Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

y

Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado Conjunto UNAM-UMSNH

T E S I N A

Para obtener el título de
Maestro en Ciencias Matemáticas

Productos caja y la clase de espacios discretamente generados

Autor:
Hector Alonzo Barriga Acosta

Asesor:
Dr. Fernando Hernández Hernández

Morelia Michoacán, enero de 2016

Dedico este trabajo a mi familia

Agradecimientos

Me emociona bastante tener la oportunidad de escribir nuevamente en una sección como ésta. Representa un logro más en mi vida que indudablemente no hubiera podido llevar a cabo sin aquellas personas que estuvieron viviendo conmigo este proceso. Esta etapa de mi vida fue muy diversa en colores, claros y oscuros. Agradezco a todas esas personas que estuvieron allí.

Agradezco a mi familia por ser mi mayor sustento. A mi madre María Luisa que está al pendiente de sus hijos en cada momento. Gracias por darme siempre de comer esa deliciosa comida que haces. ¡Gracias por ser la persona que eres!

Agradezco a mis hermanos Ernesto y Eréndira que siempre me escuchan e intentan darme el mejor de sus consejos. Agradezco a mi padre José Alonzo que siempre me impulsa a trabajar con disciplina, aunque sean vacaciones.

Agradezco a mi amigos Omar, Toño y Oscar que nunca me han abandonado en mi viaje y siempre supieron la manera de hacerme sentir "alegre". Agradezco a Cristina por vivir tantos colores a mi lado y por apoyarme en todas mis desiciones. Agradezco a Nerón simplemente por existir.

Agradezco a cada unos de los integrantes de mis tres grupos deportivos: Insaciables, H. P. Pitufo y Saprissa. Por coincidencia los tres comparten características similares. Los integran gente valiente, de corazón y que también se sabe divertir, sobre todo la última.

Finalmente agradezco a mi asesor Fernando por todo el apoyo que me ha brindado, el tiempo dedicado y por considerarme su amigo. Nuevamente gracias por su honestidad amistosa y su amistad honesta.

Espero algún día con el producto de mi esfuerzo devolverles la satisfación que todos me han regalado. ***A mi gente, gracias!***

Contents

Resumen

La teoría de espacios discretamente generados fue introducida por A. Dow, M. Tkachenko, V. Tkachuk y R. G. Wilson en 2002. Un espacio discretamente generado se refiere a que la cerradura de cada uno de sus subconjuntos se puede obtener mediante la union de las cerraduras de sus subconjuntos discretos. La siguiente sucesión de implicaciones entre clases de espacios nos ayuda a entender y comparar los espacios discretamente generados con otras clases conocidas: Métricos $\Rightarrow$ Primero numerables $\Rightarrow$ Fréchet-Urysohn $\Rightarrow$ Secuenciales $\Rightarrow$ Discretamente generados.

Se plantearon varias preguntas abiertas interesantes las cuales motivaron la continuación del trabajo a V. Tkachuk y R. Wilson. Ahí muestran diversos y potentes resultados relacionando esta clase particularmente con los productos caja. Sin embargo, transcurridos 13 años hasta ahora aún no se han establecidos resultados que puedan clasificar total o parcialmente a los espacios producto (caja y Tychonoff) para ser discretamente generados.

Así, con motivación en el trabajo realizado por V. Tkachuk y R. Wilson, en este documento resolvemos el Problema 3.19 y un primer avance para el Problema 3.3 de ese artículo.

3.3 Si los espacios X_n, $n \in \omega$, son primero numerables, ¿es el espacio $\square_{n\in\omega} X_n$ discretamente generado?

3.19 ¿El espacio $\{\xi\} \cup \omega$ se encaja en un producto caja de rectas reales para algún $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$?

Palabras clave: Discretamente generado, producto caja, topología, primero numerable, discreto.

Abstract

Theory of discretely generated spaces was introduced by A. Dow, M. Tkachenko, V. Tkachuk and R. Wilson in 2002. A discretely generated space means that the closure of each of its subsets can be obtained by the union of the closures of its discrete subsets. The following sequence of implications between classes of spaces helps us to understand and compare the discretely generated space class with other known classes: Metric $\Rightarrow$ First countable $\Rightarrow$ Fréchet-Urysohn $\Rightarrow$ Sequential $\Rightarrow$ Discretly generated.

Several interesting open questions were established and motivated the continuation of the work to V. Tkachuk and R. Wilson. There they show diverse and powerful results that relates this class particularly with box products. However, after 13 years until now they have not established yet results that can classify totally or partially the product spaces (box and Tychonoff) to be discretely generated.

Thus, motivated by the work of V. Tkachuk and R. Wilson, in this document we solve the Problem 3.19 and a first progress for Problem 3.3 of their article.

3.3 If X_n, $n \in \omega$, are first countable spaces, ¿is the space $\Box_{n\in\omega} X_n$ discretely generated?

3.19 ¿Does the space $\{\xi\} \cup \omega$ embed into a box product of real lines, for any $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$?

Introducción

Los espacios llamados discretamente generados fueron introducidos por A. Dow, M. Tkachenko, V. Tkachuk y R. G. Wilson en [1], 2002. Un espacio discretamente generado se refiere a que la cerradura de cada uno de sus subconjuntos se puede obtener mediante la union de las cerraduras de sus subconjuntos discretos. Pero ¿qué tan grande es esta clase de espacios? Es una clase bastante amplia. La siguiente sucesión de implicaciones entre clases de espacios nos ayudará a ubicar y compararla con otras clases conocidas: Métricos $\Rightarrow$ Primero numerables $\Rightarrow$ Fréchet-Urysohn $\Rightarrow$ Secuenciales $\Rightarrow$ Discretamente generados. Existe otra clase de espacios que refiere a un axioma de separabilidad, la clase de los espacios monotónicamente normales. Un espacio que tenga esta propiedad también tendrá la propiedad de ser discretamente generado. Más aún, la estrechez de un espacio también juega un papel considerable cuando se combina con otras propiedades.

En [1] se dio amplitud y desarrollo a la teoría aportando los primeros resultados. En el mismo artículo se da a conocer un espacio de Tychonoff numerable que no es discretamente generado, el cuál originalmente se debe a Eric. van Douwen en [3]. Cabe mencionar que en esta teoría nuevamente se puede apreciar la delgada línea que existe entre Topología y la Teoría de Conjuntos. El Teorema 4.6 de [1] tiene un trasfondo combinatorio mencionando que la existencia de un L-espacio implica que 2^{ω_1} no es discretamente generado.

También, se plantearon varias preguntas abiertas interesantes las cuales motivaron la continuación del trabajo a V. Tkachuk y R. Wilson en [2]. Ahí muestran diversos y potentes resultados relacionando esta clase particularmente con los productos caja. Sin embargo, transcurridos 13 años hasta ahora aún no se han establecidos resultados que puedan clasificar total o parcialmente a los espacios producto (caja y Tychonoff) para ser discretamente generados. Esto último vuelve interesante la teoría, además de que en [2] se presenta una lista de atractivos problemas que son sencillos de plantear y aún están sin resolver.

Así, con motivación en el trabajo realizado por V. Tkachuk y R. Wilson, resolvemos el Problema 3.19 de [2] y un primer avance para el Problema 3.3 del mismo artículo. El Problema 3.19 [2] realiza la siguiente pregunta:

3.19 - [2] ¿El espacio $\{\xi\} \cup \omega$ se encaja en un producto caja de rectas reales para algún $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$?

La respuesta más "interesante" sería la negativa. Esto es porque, a pesar de que la colección de los subespacios de $\square\mathbb{R}^\kappa$ es bastante amplia, ésta no sería lo suficiente como para aceptar subespacios homeomorfos a $\{\xi\} \cup \omega$. Algunos subespacios importantes de $\square\mathbb{R}^\kappa$ son: $\square(\omega+1)^\kappa$, $\square\mathbb{Q}^\kappa$ o $\square C^\kappa$, donde C es el conjunto de Cantor. Por lo tanto, se vuelve también importante considerar a la colección de los subespacios del producto $\square(\{\xi\} \cup \omega)^\omega$, ya que el Teorema 2.6 de [2] afirma que el producto caja de cualquier espacio monotónicamente normal es discretamente generado, y la propiedad de ser discretamente generado es hereditaria.

Por otro lado, no es para menos preciar una respuesta afirmativa a la pregunta. Si $\{\xi\} \cup \omega$ se encaja en $\square\mathbb{R}^\kappa$ para algún $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$, podríamos preguntarnos ¿qué tiene de especial el ultrafiltro ξ? es decir ¿podría ser ξ un P-punto, un Q-punto, o quizá un ultrafiltro selectivo?

En el presente documento se desarrolla entonces una prueba que responde negativamente a la pregunta. La estrategia será realizar la misma pregunta para el espacio $\square(\omega + 1)^\omega$, dando a conocer algunos resultados sobre ciertas propiedades de el mismo. Posteriormente relacionaremos a los espacios $\square\mathbb{R}^\omega$ y $\square(\omega + 1)^\omega$ de una manera natural que nos ayude a que las propiedades mencionadas para el espacio $\square(\omega + 1)^\omega$ se preserven también para el espacio $\square\mathbb{R}^\omega$, dado nuevamente una respuesta negativa. Finalmente, la pregunta para el caso parcial $\square\mathbb{R}^\omega$ se generaliza a $\square\mathbb{R}^\kappa$.

En la primera parte del último capítulo estudiamos al espacio $\square(\{\xi\}\cup\omega)^\omega$ y precisamos que tiene estrechez numerable, aunque aún está por verificarse que sea discretamente generado o no.

Para finalizar, el Problema 3.3 en [2] del que hablamos anteriormente intenta clasificar a los productos caja numerables de espacios primero numerables para ser discretamente generados. Fielmente cita: Si los espacios

X_n, $n \in \omega$, son primero numerables, ¿es el espacio $\square_{n\in\omega} X_n$ discretamente generado? Respondemos la pregunta bajo la siguiente condición sobre el conjunto generador. Es decir, si $A \subseteq \square_{n\in\omega} X_n$ es tal que $x \in \overline{A} \setminus A$ y $\forall a \in A\, (supp_x(a) = \omega)$, entonces podemos encontrar $D \subseteq A$ discreto con $x \in \overline{D}$. La finalidad de este avance es dar a conocer una técnica que podría enriquecerse para resolver la pregunta general.

Chapter 1

Preliminares

Interviniendo en el estudio del título de este documento recordaremos las nociones principales como son los espacios productos, ya sean caja y de Tychonoff.

1.1 ♦ Espacios producto

Las siguientes definiciones son elementales en topología. Sin embargo, se supone de cierto nivel por parte del lector para trabajar con las técnicas mismas del área.

Definición 1. *Considere un conjunto X. Una* ***topología*** *sobre X es una familia τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. *Si $\{U_i : i \in I\}$ es una familia de elementos en τ, se debe cumplir que $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.*
3. *Si $\{U_i : i \in I\}$ es una familia finita de elementos en τ, se debe cumplir que $\bigcap_{i\in I} U_i \in \tau$.*

A un conjunto X junto con una topología τ se le conoce como ***espacio topológico*** y a los elementos de τ se les conoce como ***conjuntos abiertos***. También, es ***cerrado*** el conjunto que es complemento de un abierto.

Definición 2. *Considere una familia de espacios topológicos* $\{X_t : t \in T\}$. *Se define:*

- *El* ***producto caja*** *de los espacios* X_t *como el conjunto subyacente* $\prod_{t\in T} X_t$ *con la topología* $\tau_\square$ *generada por*

$$\{\prod_{t\in T} U_t : U_t \subseteq X_t \textit{ abierto}\}.$$

- *El* ***producto Tychonoff*** *de los espacios* X_t *como el conjunto subyacente* $\prod_{t\in T} X_t$ *con la topología* τ *generada por*

$$\{\prod_{t\in F} U_t \times \prod_{t\in T\setminus F} X_t : U_t \subseteq X_t \textit{ abierto} \wedge F \subseteq T \textit{ finito}\}.$$

Denotaremos al producto caja $(\prod_{t\in T} X_t, \tau_\square) = \square_{t\in T} X_t$. Cuando los espacios X_t son el mismo espacio, digamos X, escribiremos $\square X^T$ en vez de $\square_{t\in T} X$ y para el producto Tychonoff simplemente haremos X^T en vez de $\prod_{t\in T} X$. Se puede observar fácilmente que si nuestro conjunto T es finito, entonces los espacios $\square_{t\in T} X_t$ y $\prod_{t\in T} X_t$ son iguales, pues la condición en el producto Tychonoff sobre considerar una cantidad finita de factores para situar abiertos es indistinguible en el producto caja finito.

1.2 ⧫ Algunas propiedades de los espacios producto

Es importante que, al trabajar con los espacios producto (Tychonoff y caja), se tengan siempre en cuenta ciertas propiedades que pueden resultar de mucha utilidad. Cualquiera de las siguientes propiedades pueden consultarse en [4] o [5].

Teorema 3. *Considere una familia infinita de espacios topológicos* $\{X_t : t \in T\}$.

1. *Si los espacios* X_t *son discretos,* $\square_{t\in T} X_t$ *es discreto.*

2. *Los espacios X_t son Hausdorff, regular o completamente regular si y sólo si $\square_{t\in T} X_t$ es Hausdorff, regular o completamente regular, respectivamente.*

3. *El espacio $\square_{t\in T} X_t$ nunca es localmente compacto, separable, conexo, localmente conexo, primero numerable, perfecto (cada conjunto cerrado es G_δ).*

Teorema 4. *Considere una familia infinita de espacios topológicos $\{X_t : t \in T\}$.*

1. *El espacio $\prod_{t\in T} X_t$ nunca es discreto.*

2. *El espacio $\prod_{t\in T} X_t$ es compacto, conexo, Hausdorff, regular, completamente regular si cada espacio X_t lo es, respectivamente.*

3. *Si T es numerable y los espacios X_t son primero numerables o métricos, entonces $\prod_{t\in T} X_t$ es primero numerable o métrico, respectivamente.*

4. *Si T tiene a lo más el tamaño de los reales ($\mathfrak{c}$) y los espacios X_t son separables, $\prod_{t\in T} X_t$ es seprable.*

1.3 ⧫ Sobre espacios discretamente generados

El desarrollo de la teoría de los espacios discretamente generados ha avanzado considerablemente, aunque aún quedan muchas preguntas abiertas. Para darnos una idea, aún no se sabe siquiera el Problema 3.15 en [2] que cita: Sea X es un espacio Fréchet–Urysohn. ¿Es el producto $X \times X$ discretamente generado?

En esta sección hablaremos un poco sobre espacios discretamente generados y definiremos la estrechez de un espacio dado que esta propiedad tiene cierta relación en el tema. Citaremos resultados importantes para nuestros fines, de los cuales la mayor parte de ellos pueden ser consultados en [1] y [2].

Definición 5. *Decimos que un espacio topológico X es* ***discretamente generado*** *si para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$, es posible encontrar un conjunto $D \subseteq A$ discreto de tal forma que $x \in \overline{D}$.*

Definición 6. *Considere un espacio topológico X.*

- *La* ***estrechez de*** X ***en un punto*** $x \in X$ *es*

  $$t(x, X) = \sup\big\{ \min\{|Z| : Z \subseteq Y \wedge x \in \mathrm{cl}_X(Z)\} : Y \subseteq X \wedge x \in \mathrm{cl}_X(Y)\big\}.$$

- *La* ***estrechez del espacio*** X *es*

  $$t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\}.$$

Proposición 7. *Sea* X *un espacio Hausdorff.*

1. *Si* X *es métrico, primero numerable, Fréchet-Urysohn o secuencial, entonces* X *es discretamente generado.*

2. *La propiedad de ser discretamente generado es hereditaria.*

La proposición anterior inspira a pensar que la clase de los espacios discretamente generados es bastante amplia. Así, una pregunta natural sería: ¿hay un espacio que no sea discretamente generado? La respuesta es sí, como se muestra en el Teorema 1.2 (a) de [3]; y al existir uno, existen muchos por que la propiedad de ser discretamente generado es hereditaria.

Proposición 8. *Existe un espacio numerable y completamente regular que no es discretamente generado.*

Corolario 9. *Si* X *no es discretamente generado y* X *se encaja en* Y*, entonces* Y *no es discretamente generado.*

Proposición 10. *Existen espacios discretamente generados de cualquier estrechez dada.*

La proposición anterior indica que la clase de los espacios discretamente generados también es amplia respecto a la estrechez. Otra propiedad principal que no hemos mencionado es si la compacidad juega un papel importante en esta teoría, lo cual veremos en el siguiente resultado de [1].

Proposición 11. *Todo espacio compacto con estrechez numerable es discretamente generado.*

También el resultado anterior nos da una idea de qué tan "lejos" está la clase de los espacios compactos a la clase de los espacios discretamente generados. Más aún, los autores de esta teoría muestran en su trabajo [1] que la estrechez numerable puede ser considerable para clasificar a los espacios discretamente generados. En particular, analizaron al espacio más sencillo que es el 2, el conjunto con dos elementos con la topología discreta, elevado a la potencia de los reales ($2^{\mathfrak{c}}$ tienes estrechez no numerable). Cabe mencionar que no tiene sentido preguntarnos por 2^{ω} pues sabemos que es métrico y así, discretamente generado.

Proposición 12. *El espacio $2^{\mathfrak{c}}$ no es discretamente generado.*

Entonces los autores ya mencionados comenzaron a estudiar al espacio 2^{ω_1}, donde ω_1 es el primer ordinal no numerable. En lo siguiente presentaremos algunos resultados, también en relación a [1] y [2], que desarrollaron fuertemente la teoría.

Teorema 13.

1. *Si el espacio 2^{ω_1} no es discretamente generado, entonces todo espacio compacto, diádico y discretamente generado es metrizable.*
2. *Bajo la Hipótesis del Continuo [$\mathfrak{c} = \omega_1$] se tiene que todo espacio compacto, diádico y discretamente generado es metrizable.*

En 2005, Justin Tach Moore resuelve en [6] uno de los más importantes problemas en el área de Topología de Conjuntos, el problema del L-espacio que refiere a si en ZFC existe un espacio hereditariamente Lindelöff no separable.

Teorema 14. *Existe un espacio hereditariamente Lindelöff no separable.*

A la luz del Teorema 14, se vuelve sumamente importante el teorema de [1] que citaremos a continuación. Cabe mencionar que los autores de [1] aún no tenían conocimiento sobre la existencia de un L-espacio.

Teorema 15. *Si existe un L-espacio, entonces el espacio 2^{ω_1} no es discretamente generado.*

Corolario 16. *Todo espacio compacto, diádico y discretamente generado es metrizable.*

1.4 ⧫ Sobre espacios discretamente generados y productos caja

Para finalizar con este capítulo citaremos una nueva clase de espacios inmersa en la clase de espacios discretamente generados, es decir, la propiedad de ser monotónicamente normal implica la propiedad de ser discretamente generado. También mencionaremos un teorema importante de [2] que relaciona los espacios productos caja y los espacios discretamente generados.

Definición 17. *Un espacio X con topología τ es* ***monotónicamente normal*** *si para cada $U \in \tau$ y $x \in U$, podemos asignar un conjunto $O(x,U) \in \tau$ con $x \in O(x,U)$ y tal que si $O(x,U) \cap O(y,V) \neq \emptyset$ implica que $x \in V$ o $y \in U$.*

Teorema 18. *Si $\{X_t : t \in T\}$ es una familia de espacios monotónicamente normales, entonces $\square_{t\in T} X_t$ es discretamente generado.*

Chapter 2

Propiedades sobre $\square(\omega+1)^{\omega}$

En este pequeño capítulo presentaremos nociones y definiciones básicas, así como resultados ya conocidos, los cuales no demostraremos.

Primero estudiemos quienes son los espacios topológicos $\omega+1$ y $\{\xi\}\cup\omega$. Recuerde que $\omega+1=\omega\cup\{\omega\}$. El conjunto ω es discreto. Ahora, las vecindades del elemento ω son conjuntos de la forma $V=U\cup\{\omega\}$, donde U es un subconjunto cofinito de ω. Esta topología es en realidad la heredada por $\mathbb{R}$ a una sucesión convergente cualquiera. Se suele mencionar al espacio $\omega+1$ como "la sucesión convergente". Para un ultrafiltro ξ sobre los naturales, los conjuntos abiertos del espacio $\{\xi\}\cup\omega$ son: el conjunto ω es discreto y las vecindades del elemento ξ son conjuntos de la forma $V=U\cup\{\xi\}$, donde U es un elemento del ultrafiltro ξ. Esta topología es en realidad la heredada por $\beta\omega$. Es un hecho básico que no hay un encaje entre estos dos espacios.

Definición 19.

- *Sean X un conjunto, κ un cardinal y $a,b\in X^{\kappa}$. Definimos el* ***soporte de*** *a* ***respecto a*** *b como*

$$supp_b(a)=\{\alpha\in\kappa : a(\alpha)\neq b(\alpha)\}.$$

- *Si $S\subseteq\kappa$, definimos la* ***restricción de*** *a* ***a*** *S como aquella función $a\restriction S : S\to X$ dada por*

$$(a\restriction S)(s):=a(s).$$

- *Si* $S \subseteq \kappa$, $A \subseteq X^\kappa$ *y* $b \in X^\kappa$, *definimos*

$$A_{S,b} = \{a \in A : supp_b(a) = S\} \text{ y } A \restriction S = \{a \restriction S \in X^S : a \in A\}.$$

- *Denotaremos por* $\overrightarrow{\omega}$ *al elemento en* $\square(\omega+1)^\omega$ *tal que para cada* $n \in \omega$, $\overrightarrow{\omega}(n) = \omega$. *Cuando hablemos del soporte en este punto, simplemente pondremos* $supp(a)$ *en vez de* $supp_{\overrightarrow{\omega}}(a)$, *con* $a \in \square(\omega+1)^\omega$. *También denotamos a* $A_{S,\overrightarrow{\omega}}$ *por* A_S.

- *Dada una función* $h \in \omega^\omega$ *y un elemento* $a \in \square(\omega+1)^\omega$, *definimos* ***la vecindad de*** a ***inducida por*** h *como la vecindad de* a *de la forma*

$$N_h(a) = \square_{n \in supp(a)}\{a(n)\} \times \square_{n \in \omega \setminus supp(a)}[h(n), \omega].$$

Definición 20.

- *Si* X *es un espacio topológico y* $A \subseteq X$, *denotamos a los* ***puntos de adherencia de*** A *por* $A' = \overline{A} \setminus A$.

- *Dados* $A \subseteq X$ *y* $x \in A'$, *decimos que un espacio topológico* X *tiene la* ***propiedad*** $\mathcal{P}$ ***en*** (x, A) *si* $\exists B, C \subseteq A$ $(B \cap C = \emptyset \wedge x \in B' \cap C')$.

- *Un espacio topológico* X *tiene la* ***propiedad*** $\mathcal{P}^+$ *si*

$$\forall A \subseteq X \ \exists B, C \subseteq A \, (B \cap C = \emptyset \ \wedge \ A' = B' = C').$$

Es claro que la propiedad $\mathcal{P}^+$ es más fuerte que la propiedad $\mathcal{P}$ y que ambas son propiedades topológicas, es decir, se preservan bajo homeomorfismos. Cabe mencionar que el espacio $\{\xi\} \cup \omega$ no cumple la propiedad $\mathcal{P}$ en ningún par (ξ, U), con $U \in \xi$. Esto desprende el hecho de que si el espacio $\{\xi\} \cup \omega$ se encaja en X vía φ, entonces X no cumple la propiedad $\mathcal{P}$ en $(\varphi(\xi), \varphi[\omega])$. La siguiente proposición tiene una prueba inmediata sabiendo que todo espacio segundo numerable es hereditariamente separable y en todo espacio separable siempre es posible encontrar un par de densos ajenos.

Proposición 21. *Todo espacio segundo numerable cumple con la propiedad* $\mathcal{P}^+$.

En este capítulo damos a conocer propiedades importantes que apuntarán hacia nuestro objetivo. En estas propiedades se utilizan algunas nociones básicas combinatorias del espacio ω^ω. Comenzaremos definiendo dos importantes cardinales invariantes del continuo.

Sobre el espacio de funciones ω^ω existe un orden parcial natural, denotado por $\leq^*$. Dados dos elementos $f, g \in \omega^\omega$, decimos que $f \leq^* g$ si existe un natural $n \in \omega$ de tal forma que para cada $m \geq n$ se tiene que $f(m) \leq g(m)$.

Definición 22. • *Se dice que un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \omega^\omega$ es una* ***familia no acotada*** *si para cada $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{A}$ de tal forma que $g \nleq^* f$.*

- *Se dice que un subconjunto $\mathcal{D} \subseteq \omega^\omega$ es una* ***familia dominante*** *si para cada $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{A}$ de tal forma que $f \leq^* g$.*
- $\mathfrak{b} = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ *es una familia no acotada*$\}$.
- $\mathfrak{d} = min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D}$ *es una familia dominante*$\}$.

Es un hecho básico en la combinatoria infinita que ambos cardinales invariantes $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$ son no numerables y de tamaño menor o igual que la cardinalidad de los reales. También se tiene la desigualdad $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$.

Lema 23. *Suponga $b \in \square(\omega+1)^\omega$ tal que $F = \omega \setminus supp_{\overrightarrow{\omega}}(b)$ es infinito. Si un conjunto $A \subseteq \square(\omega+1)^\omega$ tiene tamaño menor que $\mathfrak{b}$ y es tal que $\forall a \in A\ (F \subseteq supp(a))$, entonces $b \notin \overline{A}$.*

Demostración: Haga

$A_0 = \{g \in \omega^\omega : \exists a \in A\ (g \restriction supp(a) = a \restriction supp(a) \wedge g \restriction (\omega \setminus supp(a)) = 0)\}$.

Note que $|A_0| = |A| < \mathfrak{b}$, por lo que existe $h \in \omega^\omega$ tal que $\forall g \in A_0\ (g \leq^* h)$. Ahora es inmediato que $N_h(b) \cap A = \emptyset$. ■

Note que el Lema 23 nos ayudará a aislar del punto $\overrightarrow{\omega}$, un conjunto que conste de elementos con soporte infinito, siempre y cuando el tamaño del conjunto sea menor que $\mathfrak{b}$. Si bien el lema anterior nos dice que podemos aislar del punto $\overrightarrow{\omega}$, conjuntos con tamaño "pequeño", el papel que juega el tipo de soporte de los elementos de un conjunto es importante. Por ejemplo, podemos considerar incluso un conjunto numerable "no trivial" de elementos con soporte finito del espacio $\square(\omega+1)^\omega$ que generen a $\overrightarrow{\omega}$ como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 24. *Existe un conjunto $A \subseteq \square(\omega+1)^\omega$ de elementos con soporte finito, con $\overrightarrow{\omega} \notin \overline{A_F}$ para cada $F \in [\omega]^{<\omega}$, y tal que $\overrightarrow{\omega} \in \overline{A}$.*

Demostración: Para cada $n \in \omega$, considere al conjunto

$$A_n = \{a \in \square(\omega+1)^\omega : supp_{\overrightarrow{\omega}}(a) = n \wedge a(0) = n\}.$$

Veremos que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ cumple con lo requerido. Es claro que cada elemento de A tiene soporte finito. Ahora note que $A_F = A_n$ si y sólo si $F = n$, para cada $n \in \omega$. Además, $\overrightarrow{\omega} \notin \overline{A_n}$ pues si $a \in A_n$, entonces $a(0) = n$. Es decir, la 0-ésima coordenada de un elemento de A_n está "lejos" de ω.

Finalmente veremos que $\overrightarrow{\omega} \in \overline{A}$. Considere una función $h \in \omega^\omega$. Sea $k \in \omega$ tal que $k > h(0)$. Por tanto, debe existir $a \in A_k$ tal que $a \in N_h(\overrightarrow{\omega})$. ■

También podemos aislar de $\overrightarrow{\omega}$, conjuntos que consten de elementos con soporte finito bajo ciertas condiciones, las cuales estableceremos en el próximo lema.

Lema 25. *Supóngase que $A \subseteq \Box(\omega+1)^\omega$ es tal que para cada $a \in A$ $(|supp(a)| < \omega)$. Sea $\mathcal{F} = \{F \in [\omega]^{<\omega} : |A_F| < \omega\}$. Entonces existe $h \in \omega^\omega$ tal que $N_h(\overrightarrow{\omega}) \cap (\bigcup_{F\in\mathcal{F}} A_F) = \emptyset$. Al igual que en Lema 23, se puede generalizar esta afirmación para un $b \in \Box(\omega+1)^\omega$ tal que $\omega \setminus supp_{\overrightarrow{\omega}}(b)$ es infinito, en vez de $\overrightarrow{\omega}$.*

Demostración: Recuerde que $A_F = A_{F,\overrightarrow{\omega}} = \{a \in A : supp_{\overrightarrow{\omega}}(a) = F\}$. Considere una enumeración creciente para $U := \bigcup \mathcal{F} = \{n_k : k \in \omega\}$. Note que para cada $k \in \omega$, el conjunto $B_k := \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq \{n_0, \ldots, n_k\}\}$ es finito y también lo es $\bigcup_{F\in B_k} A_F$. Así, para cada $n_k \in U$, elija $h(n_k)$ tal que $h(n_k) > max\{\pi_{n_k}[\bigcup_{F\in B_k} A_F]\}$. Ahora si $n \notin U$ haga $h(n) = 0$. Entonces $h \in \omega^\omega$ cumple con lo requerido.

La prueba para $b \in \Box(\omega+1)^\omega$ tal que $\omega \setminus supp_{\overrightarrow{\omega}}(b)$ es infinito es similar, pero se trabaja en $\omega \setminus supp_{\overrightarrow{\omega}}(b)$. ■

Lema 26. *Supóngase que $A \subseteq \Box(\omega+1)^\omega$ es tal que para cada $a \in A$ $(|supp(a)| < \omega)$. Si $\overrightarrow{\omega} \in A'$, entonces se cumple la propiedad $\mathcal{P}$ en $(\overrightarrow{\omega}, A)$. Más aún, se cumple $\mathcal{P}$ en (x, A), para cualquier $x \in A'$.*

Demostración: Por el Lema 25, podemos suponer sin perder generalidad que $\forall F \in [\omega]^{<\omega} (|A_F| = \aleph_0)$. Así, si F y F' son dos conjuntos finitos "diferentes" de naturales, $A_F \cap A_{F'} = \emptyset$.

- Caso 1: Suponga que $\overrightarrow{\omega} \in \overline{A_F}$ para algún finito F.

Entonces existe una sucesión en A_F que converge a $\overrightarrow{\omega}$, pues $(\omega+1)^F$ es un espacio métrico. Si B consta de los términos pares de dicha sucesión y C de los términos impares, se tiene lo deseado.

- Caso 2: Para cada conjunto finito F, $\overrightarrow{\omega} \notin \overline{A_F}$.

  Como A_F es básicamente un subconjunto de ω^F, note que A_F es discreto e infinito. Además, $(\square(\omega+1)^\omega)_F \simeq (\omega+1)^F$ es compacto y así A'_F es no vacío. También por la Proposición 21, es posible conseguir $B_F, C_F \subseteq A_F$ tales que son ajenos entre sí y $A'_F = B'_F = C'_F$.

  Dado que $A = \bigsqcup_{F\in[\omega]^{<\omega}} A_F$, se cumple que $B := \bigsqcup_{F\in[\omega]^{<\omega}} B_F$ y $C := \bigsqcup_{F\in[\omega]^{<\omega}} C_F$ son subconjuntos de A. Por la observación en el párrafo anterior se tiene que $B \cap C = \emptyset$.

  Afirmación 26.1. *Se cumple* $\overrightarrow{\omega} \in B' \cap C'$.

  Considere $h \in \omega^\omega$. Podemos aplicar nuevamente el Lema 25 para conseguir un finito de naturales F tal que $|N_h(\overrightarrow{\omega}) \cap A_F| = \aleph_0$. De manera similar que antes, $N_h(\overrightarrow{\omega}) \cap A_F \subseteq (\square(\omega+1)^\omega)_F \simeq (\omega+1)^F$, y así, $(N_h(\overrightarrow{\omega}) \cap A_F)' \neq \emptyset$. Por construcción, $(N_h(\overrightarrow{\omega}) \cap A_F)' = (N_h(\overrightarrow{\omega}) \cap B_F)' = (N_h(\overrightarrow{\omega}) \cap C_F)'$. Necesariamente deben existir $b \in B_F \subseteq B$ y $c \in C_F \subseteq C$ tales que $b, c \in N_h(\overrightarrow{\omega})$.

- Caso general: Suponga que $x \in A'$ y sea $S = supp_{\overrightarrow{\omega}}(x)$.

  - Suponga S es infinito-coinfinito.

    Entonces podemos suponer que $A \upharpoonright S = \{x \upharpoonright S\}$ y así, aplicar el caso en que el espacio $\square(\omega+1)^{\omega\setminus S}$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$ en $(x \upharpoonright (\omega \setminus S), A \upharpoonright (\omega \setminus S))$.
  - Suponga S es cofinito.

    Ahora si S es cofinito, entonces $(\square(\omega+1)^\omega)_{\omega\setminus S} \simeq (\omega+1)^{\omega\setminus S}$, que es métrico y por la Proposición 21 se cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

■

El siguiente corolario es una respuesta parcial a la Pregunta 3.19, pero no menos importante ya que nos ayudará a generalizar la respuesta hasta involucrar al espacio $\square\mathbb{R}^\kappa$, para cualquier cardinal κ.

Corolario 27. *No existe un encaje de* $\{\xi\} \cup \omega$ *en* $\square(\omega+1)^\omega$.

Demostración: Si existe un encaje φ, necesariamente $supp(\varphi(\xi)) \neq \omega$ pues $\square\omega^\omega$ es discreto. Ahora, dado que $\varphi[\omega]$ es numerable, por los Lemas 23 y 25 podemos suponer que $\forall a \in \varphi[\omega]\ (|supp_{\varphi(\xi)}(a)| < \omega)$. Ahora aplique Lema 26 para contradecir que se cumple la propiedad $\mathcal{P}$ en $(\varphi(\xi), \varphi[\omega])$. $\blacksquare$

Chapter 3

No hay un encaje del espacio $\{\xi\} \cup \omega$ *en* $\Box\mathbb{R}^\kappa$

El siguiente paso es involucrar al producto caja de rectas reales dado que la pregunta original refiere a ello. Pero si queremos proceder como lo hemos realizado para el espacio $\Box(\omega+1)^\omega$, los lemas antes probados deberán cumplirse para el espacio $\Box\mathbb{R}^\omega$. En lo siguiente relacionaremos, de una manera natural, a ambos espacios.

Considere $p \in \Box\mathbb{R}^\omega$. Para cada $n \in \omega$, defina $f_n : \mathbb{R} \to \omega+1$ como

$$f_n(a) = \begin{cases} 0, & si\ |p(n)-a| \geq 1; \\ k, & si\ \frac{1}{k} > |p(n)-a| \geq \frac{1}{k+1}; \\ \omega, & si\ a = p(n). \end{cases}$$

Ahora considere la ***diagonalización*** $\Phi : \Box\mathbb{R}^\omega \to \Box(\omega+1)^\omega$ dada por $\Phi(a) = \langle f_n(a(n)) : n \in \omega \rangle$. Claro que $\Phi(p) = \overrightarrow{\omega}$.

Note que $\Phi^{-1}[\Box(\omega+1)^\omega]$ induce una relación de equivalencia (o partición) sobre el espacio $\Box\mathbb{R}^\omega$. Es decir, para $a, b \in \Box\mathbb{R}^\omega$, se tiene que $a \sim b$ si y sólo si

$$\forall n \in \omega\ \ (f_n(a(n)) = f_n(b(n))).$$

Definición 28. *A una partición como la anterior para el espacio $\square\mathbb{R}^\omega$ la llamaremos **partición inducida por** p.*

Para conseguir que los Lemas 23, 25 y 26 se cumplan también para el espacio $\square\mathbb{R}^\omega$, podemos proceder de manera similar que en las demostraciones de cada uno salvo que se tiene que pasar de $\square\mathbb{R}^\omega$ a $\square(\omega+1)^\omega$ y viceversa mediante Φ para obtener lo deseado. Dicho esto, usaremos indistintamente los lemas en cuestión para ambos espacios $\square(\omega+1)^\omega$ y $\square\mathbb{R}^\omega$. Derivado de esta observación se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 29. *No existe un encaje $\varphi : \{\xi\} \cup \omega \to \square\mathbb{R}^\omega$.*

Demostración: Suponiendo nuevamente que sí existe un encaje φ como en el enunciado, haga $A = \varphi[\omega] \subseteq \square\mathbb{R}^\omega$, $p = \varphi(\xi)$ y considere la partición inducida por p. Note que $A_\Phi = \Phi[A] \subseteq \square(\omega+1)^\omega$ es un conjunto a lo más numerable.

Afirmación 29.1. $\overrightarrow{\omega} \in \overline{A_\Phi}$.

En efecto, una función $h \in \omega^\omega$ codifica una sucesión de naturales $k_n := h(n)$ y una vecindad de $p \in \square\mathbb{R}^\omega$ de la forma

$$V = \square_{n\in\omega}\left(p(n) - \frac{1}{k_n},\, p(n) + \frac{1}{k_n}\right).$$

Como φ es homeomorfismo, se tiene que $p \in \overline{A}$ y por tanto debe existir $a \in A \cap V$. Luego, $\forall n \in supp_p(a)\ (f_n(a(n)) \geq k_n)$, y por tanto, se cumple $\Phi(a) \in A_\Phi \cap N_h(\overrightarrow{\omega})$.

Afirmación 29.2. *Sea $B_\Phi \subseteq A_\Phi$ tal que $\overrightarrow{\omega} \in \overline{B_\Phi}$. Entonces $p \in \overline{B}$, donde $B := \Phi^{-1}[B_\Phi] \cap A$.*

Sea $U \subseteq \square\mathbb{R}^\omega$ una vecindad de p. Defina

$$V = \square_{n\in\omega}\left(p(n) - \frac{1}{k_n},\, p(n) + \frac{1}{k_n}\right)$$

para alguna sucesión de naturales $\langle k_n : n \in \omega\rangle$ de tal forma que $V \subseteq U$. Tome $h \in \omega^\omega$ tal que $\forall n \in \omega\ (h(n) = k_n + 1)$. Como $\overrightarrow{\omega} \in \overline{B_\Phi}$, debe existir $b' \in B_\Phi \cap N_h(\overrightarrow{\omega})$. Elija un $b \in \Phi^{-1}[\{b'\}] \cap A$ y note que para cada $n \in \omega$, se tiene que $b(n) > h(n) = k_n + 1$ si y sólo si $|b(n) - p(n)| < \frac{1}{k_n+1}$. Es decir,

$b \in V \subseteq U$.

Para concluir, por la Afirmación 29.1 aplique el Lema 26 para conseguir $B_\Phi, C_\Phi \subseteq A_\Phi$ ajenos entre sí y tales que $\overrightarrow{\omega} \in \overline{B_\Phi} \cap \overline{C_\Phi}$. Después haga $B = \Phi^{-1}[B_\Phi] \cap A$ y $C = \Phi^{-1}[C_\Phi] \cap A$. Ahora es claro que $B \cap C = \emptyset$ y por la Afirmación 29.2, $p \in \overline{B} \cap \overline{C}$. En otras palabras, la propiedad $\mathcal{P}$ la cumple el espacio $\square\mathbb{R}^\omega$ en $(\varphi(\xi), \varphi[\omega])$. Como φ es un homeomorfismo, entonces la propiedad $\mathcal{P}$ la cumple el espacio $\{\xi\} \cup \omega$ en (ξ, ω), lo cual es una contradicción. ■

Corolario 30. *Para cualquier cardinal κ, no existe un encaje de $\{\xi\} \cup \omega$ en $\square\mathbb{R}^\kappa$.*

Demostración: Suponga lo contrario, que $\varphi : \{\xi\} \cup \omega \to \square\mathbb{R}^\kappa$ es un encaje. Sean $p = \varphi(\xi)$ y $A = \varphi[\omega]$. Note que $A = A^* \sqcup A_\infty$, para los cuales

$$A^* := \{a \in A : |supp_p(a)| < \omega\} \ y \ A_\infty := \{a \in A : |supp_p(a)| \geq \omega\}.$$

Para cada $a \in A_\infty$, considere cualquier subconjunto fijo $B_a \subseteq supp_p(a)$ que sea numerable. Como A_∞ es numerable, se cumple que $B = \bigcup_{a \in A_\infty} B_a \subseteq \kappa$ también lo es. En el espacio $\square\mathbb{R}^B \simeq \square\mathbb{R}^\omega$ aplique el Lema 23 para conseguir una vecindad $V \subseteq \square\mathbb{R}^B$ de p tal que $V \cap (A_\infty \restriction B) = \emptyset$. Así, $(V \times \square\mathbb{R}^{\kappa \setminus B}) \cap A_\infty = \emptyset$ y necesariamente se cumple que $p \in \overline{A^*}$.

Finalmente, $S = \bigcup_{a \in A^*} supp_p(a)$ es numerable, pues A^* lo es. Así, $A^* \cong A^* \restriction S \subseteq \square\mathbb{R}^S \cong \square\mathbb{R}^\omega$ y aplicar la Proposición 29. ■

Chapter 4

Otros pequeños avances

4.1 ⧫ El espacio $(\{\xi\} \cup \omega)^\omega$ tiene estrechez numerable

A causa del Corolario 30, es interesante preguntarnos si los productos numerables caja y Tychonoff del espacio $\{\xi\} \cup \omega$ son discretamente generados. Como hemos dicho en un principio, el Teorema 18 muestra que $\Box(\{\xi\} \cup \omega)^\omega$ sí es discretamente generado, pues $\{\xi\} \cup \omega$ es monotónicamente normal. El hecho de que el producto Tychonoff $(\{\xi\} \cup \omega)^\omega$ sea discretamente generado aún está por verificarse, quedando fuera de este documento.

En lo siguiente se probará que $(\{\xi\} \cup \omega)^\omega$ tiene estrechez numerable. Cabe mencionar que un interesante resultado para hablar de la estrechez en productos Tychonoff se debe a Alejandro Ramírez con su teorema principal de [7] que cita lo siguiente.

Teorema 31. *Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia de espacios Hausdorff y compactos y supónga que $X = \prod_{s \in S} X_s$ es su producto Tychonoff. Entonces $t(X) = |S| \cdot sup\{t(X_s) : s \in S\}$.*

Por supuesto que no podemos aplicar el resultado anterior debido a que el espacio $\{\xi\} \cup \omega$ no es compacto. Presentamos una prueba directa con propiedades combinatorias.

Proposición 32. *El producto de Tychonoff* $(\{\xi\} \cup \omega)^\omega$ *tiene estrechez numerable.*

Demostración: Sea $x \in (\{\xi\} \cup \omega)^\omega$ y considere $A \subseteq (\{\xi\} \cup \omega)^\omega$ con $x \in A'$.

1. Caso $x \in \omega^\omega$:

   Para cada $n \in \omega$, defina $D_n = \langle x \restriction n \rangle$. Note que cada D_n es abierto y así, debe existir $x_n \in D_n \cap A$. Haga $D = \{x_n : n \in \omega\}$. Ahora veremos que $x \in D'$. Un abierto alrededor de x es un conjunto de la forma $V = \langle x \restriction F \rangle$, donde F es un conjunto finito de naturales. Tome un natural $k \in \omega$ tal que $F \subseteq k$. Por tanto,

   $$x_k \in D_k \cap D \subseteq V \cap D.$$

   Es decir, $t(x, (\{\xi\} \cup \omega)^\omega) = \omega$.

2. Caso $x = \overrightarrow{\xi}$:

   Para cada $n \in \omega$, definimos D_n tal que $\forall a \in D_n$ $(a \restriction n \in A \restriction n)$, y si $a, b \in D_n$ son tales que $a \restriction n = b \restriction n$, entonces $a = b$. Note que cada D_n es numerable. Ahora, $D = \bigcup_{n \in \omega} D_n$ es numerable.

   Veamos que $x \in \overline{D}$. Dados $U \in \xi$ y un finito $F \subseteq \omega$, un abierto alrededor de x es un conjunto de la forma

   $$V = (\{\xi\} \cup U)^n \times (\{\xi\} \cup \omega)^{(\omega \setminus n)}.$$

   Debe existir $a \in A \cap V$. Entonces hay $b \in D_n$ tal que $b \restriction n = a \restriction n$. Por tanto, $b \in D \cap V$.

3. Caso $supp_{\overrightarrow{\xi}}(x)$ cofinito:

   Este caso se puede deducir del caso anterior. Se consigue un conjunto numerable D contenido en A tal que $x \restriction supp_{\overrightarrow{\xi}}(x) \in \overline{D \restriction supp_{\overrightarrow{\xi}}(x)}$ y $A \restriction (\omega \setminus supp_{\overrightarrow{\xi}}(x)) = D \restriction (\omega \setminus supp_{\overrightarrow{\xi}}(x))$.

4. Caso $supp_{\overrightarrow{\xi}}(x)$ infinito-coinfinito:

   Enumere a $supp_{\overrightarrow{\xi}}(x) = \{n_k : k \in \omega\}$, haga $H_i = \{n_j : j \leq i\}$ y $C = \omega \setminus supp_{\overrightarrow{\xi}}(x)$. Para cada $k \in \omega$, defina $V_k = \langle x \restriction H_k \rangle$. Note que V_k es abierto y por lo tanto, $A_k = V_k \cap A$ es no vacío. Ahora considere las restricciones $A_k \upharpoonright C \cup H_k$ y aplique el Caso 2 para conseguir un conjunto numerable $B_k \subseteq A_k \upharpoonright C \cup H_k$ tal que $x \upharpoonright C \cup H_k \in \overline{B_k \upharpoonright C \cup H_k}$. Para cada $b \in B_k$ considere un único elemento $a_b \in A_k$ tal que $a_b \upharpoonright C \cup H_k = b$. Haga $D_k = \{a_b : b \in B_k\}$. Note que $D_k \subseteq A_k \subseteq A$ es un conjunto numerable tal que $x \upharpoonright C \cup H_k \in \overline{D_k \upharpoonright C \cup H_k}$. También, $D = \bigcup_{k \in \omega} D_k$ es numerable, pues cada D_k lo es.

Afirmación 32.1. $x \in \overline{D}$.

En efecto, un abierto alrededor de x es de la forma

$$V = \langle x \upharpoonright F \rangle \bigcap \left((\{\xi\} \cup U)^G \times (\{\xi\} \cup \omega)^{\omega \setminus F \cup G} \right),$$

donde $U \in \xi$, y $F \subseteq supp_{\vec{\xi}}(x)$ y $G \subseteq C$ son finitos. Elija $k \in \omega$ tal que $|F| < n_k$. Finalmente se debe cumplir que $D_k \cap V \neq \emptyset$, pues $x \upharpoonright C \cup H_k \in \overline{D_k \upharpoonright C \cup H_k}$. Así, $D \cap V \neq \emptyset$.

■

4.2 ♦ Un poco sobre el Problema 3.3 de [2]

El siguiente avance refiere a la Pregunta 3.3 de [2]: ¿Es discretamente generado cualquier producto caja de espacios primero numerables?

Supóngase que se tiene que los espacios X_n, $n \in \omega$, son primero numerables y considere un elemento fijo pero arbitrario $x \in \square_{n \in \omega} X_n$. El avance consiste en verificar la propiedad de ser discretamente generado para aquellos subconjuntos $A \subseteq \square_{n \in \omega} X_n$ con elementos de soporte igual a ω y que generen a x, es decir, tales que $x \in \overline{A} \setminus A$ y $\forall a \in A(supp_x(a) = \omega)$.

A pesar de que lo que proponemos es un caso muy particular (falta verificar los subconjuntos A que constan de elemenos con soporte finito e infinito-coinfinito), la técnica vista aquí podría ser mejorada para el caso general.

Proposición 33. *Suponga que para cada $n \in \omega$, el espacio X_n es primero numerable. Fije un elemento $x \in \square_{n \in \omega} X_n$. Sea $A \subseteq \square_{n \in \omega} X_n$ tal que $x \in \overline{A} \setminus A$ y $\forall a \in A\,(supp_x(a) = \omega)$. Entonces existe un subconjunto $D \subseteq A$ discreto tal que $x \in \overline{D}$.*

Demostración: Haremos una diagonalización similar a la que hemos usado en el caítulo anterior. Para cada $n \in \omega$, considere base local numerable decreciente $\langle B_k^n : k \in \omega \rangle$ alrededor de $x(n)$ y definimos $A_k^n = B_k^n \setminus B_{k+1}^n$. Ahora considere a $f_n : X_n \to \omega + 1$ definida por

$$f_n(y) = \begin{cases} n, & si\ y \in A_n; \\ \omega, & si\ y = x(n). \end{cases}$$

Considerando la diagonalización $\Phi : \square_{n\in\omega} X_n \to \square(\omega+1)^\omega$, dada por $\Phi(a) = \langle f_n(a(n)) : n \in \omega \rangle$, es claro que $\Phi(x) = \overrightarrow{\omega}$ y también nos induce una partición sobre $\square_{n\in\omega} X_n$.

En seguida considere un conjunto de representantes en A de dicha partición , digamos $D \subseteq A \cap \Phi^{-1}[\Phi[A]]$. Es decir, D es $\subseteq$-maximal y tal que si $a, b \in D$ son distintos, entonces $\Phi(a) \neq \Phi(b)$.

Afirmación 33.1. *D es discreto.*

Sea $d \in D$. Existe una única sucesión $\langle k_n : n \in \omega \rangle$ de tal forma que $d \in \square_{n\in\omega} A_{k_n}^n$, donde $A_{k_n}^n := B_{k_n}^n \setminus B_{k_n+1}^n$ y $B_{k_n}^n$ es el k_n-ésimo abierto alrededor de $x(n)$.

Para cada $n \in \omega$ existen dos casos.

Caso 1: Si $d(n) \in B_{k_n}^n \setminus \overline{B_{k_n+1}^n}$, haga $U_n = B_{k_n}^n \setminus \overline{B_{k_n+1}^n}$.

Sin perder generalidad, vamos a suponer que nunca sucede el caso 1, pues de lo contrario el conjunto $U = \square_{n\in\omega} U_n$ es abierto y cumple que $\{d\} = U \cap D$.

Caso 2: Si $d(n) \in \overline{B_{k_n+1}^n}$, haga $U_n = B_{k_n}^n \setminus \overline{B_{k_n+2}^n}$.

Por inducción sobre las coordenadas, vamos a refinar a los conjuntos U_n. Para $n = 0$, a lo más existe otro elemento q distinto de d en el conjunto $U_0 \times \square_{n>0} A_n$, pues D era un conjunto $\subseteq$-maximal de representantes en la partición inducida por x. Como cada espacio X_n es Hausdorff, debe existir un conjunto abierto $V_0 \subseteq U_0$ alrededor de $d(0)$ tal que $q(0) \notin V_0$. Por tanto se tendrá que $\{d\} = (V_0 \times \square_{n>0} A_n) \cap D$. Ahora para $n = 1$, a lo más existen dos elementos q_0, q_1 distintos de d en el conjunto $V_0 \times U_1 \times \square_{n>1} A_n$, por la razón antes mencionada. Como antes, podemos conseguir un conjunto abierto $V_1 \subseteq U_1$ alrededor de $d(1)$ tal que $q_0(1), q_1(1) \notin V_1$. Por tanto,

$\{d\} = (V_0 \times U_1 \times \Box_{n>1} A_n) \cap D$. Si seguimos así para $n = k$, a lo más hay $s = 2^k - 2^{k-1}$ elementos $q_0, \ldots, q_s$ distintos de d en el conjunto $V_0 \times \cdots \times V_{k-1} \times U_k \times \Box_{k>n} A_n$. Porque X_n es Hausdorff, podemos conseguir $V_k \subseteq U_k$ alrededor de $d(k)$ tal que $q_0(k), \ldots, q_s(k) \notin V_k$.

Finalmente por la construcción de los V_k es fácil verificar que el conjunto $V = \Box_{k \in \omega} V_k$ es abierto, pues cada V_k lo es, y se cumple que $\{d\} = V \cap D$ por la razón de que D es un conjunto $\subseteq$-maximal de representantes para la partición inducida por x.

■

Bibliography

[1] A. Dow, M. G. Tkachenko, V. V. Tkachuk y R. G. Wilson, *Topologies generated by discrete subspaces*, Glasnik Matematički, 37 (2002) No. 1 189-212.

[2] V. V. Tkachuk y R. G. Wilson, *Box products are often discretely generated*, Topology and its Applications, 159 (2012) 272-278.

[3] Eric K. van Douwen, *Applications if maximal topologies*, Topology and its Apllications, 51 (1993) 125-139.

[4] Ryszard Engelking, *General topology*, Sigma series in pure mathematics, vol. 6, 1989.

[5] K. Kunen y J. E. Vaughan, *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holand (1984) 169-200.

[6] Justin T. Moore, *A solution to the L space problem*, Journal of the American Mathematical Society, 9 (2005) No. 3 717-736.

[7] Alejandro Ramírez Páramo, *Morfismos*, 5 (2001) No. 2 51-61.