



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”



---

# **ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA VIBRACIÓN DE PLACAS DE CARTÓN POR LA TÉCNICA DE CHLADNI**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

**PRESENTA**

**MANUEL VEGA GUZMÁN**

**ASESOR**

**M.C. GABRIEL ARROYO CORREA**

Morelia, Michoacán, Agosto de 2022.

*Dedicatoria*  
*Dedicado a mis padres y mis hermanas*

# *Resumen*

En este trabajo se hace un estudio experimental de la vibración de placas de cartón con diferentes geometrías que abarcan desde una placa cuadrada simple, placas cuadradas con cortes rectos y circulares, placas cuadradas conectadas por canales de área variable, así como placas isoespectrales. Se utiliza la técnica de Chladni para visualizar las líneas nodales de los modos de vibración de las placas así como instrumentación adecuada para registrar sus espectros de Fourier. Se hace un comparativo de los resultados experimentales con simulaciones numéricas usando el método de diferencias finitas y el método de elementos finitos. Los resultados experimentales muestran que el cartón por su bajo costo y facilidad de manejo, puede ser un material adecuado, como primera alternativa, para el análisis de las propiedades vibratorias de estructuras más complejas.

En el caso de las placas con cortes rectos y circulares se cuantifica el efecto del corte en los patrones de Chladni de la placa. En el caso de las placas conectadas por un canal (rectangular y trapezoidal) se observa que la geometría del canal de acoplamiento permite preservar o modificar los patrones de Chladni de las placas, de modo que el canal se puede entender como un selector de patrones nodales. En el caso de las placas isoespectrales, se verifica la propiedad de isoespectralidad, es decir, la existencia de placas de la misma área pero de diferente geometría que presentan el mismo espectro de frecuencia pero diferentes patrones de Chladni.

Palabras Clave: Placa, cartón, vibración, técnica de Chladni, método de diferencias finitas, método de elementos finitos.

# *Abstract*

In this work an experimental study is made of the vibration of cardboard plates with different geometries that range from a simple square plate, square plates with straight and circular cuts, square plates connected by channels of variable area, as well as isospectral plates. The Chladni technique is used to visualize the nodal lines of the vibration modes of the plates as well as proper instrumentation to record their Fourier spectra. A comparison is made of the experimental results with numerical simulations using the finite differences method and finite elements method. Experimental results show that cardboard due to its low cost and ease of handling, can be a suitable material, as a first alternative, for the analysis of the vibratory properties of more complex structures.

In the case of plates with straight and circular cuts, the effect of the cut in the Chladni patterns of the plate is quantified. In the case of the plates connected by a channel (rectangular and trapezoidal) it is observed that the geometry of the coupling channel allows preserving or modifying the Chladni patterns of the plates, so that the channel can be understood as a nodal patterns selector. In the case of isospectral plates, the property of isospectrality is verified, that is, the existence of plates of the same area but different geometry that have the same frequency spectrum but different Chladni patterns.

Keywords: Plate, cardboard, vibration, Chladni technique, finite differences method, finite elements method.

# Índice General

	Pág.
<b>Dedicatoria</b> .....	ii
<b>Resumen</b> .....	iii
<b>Abstract</b> .....	iv
<b>1. Presentación</b> .....	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Algo de historia.....	1
1.3 La técnica de Chladni.....	2
1.4 Objetivos de esta tesis.....	5
<b>2. Teoría elemental de la vibración de placas delgadas</b> .....	6
2.1 Introducción.....	6
2.2 Teoría básica.....	6
2.3 El problema de la vibración de placas rectangulares.....	8
2.3.1 Solución por el método de Ritz.....	8
2.3.2 Solución por el método de diferencias finitas.....	9
2.3.3 Solución por el método de elementos finitos.....	13
<b>3. Resultados experimentales</b> .....	16
3.1 Introducción.....	16
3.2 Metodología experimental.....	16
3.3 Patrones de Chladni de placas cuadradas.....	17
3.4 Patrones de Chladni de placas con geometrías no convencionales....	18
3.4.1 Placas con cortes rectos.....	18
3.4.2 Placas rectangulares con perforaciones circulares.....	25
3.5 Patrones de Chladni de dos placas cuadradas acopladas por un canal de área variable.....	28
3.5.1 Acoplamiento por un canal rectangular.....	28
3.5.2 Acoplamiento por un canal trapezoidal.....	31
3.6 Patrones de Chladni de dos placas isoespectrales.....	35
3.7 Simulaciones numéricas.....	39
<b>4. Conclusiones</b> .....	45
<b>Bibliografía</b> .....	47

# CAPÍTULO 1

## PRESENTACIÓN

### 1.1 Introducción

El problema de la vibración de estructuras mecánicas (cuerdas, barras, membranas, placas) ha formado parte del núcleo central de la física matemática [1]. Nombres como el de Euler, Lagrange, Dirichlet, Germain, Chladni, Ritz, Kirchhoff, Galerkin y Courant, contribuyeron al desarrollo de métodos para el entendimiento de los problemas de vibración [2]. El caso específico de los patrones de vibración de placas está muy relacionado al nombre de Ernst Chladni [3]. En este capítulo se presenta un pequeño bosquejo histórico de la fascinante historia de Chladni, considerado el padre de la Acústica. Se describe la técnica inventada por Chladni para observar visualmente los patrones de vibración de estructuras mecánicas, llamados patrones de Chladni en su honor. Se finaliza con una descripción de los objetivos de esta tesis.

### 1.2 Algo de historia

Ernst Chladni (1756-1827) fue un hombre de ciencia alemán que pertenece a aquellos pocos científicos que han podido despertar el entusiasmo por su trabajo, no solo en los círculos profesionales, sino también en el público en general [3]. Durante varios viajes por toda Europa, Chladni exhibió las figuras sonoras que había descubierto en 1787, así como los instrumentos inventados por él. En este sentido, una invitación dada por el emperador Napoleón durante su estancia más larga en París para mostrar sus experimentos en la corte imperial fue sin duda un punto culminante. En realidad, Chladni no fue el primero en observar esos patrones de vibración. Leonardo Da Vinci ya los había mencionado en su famoso cuaderno, y Galileo los trató en un pasaje más largo de su trabajo "*Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo*". Sin embargo, es indiscutible que Chladni fue el primero en observar y analizar el fenómeno sistemáticamente [3].

Las vibraciones de placas y barras se convirtieron en el principal campo de interés de Chladni, y en este dominio hizo su descubrimiento que se asocia con su nombre. En 1802, Chladni publicó su obra principal, *Die Akustik*, en que resume todos los hechos conocidos del campo de la acústica hasta ese periodo, incluyendo sus propios descubrimientos. Aparte de las figuras sonoras, Chladni fue el primero en observar las vibraciones longitudinales de las barras. No es exagerado afirmar que la acústica se ha convertido en una disciplina propia debido a este libro. Dado que la teoría sobre vibraciones de las placas elásticas no existía todavía, la descripción de las figuras sonoras debía de seguir siendo cualitativa. Chladni

clasifica los patrones observados para placas rectangulares según el número de líneas nodales paralelas a ambos lados, y asigna a las frecuencias los tonos correspondientes de la escala hasta la precisión del semitono, atribuyendo el tono G arbitrariamente a la figura con la frecuencia más baja. Para placas circulares, descubre una relación empírica, conocida como ley de Chladni, entre las frecuencias  $\nu$  que pertenece a un patrón de sonido y el número de sus líneas nodales diametrales y radiales [3].

En febrero de 1809 Chladni visitó al emperador Napoleón para mostrarle sus famosas figuras de sonido. Durante la demostración Napoleón quedó tan asombrado que quiso le explicara más a fondo el tema. El emperador siempre manifestó una actitud abierta hacia la ciencia, lo que explica el por qué los principales científicos franceses ocuparon altos cargos en su corte imperial, un ejemplo fue Laplace que fue nombrado marqués. A la mañana siguiente de su demostración, Chladni recibió una gratificación de 6000 francos, para publicar su obra (*Die Akustik*) en francés, el cual fue publicado en noviembre de 1809 bajo el título de *Traité d'Acoustique* y dedicado al emperador Napoleón. Además de la gratificación personal para Chladni, Napoleón instituyó un premio de 3000 francos a la teoría matemática que explicara los patrones de sonido. En 1816, este premio fue otorgado a la matemática francesa Sophie Germain por sus aportaciones significativas a la elasticidad, a pesar de que su explicación de los patrones de Chladni era incompleta. Por años el problema resultó ser difícil, hasta que alrededor de 1850 Robert Kirchhoff encontró la solución completa para placas circulares. Todavía en 1891 se decía lo siguiente: "En cuanto a la teoría matemática estricta, solo se conocen unos pocos casos en los que se obtuvieron resultados apropiados para ser aplicados universalmente al experimento" [3].

Hoy en día, las figuras de Chladni en placas de forma irregular han experimentado una popularidad sorprendente. La razón resulta de la equivalencia entre la ecuación de onda estacionaria, la ecuación de Helmholtz y la ecuación de Schrödinger estacionaria para una partícula que se mueve libremente en una caja con paredes reflectantes. Esto permite el estudio de caos cuántico por medio de placas vibratorias con perfiles particulares. Los patrones nodales también son de importancia central en dominios de estudio totalmente diferentes: campos de luz, en patrones de daños por terremotos, formación de patrones en la corteza visual, por mencionar solo algunos. En vista de esto, la predicción hecha por Napoleón acerca de la utilidad de los patrones de Chladni en otros objetos, se puede entender como visionaria [3].

### 1.3 La técnica de Chladni

En sus observaciones, Chladni mencionaba que cualquier placa de vidrio o metal de un tamaño no demasiado pequeño, producía una variedad de sonidos cada vez que la sostenía y la golpeaba en diferentes posiciones y deseaba saber la razón de esto que no se había investigado. En su método experimental, Chladni fijó una placa de latón por su mitad por medio de un pivote, notó que los golpes con un

arco de violín podían producir diferentes sonidos que eran más fuertes y más constantes que los obtenidos con los golpes de la mano. Chladni conocía los experimentos de Lichtenberg para hacer visibles las trazas de las descargas eléctricas en aisladores al espolvorear polvo sobre estos. Esto le dio la idea de esparcir arena sobre su placa de latón, la cual al ser golpeada con el arco de violín, en pocos segundos observó que la arena formó una estrella con diez rayos. Esto fue el nacimiento de los patrones de sonido de Chladni. En la Fig. 1.1 se muestra el boceto original de Chladni de sus famosas figuras de sonido.

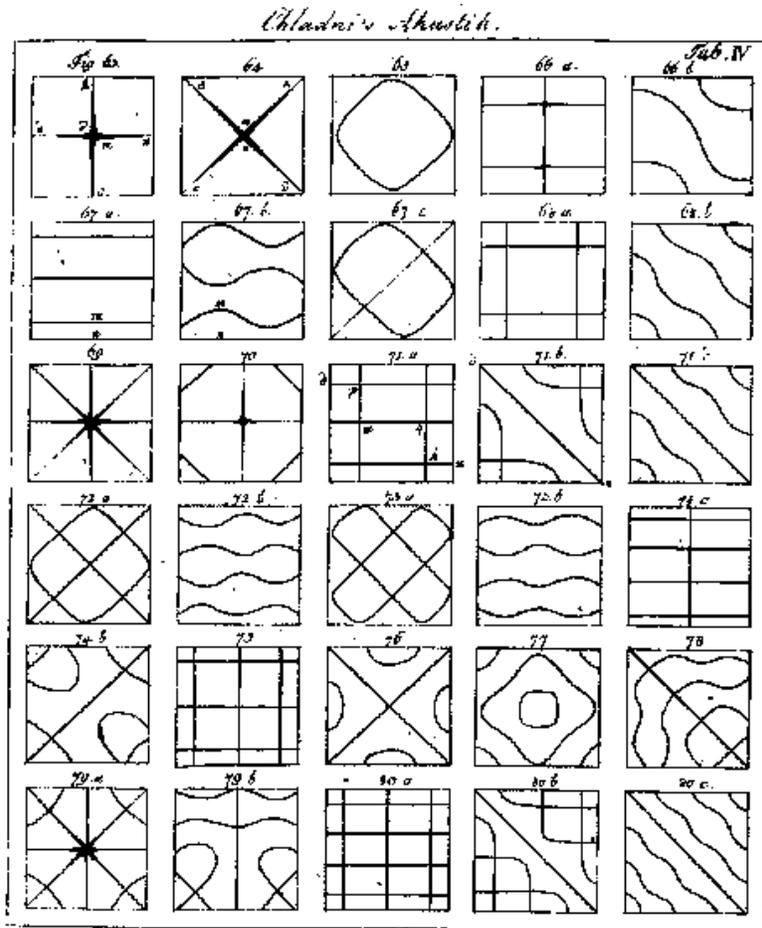


Figura 1.1: Diagrama original de las figuras de Chladni (tomada de la ref. 3).

Hoy en día, en condiciones de laboratorio, se utiliza un transductor electroacústico para encontrar dichos patrones, pero la metodología sigue siendo la misma usada por Chladni. Se fija la placa con un pivote al transductor y se esparce un material granular arriba de la placa (que no sea poroso y de un tamaño no muy pequeño o demasiado grande). Se enciende el transductor para generar ondas mecánicas (sonoras) que se transmiten a través de la placa, esta comienza a vibrar formando ondas estacionarias sobre la misma. Estas ondas estacionarias tienen la

particularidad de presentar zonas de vibración nula (llamados nodos) y vibración máxima (vientres). La vibración de la placa hace que el material granular se desplace mediante el movimiento de los antinodos a los nodos, pudiendo visualizar los patrones. Cabe señalar que Faraday descubrió que el movimiento a los antinodos se debía a las corrientes de aire inducida, ahora conocida como transmisión acústica. Las diferentes frecuencias sonoras inducen a diferentes modos de vibración, por lo que los dibujos sobre la placa van cambiando conforme se modifica la frecuencia del sonido. En la Fig. 1.2 se muestra una serie de patrones de Chladni obtenidas con instrumentación moderna.

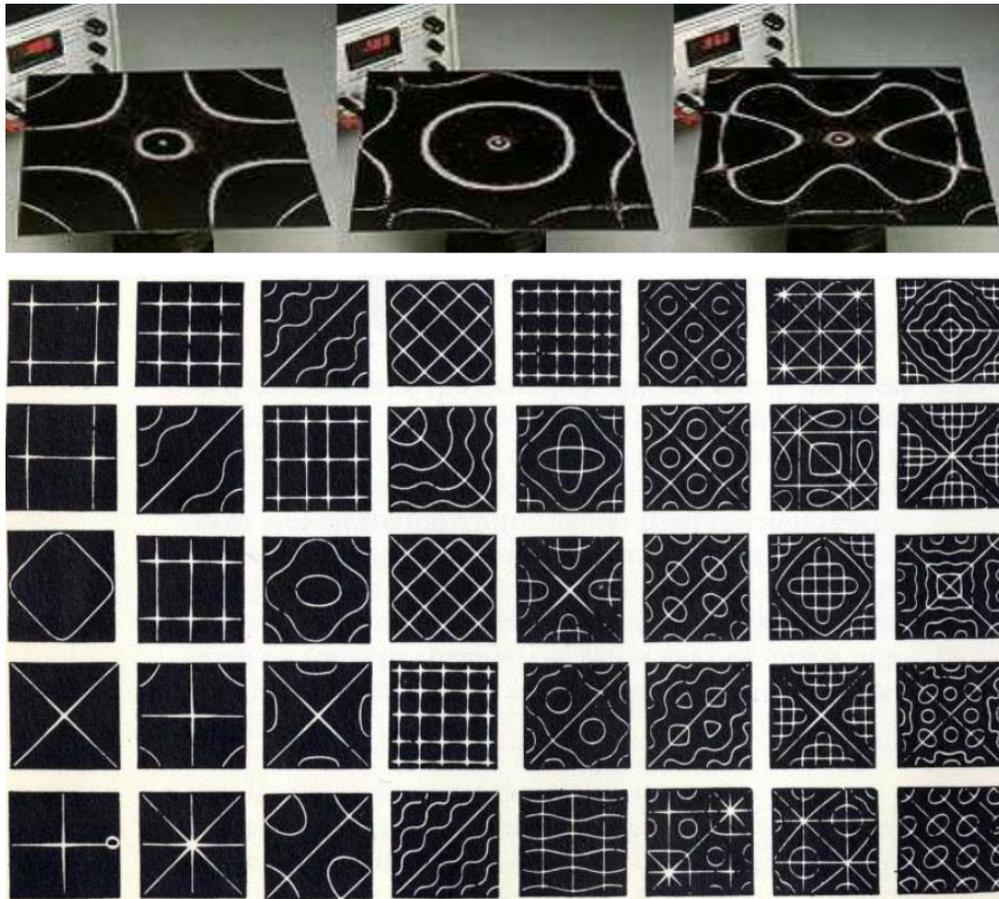


Figura 1.2. Patrones de Chladni creadas sobre una placa metálica cuadrada en un laboratorio con instrumentación moderna (tomada de la ref. 2).

Es muy común que en los laboratorios de acústica se usen placas delgadas de material metálico o plástico, los cuales son costosos. En este trabajo se usará el cartón, dada su disponibilidad y bajo costo. Además, su fácil manejo permite diseñar prototipos de estructuras con geometrías diversas a un costo mínimo, comparados con los materiales caros. En este sentido, se justifica el uso del cartón para construir una estructura que puede usarse en una etapa preliminar de

experimentación, antes de poder construir una estructura con materiales más caros.

### *1.4 Objetivos de esta tesis*

Los objetivos de esta tesis son:

- a) Estudiar experimentalmente la vibración en placas de cartón mediante la técnica de Chladni. Este estudio es complementado con la medición de los espectros de Fourier de los diferentes modos de vibración de la placa.
- b) Hacer un comparativo de los resultados experimentales con los resultados numéricos para el caso de placas cuadradas.
- c) Mostrar las ventajas del cartón para estudiar los modos de vibración en placas con geometrías más complejas.

La estructura de la tesis es como sigue. En el capítulo 2 se presenta la teoría básica de la vibración de placas rectangulares. En el capítulo 3 se presentan los resultados experimentales. Finalmente, el capítulo 4 contiene las conclusiones de este trabajo de tesis.

# CAPÍTULO 2

## TEORÍA ELEMENTAL DE LA VIBRACIÓN DE PLACAS DELGADAS

### 2.1 Introducción

En este capítulo se presenta la teoría básica de la vibración de placas delgadas. Se describen tres métodos básicos para la solución del problema de placas rectangulares: el método de Ritz, el método de diferencias finitas y el método de elementos finitos. Estos resultados serán de utilidad en el siguiente capítulo para hacer un comparativo con los resultados experimentales.

### 2.2 Teoría básica

La descripción del movimiento de un punto en la placa está dada por  $\vec{z} = z(x, y, t)$  donde  $(x, y)$  es la posición de la placa y  $t$  el tiempo, esto nos lleva que la fuerza vertical en un punto sobre la placa este descrita por  $F(x, y, t) = -\mathcal{L}\vec{z}$ , donde  $\mathcal{L}$  es un operador diferencial sobre  $\vec{z}$ . Como no hay otras fuerzas, la ley del movimiento de Newton nos establece que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\mathcal{L}\vec{z} \quad (2.1)$$

Resolviendo para esta EDP de segundo orden veremos primero lo siguiente. Sophie Germain argumentó en términos físicos que la energía de deformación para un elemento de placa pequeña debe ser proporcional al cuadrado de su curvatura; Kirchhoff luego refinó el modelo y determinó que la energía almacenada en una placa doblada con forma  $u(x, y)$  viene dada por la funcional [4]:

$$J[u(x, y)] := \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]^2 - 2(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right) dx dy, \quad (2.2)$$

donde  $\mu \in (0, 1)$  es la constante material (que Ritz consideró que era 0.225 para coincidir con los resultados de Chladni). Ahora suponga que queremos deformar ligeramente la placa para obtener una forma diferente  $u(x, y) + \varepsilon v(x, y)$ . Para hacerlo, necesitamos poner energía extra para superar la fuerza  $-\mathcal{L}u$  a lo largo de la distancia  $\varepsilon v$ . Esta energía extra se almacenará en la energía de deformación de la placa, y si se toma el límite en que  $\varepsilon$  tienda a cero, se tendrá que [4]:

$$\iint_{\Omega} (\mathcal{L}u) v \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \left( \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - (1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \right) dx \, dy \quad (2.3)$$

En general, el movimiento de vibración de una placa consistirá en una superposición de muchos modos, cada uno de los cuales vibra a una frecuencia diferente. Por lo tanto, para resolver (2.1) para  $z(x, y, t)$ , primero buscaremos soluciones separables, es decir, soluciones de la forma

$$\vec{z}(x, y, t) = u(x, y) \cdot T(t). \quad (2.4)$$

Estas soluciones también se denominan ondas estacionarias, porque solo la amplitud, y no la forma de la onda, cambia con el tiempo. Al sustituir en la Ec. (2.1) se tiene que

$$u(x, y) \cdot T''(t) = -(\mathcal{L}u)(x, y)T(t). \quad (2.5)$$

Suponiendo que  $T(t) \neq 0$  y  $u(x, y) \neq 0$ , podemos organizar la ecuación de arriba obteniendo

$$-\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\mathcal{L}u(x, y)}{u(x, y)} = \lambda. \quad (2.6)$$

Aquí  $\lambda$  debe ser una constante, ya que el lado izquierdo es independiente de  $(x, y)$  y el lado derecho es independiente de  $t$ . De esto,  $T(t)$  debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \quad (2.7)$$

Dado que la energía del sistema debe estar limitada, debemos tener  $T(t)$  limitada en todo momento. Esta  $\lambda$ , no debe ser negativa, para poder escribir  $\lambda = \omega^2$  con

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (2.8)$$

Para  $u(x, y)$ , la Ec. (2.6) da  $\mathcal{L}u = \lambda u$ , que cuando se integra con una función  $v$  arbitraria lleva a:

$$\iint_{\Omega} (\mathcal{L}u)v \, dx \, dy = \lambda \iint_{\Omega} uv \, dx \, dy, \quad (2.9)$$

donde el lado izquierdo está dado por Ec. (2.3). La Ec. (2.9) es la forma variacional (también llamada forma débil) de un problema de valor propio, para el cual debemos encontrar una función propia distinta de cero  $u(x, y)$ . Otra forma equivalente de entender el problema es utilizando la llamada forma fuerte que

consiste en suponer que la eigenfunción  $u$  es diferenciable y que la frontera del dominio  $\Omega$  es suave, de modo que se puede integrar por partes cada término del lado derecho de la Ec. (2.3) para remover las derivadas en la función arbitraria  $v$ . Esto lleva eventualmente a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para  $u$  que deben satisfacerse en el interior y en la frontera del dominio de integración [4].

## 2.3 El problema de la vibración de placas rectangulares

### 2.3.1 Solución por el método de Ritz

Walther Ritz presentó en 1909 lo que probablemente hoy en día se denominaría un método espectral para el cálculo de los modos de vibración de una placa; de hecho, fue la primera persona en poder computar estos modos. La idea principal de Ritz no era abordar directamente la forma fuerte del problema del valor propio (escrito en la notación de subíndices para derivadas parciales como:  $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yy} = \lambda u$  donde  $(x, y) \in \Omega$ ), sino tratar de aproximar los valores propios utilizando combinaciones lineales de funciones de la forma:

$$w_{mn}(x, y) = u_m(x)u_n(y), \quad (2.10)$$

donde  $u_m(x)$  son las funciones de una barra unidimensional libre,

$$\frac{d^4 u_m}{dx^4} = k_m^4 u_m, \text{ con } \frac{d^2 u_m}{dx^2} = 0, \frac{d^3 u_m}{dx^3} = 0 \text{ en } x = \{1, -1\}. \quad (2.11)$$

Con su intuición física, Ritz esperaba que estas funciones proporcionaran muy buenas aproximaciones a las funciones propias exactas del problema bidimensional de la placa. Las formas explícitas para las funciones  $u_m(x)$  están dadas por [4]:

$$u_m(x) = \begin{cases} \frac{\cosh k_m \cos k_m x + \cos k_m \cosh k_m x}{\sqrt{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m}}, & \tan k_m + \tanh k_m = 0 \text{ } m \text{ par} \\ \frac{\sinh k_m \sin k_m x + \sin k_m \sinh k_m x}{\sqrt{\sinh^2 k_m + \sin^2 k_m}}, & \tan k_m - \tanh k_m = 0 \text{ } m \text{ impar} \end{cases} \quad (2.12)$$

Con este procedimiento Ritz fue capaz de calcular los eigenvalores para una placa cuadrada. En la Fig. 2.1 se muestra un comparativo de los eigenvalores encontrados por Ritz y los derivados por el experimento de Chladni.

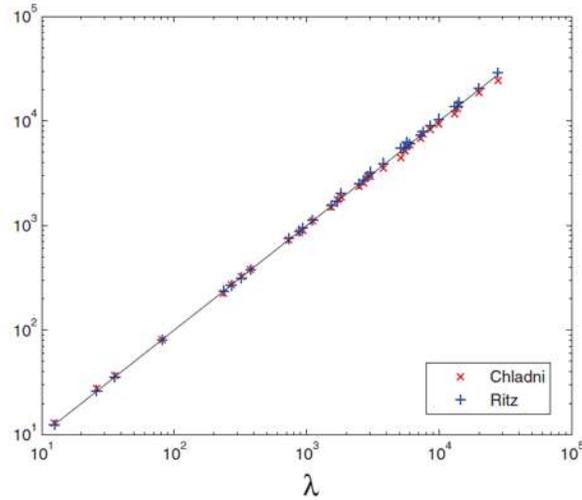


Figura 2.1: Comparativo de los eigenvalores encontrados por Ritz y Chladni para la vibración de una placa cuadrada (tomada de [4]).

### 2.3.2 Solución por el método de diferencias finitas

Con el método de diferencias infinitas (DF) se establece una solución a la ecuación diferencial por medio de una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados. El valor de los puntos seleccionados se convierte en las incógnitas. El sistema de ecuaciones algebraicas debe ser resuelto y puede llevar un número largo de operaciones aritméticas.

La forma fuerte del problema de eigenvalores para la placa cuadrada lleva a las siguientes condiciones [4]:

Para el interior

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = \lambda u \quad (x, y) \in \Omega. \tag{2.13}$$

Para los bordes

$$u_{xx} + \mu u_{yy} = 0, \quad u_{xxx} + (2 - \mu)u_{xyy} = 0, \quad x = \pm L, y \in (-H, H), \tag{2.14}$$

$$u_{yy} + \mu u_{xx} = 0, \quad u_{yyy} + (2 - \mu)u_{xxy} = 0, \quad y = \pm H, x \in (-L, L). \tag{2.15}$$

Para las esquinas

$$u_{xy} = 0 \quad (x, y) = (\pm L, \pm H). \tag{2.16}$$

El hecho de que la EDP, Ec. (2.13), contenga el operador biarmónico  $\Delta^2$  sugiere construir la discretización al componer el operador laplaciano discreto de 5 puntos

$\Delta_h$  consigo mismo. Sin embargo, la discretización de las condiciones de frontera libre, Ecs. (2.14)-(2.16), que son necesarias en la forma fuerte, es menos obvia. En estos casos se puede utilizar un método de volumen finito que se describe a continuación.

Sea  $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$  el dominio que define la placa cuadrada, que se discretiza en una rejilla uniforme  $(N + 1) \times (N + 1)$ , incluyendo nodos en su frontera. Entonces los puntos de la rejilla  $(x_i, y_j)$ ,  $0 \leq i, j \leq N$  satisfacen:

$$x_i = -1 + ih, \quad y_j = -1 + jh, \quad h = 2/N. \quad (2.17)$$

Sea  $u(x, y)$  la solución exacta del problema de valor propio y  $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$  su aproximación por diferencia finita. Primero se define  $w(x, y) = -\Delta u(x, y)$  y su análogo discreto:

$$w_{i,j} = \frac{4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{h^2}. \quad (2.18)$$

Nótese que para definir  $w_{ij}$  a lo largo de un borde, se necesitan valores de  $u_{ij}$  que quedan fuera de  $\Omega$ , es decir, para  $i, j \in \{-1, N + 1\}$ . Estos se denominan puntos fantasmas y no forman parte del problema original que deberán eliminarse utilizando condiciones de contorno antes de que se resuelva el problema de valor propio discreto. Con la definición de  $w(x, y)$ , la forma fuerte de la EDP, Ec. (2.13), se puede interpretar como:

$$\Delta^2 u = \lambda u \Leftrightarrow -\Delta w = \lambda u. \quad (2.19)$$

Para obtener un método de volumen finito, se necesita integrar sobre un volumen de control  $V_{ij}$  alrededor de cada punto de la rejilla construida. La Fig. 2.2 muestra los volúmenes de control para los tres diferentes puntos definidos en el dominio de la placa: puntos interiores, puntos de borde y puntos de esquina.

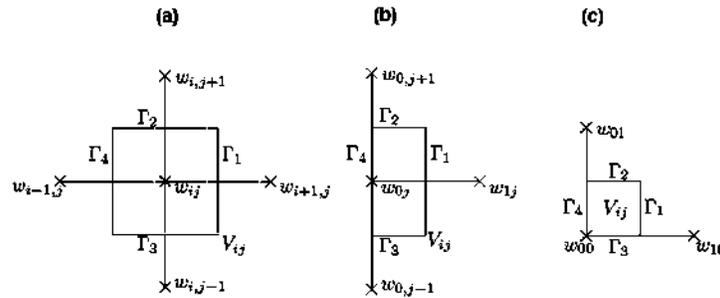


Figura 2.2: Volúmenes de control para los nodos en el dominio de la placa; (a) nodo interior, (b) nodo de borde, (c) nodo de esquina (adaptada de [4]).

Integrando la Ec. (2.19) sobre  $V_{ij}$  se tiene que:

$$-\iint_{V_{ij}} \Delta w \, dx \, dy = \lambda \iint_{V_{ij}} u(x, y) \, dx \, dy, \quad (2.20)$$

a la cual se le puede aplicar el teorema de la divergencia para obtener

$$-\int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial w}{\partial n} \, ds = \lambda \iint_{V_{ij}} u(x, y) \, dx \, dy \approx \begin{cases} h^2 u_{ij} & \text{nodos en el interior,} \\ \frac{1}{2} h^2 u_{ij} & \text{nodos en el borde,} \\ \frac{1}{4} h^2 u_{ij} & \text{nodos en las esquinas.} \end{cases} \quad (2.21)$$

En el último paso de la Ec. (2.21) la aproximación de la integral se ha hecho de acuerdo al esquema de los volúmenes indicados en la Fig. 2.2. Los flujos  $\int \frac{\partial w}{\partial n}$  en el lado izquierdo de la Ec. (2.20) deben ser aproximados de manera diferente para los diferentes tipos de nodos, como se describe enseguida.

Para los nodos interiores, el flujo a lo largo de cada pieza de  $\partial V_{ij}$  se aproxima por una diferencia finita. Así, por ejemplo, a lo largo del contorno  $\Gamma_1$ , mostrado en la Fig. 2.2(a), se tiene que

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n} \, ds \approx h \cdot \frac{w_{i+1,j} - w_{ij}}{h}, \quad (2.22)$$

lo que lleva finalmente a la aproximación de diferencias finitas para los flujos de  $w$  en los nodos interiores:

$$-\int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial w}{\partial n} \, ds \approx 4w_{i,j} - w_{i-1,j} - w_{i+1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1}. \quad (2.23)$$

Para aproximar los flujos asociados a los nodos de borde, con el volumen de control mostrado en la Fig. 2.2(b), se procede de la siguiente manera. Los flujos a lo largo de los contornos  $\Gamma_1, \Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  se aproximan de la misma manera que para los nodos interiores, excepto que hay un factor de  $1/2$  para las contribuciones superior e inferior, ya que la longitud de esos bordes es solo  $h/2$ . Así, se tiene que:

$$-\int_{\partial V_{0j}} \frac{\partial w}{\partial n} \, ds \approx 2w_{0j} - w_{1j} - \frac{1}{2}w_{0,j-1} - \frac{1}{2}w_{0,j+1} - \int_{\Gamma_4} \frac{\partial w}{\partial n} \, ds. \quad (2.24)$$

Para aproximar la integral a lo largo del contorno  $\Gamma_4$ , se hace uso de las condiciones de contorno dada por las Ecs. (2.14) y (2.15). De este modo se llega a que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} \frac{\partial w}{\partial n} \, ds &= \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} + u_{yy}) \, dy = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[ \overbrace{u_{xxx} + (2-\mu)u_{xyy}}^{=0} - (1-\mu)u_{xyy} \right] dy \\ &= -(1-\mu) \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} u_{xyy} \, dy = -(1-\mu) [u_{xy}(x_0, y_{j+1/2}) - u_{xy}(x_0, y_{j-1/2})], \end{aligned} \quad (2.25)$$

en donde las derivadas mixtas  $u_{xy}$  se pueden aproximar por las diferencias finitas:

$$u_{xy}(x_0, y_{j-1/2}) \approx \frac{u_{1,j} - u_{-1,j} - u_{1,j-1} - u_{-1,j-1}}{2h^2}. \quad (2.26)$$

En los nodos de las esquinas, Fig. 2.2(c), el volumen de control tiene dos bordes ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ) en el interior de  $\Omega$  y dos bordes ( $\Gamma_3, \Gamma_4$ ) a lo largo de su frontera  $\partial\Omega$ . Por lo tanto, para esta celda de la esquina, se tendrá que:

$$-\int_{\partial v_{ij}} \frac{\partial w}{\partial n} ds \approx w_{00} - \frac{1}{2}w_{10} - \frac{1}{2}w_{01} - \int_{\Gamma_3} \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_4} \frac{\partial w}{\partial n} ds. \quad (2.27)$$

Para evaluar las integrales a lo largo de  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  se realizan los mismos cálculos que para el caso de borde para obtener, por ejemplo,

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\partial w}{\partial n} ds = -(1 - \mu)[u_{xy}(x_0, y_{1/2}) - u_{xy}(x_0, y_0)]. \quad (2.28)$$

De acuerdo a la condición de contorno en las esquinas, Ec. (2.16),  $u_{xy} = 0$  por lo que el segundo término en el lado derecho de la Ec. (2.28) desaparece. Se tiene algo similar para la integral a lo largo del contorno  $\Gamma_3$ . De esta manera se tendrá finalmente que el flujo en el nodo de contorno estará dado por:

$$-\int_{\partial v_{ij}} \frac{\partial w}{\partial n} ds \approx w_{00} - \frac{1}{2}w_{10} - \frac{1}{2}w_{01} + (1 - \mu)[u_{xy}(x_0, y_{1/2}) - u_{xy}(x_{1/2}, y_0)], \quad (2.29)$$

donde las derivadas mixtas  $u_{xy}$  se discretizan como en la Ec. (2.26).

En los puntos fantasmas, definidos por conveniencia, los valores de  $u_{ij}$  quedan fuera del dominio físico  $\Omega$ , por lo que deben eliminarse antes de resolver el problema del valor propio. Afortunadamente, esto se puede hacer fácilmente usando las condiciones de borde, Ecs. (2.14) y (2.15),

$$u_{xx} + \mu u_{yy} = 0 \quad \text{para } x = \pm 1, \quad u_{yy} + \mu u_{xx} = 0 \quad \text{para } y = \pm 1.$$

Por lo tanto, para un punto fantasma, por ejemplo a lo largo del borde izquierdo  $x = -1$ , se tendrá que

$$u_{-1,j} = 2(1 + \mu)u_{0j} - u_{1j} - \mu u_{0,j-1} - \mu u_{0,j+1}. \quad (2.30)$$

Expresiones similares se obtienen para otros puntos fantasmas alejados de la esquina. Cerca de la esquina, habrá un acoplamiento entre los dos puntos fantasmas unidos a esta, es decir,

$$u_{-1,0} + \mu u_{0,-1} = 2(1 + \mu)u_{00} - u_{10} - \mu u_{01}, \quad (2.31)$$

$$\mu u_{-1,0} + u_{0,-1} = 2(1 + \mu)u_{00} - \mu u_{10} - u_{01}. \quad (2.32)$$

Dado que  $\mu \neq 1$ , se puede resolver el sistema de ecuaciones (2.31) y (2.32) para obtener soluciones para  $u_{-1,0}$  y  $u_{0,-1}$  que dependen solo de  $u_{00}$ ,  $u_{10}$  y  $u_{01}$ .

El procedimiento descrito en esta sub-sección para aplicar el método DF al problema de las vibraciones en la placa cuadrada se puede implementar en un lenguaje de programación como MATLAB.

### 2.3.3 Solución por el método de elementos finitos

El método de los elementos finitos (MEF) fue planteado originalmente por Richard Courant en 1943 en relación a problemas de análisis estructural, basándose en el método propuesto por Ritz en 1909 (aplicado al cálculo de las líneas nodales de las placas vibratorias) y en el método formulado por Galerkin en 1915 [2]. Como se indicó en la sub-sección 2.3.1, Ritz utilizó las funciones (ortogonales) de viga unidimensionales  $u_m(x)$  dadas por la Ec. (2.12). Galerkin, por su parte, propuso el uso de funciones no necesariamente ortogonales, de modo que no se requiere de un principio de minimización, como ocurre en el método de Ritz, para construir un sistema finito de funciones que aproximan la solución real. En el caso de Courant, el propuso el uso de funciones lineales continuas por pedazos (llamadas funciones sombrero).

La idea de Courant se puede entender de la siguiente manera. En dos dimensiones, las funciones sombrero que Courant tenía en mente se definen más fácilmente en una malla triangular, en contraste con el hasta entonces dominante método DF en mallas rectangulares. En la Fig. 2.3 se muestra el primer elemento finito introducido por Courant para el análisis de la rigidez de una placa cuadrada con un agujero cuadrado en su interior. En este problema se trataba de minimizar la funcional:

$$\iint ((\nabla u)^2 + 2u) dx dy \rightarrow \min, \quad (2.33)$$

con  $u = 0$  en el borde exterior y  $u = c$ , una constante desconocida, en el borde interior. Luego comparó los resultados obtenidos para  $c$  y la rigidez total  $S$

$$S = - \iint u dx dy \quad (2.34)$$

con los diferentes tipos de mallado (a), (b), (c) y (d), mostrados en la Fig. 2.3. Los cálculos hechos por Courant arrojaron los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \text{Mallado (a): } S &= 0.344, c = -0.11, \\ \text{Mallado (b): } S &= 0.352, c = -0.11, \\ \text{Mallado (c): } S &= 0.353, c = -0.11, \\ \text{Mallado (d): } S &= 0.353, c = -0.11. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Con estos resultados, Courant concluyó que el método generalizado de redes triangulares tenía grandes ventajas sobre los métodos utilizados en ese entonces, ya que con una selección apropiada del mallado se tenía una buena convergencia en el resultado del cálculo de la rigidez de la placa.

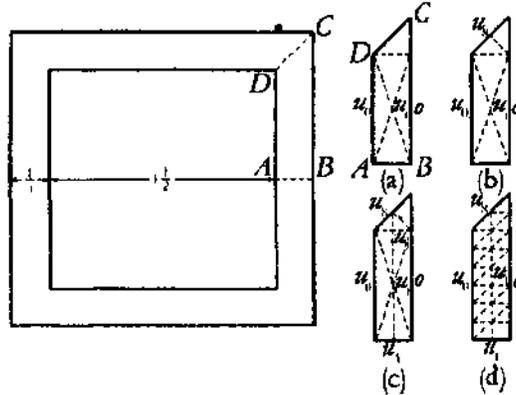


Figura 2.3: El primer elemento finito usado por Courant para el cálculo de la rigidez de una placa cuadrada con un agujero en su interior, utilizando diferentes mallados: (a), (b), (c) y (d) (tomada de [2]).

El método iniciado por Courant fue retomado y extendido por grupos de investigadores que convergieron en el establecimiento de lo que se conoce como el Método del Elemento Finito. La importancia del MEF radica en que es una técnica numérica poderosa que permite resolver sistemas representados por ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que no pueden resolverse analíticamente. Es tanto el uso del MEF en los problemas de ciencia y tecnología, que existen varias compañías que han desarrollado sus propias plataformas de software, como por ejemplo, COMSOL. Una ventaja del software de COMSOL es su interfaz gráfica y la disposición de librerías de modelos en varios campos del conocimiento, los cuáles pueden ser adaptados a las necesidades propias del usuario. Esta plataforma se usará para hacer un comparativo con los resultados experimentales presentados en el capítulo 3.

El análisis por MEF de cualquier problema involucra básicamente tres pasos: a) discretización, b) ecuaciones de elemento y c) ensamblado de las ecuaciones de elemento y solución. En el paso de la discretización la región solución del problema planteado se divide en un número finito de subregiones o elementos, que dependiendo de la geometría de la región pueden ser de diferentes formas: puntos y líneas para problemas unidimensionales; triángulos y cuadriláteros para problemas bidimensionales; tetraedros y hexaedros para problemas tridimensionales. Los elementos forman un acoplamiento sobre el dominio de la solución, aplicándose una formulación conveniente, basada en las EDPs del problema, para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas cuya solución es la solución del problema. En el segundo paso se hace uso de métodos variacionales para formular las ecuaciones discretas para cada elemento, los cuales

buscan una solución aproximada en forma de combinaciones lineales de funciones de prueba. En el tercer paso que involucra el ensamblado de las ecuaciones algebraicas de cada elemento para poder obtener finalmente la solución al problema planteado, se hace un uso extensivo de los métodos del álgebra matricial para lograr este objetivo. Esta es la parte computacionalmente más demandante del análisis por MEF. Una vez obtenida la solución del problema viene una etapa de post-procesamiento de los datos para ser desplegados de acuerdo a los usos particulares que se requieran (gráficas de nivel, gráficas de gradiente, etc.).

En este caso utilizamos Femlab, que corre bajo el entorno de MATLAB, el cual es un solucionador de elementos finitos. El tipo de elementos puede cambiar, la selección predeterminada es un elemento cuadrático. El orden más alto del elemento se puede usar para mejorar la precisión de la solución, pero debe tenerse en cuenta que el costo computacional, es decir, el tiempo de CPU, puede aumentar.

# CAPÍTULO 3

## RESULTADOS EXPERIMENTALES

### 3.1 Introducción

En este capítulo presentamos los resultados experimentales obtenidos con las placas de cartón. Se analizan los casos de geometría simple (placas cuadradas), geometrías no convencionales (placas con cortes rectos y perforaciones circulares), acoplamiento de dos placas cuadradas por un canal de área variable, así como de placas isoespectrales. Los resultados experimentales mostrados en este capítulo fueron presentados en diferentes congresos estatales y nacionales [6]- [11].

### 3.2 Metodología experimental

La utilización del cartón como material para la ejecución de esta investigación fue más que nada por su fácil manejo, bajo costo y peso ligero, al momento de realizar los diferentes cortes y geometrías analizadas. El peso que el cartón ejercía sobre el transductor electro-acústico, es un peso mínimo para que este no se sobre esfuerce.

En la Fig. 3.1 se muestra el arreglo experimental utilizado. La instrumentación usada es de la marca PASCO: **G** es el generador/amplificador (modelo PI-9587C); **V** es el vibrador electro-acústico (modelo SF-9324); **S** es el sensor de sonido (modelo CI-6506B); **I** es la interfaz electrónica para la adquisición de datos (modelo CI-7599). Los datos son procesados con la computadora PC mediante el programa DataStudio de PASCO. La placa de cartón **P** se coloca, por su centro, sobre el vibrador **V**. Para evitar vibraciones de la superficie de la mesa, el vibrador **V** se montó sobre un bloque de material aislante de vibraciones. Las señales acústicas generadas por **G** fueron de perfil armónico, en un rango de frecuencias de 100 Hz a 1300 Hz. La razón de muestreo fue de 5000 muestras/s. Primeramente se obtuvieron los patrones de Chladni espolvoreando sal sobre la placa y variando la frecuencia hasta obtener patrones definidos. Se tomó una fotografía del patrón de Chladni y se registró su espectro de Fourier. El espectro de Fourier se identificó para la frecuencia de resonancia correspondiente que definía la mayor amplitud del pico principal del espectro.

El cartón utilizado para construir las placas con las diferentes geometrías fue del tipo corrugado con el que se fabrican las cajas de almacenamiento de equipo electrónico. Los cortes de las diferentes geometrías se hicieron con un cúter, teniendo cuidado de que los bordes de las estructuras estuvieran libres de rebabas de cartón. En el caso de los orificios circulares se cuidó al máximo la definición de los perfiles curvos.

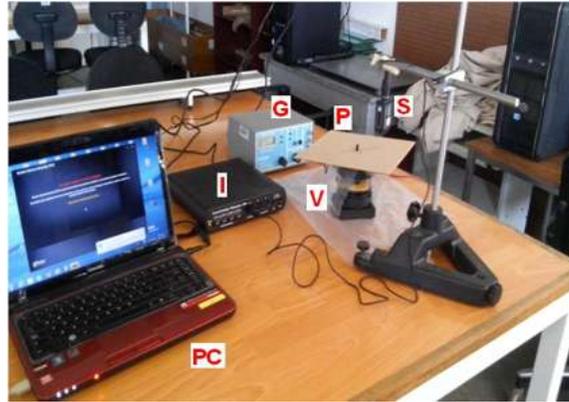


Figura 3.1: Arreglo experimental.

### 3.3 Patrones de Chladni de placas cuadradas

La vibración en placas rectangulares y cuadradas ha sido estudiada ampliamente en la literatura, tanto teóricamente como experimentalmente, usando diferentes tipos de materiales y métodos analíticos [1], [2], [4], [5]. En la Fig. 3.2 se muestran las fotografías de los patrones experimentales de Chladni y los patrones numéricos de Chladni para una placa cuadrada de cartón de 23.5 cm X 23.5 cm y un espesor de 3.8 mm. Los patrones numéricos se obtuvieron con el método DF descrito en la sub-sección 2.3.2, tomando un valor para la razón de Poisson de  $\mu = 0.47$ . Este valor se estimó de lo citado en la ref. [12] y ajustando los patrones numéricos a los experimentales.

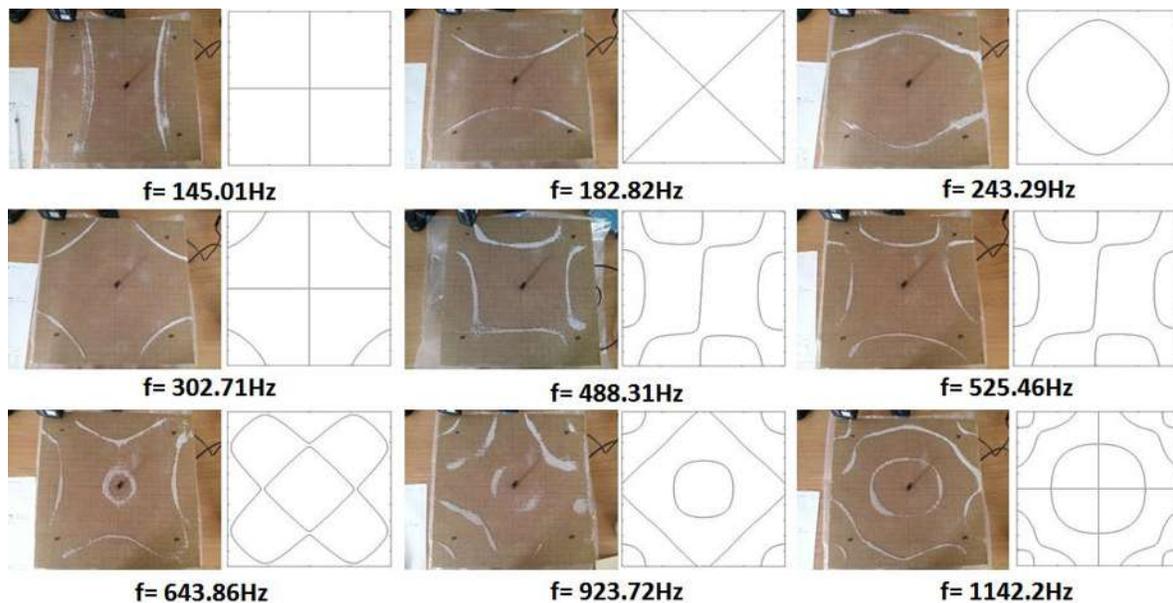


Figura 3.2: Patrones experimentales y numéricos de Chladni de la placa cuadrada de referencia.

### 3.4 Patrones de Chladni de placas con geometrías no convencionales

En esta sección se presentan los resultados para placas cuadradas en donde se han practicado cortes rectos y cortes circulares.

#### 3.4.1 Placas con cortes rectos

En las Figs. 3(a) y 3(b) se muestran las dos geometrías de cortes rectos practicados sobre la placa cuadrada, con el propósito de romper la simetría de la placa. En la Fig. 3.3 (a) se hace un solo corte a lo largo de una de las diagonales de la placa, de tal forma que el pedazo removido sea un triángulo rectángulo isósceles de lado  $a$ . En la Fig. 3(b) se hacen cuatro cortes idénticos a lo largo de las diagonales de la placa para formar una figura parecida a un rehilete, de tal manera que los pedazos removidos sean triángulos rectángulos isósceles de lado  $a$ , pero con orientación diferente a la de la Fig. 3(a). Para propósitos de identificación, designaremos a las geometrías de las Figs. 3(a) y 3(b) como R1 y R2, respectivamente. En ambas figuras se tomaron los parámetros  $S_c$  y  $S_{c1}$ , Fig. 3.4, para medir la distancia que existe entre las líneas nodales.

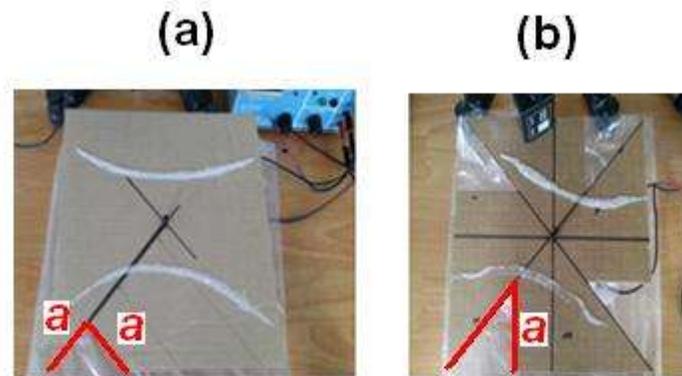


Figura 3.3: Placas cuadradas con cortes rectos; (a) placa R1, (b) placa R2.



Figura 3.4: Parámetros usados para cuantificar el efecto de los cortes.

En las Figs. 3.5-3.8 se muestran las fotografías de los patrones de Chladni y sus respectivos espectros de Fourier para la placa R1. El rango de frecuencia analizado fue de 140 Hz a 1500 Hz. Por cuestiones de espacio y para propósitos de comparación, solo se muestran resultados en ciertos rangos de frecuencia.

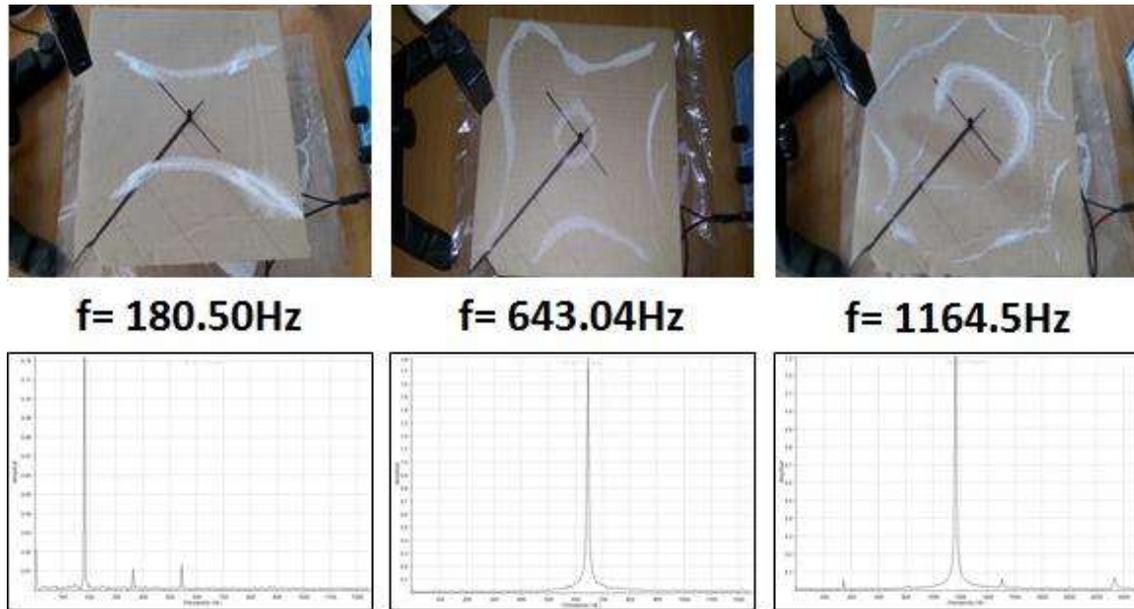


Figura 3.5: Resultados para la placa R1 con  $a = 2.5$  cm.

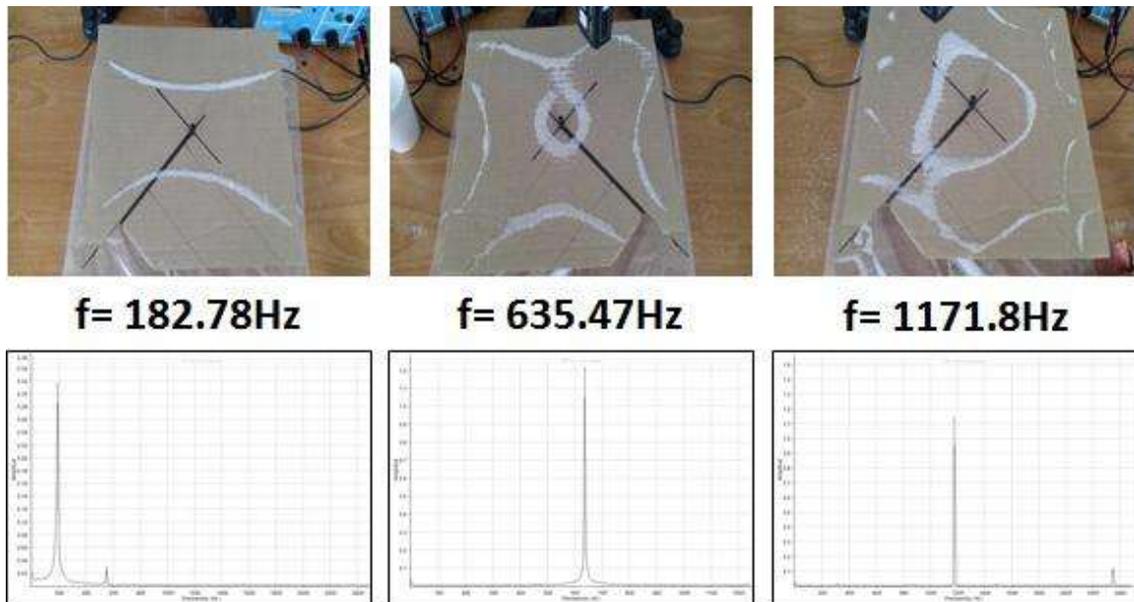


Figura 3.6: Resultados para la placa R1 con  $a = 5$  cm.

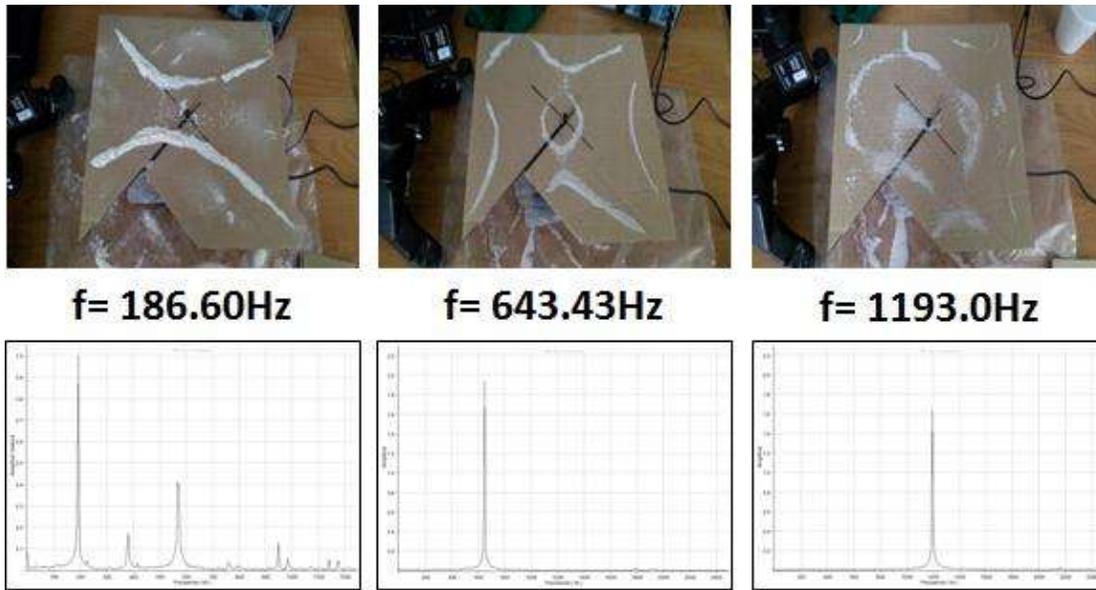


Figura 3.7: Resultados para la placa R1 con  $a = 9$  cm.

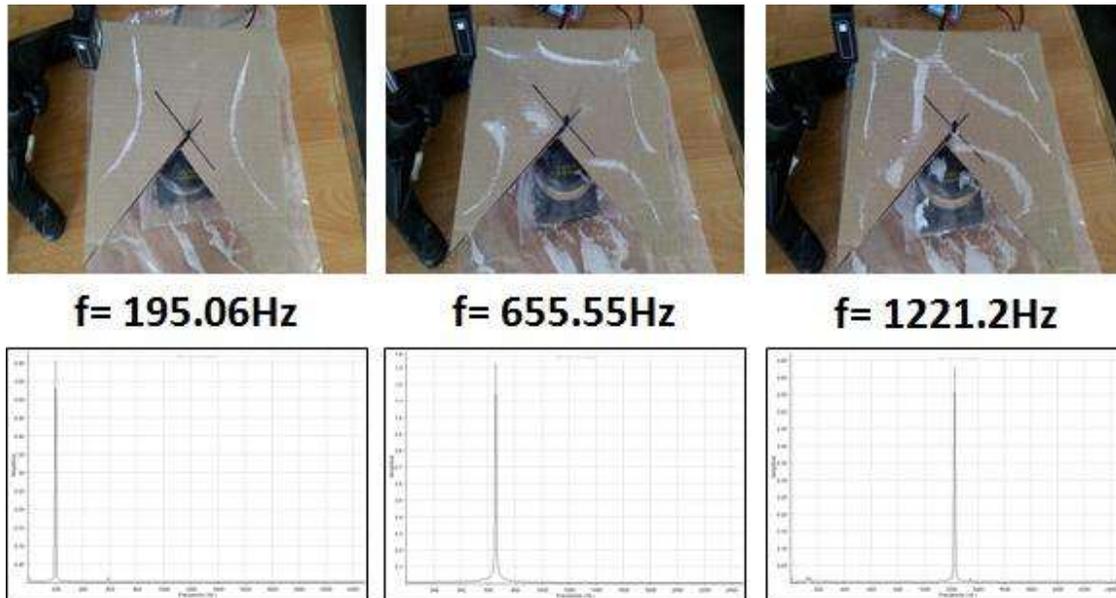


Figura 3.8: Resultados para la placa R1 con  $a = 15$  cm.

Los resultados demuestran que el uso de la técnica de Chladni y el análisis del espectro de Fourier permiten cuantificar el efecto de un corte sobre una placa cuadrada de cartón. Los parámetros de cuantificación del efecto de corte están relacionados con líneas nodales fáciles de identificar en los espectros de vibración de la placa. De las Figs. 3.5-3.8, se puede notar que a frecuencias bajas es posible cuantificar el efecto del corte mediante los parámetros de separación en las líneas

nodales ( $Sc$  y  $Sc1$ , Fig. 3.4). Se observa que cuando se tiene el corte sobre la placa, la rotación de las líneas nodales está relacionada con la aparición de otras frecuencias de resonancia en su espectro de Fourier. A las frecuencias medias se observa que a medida que aumenta el corte sobre la placa, los parámetros de las líneas nodales no están definidos (hay un rompimiento de la cuasi-simetría del patrón de vibración). Nótese que en estas frecuencias el espectro de Fourier no presenta otras frecuencias de resonancia. Por último, a las frecuencias altas. Se observa que a medida que aumenta el corte sobre la placa, la línea nodal central se deforma hasta que desaparece, rompiendo la cuasi-simetría del patrón de vibración. Nótese que en estas frecuencias el espectro de Fourier presenta también otras frecuencias de resonancia [6].

En las Figs. 3.9-3.13 se muestran las fotografías de los patrones de Chladni y sus respectivos espectros de Fourier para la placa R2. El rango de frecuencia analizado fue de 183 Hz a 780 Hz. Por cuestiones de espacio y para propósitos de comparación, se muestran resultados en ciertos rangos de frecuencia. Para frecuencias entre 182 Hz y 186 Hz, se puede notar como el patrón original de líneas nodales (una hipérbola cuasi-simétrica con respecto al punto de sujeción de la placa) experimenta un desplazamiento y rotación a medida que el corte aumenta. De hecho, para el corte con  $a=7.5$  cm, se pueden notar que las dos líneas nodales se rompen y se forman dos pares de trazos rectos rotados y cuasi-perpendiculares entre sí. Para frecuencias entre 302 Hz y 335 Hz, el patrón original de líneas nodales formado por dos pares de hipérbolas cuasi-simétricas es modificado por el primer corte a un par de curvas cuasi-simétricas, para finalmente recobrar la apariencia de un par de hipérbolas cuasi-simétricas rotadas a medida que el corte en la placa aumenta. También se puede notar que para el último corte los brazos de las hipérbolas se hacen rectos. Para frecuencias entre 370 Hz y 419 Hz, el patrón original formado por dos pares de hipérbolas y un cuasi-círculo central, empieza a contraerse y a rotar a medida que el tamaño del corte crece. En el corte de (c)  $a=7.5$  cm el cuasi-círculo ha colapsado y en el último corte los brazos de las hipérbolas son aun más curvos. Para frecuencias entre 643 Hz y 675 Hz, se nota un comportamiento similar a la de la serie anterior, excepto el cuasi-círculo va degenerando en una elipse que crece y terminar por desaparecer a medida que el corte crece. Nótese como en el último corte la elipse desapareció y las líneas nodales remanentes están formadas por curvas y trazos rectos. Para frecuencias entre 711 Hz y 772 Hz, muestra un comportamiento interesante. El cuasi-círculo central que aparece en el patrón original empieza a desaparecer a medida que el corte en la placa aumenta, para dar origen a un par de líneas onduladas que corren a lo largo de la placa y que ocupan la región que tenía el cuasi-círculo central original. Sin embargo, en el último corte este par de líneas onduladas ha desaparecido para dar lugar a dos pares de hipérbolas rotadas a un par de líneas curvas alrededor del centro de la placa que forman un cuasi-círculo cortado por el efecto del corte. Para frecuencias entre 1142 Hz y 1251 Hz, el comportamiento del

patrón es más complicado, ya que la estructura del cartón no permite identificar fácilmente parámetros con los que se pueda cuantificar el efecto del corte.

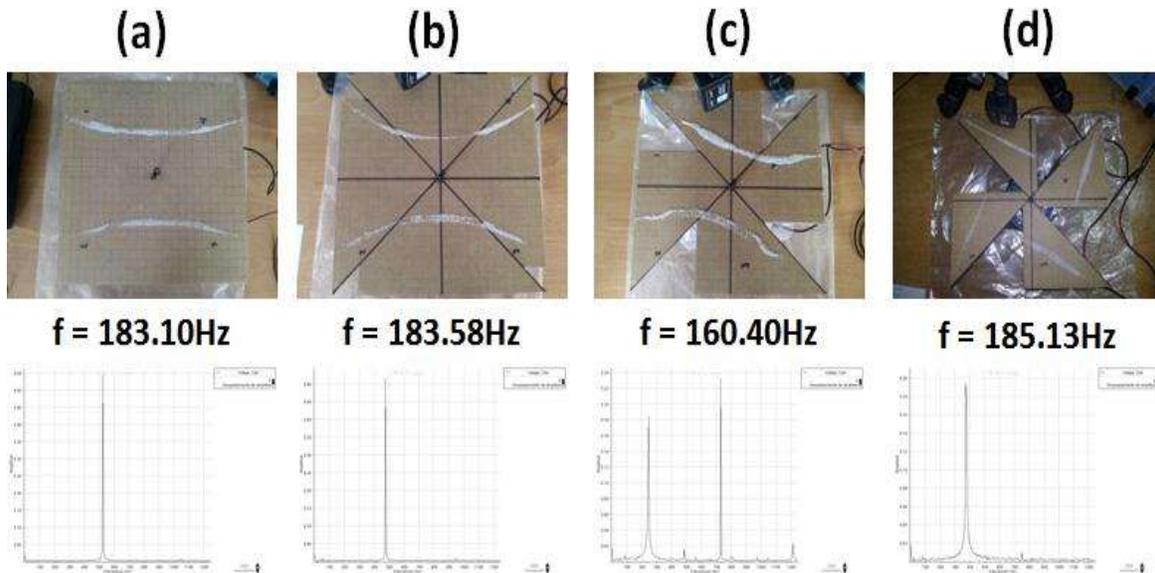


Figura 3.9: Resultados para la placa R2 para frecuencias en el rango de 183 Hz a 186 Hz para (a)  $a=0$  cm (placa de referencia); (b)  $a=2.5$  cm; (c)  $a=7.5$  cm; (d)  $a=10.5$  cm.

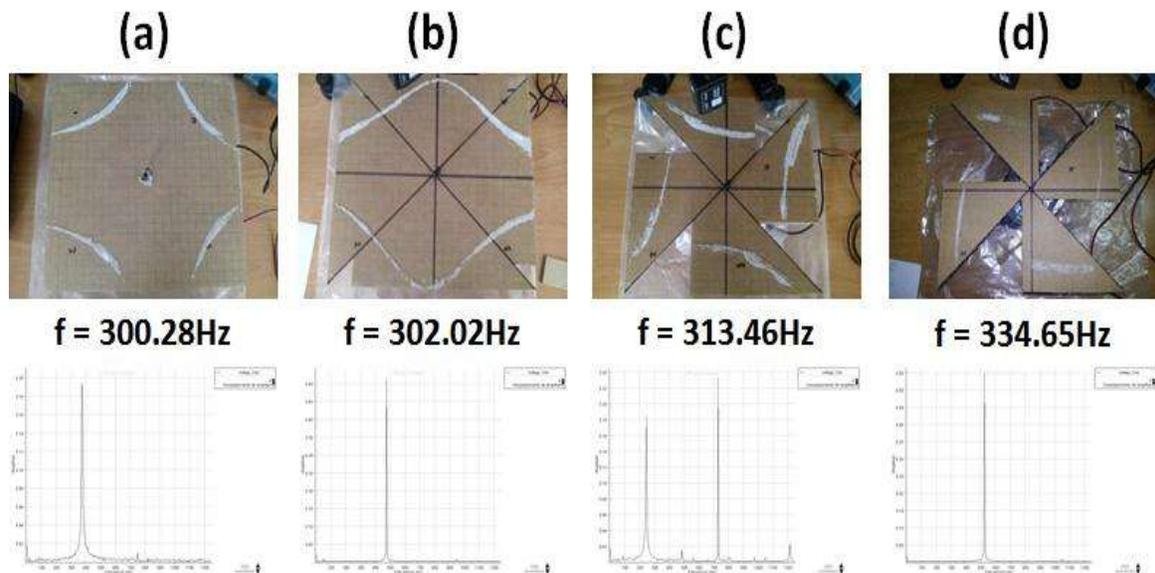


Figura 3.10: Resultados para la placa R2 para frecuencias en el rango de 300 Hz a 335 Hz para (a)  $a=0$  cm (placa de referencia); (b)  $a=2.5$  cm; (c)  $a=7.5$  cm; (d)  $a=10.5$  cm.

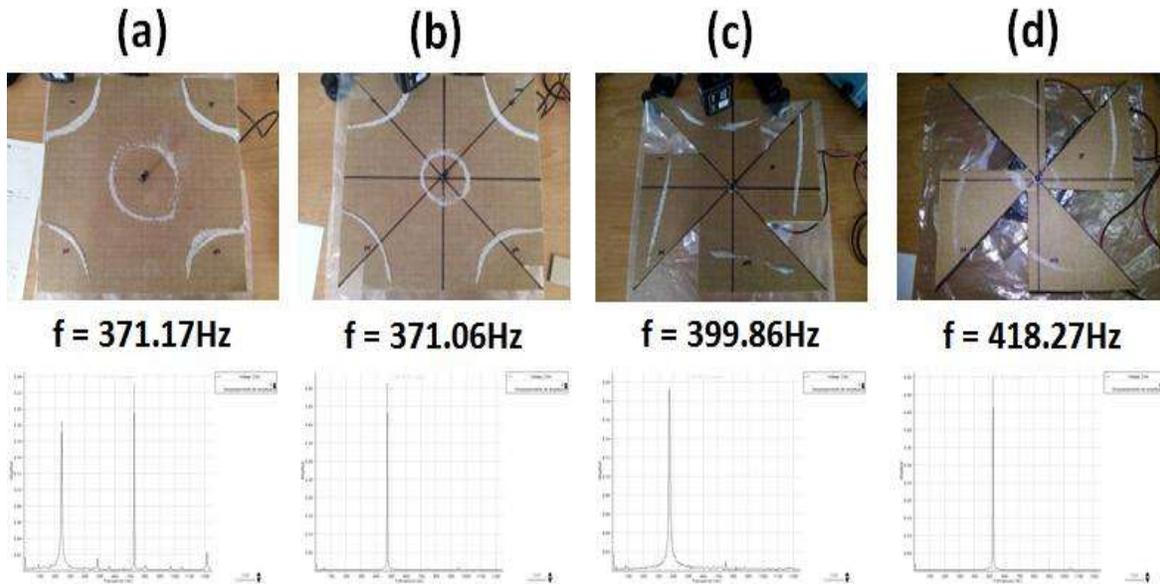


Figura 3.11: Resultados para la placa R2 para frecuencias en el rango de 370 Hz a 419 Hz para (a)  $a=0$  cm (placa de referencia); (b)  $a=2.5$  cm; (c)  $a=7.5$  cm; (d)  $a=10.5$  cm.

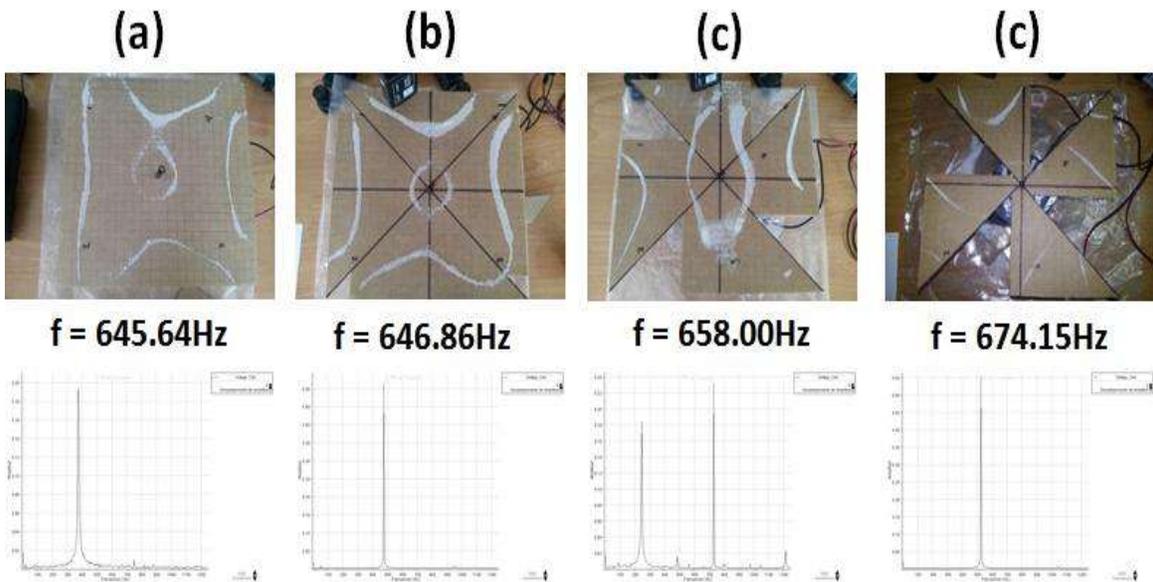


Figura 3.12: Resultados para la placa R2 para frecuencias en el rango de 643 Hz a 675 Hz para (a)  $a=0$  cm (placa de referencia); (b)  $a=2.5$  cm; (c)  $a=7.5$  cm; (d)  $a=10.5$  cm.

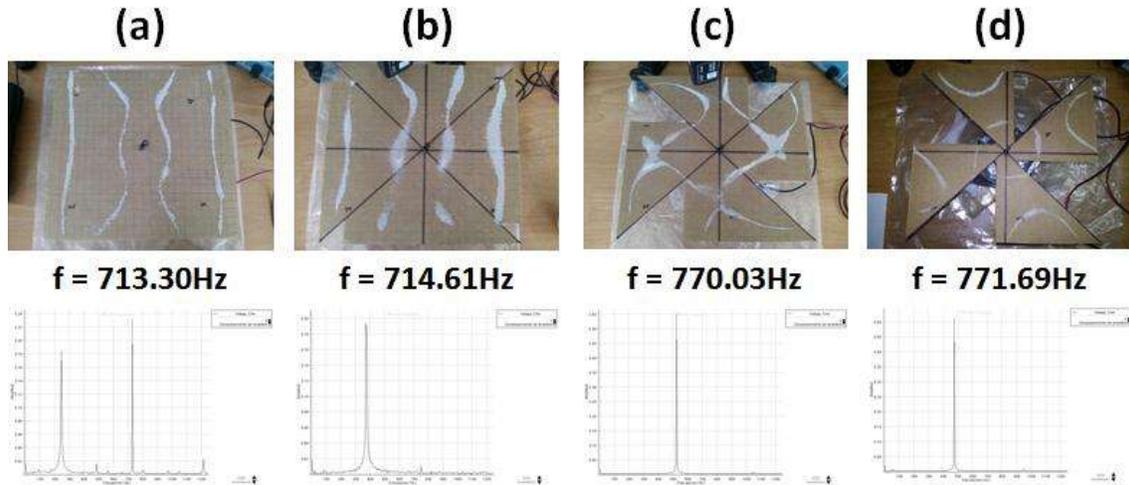


Figura 3.13: Resultados para la placa R2 para frecuencias en el rango de 713 Hz a 772 Hz para (a)  $a=0$  cm (placa de referencia); (b)  $a=2.5$  cm; (c)  $a=7.5$  cm; (d)  $a=10.5$  cm.

La cuantificación del efecto de los cortes sobre la placa se pudo hacer mediante los parámetros  $Sc$  y  $Sc1$  relacionados con las formas de las líneas nodales, Fig. 3.4, que son fáciles de identificar para frecuencias entre 182 Hz y 772 Hz [7]. En la Fig. 3.14 se presenta el comportamiento de estos parámetros para la placa R1. A frecuencias más altas la cuantificación es más difícil y no se hizo.

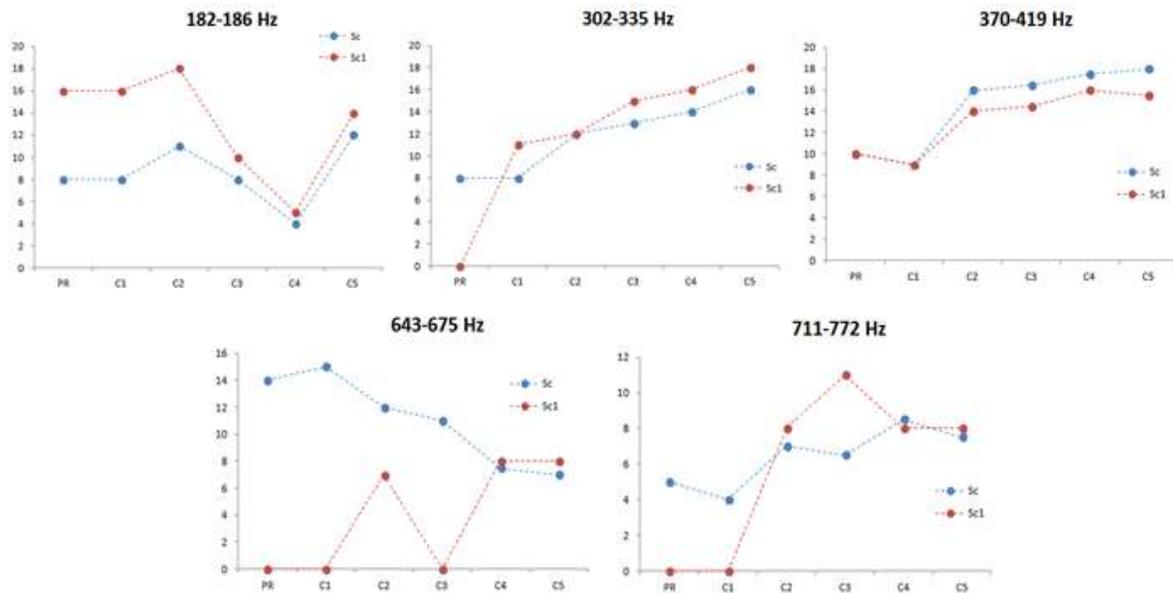


Figura 3.14: Comportamiento de  $Sc$  y  $Sc1$  para placa R1 (escala vertical en cm). En el eje horizontal se identifican las placas analizadas: PR es la placa de referencia ( $a=0$  cm), C1 ( $a=2.5$  cm), C2 ( $a=5.5$  cm), C3 ( $a=7.5$  cm), C4 ( $a=9.5$  cm), C5 ( $a=10.5$  cm).

### 3.4.2 Placas rectangulares con perforaciones circulares

Para estudiar experimentalmente el efecto de perforaciones circulares sobre placas cuadradas, se utilizaron cinco placas de cartón del mismo material, de dimensiones 23.5 cm X 23.5 cm y un espesor de 3.8 mm [8]. Una placa se tomó como referencia (PR). En las otras placas, que se designan como C1, C2, C3 y C4, se hicieron cortes circulares centrados a cuatro distintas distancias radiales  $d$  del centro de la placa y a lo largo de la diagonal que va del centro a una esquina de la placa, Fig. 3.15. Las distancias  $d$  se tomaron a 3 cm, 6 cm, 9 cm y 12 cm, respectivamente. En todas las placas se hicieron perforaciones circulares de radio  $r$ , Fig. 3.15. Los radios  $r$  de las perforaciones circulares fueron de 0.6 cm, 1.4 cm, 2 cm y 2.6 cm, a las distancias  $d$  antes mencionadas. Se analizaron los patrones en un rango de frecuencias de 140 Hz a 1400 Hz.

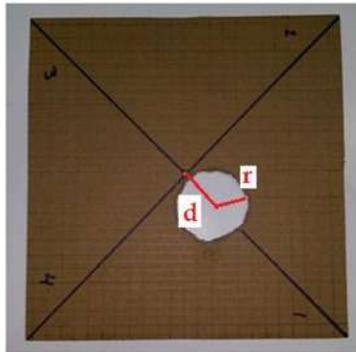


Figura 3.15: Placa cuadrada con perforación circular a una distancia radial  $d$  de su centro y de radio  $r$ .

En la Fig. 3.16 se muestran los resultados obtenidos para las perforaciones circulares sobre las cuatro placas cuadradas C1-C4. El renglón C1 mostrado en la Fig. 3.16 corresponden a los patrones obtenidos en la placa C1 ( $r=0.6$  cm,  $d=3$  cm), C2 corresponden a los patrones obtenidos en la placa C2 ( $r=0.6$  cm,  $d=6$  cm), C3 corresponden a los patrones obtenidos en la placa C3 ( $r=0.6$  cm,  $d=9$  cm), C4 corresponden a los patrones obtenidos en la placa C4 ( $r=0.6$  cm,  $d=12$  cm). En la Fig. 3.17 se presentan resultados similares para la máxima perforación circular ( $r=2.6$  cm). Para propósitos de comparación se omiten los espectros de Fourier.

Para frecuencias entre 100 Hz y 300 Hz, se puede notar como el patrón original de líneas nodales (una hipérbola cuasi-simétrica con respecto al punto de sujeción de la placa) experimenta una mayor curvatura en la línea nodal cercana a la ubicación de la perforación radial. Para frecuencias alrededor de los 350 Hz, el patrón original de líneas nodales formado por dos pares de hipérbolas cuasi-simétricas sufre modificaciones. El efecto de la perforación es romper la simetría ya que la rama de las hipérbolas que está cercana al orificio circular experimenta una distorsión notable. Para frecuencias alrededor de los 475 Hz, la línea nodal central, que es cerrada en la placa de referencia, experimenta una distorsión a medida que aumenta el tamaño de la perforación y su posición con respecto al centro de la placa; de hecho en el caso en que la perforación es mayor, la línea nodal central se

fusiona con las líneas nodales de los extremos. Para frecuencias entre 900 Hz y 1500 Hz, el comportamiento del patrón es más complicado. Alrededor de los 900 Hz y para perforaciones radiales pequeñas las líneas nodales cerca de la región en donde se localiza sufren una ligera distorsión, excepto en casos en donde la perforación coincide con la línea nodal original de la placa de referencia. Sin embargo, para perforaciones radiales mayores las líneas nodales experimentan una fusión entre ellas cambiando drásticamente la forma del patrón de Chladni (Fig. 3.17). Para frecuencias alrededor de los 1300 Hz, el patrón original de Chladni experimenta un ligero cambio, salvo en los casos en que la perforación coincida con alguna de las líneas nodales del patrón original. Pero cuando el tamaño de la perforación aumenta, el cambio del patrón original es evidente; de hecho cuando la perforación radial está más alejada del centro de la placa, surgen líneas nodales cerca de la región de la perforación (véanse las fotografías para la placa C4 de la Fig. 3.17).



Figura 3.16: Resultados para perforaciones con  $r=0.6$  cm y a diferentes distancias radiales  $d$ ; C1 ( $d=3$  cm), C2 ( $d=6$  cm), C3 ( $d=9$  cm) y C4 ( $d=12$  cm).

Los resultados experimentales demuestran que el uso de la técnica de Chladni permite cuantificar el efecto de las perforaciones circulares sobre la placa cuadrada de cartón, a pesar de ser un material rugoso. En la Fig. 3.18 se muestra la cuantificación del efecto del corte circular en las placas de las Figs. 3.16 y 3.17. El parámetro  $S_c$  se midió desde el centro de la placa a las líneas nodales, similar a como se hizo en la Fig. 3.4. Estos cambios fueron fáciles de identificar para

frecuencias entre 150 Hz y 550 Hz [8]. A frecuencias más altas, dada la naturaleza del cartón, la cuantificación es más difícil y no se hizo.



Figura 3.17: Resultados para perforaciones con  $r=2.6$  cm y a diferentes distancias radiales  $d$ ; C1 ( $d=3$  cm), C2 ( $d=6$  cm), C3 ( $d=9$  cm) y C4 ( $d=12$  cm).

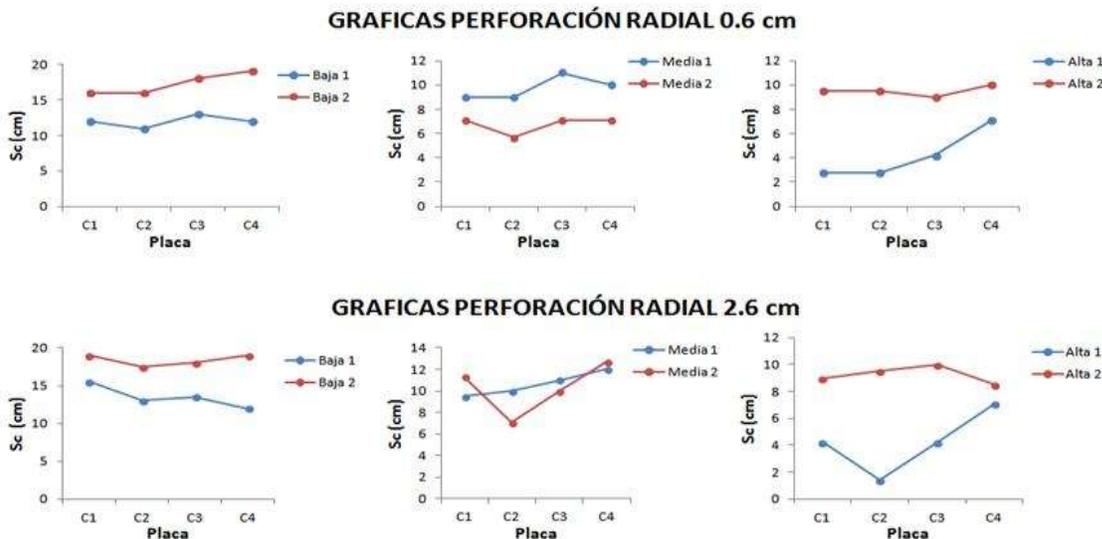


Figura 3.18: Comportamiento del parámetro  $Sc$  para las perforaciones radiales de 0.6 cm y 2.6 cm, en los rangos de frecuencia: Baja 1 (140-230 Hz), Baja 2 (240-340 Hz), Media 1 (350-450 Hz), Media 2 (470-910 Hz), Alta 1 (920-1150 Hz) y Alta 2 (1200-1420 Hz).

### 3.5 Patrones de Chladni de dos placas cuadradas acopladas por un canal de área variable

En esta sección se presentan los resultados para estructuras en forma de H, que se pueden entender como dos placas cuadradas conectadas por una canal de área variable: rectangular [10] y trapezoidal [11].

#### 3.5.1 Acoplamiento por un canal rectangular

En la Fig. 3.19 se muestra la geometría para el caso del acoplamiento por el canal rectangular. Las dimensiones de las placas fueron de 15 cm X 15 cm, y el rango de frecuencias fue de 200 Hz a 750 Hz. El largo del canal,  $L$ , permaneció fijo a 5 cm, en tanto que su anchura  $A$  fue variable, de 7 a 1 cm. La estructura fue pivotada por el centro de su parte izquierda al vibrador y soportada por una barra delgada de acero por debajo del centro de su parte derecha.

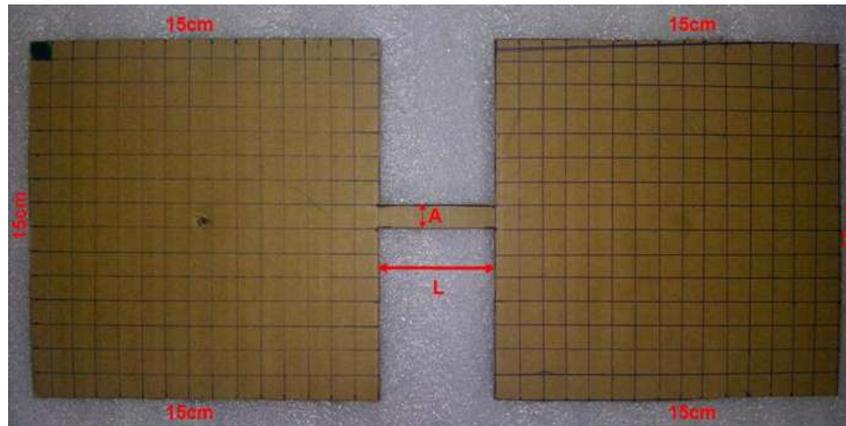


Figura 3.19: Estructura en forma de H;  $L$  es el largo del canal (5 cm, fijo) y  $A$  su anchura variable.

Las Figs. 3.20-3.23 muestran los resultados experimentales para los patrones de Chladni con sus respectivos espectros de Fourier, para diferentes valores de la anchura del canal. Estas figuras permiten visualizar y cuantificar el efecto de la anchura del canal sobre las propiedades vibratorias de la estructura de cartón. En particular, se puede observar que a frecuencias del orden de 240 Hz los espectros de Fourier muestran resonancias adicionales mayores a la frecuencia a la que operó el vibrador. Es muy probable que estas frecuencias hayan sido generadas por resonancias del elemento de soporte de la parte no pivotada de la estructura.

En cuanto a la cuantificación del efecto de la anchura del canal sobre la estructura puede entenderse, por una parte, al analizar las amplitudes de los espectros de Fourier, y, por otra parte, inspeccionando visualmente los patrones de Chladni; los patrones en la placa derecha, en la mayoría de los casos, no es similar a la de la placa de la izquierda [10].

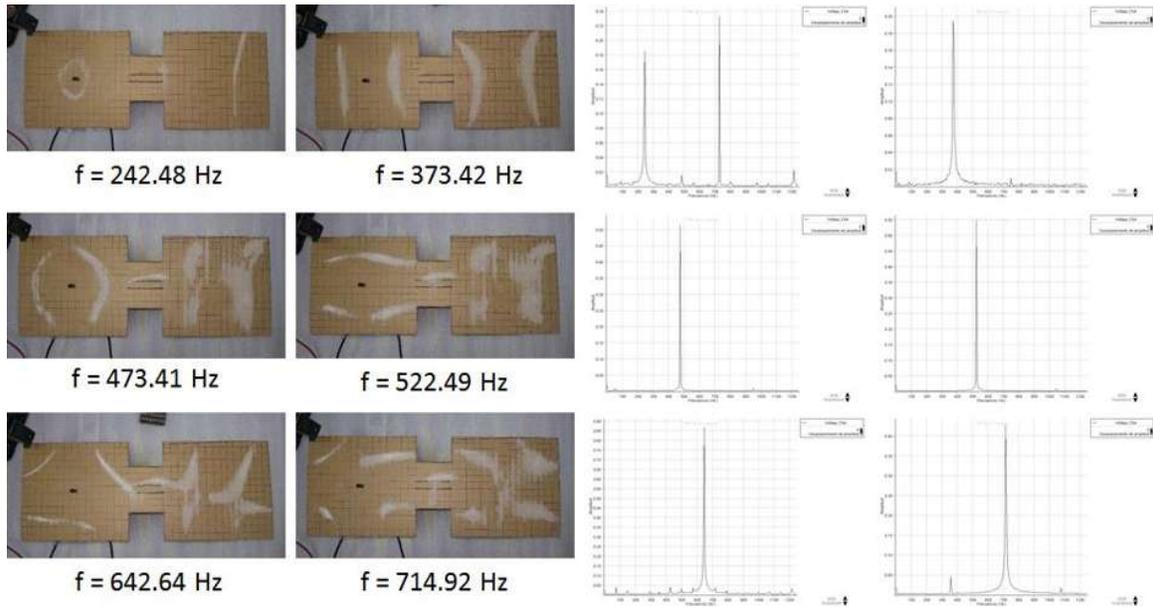


Figura 3.20: Patrones de Chladni encontrados para  $A=7$  cm, empataados con sus respectivos espectros de Fourier.

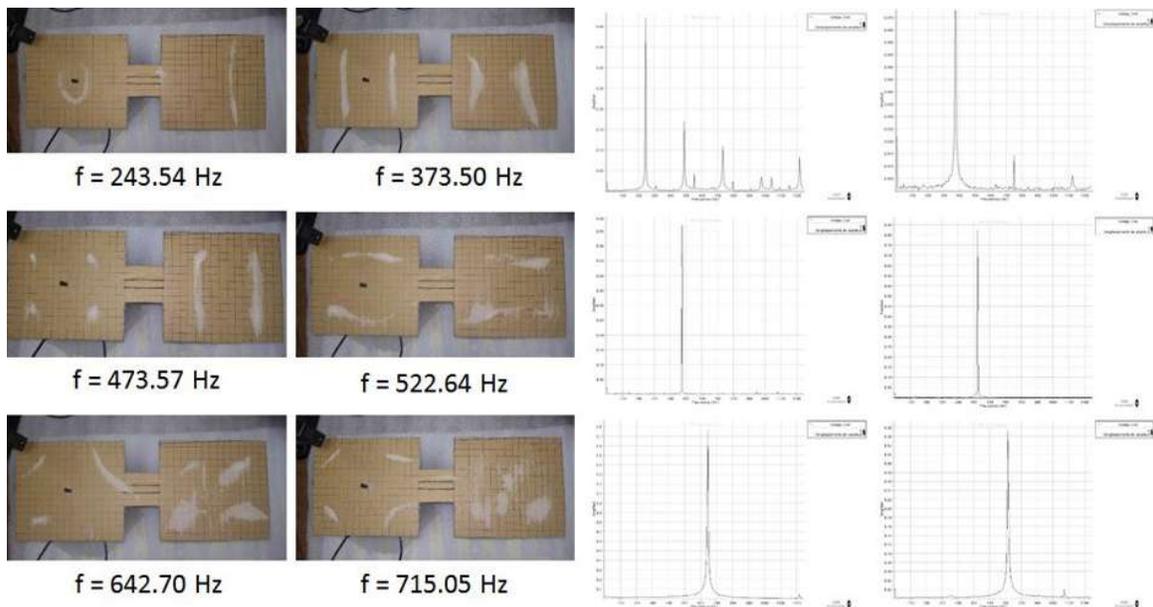


Figura 3.21: Patrones de Chladni encontrados para  $A=5$  cm, empataados con sus respectivos espectros de Fourier.

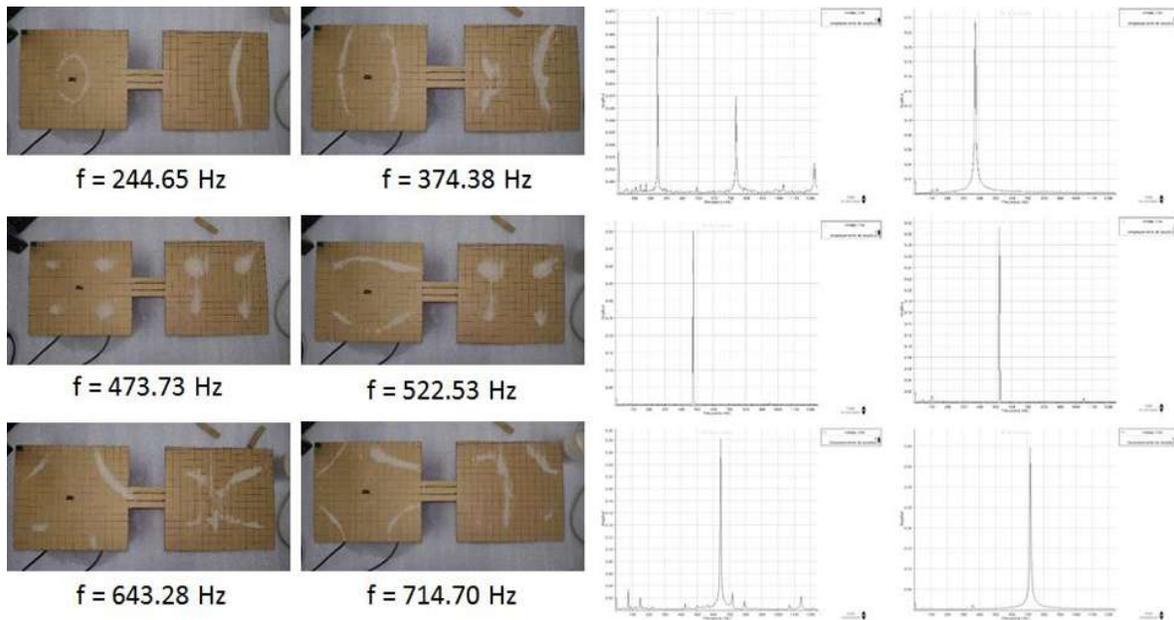


Figura 3.22: Patrones de Chladni encontrados para  $A=3$  cm, empatados con sus respectivos espectros de Fourier.

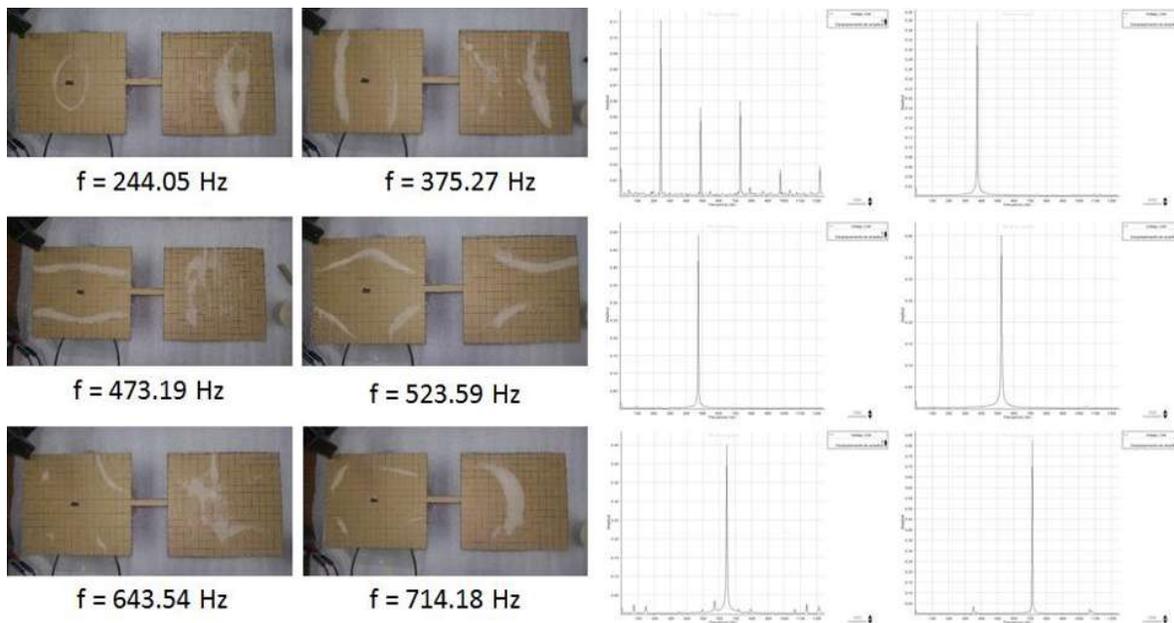


Figura 3.23: Patrones de Chladni encontrados para  $A=1$  cm, empatados con sus respectivos espectros de Fourier.

### 3.5.2. Acoplamiento por un canal trapezoidal

En el caso de la estructura del canal rectangular se tiene una simetría tanto en el eje horizontal como vertical. Para romper la simetría en uno de los ejes (en este caso en el eje vertical), se consideró la estructura de canal trapezoidal mostrada en la Fig. 3.24. Las dimensiones de las placas fueron de 15 cm X 15 cm, la longitud  $L$  del canal permaneció fija a 5 cm, en tanto que sus bases mayor y menor,  $B$  y  $b$ , respectivamente, fueron variables. El rango de frecuencias analizado fue de 200 Hz a 600 Hz. La estructura de la Fig. 3.24 se pivotó de dos maneras distintas. Cuando el pivote fijado al vibrador está en el centro de la placa adyacente a la base menor del canal ( $b$ ) se hablará del caso 1 y cuando el pivote se fija en la placa adyacente a la base mayor ( $B$ ) del canal se hablará del caso 2.

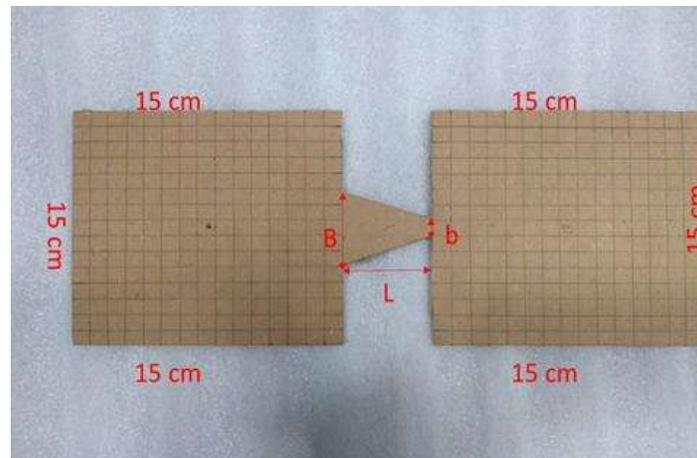


Figura 3.24: Placa analizada donde  $L$  es la longitud del canal (fija, 5 cm),  $B$  y  $b$  son las bases variables.

Las Figs. 3.25-3.30 muestran los resultados experimentales para algunos valores de  $B$  y  $b$  (3 y 1 cm, 5 y 3 cm, 7 y 5 cm), alrededor de ciertas frecuencias de resonancia para diferentes rangos. Para propósitos de comparación se muestran los resultados para los casos 1 y 2 mencionados arriba. Al comparar las diferentes figuras es claro el efecto de la geometría del canal de acoplamiento en los patrones de Chladni de la estructura [11]: a) coexistencia de patrones de Chladni diferentes en ambas placas, y b) coexistencia de patrones de Chladni similares en ambas placas. Esta misma conclusión se tiene en el caso del canal rectangular analizado en la sub-sección anterior. A frecuencias bajas se encontró que los espectros de Fourier presentan resonancias adicionales a los que tiene una sola de las placas que conforman la estructura. Sin embargo, es de notarse la diferencia con las frecuencias de resonancia adicionales que se presentaron en el caso del canal rectangular.

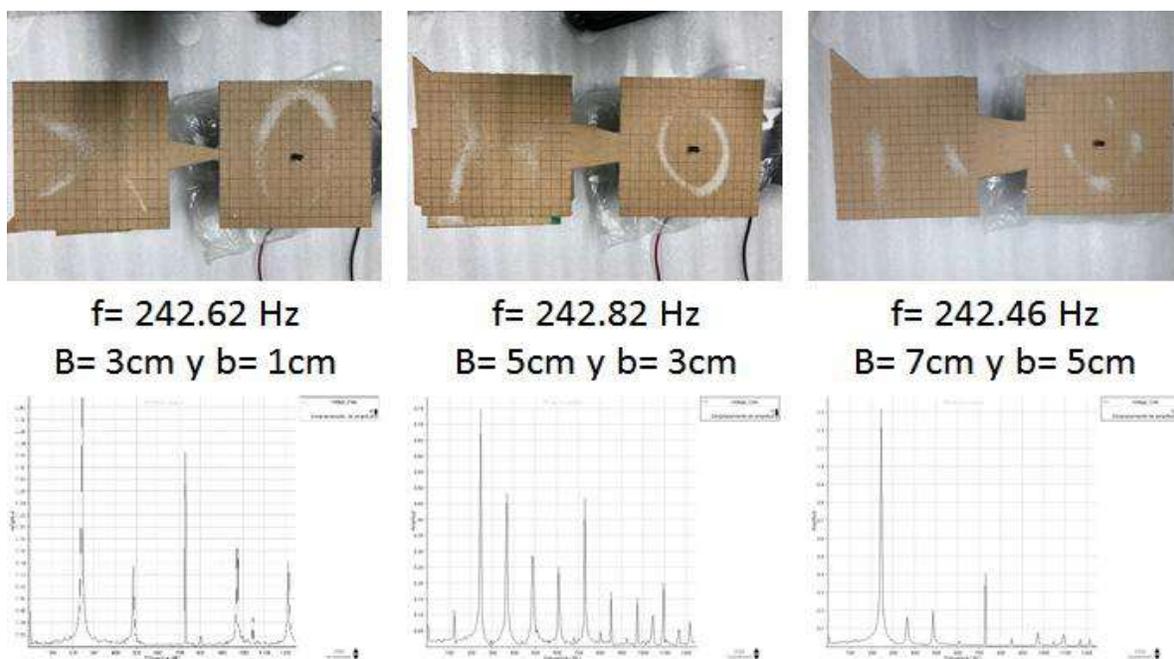


Figura 3.25: Resultados experimentales para el caso 1.

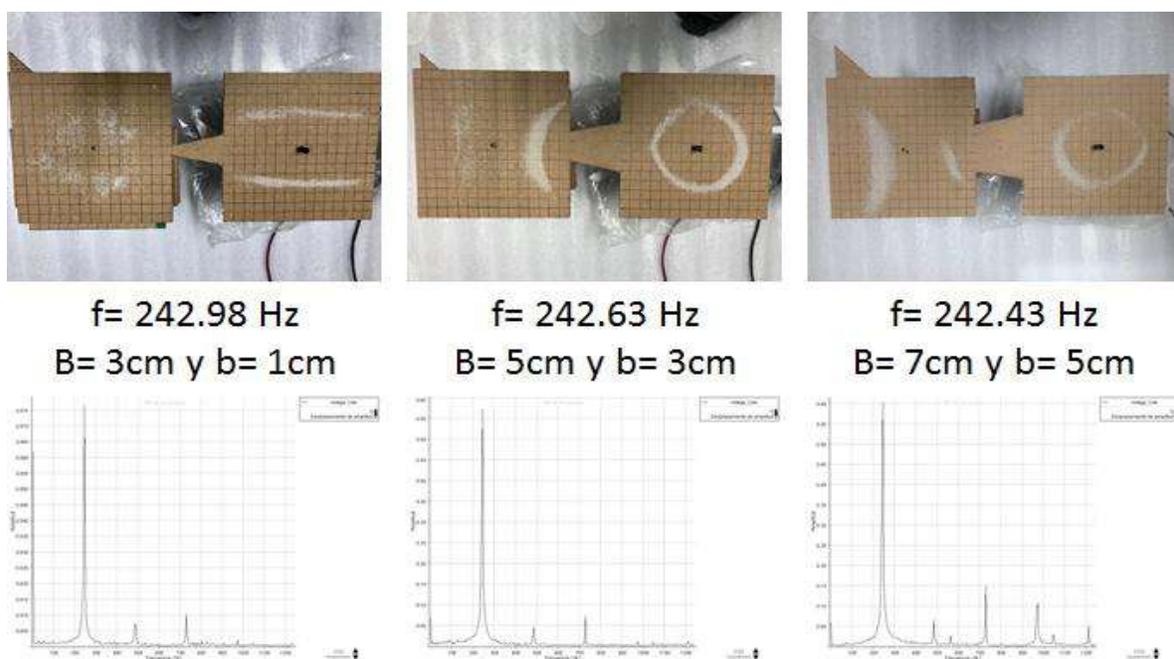


Figura 3.26: Resultados experimentales para el caso 2.

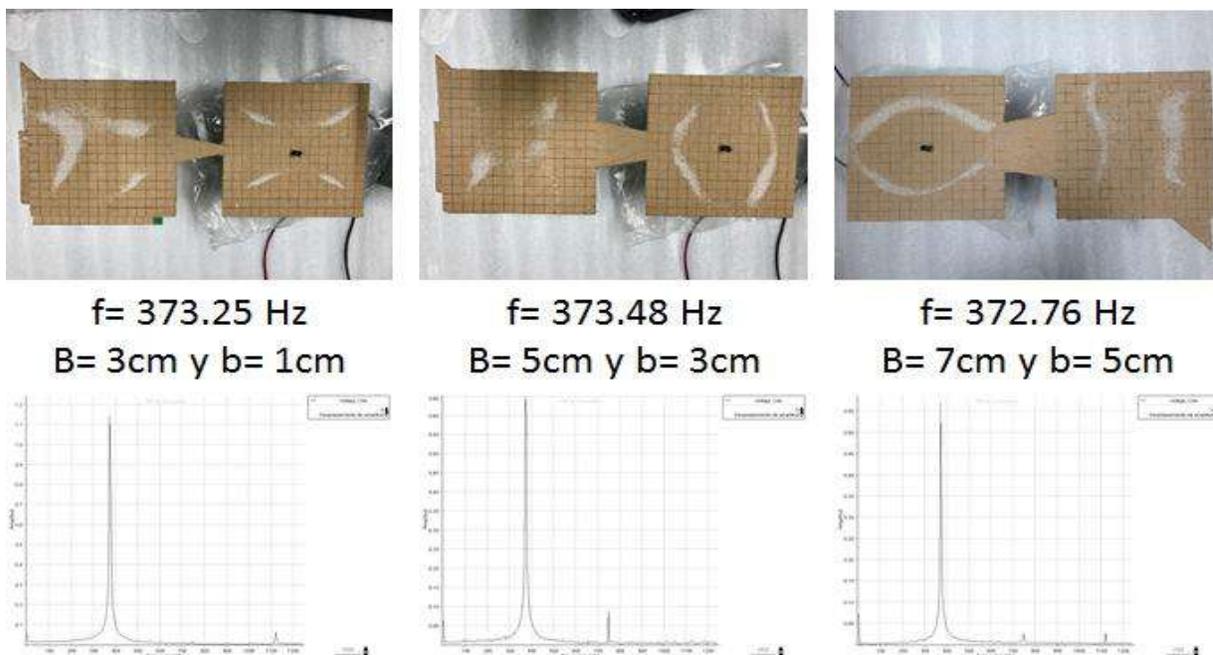


Figura 3.27: Resultados experimentales para el caso 1.

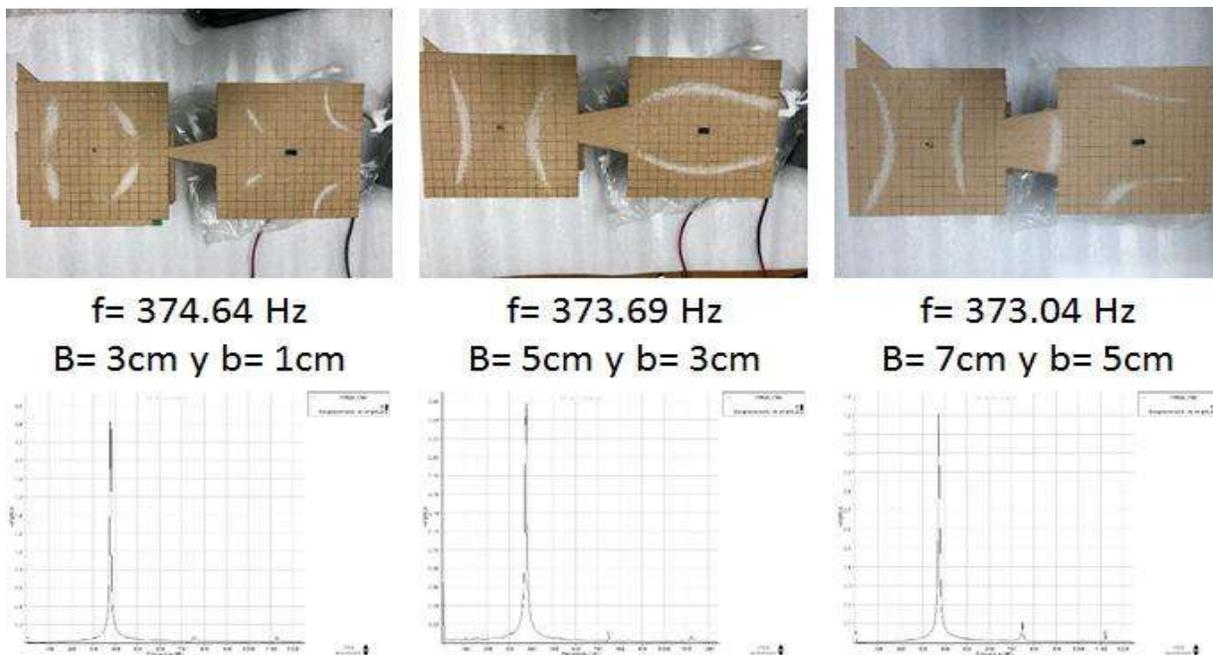


Figura 3.28: Resultados experimentales para el caso 2.

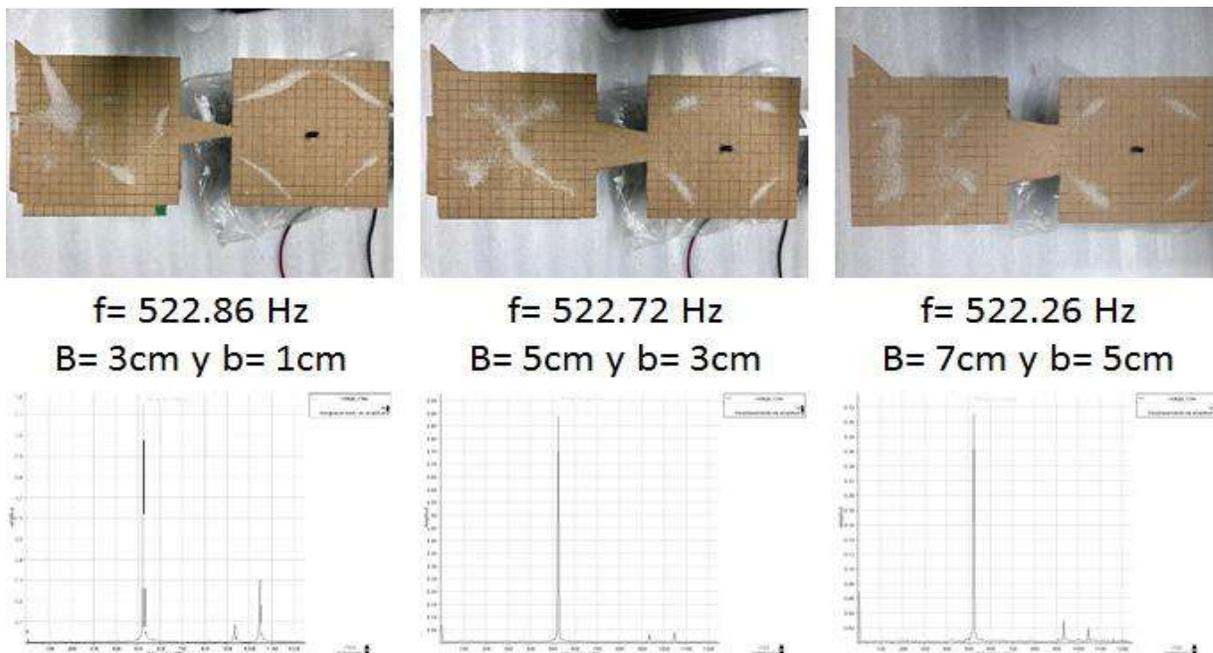


Figura 3.29: Resultados experimentales para el caso 1.

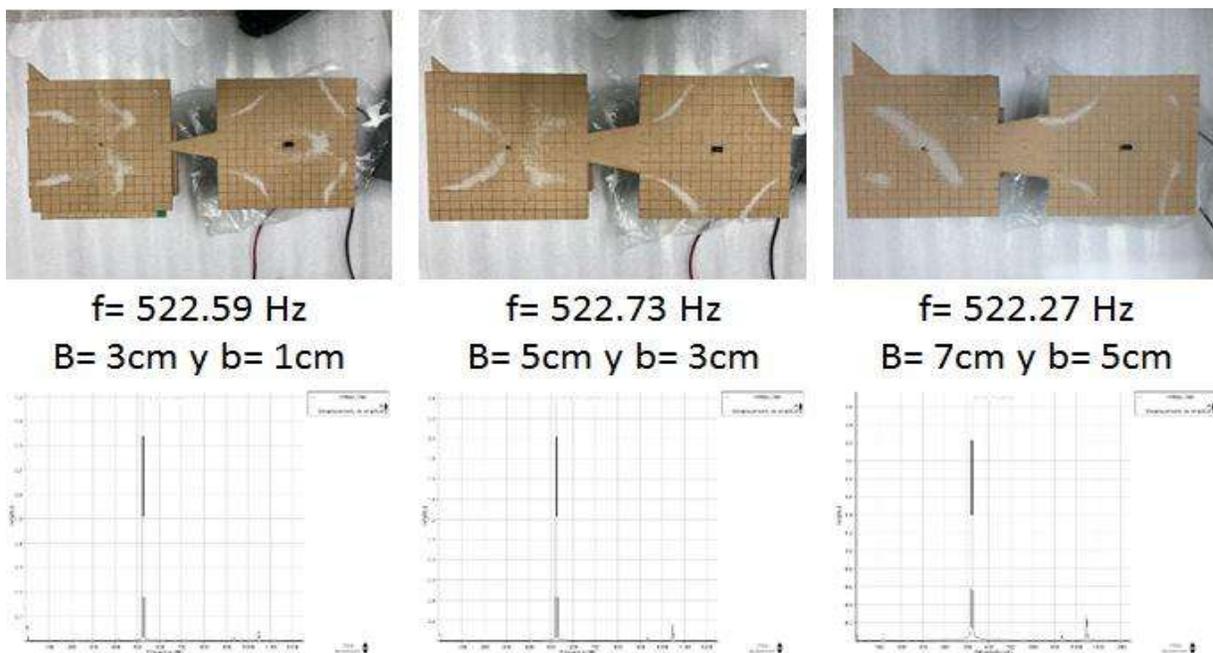


Figura 3.30: Resultados experimentales para el caso 2.

### 3.6 Patrones de Chladni de dos placas isoespectrales

En 1966 Marc Kac planteó la siguiente pregunta [13]: ¿puede uno escuchar la forma de un tambor? Cuando se golpea la membrana de un tambor se excitan ciertas frecuencias que conforman el sonido propio del instrumento. Si se pudieran encontrar dos membranas de diferente forma pero con igual espectro (formas isoespectrales) se respondería negativamente al planteamiento de Kac. Tuvieron que pasar casi tres décadas para que se pudiera contestar a esta interesante cuestión. En 1992, Gordon, Webb y Wolpert mostraron la existencia de diferentes formas planas que son isoespectrales [14]. En esta sección se estudian los patrones de dos placas construidas con las formas isoespectrales reportadas por Driscoll [15]. En la Fig. 3.31 se muestra las fotografías de las dos placas isoespectrales consideradas construidas con cartón, siguiendo el diseño de Driscoll. Nótese como el área total de ambas placas es la misma. Se obtuvieron los patrones de Chladni y los espectros de Fourier en el rango de frecuencias fue de 100 Hz a 1000 Hz.

En las Figs. 3.32-3.37 se muestran los resultados experimentales obtenidos para las placas I1 e I2 en tres rangos de frecuencias: bajas (100 Hz a 310 Hz), medias (350 Hz a 550 Hz) y altas (600 Hz a 1000 Hz) [9]. Evidentemente se puede entender que isoespectralidad no significa que los patrones de Chladni sean idénticos. Por ejemplo, esto es bien notorio en los patrones en el rango de frecuencias medias. Esto es una consecuencia de las geometrías de las placas. Con respecto a las frecuencias de resonancia medidas, teniendo en cuenta que la incertidumbre en la medición de las frecuencias es del orden de los 5 Hz, se puede decir que las frecuencias de resonancia son similares en ambas placas isoespectrales.

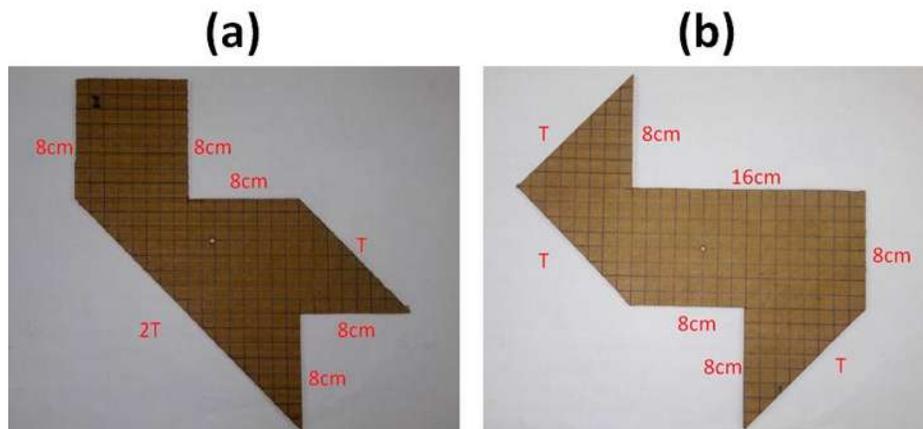


Figura 3.31: Placas isoespectrales analizadas; (a) Placa I1, (b) Placa I2.  $T = 8\sqrt{2} \approx 11.3$  cm.

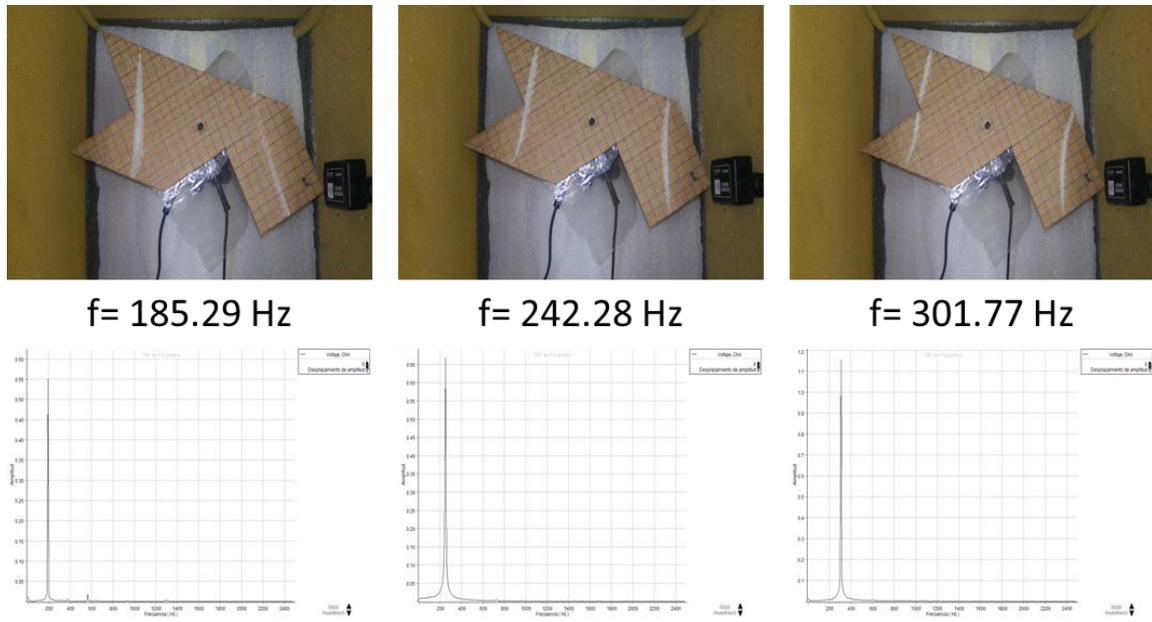


Figura 3.32: Resultados para la placa I1 en el rango de frecuencias bajas.

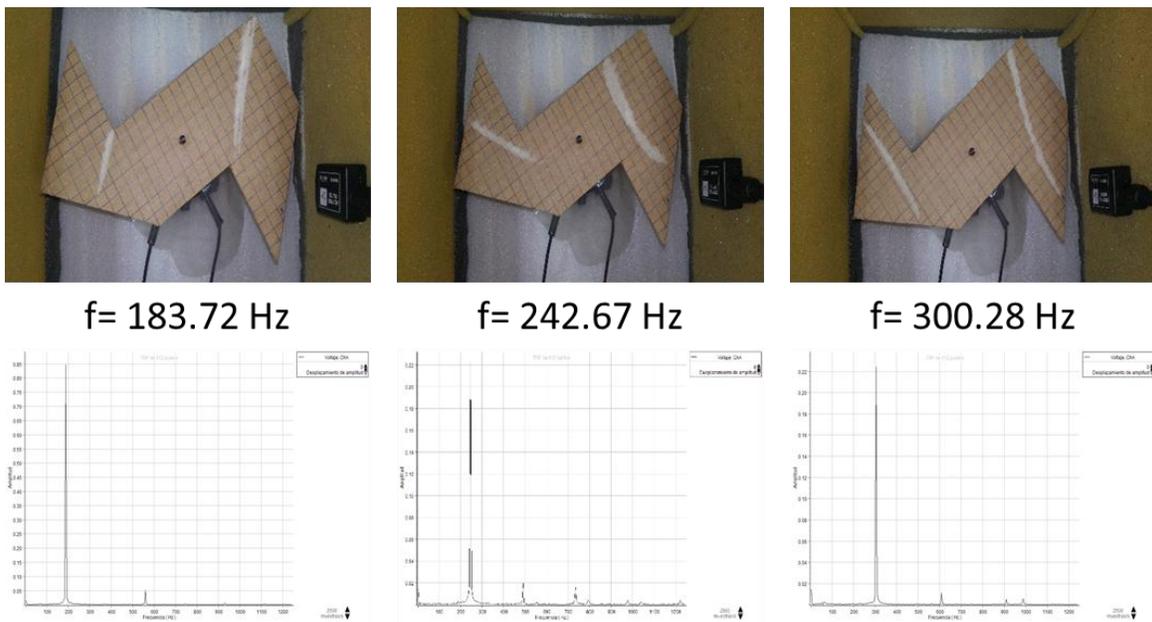


Figura 3.33: Resultados para la placa I2 en el rango de frecuencias bajas.

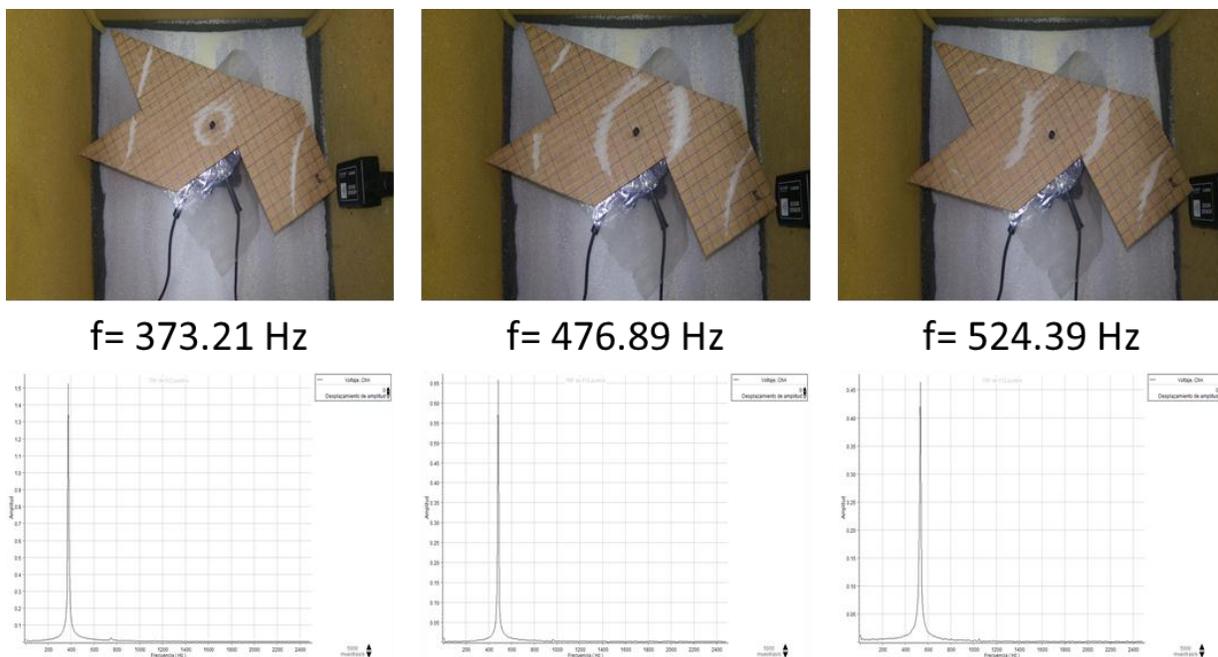


Figura 3.34: Resultados para la placa I1 en el rango de frecuencias medias.

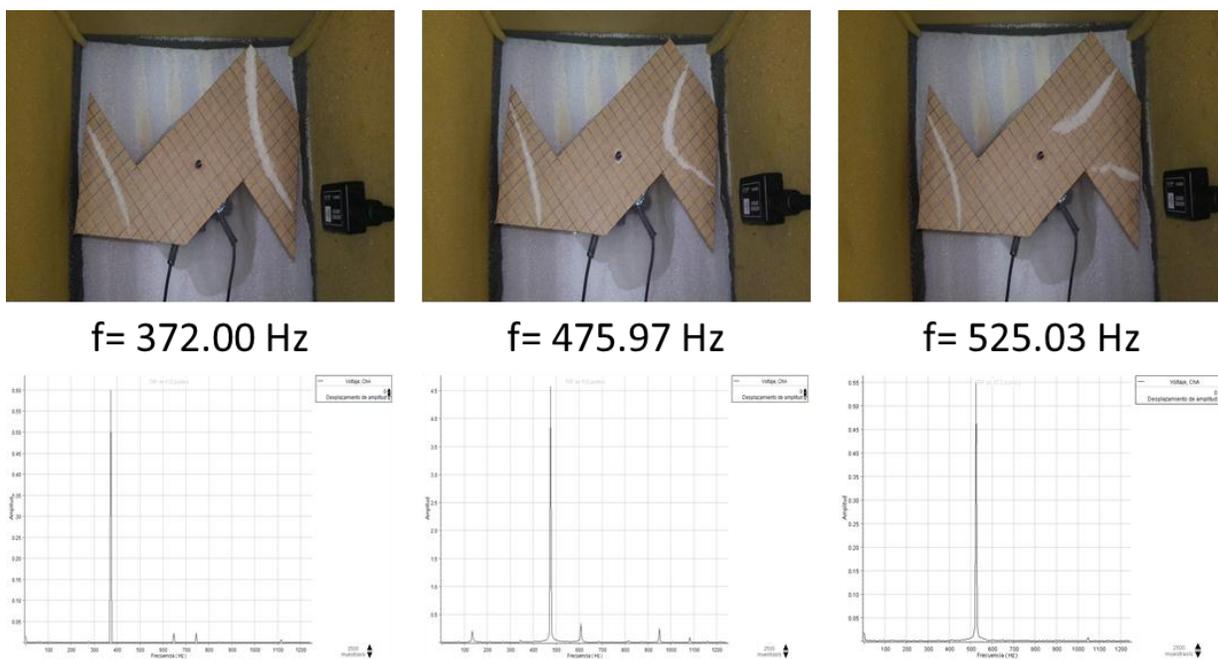


Figura 3.35: Resultados para la placa I2 en el rango de frecuencias medias.

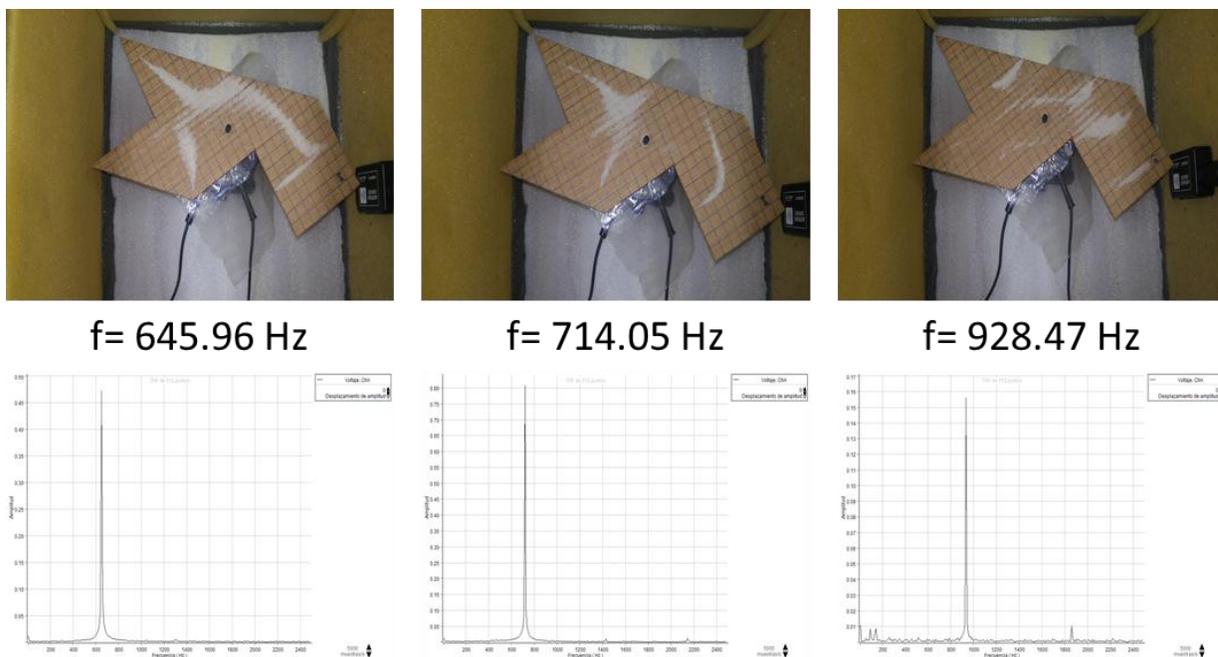


Figura 3.36: Resultados para la placa I1 en el rango de frecuencias altas.

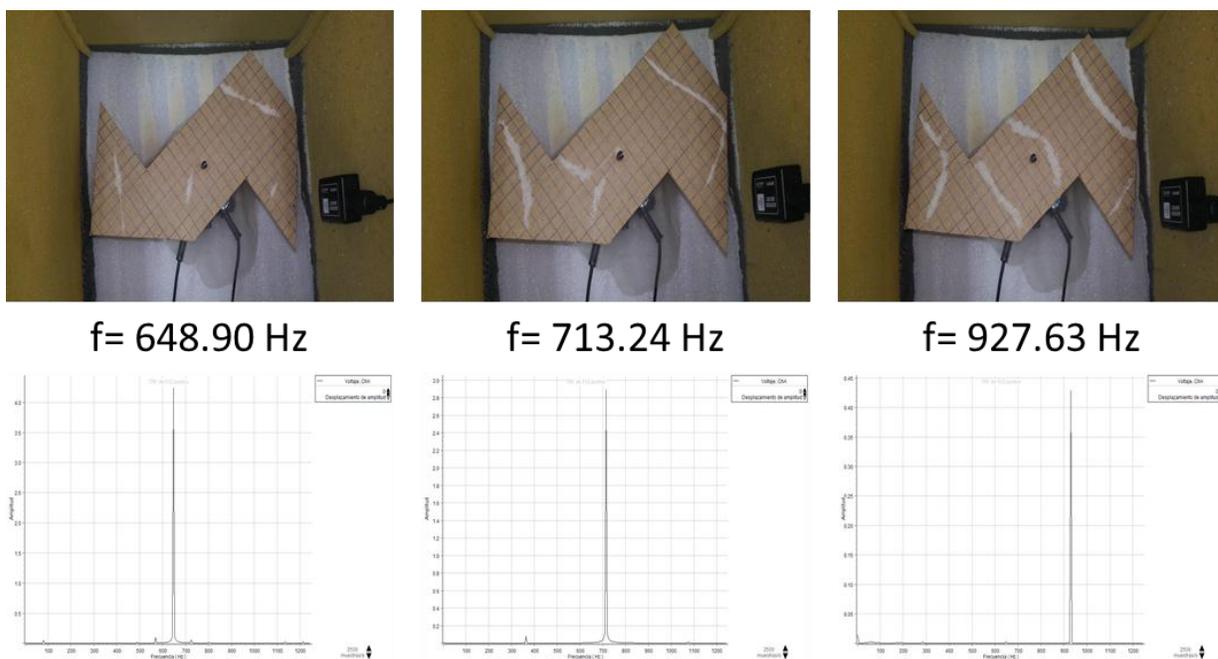


Figura 3.37: Resultados para la placa I2 en el rango de frecuencias altas.

### 3.7 Simulaciones numéricas

En la Fig. 3.2 se mostraron los comparativos de los resultados experimentales con las simulaciones numéricas para la placa cuadrada. Para este caso el método numérico empleado fue de diferencias finitas. Cuando la geometría es más complicada es más adecuado usar elementos finitos. En esta sección se presentan los comparativos entre las simulaciones numéricas hechas con el paquete COMSOL Multiphysics 3.5 [16], con los resultados experimentales para algunos de los casos analizados anteriormente. Para estos casos se considera que la placa es muy delgada de modo que se puede tratar numéricamente como una membrana.

En las Figs. 3.38-342 se muestran los resultados para el caso de las dos placas cuadradas conectadas por canales rectangulares.

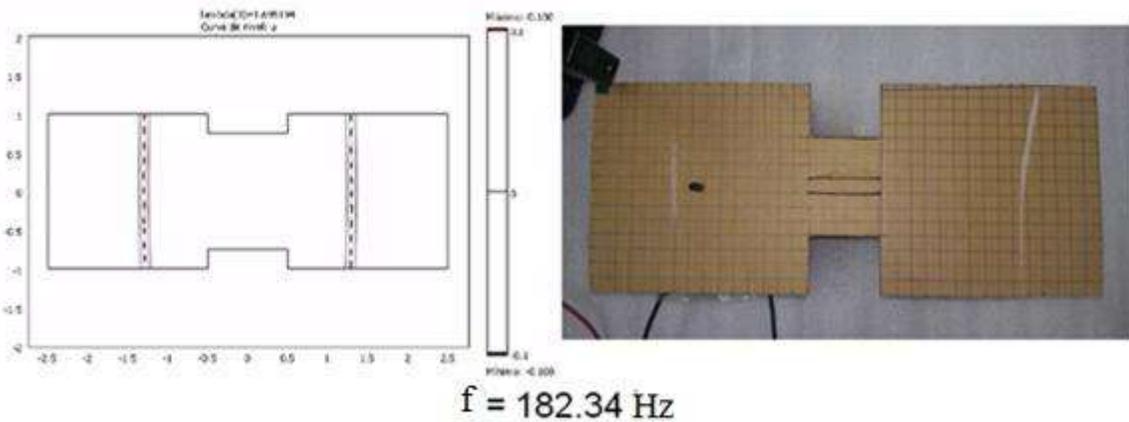


Figura 3.38: Placa conectada con el canal rectangular (5x7cm).

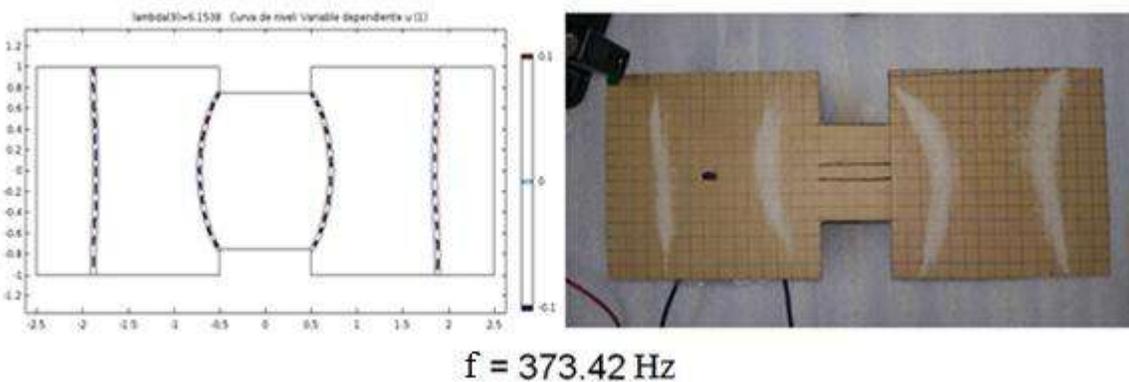


Figura 3.39: Placa conectada con el canal rectangular (5x7cm).

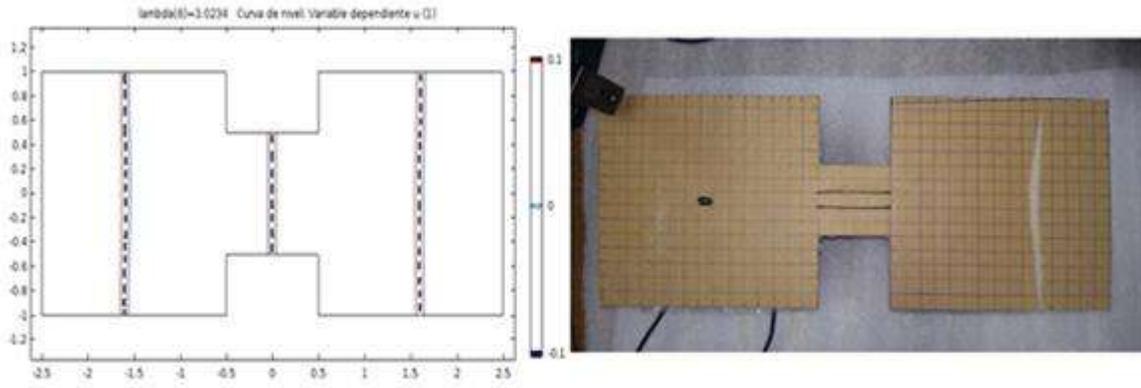


Figura 3.40: Placa conectada con el canal rectangular (5x5cm).

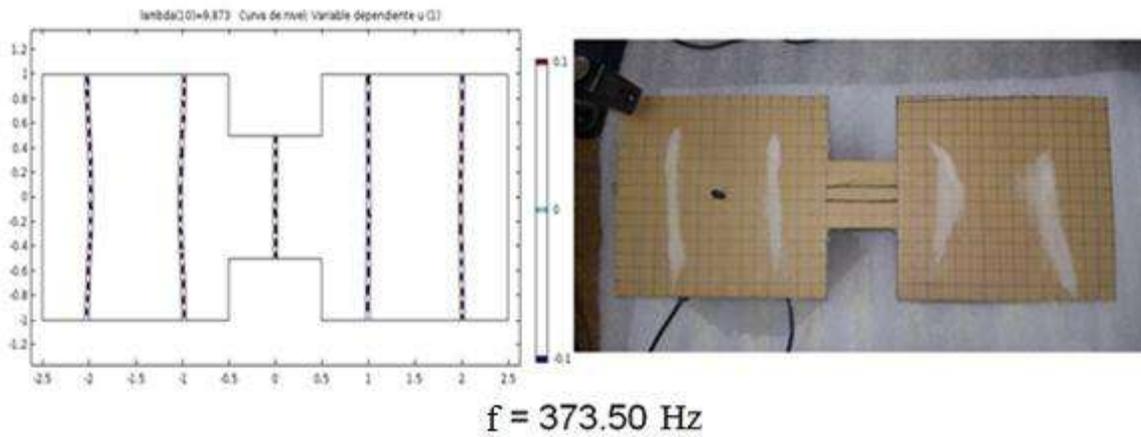


Figura 3.41: Placa conectada con el canal rectangular (5x5cm).

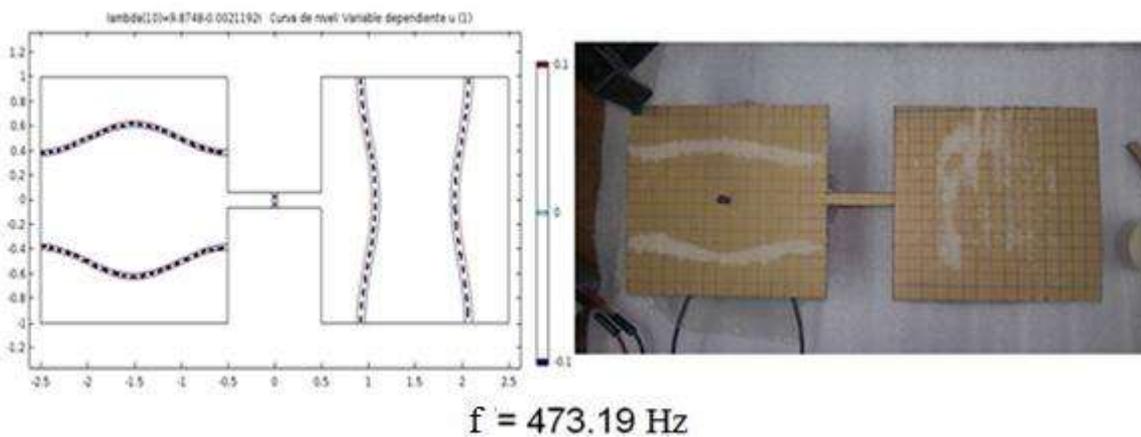
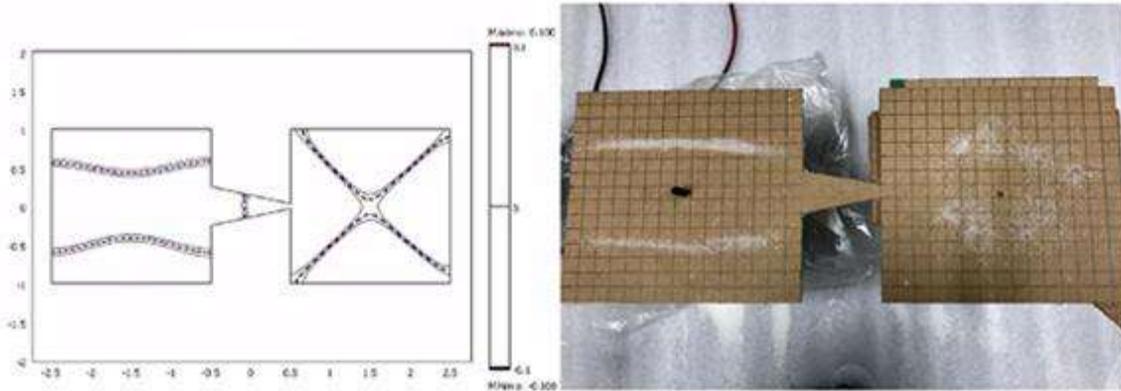


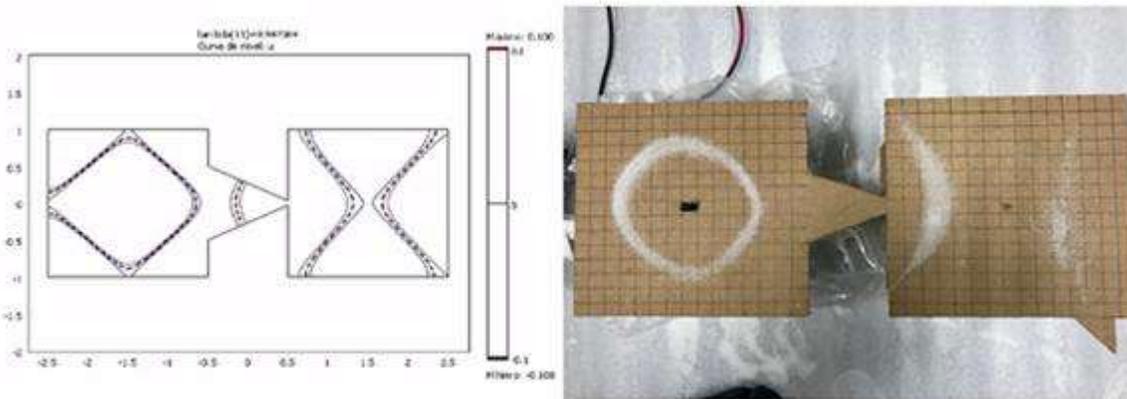
Figura 3.42: Placa conectada con el canal rectangular (5x1cm).

Las Figs. 3.43-3.47 se muestran los resultados para el caso de dos placas cuadradas conectadas por canales trapezoidales.



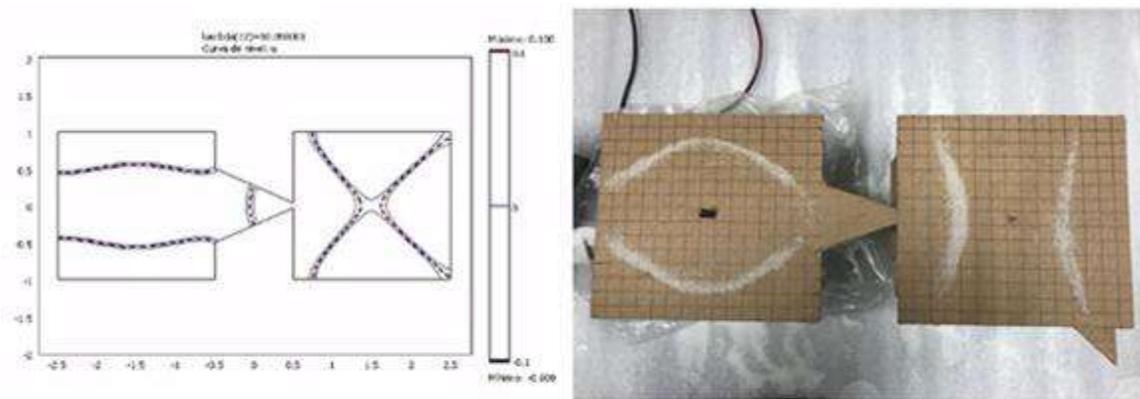
$$f = 242.98 \text{ Hz}$$

Figura 3.43: Placa conectada con el canal trapezoidal ( $B=3\text{cm}$  y  $b=1\text{cm}$ ).



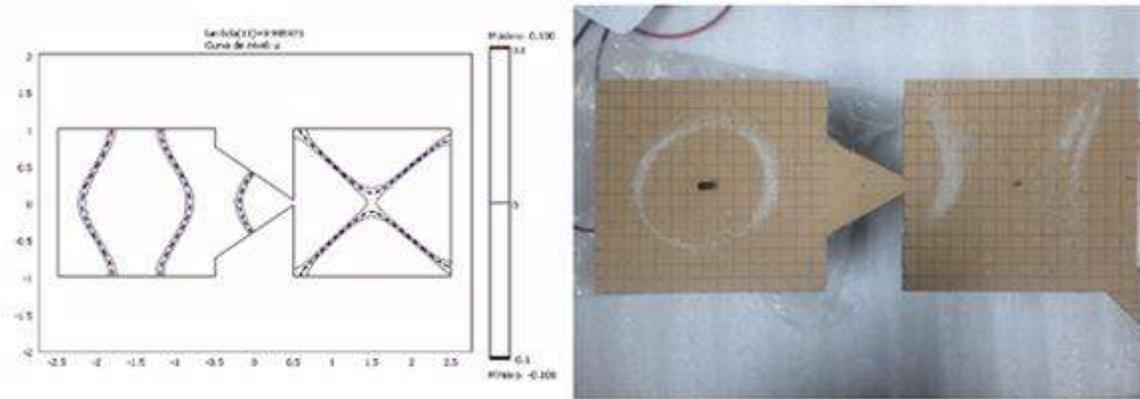
$$f = 242.65 \text{ Hz}$$

Figura 3.44: Placa conectada con el canal trapezoidal ( $B=5\text{cm}$  y  $b=1\text{cm}$ ).



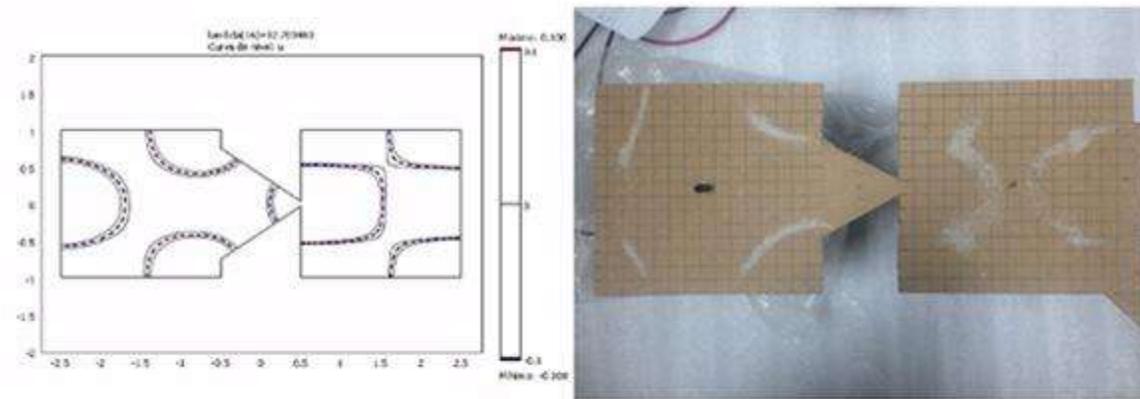
$f = 373.62 \text{ Hz}$

Figura 3.45: Placa conectada con el canal trapecoidal ( $B=5\text{cm}$  y  $b=1\text{cm}$ ).



$f = 242.47 \text{ Hz}$

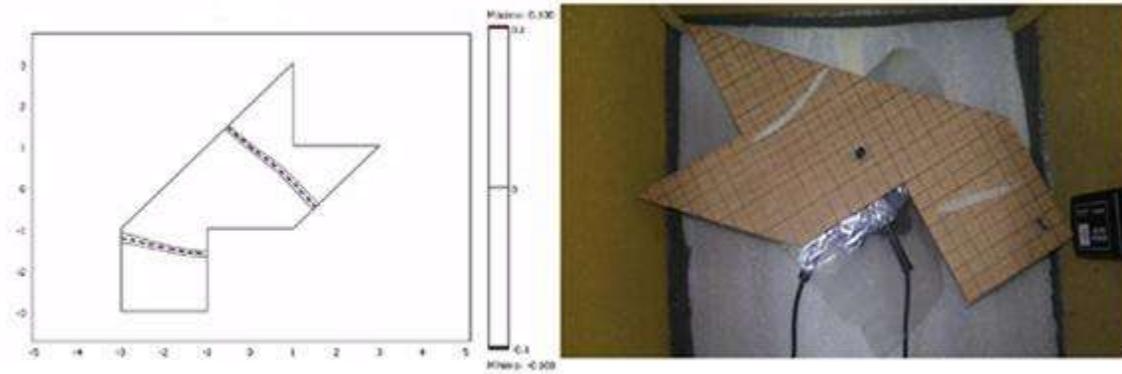
Figura 3.46: Placa conectada con el canal trapecoidal ( $B=7\text{cm}$  y  $b=1\text{cm}$ ).



$f = 522.04 \text{ Hz}$

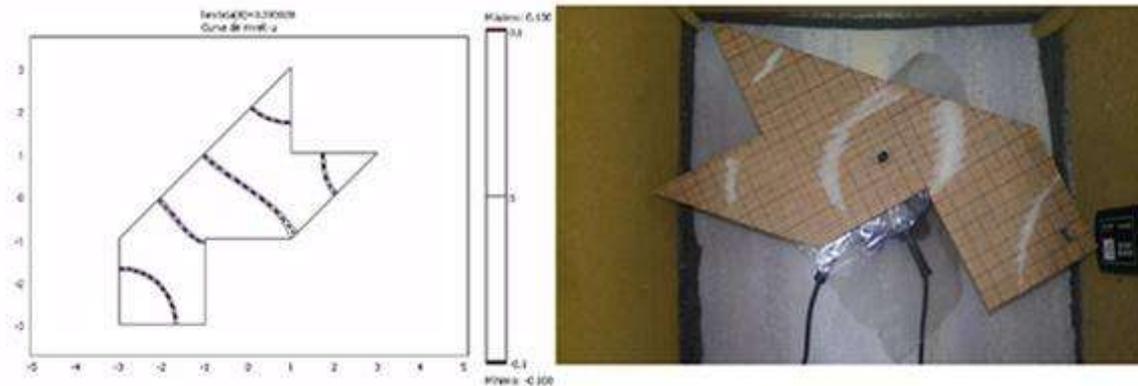
Figura 3.47: Placa conectada con el canal trapecoidal ( $B=7\text{cm}$  y  $b=1\text{cm}$ ).

Finalmente, en las Figs. 3.48-3.49 se muestran los resultados para la placa isoespectral I1, en tanto que las Figs. 3.50-3.51 se muestran los resultados correspondientes para la placa isoespectral I2.



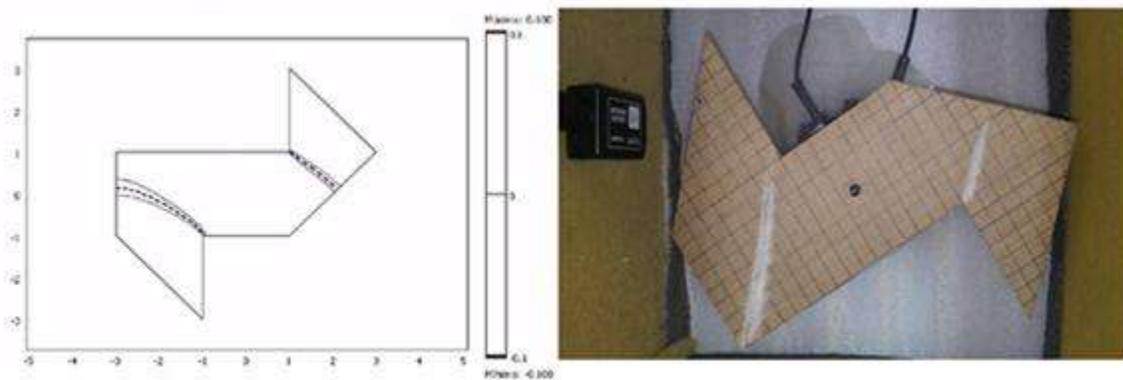
$$f = 143.43 \text{ Hz}$$

Figura 3.48: Placa isoespectral I1.



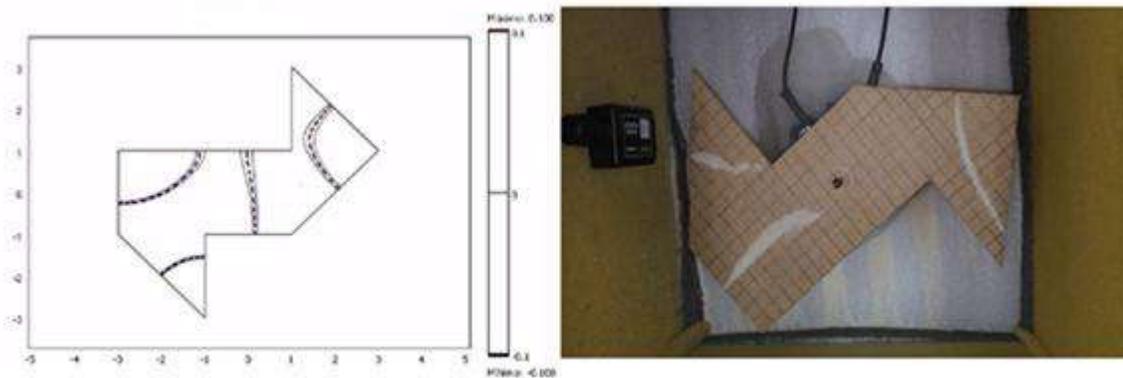
$$f = 476.89 \text{ Hz}$$

Figura 3.49: Placa isoespectral I1.



$f = 183.72 \text{ Hz}$

Figura 3.50: Placa isoespectral I2.



$f = 525.03 \text{ Hz}$

Figura 3.51: Placa isoespectral I2.

# CAPÍTULO 4

## CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se hizo un estudio experimental y un comparativo numérico de las vibraciones de placas de cartón utilizando la técnica de Chladni. Se consideraron diferentes geometrías: placa cuadrada, placa cuadrada con cortes rectos y circulares, placas cuadradas conectadas por canales rectos y trapezoidales, y placas isoespectrales. Las conclusiones de este trabajo son las siguientes:

- I. Para las placas cuadradas los resultados experimentales empataron en gran medida a las figuras obtenidas numéricamente en Matlab con el método de diferencias finitas, considerando una razón de Poisson de 0.47.
- II. Para las placas cuadradas con cortes rectos, se observó que cuando el corte se hizo a lo largo de la diagonal (Fig. 3.3 (a)) la simetría de los patrones de Chladni se rompe en comparación con las placas utilizadas de referencia, en tanto que cuando los cortes se hacen en forma de rehilete (Fig. 3.3 (b)) la simetría se mantiene de alguna manera aunque los nodos cambien.
- III. En el caso de las placas cuadradas con cortes circulares a lo largo de sus diagonales y a una distancia del pivote, se observó que las líneas nodales son afectadas si el corte esta sobre una de ellas y si se aumenta el radio de este corte (Fig. 3.17), el cambio en las líneas nodales es más evidente. Este tipo de cortes puede ser aplicado a la fabricación de instrumentos de percusión (tambores) o de cuerda (violines, guitarras, etc.) para la obtención de un sonido agradable al oído.
- IV. En el caso de las placas conectadas por un canal (rectangular y trapezoidal) se observaron algunas discrepancias entre los resultados experimentales y los resultados obtenidos por el método de elementos finitos (Figs. 3.38-3.49). Es probable que en este tipo de geometrías la placa sea más propensa a experimentar algún grado de torsión, lo que puede provocar modos adicionales en los patrones de Chladni, lo cual fue detectable para los modos de frecuencias bajas. Otra posible discrepancia puede resultar del hecho de que la placa de cartón se consideró como una placa muy delgada para ser modelada como una membrana.
- V. En el caso de las placas isoespectrales hay una mejor correspondencia con las simulaciones numéricas a pesar de ser modeladas como membranas. Se verificó la propiedad de isoespectralidad en el sentido de que siendo placas con la misma área pero de forma distinta, presentan el mismo espectro de Fourier pero diferentes patrones de Chladni.

- VI. Para finalizar, podemos concluir que el uso de placas de cartón es una alternativa barata, flexible y confiable para el diseño de prototipos que permitan el estudio de las propiedades de vibración de estructuras más complejas. En este sentido, la construcción previa de modelos de cartón de sistemas complicados permitiría afinar detalles de diseño de un modelo final específico.
- VII. Desde el punto de vista pedagógico, la utilización del cartón y la técnica de Chladni permiten acercar al estudiante al tema de vibraciones de estructuras sólidas simples y complejas. Desde el proceso de diseño y construcción, y hasta la visualización, en tiempo real, de los patrones nodales específicos de la geometría de la placa.

## BIBLIOGRAFÍA

1. R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Wiley Interscience (1953), pp. 275-396.
2. M. J. Gander and G. Wanner. From Euler, Ritz and Galerkin to Modern Computing. *SIAM Review*, Vol. 54, No. 4 (2012).
3. H. J. Stöckmann. Chladni meets Napoleon. *Eur. Phys. J. Special Topics* 145, 15-23 (2007).
4. M. J. Gander and F. Kwok. Chladni Figures and the Tacoma Bridge: Motivating PDE Eigenvalue Problems via Vibrating Plates. *SIAM Review*, Vol. 54, No. 3 (2012).
5. A. W. Leissa. *Vibration of Plates*, NASA Reports, NASA SP-160 (1969), pp. 1-6, 41-160.
6. G. Arroyo Correa et al. Estudio experimental de los patrones de vibración de placas con geometría no convencional usando la técnica de Chladni, XII encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, León, Gto. (2015).
7. M. Vega Guzmán et al. Estudio del efecto de cortes rectos sobre una placa cuadrada de cartón mediante la técnica de Chladni, XI Congreso Estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación, Morelia, Mich. (2015).
8. G. Arroyo Correa et al. Estudio experimental del efecto de perforaciones circulares en una placa cuadrada de cartón mediante la técnica de Chladni, XIII encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia, León, Gto. (2016).
9. G. Arroyo Correa et al. Estudio experimental de la vibración de placas isoespectrales, LIX Congreso Nacional de Física, León, Gto. (2016).
10. M. Vega Guzmán et al. Estudio experimental de la vibración de dos placas conectadas por un canal, LX Congreso Nacional de Física, Monterrey, NL. (2017).
11. M. Vega Guzmán et al. Efecto de un canal de geometría variable sobre los modos de vibración de dos placas acopladas, LXI Congreso Nacional de Física, Puebla, Pue. (2018).

12. E. Gómez Ramirez. Comportamiento mecánico, térmico y vibracional de las cajas de dispositivos médicos para la estibación más alta. Informe final de la práctica dirigida, Instituto Tecnológico de Costa Rica (2015), pp. 16-20.
13. M. Kac. Can one hear the shape of a drum?, *American Math. Mon.*, 73 Part II(1966), pp. 1-23.
14. C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, *Invent. Math.*, 110 (1992), pp. 1-22.
15. T. Driscoll. Eigenmodes of isospectral drums, Technical Report-Center for Theory and Simulation in Science and Engineering, Cornell University, Ithaca, N.Y., CTC95TR209 (May 1995).
16. COMSOL Multiphysics, version 3.5. Información técnica, COMSOL AB (2008).