



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

ESPACIOS ÚNICOS Y DIFERENTES: AUTOHOMEOMORFISMOS

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:

SAMUEL MARTINEZ ARANDA

ASESOR:

DR. REYNALDO ROJAS HERNÁNDEZ

MORELIA, MICHOACÁN

AGOSTO, 2022

Resumen

Decimos que dos espacios topológicos son homeomorfos si existe una función continua, biyectiva y con inversa continua entre ellos, tal función se denomina homeomorfismo. Geométricamente podemos interpretar la noción de homeomorfismo cuando podemos pasar de un espacio a otro de manera continua y reversible. Con esta noción geométrica vamos a analizar y construir un espacio que la única transformación que admite es la identidad, a este tipo de espacios los denominaremos espacios rígidos. Continuando con esas ideas, usaremos técnicas análogas a la construcción del espacio rígido para construir un espacio topológico de tal manera que sus simetrías coincidan con un grupo específico dado, de lo que en particular podemos controlar la cardinalidad de su grupo de autohomeomorfismos, es decir, podremos construir espacios topológicos que admitan una cantidad deseada de autohomeomorfismos.

Palabras clave: simetrías, rigidez, homeomorfismo, isomorfismo, gráficas de Cayley.

Abstract

We say that two topological spaces are homeomorphic if there is a continuous, bijective function with continuous inverse between them, such a function is called homeomorphism. Geometrically we can interpret the notion of homeomorphism when we can move from one space to another continuously and reversibly. With this geometric notion we are going to analyze and build a space that the only transformation it admits is identity, we will call this type of space rigid spaces. Continuing with those ideas, we will use techniques analogous to rigid space construction to construct a topological space in such a way that its symmetries coincide with a given specific group, from which in particular we can control the cardinality of its group of autohomeomorphisms, i.e. we will be able to construct topological spaces that admit a desired number of autohomeomorphisms.

*Probablemente la única áncora de salvación sea la ciencia, el
uranio 235, esas cosas. Pero además hay que vivir.
Julio Cortázar, Rayuela.*

Agradecimientos

A mis padres, por el apoyo incondicional que me han brindado a lo largo de mi formación. A mi madre, por siempre velar por mi bienestar. A mi padre, por sus consejos y por desear lo mejor para mi vida. Siempre han estado ahí para ayudarme. A mis hermanos, que siempre estuvieron presentes acompañándome en este arduo camino.

A Tzeltzin, por quien surgieron las ideas principales de este trabajo, por tantos años de amistad, apoyándome y alentándome, por siempre estar ahí. A Alexis, por ser un amigo incondicional, por todo el apoyo brindado y ser quien siempre está cuando se le necesita.

A mis amigos, con quien he compartido momentos muy gratos y que sin ellos muchas cosas habrían sido más difíciles, todos han aportado algo en mi vida: Manuel, Gerardo, Fabián, Yarezi, Javier, Saúl, Diana, Roxana, Sofía, Mario, Paulo, Jesús y a cada uno de los miembros de *AMLOpolis*.

Al Dr. Reynaldo, un gran profesor, por compartir sus conocimientos con una pasión que se contagia. Gracias por aceptar dirigir este trabajo, por la paciencia, la guía y los consejos a lo largo del camino.

A mis sinodales: Dr. Homero Geovani Díaz Marín, Dr. Francisco Javier Domínguez Mota, Dr. Luis Valero Elizondo y Dr. Fernando Hernández Hernández. Por revisar este trabajo.

A todas las personas que saben que son importantes para mí, pero tal vez olvide mencionar, por la aportación que han tenido en mi vida.

¡Gracias!

Índice general

Introducción	VIII
1. Preliminares	1
1.1. Espacios topológicos y funciones continuas	1
1.2. Conexidad y compacidad	10
1.3. Teoría de conjuntos	23
1.4. Grupos	25
1.5. Gráficas de Cayley	29
2. Espacios rígidos	35
2.1. Un espacio rígido cuyo cuadrado es el espacio de Hilbert	36
3. Espacios con grupo de automorfismos especial	47
3.1. Espacios con grupo de homeomorfismos dado	47
4. Teoremas de representación	51
4.1. Imagen topológica de grupo	51
4.2. Grupos representados por grupos de homeomorfismos	60
4.2.1. Desplazamientos	61
4.2.2. Subconjuntos rígidos de la recta y del plano	66
4.2.3. Grupos equivalentes	70
4.2.4. Autohomeomorfismos de espacios de dimensión cero . . .	71
4.2.5. Representaciones gráficas de grupos	73
4.2.6. Grupos de autohomeomorfismos	75
Bibliografía	78

Introducción

Dentro de las matemáticas una de las cosas que pueden resultar más atractivas a la vista son las cuestiones geométricas, las podemos ver desde lo cotidiano, hasta en las obras de arte más abstractas que nos podamos encontrar.

A principios del siglo pasado se originaron las primeras ideas de la topología, esta rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas, llamada por algunos la “geometría de la plastilina”. Al adentrarnos a la topología nos encontramos con el concepto de homeomorfismo, el cual nos permite decidir cuando dos espacios tienen la “misma forma”. Intuitivamente decimos que dos espacios son homeomorfos si son los mismos, pero vistos de otra manera, permitiendo estirar o doblar. Así pues, para la topología es lo mismo un círculo que un cuadrado.

El nacimiento de este trabajo surge de la pregunta: dado un espacio topológico, ¿cuántos homeomorfismos de él sobre sí mismo existen? La respuesta natural sería que existen muchos, esto es claro, pues si consideramos, por ejemplo, a la circunferencia unitaria, esta tiene al menos $\mathfrak{c}$ homeomorfismos sobre ella misma, por ejemplo las rotaciones.

Para delimitar esta pregunta ahora nos cuestionamos si existe manera de construir espacios que tengan un número específico de homeomorfismos sobre sí mismos, en particular, si hay espacios que la única “transformación” que tienen es la identidad, con lo que introducimos el concepto de *espacio rígido*.

Para responder a esto nos apoyamos en la teoría de grupos, estudiando el grupo de autohomeomorfismos de un espacio, controlando la estructura de dicho grupo y buscando que las simetrías coincidan con un grupo específico

dado. Este trabajo está basado principalmente en los trabajos de J. De Groot [Gro59], [GW58] y en el trabajo de J. J. Dijkstra [Dijk85].

En el primer capítulo se establecerán los conceptos básicos, haciendo una breve introducción de algunos aspectos conjuntistas, topológicos y algebraicos que se usarán en este trabajo. En el segundo capítulo se introduce la noción de *rigidez* bajo homeomorfismos, noción introducida por J. De Groot y J.R. Wille en [GW58], y que se refiere a que no se admiten otros homeomorfismos más allá de los “triviales”. Esta construcción nos muestra las ideas clave para la construcción de espacios rígidos: buscar que dentro del espacio tengamos un conjunto denso, de modo que cada punto de este conjunto tenga una propiedad única en todo el espacio. Como podremos darnos cuenta, prácticamente todos los espacios comunes no triviales admiten más de un homeomorfismo sobre sí mismo, con lo que controlar los homeomorfismos hasta el punto de hacerlos triviales nos ayudará a manipular dichos homeomorfismos para obtener cualquier grupo deseado. Cabe resaltar que el espacio que construimos aquí tiene además la peculiaridad de que su cuadrado es homeomorfo al espacio de Hilbert l^2 . En el tercer capítulo se presenta la construcción de un espacio topológico finito, de tal manera que su grupo de autohomeomorfismos sea isomorfo a un grupo finito G escogido de manera arbitraria. En el capítulo final primero construiremos para todo grupo numerable G un continuo de Peano X como *imagen topológica de grupo*, es decir, de tal manera que su grupo de autohomeomorfismos sea isomorfo a G . Enseguida mostraremos un tipo de rigidez “más fuerte”, que es la llamada rigidez bajo desplazamientos, la cual implica rigidez no sólo bajo homeomorfismos, sino también bajo funciones continuas y homeomorfismos locales, y finalmente concluiremos extendiendo todas las ideas anteriormente desarrolladas mediante la construcción de un espacio métrico cuyo grupo de autohomeomorfismos sea isomorfo a un grupo arbitrario dado.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos y resultados que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Este capítulo está pensado para hacer de este trabajo, un trabajo autocontenido. No se probarán resultados que representen una desviación para los objetivos de este trabajo. Se asume que el lector está familiarizado con nociones básicas de teoría de grupos, teoría de conjuntos y topología.

1.1. Espacios topológicos y funciones continuas

El lector puede encontrar más información de lo expuesto en las primeras dos secciones en [\[Eng89\]](#).

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una *topología* sobre X es una familia τ de subconjuntos de X tal que

- $\emptyset, X \in \tau$,
- si $\mathcal{U} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$,
- si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.

Al par (X, τ) se le llama *espacio topológico*.

Si no existe confusión sobre la topología para el conjunto X a la que nos estemos refiriendo simplemente se refiere a X como el espacio topológico. A los elementos de la topología de X se les llama *subconjuntos abiertos* de X . También se dice que un subconjunto F de X es *cerrado* si $X \setminus F$ es un conjunto abierto.

Definición 1.1.2. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Entonces una *vecindad* de x en X es un subconjunto V de X tal que

- $x \in V$ y
- existe un subconjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq V$.

Notemos que no consideramos a las vecindades de los puntos como conjuntos abiertos; más bien, una vecindad de x es un superconjunto de un conjunto abierto en X que contiene al punto x . Es fácil ver que un conjunto abierto es de hecho vecindad de cada uno de sus puntos.

Definición 1.1.3. Sea X un espacio topológico con topología τ . Si Y es un subconjunto de X , la familia

$$\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y , denominada *topología de subespacio* o *topología relativa*.

Con esta topología, Y se denomina *subespacio* de X ; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y . Generalmente es bastante complicado dar una descripción de la familia τ . En la mayoría de los casos, se especifica una familia más pequeña de subconjuntos de X que es capaz de definir dicha topología.

Definición 1.1.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *base* para la topología τ es una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que para cada $U \in \tau$ existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{G}$. Una *subbase* para la topología τ es una familia $\mathcal{S} \subseteq \tau$ tal que la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ forma una base para τ . A los elementos de una base se les llama *elementos básicos*.

La siguiente proposición nos proporciona una herramienta para generar una topología a partir de una familia $\mathcal{B}$ la cual resultará base para dicha topología.

Proposición 1.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Entonces una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es una base para alguna topología τ si:*

- (1) $\emptyset \in \mathcal{B}$.
- (2) Siempre que $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_0 \cap B_1$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_0 \cap B_1$.
- (3) $X = \bigcup \mathcal{B}$.

Demostración. Sea $\tau = \{\bigcup \mathcal{G} : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}\}$. Por (1), $\emptyset = \bigcup \{\emptyset\} \in \tau$ y por (3), $X \in \tau$.

Si $U, V \in \tau$, entonces existen $\mathcal{G}_U, \mathcal{G}_V \subseteq \mathcal{B}$ tales que $U = \bigcup \mathcal{G}_U$ y $V = \bigcup \mathcal{G}_V$. Para cada $x \in U \cap V$, existen $B_0 \in \mathcal{G}_U$ y $B_1 \in \mathcal{G}_V$ de modo que $x \in B_0 \cap B_1$ y por (2) existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x \subseteq B_0 \cap B_1 \subseteq U \cap V.$$

Por lo tanto

$$U \cap V = \bigcup \{B_x : x \in U \cap V\} \in \tau.$$

Finalmente si $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$ pues para cada $A \in \mathcal{A}$ existe $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{G}_A$, de donde se sigue que

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \bigcup \{\mathcal{G}_A : A \in \mathcal{A}\} \in \tau.$$

Por lo tanto τ es una topología. □

Definición 1.1.5. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Una familia $\mathcal{B}_x$ de vecindades de x es una *base de vecindades* para x en X (o *base local* en x) si para cada vecindad V de x existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq V$.

Definición 1.1.6. Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces:

- (1) x es un *punto interior* de A si A contiene una vecindad de x .
- (2) x es un *punto clausura* (o *punto de adherencia*) de A si para cualquier vecindad V de x se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$.
- (3) x es un *punto límite* de A si para cualquier vecindad V de x se tiene que $A \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

(4) x es un *punto aislado* de A si existe una vecindad de x cuya intersección con A consiste en el punto x únicamente.

(5) El *interior* de A es

$$A^\circ = \text{int}_X(A) = \{x \in X : (\exists U \text{ vecindad de } x)(U \subseteq A)\}.$$

(6) La *clausura* de A es

$$\overline{A} = \text{cl}_X(A) = \{x \in X : (\forall V \text{ vecindad de } x)(V \cap A \neq \emptyset)\}.$$

(7) La *frontera* de A es

$$\partial A = \text{Fr}A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

Con lo que podemos observar que A° es el conjunto de todos los puntos interiores de A , mientras que $\overline{A}$ es el conjunto de todos los puntos clausura de A . Intuitivamente el interior de un subconjunto consta de todos los puntos que están muy dentro del conjunto, mientras que los puntos de la clausura son los que están realmente cerca del conjunto.

Observación 1.1.1. $\overline{A}$ es un conjunto cerrado y A° es un conjunto abierto.

Definición 1.1.7. (Dimensión inductiva) Un espacio topológico X tiene *dimensión* cero (abreviado 0-dimensional) si tiene una base formada por conjuntos abiertos y cerrados. Diremos además que un espacio tiene *dimensión* $\leq n + 1$ si posee una base cuyos elementos tienen frontera de dimensión a lo más n .

Definición 1.1.8. Sean (X, τ) un espacio topológico y $D \subseteq X$. Se dice que D es *denso* en X si $X = \overline{D}$.

En primera instancia uno podría imaginarse que los subconjuntos densos de un espacio son los subconjuntos grandes, pero sin embargo no es así, más bien son subconjuntos apropiadamente situados en el espacio de manera que cada punto del espacio está cerca del subconjunto.

Definición 1.1.9. Un espacio X es *separable* si tiene un subconjunto denso y numerable.

Definición 1.1.10. Sean (X, τ) un espacio topológico y $N \subseteq X$. Se dice que N es *denso en ninguna parte* de X si $\overline{N}^\circ = \emptyset$.

Proposición 1.1.2. Sean (X, τ) un espacio topológico y $N \subseteq X$; entonces son equivalentes

- (1) N es denso en ninguna parte.
- (2) $X \setminus \overline{N}$ es denso.
- (3) Para cada subconjunto abierto no vacío $U \subseteq X$, existe un subconjunto abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $V \cap N = \emptyset$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea U un subconjunto abierto no vacío, como N es denso en ninguna parte, $\overline{N}^\circ = \emptyset$, se sigue entonces que $U \not\subseteq \overline{N}$; es decir, $U \cap (X \setminus \overline{N}) \neq \emptyset$ y así $X \setminus \overline{N}$ es denso.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea U un subconjunto abierto no vacío de X . Notemos que $X \setminus \overline{N}$ es denso y abierto. Escojamos $x \in U \cap (X \setminus \overline{N})$ y como la intersección es un conjunto abierto, debe existir una vecindad V de x tal que $V \subseteq U \cap (X \setminus \overline{N})$. Entonces $V^\circ \cap N = \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Si N no fuera denso en ninguna parte, entonces $\overline{N}^\circ \neq \emptyset$. Sean $U = \overline{N}^\circ$ como U es no vacío existe un subconjunto abierto $V \subseteq U$ tal que $V \cap N = \emptyset$, como N es denso en su cerradura, entonces debe intersectar a cada abierto en su cerradura, en particular $N \cap V \neq \emptyset$, con lo que llegamos a una contradicción. $\square$

Definición 1.1.11. Un conjunto X se dice que es de *primera categoría*, si X es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Un conjunto que no es de primera categoría suele llamarse de *segunda categoría*.

Definición 1.1.12. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice que es *continua* si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

Notemos que si la topología de Y está dada por una base $\mathcal{B}$, entonces para comprobar la continuidad de f es suficiente mostrar que la imagen inversa de cada básico es abierta, pues cada elemento V de Y puede escribirse como la unión de elementos básicos y recordemos que la imagen inversa se comporta bien respecto a la unión.

Definición 1.1.13. Sean X y Y espacios topológicos; sea $f : X \rightarrow Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ son ambas continuas, entonces se dice que f es un *homeomorfismo*.

La condición de que f^{-1} sea continua significa que, para cada conjunto abierto U de X , la imagen inversa de U mediante la aplicación f^{-1} es abierta en Y . Sin embargo, la imagen inversa de U mediante la aplicación f^{-1} es la misma que la imagen de U mediante la aplicación f . Por esto, otro modo de definir un homeomorfismo es decir que es una correspondencia biyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(U)$ es abierto si, y sólo si, U es abierto.

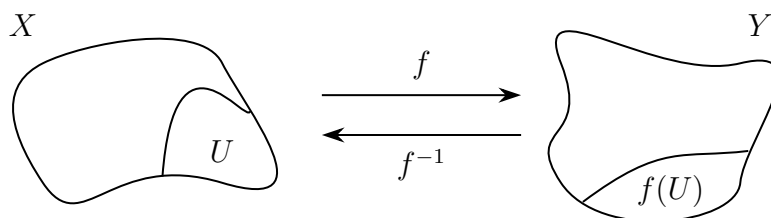


Figura 1.1: Esquema de un homeomorfismo.

Cualquier propiedad de X que se exprese completamente en términos de la topología de X nos da, vía la correspondencia f , la propiedad correspondiente para el espacio Y . Tal propiedad de X se denomina *propiedad topológica* de X . Si existe un homeomorfismo entre X y Y , entonces X y Y se dicen *espacios homeomorfos*.

Definición 1.1.14. Diremos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ es un *homeomorfismo local* si para cada $x \in X$ existe un abierto U , vecindad de x , tal que $f(U)$ sea abierto de Y y $f|_U : U \rightarrow f(U)$, la restricción de f a U es un homeomorfismo.

Definición 1.1.15. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua e inyectiva, donde X y Y son espacios topológicos. Sea $Z = f(X)$, considerado como subespacio de Y ; entonces la función $f' : X \rightarrow Z$ es biyectiva. Si ocurre que f' es homeomorfismo de X con Z , decimos que $f : X \rightarrow Y$ es un *encaje* de X en Y .

Definición 1.1.16. Sean X y Y espacios y $f : X \rightarrow Y$. Entonces f se llama *función abierta* (respectivamente *función cerrada*), si $f(U)$ es un subconjunto abierto (respectivamente, cerrado) de Y para cada $U \subseteq X$ abierto (respectivamente, cerrado).

Definición 1.1.17. Sean X y Y espacios topológicos y sea $p : X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. La función p se dice que es una *aplicación cociente* siempre que un subconjunto $U \subset Y$ es abierto en Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

Observación 1.1.2. Si $p : X \rightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva que es abierta o cerrada, entonces p es una aplicación cociente.

Teorema 1.1.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación cociente. Sea Y' un subconjunto abierto o cerrado en Y y considérese $X' = f^{-1}(Y')$. Entonces

$$f|_{X'} : X' \rightarrow Y'$$

es una aplicación cociente.

Demostración. Supongamos que $Y' \subseteq Y$ es un abierto, y sea $G \subseteq Y'$ tal que $f^{-1}|_{X'}(G) = f^{-1}(G) \subseteq X'$ es abierto en X' y X' es abierto en X . Así, $f^{-1}(G)$ es abierto en X y con ello G es abierto en Y , por lo tanto, también es abierto en Y' .

Lo anterior funciona exactamente igual para el caso de cerrados. $\square$

Teorema 1.1.2 (De la transgresión). Sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación cociente. Sea Z un espacio y sea $g : X \rightarrow Z$ una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(y)$, para $y \in Y$. Entonces g induce una aplicación $f : Y \rightarrow Z$ tal que $f \circ p = g$. La aplicación inducida f es continua si, y sólo si, g es continua; f es una aplicación cociente si, y sólo si, g es una aplicación cociente.

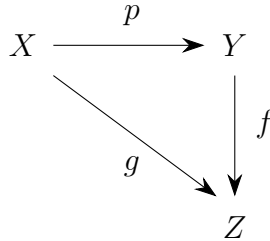


Figura 1.2: Diagrama asociado al Teorema 1.1.2.

Demostración. Para cada $y \in Y$, el conjunto $g(p^{-1}(y))$ es un conjunto unipuntual en Z (puesto que g es constante sobre $p^{-1}(y)$). Si denotamos por $f(y)$ a tal punto, entonces hemos definido una aplicación $f : Y \rightarrow Z$ tal que para cada $x \in X$, $f(p(x)) = g(x)$. Si f es continua, entonces $g = f \circ p$ es continua. Recíprocamente, supongamos que g es continua. Dado un abierto V de Z , $g^{-1}(V)$ es abierto en X . Pero $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$; como p es cociente se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en Y . De aquí, f es continua.

Si f es una aplicación cociente, entonces g es la composición de dos aplicaciones cocientes y es así, una aplicación cociente. Recíprocamente, supongamos que g es una aplicación cociente. Puesto que g es sobreyectiva, también lo es f . Sea V un subconjunto de Z ; probaremos que V es abierto en Z si $f^{-1}(V)$ es un abierto en Y . Ahora el conjunto $p^{-1}(f^{-1}(V))$ es abierto en X porque p es continua. Puesto que este conjunto es igual a $g^{-1}(V)$, este último es abierto en X . Entonces, como g es una aplicación cociente, V es abierto en Z . $\square$

Definición 1.1.18. Una *métrica* en un conjunto X es una función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades

- (1) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$; la igualdad se da si, y sólo si, $x = y$.
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.
- (3) (Desigualdad triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Al par (X, d) se le denomina *espacio métrico*. Sean d una métrica en X y $\epsilon > 0$, consideremos el conjunto

$$B_\epsilon(x) = \{y : d(x, y) < \epsilon\}$$

de todos los puntos y cuya distancia a x es menor que ϵ , que se denomina *bola abierta de radio ϵ centrada en x* . No es difícil ver que la familia de todas las bolas abiertas forma una base para una topología sobre X , denominada *topología métrica* inducida por d .

A continuación definiremos los llamados *axiomas de separación* que son propiedades que puede satisfacer un espacio topológico en función del grado en que distintos puntos o conjuntos cerrados pueden ser separados por medio de los abiertos de la topología.

Definición 1.1.19. Sea X un espacio topológico, decimos que X es

- (T_0) Si y sólo si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe un abierto que contiene a uno y sólo uno de los puntos.
- (T_1) Si y sólo si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ hay un par de abiertos A_1, A_2 tal que $x \in A_1$, pero no en A_2 , y además $y \in A_2$, pero no en A_1 . Una equivalencia importante es que X es T_1 si, y sólo si los subconjuntos de X formados por un único punto son cerrados.
- (T_2 o de Hausdorff) Si y sólo si para cualquier par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un par de abiertos disjuntos que contienen uno a x y otro a y . A menos que se mencione lo contrario, todos los espacios considerados en este trabajo serán de Hausdorff.
- (T_3 o regular) Si para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, entonces existen vecindades abiertas U_x y U_F tales que su intersección es vacía. Es decir, podemos separar puntos de cerrados.
- (T_4 o normal) Si para cada par de cerrados $F_1, F_2 \subset X$ con intersección vacía existen vecindades abiertas que los contengan U_{F_1} y U_{F_2} tal que su intersección es vacía. Es decir, podemos separar cada par de cerrados del espacio.

Definición 1.1.20. Sea $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ un producto cartesiano y consideremos la función $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ que asigna a cada elemento del producto cartesiano su coordenada β -ésima,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta,$$

se denomina *función proyección* asociada con el índice β . Denotemos por $\mathcal{S}_\beta$ a la familia

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$$

y denotemos por $\mathcal{S}$ a la unión de esas familias,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta.$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina *topología producto*. En esta topología $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ se denomina *espacio producto*.

Una definición equivalente y muy útil para la topología producto es la siguiente

Definición 1.1.21. Sea S no vacío y X_s un espacio topológico para cada $s \in S$. La *topología producto* sobre $\prod_{s \in S} X_s$ es la que tiene por base a la familia de todos los conjuntos de la forma

$$\prod_{s \in S} U_s,$$

donde cada U_s es un subconjunto abierto de X_s , para cada $s \in S$, y $U_s \neq X_s$ únicamente para una cantidad finita de elementos de S .

Teorema 1.1.3. Si X es un espacio métrico separable, entonces su cardinalidad es menor o igual que $\mathfrak{c}$.

Demostración. Tomemos una base numerable $\mathcal{B}$ de X y formemos una sucesión $U_1, U_2, U_3, \dots$ en la que aparezcan todos los elementos de la base (en la lista formada de subconjuntos de X puede haber repeticiones, de hecho, si X es finito necesariamente las hay, pero esto no afecta el argumento). Definamos $\xi : X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ por

$$\xi(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Consideremos $x, x' \in X$. Notemos que si $x \neq x'$, entonces existe abiertos disjuntos V y W de X tales que $x \in V$ y $x' \in W$. Como $\mathcal{B}$ es una base, existe U_i tal que $x \in U_i \subset V$. En consecuencia $x' \notin U_i$. Así $\xi(x)_i = 1$ y $\xi(x')_i = 0$. Esto muestra que ξ es inyectiva, y termina la prueba. $\square$

1.2. Conexidad y compacidad

Definición 1.2.1. Un espacio X se llama *conexo* si no existen abiertos ajenos y no vacíos U, V tales que $X = U \cup V$. Si tales abiertos existieran se denominarían una *desconexión* de X .

Intuitivamente, un espacio es conexo si es de una sola pieza. Observemos que la conexidad es una propiedad topológica, ya que se formula completamente en términos de la familia de los abiertos de X .

Proposición 1.2.1. *Sea X un espacio topológico. Si los conjuntos C y D forman una separación de X , y además Y es un subespacio conexo de X , entonces Y está contenido o bien en C , o bien en D .*

Lema 1.2.1. *Si X es conexo y $f : X \rightarrow Y$ es continua y sobreyectiva, entonces Y es conexo.*

Demostración. Supongamos que $Y = A \cup B$ es una separación de $Y = f(X)$ en dos conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en Y . Entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es X . Además son abiertos en X , pues f es continua, y no vacíos, porque f es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de X , contradiciendo la hipótesis de que X era conexo. $\square$

Definición 1.2.2. Una función continua y cerrada es llamada *monótona* si es sobreyectiva y tiene la propiedad de que la preimagen de todo conjunto conexo es conexa.

Proposición 1.2.2. *Sea $f : X \rightarrow Y$ continua, cerrada y sobreyectiva. Si para toda $y \in Y$ se cumple que $f^{-1}(y)$ es conexo, entonces f es monótona.*

Demostración. Necesitamos ver que para todo conexo $C \subset X$ no vacío, se tiene que $f^{-1}(C)$ es conexo. Notemos que por la Observación 1.1.2 tenemos que f es una aplicación cociente. Por el Teorema 1.1.1, es suficiente probar que si Y es conexo, entonces X también es conexo. Supongamos que X es desconexo, es decir, que existen abiertos disjuntos no vacíos U, V tal que $X = U \cup V$. Observemos que para cada $x \in U$, $f^{-1}(f(x))$ es conexo y por lo tanto está contenido en U , así $U \subset f^{-1}(f(U)) = \bigcup_{x \in U} f^{-1}(f(x)) \subset U$, así $f(U)$ es abierto, y por la misma razón lo es $f(V)$. Consideremos los subconjuntos $f(U)$ y $f(V)$ de Y , ambos son abiertos y no vacíos, entonces, por la conexidad de Y , los conjuntos $f(U)$ y $f(V)$ no pueden ser disjuntos. Sea $y \in f(U) \cap f(V)$, tenemos que

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(f(U) \cap f(V)) = f^{-1}(f(U)) \cap f^{-1}(f(V)) = U \cap V,$$

Lo que implica que $U \cap V \neq \emptyset$, una contradicción. $\square$

Definición 1.2.3. Dados dos puntos x e y del espacio X , un *camino* (o *arco*) en X que une x con y es una función continua $f : [a, b] \rightarrow X$ de algún intervalo cerrado de la recta real en X , de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio X se dice que es *conexo por caminos* si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X .

Observación 1.2.1. *Todo espacio conexo por caminos es conexo.*

Definición 1.2.4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es *convexo* si para todo $x, y \in A$ se tiene que para toda $t \in [0, 1]$,

$$(1 - t)x + ty \in A.$$

Definición 1.2.5. Sea X un espacio topológico. Definimos la *componente conexa* de un punto $x \in X$ como

$$C_x = C(x) = \bigcup \{C \subseteq X : x \in C \wedge C \text{ es conexo}\}.$$

Observación 1.2.2. *Las componentes conexas son subconjuntos cerrados y conexos de X , más aún, $C(x)$ es el $\subseteq$ -máximo conexo contenido en X del que x es un elemento.*

Notemos que las componentes conexas de dos puntos distintos en un espacio topológico X o coinciden o son disjuntas, entonces las componentes conexas de un espacio constituyen una descomposición de X en subconjuntos cerrados, conexos y disjuntos a pares.

Proposición 1.2.3. *Sea X un espacio con base de vecindades con cerradura conexa, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ un abierto tal que $x \in U$. Sea V la componente conexa de x , que es conexa y veamos que V es abierto. Sea $y \in V$, como $y \in U$ y U es abierto, existe W vecindad de y con $\overline{W}$ conexo. Veamos que $\overline{W} \subseteq V$, pues si no $\overline{W} \cap C_z$, donde C_z es la componente conexa de z en U , para algún $z \in U \setminus V$, lo cual sería una contradicción. $\square$

Definición 1.2.6. Sea X un espacio topológico. La *cuasi-componente* de un punto $x \in X$ se define como la intersección de todos los conjuntos cerrado abiertos que contienen al punto x .

De manera similar a las componentes conexas, las cuasi-componentes son subconjuntos cerrados de X que constituyen una descomposición de X en cerrados disjuntos.

Teorema 1.2.1. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. La componente conexa C de x está contenida en la cuasi-componente Q de x .*

Demostración. Sea F un subconjunto de X , cerrado abierto, que contiene a x . Los conjuntos F y $X \setminus F$ forman una separación de X , así los conjuntos $C \cap F$ y $C \setminus F$ son separados; como $C \cap F \neq \emptyset$ se sigue de la Proposición 1.2.1 que $C \setminus F = \emptyset$, es decir, que $C \subset F$. Entonces tenemos que $C \subset Q$. $\square$

Definición 1.2.7. Un espacio topológico X es *localmente conexo* si para todo $x \in X$ y toda vecindad V de x , existe una vecindad abierta y conexa U de x tal que $U \subseteq V$.

Definición 1.2.8. Diremos que un espacio topológico X es *totalmente desconexo* si los únicos subconjuntos conexos están formados por conjuntos singulares.

Lema 1.2.2. *Todo espacio X 0-dimensional y T_1 es totalmente desconexo.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea C_x su componente conexa. Supongamos que existe $y \neq x$ con $y \in C_x$. Por ser X un espacio T_1 , existen vecindades abiertas V_x, V_y de x y y respectivamente, tales que $y \notin V_x$ y $x \notin V_y$. Ahora, claramente $X \setminus V_x$ es cerrado y no contiene a x . Ya que X es 0-dimensional, existe A , cerrado abierto en X tal que $x \in A$ y $y \in X \setminus A$. Luego notemos que $A \cap C_x$ y $(X \setminus A) \cap C_x$ es una separación de C_x , lo que contradice que C_x es conexo. Luego $C_x = \{x\}$, y así, X es totalmente desconexo. $\square$

Una *cubierta* de un conjunto es simplemente una familia de subconjuntos cuya unión es el conjunto en cuestión. Si X es un espacio topológico, una *cubierta abierta* es una familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{U}$ de X cuya unión es X . Se denomina *subcubierta* a una subfamilia de la cubierta que es ella misma una cubierta.

Definición 1.2.9. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un espacio *compacto* si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ del espacio X , existe una familia finita $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{A}$.

Proposición 1.2.4. *Todo espacio compacto y Hausdorff es normal.*

Teorema 1.2.2. *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X . Dada una cubierta $\mathcal{A}$ de Y por conjuntos abiertos en X , podemos considerar la cubierta abierta $\mathcal{B}$ de X uniendo a $\mathcal{A}$ el conjunto abierto $X \setminus Y$, esto es,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}.$$

Como X es compacto, alguna subfamilia finita cubre X . Si esta subfamilia contiene al conjunto $X \setminus Y$, lo descartamos. Si no es así, la dejamos como está. La familia resultante en cualquier caso es una subfamilia finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y . $\square$

De la definición de la topología de subespacio, inmediatamente obtenemos el siguiente resultado

Corolario 1.2.1. *Si un subespacio A de un espacio topológico X es compacto, entonces para toda familia $\{U_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $A \subset \bigcup_{s \in S} U_s$ existe un conjunto finito $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset S$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{s_i}$.*

Teorema 1.2.3. *Sean X un espacio topológico y $U \subset X$ un abierto. Si una familia $\{F_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos cerrados de X contiene al menos un conjunto compacto (en particular, si X es compacto) y si $\bigcap_{s \in S} F_s \subset U$, entonces existe un conjunto finito $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$ tal que $\bigcap_{i=1}^k F_{s_i} \subset U$.*

Demostración. Sea F_{s_0} compacto. Reemplazando el espacio X por F_{s_0} , el conjunto U por $U \cap F_{s_0}$ y la familia $\{F_s\}_{s \in S}$ por $\{F_{s_0} \cap F_s\}_{s \in S}$ reducimos el problema al caso del espacio compacto, entonces podemos asumir que X es compacto. Aplicando el corolario anterior a los conjuntos $X \setminus U$ y $U_s = X \setminus F_s$ obtenemos un conjunto finito $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$ con las propiedades requeridas. $\square$

Teorema 1.2.4. *La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua con X compacto. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y . La familia

$$\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

es una cubierta de X por conjuntos abiertos ya que f es continua. Por tanto, un número finito de ellos, digamos

$$f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n),$$

cubren X . Entonces los conjuntos $A_1, \dots, A_n$ cubren $f(X)$. $\square$

Lema 1.2.3 (El lema del tubo). *Consideremos el espacio producto $X \times Y$, donde Y es compacto. Si N es un conjunto abierto de $X \times Y$ conteniendo la rebanada $x_0 \times Y$ de $X \times Y$, entonces N contiene algún tubo $W \times Y$ sobre $x_0 \times Y$, donde W es una vecindad abierta de x_0 en X .*

Demostración. Cubramos $x_0 \times Y$ por elementos básicos $U \times V$ de modo que $U \times V \subset N$. El espacio $x_0 \times Y$ es compacto ya que es homeomorfo a Y . De esta manera, podemos cubrir $x_0 \times Y$ con un número finito de tales elementos básicos

$$U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$$

Podemos suponer que los básicos $U_i \times V_i$ intersectan a $x_0 \times Y$, ya que de no ser así, podríamos descartarlo de la colección finita y seguir teniendo una cubierta de $x_0 \times Y$. Definamos

$$W = U_1 \cap \dots \cap U_n.$$

El conjunto W es abierto, y contiene a x_0 pues cada conjunto $U_i \times V_i$ intersecta a $x_0 \times Y$. Afirmamos que los conjuntos $U_i \times V_i$, que fueron elegidos para cubrir la rebanada $x_0 \times Y$, también cubren el tubo $W \times Y$. Sea $x \times y$ un punto de $W \times Y$. Consideremos el punto $x_0 \times y$ de la rebanada $x_0 \times Y$ que tiene la misma coordenada y en ese punto. Ahora, $x_0 \times y$ pertenece a algún $U_i \times V_i$ para algún i , así que $y \in V_i$. Pero $x \in U_j$ para todo j (pues $x \in W$). Así, se tiene que $x \times y \in U_i \times V_i$, tal y como pretendíamos demostrar. Como todos los conjuntos $U_i \times V_i$ están contenidos en N , y como cubren al conjunto $W \times Y$, se tiene que el tubo $W \times Y$ también está contenido en N . $\square$

Proposición 1.2.5. *Sea $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ la función proyección. Si Y es compacto entonces π_1 es una función cerrada.*

Demostración. Sea $A \subseteq X \times Y$ cerrado y consideremos $x \in X \setminus \pi_1(A)$. Dado que $x \notin \pi_1(A)$ se tiene que $\{x\} \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus A$. Como Y es compacto y $(X \times Y) \setminus A$ abierto, aplicamos el lema del tubo y encontramos una vecindad abierta W de x tal que $W \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus A$. Entonces $x \in W \subseteq X \setminus \pi_1(A)$, por lo que $X \setminus \pi_1(A)$ es abierto y por lo tanto $\pi_1(A)$ es cerrado. $\square$

Teorema 1.2.5 (De la gráfica cerrada). *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua con Y compacto y de Hausdorff. Entonces f es continua si, y sólo si, la gráfica de f ,*

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

es cerrada en $X \times Y$.

Demostración. Supongamos que G_f es cerrado en $X \times Y$. Consideremos algún cerrado V de Y . Se sigue que $G_f \cap (X \times V)$ es cerrado en $X \times Y$. Notemos que este conjunto es exactamente el conjunto de todos los $(x, f(x))$ tal que $f(x) \in V$. De la proposición anterior se sigue que $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ es cerrada. Se sigue que

$$\pi_1(G_f \cap (X \times V)) = \{x : f(x) \in V\} = f^{-1}(V).$$

Ahora supongamos que f es continua. Supongamos que (x_0, y_0) es un punto límite de G_f . Supongamos que $y_0 \neq f(x_0)$. Como Y es Hausdorff, podemos encontrar abiertos disjuntos U y V que contengan a $f(x_0)$ y y_0 respectivamente. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de x_0 . Afirmamos que $f^{-1}(U) \times V$ es una vecindad abierta de (x_0, y_0) tal que no interseca a G_f . Supongamos que $(x, f(x)) \in G_f$. Si $x \notin f^{-1}(U)$ terminamos. Si $x \in f^{-1}(U)$, $f(x) \in U$, entonces $f(x) \notin V$, entonces $(x, f(x)) \notin f^{-1}(U) \times V$. Esto contradice el hecho de que (x_0, y_0) es punto límite de G_f . Entonces G_f contiene todos sus puntos límite y así es cerrado. $\square$

Teorema 1.2.6 (Tychonoff). *Un espacio producto es compacto si y sólo si cada factor es un espacio compacto.*

Teorema 1.2.7. *Si X es un espacio compacto y Hausdorff, entonces la componente conexa de un punto $x \in X$ coincide con la cuasi-componente del punto x .*

Demostración. Notemos que por el Teorema 1.2.1, es suficiente probar que la cuasi-componente Q del punto x es conexa.

Supongamos que dos subconjuntos cerrados X_1, X_2 de Q satisfacen las condiciones $Q = X_1 \cup X_2$ y $x \in X_1$. Los conjuntos X_1, X_2 son cerrados en X , como X es compacto y Hausdorff se sigue que X es normal, entonces existen subconjuntos abiertos U, V de X tal que

$$X_1 \subset U, \quad X_2 \subset V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (1)$$

Por lo tanto, tenemos $Q \subset U \cup V$ y, por el Teorema 1.2.3, existen conjuntos cerrado abiertos $F_1, \dots, F_k$ tal que $Q \subset F = \bigcap F_i \subset U \cup V$; claramente, el conjunto F es cerrado abierto. Ya que

$$\overline{U \cap F} \subset \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F,$$

la intersección $U \cap F$ es también cerrado abierta. Como $x \in U \cap F$, tenemos que $Q \subset U \cap F$ y

$$X_2 \subset Q \subset U \cap F \subset U. \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que $X_2 = \emptyset$, lo cual muestra que Q es conexo. $\square$

Definición 1.2.10. Un espacio topológico X es *localmente compacto* si dado cualquier $x \in X$ y cualquier vecindad V de x , existe un subconjunto compacto $K \subseteq X$ tal que

$$x \in K^\circ \subseteq K \subseteq V.$$

Definición 1.2.11. Sea X un espacio topológico no vacío. Decimos que X es un *continuo* si es conexo y compacto. Un *subcontinuo* es un subconjunto de un continuo que es cerrado, conexo y no vacío.

Proposición 1.2.6. Si $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de un espacio de Hausdorff y compacto X y U es un conjunto abierto en X tal que $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \subset U$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset U$ para cada $n \geq m$.

Demostración. La prueba se sigue del Teorema 1.2.3, tomando $F_s = A_n$ y considerando el hecho de que la sucesión es decreciente. $\square$

Corolario 1.2.2. Si $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, no vacíos de un espacio compacto X , entonces $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$. Sea $U = \emptyset$, entonces se tiene que $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \subset U$. Notemos que U es un conjunto abierto en X , por la Proposición 1.2.6 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \subset U$, pero $A_m \neq \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $U = \emptyset$. Por lo que $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset$. $\square$

Corolario 1.2.3. Si $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, conexos, no vacíos de un espacio de Hausdorff y compacto X entonces $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ es un subconjunto cerrado, no vacío y conexo de X .

Demostración. Primero notemos que por el Teorema 1.2.2 tenemos que cada A_n es compacto. Denotemos por $\mathcal{A}$ al conjunto $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Notemos que $\mathcal{A}$ es una intersección numerable de subconjuntos cerrados en X , por lo que $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado en X . Por el Corolario 1.2.2 se tiene que $\mathcal{A}$ es un conjunto

no vacío. Resta probar que $\mathcal{A}$ es un conjunto conexo. Supongamos que $\mathcal{A}$ no es conexo, entonces $\mathcal{A} = B_1 \cup B_2$, donde B_1 y B_2 son conjuntos cerrados, no vacíos y ajenos. Por la Proposición 1.2.4 se sigue que A_1 es un espacio normal, entonces existen abiertos y ajenos en A_1 , V y W tales que $B_1 \subset V$ y $B_2 \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Entonces por la Proposición 1.2.6 tenemos que $A_m \subset U$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $A_m = (A_m \cap V) \cup (A_m \cap W)$. Como $B_1 \cup B_2 = \mathcal{A} \subset A_m$ y dado que $B_1 \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ y $B_2 \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, tenemos que $A_m \cap V \neq \emptyset$ y $A_m \cap W \neq \emptyset$. Por lo que A_m no es un conjunto conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es conexo. $\square$

Cabe resaltar que en el resultado anterior el hecho de que X sea un espacio de Hausdorff fue el que nos ayudó a probar que la intersección en cuestión es conexa. Además, del resultado anterior se puede concluir que la intersección de una sucesión decreciente de continuos es un continuo.

Lema 1.2.4. *Si A es un subespacio cerrado de un continuo X tal que $\emptyset \neq A \neq X$, entonces para toda componente conexa C del espacio A tenemos que $C \cap FrA \neq \emptyset$.*

Demostración. Del Teorema 1.2.7 se sigue que $C = \bigcap \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}$ es la familia de todos los subconjuntos cerrado abiertos de X conteniendo un punto $x_0 \in C$. Supongamos que $C \cap FrA = \emptyset$. Dado que la familia $\mathcal{K}$ es cerrada respecto a intersecciones finitas y el conjunto FrA es compacto, existe una $K \in \mathcal{K}$ tal que $K \cap FrA = \emptyset$ (ver Teorema 1.2.3). Tomemos un conjunto abierto $U \subset X$ satisfaciendo que $U \cap A = K$. La igualdad $K \cap FrA = \emptyset$ implica que $K = U \cap A^\circ$, es decir, que el conjunto K es abierto en X . Pero el conjunto K es también cerrado en X y contiene x_0 , entonces $K = X$. Esto implica que $FrA = \emptyset$, lo cual es imposible, pues A desconectaría a X . $\square$

Observemos que un continuo, al ser conexo, no se puede escribir como una cantidad finita (mayor a uno) de subconjuntos cerrados ajenos. Probaremos ahora que tampoco se puede escribir como una cantidad infinito numerable de cerrados ajenos, para lo que probaremos el siguiente lema.

Lema 1.2.5. *Si un continuo X es cubierto por conjuntos cerrados disjuntos a pares $X_1, X_2, \dots$ de los cuales al menos dos son no vacíos, entonces para toda i existe un continuo $C \subset X$ tal que $C \cap X_i = \emptyset$ y al menos dos conjuntos en la sucesión $C \cap X_1, C \cap X_2, \dots$ son no vacíos.*

Demostración. Si $X_i = \emptyset$ dejamos $C = X$; entonces podemos suponer que $X_i \neq \emptyset$. Tomemos un $j \neq i$ tal que $X_j \neq \emptyset$ y abiertos ajenos $U, V \subset X$

satisfaciendo $X_i \subset U$ y $X_j \subset V$. Sean x un punto de X_j y C la componente conexa de x en el subespacio $\overline{V}$. Claramente, C es un continuo, $C \cap X_i = \emptyset$ y $C \cap X_j \neq \emptyset$. Dado que $C \cap Fr\overline{V} \neq \emptyset$, por el lema anterior, y como $X_j \subset \overline{V}^\circ$, existe una $k \neq j$ tal que $C \cap X_k \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 1.2.8 (Sierpiński). *Si un continuo X tiene una cubierta numerable $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ por subconjuntos cerrados disjuntos a pares, entonces a lo más uno de los conjuntos X_i es no vacío.*

Demostración. Sea $X = \bigcup_{i=1}^\infty X_i$, donde los conjuntos X_i son cerrados y $X_i \cap X_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$; supongamos que al menos dos de los conjuntos X_i son no vacíos. Del lema anterior se sigue que existe una sucesión decreciente $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ de continuos contenidos en X tal que

$$C_i \cap X_i = \emptyset \quad \text{y} \quad C_i \neq \emptyset \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Esto puede hacerse aplicando el lema a X con la partición formada por los conjuntos $\{X_n\}$ y eligiendo un subcontinuo C_1 de X que no intersekte a X_1 y que intersekte al menos a dos conjuntos X_i , después tomando a C_1 con la partición formada por los conjuntos $\{C_1 \cap X_n\}$ y tomando un subcontinuo C_2 de C_1 que no intersekte a $C_1 \cap X_2$ y que intersekte al menos dos conjuntos $C_1 \cap X_i$; continuando con este procedimiento se obtiene lo deseado. La primera parte de (1) implica que $(\bigcap_{i=1}^\infty C_i) \cap (\bigcup_{i=1}^\infty X_i) = \emptyset$, es decir, que $\bigcap_{i=1}^\infty C_i = \emptyset$, y todavía de la segunda parte de (1) y la compacidad de X se sigue que $\bigcap_{i=1}^\infty C_i \neq \emptyset$. $\square$

Definición 1.2.12. Una *compactación* para un espacio topológico X es una pareja (c, K) , donde K es un espacio topológico y $c : X \rightarrow K$ es una función, tal que

- (1) K es compacto.
- (2) $c : X \rightarrow K$ es un encaje de X en K .
- (3) $c(X)$ es denso en K .

Se dice que (c, K) es una compactación de X por finitos puntos, si $K \setminus c(X)$ es finito. Sea $n \in \mathbb{N}$ si $|K \setminus c(X)| = n$ diremos que (c, K) es una compactación de X por n puntos. Si además se tiene que K es Hausdorff, entonces diremos que la compactación es Hausdorff. Usualmente la compactación de un espacio se denota como cX .

Definición 1.2.13. Si $\{f_i\}_{i \in I}$ es una familia de funciones tal que $f_i : X \rightarrow Y_i$, entonces definimos la *función diagonal* como

$$\begin{aligned} \Delta_{i \in I} f_i : X &\rightarrow \prod_{i \in I} Y_i \\ x &\mapsto \{f_i(x)\}_{i \in I}. \end{aligned}$$

Proposición 1.2.7. Si $\{f_i\}_{i \in I}$ cumple que cada $f_i : X \rightarrow Y_i$ es una función continua. Entonces $f = \Delta_{i \in I} f_i : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ es continua.

Demostración. Sea $U = \pi_i^{-1}(U_i)$ un abierto subbásico de $\prod_{i \in I} Y_i$. Observemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in I} Y_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & Y_i \end{array}$$

Figura 1.3: Diagrama asociado a la Proposición 1.2.7.

En efecto $\pi_i \circ f(x) = \pi_i(\{f_j(x)\}_{j \in I}) = f_i(x)$. Por lo tanto $f_i = \pi_i \circ f$. Entonces

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(U_i) = f_i^{-1}(U_i)$$

es abierto por la continuidad de f_i . □

Definición 1.2.14. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *Tychonoff* si es T_1 y además para cada $F \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que

$$f(F) \subseteq \{0\} \quad \text{y} \quad f(x) = 1.$$

Proposición 1.2.8. Si X es Tychonoff, no degenerado y $U \subset X$ es abierto y conexo, entonces $\mathfrak{c} \leq |U|$

Demostración. Tomemos $x \in U$, sin pérdida de generalidad supongamos que $X \setminus U$ es no vacío, como X es Tychonoff existe una función continua f de X en el intervalo $[0, 1]$ tal que $f(X \setminus U) \subseteq \{0\}$ y $f(x) = 1$, entonces como X es conexo y f es continua, $f(X)$ es un conexo que contiene a 0, 1 y por lo tanto $f(X) = [0, 1]$. Entonces $(0, 1]$ está contenido en $f(U)$ por lo tanto $c = |(0, 1]| = |f(U)| \leq |U|$. $\square$

Definición 1.2.15. Sean X un espacio topológico y $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos. Se dice que una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *separa puntos de conjuntos cerrados de X* , si para cualquier subconjunto cerrado $B \subset X$ y para cualquier punto $x \in X \setminus B$, existe $f_\alpha \in \mathcal{F}$, tal que $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(B)}$.

Lema 1.2.6. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua e inyectiva. Si la función f separa puntos de cerrados, entonces f es un encaje.

Demostración. Sabemos que $f : X \rightarrow f(X)$ es una función continua y biyectiva. Entonces es suficiente probar que para todo subconjunto cerrado B , su imagen $f(B)$ es cerrada en $f(X)$, ya que como f es biyectiva, existe f^{-1} , y como $[f^{-1}(B)]^{-1} = f(B)$ se sigue que f^{-1} es continua y así f es un homeomorfismo.

Es claro que $f(B) \subset f(X) \cap \overline{f(B)}$, donde $\overline{f(B)}$ denota la cerradura de $f(B)$ en Y . Por otro lado, si $y = f(x) \in f(X) \setminus f(B)$, entonces $x \in X \setminus B$ ya que f es inyectiva. Como f separa puntos de subconjuntos cerrados, $f(x) \notin \overline{f(B)}$. De esta manera hemos demostrado que $f(X) \setminus f(B) \subset f(X) \setminus \overline{f(B)}$, de donde se sigue que $\overline{f(B)} \cap f(X) \subset f(B)$ y por tanto $f(B) = \overline{f(B)} \cap f(X)$. Como $\overline{f(B)}$ es cerrado en Y , inferimos que $f(B)$ es cerrado en $f(X)$, como queríamos demostrar. $\square$

Proposición 1.2.9. Si X es un espacio Tychonoff, existe $f : X \rightarrow [0, 1]^I$ que es encaje, para algún conjunto I .

Demostración. Sea $I = C(X, [0, 1])$ la familia de las funciones continuas de X en $[0, 1]$ y sea $f = \triangle I$,

$$f : X \rightarrow [0, 1]^I.$$

Sabemos que f es continua, así, para probar que f es encaje, basta probar que f separa puntos de cerrados. Como X es Tychonoff, f separa puntos de cerrados. $\square$

Proposición 1.2.10. *Si X es Tychonoff, existe (f, K) compactación de X .*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow [0, 1]^I$ el encaje de la proposición anterior. Si $K = \overline{f(X)}$, es compacto y por lo tanto (f, K) es una compactación de X . $\square$

Notación: A la compactación de X de la proposición anterior se le conoce como la *compactación Stone-Čech* de X y se le denota como $(\beta, \beta X) = (f, K)$.

Definición 1.2.16. Diremos que un espacio topológico es:

- a) *Completamente metrizable* si existe una métrica d definiendo la topología de X tal que (X, d) es completo (es decir, toda sucesión de Cauchy converge).
- b) *Polaco* si es separable y completamente metrizable.

Definición 1.2.17. Un subconjunto S de un espacio topológico X es del tipo G_δ si S es la intersección de una familia numerable subconjuntos abiertos de X . Diremos que S es F_σ si el complemento de S es G_δ .

Proposición 1.2.11. *Sea X un espacio metrizable y C un subconjunto cerrado de X . Entonces C es G_δ .*

Demostración. Sea d una métrica que define la topología de X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos $U_n = \bigcup_{x \in C} B_{1/n+1}(x)$. Como C es cerrado, se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = C$, por lo que C es G_δ . $\square$

Definición 1.2.18. Sea X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$ y $f : S \rightarrow Y$. Entonces

$$osc_f(x) = \inf\{\text{diam}(f[O \cap S]) \mid O \text{ vecindad abierta de } x\}$$

es la *oscilación* de f en el punto x .

Proposición 1.2.12. *Sean X, Y espacios métricos. La función $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si $osc_f(x) = 0$ para toda x .*

Demostración. Supongamos que f es continua y sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Como f es continua existe una vecindad abierta V de x tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon/2$ para todo $y \in V$. Entonces $d(f(y), f(z)) < \epsilon$ para todo $y, z \in V$. Por lo

tanto $\text{diam}(f[V \cap X]) = \sup\{d(f(y), f(z)) \mid y, z \in V\} \leq \epsilon$ lo que implica que $\text{osc}_f(x) \leq \epsilon$ para toda $\epsilon > 0$. Por lo tanto $\text{osc}_f(x) = 0$.

Ahora supongamos que $\text{osc}_f(x) = 0$, esto implica que existe una vecindad abierta V de x tal que $\text{diam}(f[V \cap X]) < \epsilon$ entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ para toda $y \in V$, por lo que f es continua. $\square$

Teorema 1.2.9 (Kuratowski). *Sea X un espacio metrizable, Y un espacio completamente metrizable, $S \subseteq X$ y $f : S \rightarrow Y$ una función continua. Entonces podemos encontrar un conjunto $G_\delta = G$ de X con $S \subseteq G \subseteq \overline{S}$ y $g : G \rightarrow Y$ una extensión continua de f .*

Demostración. Fijemos $G = \overline{S} \cap \{x \in X \mid \text{osc}_f(x) = 0\}$. Notemos que $\text{osc}_f(x) = 0$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ hay un vecindad abierta O de x con $\text{diam}(f[O \cap S]) < 1/(n+1)$, así que $\{x \in X \mid \text{osc}_f(x) = 0\}$ es G_δ , ya que podemos verlo como la intersección de todos los G_n , donde $G_n = \{x \mid \text{osc}_f(x) < 1/(n+1)\}$ así como también el conjunto $\overline{S}$, por la Proposición 1.2.11. Entonces G es un G_δ contenido en $\overline{S}$. Si $x \in S$, entonces $x \in \overline{S}$ y $\text{osc}_f(x) = 0$ ya que f es continua, por lo tanto $S \subseteq G \subseteq \overline{S}$.

Ahora definiremos $g : G \rightarrow Y$. Consideremos un punto $x \in G$, como $x \in \overline{S}$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de S que converge a x . Dado que $\{\text{diam}(f[\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}])\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}$ es Cauchy y entonces converge a $g(x) \in Y$. Notemos que g está bien definida, y extiende a f . Para ver que g es continua necesitamos ver que $\text{osc}_g(x) = 0$ para cada $x \in G$. Si O es abierto en X , entonces $g[O \cap G] \subseteq \overline{f[O \cap S]}$, entonces $\text{diam}(g[O \cap G]) \leq \text{diam}(f[O \cap S])$ y $\text{osc}_g(x) = \text{osc}_f(x) = 0$. $\square$

1.3. Teoría de conjuntos

Sea asume que el lector está familiarizado con la teoría de ordinales y sabe qué es un conjunto ordenado, el lector interesado en profundizar los resultados de esta sección puede consultar [Her17]. Sea ϵ_α el orden estricto de la pertenencia restringido al conjunto α . Un conjunto α es un *ordinal* si es transitivo, es decir, $a \in \alpha \implies a \subset \alpha$, y $(\alpha, \epsilon_\alpha)$ es un *conjunto bien ordenado* (es decir, un conjunto parcialmente ordenado donde todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo). Si α es un ordinal, se define $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$

que también es un ordinal. Un ordinal α es *límite* si no existe un ordinal β con $\beta + 1 = \alpha$.

La noción de inducción puede ser extendida a conjuntos bien ordenados.

Teorema 1.3.1 (Inducción transfinita, [Her17]). *Sean ϕ una fórmula de la teoría de conjuntos, $(X, \leq)$ un conjunto bien ordenado y $x_0, x_1, \dots, x_k$ conjuntos dados. Si para todo $x \in X$ se cumple que*

$$(\forall y < x)(\phi(y, x_0, x_1, \dots, x_k)) \implies \phi(x, x_0, x_1, \dots, x_k),$$

entonces $\phi(x, x_0, x_1, \dots, x_k)$ se cumple para todo $x \in X$.

Un ordinal κ se llama *cardinal* si $|\alpha| < |\kappa|$ para todo ordinal $\alpha < \kappa$. Para todo conjunto X , existe un único cardinal κ tal que $|X| = |\kappa|$. Usualmente, sólo se escribe $|X| = \kappa$ y decimos que κ es la *cardinalidad* de X .

Teorema 1.3.2 (Caracterización del conjunto de Cantor). *Todo espacio no vacío, compacto, totalmente desconexo, metrizable y sin puntos aislados es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Teorema 1.3.3 (Caracterización del conjunto de números racionales). *Todo espacio no vacío, numerable, metrizable y sin puntos aislados es homeomorfo al conjunto de números racionales.*

Los teoremas anteriores nos dan una caracterización para dos conjuntos relevantes a lo largo de este trabajo, sin embargo su demostración se desvía de nuestros objetivos, por lo que solamente se enuncian. Una prueba puede encontrarse en [QC12].

Definición 1.3.1. Sean A y B conjuntos. Diremos que *la cardinalidad de A es menor o igual a la cardinalidad de B* , si existe una función inyectiva de A en B . Además, diremos que *la cardinalidad de A es igual a la cardinalidad de B* si existe una función biyectiva de A en B .

Teorema 1.3.4 (Bernstein-Cantor-Schröder). *Sean X y Y conjuntos,*

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow X$$

inyectivas. Entonces existe $h : X \rightarrow Y$ biyectiva.

Notemos que el teorema anterior en particular nos dice que si $|X| \leq |Y|$ y $|Y| \leq |X|$ entonces tenemos que $|X| = |Y|$.

Proposición 1.3.1. *La cardinalidad del conjunto potencia de $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, es igual a la del conjunto de números reales $\mathbb{R}$.*

Demostración. Notemos que la función $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(S) = \sum_{n \in S} 10^{-n}$ para $S \subseteq \mathbb{N}$, es una función inyectiva, con lo que $|P(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.

Ahora, si fijamos una enumeración de los racionales $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y definimos $g(x) = \{n \mid q_n < x\}$ notemos que es una función inyectiva $g : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{N})$.

Con lo que, por el Teorema de Bernstein-Cantor-Schröder, se sigue el resultado. $\square$

Corolario 1.3.1. *El conjunto de todas las sucesiones estrictamente crecientes de números naturales tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Cada sucesión estrictamente creciente de números naturales corresponde a un subconjunto infinito particular de $\mathbb{N}$. Así que no puede haber más sucesiones de este tipo que subconjuntos.

Por otro lado, para cada subconjunto infinito hay un subconjunto infinito que nuevamente corresponde a una sucesión estrictamente creciente, así que no puede haber más subconjuntos que sucesiones.

Por Cantor-Bernstein, entonces, el conjunto de sucesiones estrictamente crecientes tiene la misma cardinalidad que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, es decir, $\mathfrak{c}$. $\square$

1.4. Grupos

Definición 1.4.1. Un *grupo* $(G, *)$ es un conjunto G junto con una operación binaria $*$ en G tal que satisface los siguientes axiomas:

1. La operación binaria $*$ es asociativa.
2. Existe un elemento e en G tal que $e * x = x * e = x$ para todas las $x \in G$. (Este elemento e es un *elemento identidad* para $*$ en G).
3. Para cada $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ con la propiedad de que $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$. (El elemento a^{-1} es un *inverso de a* respecto a $*$).

Diremos que $(G, *)$ es abeliano si su operación binaria $*$ es conmutativa.

Si no existe confusión sobre la operación $*$ para el conjunto G a la que nos estamos refiriendo simplemente se refiere a G como el grupo.

Definición 1.4.2. Si H es un subconjunto de un grupo G cerrado bajo la operación de grupo de G y si H es él mismo un grupo bajo esta operación inducida, entonces H es un *subgrupo* de G . Denotaremos $H \leq G$ el hecho de que H es un subgrupo de G .

Definición 1.4.3. Diremos que G es un grupo cíclico, con generador a , si $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Donde $a^0 = e$, $a^{n+1} = a^n * a$ y $a^{-1} = (a^{-1})^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: El grupo $\mathbb{Z}$ bajo la suma es un grupo cíclico. Tanto 1 como -1 son generadores del grupo.

Observación 1.4.1. *Todo grupo cíclico es abeliano.*

Demostración. Sea G un grupo cíclico y sea a un generador de G tal que

$$G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si g_1 y g_2 son dos elementos cualesquiera de G , existe enteros r y s tales que $g_1 = a^r$ y $g_2 = a^s$. Entonces

$$g_1 g_2 = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s a^r = g_2 g_1,$$

de modo que G es abeliano. □

Definición 1.4.4. El *grupo simétrico* sobre un conjunto X , denotado por S_X , es el grupo formado por las funciones biyectivas de X en sí mismo, bajo la operación de composición de funciones.

Cuando X es un conjunto finito de orden n , el grupo S_X se denomina *grupo de permutaciones* de n elementos, y se denota por S_n .

Nótese que S_n tiene $n!$ elementos.

Definición 1.4.5. Un *isomorfismo* entre un grupo $(G, \bullet)$ y un grupo $(G', *)$ es una función biyectiva tal que para todas las $x, y \in G$

$$\phi(x \bullet y) = \phi(x) * \phi(y).$$

Si existe tal función se dice que los grupos G y G' son *isomorfos*. (Denotado como $G \simeq G'$).

Definición 1.4.6. Un isomorfismo de un grupo G en sí mismo es un *automorfismo* del grupo G .

Definición 1.4.7. Un homeomorfismo de un espacio topológico X en sí mismo es un *autohomeomorfismo* del espacio X .

Es fácil notar que el conjunto de todos los automorfismos (autohomeomorfismos) con la operación composición de funciones forman un grupo, llamado el *grupo de automorfismos* (*grupo de autohomeomorfismos*).

Definición 1.4.8. Un conjunto es llamado *rígido* para una cierta clase de funciones sobre sí mismo, si el conjunto no admite otras funciones excepto las triviales (siendo “trivial” definido de alguna manera natural).

Teorema 1.4.1 (De Cayley). *Todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.*

Demostración. Paso 1. Nuestra primera tarea es encontrar un conjunto G' de permutaciones que sea candidato a formar un grupo isomorfo a G . Piénsese en G simplemente como un conjunto y sea S_G el grupo de todas las permutaciones de G dado en la definición 1.4.4. (Nótese que en el caso finito si G tiene n elementos, S_G tiene $n!$ elementos. Así, en general, es claro que S_G es demasiado grande para ser isomorfo a G). Definamos cierto subconjunto de S_G . Para $a \in G$ sea λ_a la transformación de G en G dada por

$$\lambda_a(x) = ax$$

para $x \in G$. (Podemos pensar en λ_a como la multiplicación izquierda por a). Si $\lambda_a(x) = \lambda_a(y)$ entonces $ax = ay$, con lo que fácilmente podemos concluir que $x = y$. Así λ_a es inyectiva. Además, si $y \in G$, entonces

$$\lambda_a(a^{-1}y) = a(a^{-1}y) = y,$$

así, λ_a lleva a G sobre G . Entonces $\lambda_a : G \rightarrow G$ es inyectiva y sobreyectiva, esto es λ_a es una permutación. Sea

$$G' = \{\lambda_a \mid a \in G\}.$$

Paso 2. Afirmamos que G' es un subgrupo de S_G . Debemos mostrar que G' es cerrado bajo la operación composición de funciones, que contiene a la

identidad y contiene el inverso de cada uno de sus elementos. En primer lugar afirmamos que

$$\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$$

para mostrar que estas funciones son iguales, debemos mostrar que actúan igual sobre toda $x \in G$. Ahora

$$\lambda_a \lambda_b(x) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = \lambda_a(bx) = a(bx) = (ab)x = \lambda_{ab}(x)$$

con lo que $\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$ y por tanto G' es cerrado bajo la composición. Es claro que para toda $x \in G$,

$$\lambda_e(x) = ex = x,$$

donde e es el elemento identidad de G , de modo que λ_e es la permutación identidad de S_G y está en G' . Como $\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$ tenemos

$$\lambda_a \lambda_{a^{-1}} = \lambda_{aa^{-1}} = \lambda_e$$

además

$$\lambda_{a^{-1}} \lambda_a = \lambda_e$$

de aquí que

$$(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$$

de modo que $(\lambda_a)^{-1} \in G'$. Entonces G' es un subgrupo de S_G .

Paso 3. Falta probar que G es isomorfo al grupo G' descrito. Definamos $\phi : G \rightarrow G'$ por

$$\phi(a) = \lambda_a$$

para $a \in G$. Si $\phi(a) = \phi(b)$ entonces λ_a y λ_b deben ser la misma permutación de G . En particular

$$\lambda_a(e) = \lambda_b(e),$$

ya que $ae = be$ y $a = b$. Por tanto ϕ es inyectiva. Es inmediato que ϕ es sobreyectiva por la definición de G' . Finalmente $\phi(ab) = \lambda_{ab}$ mientras que

$$\phi(a)\phi(b) = \lambda_a \lambda_b$$

pero ya se dijo que $\lambda_{ab} = \lambda_a \lambda_b$. Así

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

con lo que concluimos la prueba. □

Definición 1.4.9. Sea X un conjunto y G un grupo. Una *acción* de G en X es una transformación $*$: $G \times X \rightarrow X$ tal que

1. $e * x = x$ para todas las $x \in X$
2. $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$ para todas las $x \in X$ y todas las $g_1, g_2 \in G$.

Bajo estas condiciones diremos X es un G -conjunto.

Ejemplo: Sea X cualquier conjunto y S_X el grupo simétrico de X . Entonces, X es un S_X -conjunto donde para cada $x \in X$ y $\sigma \in S_X$, la acción σx de σ en x es el efecto de la permutación σ en x . La condición 2 se cumple, como consecuencia de la composición de funciones y la condición 1 es inmediata a partir de la definición de la permutación identidad. En particular, $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ es un S_n -conjunto.

1.5. Gráficas de Cayley

Definición 1.5.1. Sea Γ un grupo y X un conjunto de generadores para Γ . La *gráfica de colores de Cayley* de Γ con respecto a X , denotado por $Col(\Gamma, X)$, es una gráfica dirigida con etiquetas en sus aristas. Es definida como sigue:

- (i) Su conjunto de vértices es igual a Γ .
- (ii) Su conjunto de aristas es $\{(\alpha, \alpha\sigma) : \alpha \in \Gamma, \sigma \in X\}$.

Además, a la arista $(\alpha, \alpha\sigma)$ se le da el color σ .

En otras palabras, los vértices α, β están unidos por una arista de α a β que es de color σ si y sólo si hay algún elemento σ en X tal que $\alpha\sigma = \beta$. Entonces el conjunto de aristas puede ser escrito además como

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \Gamma, \alpha^{-1}\beta \in X\}.$$

Por lo tanto, la arista (α, β) con $\alpha^{-1}\beta \in X$ recibe el color $\alpha^{-1}\beta$.

Proposición 1.5.1 ([LS16]). Sea Γ un grupo y X un conjunto de generadores para Γ . Entonces:

- (1) $1 \in X$ si y sólo si todo vertice de $Col(\Gamma, X)$ incide en un bucle de color 1; por esta razón a menudo suponemos tácitamente que $1 \notin X$.

- (2) El grado de salida y el grado de entrada de cada vértice en $Col(\Gamma, X)$ es igual a $|X|$.
- (3) Todo camino dirigido en $Col(\Gamma, X)$ formado por aristas $e_1, \dots, e_k$ de color $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ respectivamente, corresponde al elemento $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k \in \Gamma$.
- (4) X genera Γ si y sólo si $Col(\Gamma, X)$ es fuertemente conexa. (Es decir entre cada par de vértices $\alpha, \beta \in \Gamma$ existe un camino dirigido de α a β en $Col(\Gamma, X)$).
- (5) Si σ y σ^{-1} están en X , entonces para cualquier arista (α, β) de color σ , existe una correspondiente arista (β, α) en $Col(\Gamma, X)$ de color σ^{-1} . Si $\sigma^2 = 1$, entonces esta situación es a menudo representada dibujando una sola arista de color σ que une α y β .

Ejemplo: Consideremos el grupo simétrico S_3 , el cual es isomorfo al grupo diédrico D_3 . Tiene como representación

$$S_3 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 = 1 \rangle.$$

Si tomamos $\alpha = (12)$ y $\beta = (123)$. Entonces la gráfica de colores de Cayley de S_3 con respecto a $X = \{\alpha, \beta\}$ se muestra en la Figura 1.4.

En esta figura, una arista no dirigida representa un par de aristas con direcciones opuestas que unen el mismo par de vértices y ambos tienen el color σ . Las aristas dirigidas en la figura son las de color β .

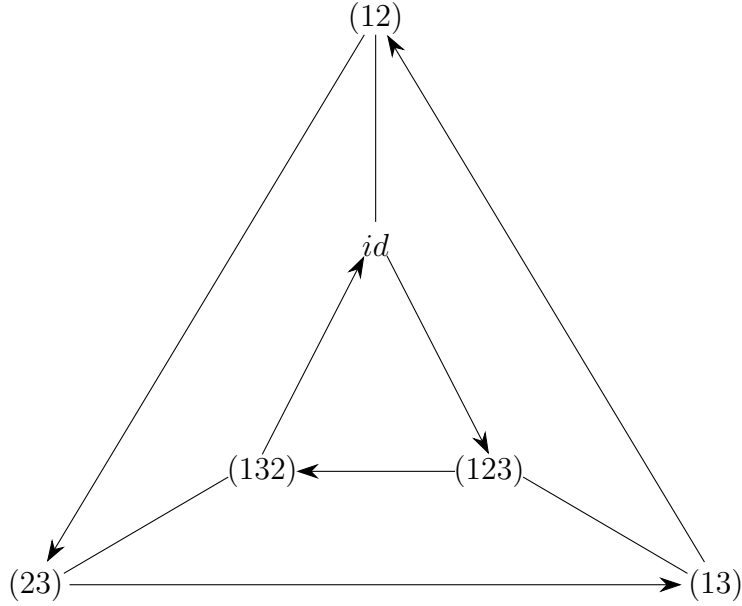


Figura 1.4: Gráfica de colores $Col(S_3, \{\alpha, \beta\})$.

Un *automorfismo que conserva el color* de $Col(\Gamma, X)$ es una permutación π de $V(Col(\Gamma, X)) = \Gamma$ tal que, para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$, (α, β) es una arista de color σ si y sólo si $(\pi(\alpha), \pi(\beta))$ es también una arista de color σ .

El conjunto de todos los automorfismos que conservan el color de $Col(\Gamma, X)$ forma un grupo bajo la operación composición de funciones, y es denotado por

$$Aut(Col(\Gamma, X)).$$

Lema 1.5.1. *Sea Γ un grupo finito no trivial con un conjunto de generadores X . Sea π una permutación de $V(Col(\Gamma, X))$. Entonces π es un automorfismo que conserva el color de $Col(\Gamma, X)$ si y sólo si $\pi(\alpha\sigma) = \pi(\alpha)\sigma$ para todo $\alpha \in \Gamma$ y $\sigma \in X$*

Demostración. Sea π un automorfismo que conserva el color, y sean $\alpha \in \Gamma$ y $\sigma \in X$. Ya que la arista $(\alpha, \alpha\sigma)$ es de color σ , la arista $(\pi(\alpha), \pi(\alpha\sigma))$ es también de color σ . Entonces $\pi(\alpha\sigma) = \pi(\alpha)\sigma$.

A la inversa, supongamos que $\pi(\alpha\sigma) = \pi(\alpha)\sigma$ para todo $\alpha \in \Gamma$ y $\sigma \in X$. Ahora, una arista (α, β) es de color σ si y sólo si $\beta = \alpha\sigma$, esto es, si y sólo si

$\pi(\beta) = \pi(\alpha\sigma) = \pi(\alpha)\sigma$, y por lo tanto si y sólo si $(\pi(\alpha), \pi(\beta))$ es una arista de color σ . Entonces π es un automorfismo que conserva el color. $\square$

Definición 1.5.2. Un *grupo de permutaciones* será un par (Γ, Y) donde Y es un conjunto finito y Γ es un subgrupo del grupo simétrico S_Y , es decir, el grupo de todas las permutaciones de Y .

Lema 1.5.2. Sea Γ un grupo finito no trivial con un conjunto de generadores X . Entonces la acción de $\text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$ sobre $V(\text{Col}(\Gamma, X))$ es equivalente al grupo de permutaciones $(L(\Gamma), \Gamma)$, que es, la acción izquierda de Γ sobre sí mismo, donde $L(\Gamma) = \{\lambda_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$. En particular $\text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X)) \simeq \Gamma$.

Demostración. Para todo $\alpha \in \Gamma$, λ_α denota la permutación de Γ dada por $\beta \mapsto \alpha\beta$. Con lo que debemos mostrar que $(L(\Gamma), \Gamma)$ es equivalente a $(\text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X)), \Gamma)$. Por lo tanto, primero debemos mostrar que $\lambda_\alpha : \beta \mapsto \alpha\beta$ es, en efecto, un automorfismo que preserva el color de $\text{Col}(\Gamma, X)$. Pero esto es así porque el par (β, γ) es una arista de color σ si y sólo si $\gamma = \beta\sigma$, esto es, $\alpha\gamma = \alpha\beta\sigma$, y entonces $\lambda_\alpha(\gamma) = \lambda_\alpha(\beta)\sigma$; y esto es así si y sólo si $(\lambda_\alpha(\beta), \lambda_\alpha(\gamma))$ es una arista de color σ .

Entonces, la única cosa que resta probar es que cualquier automorfismo que conserva el color de $\text{Col}(\Gamma, X)$ es, en efecto, un elemento de $L(\Gamma)$. Supongamos que $\phi \in \text{Aut}(\text{Col}(\Gamma, X))$ y supongamos que $\phi(1) = \alpha$. Afirmamos que $\phi = \lambda_\alpha$.

Para cualquier $\beta \in \Gamma$ podemos escribir $\beta = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_t$ con los $\sigma_i \in X$ (no necesariamente diferentes). Entonces $\phi(\beta) = \phi(1\beta) = \phi(1\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_t)$. Aplicando el lema anterior sucesivamente obtenemos que

$$\phi(\beta) = \phi(1)\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_t = \alpha\beta = \lambda_\alpha(\beta),$$

como deseábamos. $\square$

Teorema 1.5.1 (Frucht). Sea Γ un grupo finito. Entonces existe una gráfica G tal que $\text{Aut}(G) \simeq \Gamma$.

Demostración. Sea $X = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t\}$ cualquier grupo de generadores de Γ y construyamos $\text{Col}(\Gamma, X)$. Entonces Γ es isomorfo al grupo de automorfismo que conservan el color de $\text{Col}(\Gamma, X)$. Lo que debemos hacer ahora es transformar $\text{Col}(\Gamma, X)$ en una gráfica G tal que no se formen nuevos automorfismos.

En realidad, es bastante sencillo codificar las direcciones de las aristas y su color a través de aristas. Cada arista de color σ_i se reemplaza por un “gadget” como se muestra en la siguiente figura

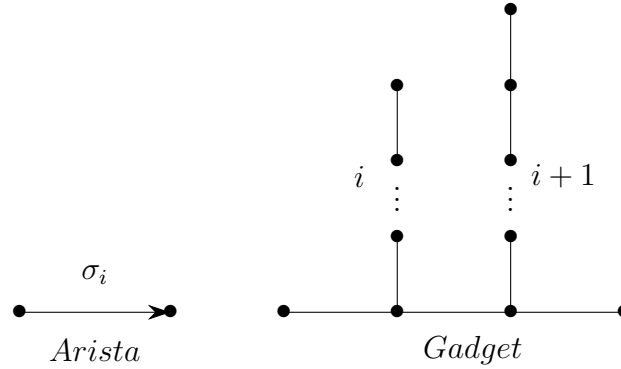


Figura 1.5: Reemplazo de aristas por gadgets.

Es claro que todo automorfismo de $Col(\Gamma, X)$ induce un automorfismo de G , y viceversa. Esto se debe a que ninguno de los nuevos vértices se puede mapear en ninguno de los antiguos mediante un automorfismo y sólo los gadgets del mismo tipo se pueden mapear entre sí, y esto sólo se puede hacer en la dirección adecuada correspondiente a la orientación de las dos aristas. Por lo tanto, $Aut(G) \simeq \Gamma$, como deseábamos. $\square$

CAPÍTULO 2

Espacios rígidos

En [Gro59], J. De Groot presenta una manera natural de construir espacios rígidos, teniendo cuidado de que el espacio contenga un subconjunto denso (preferiblemente numerable) de modo que cada punto de este conjunto tenga una propiedad única en todo el espacio. En este capítulo mostraremos la construcción debida a Jan J. Dijkstra, [Dijk85], de un espacio rígido que sigue estas ideas y que además, tiene la propiedad de que su cuadrado es homeomorfo al conocido espacio de Hilbert, l^2 .

A lo largo de este capítulo denotaremos por Q al espacio conocido como el *Cubo de Hilbert* y por s al subespacio de Q conocido como el *pseudo-interior* de Q , donde $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ y $s = \prod_{i=1}^{\infty} (-1, 1)_i$. Es un hecho conocido que s es homeomorfo a $l_2 = \{x \in s \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ [And66]. En estos espacios producto usualmente usamos la métrica estándar

$$d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

Bajo estas hipótesis el Cubo de Hilbert es un espacio métrico compacto, arco conexo, convexo y además, gracias a la compacidad se sigue que Q es completo (es decir, toda sucesión de Cauchy contenida en Q converge a un elemento de Q) [SS41]. Además $\pi_n(X)$ denotará la función proyección, como se definió en 1.1.20.

2.1. Un espacio rígido cuyo cuadrado es el espacio de Hilbert

Usaremos el teorema de Sierpiński (Teorema 1.2.8) que menciona que un continuo no puede ser particionado en una cantidad numerable de subconjuntos cerrados disjuntos. Si x es un punto de un espacio topológico X definimos el *continuo-componente* de x dado por

$$CC(x, X) = \bigcup \{C \subset X \mid C \text{ es un continuo que contiene } x\}$$

El espacio X es llamado *continuo-conexo* si $CC(x, X) = X$ para alguna x . Intuitivamente podemos decir que un espacio es continuo-conexo si para cualesquiera dos puntos hay un continuo que los contiene, por lo que podemos imaginarnos a las continuo-componentes como subespacios continuo-conexos maximales.

Definición 2.1.1. Un subconjunto cerrado $A \subset X$ es un *Z-conjunto* en X si, para cada función $f : Q \rightarrow X$ y $\epsilon > 0$, existe una función $g : Q \rightarrow X$ con $d(f, g) < \epsilon$ y $g(Q) \cap A = \emptyset$. Un conjunto A es un *σ -Z-conjunto* en X si es unión numerable de *Z-conjuntos*.

El concepto de *Z-conjunto* no parece ser muy atractivo, sin embargo, es el concepto más central en la topología de dimensión infinita, el lector más interesado en esto puede consultar [Van01]. Resulta, aunque esto no queda inmediatamente claro a partir de la definición, que los *Z-conjuntos* son conjuntos “pequeños”, como podemos ver a continuación.

Observación 2.1.1. *Todo Z-conjunto es denso en ninguna parte.*

Demostración. Sea $A \subset X$ un *Z-conjunto*. Por demostrar que $\overline{A}^\circ = \emptyset$. Como A es cerrado basta ver que $A^\circ = \emptyset$. Supongamos que $A^\circ \neq \emptyset$, sea $x \in A^\circ$, entonces existe $B_r(x) \subseteq A$, con $r > 0$.

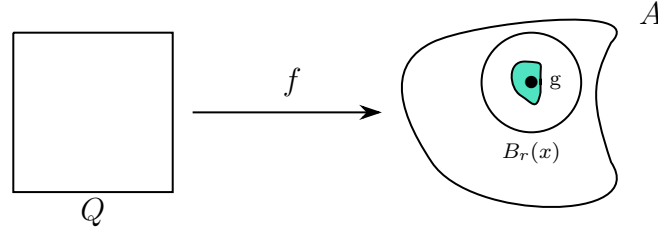


Figura 2.1: Esquema de la demostración.

Sea $f : Q \rightarrow X$ la función constante x , por ser Z -conjunto, existe $g : Q \rightarrow X$ tal que $d(f, g) < \epsilon = \frac{r}{2}$ y $g(Q) \cap A = \emptyset$, pero $g(Q) \in B_{\frac{r}{2}}(x) \subset B_r(x) \subseteq A$, contradiciendo el hecho de que $g(Q) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto $A^\circ = \emptyset$. $\square$

Observación 2.1.2. *Todo σ - Z -conjunto es de primera categoría, pues es la unión numerable de densos en ninguna parte.*

Ahora derivaremos algunas propiedades elementales de los Z -conjuntos que nos serán útiles a lo largo de este capítulo.

Observación 2.1.3. *Sean $A_1, A_2 \subset Q$. Si A_1, A_2 son Z -conjuntos en Q entonces $A_1 \cup A_2$ es un Z -conjunto en Q .*

Demostración. Sean $f : Q \rightarrow Q$ y $\epsilon > 0$. Como A_1 es un Z -conjunto, existe una función $g_1 : Q \rightarrow Q$ tal que $d(f, g_1) < \frac{\epsilon}{2}$ y $g_1(Q) \cap A_1 = \emptyset$. Ahora, como Q es compacto, se sigue que $g_1(Q)$ es compacto, además A_1 es compacto y cumple que $g_1(Q) \cap A_1 = \emptyset$ entonces se tiene que $r = d(g_1(Q), A_1) > 0$.

Definamos $\delta = \frac{\min\{\epsilon, r\}}{2}$. Como A_2 es Z -conjunto, existe $g_2 : Q \rightarrow Q$ tal que $d(g_2, g_1) < \delta$ y $g_2(Q) \cap A_2 = \emptyset$. Veamos que $g_2(Q) \cap A_1 = \emptyset$. Sea $x \in Q$ y $a \in A_1$, entonces tenemos que

$$r \leq d(g_1(x), a) \leq d(g_1(x), g_2(x)) + d(g_2(x), a)$$

por lo que

$$d(g_2(x), a) \geq r - d(g_1(x), g_2(x)) > r - \delta > 0$$

entonces $g_2(Q) \cap A_1 = \emptyset$. Como claramente $d(f, g_2) < \epsilon$ y $g_2(Q) \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$ se sigue que $A_1 \cup A_2$ es un Z -conjunto. $\square$

Mediante la observación anterior y con la ayuda de inducción, podemos concluir que la unión finita de Z -conjuntos de Q es un Z -conjunto.

Lema 2.1.1. *Sea $A \subset Q$ cerrado. Entonces:*

- (1) *A es un Z -conjunto si, y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $f : Q \rightarrow Q$ tal que $d(f, id_Q) < \epsilon$ y $f(Q) \cap A = \emptyset$.*
- (2) *Si $\pi_n(A) \neq \mathbb{J}_n$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{J}_n = [-1, 1]_n$, entonces A es un Z -conjunto.*

Demostración. (1) Sea A un Z -conjunto. Como $id_Q : Q \rightarrow Q$, la definición de Z -conjunto inmediatamente nos dice que para toda $\epsilon > 0$ existe $f : Q \rightarrow Q$ con $d(f, id_Q) < \epsilon$ y $f(Q) \cap A = \emptyset$. Ahora probaremos la implicación inversa, sea $\epsilon > 0$ y $g : Q \rightarrow Q$ cualquier función. Por hipótesis, existe $f : Q \rightarrow Q \setminus A$ tal que $d(f, id_Q) < \epsilon$. Sea $h = f \circ g$. Claramente $h[Q] \cap A = \emptyset$, además,

$$d(h, g) = d(f \circ g, g) \leq d(f, id_Q) < \epsilon.$$

Con lo que concluimos que A es un Z -conjunto.

(2) Escojamos $\epsilon > 0$ y encuentre $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-(n-1)} < \epsilon$ mientras que además $\pi_n(A) \neq \mathbb{J}_n$. Tomemos un $t \in \mathbb{J}_n \setminus \pi_n(A)$ arbitrario, y definamos $f : Q \rightarrow Q$ mediante

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots) = (x_1, \dots, x_{n-1}, t, x_{n+1}, \dots).$$

Con lo que claramente $f(Q) \cap A = \emptyset$ y además $d(f, id_Q) < \epsilon$ puesto que

$$d(f(x), x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f(x_i) - x_i|}{2^i} \leq \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon.$$

Entonces por (1), A es un Z -conjunto. □

Corolario 2.1.1. *Si $K \subseteq s$ es compacto, entonces K es un Z -conjunto en Q .*

Definición 2.1.2. Un espacio topológico es σ -compacto si es unión numerable de subespacios compactos.

De los resultados anteriores podemos inferir que todo subconjunto unitario de Q (es decir, todo subconjunto que conste solamente de un elemento) es un Z -conjunto, además, que todo subconjunto de s que sea σ -compacto, será a la vez un σ - Z -conjunto de Q .

Lema 2.1.2. Sea $U \subset Q$ abierto y conexo por caminos. Si Z es un Z -conjunto, dados $x, y \in U \setminus Z$, $\epsilon > 0$ y f un arco de x a y contenido en U , entonces existe un arco g de x a y tal que

$$g(I) \subset U \setminus Z \quad y \quad \|g - f\| < \epsilon.$$

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que $Z \cap (B_\delta(x) \cup B_\delta(y)) = \emptyset$, si $|s - t| < \delta$ entonces $|f(s) - f(t)| < \epsilon$, y $B_\delta(f(I)) \subset U$.

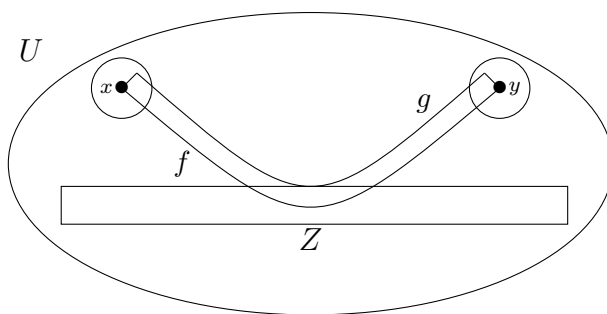


Figura 2.2: Esquema de la demostración.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\delta < \epsilon$ e $I \subset Q$, sea $\hat{f} : Q \rightarrow U$ una extensión continua de f , tal función existe por el Teorema de extensión de Tietze-Urysohn (ver [Eng89, pág. 69]). Como Z es un Z -conjunto, existe una función $\hat{g} : Q \rightarrow U \setminus Z$ tal que $\|\hat{g} - \hat{f}\| < \delta$. Sea $g' = \hat{g}|_I \in C(I, U \setminus Z)$, entonces $\|g' - f\| < \delta < \epsilon$. Definamos a g como sigue:

$$g(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{\delta}\right) f(0) + \left(1 - \frac{t}{\delta}\right) g'(0) & \text{si } t \in [0, \delta]; \\ g'\left(\frac{t}{1 - 2\delta}\right) & \text{si } t \in (\delta, 1 - \delta); \\ \left(1 - \frac{1 - t}{\delta}\right) f(1) + \left(\frac{1 - t}{\delta}\right) g'(1) & \text{si } t \in [1 - \delta, 1]. \end{cases}$$

Se puede verificar sin mucha dificultad que g cumple con las condiciones requeridas. También obsérvese que dicho arco no necesariamente es único, ya que por ejemplo depende de la extensión de f elegida. $\square$

Proposición 2.1.1. *Sea $U \subset Q$ abierto y convexo. Si $Z = \bigcup_{n \geq 1} Z_n$, donde $Z_n \subset Z_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es un σ - Z -conjunto; entonces dados $x, y \in U \setminus Z$ existe un arco f de x a y en $U \setminus Z$.*

Demostración. Construiremos el arco f como el límite de una sucesión de arcos f_n construida recursivamente como sigue:

- Sea f_0 la recta de x a y , definamos $Z_0 = Q \setminus U$.
- Sea $\epsilon_0 = \frac{d(f_0(I), Z_0)}{3}$ y f_1 tal que $f_1(I) \cap Z_1 = \emptyset$ y $\|f_1 - f_0\| < \epsilon_0$.
- Supongamos contruidos $f_1, \dots, f_n$.
- Definamos la construcción el paso $n + 1$. Sea

$$\epsilon_n = \frac{1}{3^{n+1}} \min\{d(f_i(I), Z_i) \mid 0 \leq i \leq n\},$$

por el lema anterior, existe un arco f_{n+1} de x a y tal que $\|f_{n+1} - f_n\| < \epsilon_n$ y $f_{n+1}(I) \cap Z_{n+1} = \emptyset$.

Entonces $\{f_n\} \subset C(I, Q)$ es de Cauchy y por lo tanto converge, es decir $f_n \rightarrow f \in C(I, Q)$, más aún, veamos que $f(I)$ es un camino que está contenido en U . Sea $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} |f_0(t) - f(t)| &= |f_0(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_0(t) - f_n(t)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n |f_i(t) - f_{i-1}(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f_i(t) - f_{i-1}(t)| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \right) \epsilon_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0, \end{aligned}$$

entonces $f(I) \subset B_{\epsilon_0}(f_0(I)) \subset U$. Notemos que $f = \lim_{m \geq n} f_m$ no intersecta a Z pues $\|f - f_n\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|f_{i+1} - f_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} d(f_n(I), Z_n) < \frac{1}{2} d(f_n(I), Z_n)$, por lo tanto $f(I) \cap Z = \emptyset$. $\square$

Lema 2.1.3. *Sean B_1 y B_2 σ - Z -conjuntos en el cubo de Hilbert Q , y sea $f : Q \setminus B_1 \rightarrow Q \setminus B_2$ un homeomorfismo. Entonces existe un espacio compacto M y funciones monótonas $\gamma_1, \gamma_2 : M \rightarrow Q$ tal que $\gamma_1^{-1}(B_1) = \gamma_2^{-1}(B_2)$ y $f \circ \gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(Q \setminus B_1)} = \gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(Q \setminus B_2)}$.*

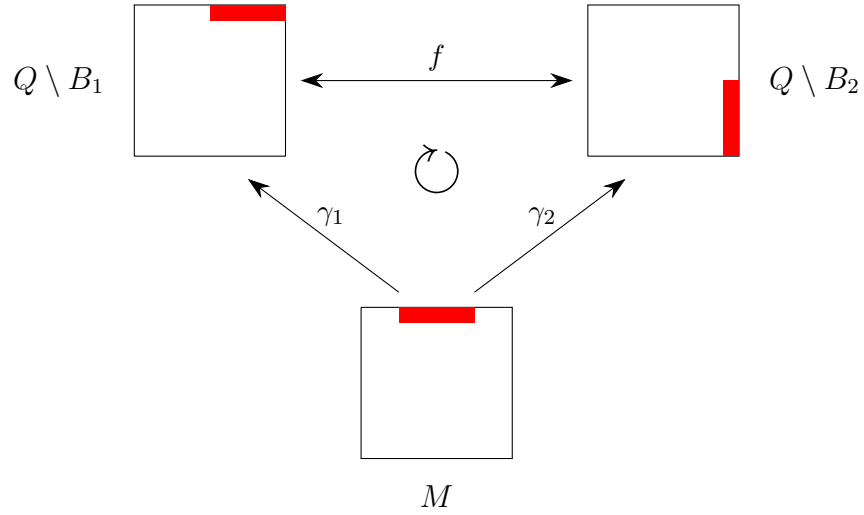


Figura 2.3: Esquema del Lema 2.1.3.

Demostración. Recordemos que una función continua y cerrada es monótona si es sobreyectiva y la preimagen de conexos es conexa (ver Definición 1.2.2). Sea $\Gamma \subset Q \times Q$ la gráfica de f . Tomemos $M = \overline{\Gamma}$. Afirmamos que $\gamma_i = \pi_i|_M$ donde $\pi_i : Q \times Q \rightarrow Q$ son las funciones proyección, con $i = 1, 2$.

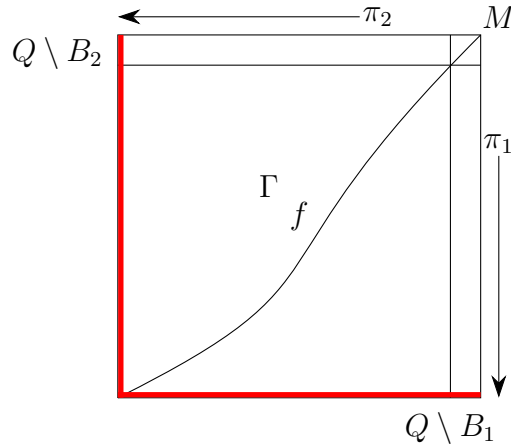


Figura 2.4: Esquema de la demostración.

Notemos que $M = \Gamma \cup (\overline{\Gamma} \setminus \Gamma)$. Como Γ es la gráfica de f , entonces Γ es

cerrado en $(Q \setminus B_1) \times Q$ entonces $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma \subseteq B_1 \times Q$. Ahora notemos que

$$\begin{aligned}\gamma_1^{-1}(B_1) &= (\pi_1|_M^{-1})(B_1) = M \cap (B_1 \times Q) = [\Gamma \cup (\bar{\Gamma} \setminus \Gamma)] \cap (B_1 \times Q) \\ &= (\bar{\Gamma} \setminus \Gamma) \cap (B_1 \times Q) = \bar{\Gamma} \setminus \Gamma.\end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $\gamma_2^{-1}(B_2) = \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, entonces se sigue que $\gamma_1^{-1}(B_1) = \bar{\Gamma} \setminus \Gamma = \gamma_2^{-1}(B_2)$. Por la Observación 2.1.2, $Q \setminus B_i$ es denso en Q , entonces como $Q \setminus B_i \subseteq \gamma_i(\Gamma) \subseteq \gamma_i(M)$, se sigue que cada γ_i es sobreyectiva, en efecto, $\gamma_i(M)$ es cerrado y denso en Q y por lo tanto es igual a Q . Por simetría, es suficiente verificar que γ_1 es monótona (para lo que usaremos la Proposición 1.2.2). Para $x \in Q \setminus B_1$, $\gamma_1^{-1}(x)$ es un punto de Γ y por lo tanto conexo. Supongamos que para algún $x \in B_1$, $\gamma_1^{-1}(x)$ no es conexo. Sea $\gamma_1^{-1}(x) = F \cup G$ una separación en conjuntos cerrados, y escojamos abiertos disjuntos $U, V \in M$ que contengan a F y G , respectivamente. Por la Proposición 1.2.5 γ_1 es una función cerrada, entonces $\gamma_1(M \setminus (U \cup V))$ es un cerrado de Q que no contiene a x , por lo que existe una vecindad abierta W de x en Q tal que $x \in W \subseteq Q \setminus \gamma_1(M \setminus (U \cup V))$. En particular $\gamma_1^{-1}(W) \subseteq U \cup V$ y podemos suponer que W es conexo, considerando por ejemplo un abierto básico de Q . Entonces $W \setminus B_1$ es también conexo (en efecto, por la Proposición 2.1.1 podemos ver que es conexo por caminos, por lo cual es conexo). Veamos que

$$\gamma_1^{-1}(W \setminus B_1) = (\gamma_1^{-1}(W) \cap (U \cap \Gamma)) \cup (\gamma_1^{-1}(W) \cap (V \cap \Gamma))$$

es una separación de $\gamma_1^{-1}(W \setminus B_1)$. En efecto, claramente son abiertos disjuntos, por lo que sólo falta ver que son no vacíos. Seleccionemos $y \in Q$ tal que $(x, y) \in F \subseteq \bar{\Gamma}$, entonces existe una sucesión $(x_n, y_n) \in \Gamma$ que converge a (x, y) , sin pérdida de generalidad, $(x_n, y_n) \subseteq \Gamma \cap U$. Como $x_n \rightarrow x$ entonces $x_n \in W$ (para cierta n) por lo tanto se sigue que $(x_n, y_n) \in \gamma_1^{-1}(W)$, lo cual muestra que $\gamma_1^{-1}(W) \cap (U \cap \Gamma)$ es no vacío. Análogamente se sigue que $\gamma_1^{-1}(W) \cap (V \cap \Gamma)$ es no vacío. Como $\gamma_1|_\Gamma : \Gamma \rightarrow Q \setminus B_1$ es un homomorfismo, una función continua con inversa continua $y \mapsto (y, f(y))$, entonces

$$W \setminus B_1 = (W \cap \gamma_1(U \cap \Gamma)) \cup (W \cap \gamma_1(V \cap \Gamma))$$

es una separación de $W \setminus B_1$, obteniendo una contradicción, pues $W \setminus B_1$ es conexo. Por lo tanto γ_1 y γ_2 son monótonas. $\square$

Estamos listos para construir el espacio rígido bajo homeomorfismos (ver Definición 1.4.8) que se mencionó al inicio del capítulo.

La construcción: Sea $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$, el cubo de Hilbert, y sea $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $(0, 1)$ que converge a 1. Definamos para cada $i \in \mathbb{N}$, la “cara final encogida en la dirección de la i -ésima coordenada” W_i por

$$W_i = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in Q \mid x_i = 1 \text{ y } x_j \in [-p_i, p_i] \text{ para } j \neq i \right\},$$

y pongamos $Y = Q \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$. Este espacio Y fue introducido por Anderson, Curtis y Van Mill [ACV82], es homogéneo (es decir, para todo $x, y \in Y$ existe un homeomorfismo $h : Y \rightarrow Y$ tal que $h(x) = y$) y tiene la siguiente propiedad interesante: si A es un subconjunto σ -compacto de Y entonces $(Y \setminus A) \times (Y \setminus A)$ es homeomorfo a $l^2 = \{x \in s \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$, el denominado espacio de Hilbert. Construiremos un σ -compacto en Y tal que su complemento es rígido.

El siguiente resultado se sigue directamente del Lema 2.1.1.

Observación 2.1.4. *Cada $i \in \mathbb{N}$, W_i es un Z -conjunto en Q .*

Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea Z_i una estrella i -puntiaguda con centro en c_i (es decir, Z_i es la unión disjunta $\{c_i\} \cup \bigcup_{j=1}^i J_{ij}$, donde $J_{ij} \cup \{c_i\}$ es homeomorfo al arco $[0, 1]$). No es difícil encajar los conjuntos Z_i disjuntos a pares en Y tal que el conjunto $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es denso. Encajemos los conjuntos Z_i en s , en cuyo caso podemos aplicar el Lema 2.1.1 para ver que cada Z_i es un Z -conjunto en Q . El proceso se realizará como sigue:

Sea $(d_i) \subseteq s$ un subconjunto denso en Q . Construiremos recursivamente $(c_i) \subseteq (d_i)$ y $Z_i \subseteq s$, Z -conjuntos ajenos en s .

- (1) Sean $c_1 = d_1$, $\epsilon_1 > 0$ tal que $d(1, \pi_1(c_1)) < 2\epsilon_1$ y $c_{11} \in s$ tal que

$$\pi_i(c_{11}) = \begin{cases} \pi_i(c_1) & si \quad i > 1 \\ \pi_i(c_1) + \epsilon_1 & si \quad i = 1. \end{cases}$$

Definamos $J_{11} = \{tc_1 + (1-t)c_{11} \mid t \in [0, 1]\} \subset s$ y $Z_1 = J_{11} \cup \{c_1\}$.

- (n) Supongamos definidos $c_1, \dots, c_n$ y J_{ij} para $i = 1, \dots, n$, $j \leq i$, con $Z_i = \bigcup_{j \leq i} J_{ij} \cup \{c_i\}$.
- (n+1) Sea $Z = \bigcup_{i \leq n} Z_i$, notemos que Z es un Z -conjunto, en particular es denso en ninguna parte, por lo que no es denso en Q . Sea c_{n+1} el

mínimo elemento de (d_i) tal que $c_{n+1} \notin Z$. Construiremos $n+1$ puntos $c_{n+1,j}$ de tal manera que nuestro conjunto Z_{n+1} será la unión de los arcos que van de c_n a $c_{n+1,j}$. Como Z es compacto, existe $1/n > \epsilon_{n+1} > 0$ y $k_{n+1} > n+1$ tal que si

$$U_{n+1} = \prod_{j \leq k_{n+1}} (\pi_j(c_{n+1}) - 2\epsilon_{n+1}, \pi_j(c_{n+1}) + 2\epsilon_{n+1}) \times \prod_{j > k_{n+1}} (-1, 1)_j \subset s$$

entonces $U_{n+1} \cap Z = \emptyset$. Para $j \leq n+1$ tomemos un punto $c_{n+1,j} \in s$ tal que

$$\pi_i(c_{n+1,j}) = \begin{cases} \pi_i(c_{n+1}) & \text{si } i \neq j \\ \pi_i(c_{n+1}) + \epsilon_{n+1} & \text{si } i = j \end{cases}$$

y definamos $J_{n+1,j} = \{tc_{n+1} + (1-t)c_{n+1,j} \mid t \in [0, 1]\}$ y consideremos $Z_{n+1} = \bigcup_{j \leq n+1} J_{n+1,j} \cup \{c_{n+1}\}$.

Veamos que tal construcción es como la deseamos, es decir, tal que $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq s$ es denso en Q .

Sean $x \in Q$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N$ ocurre que $\epsilon_i < \frac{\epsilon}{2}$. Existe además $i \geq n$ tal que $d_i \notin \bigcup_{i \leq n} Z_i$ y $d(x, d_i) < \frac{\epsilon}{2}$ por lo que $d_i \in Z_n$, para alguna $n \geq N$, entonces existe una $j \leq n$ de tal manera que $d_i \in J_{n,j} \cup \{c_n\}$ se sigue que

$$d(d_i, c_n) \leq d(c_n, c_{n,j}) \leq \epsilon_n \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$d(x, c_n) \leq d(x, d_i) + d(d_i, c_n) < \epsilon.$$

Por lo que $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es denso en Q .

Nuestro espacio rígido X es dado por

$$X = Y \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^i J_{ij}.$$

Observemos que $P = Q \setminus X$ es un σ - Z -conjunto en Q y los conjuntos W_i son copias disjuntas de Q . Notemos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^i J_{ij}$ es σ -compacto, probemos ahora que X es rígido.

Afirmación. X es rígido.

Demostración. Notemos que

$$\{W_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{J_{ij} \mid (i, j) \in \mathbb{N}^2, j \leq i\}$$

forma una cubierta numerable de cerrados de P que consiste en conjuntos continuo-conexos disjuntos. De acuerdo con Sierpi nski, el conjunto $\{W_i\} \cup \{J_{ij}\}$ es la colección de continuo-componentes de P . Un argumento análogo produce que

$$CC(c_i, P \cup \{c_i\}) = Z_i \quad \text{para } i \in \mathbb{N}$$

y

$$CC(x, P \cup \{x\}) = \{x\} \quad \text{para } x \in X \setminus \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Esto significa que c_i es el único punto x de X cuyo continuo-componente Z_i en $P \cup \{x\}$ contiene precisamente i continuo-componentes J_{ij} de P .

Sea h un autohomeomorfismo de X . De acuerdo al Lema 2.1.3, existe un compacto M y funciones monótonas $\gamma_1, \gamma_2 : M \rightarrow Q$ tal que $\gamma_1^{-1}(P) = \gamma_2^{-1}(P)$ y $h \circ \gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(X)} = \gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(X)}$. Observemos que si $A \subset B \subset Q$, entonces A es un continuo-componente de B si, y sólo si $\gamma_k^{-1}(A)$ es un continuo-componente de $\gamma_k^{-1}(B)$. Sea x un punto de X . Dado que $\gamma_1^{-1}(\{x\}) = \gamma_2^{-1}(\{h(x)\}) \neq \emptyset$, tenemos

$$\gamma_1^{-1}(CC(x, P \cup \{x\})) = \gamma_2^{-1}(CC(h(x), P \cup \{h(x)\})).$$

Llamemos C a este último conjunto y notemos que $CC(x, P \cup \{x\})$ contiene tantos continuo-componentes de P como C contiene continuo-componentes de $\gamma_1^{-1}(P) = \gamma_2^{-1}(P)$. Dado que lo mismo es cierto para $h(x)$, tenemos que $CC(x, P \cup \{x\})$ contiene precisamente el mismo número de continuo-componentes de P como $CC(h(x), P \cup \{h(x)\})$. Como c_i es el único punto x de X cuyo continuo-componente en $P \cup \{x\}$ contiene precisamente i continuo-componentes de P , podemos concluir que h fija el conjunto denso $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Esto significa que h es la identidad y, por ende, X es rígido.

Comentario: Notemos que este método produce $2^{\aleph_0}$ distintos espacios topológicos rígidos distintos cuyo cuadrado es homeomorfo a l^2 .

En efecto, en la construcción del espacio rígido X del ejemplo anterior reemplacemos Z_i por una estrella i -puntiaguada de s_i picos $J_{s_{ij}}$, donde $A = \{s_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \subset \mathbb{N}$ está enumerado de forma inyectiva. Llamemos X_A al espacio resultante, observese que el espacio X_A es rígido y además si $A \neq B$ entonces X_A no es homeomorfo a X_B . Si $A \neq B$ con $A = \{s_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ y

$B = \{t_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ sin pérdida de generalidad existe $s_i \notin B$ de este modo X_A tiene un punto x tal que la continuo-componentes de x en $P_A \cup \{x\}$, donde $P_A = Q \setminus X_A$, contiene s_i continuo componentes de P_A . Pero para cada $y \in X_B$ la continuo componente de $P_B \cup \{y\}$, donde $P_B = Q \setminus X_B$, contiene 1 o t_j continuo componentes de P_B . Por el Lema 2.1.3 y usando un argumento análogo al de la prueba de la Afirmación del ejemplo anterior, podemos deducir que X_A y X_B no son homeomorfos.

CAPÍTULO 3

Espacios con grupo de automorfismos especial

En el capítulo anterior obtuvimos el ejemplo de un espacio rígido, es decir, un espacio donde el grupo de autohomeomorfismos consta únicamente de la identidad, con lo que ahora surge la siguiente pregunta natural, ¿podemos construir un espacio topológico X de tal forma que sus simetrías coincidan con un grupo específico dado?

En este capítulo construiremos un espacio topológico X tal que su grupo de autohomeomorfismos es isomorfo a un grupo finitamente generado G , debida a M. C. Thornton, [Thor72], siguiendo de alguna manera las ideas de J. De Groot para construir espacios rígidos, haciendo que cada punto tenga una propiedad única en todo el espacio. Además, si G tiene r generadores y orden finito n , entonces X tiene $n(2r + 1)$ puntos.

3.1. Espacios con grupo de homeomorfismos dado

Sea G un grupo finitamente generado por $h_1, h_2, \dots, h_r$, sea $g \in G$ definamos el subespacio

$$X(g) = \{L(g), S_i(g), A_i(g), L(gh_i), i = 1, \dots, r\}.$$

La topología sobre $X(g)$ es tal que los puntos $L(g)$ y $L(gh_i)$ son abiertos,

el conjunto $\{L(g), S_1(g), \dots, S_i(g)\}$ es el abierto minimal de $S_i(g)$, y el conjunto $\{L(g), S_1(g), \dots, S_i(g), A_i(g), L(gh_i)\}$ es el abierto minimal de $A_i(g)$. Podemos pensar a $X(g)$ como un cuerpo lineal $S_1(g), S_2(g), \dots, S_r(g)$, basado en $L(g)$ con brazos $A_i(g)$ adjuntos a lo largo de $L(g), S_1(g), \dots, S_i(g)$ y manos abiertas $L(gh_i)$, como se muestra la Figura 3.1, en curvas cerradas simples se indican los tres tipos de abiertos minimales que acabamos de definir y que son una base para la topología de $X(g)$.

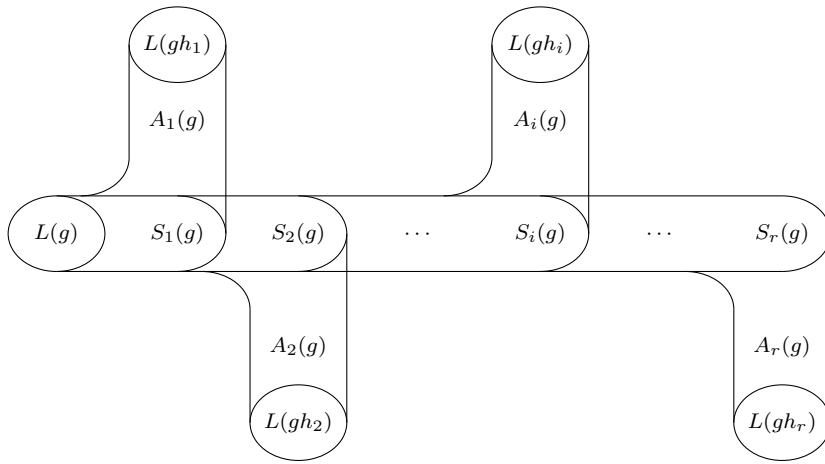


Figura 3.1: $X(g)$ para G con r generadores.

El espacio X es obtenido de $\bigcup \{X(g)\}$, $g \in G$, identificando las manos abiertas $L(gh_i)$ de $X(g)$ con el punto base $L(gh_i)$ de $X(gh_i)$, la relación inducida de esta identificación será denotada por $\sim$. El espacio resultante X es claramente un espacio T_0 donde cada punto tiene un conjunto abierto minimal y finito. Si G tiene orden finito n , X tiene $n(2r + 1)$ puntos. Para un punto $Y(g)$ en X llamaremos $Y = L, S_i, A_i$ el tipo del punto y $g \in G$ la etiqueta del punto.

Para probar que el grupo de homeomorfismos de X es isomorfo a G probaremos que para cada $g \in G$ hay un único homeomorfismo ϕ_g tal que $\phi_g(L(e)) = L(g)$ y $\phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{gg'}$. Definamos la función ϕ_g por $\phi_g(Y(x)) = Y(gx)$.

Nótese que ϕ_g está bien definida cuando $Y = L$ puesto que si u y v etiquetan al mismo elemento de G , entonces gu y gv representan al mismo elemento de G esto es $L(u) \sim L(v)$ implica $\phi_g(L(u)) \sim \phi_g(L(v))$. Claramente $\phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{gg'}$ y además notemos que $\phi_g^{-1} = \phi_{g^{-1}}$.

Para ver que ϕ_g es continua, comprobamos que la imagen inversa de los abiertos minimales es abierta. En efecto, la imagen inversa de cualquier conjunto abierto minimal de un punto es un conjunto abierto minimal de otro punto del mismo tipo, donde todas las etiquetas de los puntos han sido multiplicadas por g^{-1} . Dado que $\phi_g^{-1} = \phi_{g^{-1}}$ es igualmente continua, ϕ_g es homeomorfismo.

Ahora probemos que un homeomorfismo $\psi : X \rightarrow X$ está completamente determinado por la imagen de un punto. Dos puntos tienen abiertos minimales homeomorfos si, y sólo si son del mismo tipo. Entonces ψ preserva el tipo de punto y puede cambiar la etiqueta. Supongamos que $\psi(A_i(u)) = A_i(v)$ para alguna $1 \leq i \leq r$, dado que se deben preservar los abiertos minimales, $\psi(S_i(u)) = S_i(v)$ y $\psi(L(u)) = L(v)$. Esto forza a que $\psi(L(uh_i)) = L(vh_i)$. De manera similar, podemos ver la imagen de cualquier punto en un abierto minimal determinando únicamente ψ en ese conjunto abierto mínimo.

Dado que $h_1, h_2, \dots, h_r$ generan G , dos puntos del tipo L cualesquiera pueden ser unidos por una cadena de abiertos minimales superpuestos de puntos de tipo A_i . En efecto, supongamos que se dan $L(v)$ y $L(w)$ y $v^{-1}w = f_1 f_2 \cdots f_n$ donde cada f_i es un h_j o su inverso. Entonces, si $f_1 = h_1$ o h_1^{-1} , el abierto minimal de $A_1(v)$ o $A_1(vh_1^{-1})$ contiene a $L(v)$ y $L(vf_1)$. Si $f_2 = h_2$ o h_2^{-1} , el abierto minimal de $A_2(vf_1)$ o $A_2(vf_1 h_2^{-1})$ contiene a $L(vf_1)$ y $L(vf_1 f_2)$. Continuando este proceso obtenemos una cadena de abiertos minimales de $L(v)$ a $L(vf_1 f_2 \cdots f_n) = L(w)$. Así, dadas las observaciones del párrafo anterior, la imagen ψ de cualquier punto de tipo L determina la imagen de todos los otros puntos y entonces la imagen de todos los puntos.

Entonces, si $\psi(L(e)) = L(g)$ tenemos que $\psi = \phi_g$. En efecto, esto se debe a que si h_{j_1} es un generador, los puntos $L(e)$ y $L(h_{j_1})$ son la cabeza y la mano del brazo $A_{j_1}(e)$, se sigue que $L(g) = \psi(L(e))$ y $\psi(L(h_{j_1}))$ son la cabeza y la mano del brazo $A_{j_1}(g)$ como ψ preserva tipos, se debe de tener que $\psi(L(h_{j_1})) = L(gh_{j_1})$, repitiendo este argumento se puede probar que $\psi(L(h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_k})) = L(gh_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_k})$, lo cual implica que $\psi(L(h)) = L(gh)$ para cada $h \in G$.

Esto prueba que la función $g \rightarrow \phi_g$ es un isomorfismo de G sobre el grupo de homeomorfismos de X .

Ejemplo: Sea G el grupo diédrico con generadores h, k y relaciones $h^2 = e$, $k^3 = e$, $hkh = k^2$. Para cada $g \in G = \{e, h, k, k^2, hk, hk^2\}$ formamos el subespacio $X(g)$ con puntos $L(g)$, $S_1(g)$, $S_2(g)$, $A_1(g)$, $A_2(g)$, $L(gh)$, y $L(gk)$ como se muestra en la Figura 3.2

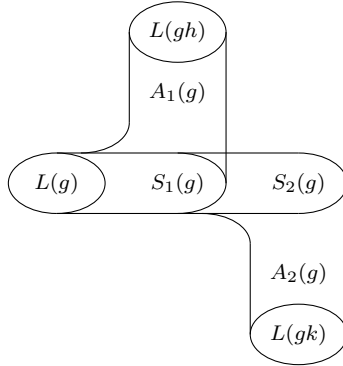


Figura 3.2: $X(g)$ para G con 2 generadores.

Aquí por ejemplo, el abierto minimal de $A_1(g)$ es $\{L(g), S_1(g), A_1(g), L(gh)\}$. Entonces nuestro espacio X para el grupo diédrico es como se muestra en la Figura 3.3.

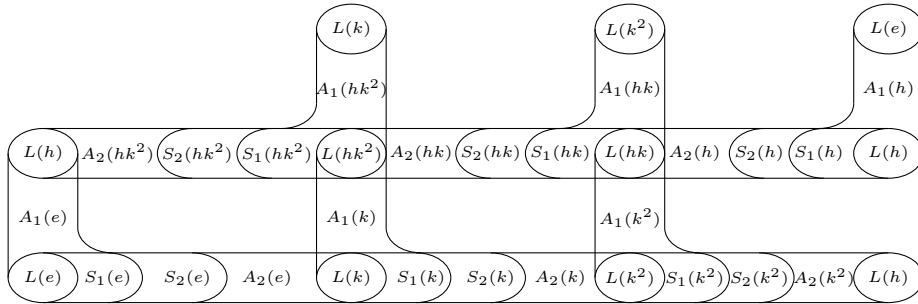


Figura 3.3: X para $G = D_3$.

CAPÍTULO 4

Teoremas de representación

Siguiendo la ruta de los capítulos anteriores, ahora nos preguntamos si existe, en general, una manera de construir un espacio a partir de un grupo dado de tal forma que su grupo de autohomeomorfismo sea isomorfo al grupo dado.

En este capítulo mostraremos que es posible, con una construcción debida a J. De Groot, [Gro59], donde a partir de un grupo dado construimos un espacio métrico que además tiene las propiedades de ser conexo, localmente conexo, 1-dimensional y completo. Para ello, construiremos un espacio rígido adecuado, construido en [GW58] que junto con las ideas de Frucht (Teorema 1.5.1), nos servirá para a cada grupo dado G , asociar un espacio tal que su grupo de autohomeomorfismos sea isomorfo a G .

Mostraremos además otro tipo de rigidez, la llamada rigidez bajo desplazamientos, que nos ayudará a obtener ejemplos de espacios “más” rígidos, es decir que no sólo son rígidos bajo homeomorfismos, sino lo son para las clases de todas las funciones continuas y sobreyectivas del espacio en sí mismo y para la clase de todos los homeomorfismos locales del espacio en sí mismo.

4.1. Imagen topológica de grupo

Definición 4.1.1. Decimos que un espacio topológico X es *imagen topológica de grupo*, o imagen de grupo, de un grupo dado G , si el grupo autohomeomorfismos de X es isomorfo a G .

Definición 4.1.2. Diremos que un continuo X es una *curva de Peano* si X

es localmente conexo y 1-dimensional (ver Definición 1.1.7).

Definición 4.1.3. Supongamos que tenemos una familia $\{X_s\}_{s \in S}$ de espacios topológicos disjuntos a pares. Consideremos el conjunto $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ y la familia O de todos los conjuntos $U \subseteq X$ tal que $U \cap X_s$ es abierto en X_s para todo $s \in S$. El conjunto X con O como topología es llamado el *espacio suma* de los espacio $\{X_s\}_{s \in S}$ y es denotado por

$$\bigoplus_{s \in S} X_s.$$

Teorema 4.1.1. *Existe una curva de Peano P en el plano con su topología usual, de medida positiva, universal respecto a la clase de todas las curvas planas (es decir, toda curva plana se puede encajar en P), y rígida con respecto a aquellas transformaciones de P sobre sí mismo que son localmente topológicas (es decir, con respecto a homeomorfismos locales).*

Demostración. Consideremos un disco D en el plano. Sea $\{a_i\}$ un subconjunto denso numerable del interior de D tal que ninguna de sus coordenadas es un número diádico. Definimos una sucesión de “hélices” en D . La primera H_1 está delimitada por una curva de dos hojas que tiene como centro a_1 , que evade la frontera de D .

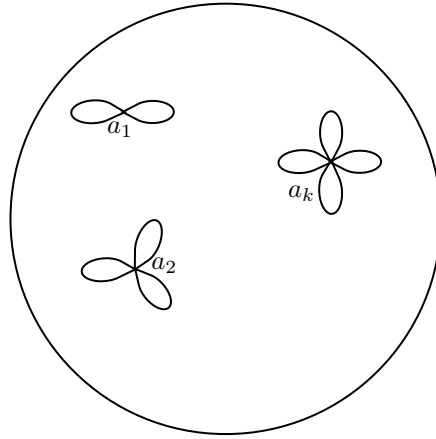


Figura 4.1: Diagrama de la construcción.

Procederemos por inducción. Supongamos construidas las primeras $n - 1$ hélices. Sean $M_n = \bigcup((\{\frac{k}{2^n}\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{\frac{k}{2^n}\}))$ con $|k| \leq 2^n$ y a'_n el

primer elemento de la sucesión $\{a_i\}$ que no está en ninguna hélice construida previamente. Entonces, la n -ésima hélice tiene $n + 1$ hojas, con centro en a'_n y se encuentra dentro de un círculo que evade todas las hélices construidas previamente, la frontera de D y al conjunto M_n . Además, cuidamos que los diámetros de las hélices tiendan a cero. El espacio P es el disco D con los interiores de todas las hélices removidos.

P es un continuo ya que es la intersección de una sucesión decreciente y numerable de continuos. Obsérvese en primer lugar que P es conexo, esto se debe a que P es la intersección decreciente de continuos y por lo tanto un continuo, por la misma razón, si R_n es la cerradura de una componente conexa C_n de $P \setminus M_n$, entonces R_n es conexo, notemos que para cada punto x de P los conjuntos de la forma $R = R_n^1 \cup R_n^2 \cup R_n^3 \cup R_n^4$, con $x \in R_n^i$, forman una base de vecindades cerradas y conexas en el punto x , se sigue de la Proposición 1.2.3 que P es localmente conexo. También se puede verificar, siguiendo la notación anterior, que dados dos puntos $x, y \in P \setminus \text{int}(R)$ existe una cadena $R_n^1, R_n^2, \dots, R_n^k$ tal que $x \in R_n^1$, $y \in R_n^k$ con $R_n^i \cap R_n^{i+1} \neq \emptyset$ y $\text{int}(R) \cap R_n^i = \emptyset$, esto implica en particular que $P \setminus \text{int}(R_n)$ es conexo, se sigue que $P \setminus \{x\}$ es conexo, es decir x no es un punto de corte de P . Un argumento similar muestra que P no tiene puntos de corte locales distintos a los a'_i .

El continuo P tiene dimensión 1, dado que no contiene ningún subconjunto abierto en el plano, pues se obtuvo eliminando un subconjunto denso del disco [Mar73]. Dado que el área total de los interiores de las hélices puede escogerse tan pequeño como queramos, P puede tener medida positiva.

Entonces, todo lo que tenemos que mostrar es la rigidez de P . P contiene un subconjunto maximal de $\{a_i\}$, denotado por $\{a'_i\}$ (enumerado en el mismo orden que los a_i ; los a'_i son los centros de las hélices). Si consideramos una vecindad adecuada U de un a'_i en P , entonces $U \setminus a'_i$ contiene $i + 1$ componentes, las cuales tienen a a'_i como un punto límite. En cualquier otro punto $p \in P$, $p \neq a'_i$, y para una vecindad adecuadamente pequeña U de p en P se puede ver que el conjunto $U \setminus p$ es conexo. Entonces, si φ es un homeomorfismo local de P sobre sí mismo, entonces cada a'_i debe ser mapeado sobre sí mismo. Dado que el conjunto $\{a'_i\}$ es denso en P , cada punto de P permanece invariante bajo φ , es decir, P es rígido.

El hecho de que la curva P sea universal respecto a todas curvas planas se sigue de los métodos usados en [Meng27]. $\square$

Corolario 4.1.1. *Observemos que*

- (1) *Existen $\mathfrak{c}$ curvas de Peano rígidas, topológicamente diferentes.*
- (2) *Existen compactos rígidos con $\mathfrak{c}$ componentes.*

Demostración.

1. Sea $A = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ una sucesión creciente y arbitraria de números naturales, y sea P_A el espacio construido como en el teorema anterior considerando una hélice de $k_n + 1$ hojas en lugar de una hélice con $n + 1$ hojas. Entonces el espacio resultante P_A es rígido. Además, si B es otra sucesión creciente y arbitraria distinta de A , P_A es topológicamente distinto de P_B .
2. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las sucesiones crecientes de números naturales y sea $X = \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} P_A$, entonces todo autohomeomorfismo de X permuta los conjuntos P_A ya que debe de enviar componentes conexas en componentes conexas, pero como los espacio P_A son topológicamente distintos se deduce que tal autohomeomorfismo debe fijar a cada conjunto P_A y por lo tanto es la identidad. Esto prueba X es un espacio rígido con $\mathfrak{c}$ componentes.

□

Corolario 4.1.2. *Si X es un espacio compacto 0-dimensional metrizable o un espacio métrico numerable, entonces X no es rígido.*

Demostración. Si el espacio X es numerable y metrizable, o tiene puntos aislados o contiene una copia cerrado abierta de los racionales; por lo tanto X no es rígido.

En el caso de que el espacio X sea compacto, 0-dimensional metrizable. Si X tiene puntos aislados fácilmente se encuentran homeomorfismos, sino el espacio X tiene una copia cerrado abierta del Cantor; por lo tanto X no es rígido. □

Teorema 4.1.2. *Todo grupo numerable admite una curva de Peano, como imagen topológica de grupo.*

Demostración. Sea $G = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un grupo numerable dado. Tomemos una cantidad numerable de copias disjuntas R_{g_i} ($i = 1, 2, \dots$) de la curva de Peano construida en el Teorema 4.1.1. Tomemos en cada R_{g_i} dos sucesiones

de puntos distintos $\{p_{g_i}^j\}_j$ y $\{q_{g_i}^j\}_j$ ambas tendiendo a un mismo punto límite $r_{g_i} \in R_{g_i}$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$\varphi_{g_i}^{g_k}(r_{g_i}) = r_{g_k}, \quad \varphi_{g_i}^{g_k}(p_{g_i}^j) = p_{g_k}^j, \quad \varphi_{g_i}^{g_k}(q_{g_i}^j) = q_{g_k}^j \quad \text{para toda } j,$$

donde $\varphi_{g_i}^{g_k}$ es un homeomorfismo de R_{g_i} sobre R_{g_k} , donde además ninguno de los puntos $q_{g_i}^j$, $p_{g_i}^j$ y r_{g_i} son puntos de corte locales en el R_{g_i} . Sea $R'_{g_i} = R_{g_i} \setminus \{r_i\}$. Ahora definiremos en $\bigcup R'_{g_i}$ un proceso de identificación en un espacio S' y compactación con un punto r , en función de G , tal que el espacio resultante $S = S' \cup \{r\}$ tenga a G como su grupo de autohomeomorfismos. Notemos que la asignación $g_i \mapsto R_{g_i}$ es una biyección. Si

$$g_i g_j = g_s \quad (g_j \neq e),$$

entonces identificamos en los correspondientes R'_{g_i} y R'_{g_s} el punto $p_{g_i}^j$ con el punto $q_{g_s}^j$. Por lo tanto, del espacio $\bigcup R'_{g_i}$ obtenemos un espacio de identificación (espacio cociente). En este espacio (después de la identificación) omitimos el conjunto $\{r_{g_i}\}$. El nuevo espacio resultante es localmente compacto, pues es unión de localmente compactos y puede ser compactado por un punto r . El resultado final es un compacto S en el que los nuevos $R'_{g_i} = q(R'_{g_i})$ (donde q es la aplicación cociente inducida) convergen a r . Es rutinario verificar que S es una curva de Peano, es 1-dimensional pues las fronteras de los abiertos siguen siendo las mismas que las de los R'_{g_i} y localmente conexo porque es unión de localmente conexos, el cual entonces puede ser encajado en $\mathbb{R}^3$. Si G es un grupo finito, simplemente descartamos los puntos r_{g_i} , pero la construcción es por lo demás la misma.

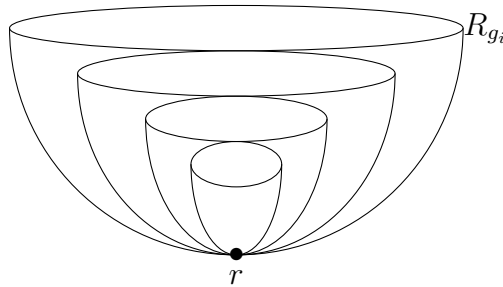


Figura 4.2: Esquema del encaje del espacio S en $\mathbb{R}^3$.

Afirmamos que S es en ambos casos una imagen topológica de grupo de G . La demostración se deriva de la rigidez de los R_{g_i} y se parece en otros aspectos

a la gráfica de colores de Cayley, que es una interpretación geométrica del teorema básico de Cayley de que todo grupo puede representarse mediante una permutación de sus elementos. La parte topológica de la demostración usa esencialmente el siguiente hecho:

Suponiendo que $R_{g_i} = R'_{g_i} \cup \{r\}$, si R_{g_i} y R_{g_j} tienen sólo dos puntos en común, entonces un homeomorfismo que lleva un R_{g_k} en $R_{g_i} \cup R_{g_j}$ está contenido en R_{g_i} o en R_{g_j} , ya que cualquiera de esos puntos es localmente un punto de corte de $R_{g_i} \cup R_{g_j}$, mientras que tales puntos no ocurren en R_{g_k} (suponiendo que en la construcción de R_{g_k} se eligen hélices de más de dos hojas). Esto equivale al efecto, después de algún razonamiento, que -en pocas palabras- los R_{g_i} se permutan entre sí bajo un homeomorfismo de S sobre sí mismo.

Veamos que efectivamente el grupo de autohomeomorfismos de S es isomorfo al grupo G , es decir, que el grupo G tiene a S como imagen topológica de grupo.

Primero veamos que hay al menos tantos homeomorfismos como elementos del grupo. Para ello recordemos el Teorema de Cayley (Teorema 1.4.1), con el cual tenemos que para cada elemento $g_k \in G$ podemos asociar una permutación $\lambda_{g_k} \in S_G$.

Debido a la construcción de nuestro espacio S , cada permutación λ_{g_k} nos induce una traslación izquierda $f_{g_k} : \bigoplus R'_{g_s} \rightarrow \bigoplus R'_{g_s}$ definida como $f_{g_k}(x_{g_i}) = x_{g_k g_i} = x_{\lambda_{g_k}(g_i)}$ para $x_{g_i} \in R'_{g_i}$ con lo que podemos considerar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus R'_{g_s} & \xrightarrow{q} & S' \\
 \downarrow f_{g_k} & \searrow q \circ f_{g_k} & \downarrow h_{g_k} \\
 \bigoplus R'_{g_s} & \xrightarrow{q} & S'
 \end{array}$$

Figura 4.3: Esquema de la demostración.

donde q es la función cociente que nos construye al espacio S' . Si queremos ver que de cada función f_{g_k} podemos obtener un homeomorfismo h_{g_k} de S' en S' podemos aplicar el Teorema de la Transgresión (Teorema 1.1.2), con lo

que basta ver que si $q(x) = q(y)$ entonces $q \circ f_{g_k}(x) = q \circ f_{g_k}(y)$, pero esto es cierto pues

$$q(x) = q(y) \implies q(p_{g_i}^j) = q(q_{g_s}^j) \implies g_i g_j = g_s$$

multiplicando g_k por la izquierda

$$\begin{aligned} g_k g_i g_j = g_k g_s &\implies q(p_{g_k g_i}^j) = q(q_{g_k g_s}^j) \implies q \circ f_{g_k}(p_{g_i}^j) = q \circ f_{g_k}(q_{g_s}^j) \\ &\implies q \circ f_{g_k}(x) = q \circ f_{g_k}(y) \end{aligned}$$

con lo que hay al menos tantos homeomorfismos como traslaciones izquierdas, es decir, hay al menos tantos homeomorfismos como elementos del grupo.

Veamos ahora que hay tantos elementos del grupo como homeomorfismos entre S' y S' . Sea $f : S' \rightarrow S'$ un homeomorfismo. Veamos que para cada s existe s' tal que

$$f(R'_{g_s}) = R'_{g_{s'}}$$

donde $f|_{R'_{g_s}} = \varphi_{g_s}^{g_{s'}}$, recordemos que $\varphi_{g_s}^{g_{s'}}$ es un homeomorfismo de R_{g_s} en $R_{g_{s'}}$ con lo que podemos considerar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} R_{g_s} & \xrightarrow{\varphi_{g_s}^{g_{s'}}} & R_{g_{s'}} \\ \bullet & & \bullet \\ g_i g_j = g_s & & g_{i'} g_j = g_{s'} \\ \bullet & & \bullet \\ R_{g_i} & \xrightarrow{\varphi_{g_i}^{g_{i'}}} & R_{g_{i'}} \end{array}$$

Figura 4.4: Diagrama de la demostración.

Probaremos que existe un $g_k \in G$ tal que $f = h_{g_k}$. Sea $g_k = g_{s'} g_s^{-1}$. Por lo que si $f(R'_{g_i}) = R'_{g_{i'}}$ debemos probar que $R'_{g_{i'}} = h_{g_k}(R'_{g_i}) = R'_{g_k g_i}$ tenemos que demostrar que $g_k g_i = g_{i'}$. Notemos que

$$g_{i'} = g_{s'} g_j^{-1} = g_k g_s g_j^{-1} = g_k g_i g_j g_j^{-1} = g_k g_i,$$

que es lo que queríamos demostrar. Con esto vemos que todo homeomorfismo induce una traslación izquierda y así hay al menos tantos elementos del grupo como homeomorfismos de S' .

Ahora veamos que al pasar del grupo G al grupo de autohomeomorfismos de S se respeta la operación, con lo cual tendríamos que G tiene como imagen topológica de grupo a S' . Para ello nos vamos a apoyar en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus R'_{g_k} & \xrightarrow{q} & S' \\
 f_{g_k} \downarrow & & \downarrow h_{g_k} \\
 \bigoplus R'_{g_l} & \xrightarrow{q} & S' \\
 f_{g_l} \downarrow & & \downarrow h_{g_l} \\
 \bigoplus R'_{g_s} & \xrightarrow{q} & S'
 \end{array}$$

Figura 4.5: Diagrama de la demostración.

Tenemos que

$$G \hookrightarrow S_G \rightarrow \text{Aut}(\bigoplus R'_{g_i}) \hookleftarrow \text{Aut}(S')$$

es decir, en el diagrama

$$g_k \mapsto \lambda_k \mapsto f_{g_k} \mapsto h_k$$

$$g_l \mapsto \lambda_l \mapsto f_{g_l} \mapsto h_l$$

Recordemos que $\lambda_{g_k} \circ \lambda_{g_l} = \lambda_{g_k g_l}$, veamos que se cumple para f_{g_k} , es decir, debemos demostrar que $f_{g_l} \circ f_{g_k} = f_{g_l g_k}$, en efecto,

$$f_{g_l} \circ f_{g_k}(x_{g_i}) = x_{g_l g_k g_i} = f_{g_l g_k}(x_{g_i})$$

notemos que esto basta para que se respeta la operación en el grupo de automorfismos de S' pues

$$h_{g_l} \circ h_{g_k} \circ q = q \circ f_{g_l} \circ f_{g_k} = q \circ f_{g_l g_k} = h_{g_l g_k} \circ q$$

con lo que a partir de esto obtenemos que

$$h_{g_l} \circ h_{g_k} = h_{g_l g_k}.$$

A la vista de la gráfica de colores de Cayley de un grupo, se podría decir que la construcción anterior reemplaza los vértices de la gráfica por una curva rígida, mientras que las aristas de la gráfica, que unen los vértices, son reemplazados por un proceso de identificación más abstracto.

Finalmente, no es difícil verificar que $Aut(S') = Aut(S)$, dado que todo autohomeomorfismo de S fija al punto r . $\square$

Daremos un ejemplo de una curva de Peano P en el plano – cuyos puntos son todos de orden ≤ 6 – que es rígido bajo la transformación topológica de P en P , donde el orden de un punto en una curva de Peano se entiende como el número de componentes conexas que se obtienen al eliminar dicho punto de vecindades conexas suficientemente pequeñas.

Ejemplo: Sea $\{a_i^k\}_{i,k}$ una doble sucesión de distintos números enteros positivos mayores a 2 (los cuales serán nuestros índices). Sea C^1 un círculo en el plano y $\{p_i^1\}$ un subconjunto numerable y denso de C^1 . Fijemos para cada p_i^1 una cadena C_i^1 de a_i^1 eslabones, contenida en el interior de C^1 (exceptuando el punto p_i^1) y mutuamente disjuntas (una cadena C_i^1 se puede definir tomando la circunferencia de un círculo tangente a C^1 en el que tomamos a_i^1 puntos ordenados cíclicamente y uniendo estos puntos sucesivamente por cuerdas). Después escogemos un subconjunto denso numerable $\{p_i^2\}$ en la unión de los C_i^1 de tal manera que los puntos de este subconjunto tendrán todos orden dos en la unión de C^1 y todo C_i^1 .

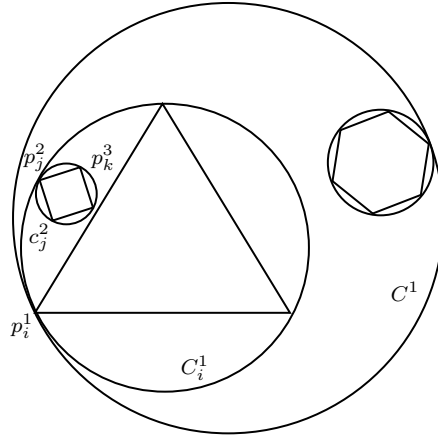


Figura 4.6: Esbozo de la construcción.

Fijamos a cada p_i^2 una cadena C_i^2 de a_i^2 eslabones, contenida en el interior de ese eslabón de la cadena al que pertenece p_i^2 . Todas las cadenas nuevas serán mutuamente disjuntas. Es claro como proceder por inducción. Tomemos la clausura P de la unión de la cantidad numerable de cadenas C_i^k obtenido de esta manera. Si las cadenas son dibujadas en la manera descrita anteriormente, o si el diámetro de C_i^k tiende a cero para $k \rightarrow \infty$, y para $i \rightarrow \infty$, entonces los puntos añadidos para obtener la clausura, son de orden uno en P (son puntos finales). Entonces, en P tenemos puntos de cuatro tipos diferentes:

1. Puntos finales de orden 1 en P .
2. Puntos p_i^k de orden 6 en P .
3. Puntos de orden 4 en P ; estos son los puntos donde se encuentran dos eslabones de una cadena, con excepción del p_i^k .
4. Todos los demás puntos de orden 2 en P .

Si φ es homeomorfismo y $\varphi(P) \subset P$, entonces debemos probar que cada p_i^k es invariante bajo φ , lo cual prueba nuestro ejemplo ya que $\{p_i^k\}$ es denso en P . Como los p_i^k son los únicos puntos de orden máximo en P , el conjunto $\{p_i^k\}$ permanece invariante bajo φ . A p_i^k está unida una cadena C de a_i^k eslabones, y ahora no es difícil ver que $\varphi(C) = C$, la razón de ello es esencialmente el hecho de que los a_i^k son distintos. Entonces $\varphi(p_i^k) = p_i^k$.

4.2. Grupos representados por grupos de homeomorfismos

Denotaremos por $Aut(G)$ el grupo de automorfismos de un grupo G o $Aut(X)$ el grupo de autohomeomorfismos de un espacio topológico X . $T(G)$ y $T(X)$ denotan subgrupos de $Aut(G)$ y $Aut(X)$ respectivamente.

Extendiendo el resultado de la sección anterior, en esta sección buscaremos resolver el siguiente problema: ¿hasta qué punto podemos encontrar algún espacio topológico X tal que G es isomorfo a $Aut(X)$, es decir $G \simeq Aut(X)$?

Uno de los resultados que estableceremos aquí, es una respuesta afirmativa a la cuestión general: para todo grupo G podemos encontrar un espacio métrico

completo, conexo, localmente conexo M de cualquier dimensión positiva tal que $G \simeq \text{Aut}(M)$.

Nuestro espacio métrico M es construido en varios pasos. Dado un grupo G construimos la gráfica de colores de Cayley G^* de G . G^* es una gráfica dirigida tal que $\text{Aut}(G^*) \simeq G$. De G^* construimos una gráfica $\mathfrak{G}$ tal que $\text{Aut}(\mathfrak{G}) \simeq G$. El último paso, que proporciona nuestro M requerido, es reemplazar cada arista de la gráfica $\mathfrak{G}$ por un espacio rígido adecuado e introducir una métrica en el conjunto resultante.

4.2.1. Desplazamientos

Definición 4.2.1. Sean X un conjunto y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Diremos que f es un *desplazamiento* de orden $\mathbf{m}$, si existe un subconjunto V de X tal que

$$V \cap f(V) = \emptyset, \quad |f(V)| = \mathbf{m} \quad (\mathbf{m} \text{ máximo}),$$

es decir, no hay cardinal mayor que $\mathbf{m}$ para el cual existe un subconjunto $V \subset X$ tal que V no corta su imagen $f(V)$ y $|f(V)|$ es igual a este cardinal. Notemos que $|V| \geq \mathbf{m}$, puesto que la función f envía a V en $f(V)$ de manera sobreyectiva. Si $W \cap f(W) = \emptyset$, $|f(W)| = \mathbf{k}$, el conjunto $f(W)$ es llamado un *conjunto desplazado* de orden $\mathbf{k}$.

Para todo X y toda función continua f existe algún cardinal $\mathbf{m}$, tal que f es un desplazamiento de orden $\mathbf{m}$. Claramente $\mathbf{m} \leq |X|$ y $\mathbf{m} = 0$, cuando f es la identidad. No se dará la prueba de esta afirmación, ya que no es trivial y no se usa en ninguna parte, pero es una consecuencia del lema de Zorn.

Obsérvese además el hecho trivial de que si $g : X \rightarrow X$ es una extensión de $f : Y \rightarrow Y$, con $Y \subset X$, entonces g es un desplazamiento de al menos el mismo orden que f . Por lo que, si f tiene el orden máximo, es decir, el orden de f es igual a $|X|$, entonces el desplazamiento extendido tiene el mismo orden.

El siguiente lema nos proporciona una manera de recortar los elementos una familia de $\mathbf{m}$ conjuntos de tamaño $\mathbf{m}$, de tal manera que los conjuntos resultantes sean ajenos y de tamaño $\mathbf{m}$.

Lema 4.2.1. Dada una función que asigna a cada $\xi < \mathbf{m}$, un conjunto F_ξ de cardinalidad $\mathbf{m}$, existe un G_ξ , para cada $\xi < \mathbf{m}$, tal que

$$G_\xi \cap G_{\xi'} = \emptyset, \quad \text{para } \xi \neq \xi', \quad G_\xi \subset F_\xi, \quad |G_\xi| = \mathbf{m}. \quad (1)$$

Demostración. Ordenemos todos los ordinales $\xi < \mathbf{m}$ en una sucesión transfinita $\{\alpha_\eta\}$ de tipo $\mathbf{m}$ en la cual cada término se repite $\mathbf{m}$ veces. Para cada $\eta < \mathbf{m}$ asignemos un elemento p_η de F_{α_η} tal que

$$p_\eta \neq p_{\eta'} \quad \text{para } \eta' < \eta. \quad (2)$$

Sea G_ξ el conjunto de p_η tal que $\alpha_\eta = \xi$.

Supongamos que $p_\eta \in G_\xi \cap G_{\xi'}$. Entonces $\alpha_\eta = \xi$ y $\alpha_\eta = \xi'$, de donde $\xi = \xi'$, lo que prueba la primera condición de 1 se satisface (es decir, $G_\xi \cap G_{\xi'} = \emptyset$, para $\xi \neq \xi'$). Para probar la segunda, sea $p_\eta \in G_\xi$. Entonces $\alpha_\eta = \xi$. Por otro lado, por la definición de la sucesión $\{p_\eta\}$, $p_\eta \in F_{\alpha_\eta}$. Consecuentemente $p_\eta \in F_\xi$, lo cual prueba que $G_\xi \subset F_\xi$.

El conjunto de η tal que $\alpha_\eta = \xi$ es, para una ξ fija, de cardinalidad $\mathbf{m}$, y entonces es el conjunto de todas p_η la que satisface la condición 2, esto es, el conjunto G_ξ . $\square$

Lema 4.2.2. *Si $\mathcal{X}$ es un conjunto de cardinalidad $\mathbf{m}$, existe una familia F de cardinalidad $2^{\mathbf{m}}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$ tal que las condiciones $X, Y \in F$ y $X \neq Y$ implican que $|X \setminus Y| = \mathbf{m}$.*

Más aún, dada una función que asigna un subconjunto A_x de $\mathcal{X}$ de cardinalidad $\mathbf{m}$ a cada $x \in \mathcal{X}$, la familia F puede ser condicionada a que si $X, Y \in F$ y $X \neq Y$, entonces $|A_x \cap X \setminus Y| = \mathbf{m}$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

Demostración. La identidad $\mathbf{m} = \mathbf{m}^2$ implica directamente que $\mathcal{X}$ tiene la forma

$$\mathcal{X} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} M_x, \quad |M_x| = \mathbf{m}, \quad \text{y} \quad M_x \cap M_{x'} = \emptyset, \quad \text{para } x \neq x'.$$

Ya que $\mathbf{m} = 2\mathbf{m}$,

$$M_x = P_x \cup Q_x, \quad |P_x| = \mathbf{m} = |Q_x|, \quad \text{y} \quad P_x \cap Q_x = \emptyset.$$

Para $X \subset \mathcal{X}$, sea

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} P_x \cup \bigcup_{x \in \mathcal{X} \setminus X} Q_x$$

y denotemos por F la familia de los conjuntos $F(X)$, donde X corre sobre toda la familia de subconjuntos de $\mathcal{X}$. Es fácil ver que, si $x_0 \in X \setminus Y$, entonces

$$P_{x_0} \subset F(X) \setminus F(Y), \quad \text{y entonces } |F(X) \setminus F(Y)| = \mathbf{m},$$

y

$$Q_{x_0} \subset F(Y) \setminus F(X), \text{ por lo que } |F(Y) \setminus F(X)| = \mathbf{m}.$$

Entonces la primera parte del lema queda demostrada.

Para demostrar la segunda parte, sea, de acuerdo al lema anterior,

$$A_x^* \cap A_{x'}^* = \emptyset \text{ para } x \neq x', \quad A_x^* \subset A_x, \quad \text{y} \quad |A_x^*| = \mathbf{m}.$$

Tenemos que definir una familia F^* de cardinalidad $2^{\mathbf{m}}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$ tal que las condiciones $X, Y \in F^*$, $X \neq Y$ y $x \in \mathcal{X}$ implica que $|A_x^* \cap X \setminus Y| = \mathbf{m}$. Los conjuntos $\mathcal{X}$ y A_x^* son de cardinalidad $\mathbf{m}$, entonces para cada $x \in \mathcal{X}$ existe una función inyectiva f_x de $\mathcal{X}$ sobre A_x^* . Para cada $X \in F$ asignemos el conjunto $S(X) = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} f_x(X)$ y denotemos por F^* la familia de todos los conjuntos $S(X)$, donde X pertenece a F .

Ya que $f_x(X) \subset A_x^*$ y $A_x^* \cap A_{x'}^* = \emptyset$ para $x \neq x'$, se sigue que

$$A_{x_0}^* \cap S(X) = A_{x_0}^* \cap \bigcup_{x \in \mathcal{X}} f_x(X) = A_{x_0}^* \cap f_{x_0}(X) = f_{x_0}(X),$$

entonces

$$A_{x_0}^* \cap S(X) \setminus S(Y) = f_{x_0}(X) \setminus f_{x_0}(Y). \quad (3)$$

La función f_{x_0} es inyectiva, entonces

$$f_{x_0}(X) \setminus f_{x_0}(Y) = f_{x_0}(X \setminus Y),$$

y por lo tanto

$$|f_{x_0}(X) \setminus f_{x_0}(Y)| = |f_{x_0}(X \setminus Y)| = |X \setminus Y|. \quad (4)$$

Si los conjuntos $S(X)$ y $S(Y)$ son diferentes, entonces $X \neq Y$, por lo que $|X \setminus Y| = \mathbf{m}$ y, por 3 y 4,

$$|A_{x_0}^* \cap S(X) \setminus S(Y)| = \mathbf{m}.$$

La misma identidad muestra que la condición $X \neq Y$ implica $S(X) \neq S(Y)$. Se sigue que $|F^*| = |F| = 2^{\mathbf{m}}$. $\square$

Lema 4.2.3. *Sea X un conjunto, $|X| = \mathbf{m}$, y sea $\{f_\beta\}$ una sucesión de $\mathbf{m}$ desplazamientos f_β (los índices corren sobre un conjunto de cardinalidad $\mathbf{m}$),*

cada uno de orden $\mathbf{m}$. Entonces existe una familia $\{F_\gamma\}$ de $2^{\mathbf{m}}$ subconjuntos $F_\gamma \subset X$, tal que para triada de índices β, γ, γ' :

$$|F_\gamma \setminus F_{\gamma'}| = \mathbf{m} \quad (\gamma \neq \gamma'), \quad (4.1)$$

$$|f_\beta(F_\gamma) \setminus F_{\gamma'}| = \mathbf{m}. \quad (4.2)$$

Mas aún, si $\{K_\beta\}$ es una familia de $\mathbf{m}$ subconjuntos $K_\beta \subset X$, inducidos por $\{f_\beta\}$ con $|K_\beta| = \mathbf{m}$ para toda β , entonces podemos requerir para cada par β, γ :

$$|F_\gamma \cap K_\beta| = \mathbf{m}, \quad |(X \setminus F_\gamma) \cap K_\beta| = \mathbf{m}. \quad (4.3)$$

Demostración. Bien ordenamos todos los pares f_α, K_α :

$$f_1, K_1, f_2, K_2, \dots, f_\omega, K_\omega, \dots, f_\alpha, K_\alpha, \dots \quad (\alpha < \mathbf{m}), \quad (4.4)$$

con K_i el conjunto inducido por el desplazamiento f_i , de tal que cada par ocurre $\mathbf{m}$ veces en esta sucesión transfinita (esto es posible ya que $\mathbf{m}^2 = \mathbf{m}$).

Consideremos el primer par f_1, K_1 . Existen distintos elementos $p_1, p'_1 \in K_1$ que difieren de $f_1(p_1) = q_1$ y $f_1(p'_1) = q'_1 \neq q_1$, ya que f_1 es un desplazamiento de orden $\mathbf{m}$. Tomemos además distintos elementos $r_1, s_1 \in K_1$, distintos de p_1, p'_1, q_1, q'_1 . Consideremos los conjuntos $\{p_1, p'_1, r_1\}$ y $\{q_1, q'_1, s_1\}$. Usaremos inducción transfinita con respecto al índice α en 4.4. Supongamos que se han definido conjuntos disjuntos

$$\{p_\xi, p'_\xi, r_\xi\}_{\xi < \alpha}, \quad \{q_\xi, q'_\xi, s_\xi\}_{\xi < \alpha} \quad (4.5)$$

que consisten en elementos diferentes por pares, tal que

$$f_\xi(p_\xi) = q_\xi, \quad f_\xi(p'_\xi) = q'_\xi, \quad r_\xi, s_\xi \in K_\xi. \quad (4.6)$$

Ahora escogeremos elementos diferentes $p_\alpha, p'_\alpha, q_\alpha, q'_\alpha, r_\alpha, s_\alpha$ que no se encuentran en los conjuntos de 4.5 tal que

$$f_\alpha(p_\alpha) = q_\alpha, \quad f_\alpha(p'_\alpha) = q'_\alpha, \quad r_\alpha, s_\alpha \in K_\alpha.$$

Esto es posible, ya que los conjuntos de 4.5 contienen menos de $\mathbf{m}$ elementos, mientras que f_α es un desplazamiento de orden $\mathbf{m}$ y $|K_\alpha| = \mathbf{m}$. De

esta forma se han definido conjuntos correspondientes a 4.5, pero para todo $\xi \leq \alpha$. Ahora podemos definir

$$P = \{p_\xi, p'_\xi, r_\xi\}_{\xi < \mathbf{m}}, \quad Q = \{q_\xi, q'_\xi, s_\xi\}_{\xi < \mathbf{m}}.$$

Entonces 4.6 se cumple para todo $\xi < \mathbf{m}$, $P \cap Q = \emptyset$, y todos los símbolos que aparecen en la definición de P y Q denotan elementos diferentes.

Para todo índice β , $f_\beta(P)$ contiene $\mathbf{m}$ elementos, que no pertenecen a P . De hecho, una $f_\beta \in \{f_\beta\}$ ocurre $\mathbf{m}$ veces en 4.4. Entonces existen $\mathbf{m}$ índices α para los cuales

$$f_\beta(p_\alpha) = f_\alpha(p_\alpha) = q_\alpha \notin P,$$

y este conjunto $\{q_\alpha\}$ tiene cardinalidad $\mathbf{m}$. Más aún, tanto P como Q contienen $\mathbf{m}$ elementos de cada K_β , es decir, los conjuntos $\{r_\alpha\}$ y $\{s_\alpha\}$ respectivamente.

Finalmente definimos la familia $\{F_\gamma\}$. Para ello consideremos el conjunto $\mathcal{X} = \{p'_\xi\}_{\xi < \mathbf{m}}$ de cardinalidad $\mathbf{m}$ y determinamos $2^{\mathbf{m}}$ subconjuntos T_γ de él, tal que $|A_\alpha \cap T_\gamma \setminus T_{\gamma'}| = \mathbf{m}$ para todo par de índices diferentes $\gamma, \gamma' < \mathbf{m}$ y $\alpha < \mathbf{m}$, donde $A_\alpha = \{p'_\beta \mid \beta \in \mathbf{m} \text{ y } (f_\alpha, K_\alpha) = (f_\beta, K_\beta)\}$ como en el Lema 4.2.2. Ahora definamos

$$F_\gamma = \{p_\xi\}_{\xi < \mathbf{m}} \cup \{r_\xi\}_{\xi < \mathbf{m}} \cup T_\gamma.$$

en vista de las propiedades mencionadas de P y Q , es fácil ver que $\{F_\gamma\}$ es una familia que satisface los requerimientos de nuestro lema. Por ejemplo, si $\beta < \mathbf{m}$, entonces

$$X \setminus F_{\gamma'} \supset \mathcal{X} \setminus T_{\gamma'} \supset T_\gamma \setminus T_{\gamma'} \supset A_\beta \cap T_\gamma \setminus T_{\gamma'}$$

y $A_\beta \cap T_\gamma \setminus T_{\gamma'} \subset K_\beta$ tiene cardinalidad $\mathbf{m}$. □

Este lema admite varias aplicaciones en topología general. Nosotros necesitamos lo siguiente

Definición 4.2.2. Si X es un espacio topológico, f es llamado un *desplazamiento continuo*, si f es una función continua de un subconjunto de X en X , y f es un desplazamiento de orden $\mathfrak{c}$.

Teorema 4.2.1. Sea M un espacio métrico completo, separable con $|M| = \mathfrak{c}$. Entonces existe una familia $\{F_\gamma\}$ de $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos $F_\gamma \subset M$ que satisface las relaciones

$$|F_\gamma \setminus F_{\gamma'}| = \mathfrak{c}, \quad \text{para toda } \gamma, \gamma' \text{ con } \gamma \neq \gamma' \quad (4.7)$$

tal que ninguna F_γ admite un desplazamiento continuo en sí misma o en otra $F_{\gamma'}$. Más aún, si $\{f_\beta\}$ es el conjunto de desplazamientos continuos de un subconjunto G_δ de M y $\{K_\beta\}$ es una familia de $\mathfrak{c}$ subconjuntos de M inducidos, cada uno de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces para todo par β, γ podemos requerir

$$|F_\gamma \cap K_\beta| = \mathfrak{c}, \quad |(M \setminus F_\gamma) \cap K_\beta| = \mathfrak{c}. \quad (4.8)$$

Demostración. Sólo existen $\mathfrak{c}$ subconjuntos G_δ de M y un subconjunto fijo de M admite sólo $\mathfrak{c}$ funciones continuas en M , por lo que ciertamente hay a lo sumo $\mathfrak{c}$ diferentes desplazamientos continuos. Sea f_β un desplazamiento continuo, siendo su dominio un subconjunto G_δ de M y su rango contenido en M . Por lo tanto la familia $\{f_\beta\}$ tiene a lo sumo la cardinalidad del continuo. Si no existiera un desplazamiento continuo en M , el teorema es trivial. Entonces asumiremos que la familia $\{f_\beta\}$ tiene cardinalidad el continuo en cualquier caso, contando un desplazamiento continuo dado $\mathfrak{c}$ veces (si es necesario).

Ahora aplicamos el lema 4.2.3, con $X = M$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$, $\{f_\beta\} = \{f_\beta\}$. Por lo tanto existe una familia $\{F_\gamma\}$ de $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos $F_\gamma \subset M$ que satisfacen 4.7 y 4.8. Aún tenemos que probar que F_γ no admite ningún desplazamiento continuo φ en sí mismo o entre otro $F_{\gamma'}$. Si existiera la función φ puede ser extendida (como en el Teorema 1.2.9) a una función continua $\tilde{\varphi}$ de un conjunto $F_\gamma \subset \tilde{F}_\gamma$ de tipo G_δ en M . $\tilde{\varphi}$ es además un desplazamiento continuo, entonces $\tilde{\varphi} = f_\beta$ para alguna β . Entonces, de acuerdo a 4.2, para la pareja γ, γ' se cumple

$$f_\beta(F_\gamma) \setminus F_{\gamma'} \neq \emptyset.$$

Pero $f_\beta = \tilde{\varphi}$ sobre F_γ , entonces

$$\varphi(F_\gamma) \setminus F_{\gamma'} \neq \emptyset,$$

lo que dice que φ no mapea F_γ ni en sí mismo, ni en ningún otro $F_{\gamma'}$, lo cual concluye la prueba. $\square$

4.2.2. Subconjuntos rígidos de la recta y del plano

Queremos conocer condiciones bajo las cuales las funciones continuas u homeomorfismos no triviales, son desplazamientos continuos. Una función de un conjunto se dice trivial si es la identidad o si el conjunto imagen de la función consiste de un elemento.

Definición 4.2.3. Sea M un espacio métrico separable. Un *punto de condensación* de un subconjunto H de M es un punto x que está en M tal que: en cada vecindad abierta de x hay un conjunto no numerable de puntos de H .

Lema 4.2.4. Sea P un espacio métrico separable en el cual todo punto es un punto de condensación. Si $\varphi : P \rightarrow P$ es un homeomorfismo local no trivial en P o una función continua sobreyectiva y no trivial, entonces φ es un desplazamiento continuo.

Demostración. Si φ es un homeomorfismo local y no trivial, existen puntos $a, b \in P$ tales que $a \neq b$ y $\varphi(a) = b$. Esto produce vecindades disjuntas U_a y U_b tal que $|U_a| = \mathfrak{c}$ y $\varphi(U_a) = U_b$. Entonces φ es un desplazamiento continuo. Si φ es continua sobreyectiva y no trivial, determinamos a y b como antes. Entonces existe una vecindad V_a con $|V_a| = \mathfrak{c}$ y una vecindad U_b disjunta de V_a tal que $\varphi(V_a) \subset U_b$, entonces

$$V_a \cap \varphi(V_a) = \emptyset \quad \text{por lo tanto} \quad \varphi^{-1}(V_a) \cap V_a = \emptyset$$

con lo que concluimos que V_a es un conjunto desplazado de orden $\mathfrak{c}$ bajo φ . Nótese que la primera igualdad de la parte anterior no es suficiente para garantizar que φ es un desplazamiento de orden $\mathfrak{c}$, ya que $\varphi(V_a)$ no necesariamente tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$, pero $V_a = \varphi(\varphi^{-1}(V_a))$ sí la tiene. $\square$

Lema 4.2.5. Sea P un subconjunto conexo y localmente conexo de un espacio métrico separable M . Toda función continua no trivial φ de P en M es un desplazamiento continuo, si y sólo si P permanece conexo después de remover a lo más un punto.

Demostración. Veamos que la condición es necesaria. Discutamos el caso donde P es conexo pero se convierte en desconexo después de remover un punto p . Entonces hay una separación:

$$P \setminus \{p\} = A \cup B.$$

Ahora la función definida por $A \cup \{p\} \rightarrow \{p\}$, y siendo la identidad en B es continua y no trivial, pero no un desplazamiento continuo ya que B no es desplazado y A es desplazado en un sólo punto.

Para mostrar la suficiencia, primero supongamos que $\varphi(P) \subset P$ y distingamos entre los siguientes casos

(i) $\varphi \neq e$ (identidad) sobre $\varphi(P)$,

(ii) $\varphi = e$ sobre $\varphi(P)$.

(i) Hay un punto $q \in \varphi(P)$, tal que $q \neq \varphi(q)$. Encontramos vecindades abiertas disjuntas $U = U_q$ y $V = V_{\varphi(q)}$, relativas al espacio $\varphi(P)$, tal que $\varphi(U) \subset V$. Esto significa que ningún punto de U es mapeado sobre sí mismo bajo φ . Dado que $U \subset \varphi(P)$, todo punto de U es imagen de un punto. De $|U| = \mathfrak{c}$ (por Proposición 1.2.8 y Teorema 1.1.3) se sigue que U es un conjunto desplazado de orden $\mathfrak{c}$.

(ii) Las nociones topológicas serán relativas a P . Dado que φ es no trivial, hay un punto $q \in P \setminus \varphi(P)$. Ya que $\varphi = e$ sobre $\varphi(P)$, el conjunto $\varphi(P)$ es cerrado y podemos encontrar para cada $r \in P \setminus \varphi(P)$ una vecindad abierta y conexa U_r que no interseque a $\varphi(P)$. Consideremos la familia de todas las “cadenas finitas”, cuyos elementos son elementos de $\{U_p \mid p \in P \setminus \varphi(P)\}$ que conectan algún U_r con U_q . La unión de los elementos de esta familia determina un conjunto abierto y conexo

$$S = \bigcup \{U_r \mid \text{existe una cadena de } U_r \text{ a } U_q \text{ formada por conjuntos } U_p\},$$

que es cerrado en $P \setminus \varphi(P)$. $\bar{S}$ tiene al menos dos puntos límites contenidos en $\varphi(P)$, pues, si $\bar{S} = S \cup \{t\}$, $t \in \varphi(P)$, entonces t podría ser un punto de separación de P (usamos el hecho de que $\varphi(P)$ consiste en más de un punto). Entonces hay dos puntos $u, v \in \varphi(P)$, tal que $S' = S \cup \{u, v\}$ es conexo y entonces, $\varphi(S')$ es conexo. Como $\{u, v\} \subset \varphi(S')$, este conjunto $\varphi(S')$ es no degenerado y conexo. $\varphi(S)$ es entonces un conjunto desplazado de orden $\mathfrak{c}$ y φ es un desplazamiento continuo.

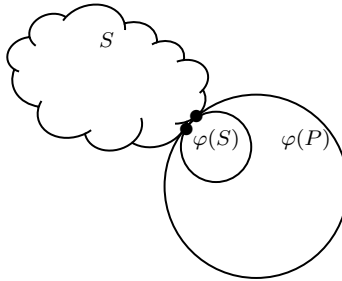


Figura 4.7: Esquema de la demostración.

En segundo lugar, consideremos el caso general $\varphi(P) \subset M$. Podemos asumir que $\varphi(P)$ consiste de $P \cap \varphi(P)$ y con una cantidad menor al continuo de puntos en $\varphi(P) \setminus P$, ya que en otro caso $\varphi(P) \setminus P$ claramente es conjunto desplazado de orden $\mathfrak{c}$. Por lo que podemos asumir que en $P \cap \varphi(P)$ todo punto es un punto de condensación, ya que en un conjunto cerrado no numerable de un espacio métrico separable basta remover una cantidad numerable de puntos para obtener un conjunto cerrado y perfecto. Ahora de nuevo distinguimos entre los casos

- (i) $\varphi \neq e$ sobre $P \cap \varphi(P)$,
- (ii) $\varphi = e$ sobre $P \cap \varphi(P)$.

En ambos casos, la parte restante de la prueba procede de la misma manera que en los casos anteriores (reemplazando $\varphi(P)$ por $P \cap \varphi(P)$). Esto prueba nuestro lema. $\square$

Lema 4.2.6. *Si P es el complemento de un conjunto totalmente imperfecto (un conjunto es totalmente imperfecto, si no contiene ningún subconjunto homeomorfo al conjunto de Cantor) en $\mathbb{R}^2$, entonces P es conexo, localmente conexo y mantiene sus propiedades después de la eliminación de un punto. Si P y $\mathbb{R}^2 \setminus P$ son totalmente imperfectos, entonces ambos tienen dimensión 1.*

Demostración. La demostración de este lema va más allá de los propósitos de esta tesis, el lector interesado puede consultar [Gro59]. $\square$

Teorema 4.2.2. *Existe una familia $\{F_\gamma\}$ de $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos de dimensión 0 de la recta real, tal que ningún F_γ puede ser mapeado bajo un homeomorfismo local (bajo una función continua y sobreyectiva) en sí mismo, ni a ningún otro $F_{\gamma'}$. Si F_γ es mapeado en sí mismo, debemos excluir los mapeos triviales.*

Demostración. Aplicaremos el Teorema 4.2.1, donde M es la recta real, $\{f_\beta\}$ la familia de desplazamientos continuos de un G_δ en M y sea $\{K_\beta\}$ la familia de conjuntos desplazados, sin pérdida de generalidad supongamos que K_β contiene a todos los compactos no numerables de M , que a su vez contienen al conjunto de Cantor. La familia $\{F_\gamma\}$ es la requerida. De hecho F_γ y $M \setminus F_\gamma$ se vuelven totalmente imperfectos (ya que ninguno de ellos contiene a ningún subconjunto homeomorfo al conjunto de Cantor). Entonces, todo punto de

un F_γ es un punto de condensación (ya que toda vecindad de un punto en la recta real, contiene una copia del conjunto de Cantor y F_γ contiene $\mathfrak{c}$ puntos de dicho conjunto). Por lo tanto, aplicando el Lema 4.2.4 notamos que todo homeomorfismo local (función continua y sobreyectiva) φ de un F_γ en sí mismo es, ya sea trivial o un desplazamiento continuo. De acuerdo al Teorema 4.2.1 no puede ser un desplazamiento continuo. Entonces concluimos que φ es trivial.

En segundo lugar, tomemos un par $F_\gamma, F_{\gamma'} (\gamma \neq \gamma')$. A la vista de 4.7 del Teorema 4.2.1 y el hecho de que todo punto de un F_γ es un punto de condensación, es fácil verificar que todo homeomorfismo local de F_γ en $F_{\gamma'}$ o toda función continua F_γ sobre $F_{\gamma'}$ es un desplazamiento continuo (Lema 4.2.4). Sin embargo, esto es imposible de acuerdo al Teorema 4.2.1. $\square$

Teorema 4.2.3. *Existe una familia $\{F_\gamma\}$ de $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos del plano que son conexos y localmente conexos, tal que ningún F_γ puede ser mapeado de manera continua y no trivial en sí mismo o en otro $F_{\gamma'}$.*

Demostración. Aplicamos el Teorema 4.2.1 en la misma manera que en la demostración anterior. M denota en este caso el plano Euclidiano. Aplicando el Lema 4.2.6, observamos que los elementos de $\{F_\gamma\}$ son 1-dimensionales, conexos y localmente conexos, y más aún, permanecen conexos después de remover un punto. Entonces podemos aplicar el Lema 4.2.5, el cual nos da, junto con el Teorema 4.2.1, la prueba requerida. $\square$

En particular tenemos:

Corolario 4.2.1. *La recta real contiene subconjuntos de cardinalidad $\mathfrak{c}$ los cuales son rígidos bajo homeomorfismos y funciones sobreyectivas continuas. El plano contiene conjuntos $\mathfrak{c}$ conexos y localmente conexos, los cuales son rígidos bajo funciones continuas sobreyectivas.*

4.2.3. Grupos equivalentes

Diremos que dos grupos G y H son equivalentes si cada uno de ellos es isomorfo a un subgrupo del otro.

Esto da una descomposición de, digamos, la familia de todos los grupos G de orden $|G| = \mathfrak{m}$ en clases de equivalencia disjuntas εG . Dos elementos G y H de la misma clase de equivalencia tienen una importante propiedad en común, como se puede ver fácilmente: si $\varepsilon G = \varepsilon H$, entonces G y H

tienen la misma familia de subgrupos, es decir, si un grupo S aparece un número de veces (de manera isomorfa) como un subgrupo de G , entonces este aparece el mismo número de veces como subgrupo de H . Entonces, si queremos estudiar los posibles subgrupos de un grupo dado, sólo tenemos que elegir un elemento adecuado de su clase de equivalencia e investigar los subgrupos de este elemento.

Más generalmente escribiremos $\varepsilon G \prec \varepsilon G'$, si G puede ser encajado de manera isomorfa en G' , pero al contrario no necesariamente se cumple. Esto induce un orden parcial entre los εG .

4.2.4. Autohomeomorfismos de espacios de dimensión cero

Sea N un espacio metrizable 0-dimensional separable. En esta sección mostraremos algunas propiedades de $\text{Aut}(N)$ que pueden ser analizadas en general, las cuales deduciremos ahora.

Proposición 4.2.1. *Si M es espacio separable, 0-dimensional metrizable, denso en sí mismo, entonces $|\text{Aut}(M)| = 1$, o $\text{Aut}(M)$ contiene $\mathfrak{c}$ elementos cada uno de orden 2.*

Demostración. Si M es rígido bajo homeomorfismos, claramente $|\text{Aut}(M)| = 1$. Entonces, supongamos que M admite un homeomorfismo no trivial φ tal que $\varphi(M) = M$. Supongamos que $\varphi(a) = b$, $a \neq b$, $a, b \in M$. Tomemos vecindades disjuntas $U, V \subseteq M$ de a, b respectivamente, ambas abiertas y cerradas en M , tal que $\varphi(U) = V$. Si U no es compacto, entonces U es la unión de una cantidad numerable de conjuntos mutuamente disjuntos U_i , donde cada U_i permanece abierto y cerrado en M . En efecto, si U no es compacto, U admite una cubierta abierta $\mathcal{U}$ sin subcubiertas finitas. Como M es separable podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U}$ consiste en abiertos básicos abiertos y cerrados y que es numerable, $\mathcal{U} = \{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ y sea $U_i = W_i \setminus \bigcup_{j < i} W_j$, entonces se tienen las propiedades requeridas.

Sea φ_i la restricción de φ a U_i y $\varphi_i(U_i) = V_i$. Para toda sucesión de enteros positivos n_i ($i = 1, 2, \dots$), podemos definir un autohomeomorfismo ψ de M como

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \varphi_{n_i}(p) \quad (p \in U_{n_i}; \ i = 1, 2, \dots) \\ \psi(p) &= \varphi_{n_i}^{-1}(p) \quad (p \in V_{n_i}; \ i = 1, 2, \dots) \\ \psi(p) &= p \quad \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

Dado que hay $\mathfrak{c}$ diferentes funciones ψ de este tipo, cada una de orden 2, hemos probado nuestra proposición en el caso en el que U no es compacto. Sin embargo, si U es compacto, al ser métrico, separable y 0-dimensional, por Teorema 1.3.2, es homeomorfo al conjunto de Cantor, y entonces claramente nuestra proposición se cumple. $\square$

Los siguientes corolarios son consecuencias inmediatas de la proposición anterior.

Corolario 4.2.2. *Si K es un conjunto de números reales, denso en sí mismo, entonces $|Aut(K)| = 1$ o $|Aut(K)| = \mathfrak{c}$.*

Corolario 4.2.3. *Si M es un conjunto de números reales o un espacio separable, 0-dimensional y metrizable, entonces $|Aut(M)| = n!$ para algún entero positivo n , o $|Aut(M)| = \mathfrak{c}$.*

El siguiente teorema nos da información acerca de los posibles grupos $T(X)$, usando los resultados sobre equivalencia.

Teorema 4.2.4. *Si X denota un espacio metrizable e infinito numerable o un espacio metrizable, infinito, localmente compacto, 0-dimensional y separable, entonces*

$$\varepsilon Aut(X) = \varepsilon S_\omega, \quad (5.1)$$

donde S_ω son las permutaciones sobre ω , el primer ordinal infinito.

Demostración. Supongamos que X es infinito numerable y metrizable. Todo homeomorfismo de X permuta este conjunto numerable. Fácilmente se sigue que

$$\varepsilon Aut(X) \prec \varepsilon S_\omega. \quad (5.2)$$

Ahora, si X contiene una cantidad infinita de puntos aislados, podemos determinar una sucesión de tales puntos que converge en X o no tiene punto límite. Entonces toda permutación de los puntos de esta sucesión puede ser extendida a un autohomeomorfismo de X , por lo que

$$\varepsilon S_\omega \prec \varepsilon Aut(X). \quad (5.3)$$

Sin embargo, la misma relación se cumple si X sólo contiene una cantidad finita de puntos aislados, ya que en este caso, eliminando los puntos aislados obtenemos un subespacio homeomorfo al espacio de racionales, y el espacio racionales es homeomorfo a la suma topológica ajena de una cantidad de

copias ajenas de los racionales, abiertas y cerradas. Entonces podemos permutar los elementos de la suma directa y fijar a los puntos aislados, generando el grupo de autohomeomorfismos requerido.

Si X es infinito, localmente compacto, 0-dimensional, separable y metrizable, la relación 5.3 se mantiene de la misma manera. En efecto, si X contiene sólo un número finito de puntos aislados, X contiene un subconjunto abierto y cerrado D homeomorfo al conjunto de Cantor y como D es el producto topológico de una cantidad numerable de pares de puntos, 5.3 se sigue.

El único caso no trivial es probar 5.2. Compactificamos X por un punto a un espacio compacto 0-dimensional que denotaremos por X^* . $\text{Aut}(X)$ es claramente un subgrupo de $\text{Aut}(X^*)$. Se puede ver fácilmente que la familia de subconjuntos abiertos y cerrados de X^* es numerable, en efecto, X^* tiene una base numerable formada por conjuntos abiertos y cerrados, y cada abierto y cerrado es una unión finita de elementos de la base. Todo elemento de $\text{Aut}(X^*)$ permuta los elementos de esta familia; para diferentes elementos corresponden diferentes permutaciones de la familia y a la permutación de dos elementos corresponde el producto de las correspondientes permutaciones. Entonces 5.2 se sigue, si interpretamos S_ω como el grupo de permutaciones de la familia de subconjuntos abiertos y cerrados de X^* . $\square$

4.2.5. Representaciones gráficas de grupos

Extenderemos el Teorema de Frucht en la siguiente manera: definiremos para cada grupo dado G una gráfica (sin color) Γ tal que el grupo de automorfismos $\text{Aut}(\Gamma)$ de Γ es isomorfo a G .

Primero construiremos una *gráfica rígida*, es decir, una gráfica para la cual el grupo de automorfismos es la identidad. Realizaremos la construcción en una cantidad numerable de pasos y usando inducción sobre n .

Primer paso: Tomemos un cardinal $\mathbf{m}$. Tomemos un segmento (arista) $[pq]$ y dibujemos desde q (uno de sus vértices) $\mathbf{m}$ nuevos segmentos $[q, q_{\alpha_1}]$ disjuntos a pares, con la excepción del punto final q , el cual tienen en común.

Supongamos que después del paso n -ésimo se ha construido una gráfica de la siguiente naturaleza $[pq], [qq_{\alpha_1}], [q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}], \dots, [q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n}]$, tal que para cada $i < n$ el vértice $q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i}$ definido como vértice de la arista $[q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{i-1}}q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i}]$ es vértice de $\mathbf{m}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\alpha_{i+1}}$ diferentes aristas definidas como antes $[q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i}q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{i+1}}]$, mientras que dos cardinales $\mathbf{m}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i}$ ($i \leq n$)

que difieren en al menos uno de sus subíndices, serán diferentes. Más aún, los vértices $q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ serán vértices de orden 1.

Ahora definiremos la gráfica en el $(n+1)$ -ésimo paso. Adjuntemos a cada $q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ de orden 1 un cardinal $\mathbf{m}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\alpha_{n+1}}$. Todos estos serán diferentes entre sí y de todos los $\mathbf{m}$ -cardinales previamente definidos. Ahora dibujemos desde cada $q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$, $\mathbf{m}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\alpha_{n+1}}$ nuevos segmentos, disjuntos con la excepción de $q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$. Esta nueva gráfica tiene las mismas propiedades como las mencionadas para la gráfica en el n -ésimo paso (reemplazando n por $n+1$) como se puede verificar fácilmente.

La construcción se completa después de una cantidad numerable de pasos. La rigidez de la gráfica resultante puede verificarse fácilmente y depende del hecho de que para cada segmento (arista) el par de órdenes de sus extremos es único en la gráfica. Más aún, no es difícil ver que para todo cardinal $\mathbf{k}$, podemos construir $\mathbf{k}$ gráficas rígidas, tal que ningún par de ellas es isomorfa.

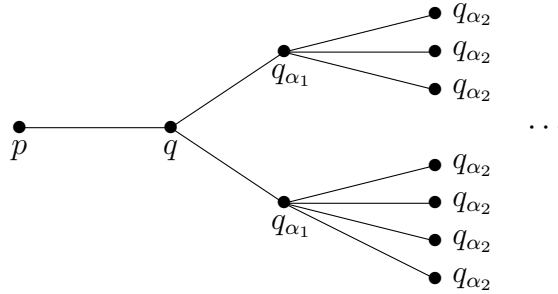


Figura 4.8: Esquema de la construcción.

Ahora sea G^* una gráfica dirigida de colores del grupo G , en el cual todos sus elementos diferentes de e son tomados como generadores (Teorema 1.4.1). Asumimos $\mathbf{k} = |G| > 3$ (el caso de grupos de orden ≤ 3 puede ser tratado separadamente de una manera simple), entonces la gráfica G^* tiene orden ≥ 3 en cualquiera de sus vértices.

Consideremos todas las aristas dirigidas de un color fijo s en G^* . Construyamos una gráfica rígida R'_s como se describió anteriormente, tal que todos los $\mathbf{m}$ -cardinales que aparecen en la definición de R'_s son mayores que $\mathbf{k}$. La gráfica conexa R_s es definida como sigue: aristas $[ar]$, $[rp]$, $[pb]$, y además R'_s . El vértice de orden 1 de R'_s es identificado con el vértice p en esta definición. Supongamos que una arista dirigida con color s conduce desde el vértice a al

vértice b en G^* . Reemplace a esta s dirigida en G^* por R_s , reteniendo a y b . Haremos esto por cada tal s , reemplazándolos por R_s mutuamente isomorfos. Además, repetimos esta construcción para las otras aristas coloreadas de G^* , pero cuidando que el rígido R_t para el color t no sea isomorfo al rígido R_s para el color s , distinto de t .

De esta manera G^* es transformada en una gráfica Γ , la cual satisface nuestros requerimientos, como fácilmente se puede deducir. Entonces hemos probado que

Teorema 4.2.5. *Todo grupo G es isomorfo al grupo de automorfismos de alguna gráfica Γ . Podemos asumir que este grupo de automorfismos opera libre de puntos fijos sobre Γ .*

Con lo que en particular tenemos:

Corolario 4.2.4. *Todo grupo G es isomorfo al grupo de automorfismos de una gráfica dirigida Γ .*

Demostración. Tomemos una R_s , como la definida en el teorema anterior, y demos a cada arista de R_s alguna orientación, elegida arbitrariamente. Esta orientación induce una orientación en todo R_s , isomorfa a R_s . Realizando este procedimiento en toda Γ . La Γ orientada obtenida es la Γ' que satisface los requerimientos del corolario, como fácilmente se puede ver. $\square$

4.2.6. Grupos de autohomeomorfismos

Dado un grupo G y la correspondiente gráfica Γ' del corolario de la parte anterior, reemplazaremos las aristas de Γ' por espacios mutuamente homeomorfos H , rígidos bajo homeomorfismos e introduciremos una métrica en el conjunto resultante, tal que obtengamos un espacio M satisfaciendo el siguiente teorema.

Teorema 4.2.6. *Todo grupo G es isomorfo al grupo de autohomeomorfismos $\text{Aut}(M)$ de un espacio métrico conexo, localmente conexo, 1-dimensional y completo M .*

Más aún, el grupo de isometrías de nuestro M coincide con $\text{Aut}(M)$ y opera de una manera libre de puntos fijos sobre M .

Demostración. Para hacer a M completo, usaremos las curvas rígidas P_n , definidas en la sección anterior construidas en el Teorema 4.1.1 (curvas de

Peano, en las cuales se comienza la construcción con la $n + 1$ hélice). Si G es finito, de orden m , cuidamos que $n > m$ y en cualquier caso $n > 3$. Denotemos tal P_n por H . Recordemos que H satisface la siguiente propiedad

(p) : todo punto $h \in H$ tiene vecindades arbitrariamente pequeñas U tal que $U \setminus \{h\}$ es conexo o contiene más de n componentes.

En H tomemos dos puntos (“vértices”) h^0 y h^1 , diametralmente opuestos sobre el círculo exterior, que tendrá un diámetro de uno. Ahora reemplazamos cada arista dirigida $[q^0 q^1]$ de Γ' por tal H , h^i reemplazando q^i ($i = 0, 1$). Todos los H son isomorfos el uno al otro y disjuntos con la posible excepción de sus “vértices”. En la unión de todos los H

$$M = \bigcup_{\alpha} H_{\alpha}$$

introduciremos una métrica ϱ . Esta métrica por definición coincidirá con la métrica ya dada en cada $H = H_{\alpha}$.

Si $a \in H_{\alpha}$, $b \in H_{\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), entonces hay una cadena finita de puntos, conectando a y b ,

$$a, h_{\alpha}^i = h_{\gamma_1}^{j_1}, h_{\gamma_1}^{k_1} = h_{\gamma_2}^{j_2}, h_{\gamma_2}^{k_2} = h_{\gamma_3}^{j_3}, \dots, h_{\gamma_n}^{k_n} = h_{\beta}^s, b \quad (1)$$

con $i, s = 0$ o 1 ; $j_t + k_t = 1$ para toda $1 \leq t \leq n$; n un número natural. Definimos la longitud λ de la cadena (1) por

$$\lambda = \varrho(a, h_{\alpha}^i) + \varrho(h_{\beta}^s, b) + n - 2.$$

La mínima longitud de todas las cadenas conectando a y b es definida como su distancia $\varrho(a, b)$ es M . Esta función ϱ , ahora definida de manera general sobre $M \times M$, es en efecto una métrica y puede fácilmente verificarse que el espacio métrico resultante M es completo, conexo y localmente conexo.

Notemos que la conexidad local y la conexidad se deducen directamente de la construcción y de las propiedades de H . Veamos que en efecto M es completo. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en M . Si $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge a algún h_{α}^i o contiene una subsucesión contenida en algún H_{α} , entonces es claro que $\{x_n\}$ converge. En otro caso, $\{x_{n_k}\}$ contiene alguna subsucesión contenida en algún H_{α} y alguna subsucesión contenida en algún H_{β} , para $\alpha \neq \beta$, y además, ninguno de los puntos $h_{\alpha}^i, h_{\beta}^i$ es punto límite de $\{x_n\}$. De lo cual se deduce que $\{x_n\}$ no es una sucesión de Cauchy, por lo tanto este caso no puede suceder.

Observemos que en cada punto de M hay una base de vecindades cuyas fronteras son uniones de fronteras 0-dimensionales relativas a los conjuntos H y que además son 0-dimensionales.

Ahora probaremos que $\text{Aut}(M) \simeq G$. Si $\varphi(M) = M$ es un autohomeomorfismo, demostremos que para cada α existe una β tal que

$$\varphi(H_\alpha) = H_\beta. \quad (2)$$

En efecto, $\varphi(H_\alpha)$ no puede contener puntos de dos copias de H diferentes. De lo contrario contendría un vértice h de alguna H . Sin embargo, h es localmente un punto de corte en M de tal manera que si N_h es una vecindad pequeña adecuada de h en M , el conjunto $N_h \setminus \{h\}$ contiene ya sea una cantidad infinita de componentes o menos que $\max(m, 3)$ componentes. Esto contradice la propiedad (p) válida para H , ya que φ es homeomorfismo. El mismo razonamiento es aplicado a φ^{-1} mostrando que $\varphi(H_\alpha)$ no puede estar propiamente contenido en un H_β . Entonces 2 se cumple.

De 2 se sigue que φ permuta las copias de H entre ellos mismos, pero entonces podemos concluir del Teorema 4.2.5, su corolario y la rigidez de H que $G \simeq \text{Aut}(\Gamma') \simeq \text{Aut}(M)$. Además, es fácil ver que tal φ es una isometría de M , ya que permuto copias de H . Entonces todo autohomeomorfismo de M es una isometría y el grupo correspondiente coincide.

Observemos que si G es un grupo infinito la misma demostración funciona tomando cualquier $n > 3$. $\square$

Comentario: Reemplazando H por un espacio rígido adecuado, de una dimensión adecuada, se puede probar que el espacio métrico M en el teorema anterior puede tener cualquier dimensión positiva, finita o infinita.

Bibliografía

- [And66] ANDERSON, R.D. (1966). *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*. Bull. Amer. Math. Soc., 72, 515-159.
- [ACV82] ANDERSON, R.D., CURTIS, D.W., & MILL, J.V. (1982). *A fake topological Hilbert space*. Transactions of the American Mathematical Society, 272, 311-321.
- [Dijk85] DIJKSTRA, J.J. (1985). *A rigid space whose square is the Hilbert space*. Proceedings of the American Mathematical Society, 93, 118-120.
- [Eng89] ENGELKING, R. (1989). *General topology* (Revised and completed ed., Vol. 6). Heldermann Verlag Berlin.
- [Fra02] FRALEIGH, J. B. (2002). *A First Course in Abstract Algebra* (7a ed.). Pearson Educación.
- [Gro59] GROOT, J.D. (1959). *Groups represented by homeomorphism groups I*. Mathematische Annalen, 138, 80-102.
- [GW58] GROOT, J.D., WILLE, J.R. (1958). *Rigid continua and Topological Group-Pictures*. Arch. Math., 9, 441-446.
- [Her17] HERNÁNDEZ, F. (2017). *Teoría de Conjuntos: una introducción* (1a ed.). Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Núm. 13.
- [Her21] HERNÁNDEZ, F. (2021). *Curso de Topología: un enfoque conjuntista* (1a ed.). Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Núm. 43.
- [LS16] LAURI, J., & SCAPELLATO, R. (2016). *Cayley Graphs*. In *Topics in Graph Automorphisms and Reconstruction*. London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 39-63.

BIBLIOGRAFÍA

- [Mar73] MARDEŠIĆ, S. (1973). *Compact subsets of $\mathbb{R}^n$ and dimension of their projections*. Proceedings of the American Mathematical Society, 41(2), 631-633.
- [Meng27] Menger, K. (1927). *Zur allgemeinen Kurventheorie*. Fundamenta Mathematicae, 10, 96-115.
- [QC12] FRANCIS, M.D. (2012). *Two Topological Uniqueness Theorems for Spaces of Real Numbers*. arXiv: General Topology.
- [SS41] STEEN, L. A., & SEEBACH, A. J. (1941). *Counterexamples in Topology* (2a ed.). Springer-Verlag New York Inc.
- [Thor72] THORNTON, M.C. (1972). *Spaces with given homeomorphism groups*. Proceedings of the American Mathematical Society, 33, 127-131.
- [Van01] MILL, J. V. (2001). *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces* (1.a ed., Vol. 64). Elsevier.
- [VD10] DIJKSTRA, J.J., MILL, J.V. (2010). *Erdős Space and Homeomorphism Groups of Manifolds*. Memoirs of the American Mathematical Society.