu \left( u \cos t - v \sin t - \frac{1}{3}(u \cos t - v \sin t)^3 \right) \sin t. \quad (2.16)$$

Como  $\dot{u}$  y  $\dot{v}$  son  $O(\mu)$ , la velocidad cambiante de  $u$  y  $v$  es mucho menor que la de  $\cos t$  y  $\sin t$ . Entonces se puede aplicar la teoría del promedio a las Ecs (2.15) y (2.16). Integrando los miembros derechos de estas ecuaciones con respecto a  $t$  desde 0 a  $T = 2\pi$  y manteniendo fijas a  $u$  y  $v$  se obtiene

$$\dot{u} = \frac{\mu}{8} u ((4 - (u^2 + v^2))), \quad (2.17)$$

$$\dot{v} = \frac{\mu}{8} v ((4 - (u^2 + v^2))). \quad (2.18)$$

Para mostrar que el sistema tiene un ciclo límite hacemos un cambio de variables

$$r^2 = u^2 + v^2, \quad (2.19)$$

derivando

$$r\dot{r} = u\dot{u} + v\dot{v}.$$

Sustituyendo las Ecs. (2.17) y (2.18) en la Ec. (2.19) y usando  $r^2 = u^2 + v^2$ , se tiene que

$$r\dot{r} = \frac{\mu}{8} u^2 ((4 - (u^2 + v^2))) + \frac{\mu}{8} v^2 ((4 - (u^2 + v^2))),$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{r} = \frac{\mu}{8} r(4 - r^2). \quad (2.20)$$

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

Si  $2 < r$ ,  $\dot{r} < 0$  el nodo es pozo o atractor pero esto no podría suceder porque en casos anteriores, se demostró que el punto crítico es un punto repulsor. Para  $r = 2$  se tiene un equilibrio estable del sistema. Por lo tanto, el sistema original de la Ec. (2.12) tiene un ciclo límite con  $r = 2$  para pequeños valores de  $\mu$ , como se muestra en la Fig. 2.4.

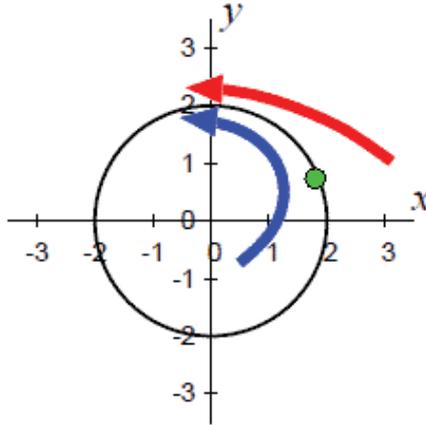


Figura 2.4: Flujos del oscilador de van der Pol para  $\mu \ll 1$ .

Cuando  $\mu \gg 1$ , es conveniente usar la Ec. (2.11). En este caso, si hacemos  $f = \mu(x - \frac{x^3}{3} - y)$ ,  $g = \frac{x}{\mu}$  y derivamos parcialmente cada una de ellas con respecto a  $x$ ,  $y$  y con respecto a  $y$  obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu(1 - x^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\mu,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\mu}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

La matriz Jacobiana del sistema evaluando en el punto fijo  $P(0, 0)$  para  $\mu \gg 1$ :

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -\mu \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix},$$

de donde  $Tr(J) = \mu$ ,  $Det(J) = 1$ , por lo que el punto de equilibrio es un nodo inestable, es decir, está expulsando sus trayectorias. Una vez más se demuestra que el punto de equilibrio del sistema es repulsor Fig 2.5.

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

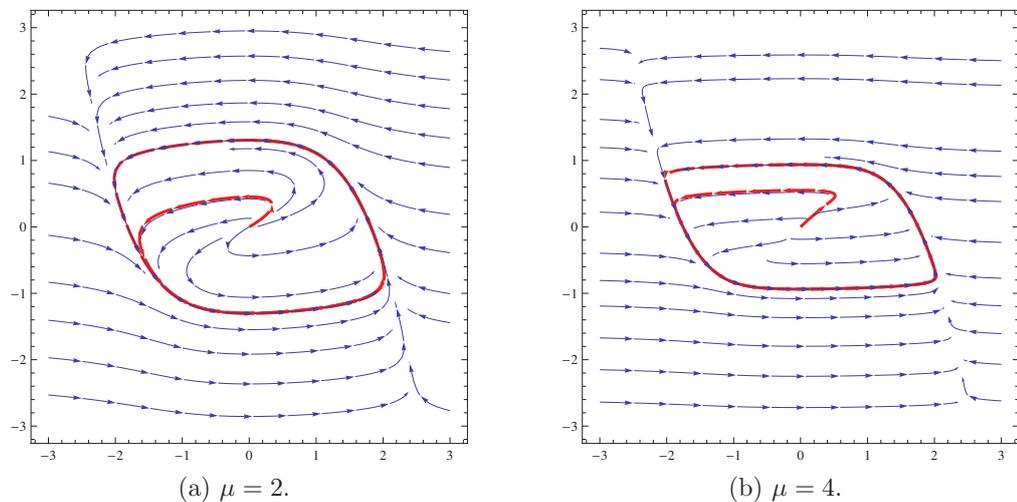


Figura 2.5: Diagrama de fase del sistema para ciertos valores de  $\mu$ .

En los términos que describe Kanamaru [7] cuando el sistema está fuera de la curva

$$y = x - \frac{x^3}{3},$$

se obtiene la relación  $|\dot{x}| \gg |\dot{y}| = O(1/\mu)$ . Entonces el sistema se mueve rápidamente en dirección horizontal. Cuando el sistema entra en la región donde  $|x - x^3/3 - y| = O(1/\varepsilon^2)$ ,  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  son comparables porque ambas son  $O(1/\mu)$ . Entonces el sistema discurre despacio a lo largo de la curva y, eventualmente, sale de esta región como se muestra en la Fig. 2.6. Se puede observar que el sistema tiene un ciclo límite estable.

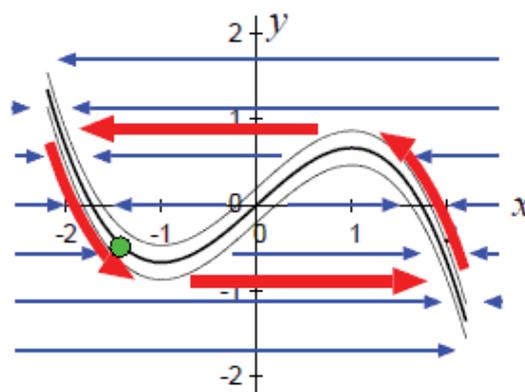


Figura 2.6: Flujos del oscilador de van der Pol para  $\mu \gg 1$ .

También se ha observado que el periodo de oscilación está determinado en especial por el tiempo durante el cual el sistema permanece alrededor de la función cúbica,

donde ambas  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  son  $O(1/\mu)$ . Por tanto, el periodo de oscilación estimado es aproximadamente  $T \propto \mu$ .

Cuando van der Pol, en 1927, desarrolló la Ec. (2.1) con un circuito eléctrico formado por dos resistencias  $R$  y  $r$ , un capacitor  $C$ , una inductancia y un tetrodo, el periodo de oscilación determinado en el circuito fue  $\mu = RC$ . Como  $RC$  es la constante del tiempo de relajación en un circuito  $RC$ , van der Pol nombró a esta oscilación como oscilación de relajación. Las características de la oscilación de relajación son el comportamiento asintótico lento y el salto discontinuo repentino hacia otro valor Fig. 2.6. Usando unas cuantas oscilaciones de relajación, van der Pol y van der Mark modelaron la actividad eléctrica del corazón en 1928.

### 2.2.2. Oscilador de van der Pol forzado

Es posible aplicar una fuerza externa al sistema para obtener comportamientos caóticos. Se utiliza un forzamiento  $f(t) = A \cos(\omega t)$  y se escogen los parámetros  $A = 1$  y  $\omega = 0.4$ . La ecuación forzada de van der Pol es

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = f(t). \quad (2.21)$$

El sistema bidimensional para el oscilador forzado sería

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= f(t) + \mu(1 - x^2)u - x. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para analizar el sistema forzado, se toman los valores  $\mu = \pm 0.8$  y los descritos anteriormente para la amplitud  $A$  y la velocidad angular  $\omega$ . Normalmente no se utilizan los valores negativos del parámetro  $\mu$  debido a que en general, da lugar a órbitas inestables. Sin embargo, se analizan para resaltar el comportamiento caótico de los sistemas. Se usan las condiciones iniciales  $t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = 0.5$  y  $u(t_0) = 0$ . Resolviendo el sistema usando el método numérico de Runge Kutta de cuarto orden durante 500 segundos, se obtienen la siguientes trayectorias del espacio fase

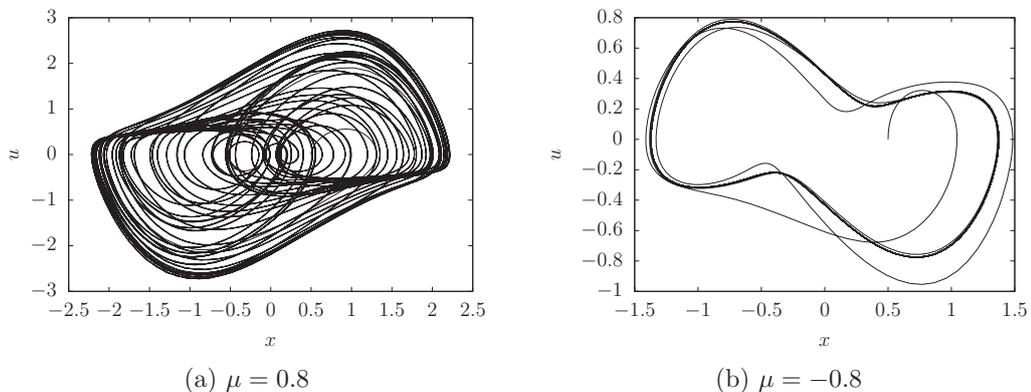


Figura 2.7: Espacio fase del sistema forzado.

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

si se varía un poco la condición inicial  $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$ , la trayectoria del sistema cuando  $\mu = 0.8$  es similar a la imagen 2.7 (a). Para el valor  $\mu = -0.8$  en menos de 12 segundos, el sistema diverge al infinito negativo. Por otro lado, si para el mismo  $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$  se corre la simulación con las condiciones iniciales  $x(t_0) = 0.2$  y  $u = 0$  para  $\mu = -0.8$ , se obtiene algo similar a la figura 2.7 (b).

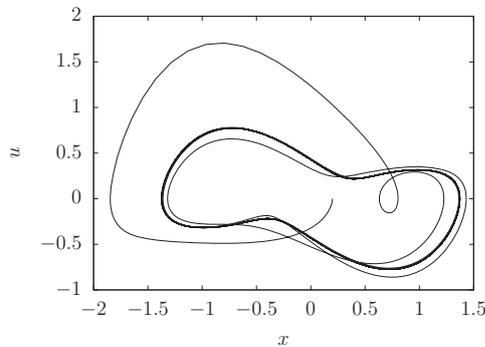


Figura 2.8: Espacio fase del sistema forzado con  $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$ .

Éstos valores para los parámetros dan lugar a un ciclo semiestable, es decir, sólo algunas órbitas son estables.

Utilizando el tiempo inicial  $t_0 = 0$  y modificando el valor de la amplitud del forzamiento  $A$ , se obtienen diferentes trayectorias para el sistema. Con el parámetro  $\mu = -0.8$ , cuando  $A > 1$ , todas las soluciones divergen y si  $A < 1$ , las soluciones en el espacio fase son ciclos similares a 2.7 (b) que se van degenerando a elipses conforme  $A \rightarrow 0$ . Para  $\mu = 0.8$ , si  $A < 1$ , las soluciones obtenidas son trayectorias en el espacio fase similares a las de 2.7 (a) y si  $A > 1$  el sistema regresa a un ciclo estable similar al ciclo límite del sistema sin forzamiento conforme  $A \gg 1$ .

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING**

---

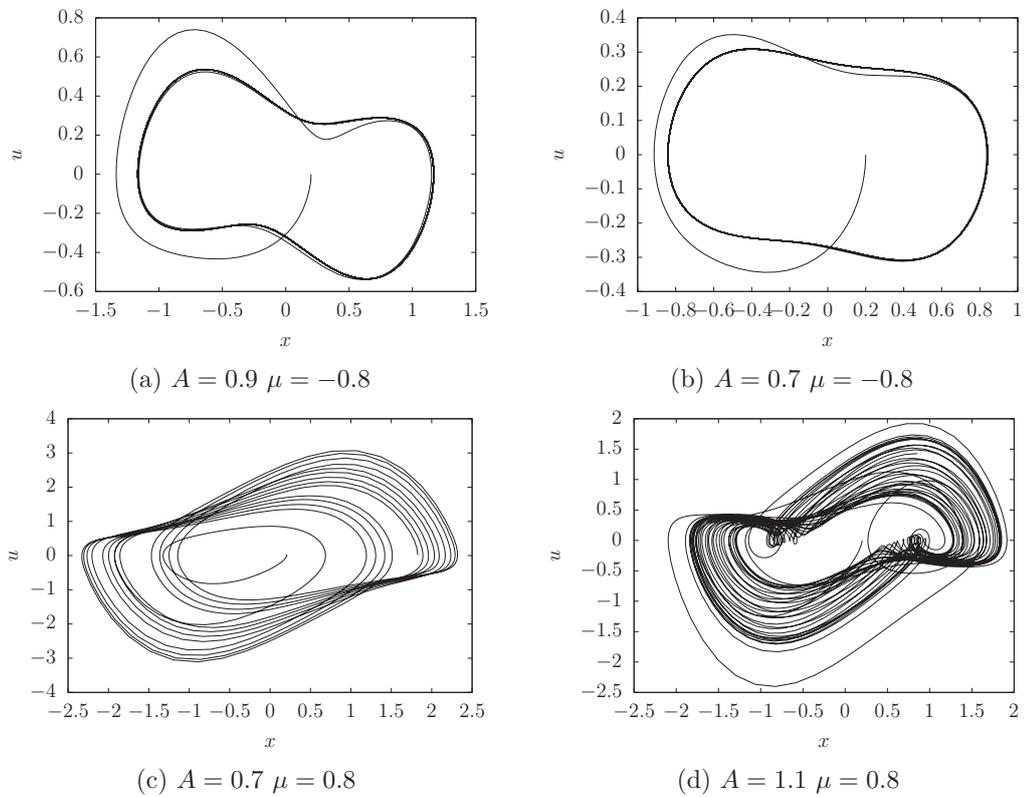


Figura 2.9: Espacios fase del sistema variando la amplitud del forzamiento.

Al variar el parámetro  $\omega$ , las trayectorias del sistema son las siguientes

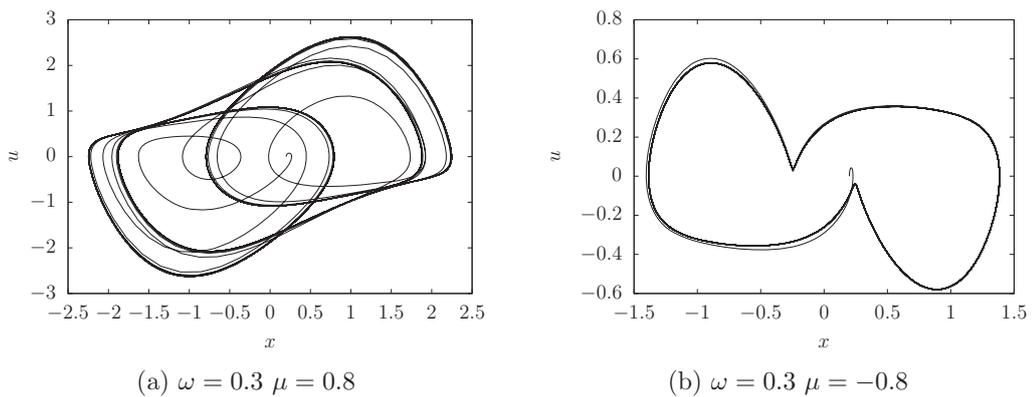


Figura 2.10: Espacios fase del sistema variando  $\omega$ .

### 2.2.3. Oscilador de van der Pol con potencial $\Phi^4$

Es posible representar la ecuación de van der Pol como una ecuación de la siguiente forma

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = A\cos(\omega t). \quad (2.23)$$

En la ecuación normal de Van der Pol, el potencial  $U(x)$  sería una función  $U(x) = \frac{x^2}{2}$ . sea  $U(x)$  un potencial definido como  $U(x) = \frac{\beta}{4}x^4 + \frac{\gamma}{3}x^3 + \frac{\alpha}{2}x^2$ . Al sustituir en la ecuación (2.23), se obtiene

$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} + \beta x^3 + \gamma x^2 + \alpha x = A\cos(\omega t), \quad (2.24)$$

haciendo un cambio de variable como en las ecuaciones anteriores, se obtiene el sistema bidimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= A\cos(\omega t) + \mu(1 - x^2)u - (\beta x^3 + \gamma x^2 + \alpha x). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para calcular los puntos fijos, se examina el sistema sin forzamiento. Se busca el vector  $\vec{x}_f = (z, u_f)$  tal que  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{u} = 0$ . Si  $u_f = 0$ , se deduce que

$$U'(z) = 0, \quad \beta z^3 + \gamma z^2 + \alpha z = z(\beta z^2 + \gamma z + \alpha) = 0.$$

En la ecuación sin forzar, los puntos fijos para  $x$  coinciden con los puntos críticos del potencial  $U(x)$ . Resolviendo la ecuación anterior, los puntos fijos son

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\alpha}}{2\beta}, \quad z_3 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\beta\alpha}}{2\beta}. \quad (2.26)$$

Cuando  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$  se tienen 2 puntos fijos de equilibrio  $(0, 0)$  y  $(\frac{-\gamma}{2\beta}, 0)$ . Ahora para analizar la estabilidad de los puntos fijos, calcular la matriz jacobiana resulta en

$$\mathbf{J}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu ux - U''(x) & \mu(1 - x^2) \end{pmatrix}.$$

Calculando la doble derivada es  $U''(x) = 3\beta x^2 + 2\gamma x + \alpha$ . Evaluando  $\mathbf{J}(z, 0)$  obtenemos la matriz

$$\mathbf{J}(z, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(z) & \mu(1 - z^2) \end{pmatrix},$$

donde el polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \mu(1 - z^2)\lambda + U''(z) \quad (2.27)$$

y las soluciones son

$$\lambda = \frac{\mu(1 - z^2) \pm \sqrt{\mu^2(1 - z^2)^2 - 4U''(z)}}{2}. \quad (2.28)$$

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

El análisis de estabilidad es análogo al desarrollo anterior, pero por simplicidad, se cambia a la notación  $T = \lambda_1 + \lambda_2$ , lo que en este caso es  $T = \mu(1 - z^2)$  y  $D = \lambda_1\lambda_2$ ,  $D = U''(z)$ .

Los potenciales de mayor estudio son los de tipo simétrico. Dichos potenciales son de la forma

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_k \frac{x^{2k}}{2k}.$$

Es importante notar que las potencias son pares debido a que los potenciales de orden impar representan soluciones inestables que divergen. Si se toma el potencial  $U(x)$  de la ecuación del oscilador de Duffing (se analizará más adelante), la ecuación se conoce como oscilador Duffing-van de Pol. Dicho potencial tiene la forma

$$U(x) = \frac{\beta}{4}x^4 + \frac{\alpha}{2}x^2, \quad (2.29)$$

donde se consideran tres casos para el sistema: (i) potencial de pozo simple ( $\alpha > 0, \beta > 0$ ), (ii) Pozo doble ( $\alpha < 0, \beta > 0$ ) y (iii) doble joroba ( $\alpha > 0, \beta < 0$ ). Estos tres casos resultan en el modelo central clásico para describir fenómenos no lineales exhibiendo variedad de comportamiento caótico y regular. Se analizará el caso (ii) doble pozo. Para este estudio se utilizan los valores de  $\beta = \pm 1$  y  $\alpha = \pm 1$

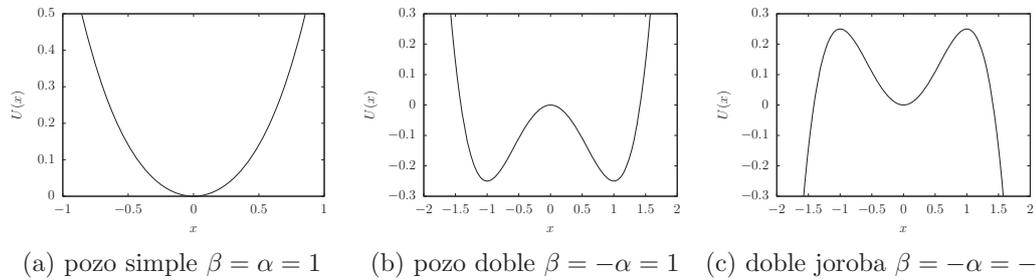


Figura 2.11: Diferentes potenciales variando  $\beta$  y  $\alpha$ .

Para el sistema sin forzamiento y con potencial simétrico, el sistema (2.25) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= \mu(1 - x^2)u - (\beta x^3 + \alpha x). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (2.26) se obtienen los siguientes valores de  $z$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{-0 + \sqrt{0 - 4\beta\alpha}}{2\beta} = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, \quad z_3 = -\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},$$

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

lo que contruye los puntos fijos  $(0,0)$  y  $(\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0)$ . Para analizar su estabilidad se sustituyen los valores en la ecuación (2.28) y se obtienen los eigen valores. Para el punto  $(0,0)$  se calcula

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu - 4U''(0)}}{2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\alpha}}{2}.$$

Se toman los valores  $\beta = 1$ ,  $\alpha = -1$  y  $\mu = 0.8$  para continuar. De esta manera, el punto fijo  $(0,0)$  tiene eigenvalores de  $\lambda_1 = 1.477$  y  $\lambda_2 = -0.677$ . Calculando la traza y el determinante observamos que  $T = 0.8$  y  $D = -1$ , lo que indica que  $(0,0)$  tiene dinámica de silla. Para  $(\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}},0) = (\pm 1,0)$ , los eigenvalores son  $\lambda_1 = \pm i\sqrt{2}$  por lo tanto los puntos fijos  $(\pm 1,0)$  tienen dinámicas de centros.

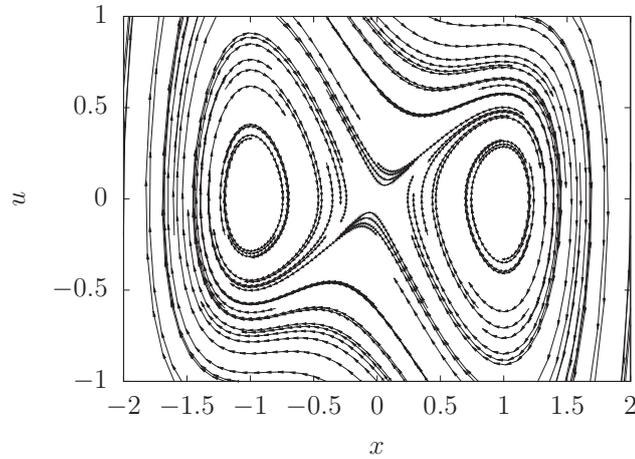


Figura 2.12: Retrato fase del sistema sin forzamiento.

Para las siguientes simulaciones del sistema forzado van der Pol-Duffing, se utiliza el sistema de ecuaciones (2.25) y los parámetros con los valores:  $A = 0.6$ ,  $\omega = 0.4$ ,  $\beta = -\alpha = 1$ ,  $\mu = 0.8$ . Corriendo una simulación del sistema desde  $t_0$  durante 800 segundos con las condiciones iniciales  $x_0 = 0.8$  y  $u_0 = 1$ , se obtiene la siguiente trayectoria del espacio fase.

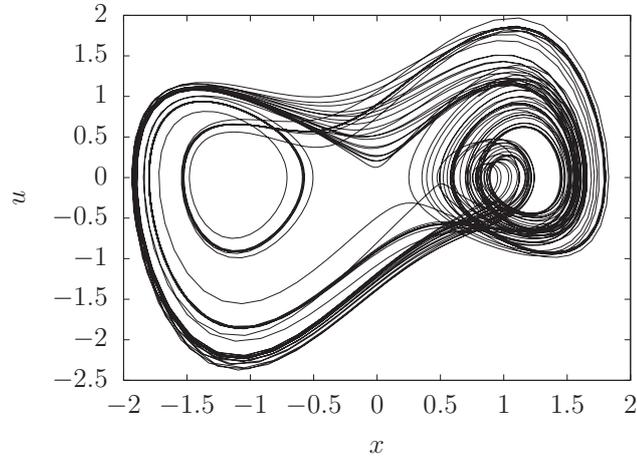


Figura 2.13: Espacio fase del sistema Duffing-van der Pol forzado.

Los diagramas de bifurcación se computaron con una rutina de C++, escogiendo el eje  $x$  como sección de Poincaré. Los parámetros que se variaron fueron los de la parte del forzamiento, la amplitud  $A$  y la velocidad angular  $\omega$ .

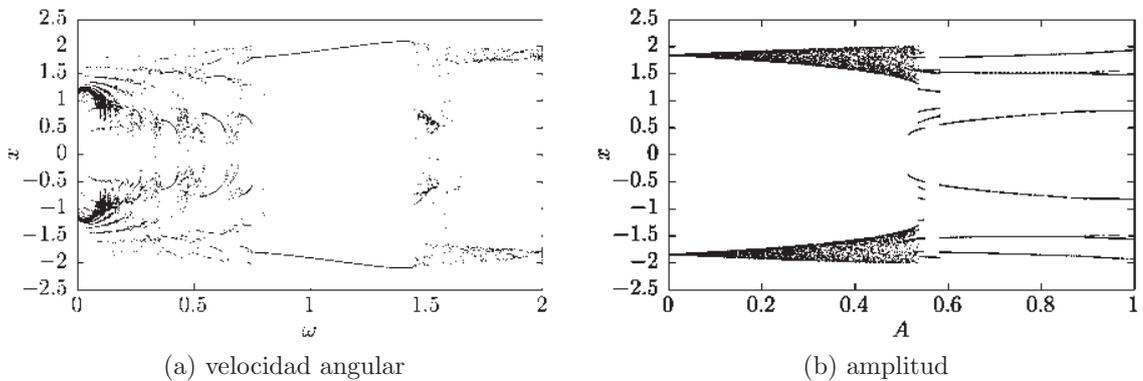


Figura 2.14: Diagramas de bifurcación variando parámetros del forzamiento.

el ciclo que se observa en la imagen 2.13, corresponde a la región estable cuando  $\omega = 0.4$ . Por otro lado, para el valor  $A = 0.6$  se observa una bifurcación.

### 2.2.4. Oscilador de van der Pol con potencial $\Phi^4$ asimétrico

Si el potencial  $U(x)$  es de la forma general como en el desarrollo anterior y consideramos  $\gamma \neq 0$ , los potenciales son de forma asimétrica. Se comportan según los valores de los coeficientes:

1. (i) de doble joroba ( $\alpha > 0, \beta < 0$ )

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

2. (ii) pozo doble ( $\alpha < 0, \beta > 0$ ).

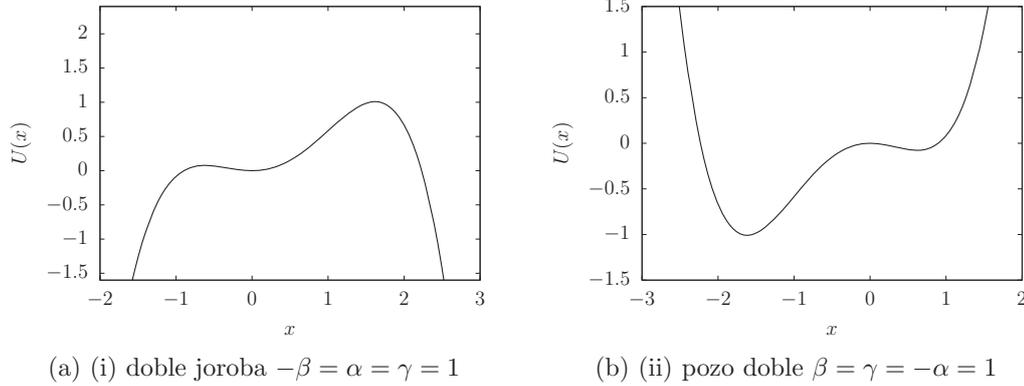


Figura 2.15: Diferentes potenciales asimétricos variando  $\beta$  y  $\alpha$ .

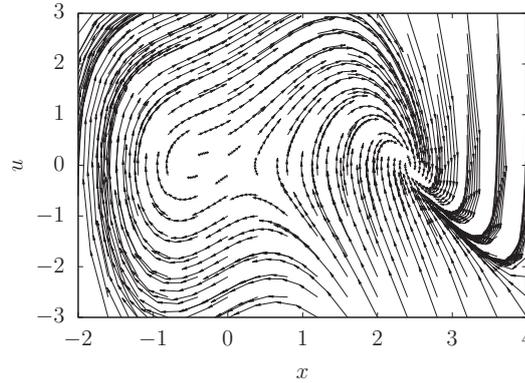


Figura 2.16: Retrato fase del sistema (2.25) con  $\mu = 0.8, \beta = 1, \gamma = -2, \alpha = -1$ .

Calcular los puntos fijos es buscar  $\vec{x}_f = (z, u_f)$  tal que  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{u} = 0$ . Como en el desarrollo anterior,  $u_f = 0$  y para los valores de  $z$  se utiliza la ecuación (2.26). Se obtienen los valores  $z_0 = 0, z_1 = 2.4142$  y  $z_2 = -0.4142$ . Por lo tanto se obtienen tres puntos fijos:  $P_0 = (0, 0)$  con eigenvalores 1.477 y -0.677,  $P_1 = (2.4241, 0)$  con eigenvalores  $-3.8628 \pm 1.7602i$  y  $P_2 = (-0.4142, 0)$  con eigenvalores  $0.6627 \pm 1.0304i$ . Para analizar la estabilidad consideramos la traza y el determinante

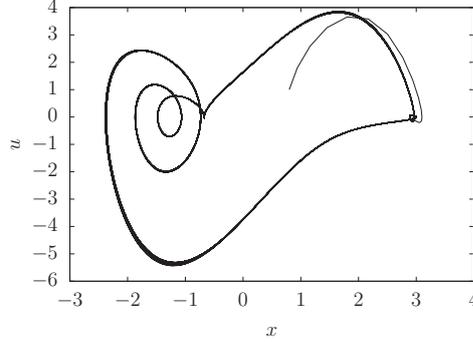
$$T = \mu(1 - z^2), \quad D = U''(z) = 3\beta z^2 + 2\gamma z + \alpha. \quad (2.31)$$

Utilizando  $z_0$  se obtiene  $T = 0.8$  y  $D = -1$ , esto implica que  $(0, 0)$  es un punto silla. Para  $z_1$ , se calcula  $T = -3.86$  y  $D = 6.83$ ; el punto fijo  $(2.4142, 0)$  es un nodo estable. En  $z_2$  el valor de la traza y el determinante es 0.66 y 1.17, indicando que el punto fijo  $(-0.4142, 0)$  es un espiral inestable. Observando el retrato fase, el punto fijo  $(2.4142, 0)$

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

es el único punto fijo estable, por lo tanto las soluciones tienden asintóticamente a él. Para la simulación del sistema forzado se escogen los parámetros:  $A = 6$  y  $\omega = 0.3$ .



(a)  $\mu = 0.8$

Figura 2.17: Espacio fase del sistema Duffing-van der Pol con potencial asimétrico.

Ahora se analiza el caso cuando el determinante de la ecuación (2.26) es cero, es decir, se cumple la propiedad  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$  y se obtienen 2 puntos fijos:  $(0, 0)$  y  $(-\frac{\gamma}{2\beta}, 0)$ . Llamamos  $z$  al valor de la variable  $x$  de los puntos fijos que anteriormente se definieron en la ecuación (2.26). Los valores de  $z$  tienen la propiedad también de  $U'(z) = 0$ . La segunda derivada del potencial tiene la forma

$$U''(z) = 3\beta z^2 + 2\gamma z + \alpha,$$

al expandir la suma y sustituir con  $U'(z)$ , se obtiene

$$U''(z) = \beta z^2 - \alpha + 2\frac{U'(z)}{z}.$$

Para la expresión anterior es necesario que  $z \neq 0$ , el valor de  $U''(0)$  es  $\alpha$ . Tomando en cuenta que  $z \neq 0$  y  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$ , la expresión anterior queda  $U''(z) = 0$ . Por lo tanto, cuando sólo hay 2 puntos fijos:  $(0, 0)$  y  $(-\frac{\gamma}{2\beta}, 0)$ ; el segundo es un punto de inflexión.

Los eigenvalores para el punto  $(0, 0)$  pueden calcularse con la ecuación (2.28)

$$\lambda(0) = \frac{1}{2}(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\alpha}).$$

Con la ecuación (2.31), se obtiene  $T = \mu$  y  $D = \alpha$ , para ahora  $\mu > 0$ , lo que implica que la estabilidad en  $P_0 = (0, 0)$  depende de  $\alpha$ . Si  $\alpha \leq \frac{\mu^2}{4}$ ,  $P_0$  es nodo inestable, si  $\alpha > \frac{\mu^2}{4}$  se convierte en espiral inestable. Por otro lado, para el punto  $P_1 = (z, 0)$  con  $z = -\frac{\gamma}{2\beta}$ . Vimos que  $U''(z) = 0$ , entonces los eigenvalores de  $P_1$  son 0 y  $\mu(1 - \frac{\alpha}{\beta})$  que corresponden a los valores de  $D$  y  $T$  respectivamente, esto indica que el punto fijo será un nodo degenerado y su estabilidad depende de si  $\frac{\alpha}{\beta}$  es mayor o menor a uno.

Utilizando los valores  $\mu = 0.8$ ,  $\alpha = 0.7$ ,  $\gamma = -1.4$  y  $\beta = 0.7$ , se cumple la propiedad  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$  y los dos puntos fijos son :  $P_0 = (0, 0)$  teniendo como eigenvalores  $0.4 \pm 0.7348i$

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

y  $P_1 = (1, 0)$  donde el eigenvalor es el cero porque  $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ . El punto  $P_0$  tiene dinámica de espiral inestable y del punto  $P_1$  no es fácil determinarlo. Si se utiliza el potencial reflejado ( $\gamma = 1.4$ ), el punto fijo  $(0, 0)$  conserva su dinámica y el punto de inflexión se vuelve  $(-1, 0)$  donde se sigue anulando el eigenvalor. Para los valores  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -2.8284$  y  $\alpha = 2$  se cumple la condición  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$  y también  $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ , entonces el punto de inflexión  $(\frac{2.8284}{2}, 0)$  es un nodo degenerado estable.

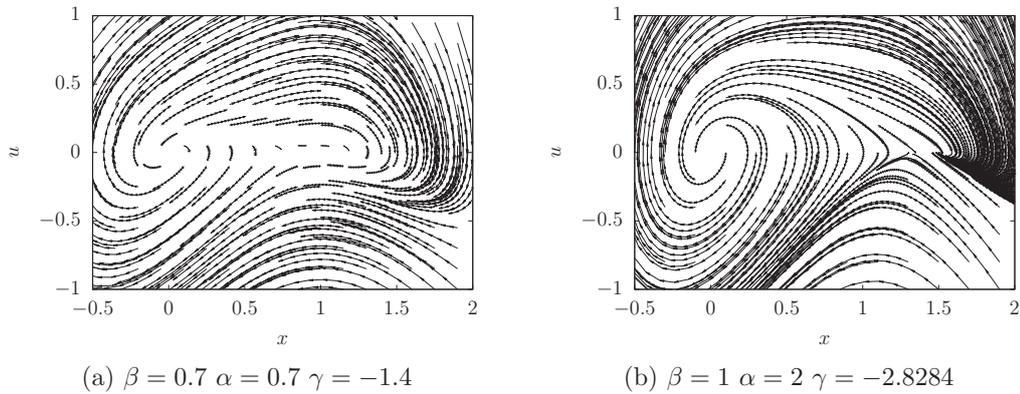


Figura 2.18: Retratos fase Duffing-van der Pol con potencial asimétrico.

La siguiente trayectoria fue simulada desde un tiempo inicial  $t_0 = 0$  hasta los 500 segundos con condiciones iniciales  $x_0 = 0.8$  y  $u_0 = 0$ . Se utilizaron valores de  $\omega = 1.3$  y  $A = 0.9$  para los parámetros del forzamiento.

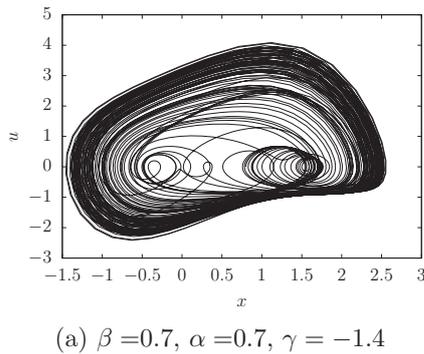


Figura 2.19: trayectoria del sistema Duffing-van der Pol con  $\Phi^4$  asimétrico.

Los diagramas de bifurcación igual que con los potenciales anteriores se generan variando los parámetros del forzamiento, velocidad angular  $\omega$  y amplitud  $A$ .

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

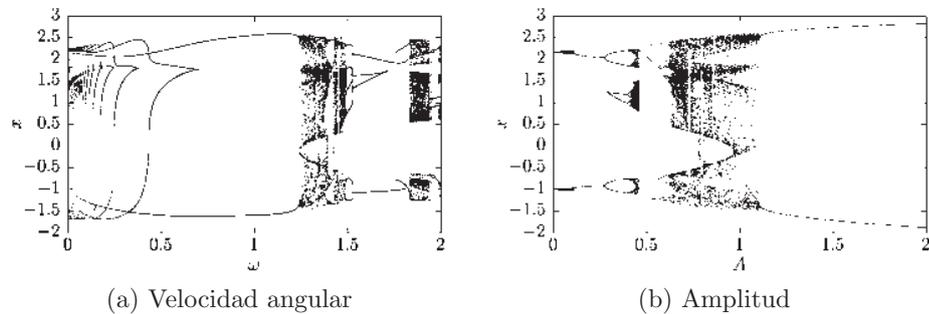


Figura 2.20: Diagramas de bifurcación variando el forzamiento.

### 2.3. Oscilador Duffing

La ecuación de Duffing, que lleva el nombre del ingeniero eléctrico Alemán Georg Duffing, ha sido ampliamente utilizada en Física, Economía, Ingeniería y muchos otros fenómenos físicos. Dada su característica de oscilación y la naturaleza caótica, muchos científicos se inspiran en esta ecuación diferencial no lineal debido a su naturaleza de replicar una dinámica similar en nuestro mundo natural. Esta ecuación diferencial junto con la de van der Pol, se ha convertido en uno de los ejemplos más comunes de la dinámica no lineal. La ecuación de Duffing es una ecuación diferencial para modelar un oscilador de doble pozo tal como el sistema mecánico magneto-elástico [8]. Este sistema consiste en una varilla colocada verticalmente entre dos imanes con el extremo superior fijo y el extremo inferior libre para oscilar, como se muestra en la Fig. 2.21.

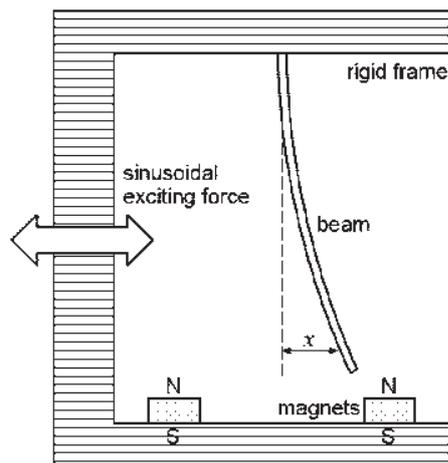


Figura 2.21: Sistema físico que es modelado por el oscilador de Duffing.

La varilla será atraída a uno de los dos imanes y dada una cierta velocidad oscilará sobre ese imán hasta que la fricción lo pare. Cada uno de los imanes crea un punto

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

fijo donde la viga puede venir a parar sobre ese imán y permanecer en equilibrio. Sin embargo, cuando el sistema entero es sacudido por una fuerza periódica, la viga puede saltar hacia atrás de un imán a otro de una manera aparentemente al azar. Dependiendo de que tan grande sea la fuerza que sacude no puede haber puntos fijos estables y ningún ciclo fijo estable en el sistema. Este sistema se puede modelar matemáticamente por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t), \quad (2.32)$$

donde  $\alpha$  controla el tamaño de la rigidez,  $\beta$  controla la cantidad de no linealidad en la fuerza de restauración. Si  $\beta = 0$ , La ecuación de Duffing describe un oscilador armónico simple amortiguado y forzado.

### 2.3.1. Análisis de la ecuación de Duffing

Iniciemos nuestro estudio considerando la ecuación de Duffing (2.32) (con  $\gamma = \delta = 0$ ) como un oscilador no lineal que describe el movimiento de una partícula clásica dentro de un potencial de la forma

$$V(x) = \alpha \frac{x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4}, \quad (2.33)$$

con  $\alpha < 0$  y  $\beta > 0$ . Se trata de un potencial de doble pozo al estar formado por dos mínimos simétricos respecto a una barrera de potencial centrada en  $x = 0$ . Este potencial se conoce como potencial de Duffing [9]. Si elegimos  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$  los mínimos se encontrarán en  $x = \pm 1$ , y tendrán un máximo en  $x=0$  como se muestra en la Fig. 2.22

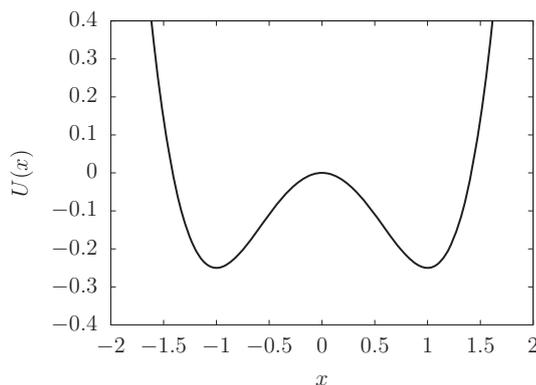


Figura 2.22: Potencial  $V(x)$  para valores de  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$ .

La fuerza correspondiente a este potencial es

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = x - x^3.$$

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

A través de las leyes de la dinámica clásica, el movimiento de la partícula encerrada en nuestro doble pozo vendrá determinado por la ecuación  $F = ma$  y si tomamos la masa de la partícula igual a la unidad, la ecuación diferencial que determina el movimiento de partícula queda de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - x^3. \quad (2.34)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial de forma numérica usando C++, obtenemos la solución en el espacio de fase, como se muestra en la Fig. 2.23.

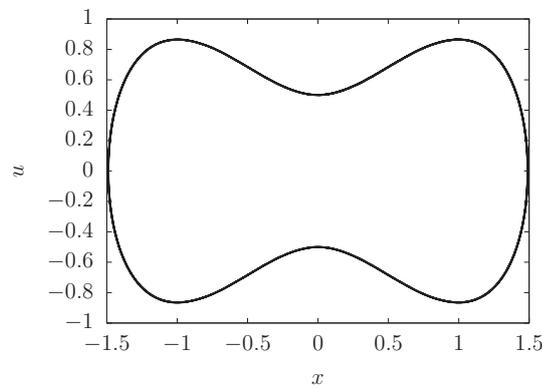


Figura 2.23: Trayectoria cerrada del sistema de Duffing sin disipación y sin forzamiento ( $\gamma = 0$ ).

Cuando la partícula está situada sobre el mínimo de la derecha en  $x = 1$  y tiene una velocidad inicial igual a 1, esta velocidad es suficiente para hacer que la partícula supere la barrera de potencial en  $x = 0$  pase al pozo de la izquierda y vuelva a superar la barrera de potencial y despues retorne al seno de la derecha y así continúa oscilando indefinidamente. Esto siempre se ocurrirá si la velocidad inicial de la partícula es mayor que  $1/\sqrt{2}$ , lo cual se puede verificar si se iguala la energía de la barrera de potencial a la energía cinética inicial de la partícula que parte de uno de los mínimos. Como vemos la trayectoria de la partícula es cerrada y su movimiento es periódico, y esto era de esperarse, puesto que no existe en el oscilador ningún término disipativo que impida la conservación de la energía.

Hay muchas maneras de analizar la ecuación de Duffing, cada una en función de los valores que se asignan a los diferentes parámetros. Analizaremos el caso no forzado ( $\gamma = 0$ ) con valores de  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$  de la Ec. (2.32), basandonos en el análisis dado por Wiggins (1990) [9]. En este caso la Ec. (2.32) esta dada por

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = 0. \quad (2.35)$$

Rescribiendo la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de ecuaciones de primer orden correspondiente a la Ec. (2.35) es

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y.\end{aligned}\tag{2.36}$$

El primer paso en este análisis es identificar y clasificar todos los puntos fijos del sistema. Procediendo de forma similar a lo hecho con el oscilador de van der Pol, se puede ver que los puntos fijos del sistema (2.36) son los puntos fijos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $(-1,0)$  como se muestra en la Fig. 2.24. En esta figura se muestra también algunas órbitas del sistema (2.36).

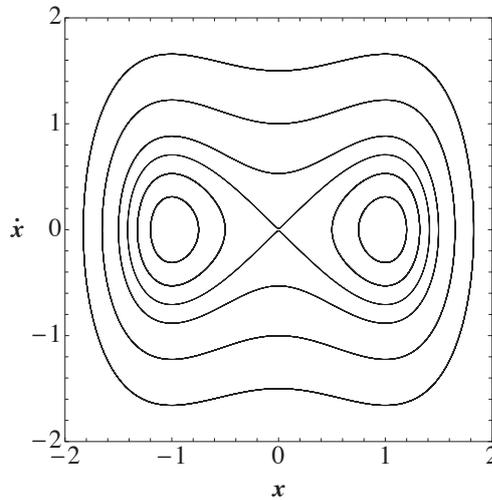


Figura 2.24: Puntos fijos del sistema de Duffing.

Para analizar la estabilidad de los puntos fijos. Partimos de la matriz Jacobiana del sistema (2.36)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Para el punto fijo  $P(0,0)$ , se tiene que:

$$\mathbf{C}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta \end{pmatrix},$$

teniendo como polinomio característico  $\lambda^2 + \delta\lambda - 1 = 0$  para el punto fijo  $P(0,0)$ , donde  $Tr(\mathbf{C}) = -\delta$  y  $Det(\mathbf{C}) = -1$ , de esta manera como se puede observar en el diagrama de bifurcación traza-determinante Fig. 1.4, la clasificación de este punto fijo se limita a un punto silla debido a que el  $Det(\mathbf{C}) = -1$ .

Para los puntos fijos  $P(\pm 1,0)$  se tiene que

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$\mathbf{C}_{(\pm 1, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo para este par de puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$  se tiene como polinomio característico  $\lambda^2 + \delta\lambda + 2 = 0$ , donde  $Tr(C) = -\delta$  y  $Det(C) = 2$ . A diferencia del caso anterior, ahora se tiene una variedad de clasificación que se le asocia al valor de  $\delta$ , teniendo como resultado 3 casos posibles.

1. Caso (i)

Si  $\delta > 0$ , esto implica que  $Tr(C) < 0$  y  $Det(C) = 2$ , por lo tanto este par de puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$  corresponden a puntos estables.

2. Caso (ii)

Si  $\delta = 0$ , esto implica que  $Tr(C) = 0$  y  $Det(C) = 2$ , por lo tanto este par de puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$  corresponden a dinámica del tipo centro.

3. Caso(iii)

Si  $\delta < 0$ , esto implica que  $Tr(C) > 0$  y  $Det(C) = 2$ , por lo tanto este par de puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$  corresponden a puntos inestables.

Se ha descubierto que para ciertos valores de  $\delta$  hay una transición en la dinámica del sistema dependiendo de su valor. Esto se puede entender en el análisis de la ecuación de Duffing (con  $\gamma = 0$ ), donde dos de los tres puntos fijos cambian de ser estables a inestables, dependiendo del valor de  $\delta$ . En particular cuando el amortiguamiento es positivo ( $\delta > 0$ ), el sistema sigue una trayectoria en espiral estable. A la inversa, cuando el amortiguamiento es negativo ( $\delta < 0$ ), las espirales del sistema son inestables en los puntos fijos  $P(\pm 1, 0)$ .

### 2.3.2. Oscilador de Duffing forzado

Sabemos que el oscilador Duffing corresponde a un modelo de oscilador no lineal forzado, por este motivo vamos a complicar el movimiento de la partícula que se mueve sometida al potencial de Duffing introduciendo amortiguamiento (rozamiento) y una fuerza motriz externa periódica. (Si sólo introdujeramos amortiguamiento, el comportamiento no sería muy divertido: al final la partícula acabaría siempre quieta sobre uno de los dos pozos de potencial). Tomando  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$  en la Ec. (2.32), la ecuación del movimiento a considerar es:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = \gamma\cos(\omega t), \quad (2.37)$$

donde  $\delta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\gamma$  es magnitud (amplitud) de la fuerza motriz cuya frecuencia de oscilación es  $\omega$ . Veremos que a medida que la fuerza externa va aumentando en su magnitud, el movimiento de la partícula se irá haciendo más

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

complejo hasta convertirse en caótico. Fijaremos  $\delta = 0.1$  y  $\omega = 1.4$  en todo lo que sigue, y empezaremos con la amplitud de la fuerza externa  $\gamma = 0.1$  (veremos que esto hace que estemos fuera del régimen caótico). En la Fig. 2.25 se muestra el aspecto que toma la trayectoria en el espacio fase para condiciones iniciales del sistema  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$ .

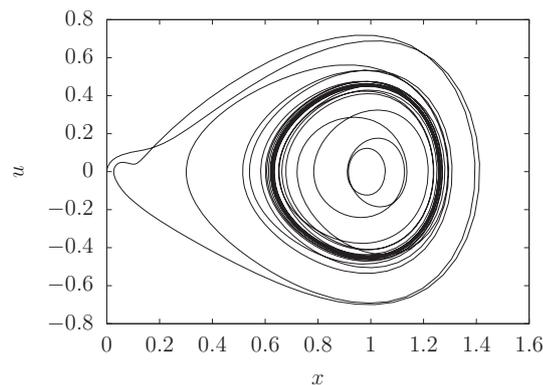


Figura 2.25: Espacio fase para un valor de  $\gamma = 0.1$ .

Ahora veremos cómo cambian las trayectorias en el espacio fase cuando se aumenta la amplitud de la fuerza motriz. En la Fig 2.26 se muestra la dinámica para el valor de  $\gamma = 0.35$ , donde se puede observar que para este valor de  $\gamma$ , el sistema ya presenta caos.

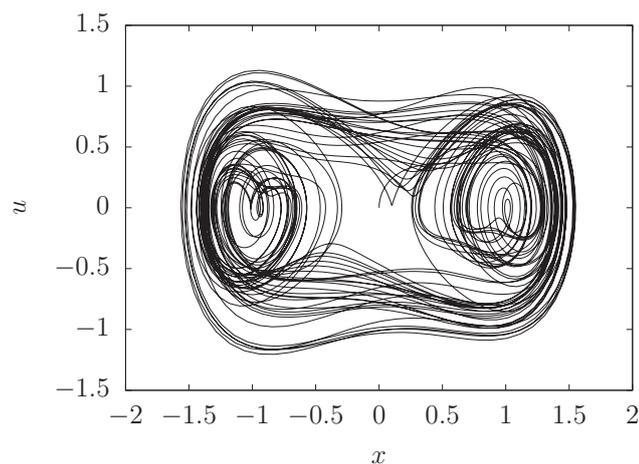


Figura 2.26: Espacio fase para un valor de  $\gamma = 0.35$ .

La ecuación de Duffing puede tomar diferentes dinámicas en el espacio fase, dependiendo de la elección de los parámetros. A pesar de esta gran variedad, el sistema

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

puede ser diseñado para generar trayectorias que presenten una transición de órbitas periódicas a comportamiento caótico. La ecuación de Duffing se ha utilizado en los campos de la ingeniería, economía, física, crecimiento de la población y la genética, por nencionar algunos, teniendo la ecuación un gran reto en la exploración de los diferentes parámetros que influyen en la dinámica global del sistema.

Para identificar regiones de comportamiento caótico es útil el diagrama de bifurcación. A continuación los diagramas de bifurcación del oscilador de duffing forzado con potencial simétrico variando los parámetros del forzamiento. Se utiliza el tiempo inicial  $t_0 = 0$ , y las condiciones iniciales  $x_0 = 0$  y  $u_0 = 0$ .

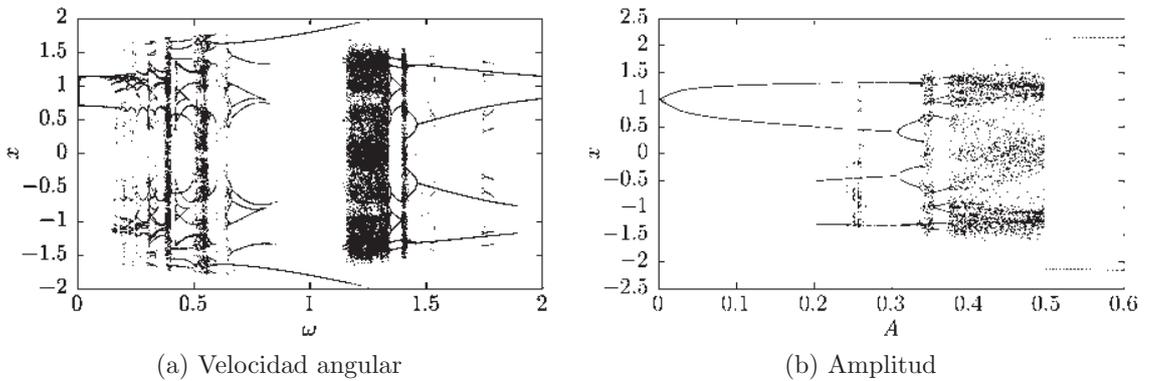


Figura 2.27: Diagramas de bifurcación Duffing simétrico variando el forzamiento.

### 2.3.3. Oscilador de Duffing con potencial $\Phi^4$ asimétrico

La ecuación general de Duffing tiene la forma

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \frac{dU(x)}{dx} = A \cos(\omega t),$$

si se realiza un cambio de variable como en los análisis anteriores se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= A \cos(\omega t) - \delta u - U'(x). \end{aligned}$$

Para el sistema sin forzamiento, los puntos fijos  $(z, u_f)$  cumplen  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{u} = 0$ . Se deduce que  $u_f = 0$  y los valores  $z$  son los puntos críticos del potencial  $U(x)$ , análogo a las soluciones (2.26). La matriz jacobiana del sistema sin forzar es

$$\mathbf{J}(x, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x) & -\delta \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que el polinomio característico es

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

$$\lambda^2 + \delta\lambda + U''(z). \quad (2.38)$$

Las soluciones  $\lambda$ , corresponden a los eigenvalores y tienen la forma

$$\lambda(z) = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4U''(z)}}{2}. \quad (2.39)$$

De las soluciones calculamos la traza  $T = -\delta$  y el Determinante  $D = U''(z)$ . Para los parámetros del potencial:  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -2$  y  $\alpha = -1$ , se obtienen los mismos puntos fijos calculados con la expresión (2.26), fijando el parámetro  $\delta = 0.25$  se calculan los eigenvalores. Para el punto fijo  $P_0 = (0, 0)$  se obtienen los eigenvalores 1.1328 y -0.8829, en  $P_1 = (-0.4142, 0)$  los eigenvalores son  $-0.125 \pm 1.0752i$ , el punto  $P_2 = (2.4142, 0)$  tiene como eigenvalores  $-0.125 \pm 2.6101i$ . Por lo tanto,  $P_0$  corresponde a una dinámica punto silla, el punto  $P_1$  tiene dinámica de espiral estable al igual que el punto  $P_2$  como se observa en el retrato fase 2.28 (a).

Cuando los parámetros cumplen  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$ , los puntos fijos son  $(0, 0)$  y  $(z, 0)$  con  $z = -\frac{\gamma}{2\beta}$ . Para  $(0, 0)$  se obtiene la expresión para los eigenvalores de la ecuación (2.39).

$$\lambda(0) = \frac{1}{2}(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\alpha}),$$

mientras que para  $(z, 0)$  es igual que en análisis anterior, los eigenvalores son 0 y  $-\delta$ , correspondientes a  $T$  y  $D$ . Los valores  $\beta = 0.7$ ,  $\gamma = -1.4$  y  $\alpha = 0.7$  cumplen la propiedad  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$  y se obtienen dos puntos fijos.  $P_0 = (0, 0)$  tiene como eigenvalores  $-0.125 \pm 0.8273i$  y corresponde a un espiral estable. En el punto fijo  $P_1 = (1, 0)$  los eigenvalores son 0 y  $-0.25$  que se traduce a una traza  $T = -0.25$  y un determinante  $D = 0$ . El retrato fase se observa en la figura 2.28 (b).

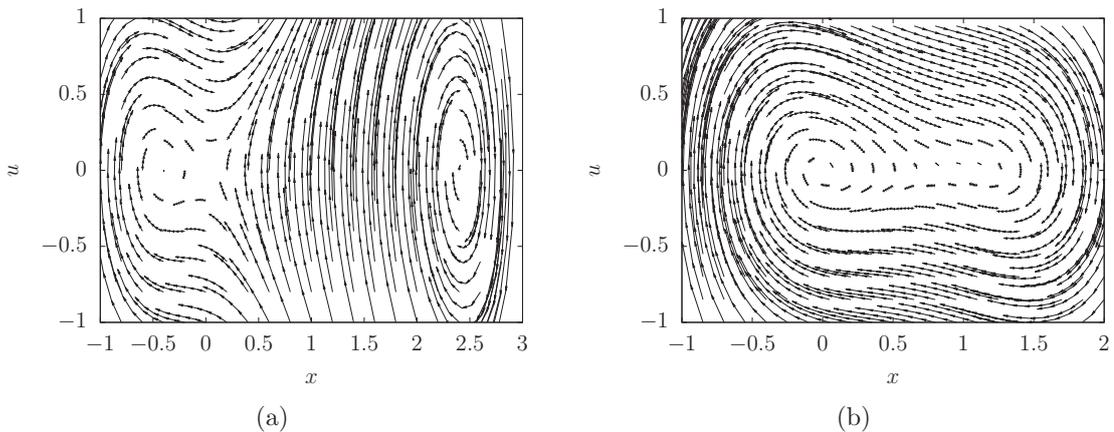


Figura 2.28: Retratos fase del oscilador de Duffing con potencial asimétrico.

Se simularon dos soluciones, una con el potencial de 3 puntos fijos y otra con el de 2. Los valores del potencial de tres puntos son  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -2$  y  $\alpha = -1$ ; para el

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

potencial de dos puntos son  $\beta = 0.7$ ,  $\gamma = -1.4$  y  $\alpha = 0.7$  con las condiciones iniciales  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 2.1$  y  $u_0 = 0$ , usando los parámetros  $\delta = 0.1$ ,  $\omega = 1.3$  y  $A = 0.35$ . La trayectoria que se observa en la figura 2.29 (a) corresponde al potencial de tres puntos fijos y la figura 2.29 (b) al del potencial que cumple  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$ .

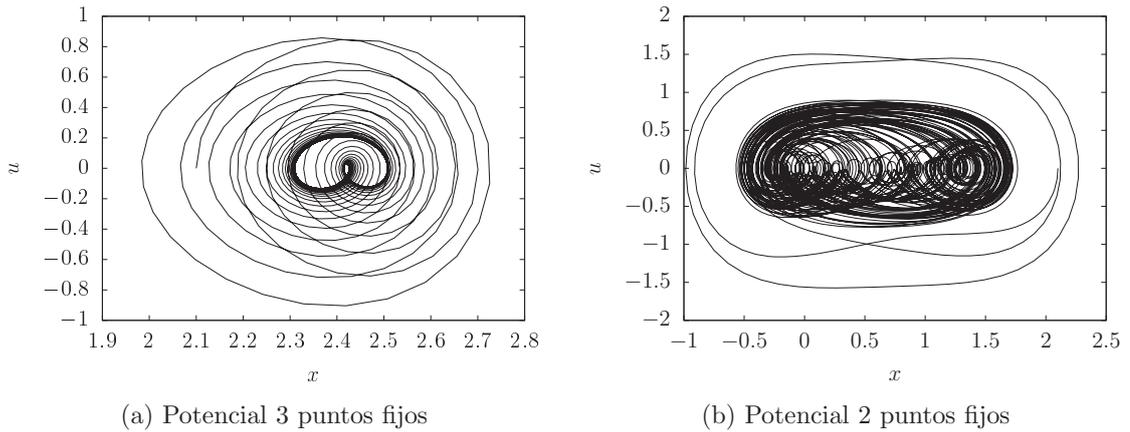


Figura 2.29: Espacios fase del oscilador de Duffing con potencial asimétrico.

Para los diagramas de bifurcación se utilizaron los valores de los parámetros que cumplen la condición  $\gamma^2 = 4\beta\alpha$ , es decir,  $\beta = 0.7$ ,  $\gamma = -1.4$  y  $\alpha = 0.7$ . Se utilizan los mismos valores iniciales para los del potencial simétrico. Se varían nuevamente los parámetros del forzamiento.

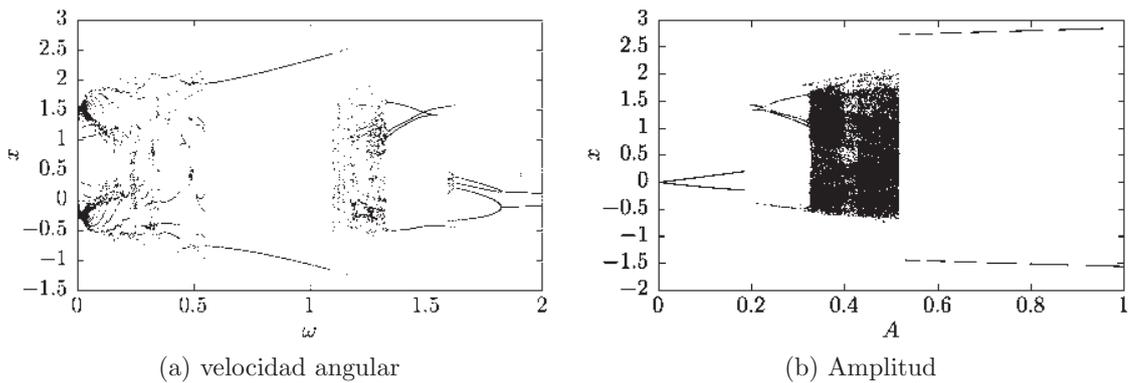


Figura 2.30: Diagramas de bifurcación Duffing con potencial asimétrico.

## CAPÍTULO 2. DINÁMICA NO LINEAL DE LOS OSCILADORES DE VAN DER POL Y DE DUFFING

---

## Sincronización y Control de Sistemas Caóticos

### 3.1. Introducción

Hoy en día la teoría del caos y sus aplicaciones en la tecnología son un prometedor campo de estudio, existen muchas razones prácticas para estudiar el control y sincronización del caos. Controlar el caos significa alterar las variables de un sistema dinámico para obtener un comportamiento deseado, ya sea para suprimir el comportamiento caótico, sincronizarlo o hasta generarlo. Por ejemplo, en un sistema donde existen respuestas indeseables, es necesario suprimir el caos como en el caso de las fibrilaciones cardíacas o en los modelos del clima. Por otro lado si la complejidad del sistema es benéfica, conviene sincronizar o generar el caos, como el caso de la encriptación para telecomunicaciones o en la mezcla de líquidos. Por ese motivo el “control del caos” ha sido uno de los tópicos de interés en los últimos años [10, 11, 12]. Siempre es posible controlar el caos utilizando grandes perturbaciones, pero es importante obtener una técnica de control eficiente que requiera una energía de control mínima. Es decir, debe ser una pequeña perturbación del sistema dinámico.

La posibilidad que dos o más sistemas caóticos oscilen de manera sincronizada y coherente no es obvia, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo, Pecora y Carroll [17] demostraron que es posible acoplar dos sistemas caóticos, que parten de estados iniciales distintos, de modo tal que sus oscilaciones se sincronicen. El estudio de la sincronización ha dado origen al surgimiento de nuevos métodos para controlar un sistema caótico. En este sentido se han obtenido logros importantes en lo referente a estrategias para controlar arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos [14, 15].

En el capítulo abarca algunos métodos para el control del caos usados para los tres propósitos del control: suprimir el caos, sincronizar sistemas caóticos y generar caos en sistemas; generar el caos también se le llama anti-control. Partiendo de aquí, *Control del caos* se refiere a la supresión del caos en los sistemas dinámicos. La mayoría de los

conceptos de este capítulo tienen como base las referencias [32, 16, 20].

### 3.2. Control óptimo

Estudiar el control del caos es importante por sus numerosas aplicaciones tecnológicas. La tecnología es la parte pragmática de la ciencia y en la práctica, la optimización de los procesos es importante. Esta sección tiene como objetivo dar un panorama general del problema del control óptimo.

Los métodos clásicos del control son pensados para sistemas dinámicos lineales y las funciones de control son operadores lineales aplicados al estado fase representado generalmente por el vector  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots)$ , donde  $x_i$  son las variables de estado. Claramente las desventajas de estos métodos es que al acercarse el sistema al estado final, la interacción del control se vuelve pequeña lo que lleva a que el sistema sólo tienda asintóticamente al estado deseado, es decir, le toma el infinito llegar al estado terminal. Por otro lado, puede suceder también que en la fase inicial la magnitud de control sea muy grande y que el control práctico sea imposible. A pesar de las limitaciones, los métodos de control clásico pueden aplicarse a sistemas no lineales. [32]

A continuación se describe el problema general del control óptimo. Consideremos un sistema dinámico sujeto a control descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}, t), \quad (3.1)$$

donde  $\vec{x}$  es el vector de estado de  $n$  dimensión y  $\vec{u}$  es el vector de control de  $m$  dimensión; ambos son funciones del tiempo  $t$ :  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ,  $\vec{u} = \vec{u}(t)$ .  $f$  es una función  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Los sistemas de control pueden describirse por varios tipos de ecuaciones: diferenciales algebraicas, integro-diferenciales, con funcionales, etc. [32]. Durante el capítulo sólo se usarán sistemas de control descritos con ecuaciones diferenciales.

Para formular un problema de control óptimo, es necesario imponer condiciones de frontera, restricciones y algún criterio de optimización ó un funcional. Se considera el proceso de control en un intervalo  $t \in [t_0, \tau]$ . A veces se usa el límite  $\tau \rightarrow \infty$ .

Las condiciones de frontera usualmente se describen como

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}(\tau) = \vec{x}_\tau.$$

Estas condiciones de frontera de dos puntos del espacio  $\vec{x}$  es la configuración más sencilla, es posible que los vectores  $\vec{x}_0$  y  $\vec{x}_\tau$  sean conjuntos  $X_0$  y  $X_\tau$ , definidos en el espacio de  $(\vec{x}, t)$ . En ocasiones el conjunto  $X_\tau$  es definido con  $r$  ecuaciones en el espacio de  $\vec{x}$  como

$$X_\tau = \{\vec{x} : g_i(\vec{x}) = 0, t = \tau\}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (3.2)$$

Las restricciones del problema pueden imponerse en el control  $\vec{u}$ , en el estado  $\vec{x}$  o en ambos. Generalmente se expresan

$$\vec{u}(t) \in U, \quad \vec{x}(t) \in V, \quad t \in [t_0, \tau].$$

## CAPÍTULO 3. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

Ambos conjuntos ,  $V \in \mathbb{R}^n$  y  $U \in \mathbb{R}^m$ , pueden ser dependientes del tiempo. Las condiciones de frontera son un caso particular de restricciones fijadas en dos instantes de tiempo.

El funcional o criterio de optimización casi siempre es una función que depende de los valores finales de las variables de estado y el tiempo

$$J = F(\vec{x}_\tau, \tau)$$

o un funcional integral

$$J = \int_{t_0}^{\tau} f_0(\vec{x}, \vec{u}, t) dt.$$

Donde  $F$  y  $f_0$  son las funciones argumento.

### 3.2.1. Control de bucle abierto (*Open-loop control*)

Sea  $u(t)$  una función de control. La función  $u(t)$  corresponde a ciertas condiciones iniciales  $\vec{x}_0$  y  $t_0$ . Entonces la función de control varía en el tiempo pero está determinada inicialmente, es decir

$$u = u(t, t_0, \vec{x}_0).$$

Este método de control no usa mediciones, no toma en cuenta perturbaciones imprevistas ni error. A causa de esto, el control *open-loop* sólo puede emplearse en situaciones ideales donde la dinámica del sistema es determinada con precisión por el modelo matemático. En los problemas prácticos, la ingeniería se dirige más a sistemas de control que estén definidos por las variables de estado actual.

### 3.2.2. Control por retroalimentación de estados (*Control feedback*)

En el control por retroalimentación de estados se define una función que depende del estado actual e incluso el tiempo. El control feedback se representa

$$u = u(\vec{x}, t).$$

En los problemas prácticos es muy común que haya perturbaciones desconocidas y también imprecisiones en los modelos matemáticos al compararlos con los experimentos. Por esta razón es mucho más utilizado el enfoque de control feedback que el de *open-loop* en el mundo práctico.

### 3.2.3. Principio del máximo

A continuación se presenta una formulación simplificada del principio del máximo para ciertos problemas de control óptimo. El principio fue propuesto primero por

### CAPÍTULO 3. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

Pontryagin [33]. Más información y una prueba completa del principio puede encontrarse en numerosos libros [34, 35]. Consideremos un problema de control como el planteado anteriormente. Se asume que  $x$  y  $u$  son vectores.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), & x(t_0) &= x_0, & t &\in [t_0, \tau], \\ g_i(x(\tau)) &= 0, & i &= 1, \dots, r \leq n, & u(t) &\in U, \\ J &= \int_{t_0}^{\tau} f_0(x, u, t) dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Las funciones  $f$  y  $f_0$  así como todas sus primeras derivadas, satisfacen la condición de Lipschitz respecto a  $x$  y  $u$ . Las funciones  $g_i$  son continuas y la matriz

$$G = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, n,$$

tiene rango  $r$  en los puntos del conjunto (3.2) y el conjunto  $U$  es cerrado.

Se dice que el control  $u(t)$  es admisible si es una función continua a trozos y satisface las restricciones. El control admisible es óptimo si corresponde al valor mínimo del criterio de optimización.

Introduciendo una variable de estado adicional  $x_0$  definida por

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u, t), \quad x_0(t_0) = 0.$$

es posible definir el criterio de optimización como  $J = x_0(\tau)$ . Se define ahora el vector adjunto o conjugado

$$\hat{p}(t) = (p_0, p_1, \dots, p_n) \quad (3.4)$$

y el Hamiltoniano definido por el sistema  $\dot{x} = f$  del problema (3.3), de la siguiente manera

$$H(\hat{p}, x, u, t) = \sum_{i=0}^n p_i f_i(x, u, t) = p_0 f_0 + p \cdot f. \quad (3.5)$$

Donde  $p = (p_1, \dots, p_n)$ .

Con esas definiciones podemos reescribir el sistema  $\dot{x} = f(x, u, t)$  del problema (3.3) usando el Hamiltoniano y obteniendo

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Los componentes del vector adjunto satisfacen las ecuaciones

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

### CAPÍTULO 3. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

La optimización viene del principio del máximo [32]. Básicamente dice que si  $u(t)$  es una trayectoria de control óptimo, existe un vector  $\vec{p}$  que satisface que el Hamiltoniano definido anteriormente (3.5), alcanza el supremo respecto a  $u$ .

Consideremos ahora un sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (3.8)$$

Sea  $u(t)$  un control óptimo, definido por (3.8), (3.4), (3.5) y donde se cumple que el hamiltoniano definido por (3.5) alcanza el máximo en las restricciones de  $u$ . Sea  $x(t)$  la trayectoria óptima, entonces existe un vector adjunto  $p$  diferente de cero que satisface las ecuaciones

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Donde  $H_1$  es el hamiltoniano truncado, definido por

$$H_1(p, x, u) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(x, u), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

#### 3.2.4. Ejemplo

Veremos un ejemplo de un sistema sujeto a control óptimo. Supongamos una ecuación dinámica de un grado de libertad sujeta a control por una fuerza, definida de la siguiente manera

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leq 1. \quad (3.11)$$

La masa del sistema y el máximo de fuerza admisible  $u$  es la unidad. Si se reescribe la ecuación (3.11) en forma de sistema, usando el cambio  $\dot{x} = x_2$  y  $\dot{x}_2 = u$ , queda lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La condición  $|u| \leq 1$  permanece. Se imponen también condiciones iniciales arbitrarias.

$$x(t_0) = x_0, \quad x_2(t_0) = x_{20},$$

y la condición final de que termine el intervalo quieto y en el origen, es decir

$$x(\tau) = x_2(\tau) = 0.$$

Entonces el vector de estado del sistema es  $\vec{x} = (x, x_2)$ . En este caso la función de control que se utiliza es el Hamiltoniano truncado definido en (3.10). Aplicando las definiciones al problema se obtiene

## CAPÍTULO 3. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

$$H(\vec{p}, \vec{x}, u) = p_1 x_2 + p_2 u. \quad (3.13)$$

El máximo respecto de  $u$  bajo la restricción  $|u| \leq 1$  se obtiene en  $u = \text{sign}(p_2)$ . Del marco anterior, se sabe que el sistema adjunto satisface las ecuaciones

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

En este ejemplo el sistema de ecuaciones para los momentos conjugados es

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -p_1.$$

Integrando el sistema respecto al tiempo queda

$$p_1 = c, \quad p_2 = -ct + c_2,$$

donde  $c$  y  $c_2$  son constantes. Sustituyendo en  $u = \text{sign}(p_2)$  se obtiene

$$u(t) = \text{sign}(c_2 - ct). \quad (3.14)$$

La función lineal de tiempo  $c_2 - ct$  sólo cambia de signo una vez, en el punto  $t = \frac{c_2}{c}$ . En conclusión,  $u$  es una función signo de una función lineal de tiempo y toma los valores de  $u = \pm 1$ . Conociendo la función de control óptima, es necesario resolver el sistema (3.12) y calcular las constantes  $c, c_2$  son las condiciones iniciales.

### 3.3. Control del caos

Existen muchas razones prácticas para controlar el caos. En los sistemas de inteligencias artificiales distribuidas, el comportamiento caótico es indeseable y reduce el desempeño del sistema. Por esto, el comportamiento caótico debe suprimirse llevando al sistema dinámico a alguna órbita estable. El interés industrial tanto académico por controlar el caos crece y es más fuerte cada vez. Hasta hoy muchos métodos de control se han propuesto y han tenido aplicaciones en áreas de investigación como la biología, medicina, fisiología, ingeniería química, física de láseres, sistemas electrónicos, mecánica de fluidos y aerodinámica por nombrar algunos [16].

Sea el sistema dinámico

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, p, t), \quad (3.15)$$

donde los componentes de  $\vec{x}$  son las variables de estado,  $p$  es un parámetro externo o de control cuyo propósito es modificar la dinámica del sistema.

Sea  $\vec{x}(t)$  la trayectoria normal del sistema y  $\vec{g}(t)$  la trayectoria deseada. Si definimos  $\tilde{\vec{x}}(t)$  como la trayectoria modificada con el sistema de control, de acuerdo con [20], el propósito del control del caos puede expresarse como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}(t) - \vec{g}(t)\| = 0. \quad (3.16)$$

Uno de los principales objetivos del control es llevar las trayectorias de los sistemas caóticos a órbitas periódicas, por lo tanto el primer paso para el control es identificar estas órbitas. Para sistemas de tiempo discreto donde se conoce el modelo matemático, las órbitas periódicas se pueden obtener con cálculos. Para los sistemas de tiempo continuo, el problema se puede cambiar a tiempo discreto con secciones de Poincaré. Entonces, el problema es identificar las órbitas periódicas de los modelos matemáticos de tiempo discreto. En la práctica se utilizan computadoras para obtener las órbitas periódicas, sin embargo, las iteraciones de los sistemas de tiempo discreto sólo pueden devolver las órbitas periódicas estables pues para las órbitas periódicas inestables las iteraciones pierden efectividad debido a los errores de cálculo o de medición.

### 3.3.1. Métodos de control del caos

El objetivo general de controlar un sistema es forzarlo a comportarse de una determinada manera. El objetivo varía depende de la aplicación, sin embargo, el motivo más común es transformar el movimiento caótico en periódico. Se utilizan diversas estrategias para influenciar la dinámica del sistema, en base a ellas se distinguen 4 tipos distintos de control [20].

#### Control a través de parámetros del sistema

Éste constituye el método más simple para la supresión del caos. En los circuitos electrónicos esta manera de alterar los parámetros es variando los valores de los componentes pasivos(resistencias o capacitores). La desventaja de este método es que luego se necesitan variaciones muy grandes en los parámetros. Por otro lado, en la parte de diseño, el método es difícil de aplicar por las limitadas herramientas de simulación que tengan posibilidad de hacer análisis de bifurcaciones y aún con la posibilidad, es necesario describir el sistema con ecuaciones diferenciales o mapeos que no siempre se obtienen de forma simple[20].

Un ejemplo es el método de Ott-Grebogi-Yorke(OGY), es un método para suprimir el caos que se basa en la idea de que en un vecindario de algún punto dentro del atractor, existe al menos una órbita periódica estable o inestable. Partiendo de esa idea, el método aplica perturbaciones temporales a los parámetros del sistema para dirigir la trayectoria a la órbita periódica deseada. La limitación del método OGY es que sólo es adaptable a casos de baja dimensión donde los puntos de equilibrio de los sistemas son puntos silla y las variables de estado no tienen ruido. A veces es difícil obtener los parámetros del sistema, incluso cuando se obtienen es difícil ajustarlos como entradas al sistema[16].

## CAPÍTULO 3. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

### Control por modificación de la estructura del sistema

Este tipo de control consiste en acoplar el sistema caótico principal a un nuevo sistema más simple y de parámetros que se puedan modificar fácilmente. Un método que utiliza este control es el de absorción de oscilaciones que se basa en una técnica de ingeniería mecánica. [21] Describe un método con este principio donde suprimen el caos en dos sistemas, uno teórico y el otro un sistema electrónico (circuito de Chua).

### Control mediante señales externas

Estos métodos consisten en perturbar el sistema con señales aperiódicas, agregar fuerzas externas periódicas, emplear términos que contemplen interacciones o añadir ruido externo de forma adecuada [20]. Un ejemplo es la propuesta de Pyragas en [22] donde expone dos métodos de control de caos con pequeñas perturbaciones continuas. La estabilización se consigue con retroalimentación de un oscilador externo especialmente diseñado ó con retroalimentación retardada auto controlada.

### Técnicas clásicas de ingeniería de control

Las técnicas de control clásico consisten en modificar dinámicamente el valor de una variable de control que actúa sobre el sistema para suprimir comportamientos no deseados en el sistema. Se han hecho estudios también con técnicas de control clásico: proporcional integral derivativa (PID), proporcional integral, lineal, no lineal, estocástico, etc.

El método de control PID y sus similares continuamente calculan el error entre la trayectoria deseada  $y(t)$  y la medida  $x(t)$ , es decir, se calcula  $e(t) = y(t) - x(t)$  y se aplica una corrección a la variable de control  $u(t)$  para minimizar el error. La función de control queda entonces

$$u(t) = Pe(t) + I \int_0^t e(s)ds + D \frac{de}{dt}(t),$$

donde  $P$ ,  $I$ ,  $D$  son coeficientes positivos[23].

Huberman y Lumer [26], llevan el sistema a un estado deseado modificando dinámicamente el valor del parámetro de control con una ecuación.

## 3.4. Sincronización del caos

La definición común de sincronización es que las fases de dos o más osciladores cambie de acuerdo a ciertos patrones. C. Huygens fue el primero que descubrió el fenómeno de sincronización en péndulos acoplados. Los fenómenos de sincronización son muy comunes, conjuntos de relojes, grillos cantando, marcapasos cardiacos, respuestas neuronales y audiencias aplaudiendo muestran tendencia a sincronizarse [31]. La mayoría de estos fenómenos se pueden modelar con dinámicas no lineales.

### CAPÍTULO 3. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

Un ejemplo es en las comunicaciones electrónicas, una variedad de circuitos de radio son equivalentes a una red de osciladores en paralelo con resistencias negativas no lineales. Estos circuitos se representan con la ecuación diferencial

$$\ddot{v} - (\alpha + \beta v - \gamma v^2)v + \omega^2 v = E\omega^2 \sin \omega t,$$

donde  $\frac{\alpha}{\omega}$ ,  $\frac{\beta}{\omega}$  y  $\frac{\gamma}{\omega}$  son pequeños. Para sincronizar estos sistemas se utiliza un oscilador patrón, de frecuencia muy estable pero de baja potencia para el sincronismo de la red de osciladores [24].

Muchos métodos desarrollados para suprimir el caos pueden usarse para sincronizar sistemas caóticos, de hecho están estrechamente relacionados y se han desarrollado nuevos métodos de sincronización partiendo de métodos de control y viceversa [37, 38, 39].

Los estudios de control (supresión) del caos muestran que introduciendo señales periódicas a los sistemas caóticos, éstos pueden comportarse como sistemas periódicos con la frecuencia de la señal de entrada. Partiendo de esto surge la pregunta: ¿Qué sucederá si en lugar de una señal periódica se usa una caótica?

Pecora y Carrol [36] encontraron por primera vez la sincronización en experimentos con circuitos. Tomaron el sistema de Lorenz, visto en el capítulo 1, como el sistema que gobierna y replicaron el mismo sistema como el sistema de respuesta. Lo que hicieron fue remplazar la primer variable de estado del sistema de respuesta con la primer variable de estado del sistema que gobierna (maestro). A esta configuración se le conoce como esquema P-C. Encontraron que la sincronización era asintótica y globalmente estable y también mantenía la estructura el sistema. Definieron estrictamente que dos sistemas caóticos en la configuración P-C se pueden sincronizar sólo si todos los exponentes condicionales de lyapunov son negativos. Los exponentes condicionales de lyapunov son los que corresponden al sistema de respuesta (esclavo). Debe ser comentado que esta condición no es necesaria para la sincronización, pues algunos sistemas no se sincronizan con la configuración P-C pero sí se pueden sincronizar con otro método [16].

Tomemos los siguientes sistemas caóticos

$$\dot{x} = f(t, x), \quad y = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (3.17)$$

Tomando el sistema (3.17) como el maestro, se construye el sistema esclavo

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(t, \hat{x}, y), \quad \hat{y} = \hat{h}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^p, \hat{h} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q. \quad (3.18)$$

En este esquema  $x$  y  $\hat{x}$  son variables de estado,  $y$  y  $\hat{y}$  son variables de salida. Supongamos que cuando (3.17) y (3.18) se sincronizan se cumple la relación

$$\hat{y} = \varphi(y), \quad \varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad (3.19)$$

donde  $\varphi$  es continua pero no necesariamente diferenciable. La gráfica  $(y, \hat{y})$  se le llama variedad de sincronización, puede ser un plano, una línea, algún subespacio vectorial

## CAPÍTULO 3. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

del espacio fase. Considerando las dinámicas de los sistemas maestro-esclavo y de la estructura de la variedad de sincronización, se dan las siguientes categorías de sincronización del caos. Si  $f = \hat{f}$  son sistemas idénticos, si  $f \neq \hat{f}$  son sistemas no-idénticos.

- *Sincronización completa.* En este caso,  $x = \hat{x}$ ; eso es  $m = q$  y la función  $\varphi$  es la identidad.
- *Sincronización generalizada.* Cuando el estado del sistema esclavo está determinado únicamente por el estado del sistema maestro, es decir, que exista un mapeo  $\varphi$ .
- *Sincronización de retardo o anticipada.* En este caso  $\hat{x}(t) \approx x(t \pm \tau)$ , donde  $\tau$  es positivo.
- *Sincronización de fase.* Cuando los sistemas están en órbitas periódicas, sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  sus fases. En este caso existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $|m\phi_1 - n\phi_2| < \epsilon$ .

El acoplamiento de sistemas consiste en relacionar las ecuaciones de dos sistemas mediante alguna variable de estado o algún parámetro de acoplamiento. El acoplamiento es un método de control cerrado o control feedback, ya que es una función que evoluciona con las variables de estado de alguno de los sistemas. Si el parámetro de acoplamiento tiene influencia en las variables de estado (posición), el acoplamiento es elástico. Por otro lado si el acoplamiento es en la parte diferencial (velocidad) de las variables, el acoplamiento será disipativo. El acoplamiento que utiliza la segunda derivada (aceleración) se le llama acoplamiento giroscópico. El acoplamiento puede ser unidireccional o bidireccional, el primero consiste en dejar un sistema sin modificar y acoplar el otro a éste para que la sincronización sea de un sistema a otro. El acoplamiento bidireccional consiste en acoplar los dos sistemas, es decir la dinámica de uno es influenciada por el otro y viceversa.

### 3.4.1. Configuración Maestro-Esclavo

La configuración maestro-esclavo consiste en tener un sistema que controle uno o más sistemas. En este tipo de configuraciones, el sistema maestro es el que gobierna las dinámicas y el que sincroniza el o los sistemas esclavos mediante señales de acoplamiento.

Esta configuración es una sincronización unidireccional muy utilizada en electrónica. La configuración maestro esclavo puede aplicarse para sistemas con muchos esclavos, es decir, se pueden sincronizar muchos sistemas esclavo a uno solo maestro. Un ejemplo es la sincronización de una red de osciladores en paralelo con un oscilador patrón [24].

A continuación un simple diagrama para ilustrar el esquema de sincronización maestro-esclavo.

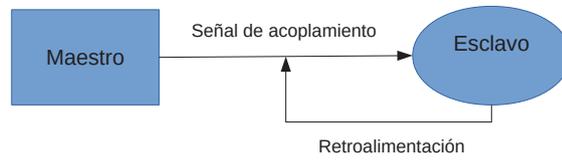


Figura 3.1: Esquema maestro-esclavo

### CAPÍTULO 3. SINCRONIZACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS CAÓTICOS

---

# Sincronización de los Osciladores van der Pol y Duffing

## 4.1. Introducción

El oscilador de van der Pol y el oscilador de Duffing, analizados en el capítulo 1, se destacan como paradigmas de osciladores no lineales. El primero es el prototipo de ciclo límite y el segundo es el prototipo del atractor extraño. Los estudios dedicados al oscilador van der Pol revelan que posee un rico comportamiento dinámico especialmente cuando es forzado externamente. El oscilador de van der Pol con un potencial de pozo doble y forzado externamente, exhibe sorprendentes estructuras de bifurcación con un importante número de estados como se puede observar en la figura 2.14. Para el oscilador de Duffing, su régimen autónomo conduce a oscilaciones amortiguadas, mientras que en la presencia de una fuerza externa sinusoidal demuestra histéresis, multiestabilidad, duplicación de período, y los escenarios intermitentes al caos Fig 2.27.

Un modelo de osciladores acoplados de diferentes atractores podría servir como un buen modelo para sistemas reales en la naturaleza [40]. En este capítulo se analizarán sistemas acoplados de osciladores de van der Pol, Duffing y van der Pol-Duffing. Se correrán simulaciones para ver si se consigue alguna sincronización variando los parámetros de acoplamiento. En este trabajo se usará un esquema de acoplamiento unidireccional Maestro-esclavo para tres formas de acoplamiento: elástico, disipativo y una combinación de ambos propuesta en [41]. Se aplicarán dichos esquemas de acoplamiento a tres configuraciones de osciladores, la primera es el oscilador de Duffing como maestro y el de van der Pol como esclavo, la segunda es el oscilador van der Pol-Duffing con potencial simétrico de maestro y el oscilador de Duffing como esclavo, y por último el oscilador de van der Pol-Duffing con potencial asimétrico de maestro con el oscilador de Duffing de potencial asimétrico de esclavo.

Para clarificar lo más posible el siguiente análisis, se introducen las siguientes definiciones relativas a los sistemas de 2 dimensiones.  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estado del

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

sistema maestro y  $y(t) \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estado del sistema esclavo, mientras que  $x_i(t)$  y  $y_i(t)$  son variables de estado.

- *Sincronización completa*: dos sistemas caóticos se dicen en sincronización completa si las funciones de error convergen a cero en un tiempo grande.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - y_i(t)| = 0. \quad (4.1)$$

- *Sincronización práctica*: cuando dos sistemas están en sincronización práctica, en alguno de sus canales, para un cierto valor del parámetro de control se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - y_i(t)| \leq \varepsilon, \quad (4.2)$$

para ciertos valores  $\varepsilon > 0$ . Se usa esta definición porque en gran parte de las ocasiones, la función de error no converge totalmente a cero pero en la práctica se consideran sincronizados.

- *Sincronización con desplazamiento vertical*: Es cuando existe algún valor  $\eta$ , para el cual se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - y_i(t) - \eta| = 0. \quad (4.3)$$

- *Sincronización parcial*: es cuando la sincronización sólo sucede en una de las variables de estado.

### 4.2. Sistema Duffing maestro y van der Pol esclavo

A continuación se muestra el oscilador de duffing forzado descrito por la ecuación (2.32), acoplado elásticamente con un oscilador de van der Pol descrito por la ecuación (2.21)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x^3 + \alpha x &= A_1 \cos(\omega_1 t), & \text{(Maestro)} \\ \ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y - K(x - y) &= A_2 \cos(\omega_2 t). & \text{(Esclavo)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Los parámetros son equivalentes a los del capítulo 2, para el oscilador de Duffing (maestro),  $\delta$  es el parámetro que regula la disipación,  $\beta$  y  $\alpha$  son los parámetros que definen el potencial; para el oscilador de van der Pol,  $\mu$  el parámetro del término disipativo y finalmente  $K$  es el parámetro de acoplamiento. El acoplamiento es un control por retroalimentación lineal proporcional a la diferencia de la posición.

Haciendo cambio de variables para reducir la dimensión del sistema:  $\dot{x} = u$  y  $\dot{y} = v$ , se obtiene el sistema equivalente de menor dimensión

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u, \\
 \dot{u} &= A_1 \cos \omega_1 t - \delta u - \beta x^3 - \alpha x, \\
 \dot{y} &= v, \\
 \dot{v} &= A_2 \cos \omega_2 t + \mu(1 - y^2)v - y + K(x - y).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Los valores de los parámetros del oscilador de Duffing y van der Pol usados para la simulación son:  $\delta = 0.3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\alpha = -1$ ,  $A_1 = 0.5$ ,  $\omega_1 = 1.3$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $A_2 = 0.6$  y  $\omega_2 = 0.4$ . Las condiciones iniciales son  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 2$ ,  $u_0 = 0.5$ ,  $y_0 = 0.8$  y  $v_0 = 1$ . Cuando el valor de  $K$  es cero, los sistemas están desacoplados y describen las siguientes trayectorias

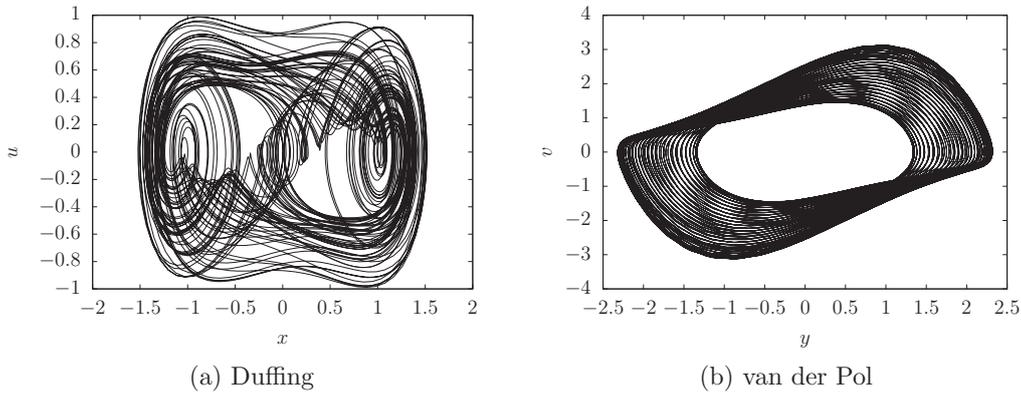


Figura 4.1: soluciones del sistema sin acoplar  $K = 0$ .

Considerando las funciones de error  $e_1(t) = x(t) - y(t)$  y  $e_2(t) = u(t) - v(t)$ , se varía el parámetro  $K$  en un intervalo de 0 a 200 variando en pasos pequeños. Las funciones de error sirven para encontrar los valores de  $K$  con los cuales ocurre sincronización en las proyecciones  $(x, y)$  y  $(u, v)$ . Las funciones  $e_1$  y  $e_2$  se obtienen restando las ecuaciones del sistema (4.5) y sustituyendo  $e_1 = e_2$ , lo que da origen al sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2, \\
 \dot{e}_2 &= A_1 \cos \omega_1 t - \delta u - x^3 + x - A_2 \cos \omega_2 t - \mu(1 - y^2)v + y - Ke_1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

El comportamiento de las funciones respecto al tiempo y con el valor fijo de  $K = 150$  se pueden observar en las figuras 4.2 (a) y (b). En general el problema de la sincronización se reduce a encontrar un valor adecuado para el parámetro de acoplamiento  $K$ .

La simulación pretende observar el comportamiento del sistema acoplado al variar el parámetro de acoplamiento  $K$ . El tiempo *infinito* que se usará de forma práctica es  $t \rightarrow 300$ , lo que representa un límite práctico para decir si existe o no sincronización de

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

acuerdo a los criterios (4.2). Para los diagramas de bifurcación de los errores se usará una ventana de  $200 \leq t \leq 300$  para registrar los puntos del diagrama.

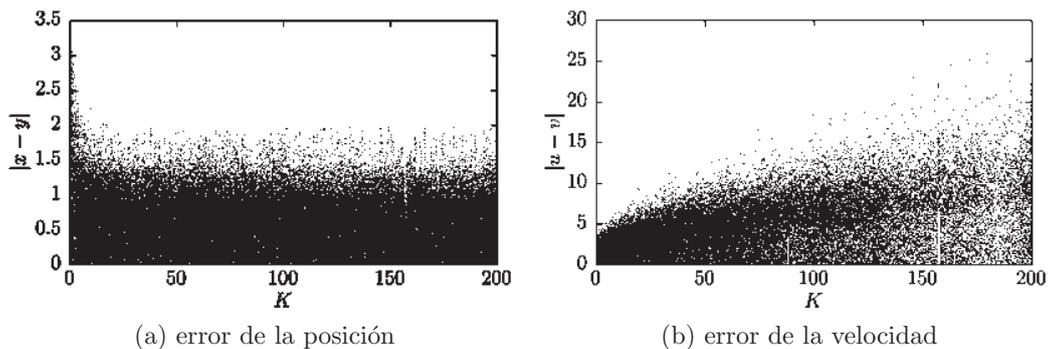


Figura 4.2: Evolución de las funciones de error respecto a  $K$ .

Corriendo una simulación con el parámetro  $K = 150$  en el intervalo de tiempo  $t \in [0, 1000]$ , se obtiene lo siguiente

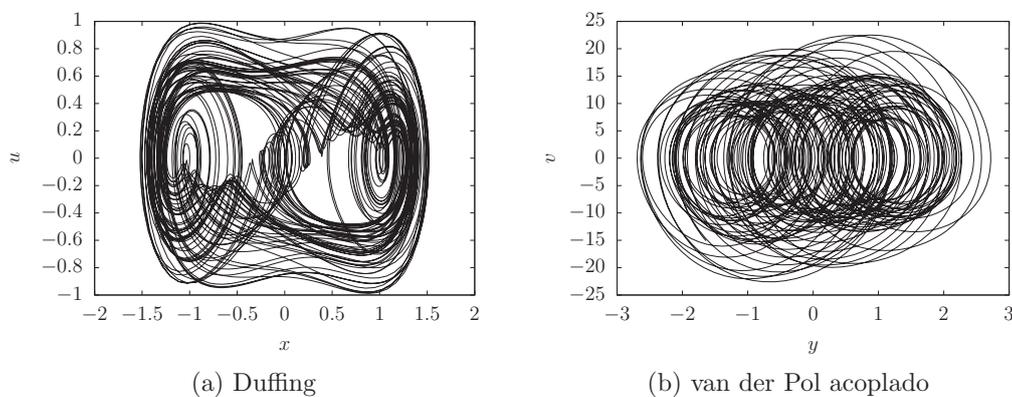


Figura 4.3: Espacios fase del sistema acoplado  $K = 150$ .

Se observa en la figura 4.2 que no existe sincronización en ninguno de los canales para ningún valor de  $K$ , ya que  $e_1$  se mantiene en un nivel y por otro lado  $e_2$  crece con  $K$ . Las figuras 4.4 (a) y (b), muestran las gráficas  $(x, y)$  y  $(u, v)$  respectivamente, ninguna muestra la identidad, lo que significa que no existe sincronización. La evolución de las funciones  $e_1$  y  $e_2$  con el parámetro fijo  $K = 150$ , se muestran con una escala logarítmica de tiempo en las figuras 4.5 (a) y (b) respectivamente. Se llevó hasta el tiempo  $t = 1000 \Rightarrow \log_{10}(t) = 3$  para corroborar que en tiempo muy grande no existe sincronización.

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

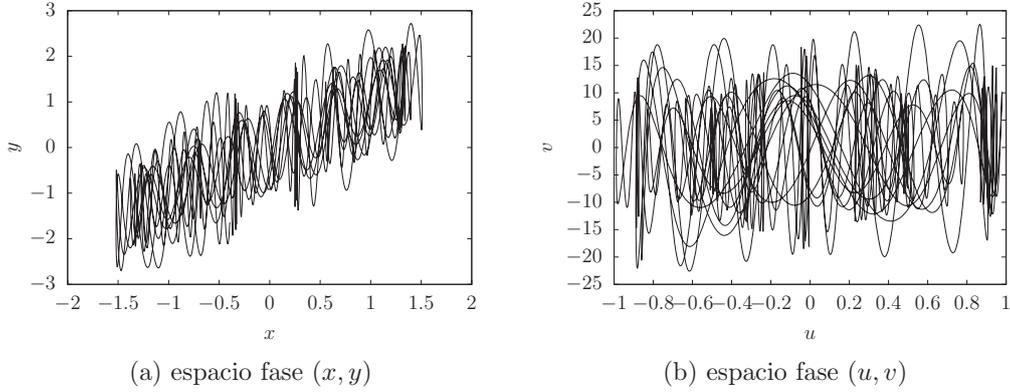


Figura 4.4: Espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  para  $K = 150$ .

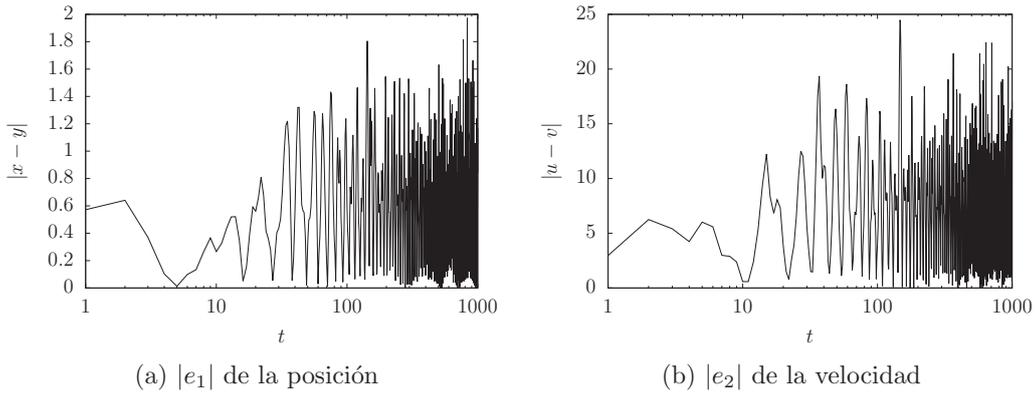


Figura 4.5: Evolucion temporal de  $|e_1|$  y  $|e_2|$  para  $K = 150$  en escala logarítmica.

Ahora se analizará bajo el mismo esquema, los sistemas con un acoplamiento disipativo, es decir, la función de control  $H(u - v)$  depende de los términos que corresponden a la velocidad generalizada de los sistemas. El sistema anterior definido por las ecuaciones (4.4), está acoplado elásticamente por una función lineal. Se tomará el mismo sistema pero con un acoplamiento disipativo lineal. El sistema tiene la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u, \\
 \dot{u} &= A_1 \cos \omega_1 t - \delta u - \beta x^3 - \alpha x, \\
 \dot{y} &= v, \\
 \dot{v} &= A_2 \cos \omega_2 t + \mu(1 - y^2)v - y + H(u - v).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para las simulaciones serán los mismos parámetros. Estudiamos la evolución del sistema variando el parámetro  $H$ . Los diagramas de bifurcación se obtienen por medio

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

de las funciones de error igual que en el acoplamiento anterior, se varía  $H$  en pequeños pasos de 0 a 200. Los diagramas de bifurcación de las funciones  $|e_1|$  y  $|e_2|$ , muestran los rangos para los cuales se consigue sincronización. Las funciones  $e_1$  y  $e_2$  se calculan como en la forma anterior quedando el sistema

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= A_1 \cos \omega_1 t - \delta u - x^3 + x - A_2 \cos \omega_2 t - \mu(1 - y^2)v + y - H e_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

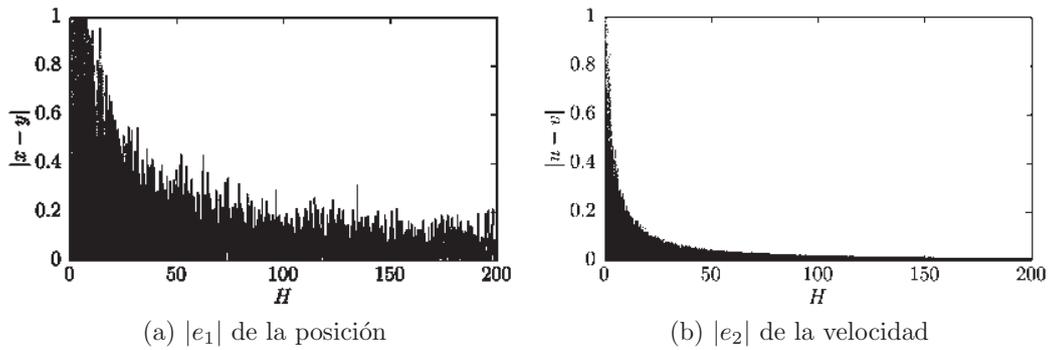


Figura 4.6: Evolución de  $|e_1|$  y  $|e_2|$  respecto a  $H$ .

Escogiendo el parámetro  $H = 150$ , se corre una simulación del sistema (4.7)

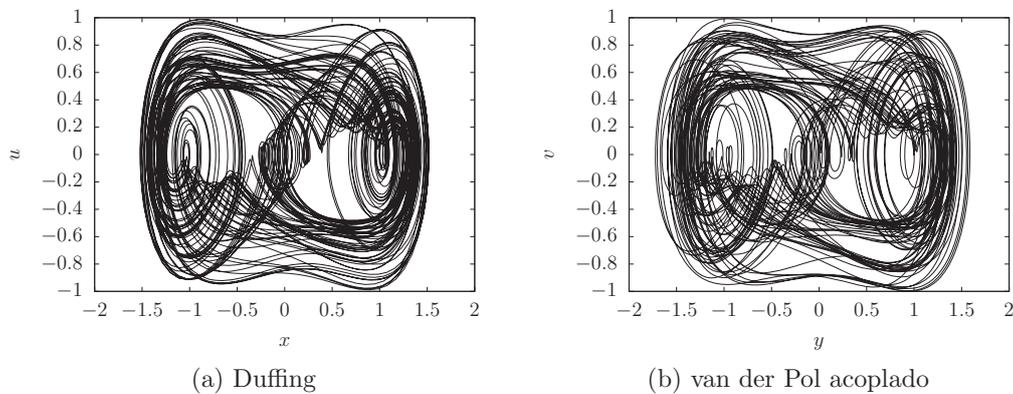


Figura 4.7: Espacios fase del sistema acoplado con  $H = 150$ .

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

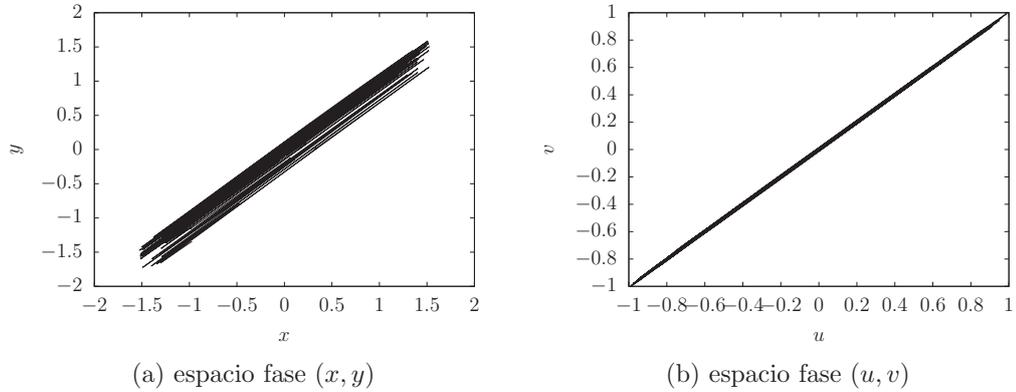


Figura 4.8: espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  con  $H = 150$ .

Se observa que para el valor  $H = 150$  se obtiene una sincronización práctica en la posición, mientras que para el canal de la velocidad se observa una sincronización completa para valores grandes de  $H$ . Comparando las imágenes 4.2 y 4.6, podemos observar que el acoplamiento disipativo requiere valores más pequeños para el parámetro de control. La evolución del error con el tiempo para el valor  $H = 150$ , se observa en las figuras 4.9 (a) y (b) para el canal de la posición y velocidad respectivamente.

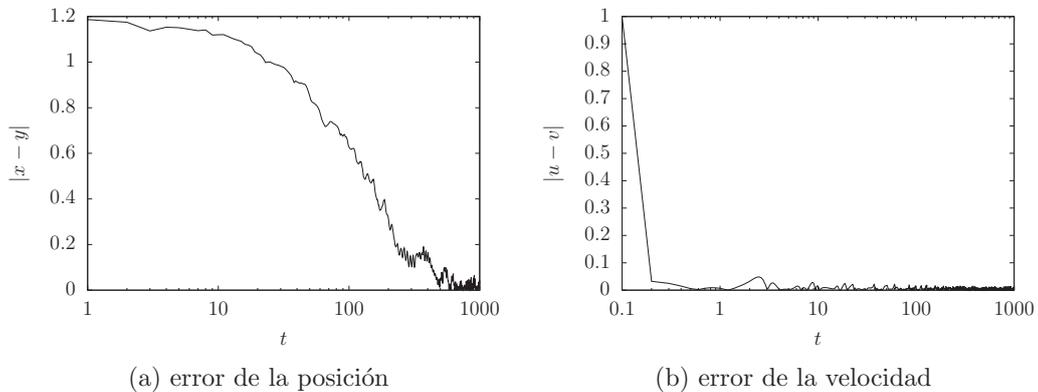


Figura 4.9: Evolución de las funciones de error respecto al tiempo para  $H = 150$ .

Se analiza a continuación un sistema acoplado con dos parámetros de acoplamiento  $G_1$  y  $G_2$ , el primero correspondería a un acoplamiento elástico agregado al término de la velocidad en el sistema esclavo y el segundo sería disipativo agregado al término de la aceleración. El sistema con dicho acoplamiento propuesto por Uriostegui en [41] sería el siguiente

$$\dot{x} = u, \tag{4.9}$$

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

$$\begin{aligned}\dot{u} &= A_1 \cos \omega_1 t - \delta u - x^3 + x, \\ \dot{y} &= v + G_1(x - y), \\ \dot{v} &= A_2 \cos \omega_2 t + \mu(1 - y^2)v - y + G_2(u - v).\end{aligned}$$

Los errores  $e_1 = x - y$  y  $e_2 = u - v$  se obtienen nuevamente restando las ecuaciones para obtener el sistema

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - G_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= A_1 \cos \omega_1 t - \delta u - x^3 + x - A_2 \cos \omega_2 t - \mu(1 - y^2)v + y - G_2 e_2.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Para analizar la dinámica del acoplamiento, se varían los parámetros  $G_1$  y  $G_2$  manteniendo uno constante. Los diagramas de bifurcación para  $|e_1|$  y  $|e_2|$  se construyen manteniendo constante  $G_2 = 50$  y variando  $G_1$  de 0 a 10 y el otro manteniendo  $G_1 = 2$  constante y variando  $G_2$  de 0 a 200. Como se aprecia en las figuras 4.10 (a) y (b), se obtiene sincronización completa en ambos canales.

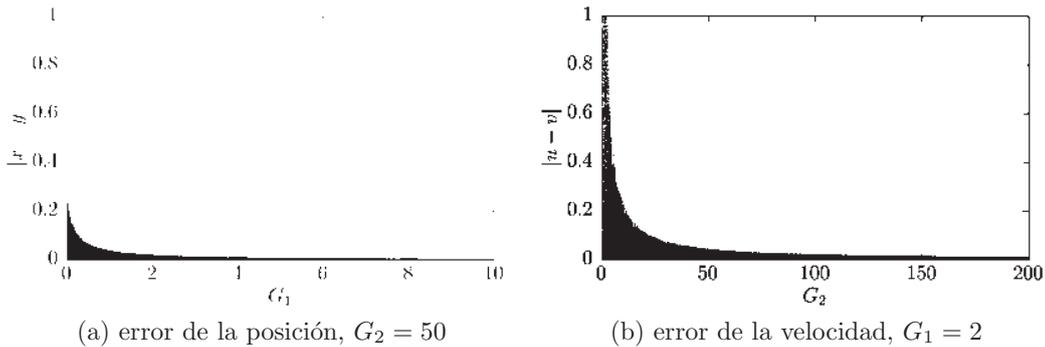


Figura 4.10: Evolución de los errores respecto a los parámetros  $G_1$  y  $G_2$ .

Se analizará los espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  para valores  $G_1 = 5$  y  $G_2 = 150$ . En las figuras 4.12 (a) y (b), se observa sincronización total pues la trayectoria en ambos canales es una línea recta. El valor de las funciones error respecto al tiempo se puede observar en la figura 4.13.

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

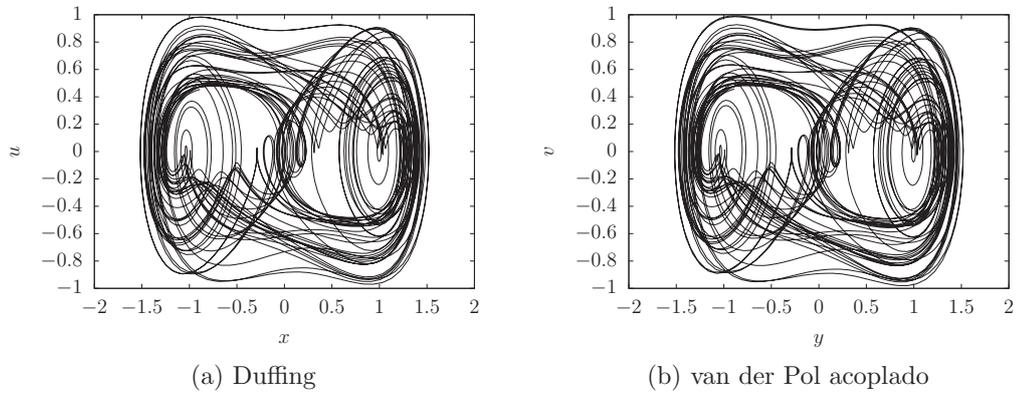


Figura 4.11: Espacios fase del sistema acoplado con  $G_1 = 5$  y  $G_2 = 150$ .

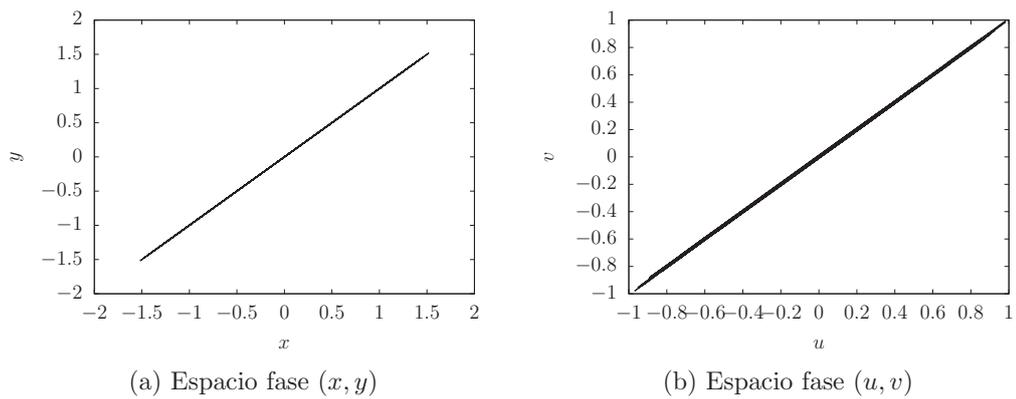


Figura 4.12: Espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  del sistema acoplado  $G_1 = 5$  y  $G_2 = 150$ .

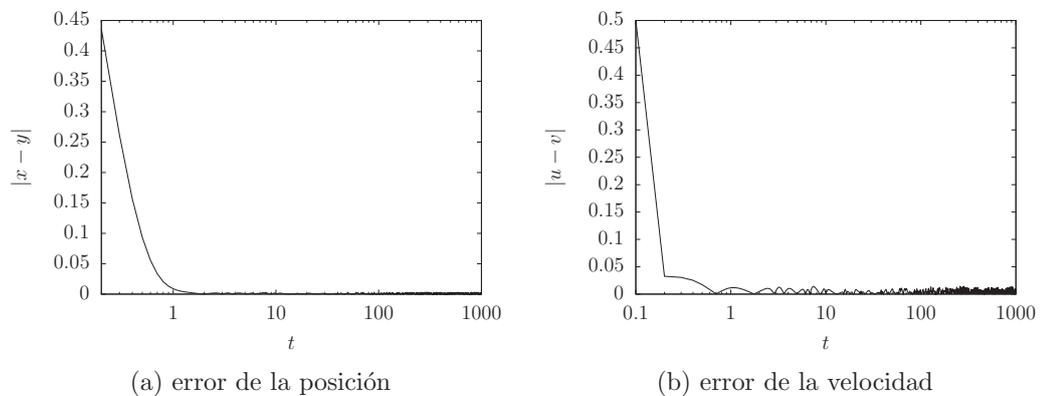


Figura 4.13: Evolución de las funciones de error respecto al tiempo para  $G_1 = 5$  y  $G_2 = 150$  en escala logarítmica

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

Se observa que el método con el acoplamiento combinado requiere valores menores para los parámetros de acoplamiento, e incluso sincroniza cuando no se puede con otros acoplamientos.

### 4.3. Sistema van der Pol-Duffing maestro y Duffing esclavo con potenciales tipo $\Phi^4$

En la secciones 2.2.4 y 2.3.3 se analizaron los osciladores cuando el potencial de las ecuaciones que los describen son del tipo  $\Phi^4$ . Se observan comportamientos un poco diferentes para los puntos fijos del sistema dependiendo de los parámetros del potencial que lo definen como simétrico o asimétrico. Como se mostró en el análisis, los puntos fijos y su estabilidad dependen mayormente de los parámetros que corresponden al potencial de dichas ecuaciones.

Se usará la expresión del oscilador de Duffing con potencial  $U_1$  y forzado descrito por la ecuación (2.3.3) para el acoplamiento con un oscilador de van der Pol-Duffing de potencial  $U_2$  descrito por la ecuación (2.23). En ambas expresiones se utilizarán los potenciales

$$U_1(y) = \frac{\beta_1}{4}y^4 + \frac{\gamma_1}{3}y^3 + \frac{\alpha_1}{2}y^2,$$
$$U_2(x) = \frac{\beta_2}{4}x^4 + \frac{\gamma_2}{3}x^3 + \frac{\alpha_2}{2}x^2.$$

Donde  $U_1(y)$  corresponde al potencial del oscilador van der Pol-Duffing (maestro) y  $U_2(x)$  es el potencial del oscilador de Duffing (esclavo). La simetría de los potenciales depende del término  $\gamma_i$  como se describe en el capítulo 2.

#### 4.3.1. Acoplamiento elástico con $\Phi^4$ simétrico

Se utiliza un acoplamiento análogo al anterior. El sistema acoplado quedaría

$$\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + \frac{dU_1}{dy}(y) = A_1 \cos(\omega_1 t), \quad (\text{Maestro})$$
$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \frac{dU_2}{dx}(x) - K(y - x) = A_2 \cos(\omega_2 t). \quad (\text{Esclavo}). \quad (4.11)$$

El acoplamiento es un control feedback lineal proporcional a la diferencia de la posición. Haciendo cambio de variables para reducir la dimensión del sistema:  $\dot{x} = u$  y  $\dot{y} = v$ , se obtiene el sistema equivalente de menor dimensión

$$\dot{y} = v,$$

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= A_1 \cos \omega_1 t + \mu(1 - y^2)v - \frac{dU_1}{dy}(y), \\
 \dot{x} &= u, \\
 \dot{u} &= A_2 \cos \omega_2 t - \delta u - \frac{dU_2}{dx}(x) + K(y - x).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Considerando las funciones de error que en este caso son  $e_1(t) = y(t) - x(t)$  y  $e_2(t) = v(t) - u(t)$ , se varía el parámetro  $K$  en un intervalo de 0 a 200 variando en pasos pequeños. Nuevamente los diagramas de bifurcación cumplen con el mismo tiempo límite y la misma ventana de captura. Las funciones de error sirven para encontrar los valores de  $K$  con los cuales ocurre sincronización en las proyecciones de los planos  $(x, y)$  y  $(u, v)$ . Las funciones  $e_1$  y  $e_2$  se obtienen restando las ecuaciones del sistema (4.12) y sustituyendo  $\dot{e}_1 = \dot{e}_2$ , lo que da origen al sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= \dot{e}_2, \\
 \dot{e}_2 &= A_1 \cos \omega_1 t + \mu(1 - y^2)v - \frac{dU_1}{dy}(y) - A_2 \cos \omega_2 t + \delta u + \frac{dU_2}{dx}(x) - K e_1.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Los valores de los parámetros del oscilador de Duffing y van der Pol-Duffing usados para la simulación son:  $\delta = 0.3$ ,  $A_2 = 0.5$ ,  $\omega_2 = 1.3$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $A_1 = 0.5$  y  $\omega_1 = 0.6$ . Las condiciones iniciales son  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 0.8$ ,  $v_0 = 1$ ,  $x_0 = 2$  y  $u_0 = -1$ . Los parámetros para ambos potenciales serán:  $\beta_i = 1$ ,  $\gamma_i = 0$ ,  $\alpha_i = -1$ . Estos parámetros describen un potencial simétrico que se puede apreciar en la figura 4.14.

Cuando el valor de  $K$  es cero, los sistemas están desacoplados y describen las trayectorias mostradas en la figura 4.15.

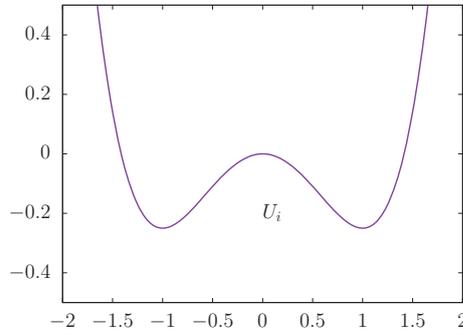


Figura 4.14: Potenciales simétricos  $U_i$ .

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

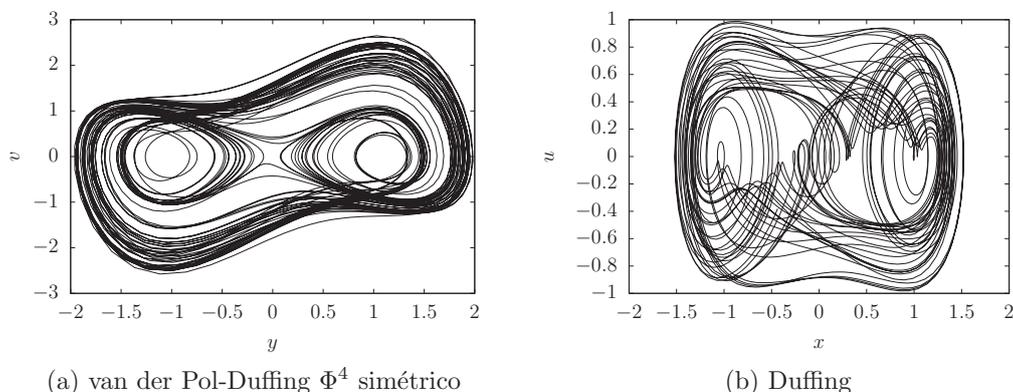


Figura 4.15: Espacios fase del sistema desacoplado  $K = 0$ .

Corriendo una simulación con el parámetro  $K = 150$ , se obtienen los gráficos 4.17 (a) y (b) para ambos osciladores con el acoplamiento. El comportamiento de las funciones  $e_1$  y  $e_2$  respecto al tiempo se muestra en la figura 4.19, se observa que disminuyen casi hasta cero, indicando una sincronización completa en la posición y práctica en la velocidad.

Se observa en la figura 4.16 que existe sincronización completa en la posición y práctica en la velocidad, ya que las funciones de error se reducen asintóticamente con el aumento del valor de  $K$ . Las trayectorias en los espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  en la figura 4.18, muestran líneas rectas de  $45^\circ$  con un pequeño engrosamiento en el canal de  $(u, v)$ . Con el valor de  $K = 150$ , se cumple la condición (4.2).

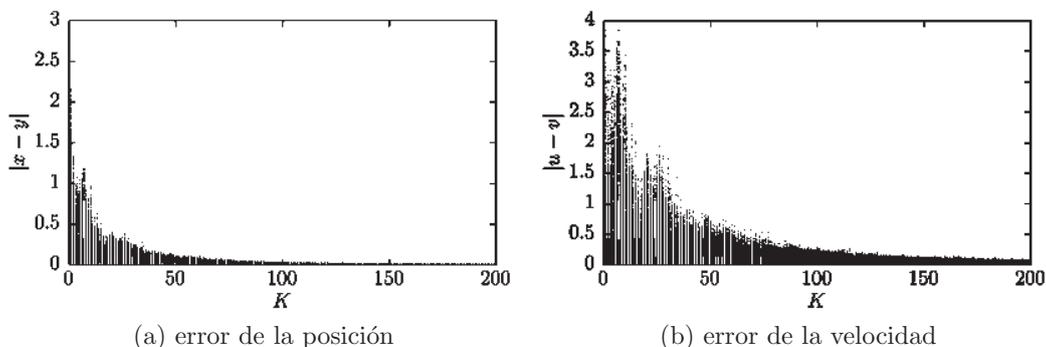


Figura 4.16: Evolución de las funciones de error respecto a  $K$ .

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

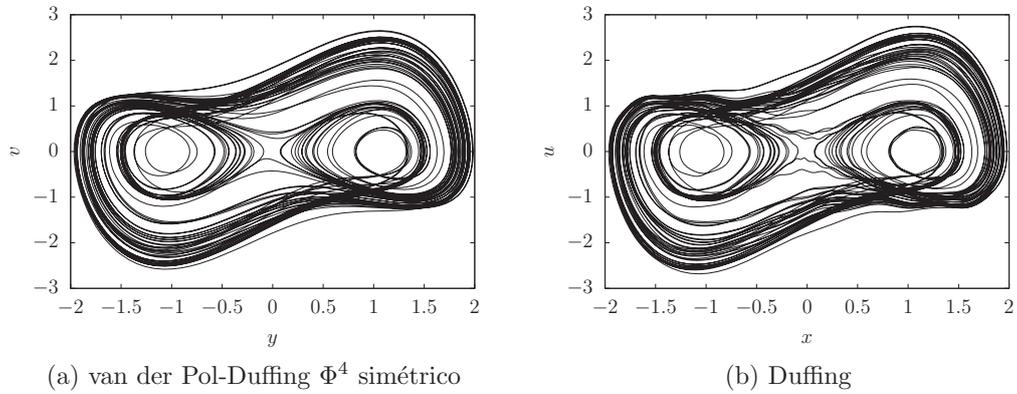


Figura 4.17: Espacios fase del sistema acoplado  $K = 150$ .

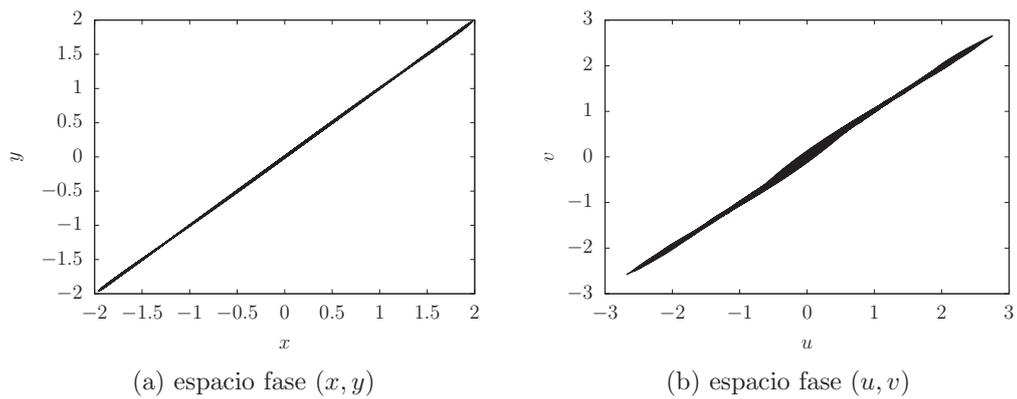


Figura 4.18: Espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  del sistema acoplado para  $K = 150$ .

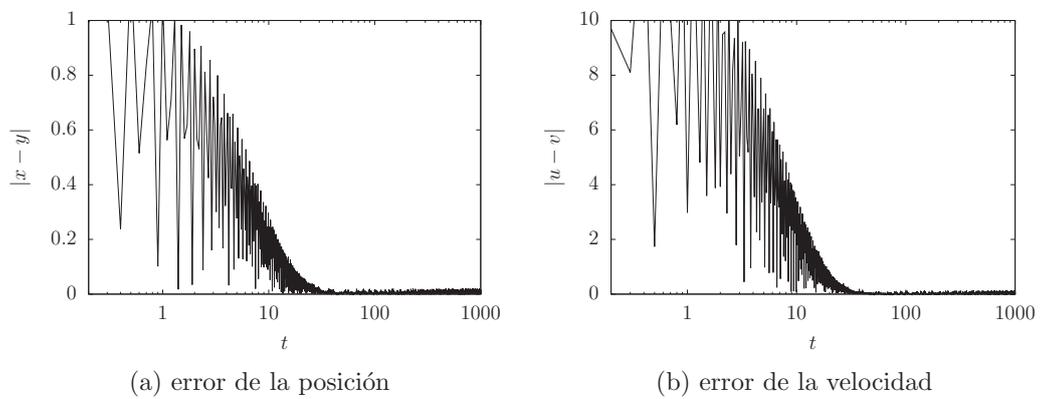


Figura 4.19: Evolucion temporal de las funciones de error para  $K = 150$  en escala logarítmica.

### 4.3.2. Acoplamiento disipativo con $\Phi^4$ simétrico

Ahora se analizará bajo el mismo esquema, los sistemas con un acoplamiento disipativo, es decir, la función de control  $H(u-v)$  depende de los términos que corresponden a la velocidad. El sistema anterior definido por las ecuaciones (4.11), está acoplado elásticamente por una función lineal. Se tomará el mismo sistema pero con un acoplamiento disipativo lineal. El sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= A_1 \cos \omega_1 t + \mu(1 - y^2)v - \frac{dU_1}{dy}(y), \\ \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= A_2 \cos \omega_2 t - \delta u - \frac{dU_2}{dx}(x) + H(v - u). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para las simulaciones serán los mismos parámetros. Estudiamos la evolución del sistema variando el parámetro  $H$ . Los diagramas de bifurcación se obtienen por medio de las funciones de error igual que en el acoplamiento anterior, se varía  $H$  en pequeños pasos de 0 a 200. Las funciones  $e_1$  y  $e_2$  se calculan análogamente al caso anterior y queda el sistema

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= A_1 \cos \omega_1 t + \mu(1 - y^2)v - \frac{dU_1}{dy}(y) - A_2 \cos \omega_2 t + \delta u + \frac{dU_2}{dx}(x) - H e_1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Los diagramas de bifurcación de las funciones de error, muestran los rangos para los cuales se consigue sincronización, ambos diagramas se pueden observar en la figura 4.20.

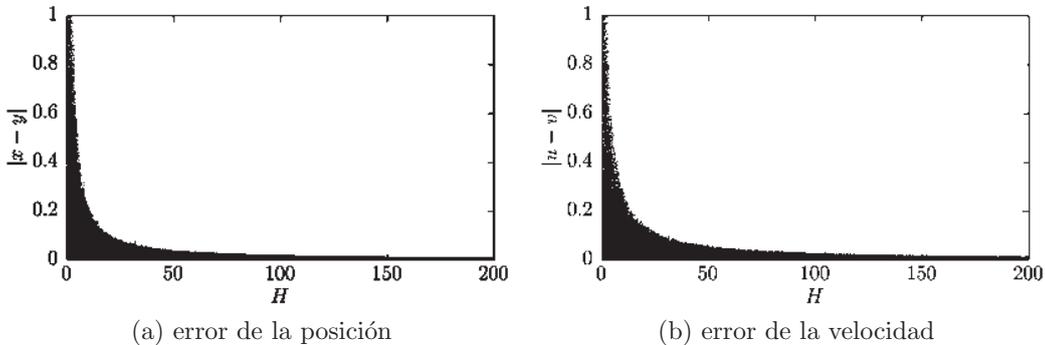


Figura 4.20: Evolución de las funciones de error respecto a  $H$ .

Escogiendo el parámetro  $H = 150$ , se corre una simulación del sistema (4.14)

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

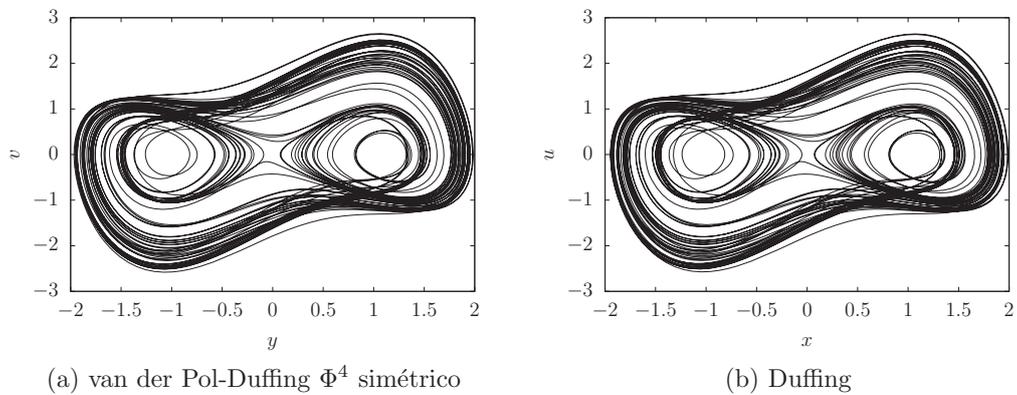


Figura 4.21: Espacios fase del sistema acoplado con  $H = 150$ .

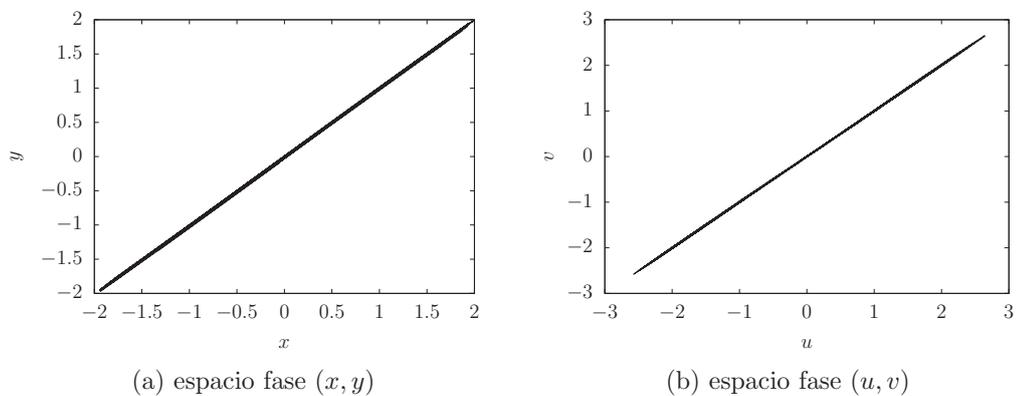


Figura 4.22: Espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  con  $H = 150$ .

Se observa que para el valor  $H = 150$  se obtiene una sincronización total en ambos canales. La evolución del error con el tiempo para el valor  $H = 150$ , se observa en las figuras 4.23 (a) y (b) para el canal de la posición y velocidad respectivamente, analizando las figura podemos decir que existe sincronización total en ambos canales para el valor  $H = 150$ .

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

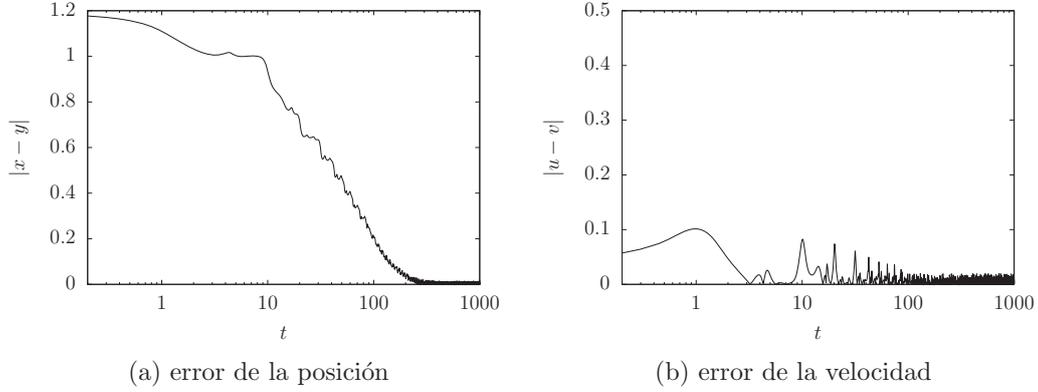


Figura 4.23: Evolución temporal de las funciones de error en escala logarítmica para  $H = 150$ .

### 4.3.3. Acoplamiento combinado con $\Phi^4$ simétrico

Se analiza a continuación un sistema acoplado con dos parámetros de acoplamiento  $G_1$  y  $G_2$ , el primero correspondería a un acoplamiento elástico agregado al término de la velocidad en el sistema maestro y el segundo sería disipativo agregado al término de la aceleración. El sistema con dicho acoplamiento propuesto por Uriostegui en [41] sería el siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= v, \\
 \dot{v} &= A_1 \cos \omega_1 t + \mu(1 - y^2)v - \frac{dU_1}{dy}(y), \\
 \dot{x} &= u + G_1(y - x), \\
 \dot{u} &= A_2 \cos \omega_2 t - \delta u - \frac{dU_2}{dx}(x) + G_2(v - u).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Los errores  $e_1 = y - x$  y  $e_2 = v - u$  se obtienen nuevamente restando las ecuaciones para obtener el sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 - G_1 e_1, \\
 \dot{e}_2 &= A_1 \cos \omega_1 t + \mu(1 - y^2)v - \frac{dU_1}{dy}(y) - A_2 \cos \omega_2 t + \delta u + \frac{dU_2}{dx}(x) - G_2 e_2.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Para analizar la dinámica del acoplamiento, se varían los parámetros  $G_1$  y  $G_2$  manteniendo uno constante. Los diagramas de bifurcación para  $|e_1|$  y  $|e_2|$  se construyen manteniendo constante  $G_2 = 50$  y variando  $G_1$  de 0 a 10 y el otro manteniendo  $G_1 = 2$  constante y variando  $G_2$  de 0 a 200.

Como se aprecia en las figuras 4.24 (a) y (b), se obtiene sincronización completa en ambos canales.

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

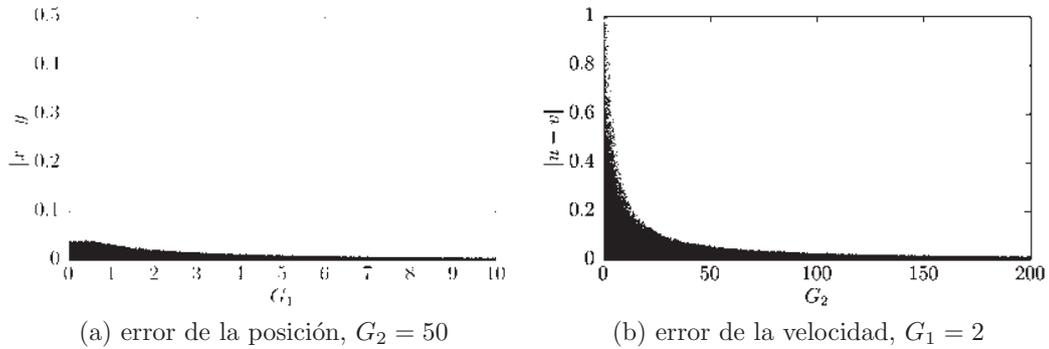


Figura 4.24: Evolución de las funciones de error respecto a los parámetros  $G_1$  y  $G_2$ .

Se analizará los espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  para valores  $G_1 = 8$  y  $G_2 = 100$ . En las figuras 4.26 (a) y (b), se observa que en el canal de la posición, existe sincronización completa. En el canal de la velocidad observamos una sincronización completa también ya que se observan líneas de 45 grados en los espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$ . El valor de las funciones error respecto al tiempo se puede observar en la figura 4.27.

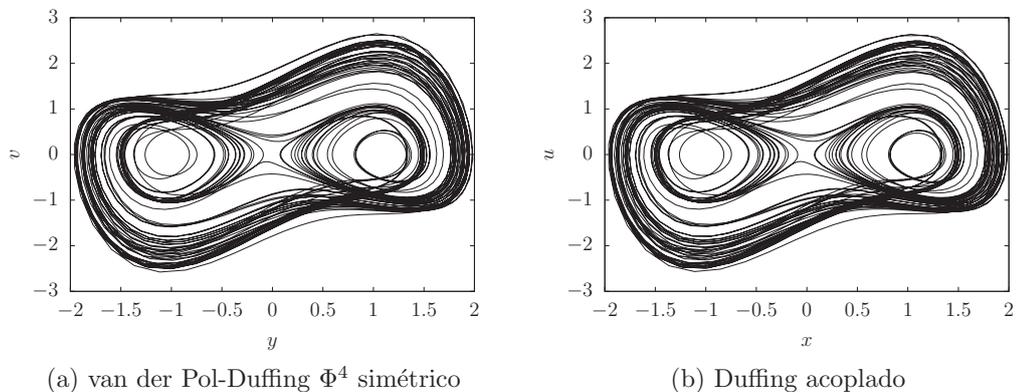


Figura 4.25: Espacios fase del sistema acoplado con  $G_1 = 8$  y  $G_2 = 100$ .

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

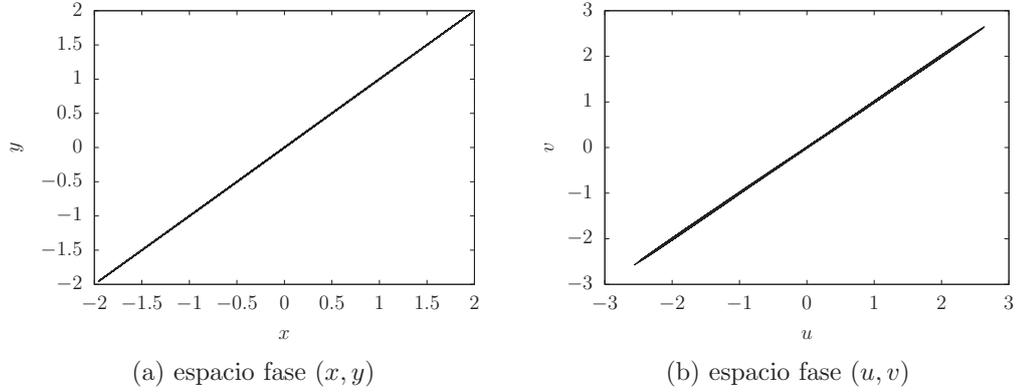


Figura 4.26: Espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  del sistema acoplado con  $G_1 = 8$  y  $G_2 = 100$ .

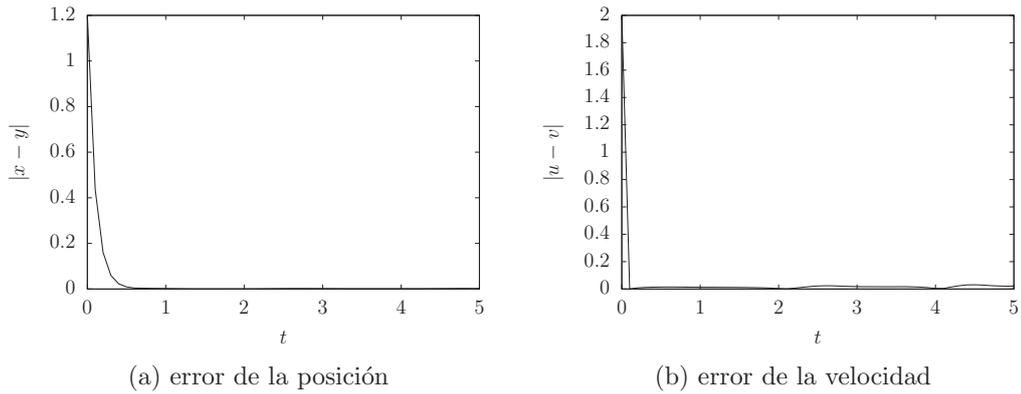


Figura 4.27: Evolución de las funciones de error respecto al tiempo para  $G_1 = 8$  y  $G_2 = 100$ .

Se observa nuevamente que el método con el acoplamiento combinado propuesto en [41], requiere valores más pequeños en los parámetros de control para mejorar los resultados de la sincronización.

### 4.3.4. Acoplamiento elástico con $\Phi^4$ asimétricos

Los valores de los parámetros del oscilador de Duffing y van der Pol-Duffing usados para la simulación son:  $\delta = 0.1$ ,  $A_2 = 0.35$ ,  $\omega_2 = 1.3$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $A_1 = 0.9$  y  $\omega_1 = 1.3$ . Las condiciones iniciales son  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 0.8$ ,  $v_0 = 1$ ,  $x_0 = 2.1$  y  $u_0 = 0$ . Los parámetros para ambos potenciales serán:  $\beta_1 = 0.7$ ,  $\gamma_1 = -1.4$ ,  $\alpha_1 = 0.7$ ,  $\beta_2 = 0.7$ ,  $\gamma_2 = 1.4$  y  $\alpha_2 = 0.7$ . Estos parámetros describen dos potenciales asimétricos reflejados. Los potenciales se pueden apreciar en la figura 4.28.

Cuando el valor de  $K$  es cero, los sistemas están desacoplados y describen las trayectorias mostradas en la figura 4.29.

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

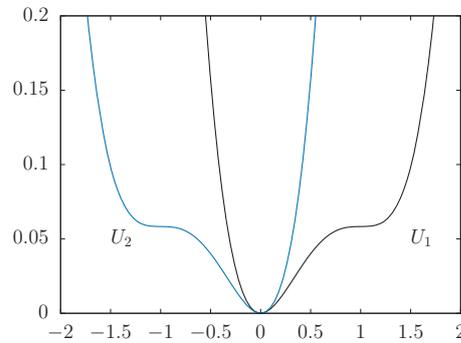
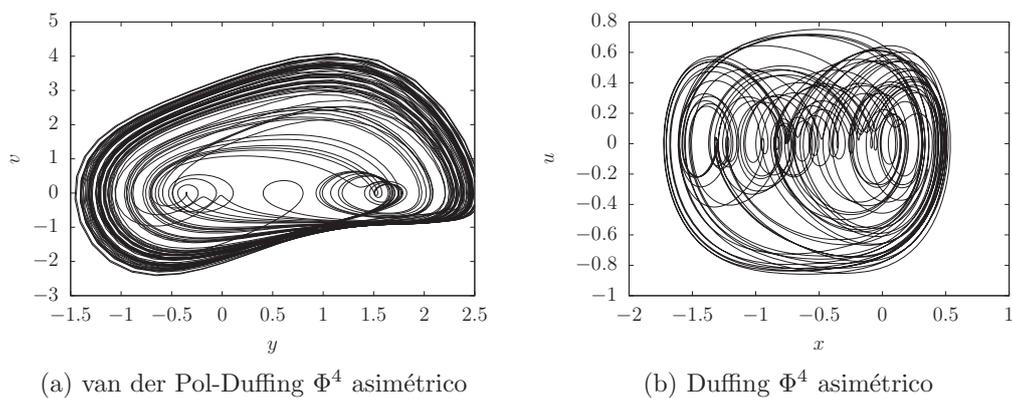


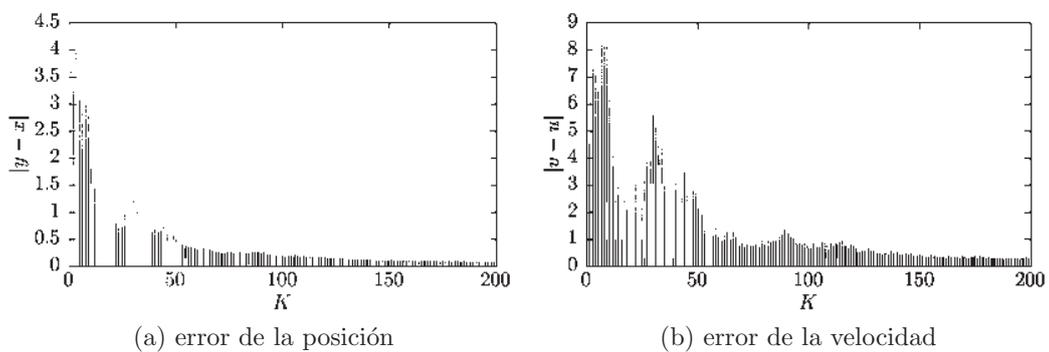
Figura 4.28: Potenciales asimétricos  $U_1$  y  $U_2$ .



(a) van der Pol-Duffing  $\Phi^4$  asimétrico

(b) Duffing  $\Phi^4$  asimétrico

Figura 4.29: Espacios fase del sistema desacoplado  $K = 0$ .



(a) error de la posición

(b) error de la velocidad

Figura 4.30: Evolución de las funciones de error respecto a  $K$ .

Corriendo una simulación con el parámetro  $K = 200$ , se obtienen los gráficos 4.31 (a) y (b) para ambos osciladores con el acoplamiento. El comportamiento de las funcio-

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

nes  $e_1$  y  $e_2$  respecto al tiempo se muestra en la figura 4.33, se observa una sincronización completa en  $(x, y)$  y práctica en  $(u, v)$ .

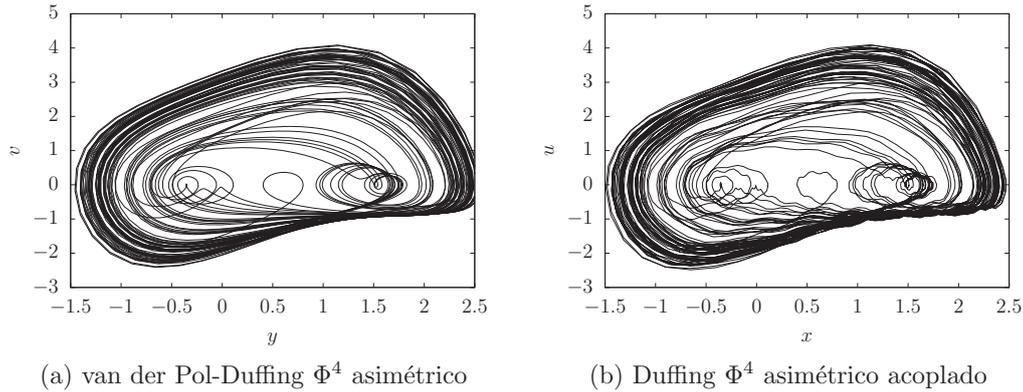


Figura 4.31: Espacios fase del sistema acoplado  $K = 200$ .

Se observa en la figura 4.30 que existe sincronización completa en ambos canales, ya que las funciones de error se reducen asintóticamente con el aumento del valor de  $K$ . Las gráficas de  $(x, y)$  y  $(u, v)$  en la figura 4.32 muestran líneas rectas de  $45^\circ$  con un pequeño engrosamiento en el canal de  $(u, v)$ . Con el valor de  $K = 200$ , se cumple la condición (4.2).

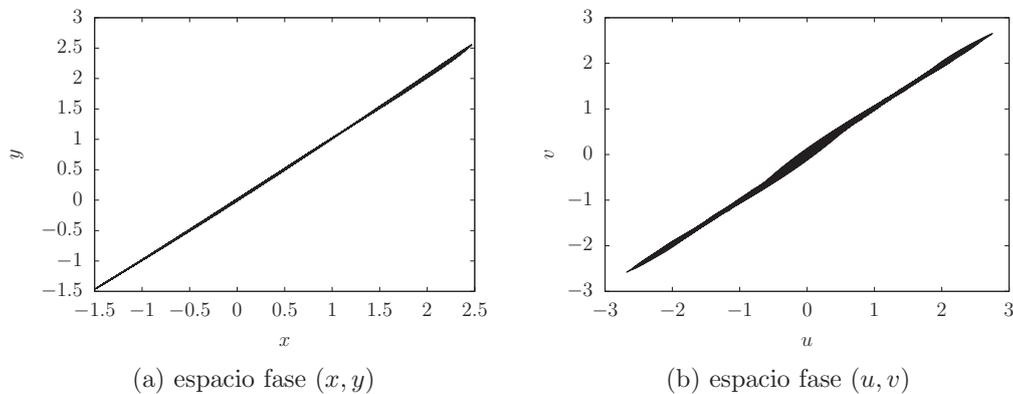


Figura 4.32: Espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  del sistema acoplado para  $K = 200$ .

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

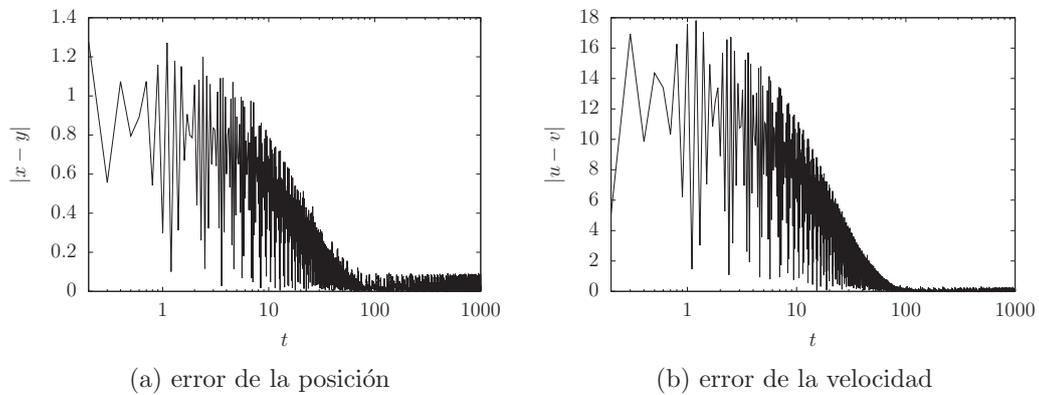


Figura 4.33: Evolucion temporal de las funciones de error para  $K = 200$  en escala logarítmica.

### 4.3.5. Acoplamiento disipativo con $\Phi^4$ asimétricos

Los diagramas de bifurcación de las funciones  $|e_1|$  y  $|e_2|$ , muestran los rangos para los cuales se consigue sincronización, se pueden observar en la figura 4.34. Para el error de la posición se observa un valor asintótico que con los cálculos numéricos se estima de 1.3 aproximadamente.

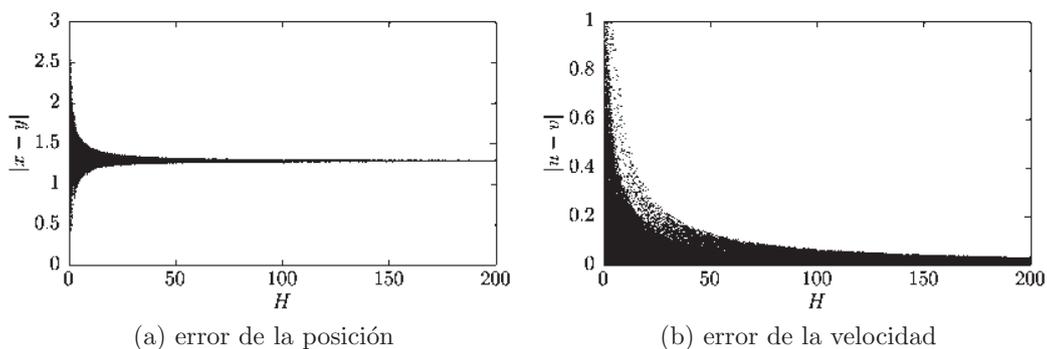


Figura 4.34: Evolución de las funciones de error respecto a  $H$ .

Escogiendo el parámetro  $H = 200$ , se corre una simulación del sistema (4.14)

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

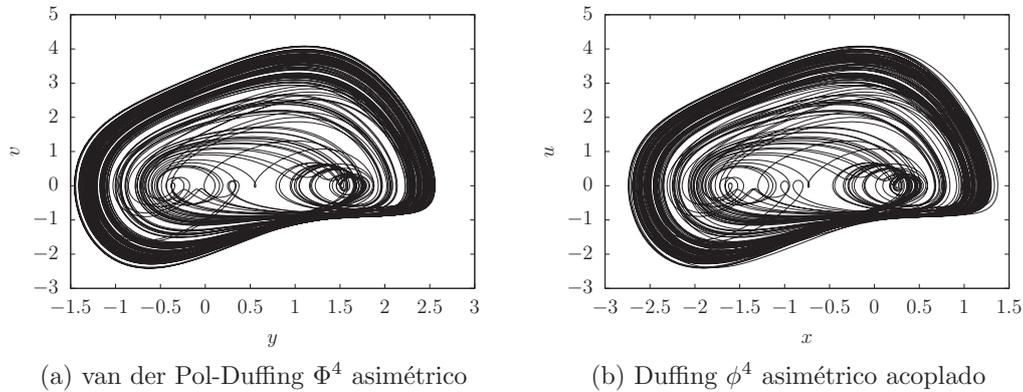


Figura 4.35: Espacios fase del sistema acoplado con  $H = 200$ .

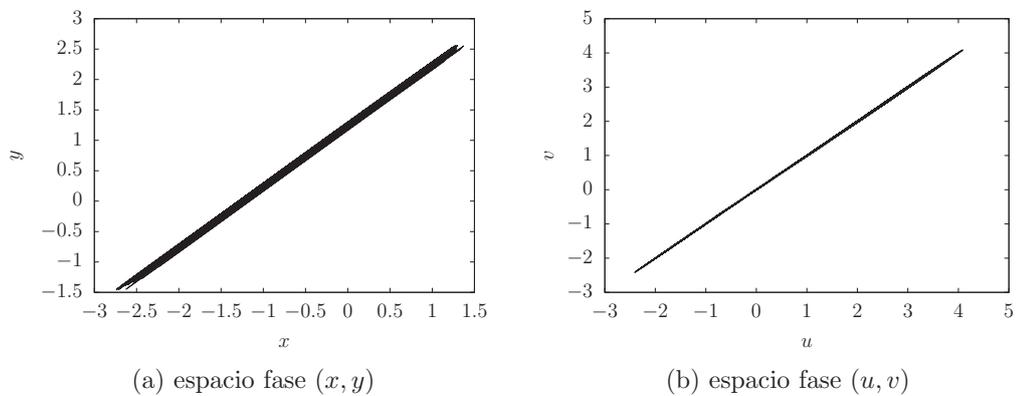


Figura 4.36: Espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  con  $H = 200$ .

Se observa que para el valor  $H = 200$  se obtiene una sincronización con desplazamiento vertical en el canal de la posición y por otro lado en el canal de la velocidad se observa una sincronización completa. Con el marco del capítulo 3, podría llamarse una sincronización generalizada, donde el mapeo de la ecuación (3.19) sería  $x = \varphi(y) = y - 1.3$ , lo que se traduce a que se cumple la condición (4.3) con  $\eta = 1.3$ . La evolución del error con el tiempo para el valor  $H = 200$ , se observa en las figuras 4.37 (a) y (b) para el canal de la posición y velocidad respectivamente.

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

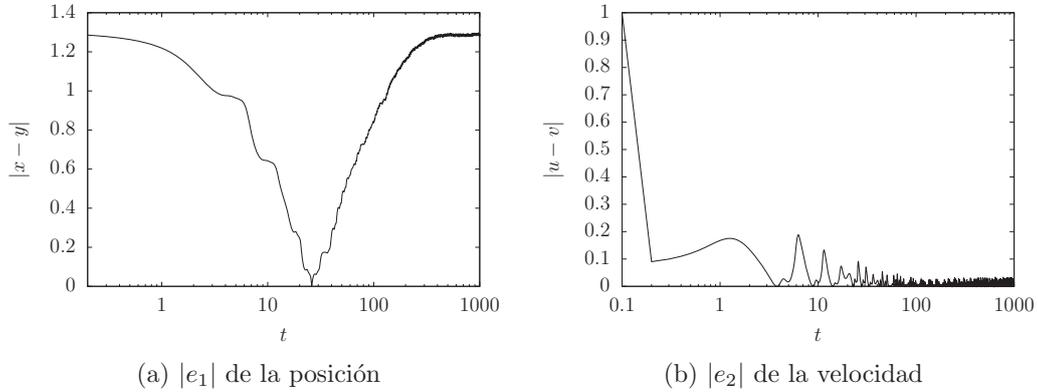


Figura 4.37: Evolución temporal de las funciones de error en escala logarítmica para  $H = 200$ .

### 4.3.6. Acoplamiento combinado con $\Phi^4$ asimétricos

Como se aprecia en las figuras 4.38 (a) y (b), se obtiene sincronización completa en todos los canales también para los potenciales asimétricos.

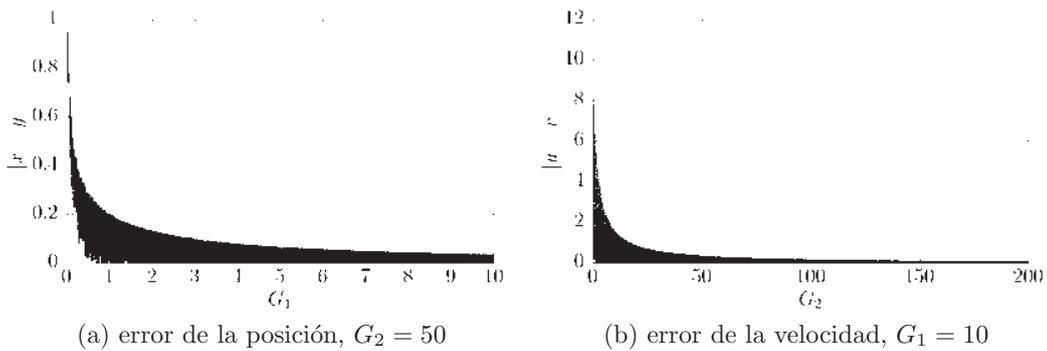


Figura 4.38: Evolución de los errores respecto a los parámetros  $G_1$  y  $G_2$ .

Se analizará los subespacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  para valores  $G_1 = 10$  y  $G_2 = 150$ . En las figuras 4.40 (a) y (b), se observa sincronización completa en el canal de la posición, lo que representa una gran mejora al acoplamiento disipativo donde existía desplazamiento vertical. En el canal de la velocidad se observa sincronización práctica debido a una deformación en la recta del espacio fase  $(u, v)$ . El comportamiento de las funciones error respecto al tiempo se puede observar en la figura 4.41.

CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

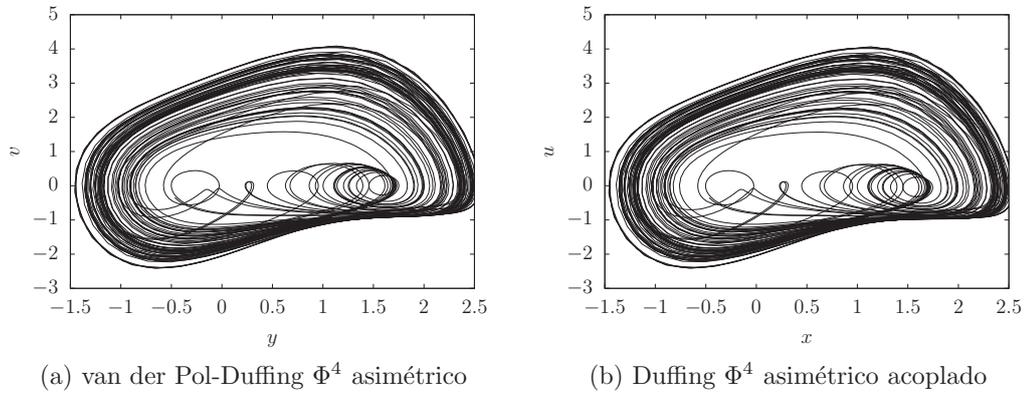


Figura 4.39: Espacios fase del sistema acoplado con  $G_1 = 10$  y  $G_2 = 150$ .

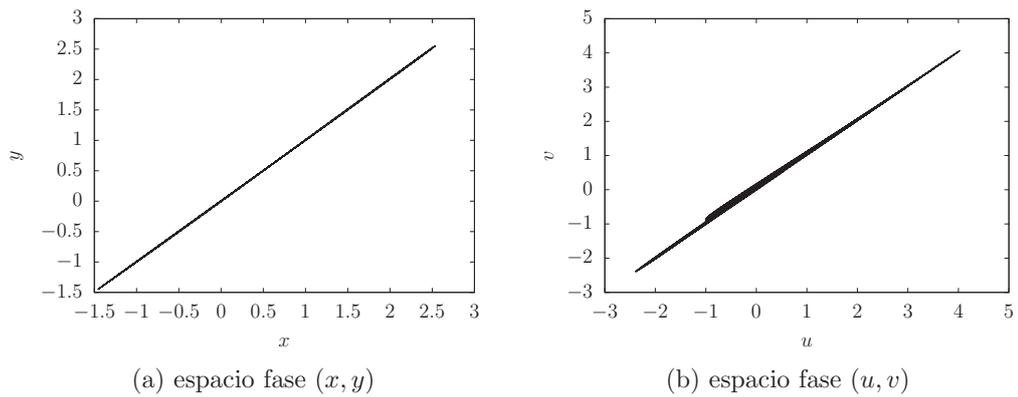


Figura 4.40: Espacios fase  $(x, y)$  y  $(u, v)$  del sistema acoplado  $G_1 = 10$  y  $G_2 = 150$ .

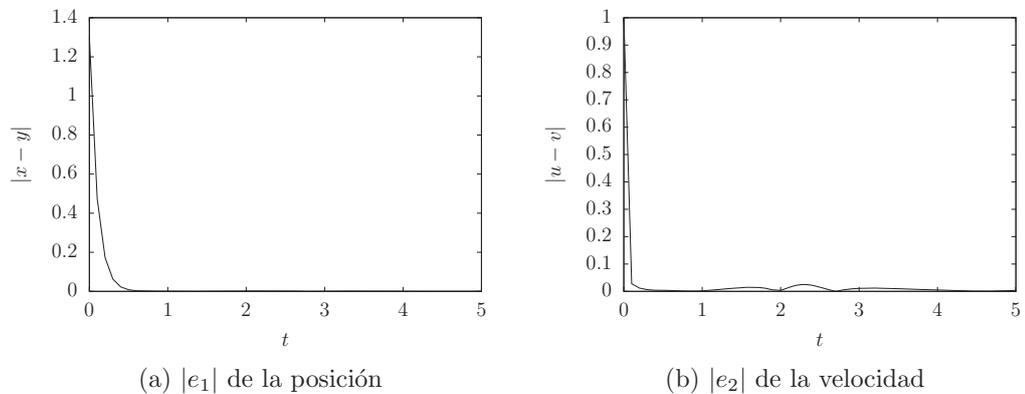


Figura 4.41: Evolución temporal de las funciones de error para  $G_1 = 10$  y  $G_2 = 150$ .

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

Nuevamente podemos decir que el método con el acoplamiento combinado propuesto en [41], requiere valores más pequeños en los parámetros de control para mejorar los resultados de la sincronización e incluso funciona en casos donde los otros acoplamientos no.

## CAPÍTULO 4. SINCRONIZACIÓN DE LOS OSCILADORES VAN DER POL Y DUFFING

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

Esta tesis está basada en el estudio de los osciladores dinámicos no lineales que últimamente ha tenido gran interés por la gran cantidad de aplicaciones que se le observan. Algunos sistemas no lineales presentan inestabilidades que en ocasiones conducen a un comportamiento no periódico conocido con el nombre de caos determinista. En particular, los osciladores de van der Pol y Duffing, han sido sistemas utilizados en todos los capítulos expuestos aquí, debido a las ventajas que presenta cuando se comparan con sistemas reales. Los resultados obtenidos en esta tesis están basados en simulaciones numéricas de las ecuaciones que describen la dinámica de los osciladores de van der Pol y Duffing.

En las simulaciones se observa que el acoplamiento elástico en general requiere valores más grandes para sincronizar e incluso puede no funcionar en algunos casos. En la simulación de Duffing maestro y van der Pol esclavo se observa que no existe sincronización en el rango de valores de 0 a 200 para  $K$ . Para el caso de van der Pol-Duffing maestro y Duffing esclavo, se observó que el acoplamiento elástico es menos eficiente que los otros. A pesar de que había sincronización para el caso de potenciales simétricos, el esquema de acoplamiento elástico fue menos eficiente que los demás. En el caso de van der Pol-Duffing maestro y Duffing esclavo con potenciales asimétricos, también demostró ser menos eficiente que los otros acoplamientos.

Al utilizar el acoplamiento elástico en los tres sistemas, a lo mucho, se obtiene sincronización completa en un solo canal.

Para las simulaciones con acoplamiento disipativo se observa una mejora en el sentido de que disminuyeron los valores para  $|e_1|$  y  $|e_2|$  con valores menores para el parámetro de acoplamiento. Sin embargo, en el caso particular del sistema van der Pol-Duffing maestro y Duffing esclavo con  $\Phi^4$  asimétrico, se observa un desplazamiento del sistema en el canal de la posición. Podría considerarse una mejora porque el error se estabiliza a un sólo valor con el cual se puede hacer un mapeo que conserve las propiedades topológicas del sistema, siendo así una sincronización con desplazamiento. Podría decirse que el acoplamiento disipativo es un método de sincronización mejor que el elástico para los osciladores estudiados en el capítulo 4.

En el acoplamiento disipativo solo en un caso se obtuvo la sincronización completa

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

---

en ambos canales. Un caso en particular resultó con un desplazamiento que incrementa el valor de la función de error pero que por lo visto conserva mejor las propiedades topológicas de los espacios fase.

Se observó también que el acoplamiento combinado es más eficiente para estos osciladores en el sentido mismo de disminuir el tiempo de convergencia de los errores. Para el caso de van der Pol-Duffing con Duffing asimétricos se observó que el desplazamiento que se presentó con el acoplamiento disipativo dejó de existir, sin embargo el error en el canal de la velocidad es mayor con el acoplamiento combinado que con el disipativo pero en total termina siendo mejor (menos error en menos tiempo) el combinado.

En el caso del esquema de acoplamiento combinado se logró obtener la sincronización completa en todos los casos. Esto indica que el método de acoplamiento combinado presenta mejoras significativas para la sincronización de estos sistemas caóticos en particular.

Las simulaciones del sistema van der Pol-Duffing maestro y Duffing esclavo muestran en general mayor dificultad para la sincronización cuando el potencial es asimétrico. Sería importante indagar en la causa.

# Bibliografía

- [1] M. Kline. El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial.
- [2] Robert L. Borreci, Courtney S. Coleman. Ecuaciones Diferenciales Una Perspectiva de Modelación. Alfaomega, México, DF (2002).
- [3] A. Kiseliiov, M. Krasnov, G. Makarenko. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ed. Mir. (1979)
- [4] J. Stewart. Cálculo, 2a ed., Grupo Editorial Iberoamérica, México, Capítulo 15 (1994).
- [5] Dennis G. Zill. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 7a ed., Thomson (2002).
- [6] M. W. Hirsch y S. Smale. Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal, Alianza Editorial, (1983).
- [7] D. Ruelle. Deterministic chaos: the science and the fiction, Proceedings of the Royal Society London A 427, pp. 241-248.(1990)
- [8] R. May. Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics, Nature, Vol. 261, p. 459 (1976).
- [9] H. Khalil. Nonlinear Systems, Prentice Hall (1996).
- [10] S. Sastry. Nonlinear Systems, Analysis, Stability, and Control, Springer (1999).
- [11] R.C. Hilborn. Chaos and Nolinear Dynamics. 2a ed., Oxford (2000).
- [12] J.M.T Thompson, H.B Stewart. Nolinear Dynamics and Chaos. 2a ed., Wiley (2002), Capítulo 5.
- [13] A. Sanchez. Tesis:El problema del Hamiltoniano inverso. FCFM-UMSNH, Morelia (2002).
- [14] E. Ott. Chaos in Dynamical Systems. Cambridge (1993).
- [15] S.H. Strogatz. Dynamics and Chaos. Addison-Wesley (1994).

## CAPÍTULO 5. BIBLIOGRAFÍA

---

- [16] H. Zhang, D. Liu, Z. Wang. Controlling chaos suppression, synchronization and chaotification. Springer, Londres (2009).
- [17] M. Pecora, L. Carroll. Synchronization in Chaotic Systems. Naval Research Laboratory, Washington D.C (1989).
- [18] T. Alligood, D. Sauer, A. Yorke. Chaos: An introduction to Dynamical Systems. Springer, New York (1996).
- [19] E. Coddington, N. Levinson. "The Poincaré–Bendixson Theory of Two-Dimensional Autonomous Systems". Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill (1955). pp. 389–403.
- [20] U. Uriostegui-Legorreta. Control y sincronización del Sistema van der Pol-Duffing. FCFM-UMSNH, Morelia (2015).
- [21] T. Kapitaniak, Lj. Kocarev, L. Chua. "Controlling Chaos without feedback and control signals", International Journal of bifurcation and chaos 3 (1993), 459-468.
- [22] K. Pyragas. "Continuous control of chaos by self-controlling feedback" Physics Letters A (1992), Vol 170, pp. 421-428.
- [23] V. Mazzone. Controladores PID. Universidad Nacional de Quilmes, Quilmes (2002).
- [24] L. Cartwright. "Forced oscillations in nearly sinusoidal systems", Journal of the Institute of Electrical Engineering (1948) vol 95, pp. 88-96.
- [25] L. Cartwright. "Balthazar van der Pol", J. London Math. Soc. (1960),35,367-376.
- [26] B. Huberman, E. Lumer. "Dynamics of adaptive systems", IEEE Transactions on circuits and systems (1990) vol 37, 547-550.
- [27] B. Van der Pol, "On relaxation-oscillations", The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. J. of Sci., 2(7), 978-992 (1927).
- [28] B. Van der Pol, J. Van der Mark, "frequency demultiplication", Nature, 120. 363-364, (1927).
- [29] R. FitzHugh, "Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes", Biophysics J, 1 , 445-466 (1961).
- [30] J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa. "An active pulse transmission line simulating nerve axon", Proc. IRE, 50. 2061-1070 (1962).
- [31] Pilovsky AS, Rosenblum MG, Kurths J. Synchronization: A Universal Concepts in Nonlinear Science. Cambridge University press, London (2001).

- [32] L Chernousko, M. Ananievski, A. Reshmin. Control of Nonlinear Dynamical Systems, Methods and Applications. Springer, Berlin (2008).
- [33] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E.F.: The mathematical theory of optimal processes. Gordon and Breach, New York (1986).
- [34] Athans, M., Falb, P.L.: Optimal control: an introduction to the theory and its applications. McGraw-Hill (1966).
- [35] Bryson, A.E., Ho, Y.E.: Applied optimal control: optimization, estimation, and control. Blaisdell Pub. Co., Waltham Mass (1969).
- [36] M. Pecora, L. Carroll, A. Johnson, J. Mar. "fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications". U.S. Naval Research Laboratory. Washington (1997).
- [37] Lourenco, C., Babloyantz, A. (1994) Control of chaos in networks with delay: a model for synchronization of cortical tissue", Neural Computation 6, pp.1141-1154.
- [38] Hunt, E. R., Johnson, G. (1993), "Keeping chaos at bay", IEEE Spectrum Nov. 1993, pp. 32-36.
- [39] Babloyantz, A., Lourenco, C., Sepulchre, J. (1995) Control of chaos in delay differential equations, in a network of oscillators and in model cortex", Physica D 86(1-2), 274-283.
- [40] J. Kenge, J.C. Chedjou, G. Kenne, K. Kyamakya, G.H. Kom (2012) Nonlinear Dynamics 70:2163-2173 DOI 10.1007/s11071-012-0607-8.
- [41] U. Uriostegui, E. Tututi, G. Arroyo-Correa (2021) A new scheme of coupling and synchronizing low-dimensional dynamical systems, Revista mexicana de física 67 (2) 334-342.