



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

**ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FINITO DEL
SISTEMA DEPREDADOR-PRESA
MEDIANTE CONTROLES ACOTADOS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

PRESENTA
MARTHA ELENA NIEVES MORA

ASESOR
DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

MORELIA, MICH. SEPTIEMBRE DE 2022.



A mi madre con cariño.

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mi asesor de tesis el Dr. Abdón Eddy Choque Rivero por todo su apoyo, dedicación, y paciencia que tuvo para conmigo en la realización de esta tesis.

Agradezco a mi familia, principalmente a mi madre Leonor Mora por todo el apoyo que me ha dado y por ser la persona que más admiro, así como a mis hermanos y a mi papá Demes hasta el cielo por ser tan especiales en mi vida. También le doy las gracias a Aracely, Alicia y David por la amistad y apoyo que me brindaron en la licenciatura.

Por último agradezco a mis sinodales: Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova, Dr. Joaquín Estévez Delgado, Dr. Francisco J. Domínguez Mota y Dr. Fernando Garibay Bonales por el tiempo que dedicaron a la revisión de esta tesis.

Abstract

The problem of finite-time stabilization for a Leslie-Gower prey-predator system through a bounded control input is solved. We use Korobov's controllability function. The trajectory of the resulting motion satisfies the physical restriction that prey and predator cannot achieve negative values. For this purpose, a certain ellipse depending on given data and the equilibrium point of the considered system is constructed. Simulation results show the effectiveness of the proposed control methodology.

Keywords: finite-time stabilization, Korobov's controllability function, bounded control input, prey-predator model.

Resumen

Se resuelve el problema de estabilización en tiempo finito para un sistema de presa-depredador Leslie-Gower a través de una entrada de control acotada. Usamos la función de controlabilidad de Korobov. La trayectoria del movimiento resultante satisface la restricción física de que la presa y el depredador no pueden alcanzar valores negativos. Para ello, se construye una determinada elipse en función de los datos dados y del punto de equilibrio del sistema considerado. Los resultados de la simulación muestran la efectividad de la metodología de control propuesta.

Palabras clave: estabilización en tiempo finito, función de controlabilidad de Korobov, entrada de control acotada, modelo presa-depredador.

Índice general

Agradecimientos	III
Abstract	IV
Resumen	V
Índice de figuras	VIII
Introducción	1
1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	6
1.1. Método indirecto de Lyapunov	7
1.2. Método directo de Lyapunov	8
1.2.1. Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz	9
1.3. Controlabilidad	11
1.3.1. Estabilización via linealización	12
1.3.2. Linealización del sistema presa depredador	13
1.4. Estabilización en tiempo finito	15
1.4.1. Problema de síntesis	15

1.5. Función de controlabilidad	16
2. Estabilización en tiempo finito del sistema depredador presa	19
2.1. Análisis de los puntos de equilibrio	19
2.2. Traslación del punto de equilibrio al origen para el sistema presa depredador	24
2.3. Elipse correspondiente al caso cuando θ es constante	38
2.4. Gráfico de la trayectoria y control	42
2.4.1. Ejemplo	42
Apéndice	46
A.1. Resultante de un polinomio	46
A.2. Norma de una matriz	47
A.3. Positividad y unicidad de $\theta(z)$	47
A.4. Traza y determinante de una matriz cuadrada	48
A.5. Fórmula de Taylor para una función de m variables	49
A.6. Teorema de Picard	49
A.7. Forma cuadrática	50
A.8. Extremos de una función cuadrática	50
A.9. Síntesis de controles acotados en primera aproximación	51

Índice de figuras

2.1. Elipse en el plano y	40
2.2. Elipse en el plano $x, \bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	41
2.3. Traectorias de $x_1(t)$ y $x_2(t)$	44
2.4. Retrato fase del sistema $x_1(t)$ vs $x_2(t)$	44
2.5. Función de controlabilidad evolución del tiempo.	44
2.6. La entrada de control posicional.	45

Introducción

Un sistema interesante que exhibe oscilaciones y comportamiento caótico es el modelo presa-depredador, que debido a sus complejas características dinámicas resulta en un sistema desafiante para ser controlado. En este modelo se supone que el depredador está creciendo logísticamente con una capacidad de carga que depende de la disponibilidad de una variedad del recurso capaz (presa). Este modelo se ha utilizado para estudiar biología, fenómenos y el equilibrio de las especies. Las ecuaciones de Lotka-Volterra, también conocidas como ecuaciones depredador-presa, son un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, que se usan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador.

Desde el punto de vista del control, es deseable alcanzar un punto de equilibrio para el sistema, particularmente en tiempo finito y mediante una entrada de control acotada, como se considera en este trabajo. Emplearemos de manera crucial el método de V. I. Korobov que consiste en el uso de la función de controlabilidad (CF), que es una función de tipo Lyapunov. Las principales diferencias entre las funciones CF y Lyapunov son las siguientes:

El uso de la CF (función resp. Lyapunov) permite estabilizar el sistema de control en tiempo finito (resp. en tiempo infinito) [11], [12].

La CF (resp. Función de Lyapunov) se aplica a los puntos de equilibrio o no equilibrio (resp. solo para puntos de equilibrio) [13].

La CF (resp. Función Lyapunov) es una función implícita (resp. Función explícita) [17]. Ver también [14] y [15].

En comparación con trabajos previos sobre la estabilización del modelo de presas y depredadores [18], en este trabajo actual presentamos una familia de controles acotados que estabilizan el mencionado sistema en tiempo finito. Véase el teorema 2.16. Además, para el punto de equilibrio del sistema, se da una vecindad admisible en términos del interior de una elipse. Consulte el lema 2.14 y la observación 2.13.

Antecedentes Históricos

A principios del siglo XX, dos matemáticos, el estadounidense Alfred Lotka y el italiano Vittoria Volterra, desarrollaron de manera independiente unas ecuaciones matemáticas que describen la relación entre dos especies que comparten un mismo recurso. Este modelo se centra solo en las interacciones depredador-presa e ignora la competencia, la enfermedad y el mutualismo. Al igual que con muchos otros modelos matemáticos, se hicieron muchos supuestos en la creación de las ecuaciones de Lotka-Volterra. Tales supuestos incluyen:

1. No hay escasez de alimentos para la población de presas.
2. La cantidad de comida suministrada a la presa está directamente relacionada con el tamaño de la presa.
3. La tasa de cambio de la población es directamente proporcional a su tamaño.
4. El medio ambiente es constante y no se supone que la adaptación genética sea insignificante.
5. Los depredadores nunca dejarán de comer.

En 1910, Lotka propuso las ecuaciones como una forma de entender las velocidades de las reacciones químicas autocatalíticas, procesos químicos que se regulan a sí mismos. En la década siguiente, Lotka aplicó las ecuaciones a la dinámica poblacional de animales salvajes. En 1926, Vito Volterra llegó a las mismas conclusiones, describió las variaciones observadas en las poblaciones de peces en el norte del mar Adriático. Durante la Primera Guerra Mundial se interrumpieron las actividades de pesca, y una vez se reactivó este sector, los pescadores encontraron un número mayor de peces selacios en sus redes. Podría pensarse que la interrupción en la actividad pesquera produciría el aumento de la población de peces presa que produciría, a su turno, el aumento de los peces depredadores. Pero el crecimiento de ambas especies no siguió esta dinámica porque los peces depredadores aumentaron su población en una tasa no proporcional a la tasa de crecimiento observada en la población de peces presas. Usando las mismas ecuaciones que Lotka, Volterra finalmente explicó las fluctuaciones tanto en la especie depredadora como en la presa.

Estas ecuaciones revelan que las especies están atrapadas juntas en una lucha sin fin, pasando de un desastre cercano y extinción a tiempos de abundancia y fertilidad. En esta carrera armamentista biológica, la presión evolutiva sobre la especie de presa es escapar de la depredación y sobrevivir, para tener más descendencia. Mientras tanto, el depredador está bajo presión para tener una tasa de depredación más alta con el fin de proporcionar alimento a más crías. Sin embargo, ninguna de las especies es superior, respondiendo en cambio a las adaptaciones de la otra.

Modelo matemático depredador- presa

Sea la densidad de población de presas y depredadores $X(t)$ e $Y(t)$ respectivamente. Considere el siguiente sistema no lineal, el cual está escrito en la forma Leslie y Gower quienes dieron el primer modelo dependiente de la relación.

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= rX\left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{mYX}{X^2+a} \\ \frac{dY}{dT} &= s\left(1 - \frac{Y}{nX}\right)Y.\end{aligned}$$

Donde el parámetro r es el crecimiento intrínseco de las especies de presa con capacidad de carga K . Además T es una variable de tiempo escalada, m denota la tasa de consumo per cápita del depredador. La constante a denota el número de presas necesarias para obtener la tasa máxima de solo la mitad, mientras s es la tasa de crecimiento de la población Y , finalmente n es la magnitud de la calidad alimentaria de la presa para la reproducción en la población de depredadores [6, 18]. Se toman todos los parámetros positivos. El siguiente conjunto de variables y parámetros adimensionales ayuda a reducir el número de parámetros de seis a tres:

$$\begin{aligned}t = rT, x_1 &= \frac{X}{K}, x_2 = \frac{mY}{rK^2} \\ \alpha &= \frac{a}{k^2}, \beta = \frac{mn}{Kr}, \gamma = \frac{s}{r}.\end{aligned}$$

Esto conduce a una forma adimensional del sistema al cual agregamos un control u

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1) - \frac{x_1x_2}{x_1^2+\alpha} \\ \dot{x}_2 &= \gamma\left(1 - \frac{x_2}{\beta x_1}\right)x_2 + u, \quad |u| \leq u_1.\end{aligned}\tag{0.1}$$

Donde \dot{x}_1, \dot{x}_2 significan la derivada de $x_1(t), x_2(t)$ respecto del tiempo. El sistema (0.1) está definido en el conjunto $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$ con la condición inicial (x_1^0, x_2^0) y $x_1^0 > 0, x_2^0 > 0$, con u como entrada de control para lograr la estabilización del sistema en el punto de equilibrio. Además $(\xi, \eta) \in D$ es el punto de equilibrio del sistema (0.1) con $u = 0$.

Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis es aplicar el método de la función de controlabilidad para resolver el problema de control del sistema presa depredador. Con este fin se utiliza el método propuesto por V.I Korobov de 1979 que consiste en la construcción de un control posicional $u = u(x)$ en base a una función del tipo de Lyapunov $\theta(x)$.

Planteamiento del problema

Dado el sistema (0.1) con α, β, γ parámetros positivos, considerado en la región $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$, se requiere hallar un control posicional $u = u(x)$ tal que satisfaga la condición $|u(x)| \leq u_1$ tal que la trayectoria $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ del sistema (0.1) a partir del punto inicial $x_0 := (x_1^0, x_2^0)$ que pertenece a una determinada vecindad del punto de equilibrio $\bar{x} := (\xi, \eta)$, termina en \bar{x} en tiempo finito $T(x, \bar{x})$. Este problema es llamado problema de síntesis o problema de retroalimentación.

Metodología

Para resolver el problema de estabilización en tiempo finito del sistema de presa depredador, vamos a seguir el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} & \dot{x} = f(x) + bu & \\ & \nearrow & \searrow \\ \dot{z} = A_0z + bw + \tilde{g}(z) & \longleftarrow & \dot{y} = Ay + bu + g(y) \end{array}$$

- (i) Escribir (0.1) como $\dot{x} = f(x) + bu$.
- (ii) Encontrar los puntos de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$.
- (iii) Usando la transformación $y = x - \bar{x}$ se traslada el punto de equilibrio al origen.
- (iv) Usando una segunda transformación $z = Fy$, se traslada de y a z .
- (v) Resolver el problema de síntesis para el sistema canónico $\dot{z} = A_0z + bw$.
- (vi) Transformar de nuevo la solución a la variable original x .
- (vii) Graficar la trayectoria $x(t)$ y el control $u(x(t))$.

Contribuciones de la tesis

En la presente tesis revisamos de manera exhaustiva el trabajo de Choque Rivero A.E., Ornelas-Tellez F. [3]. En particular, hacemos énfasis en la revisión del conjunto de puntos de equilibrio del sistema considerado. Se presentan varios ejemplos que permiten entender la tesis de una manera adecuada desde el punto de vista de un estudiante de licenciatura, cabe resaltar que en esta tesis no se proporciona una contribución original.

Organización de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 1 se revisan las definiciones y teoremas referentes a la teoría de Lyapunov y teoría de control. Se presenta el método V.I. Korobov, el cual está basado en la construcción de la función de controlabilidad $\theta(x)$ que nos permite construir el control posicional buscado $u = u(x)$. En el capítulo 2 se reproducen las definiciones y teoremas referentes al modelo presa depredador, las cuales son de gran utilidad para resolver el problema de síntesis. Se encuentran algunos puntos de equilibrio del modelo presa depredador. Se hace uso de algunos cambios de variable los cuales nos permiten resolver el problema de síntesis para el sistema canónico. Se aplica el método V.I. Korobov de modo que se encuentra una familia de controles acotados que estabilizan el sistema presa depredador en tiempo finito. Se muestran las gráficas obtenidas de la trayectoria, del control encontrado y de la función de controlabilidad.

Capítulo 1

Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La noción de estabilidad que consideraremos en este trabajo fue postulada por el matemático ruso A. M. Lyapunov.¹

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C^1(W)$.

Aquí W es una región en \mathbb{R}^n , es decir, es un conjunto abierto y simplemente conexo. El símbolo $C^1(W)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas, continuas diferenciales parciales de f en W .

Definición 1.1. *Un punto $\bar{x} \in W$ se llama punto de equilibrio del sistema (1.1) si $f(\bar{x}) = 0$.*

Ejemplo 1.1. *Sea $n = 2$ y consideremos el sistema (1.1) con*

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

¹A.M Lyapunov nació en Yaroslavl, imperio Ruso, hijo de Mihail V. Lyapunov, conocido astrónomo ruso. Estudió en la universidad de San Petersburgo, donde tuvo como compañero de estudios a A. Markov. Fue alumno de P.L Chebyshev. Escribió su tesis de doctorado (1892) con el título “ El problema general sobre la estabilidad del movimiento ”. Después de su doctorado fue catedrático de la universidad de Kharkov. Áreas de estudio: Ecuaciones diferenciales, teoría potencial, estabilidad de sistemas y teoría de probabilidades.

Claramente $f(x) = 0$ en los puntos $\bar{x} = (1, 0)^*$ y $\bar{x} = (-1, 0)^*$, los cuales son los únicos puntos de equilibrio de (1.1).

El análisis de las soluciones del sistema (1.1) cerca de los puntos de equilibrio es uno de los principales objetivos en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Un punto de equilibrio, sin embargo, satisface un cierto criterio de estabilidad para ser relevante físicamente.

Definición 1.2. [10] Sea $\bar{x} = 0 \in W$ un punto de equilibrio del sistema (1.1). Se dice que:

- a) \bar{x} es **estable según Lyapunov** (ó simplemente estable) si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$.
- b) \bar{x} es **asintóticamente estable** si es estable y δ puede ser elegida tal que $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.
- c) \bar{x} es **inestable** si no es estable.

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio \bar{x} del sistema (1.1), utilizaremos los método indirecto y directo de Lyapunov.

1.1. Método indirecto de Lyapunov

Se llama sistema lineal asociado al sistema (1.1) al sistema

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.2}$$

donde A es el jacobiano de la función f en el punto $x = \bar{x}$. La matriz jacobiana se denota como

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=\bar{x}}.$$

El método indirecto de Lyapunov permite analizar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema (1.1) mediante el análisis de la estabilidad del punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ del sistema (1.2).

El comportamiento de las soluciones del sistema (1.1) en una vecindad de $x = \bar{x}$ se determina por los valores propios de la matriz A . En particular, se tiene que el origen es

asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa.

Si una matriz A tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces A se llama matriz **de Hurwitz**. Por lo tanto, el origen del sistema (1.2) es asintóticamente estable si y sólo si A es de Hurwitz.

El siguiente teorema detalla las condiciones bajo las cuales podemos sacar conclusiones sobre la estabilidad del punto de equilibrio $\bar{x} = 0$.

Teorema 1.1. (*Método indirecto de Lyapunov*). *El punto de equilibrio \bar{x} del sistema no lineal (1.1) es asintóticamente estable si el origen del sistema lineal (1.2) es asintóticamente estable, esto es, si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa. El punto de equilibrio \bar{x} es inestable si al menos un valor propio de A tiene parte real positiva.*

Ejemplo 1.2. *Consideremos el sistema no lineal en \mathbb{R}^2 :*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 - (x_2 - 1)^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - (x_2 - 1).\end{aligned}$$

Este sistema tiene un punto de equilibrio en $\bar{x} = (0, 1)^$ y su linealización en \bar{x} está dada por*

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz A son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$. Por lo tanto utilizando el método indirecto de Lyapunov concluimos que \bar{x} es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Notemos que el método indirecto de Lyapunov no establece condición alguna para cuando algún valor propio de la matriz A tiene parte real igual a cero, en este caso la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal. En la siguiente sección describiremos otro método, desarrollado también por Lyapunov, que en algunas ocasiones resuelve esta dificultad.

1.2. Método directo de Lyapunov

Uno de los métodos más eficaces para estudiar la estabilidad es el método directo de Lyapunov o también conocido como teorema de Lyapunov sobre la estabilidad. A finales del siglo XIX Lyapunov desarrolló este método para el análisis de la estabilidad en los puntos de equilibrio del sistema (1.1), el cual consiste en considerar una nueva función con ayuda de la cual se establece si el sistema estudiado es estable o asintóticamente estable. A continuación se enuncia el teorema:

Teorema 1.2. (*Método directo de Lyapunov*). Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio de (1.1). Si existe $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una vecindad $U \subset W$ de \bar{x} , derivable en $U \setminus \{\bar{x}\}$, tal que:

- a) $V(\bar{x}) = 0$, $V(x) > 0$ en $U \setminus \{\bar{x}\}$ y
- b) $\dot{V}|_{(1.1)} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \leq 0$ en $U \setminus \{\bar{x}\}$, entonces \bar{x} es estable, si además
- c) $\dot{V}|_{(1.1)} < 0$ en $U \setminus \{\bar{x}\}$, entonces \bar{x} es asintóticamente estable.

Definición 1.3. Una función $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las condiciones a) y b) del teorema, se llama **función de Lyapunov** para \bar{x} . Una función V que satisface la condición a) del teorema 1.2 con $\bar{x} = 0$ se dice que es **positiva definida**.

Ejemplo 1.3. El sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^2 dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 3x_2^3,\end{aligned}$$

tiene al origen como punto de equilibrio y considerando la función positiva definida $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, obtenemos que

$$\dot{V} = 2x_1(x_2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1 - 3x_2^3) = -2(x_1^4 + 3x_2^4).$$

Así $\dot{V} < 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, entonces utilizando el método directo de Lyapunov, el origen es asintóticamente estable.

Una desventaja que se presenta al tratar de aplicar el método directo de Lyapunov es que no existe un método generalizado para hallar funciones de Lyapunov, por lo que es necesario proponer una función positiva definida y probar si ésta cumple las condiciones b) o c) del teorema 1.2.

1.2.1. Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

A continuación, se presenta el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz. Este método nos permite determinar si las raíces de un polinomio de grado n tienen o no parte real negativa sin resolver la ecuación.

La ubicación de las raíces de un polinomio es importante en el estudio de la estabilidad de un sistema lineal. En particular, las raíces del polinomio característico de una matriz que determina un sistema lineal permite caracterizar la estabilidad del sistema mencionado.

Teorema 1.3. (Teorema de Hurwitz). *La condición necesaria y suficiente para que las partes reales de todas las raíces del polinomio*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

con coeficientes reales sean negativas, es que todos los menores principales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

sean positivas.

Donde los menores principales de la matriz de Hurwitz son los siguientes determinantes:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \cdots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Formulemos el criterio de Hurwitz para el polinomio característico de una matriz A 2×2 .

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Recordemos que la traza y el determinante de la matriz A , están dados por:

$$\begin{aligned} \text{Tr} A &= a_{11} + a_{22} \\ \det A &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}, \end{aligned}$$

respectivamente.

El polinomio característico de la matriz A es

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= |A - \lambda I| \\ &= \lambda^2 + p_1 \lambda + q_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $p_1 = -\text{Tr} A$, $q_1 = \det A$.

Observación 1.1. *La condición necesaria y suficiente para que el polinomio característico (1.3) tenga raíces con parte real negativa es que*

$$\text{Tr} A < 0, \quad \det A > 0. \tag{1.4}$$

Demostración. La demostración de esta observación se sigue inmediatamente del teorema de Hurwitz. \square

1.3. Controlabilidad

La teoría de control consiste en el estudio de las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r \quad f \in \mathbf{C}^1(D), D \subset \mathbb{R}^{n+r}, \quad (1.5)$$

donde D es una región, es decir, un conjunto abierto y simplemente conexo. La ecuación diferencial (1.5) puede ser influida por un control de la forma $u = u(x, t)$, en este caso el control depende del estado x y del tiempo t de manera independiente. El control puede ser de la forma $u = u(t)$ de donde el control depende solamente del tiempo, es decir, para cada tiempo determinado, el control cambia. También el control puede ser de la forma $u = u(x)$, en este caso el control depende solamente del estado x , es decir, el control “mira” al estado y de acuerdo a donde se encuentre, actúa. Este es el tipo de control que vamos a estudiar en esta tesis. Este tipo de sistemas de control son de gran utilidad desde el punto de vista de su aplicación. Uno de los problemas de la teoría de control matemática consiste en verificar si es posible llevar un estado x_1 a otro estado x_2 . Este problema se llama problema de controlabilidad. En este trabajo estudiamos sistemas de control desde el punto de vista de estabilidad, es decir, el control u lo entendemos como $u = u(x)$. La particularidad de nuestro trabajo consiste en utilizar controles acotados que son los que aparecen en los modelos matemáticos cercanos a la realidad.

Definición 1.4. Si para un par de estados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ existe una función continua a trozos $u(t)$,

$$u(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$$

tal que la trayectoria $x(t)$ del sistema

$$\dot{x} = f(x, u(t))$$

$$x(0) = x_1$$

satisface la igualdad $x(T) = x_2$, entonces se dice que el control $u(t)$ traslada el estado x_1 al estado x_2 en tiempo T .

Definición 1.5. [16] El sistema (1.5) es completamente controlable si para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ existe un control $u(t)$ definido en $[0, T]$ tal que traslada el estado x_1 al estado x_2 .

Definición 1.6. (Controlabilidad cero). Se considera el sistema de control lineal siguiente:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.6)$$

donde $A_{n \times n}$, $B_{n \times r}$ son matrices reales. Entonces el sistema (1.6) se llama *cero controlable en tiempo T* si existe

$$u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$$

donde Ω es conjunto compacto, tal que $u = u(t)$ traslada x_0 al origen en tiempo T .

El siguiente teorema permite verificar si un sistema lineal de control es o no es completamente controlable en términos de las matrices $A_{n \times n}$ y $B_{n \times r}$. El hecho de que el criterio se presente en términos de las matrices $A_{n \times n}$ y $B_{n \times r}$ del sistema es muy útil ya que no es necesario conocer la solución del sistema.

Teorema 1.4. (Criterio de Kalman). [16] Sea $\Omega = \mathbb{R}^r$. Consideramos el sistema de control lineal siguiente:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.7)$$

donde $A_{n \times n}$, $B_{n \times r}$ son matrices reales. El sistema de control lineal (1.7) es completamente controlable si el rango de la matriz $(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$. Donde n es la dimensión del espacio fase \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.4. Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el criterio de Kalman se tiene que

$$\text{rang}(B, AB) = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es igual a 2 para $\alpha \neq 0$ por lo tanto el sistema en este caso es completamente controlable, y para $\alpha = 0$ el rango es 1 por lo tanto el sistema no será completamente controlable.

1.3.1. Estabilización via linealización

La forma más práctica de abordar el problema de la estabilización para los sistemas no lineales es apelar a los buenos resultados disponibles en el caso lineal, es decir, a través de la linealización. A continuación se diseña una ley de control de retroalimentación que linealiza el sistema sobre el punto de equilibrio deseado y se diseña un control de retroalimentación lineal estabilizador para la linealización [10].

La estabilización de un sistema no lineal controlable

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

donde $f(0, 0) = 0$ y $f \in C^1(W)$, $W \subset \mathbb{R}^{n+r}$ que contiene al origen ($x = 0, u = 0$) se puede llevar a cabo mediante la estabilización de su linealización alrededor del origen, dada por el siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.9)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0}.$$

El par (A, B) se llama controlable si el sistema (1.9) es completamente controlable. El par (A, B) se llama estabilizable si el sistema (1.9) es estable, es decir, todas las soluciones de (1.9) con $u = \tilde{u}(x)$ tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Un sistema completamente controlable es estabilizable pero un sistema estable puede no ser completamente controlable. Esto ocurre cuando no es posible controlar al sistema en cierto subconjunto del espacio \mathbb{R}^n , además, el sistema a lo largo de este subconjunto tiende al origen.

Supongamos que el par (A, B) es controlable o al menos estabilizable. Se diseña una matriz K para asignar los valores propios de $A - BK$ a las ubicaciones deseadas en el semiplano izquierdo del plano complejo. Ahora aplicando el control de retroalimentación lineal de estado $u = -Kx$ al sistema no lineal (1.8), el sistema de circuito cerrado es:

$$\dot{x} = f(x, -Kx). \quad (1.10)$$

Claramente, el origen es un punto de equilibrio del sistema de circuito cerrado. La linealización de (1.10) sobre el origen $x = 0$ está dada por:

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, -Kx) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, -Kx)(-K) \right]_{x=0} x = (A - BK)x.$$

Ya que $A - BK$ es Hurwitz, por el del teorema 1.1 el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema de circuito cerrado.

Ejemplo 1.5. *Deseamos estabilizar el sistema*

$$\dot{x} = x^2 + u,$$

usando un control posicional. La linealización en el origen nos da el sistema lineal $\dot{x} = u$, el cual puede ser estabilizado usando $u = -kx$ con $k > 0$. Cuando este control se aplica al sistema no lineal, tenemos

$$\dot{x} = x^2 - kx,$$

cuya linealización en el origen es $\dot{x} = -kx$. Entonces por el teorema 1.1, el origen es asintóticamente estable, y decimos que $u = -kx$ es un control estabilizador.

1.3.2. Linealización del sistema presa depredador

En esta sección utilizamos resultados del artículo [18]. Vamos a estudiar la estabilización en tiempo infinito del sistema linealizado que corresponde al sistema (0.1).

Reescribiremos el sistema (0.1) con las transformaciones $v = x_1 - x_1^*$ y $w = x_2 - x_2^*$, de manera que el sistema (0.1) se reduce a

$$\begin{aligned}\dot{v} &= (v + x_1^*)(1 - (v + x_1^*)) - \frac{(v + x_1^*)(w + x_2^*)}{(v + x_1^*)^2 + \alpha}, \\ \dot{w} &= (w + x_2^*)(\gamma - \frac{\gamma(w + x_2^*)}{\beta(v + x_1^*)}) + u.\end{aligned}\quad (1.11)$$

El sistema (1.11) linealizado tiene la forma:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + bu \quad (1.12)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} (1 - 2x_1^* - \frac{(\alpha - x_1^{*2})\beta x_1^*}{(x_1^{*2} + \alpha)^2}) & -\frac{x_1^*}{x_1^{*2} + \alpha} \\ \beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix}, \\ \tilde{x} &= \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Teorema 1.5. *Sea (x_1^*, x_2^*) el punto de equilibrio del sistema (0.1). La ley de control de retroalimentación $u = k_1(x_1 - x_1^*) + k_2(x_2 - x_2^*)$ estabiliza el sistema linealizado (1.12) en tiempo infinito, donde*

$$\begin{aligned}k_1 &> \frac{(k_2 - \gamma)(1 - 2x_1^* - \frac{(\alpha - x_1^{*2})\beta x_1^*}{(x_1^{*2} + \alpha)^2})}{\frac{x_1^*}{x_1^{*2} + \alpha}} - \beta\gamma, \\ k_2 &< \gamma + 2x_1^* + \frac{(\alpha - x_1^{*2})\beta x_1^*}{(x_1^{*2} + \alpha)^2} - 1.\end{aligned}$$

Demostración. En la retroalimentación lineal, cada variable de control toma como una combinación lineal de variables de estado. En nuestro caso

$$u = K\tilde{x}, \quad (1.14)$$

donde el vector fila $K = (k_1 \ k_2)$ representa una retroalimentación constante. Usando (1.14), el sistema (1.12) puede escribirse como

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + bK)\tilde{x} = C\tilde{x}, \quad (1.15)$$

$$C = \tilde{A} + bK = \begin{pmatrix} (1 - 2x_1^* - \frac{(\alpha - x_1^{*2})\beta x_1^*}{(x_1^{*2} + \alpha)^2}) & -\frac{x_1^*}{x_1^{*2} + \alpha} \\ \beta\gamma + k_1 & -\gamma + k_2 \end{pmatrix}.$$

La traza y el determinante de la matriz C son

$$\begin{aligned}\text{Tr}C &= 1 - 2x_1^* - \frac{(\alpha - x_1^{*2})\beta x_1^*}{(x_1^{*2} + \alpha)^2} - \gamma + k_2 \\ \det C &= \left(1 - 2x_1^* - \frac{(\alpha - x_1^{*2})\beta x_1^*}{(x_1^{*2} + \alpha)^2}\right)(-\gamma + k_2) + (\beta\gamma + k_1)\left(\frac{x_1^*}{x_1^{*2} + \alpha}\right).\end{aligned}$$

La definición de traza de una matriz y determinante pueden consultarse en apéndice (ver sección A.4). Se deduce del criterio de Routh-Hurwitz que el sistema controlado (1.15) es estable si y sólo si se satisface (1.4). Por lo tanto, si k_1 y k_2 satisfacen las desigualdades

$$k_1 > \frac{(k_2 - \gamma)(1 - 2x_1^* - \frac{(\alpha - x_1^{*2})\beta x_1^*}{(x_1^{*2} + \alpha)^2})}{\frac{x_1^*}{x_1^{*2} + \alpha}} - \beta\gamma,$$

$$k_2 < \gamma + 2x_1^* + \frac{(\alpha - x_1^{*2})\beta x_1^*}{(x_1^{*2} + \alpha)^2} - 1 < 0.$$

La solución $x = 0$ del sistema (1.15) es estable. \square

Observación 1.2. En la sección (2.2) presentamos una expresión diferente para la matriz \tilde{A} . En (1.13), la matriz \tilde{A} utiliza los parámetros α , β , γ mientras que (2.37) la matriz \tilde{A} se determina mediante β , γ como parámetros.

1.4. Estabilización en tiempo finito

1.4.1. Problema de síntesis

El problema de síntesis ó problema de retroalimentación, se plantea de la siguiente manera:

Consideremos un sistema controlable

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in W \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r. \quad (1.16)$$

Se quiere construir un conjunto de controles posicionales $U = \{u(x)\}$ tales que:

- i) $u(x)$ sea una función continua, continua diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y cumpla con la restricción $\|u(x)\| \leq d$.
- ii) La trayectoria del sistema cerrado $\dot{x} = f(x, u(x))$, que comienza en $x(0) = x_0$ termine en el origen en tiempo finito $T(x_0) < \infty$.

Entre las particularidades de este problema se tienen las siguientes:

El sistema cerrado no satisface las condiciones del teorema de Picard sobre existencia y unicidad (ver apéndice, sección A.6) en la región donde se resuelve el problema de síntesis, ya que a través del punto $x = 0$ pasan un conjunto infinito de trayectorias. Esta dificultad se puede resolver si:

- a) Consideramos controles continuos para $x \neq 0$, que satisfagan la condición de Lipschitz en cada anillo $\{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$ y tales que para $\rho_1 \rightarrow 0$ la condición de Lipschitz crezca sin cota.
- b) Consideramos controles discontinuos, los cuales requieren de una nueva definición de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales con parte derecha discontinua (ver [5]). Este caso no lo consideraremos en este trabajo.
- c) Además ya que el control $u(x)$ satisface la restricción $u \in \Omega$, entonces aún en el caso lineal el sistema cerrado es no lineal.

V.I. Korobov sugirió en [11] un método de resolución del problema de síntesis para sistemas lineales y algunos no lineales, este método está basado en la construcción de una función $\theta(x)$ mediante la cual se construye el control posicional buscado $u(x) = \tilde{u}(x, \theta(x))$. La función $\theta(x)$ es una función del tipo de Lyapunov y se describe en el siguiente teorema.

1.5. Función de controlabilidad

Teorema 1.6. (*Teorema fundamental de la función de controlabilidad*) [Korobov, 1979]. Consideremos el sistema controlable dado por:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.17)$$

Supongamos que la función f satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(x'', u'') - f(x', u')\| \leq L_1(\rho, \rho_1)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|)$$

en cada región $(x, u) : 0 < \rho \leq \|x\| < \rho_1, \quad u \in \Omega$.

Si existe una función $\theta(x)$ continua en una vecindad G del origen y un control $u(x)$ con $x \in Q \subseteq G$ donde $Q = \{x : \theta(x) \leq C, \quad C > 0\}$ (C es tal que el conjunto Q es acotado) tales que:

1. $\theta(x)$ es continuamente diferenciable en $G \setminus \{0\}$.
2. $\theta(0) = 0, \theta(x) > 0$ para $x \in G \setminus \{0\}$.
3. El control $u(x)$, cumple la condición de Lipschitz es decir, se tiene

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho, \rho_1)\|x'' - x'\|$$

para $x \in Q$ y $0 < \rho \leq \|x\| < \rho_1$.

4. Se satisface la desigualdad:

$$\dot{\theta}|_{(1.17)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \theta^{1-1/\alpha}(x) \quad (1.18)$$

para $\alpha > 0, \beta > 0$.

Entonces la trayectoria del sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$, que comienza en un punto $x(0) = x_0 \in Q$, termina en el origen en tiempo finito:

$$T(x_0) \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{1/\alpha}(x_0). \quad (1.19)$$

Demostración. Calculamos la derivada de $\theta(x)$ respecto al tiempo, evaluada en el sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$ sobre la trayectoria $x(t)$ que comienza en el punto $x_0 \in Q$. Tenemos:

$$\dot{\theta}(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t), u(x(t)))$$

ya que se satisface la desigualdad (1.18), se tiene:

$$\dot{\theta}(x(t)) \leq -\beta \theta^{1-1/\alpha}(x(t)).$$

Si la trayectoria $x(t) \neq 0$ entonces

$$\frac{d}{dt} \theta^{1/\alpha}(x(t)) = \frac{\dot{\theta}(x(t))}{\alpha \theta^{1-1/\alpha}(x(t))} \leq \frac{\beta \theta^{1-1/\alpha}(x(t))}{\alpha \theta^{1-1/\alpha}(x(t))} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Sea $\tau > 0$ cualquier número tal que la solución $x(t)$ está bien definida en $[0, \tau]$. Integramos la última desigualdad de 0 a τ , entonces:

$$\theta^{1/\alpha}(x(\tau)) - \theta^{1/\alpha}(x_0) \leq -\frac{\beta}{\alpha} \tau$$

o equivalentemente:

$$\theta^{1/\alpha}(x(\tau)) \leq \theta^{1/\alpha}(x_0) - \frac{\beta}{\alpha} \tau. \quad (1.20)$$

Denotemos por $B(0, \epsilon)$ y $B(0, \rho_0)$ las bolas con centro en 0 y radios ϵ y ρ_0 respectivamente y $\epsilon \leq \|x_0\|$, ρ_0 tal que $Q \subset B(0, \rho_0)$. Como cualquier solución que comienza en un punto $x_0 \in Q$ se queda en Q (debido a que $\dot{\theta}(x(t)) \leq 0$) y si $x', x'' \in Q \setminus B(0, \epsilon)$ tiene lugar la desigualdad:

$$\|f(x'', u(x'')) - f(x', u(x'))\| \leq L_1(\epsilon, \rho_0) (1 + L_2(\epsilon, \rho_0)) \|x'' - x'\|.$$

Entonces la solución $x(t)$ que empieza en $x_0 \in Q$, se puede extender al segmento $[0, T_1]$ tal que si $t \in [0, T_1]$ entonces $\|x(t)\| > \epsilon$, por eso para esos valores de t , la desigualdad (1.20) es cierta.

Probemos que en el tiempo $T(\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{1/\alpha}(x_0)$ la trayectoria $x(t)$ llega a la frontera de la bola $S(\varepsilon)$. Suponiendo lo contrario, obtenemos que $\|x(t)\| > \varepsilon$ para $0 \leq t \leq T$ y $T > \frac{\alpha}{\beta} \theta^{1/\alpha}(x_0)$ pero si $\tau \neq T$, la parte derecha de la desigualdad (1.20) es no positiva, pero la parte izquierda de la misma desigualdad cuando $\tau \neq T$, es positiva ya que $\|x(t)\| > \varepsilon$. Como el tiempo de llegada a la frontera de la bola de radio ε crece monótonamente si ε decrece y como $T(\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{1/\alpha}(x_0)$, entonces existe $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \tau \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{1/\alpha}(x_0)$ pero $\lim_{t \rightarrow T} x(t) = 0$.

□

La función $\theta(x)$ se llama **función de controlabilidad**.

Observación 1.3. Notemos que para $\alpha = \infty$ en caso de cumplirse la desigualdad (1.18), la función $\theta(x)$ es la función de Lyapunov.

Capítulo 2

Estabilización en tiempo finito del sistema depredador presa

2.1. Análisis de los puntos de equilibrio

En este capítulo vamos a considerar el problema de estabilización para el sistema presa depredador (0.1). Estudiaremos el número, la conducta y el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio \bar{x} del sistema (0.1) en el primer cuadrante. Para ello se requiere el siguiente teorema el cual es de gran utilidad para conocer los ceros de una función en un intervalo determinado.

Teorema 2.1. (*Teorema de Bolzano*). [1] Sea f continua en cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Existe entonces por lo menos un c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.

Recordando que el estado (x_1, x_2) del sistema (0.1) pertenece al primer cuadrante abierto, cuando $x_1 > 0$ y $x_2 \geq 0$, entonces la siguiente observación es válida.

Lema 2.2. Las coordenadas del punto de equilibrio (ξ, η) del sistema (0.1) satisfacen las siguientes desigualdades:

$$0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < \beta. \quad (2.1)$$

Demostración. Demostraremos la primera desigualdad de (2.1). Buscamos los puntos de equilibrio del sistema (0.1) con $u = 0$. Igualando la parte derecha de (0.1) a cero, de la primera ecuación se tiene

$$x_1 ((x_1^2 + \alpha)(1 - x_1) - x_2) = 0, \quad x_1 > 0, x_2 \geq 0. \quad (2.2)$$

Sea $x_1 > 0$, entonces, la igualdad (2.2) es equivalente a

$$(x_1^2 + \alpha)(1 - x_1) - x_2 = 0. \quad (2.3)$$

De la segunda ecuación del sistema (0.1), tenemos:

$$\gamma(\beta x_1 - x_2) \frac{x_2}{\beta x_1} = 0, \quad x_1 > 0. \quad (2.4)$$

De (2.4) y (2.3) se desprenden los siguientes casos:

Caso I. La ecuación (2.4) es cero si $x_2 = 0$. Colocando $x_2 = 0$ en (2.3) se obtiene la igualdad $x_1 = 1$. Así, un punto de equilibrio es $\bar{x} = (1, 0)$. Dicho punto de equilibrio no es físicamente apropiado para el modelo presa-depredador.

Caso II. Si $x_2 \neq 0$ en (2.4), entonces se debe cumplir la igualdad

$$x_2 = \beta x_1. \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.3) tenemos:

$$-x_1^3 + x_1^2 - (\alpha + \beta)x_1 + \alpha = 0. \quad (2.6)$$

Ahora verificamos que (2.6) tiene una solución en el intervalo $(0, 1)$. Evaluando $f(x_1)$ en $x_1 = 0$, y $x_1 = 1$, tenemos:

$$f(0) = \alpha, \quad \alpha > 0 \quad (2.7)$$

$$f(1) = -\beta, \quad \beta > 0. \quad (2.8)$$

Por teorema de Bolzano existe ξ tal que $f(\xi) = 0$ con $0 < \xi < 1$. Demostraremos que no existen ceros de $f(x_1)$ en $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Notemos que la derivada de $f(x_1)$ tiene la forma

$$f'(x_1) = -3x_1^2 + 2x_1 - (\alpha + \beta). \quad (2.9)$$

Los ceros de $f'(x_1)$ son:

$$\tilde{x}_1 = f_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{1 - 3\alpha - 3\beta}) \quad (2.10)$$

$$\tilde{x}_2 = f_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{1 - 3\alpha - 3\beta}). \quad (2.11)$$

Calculando la segunda derivada de $f(x_1)$ tenemos que el máximo de $f'(x_1)$ se alcanza en $x_1 = \frac{1}{3}$. Tomando en cuenta que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, observamos que el mayor de los ceros de $f'(x_1)$ satisface la desigualdad

$$\tilde{x}_2 < \frac{2}{3},$$

y el menor de los ceros de $f'(x_1)$ satisface:

$$\tilde{x}_1 > 0.$$

Consecuentemente, la derivada de la función $f(x_1)$ satisface $f'(x_1) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$. De manera análoga comprobamos la desigualdad $f'(x_1) < 0$ en el intervalo $(1, \infty)$. Así, la función $f(x_1)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Por el hecho de que $f(0) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ y que la función es continua, tenemos que $f(x_1)$ no tiene ceros en $(-\infty, 0]$.

La derivada de la función $f(x_1)$ satisface $f'(x_1) < 0$ en el intervalo $(1, \infty)$. Notamos que $f'(x_1) < 0$, entonces $f(x_1)$ es estrictamente decreciente. Por (2.8) tenemos que $f(x_1)$ no tiene ceros en el intervalo $[1, \infty)$. La segunda desigualdad de (2.1) se demuestra usando (2.4). \square

Lema 2.3. a) Para que la ecuación (2.6) tenga una única solución con multiplicidad tres, es necesario y suficiente que $\alpha = \frac{1}{27}$, $\beta = \frac{8}{27}$ y la raíz es igual a $\xi = \frac{1}{3}$.

b) Para que la ecuación (2.6) tenga dos soluciones diferentes, una de ellas con multiplicidad dos es necesario y suficiente que

$$0 < \alpha < \frac{1}{27}, \quad 0 < \beta < \frac{8}{27}. \quad (2.12)$$

c) Sea

$$\beta = \alpha^{\frac{1}{3}} - \alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2.13)$$

Entonces la ecuación (2.6) tiene las siguientes tres raíces

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 2\alpha^{\frac{1}{3}} - 3\alpha^{\frac{2}{3}} - \alpha^{\frac{1}{3}}}), \xi_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 2\alpha^{\frac{1}{3}} - 3\alpha^{\frac{2}{3}} - \alpha^{\frac{1}{3}}}), \xi_3 = \alpha^{\frac{1}{3}}. \quad (2.14)$$

Demostración. a) Sea x^* el cero de multiplicidad 3 para (2.6). Usando el binomio de Newton para el polinomio de tercer grado tenemos

$$\begin{aligned} -(x - x^*)^3 &= -(x^3 - 3x^*x^2 + 3x^{*2}x - x^{*3}) \\ &= -x^3 + 3x^*x^2 - 3x^{*2}x + x^{*3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Igualando coeficientes de (2.15) y (2.6) tenemos

$$3x^* = 1.$$

De donde se obtiene que la raíz única de multiplicidad tres de (2.15) es $x^* = \frac{1}{3}$. Reemplazando x^* en (2.15) tenemos:

$$-x^3 + x^2 - 3\left(\frac{1}{9}\right)x + \frac{1}{27}. \quad (2.16)$$

Comparando la expresión (2.16) con (2.6) obtenemos

$$\alpha = \frac{1}{27}, \quad \alpha + \beta = \frac{1}{3}.$$

De esta manera, $\alpha = \frac{1}{27}$ y $\beta = \frac{8}{27}$. Queda demostrado a).

- b) Asumiendo que la ecuación (2.6) tiene una raíz con multiplicidad doble $x = p$ y otra raíz con multiplicidad uno $x = q$ con $p \neq q$. Usando el teorema de Vieta (ver apéndice [9]), tenemos:

$$\begin{aligned} -(x-p)^2(x-q) &= -(x^2 - 2px + p^2)(x-q) \\ &= -x^3 + (2p+q)x^2 - (p^2 + 2pq)x + p^2q. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Comparando los coeficientes de (2.17) y (2.6), tenemos:

$$2p + q = 1, \quad (2.18)$$

$$p(p + 2q) = \alpha + \beta, \quad (2.19)$$

$$p^2q = \alpha. \quad (2.20)$$

Reescribiendo (2.18),

$$q = 1 - 2p. \quad (2.21)$$

De manera que al sustituir en (2.19) y (2.20) tenemos

$$p^2(1 - 2p) = \alpha, \quad (2.22)$$

$$2(-1 + p)^2p = \beta. \quad (2.23)$$

Dado que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, de (2.22) se tiene la desigualdad $1 - 2p > 0$. De manera análoga, de la ecuación (2.23) se infiere la desigualdad $2p > 0$. De esta manera tenemos la siguiente desigualdad

$$0 < p < \frac{1}{2}. \quad (2.24)$$

Encontrando el máximo de (2.22) y (2.23) para p que satisface (2.24) tenemos que para α y β se satisfacen las desigualdades (2.12). Usando (2.21) es posible escribir relaciones para α y β en términos de q . De manera análoga, como la raíz $x = p$, se obtienen las desigualdades (2.12).

- c) El valor de β que aparece en (2.13) es positivo para $0 < \alpha < 1$. Usando la igualdad (2.13) en la ecuación (2.6) tenemos

$$-x_1^3 + x_1^2 - x_1\alpha^{\frac{1}{3}} + \alpha = 0. \quad (2.25)$$

Las soluciones de la ecuación (2.25) están dadas por (2.14). A continuación, verificamos para que valores de

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{27} \quad (2.26)$$

las raíces que aparecen en (2.14) son positivas. Observemos que las soluciones ξ_1 y ξ_2 estas bien definidas para

$$1 - 2\alpha^{\frac{1}{3}} - 3\alpha^{\frac{2}{3}} \geq 0.$$

En efecto, sea

$$t := \alpha^{\frac{1}{3}}, \quad 1 - 2\alpha^{\frac{1}{3}} - 3\alpha^{\frac{2}{3}} = 1 - 2t - 3t^2. \quad (2.27)$$

Entonces, la desigualdad

$$1 - 2t - 3t^2 \geq 0$$

se satisface para $-1 \leq t \leq \frac{1}{3}$. Tomando en cuenta que $a > 0$, la desigualdad (2.26) se satisface. Por lo tanto, para α como en (2.26) las igualdades ξ_1, ξ_2 de (2.14) toman valores positivos. Por último, ya que $\alpha > 0$, la raíz ξ_3 también es positiva. Claramente, las raíces de (2.25) son diferentes y por la primera desigualdad del lema 2.2 se tiene que están entre $0 < \xi_k < 1$ para $k = 1, 2, 3$. La coordenada η se obtiene usando las igualdades (2.5) y (2.14):

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{-3\alpha^{2/3} - 2\sqrt[3]{\alpha} + 1 + \sqrt[3]{\alpha} - 1} \right) (\alpha - \sqrt[3]{\alpha}), \quad (2.28)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{-3\alpha^{2/3} - 2\sqrt[3]{\alpha} + 1 - \sqrt[3]{\alpha} + 1} \right) (\sqrt[3]{\alpha} - \alpha), \quad (2.29)$$

$$\eta_3 = \alpha^{2/3} - \alpha^{4/3}. \quad (2.30)$$

□

Observación 2.1. *El inciso c) de lema 2.3 se puede verificar usando el resultante de dos polinomios (ver apéndice, definición (A.2)).*

Demostración. Procedemos a calcular la resultante (ver apéndice, definición A.2) de dos polinomios:

$$\text{Res}(f_1(x), f_1'(x_1)) = -4\alpha^3 + \beta^2 - 4\beta^3 - 4\alpha^2(2 + 3\beta) - 4\alpha(1 - 5\beta + 3\beta^2)$$

de la ecuación (2.10) tomamos $1 - 3\alpha - 3\beta = 0$ y resolviendo para α tenemos la siguiente expresión

$$-\frac{1}{27}(8 - 27\beta)^2 = 0. \quad (2.31)$$

De (2.31) obtenemos que $\beta = \frac{8}{27}$. Por consiguiente, sustituyendo el valor de β en la resultante se tiene $\alpha = \frac{1}{27}$. Entonces, para $\alpha = \frac{1}{27}$ y $\beta = \frac{8}{27}$ sustituidos en (2.6) y (2.9) encontramos $\xi = \frac{1}{3}$ como la raíz común de multiplicidad tres perteneciente a la ecuación (2.6). Finalmente notemos que el punto de equilibrio correspondiente a $\xi = \frac{1}{3}$ es $\bar{x} = (\frac{1}{3}, \frac{8}{81})$. □

2.2. Traslación del punto de equilibrio al origen para el sistema presa depredador

En esta sección vamos a trasladar el punto de equilibrio \bar{x} al origen mediante el uso del cambio de variable descrito en la siguiente observación:

Observación 2.2. *Sea $\bar{x} = (\xi, \eta)$ un punto de equilibrio de (0.1) con $u = 0$. Aplicando el cambio de variable*

$$y = x - \bar{x}, \quad (2.32)$$

el punto de equilibrio \bar{x} se traslada al origen respecto de la variable y .

El sistema (0.1) se puede escribir como:

$$\dot{x} = f(x) + bu. \quad (2.33)$$

De (2.32), tenemos que $\dot{y} = \dot{x}$. Donde \dot{x} se representa en (0.1) y \dot{y} denota la derivada respecto de t . Usando el cambio (2.32) y ecuación (2.33) resulta:

$$\dot{y} = f(y + \bar{x}) + bu. \quad (2.34)$$

Denotamos $h(y) := f(y + \bar{x})$ y sustituyendo $y = 0$ tenemos $h(0) = 0$. La ecuación (2.34) queda reescrita como

$$\dot{y} = h(y) + bu \quad (2.35)$$

sustituyendo $h(0) = 0$ en (2.35) se tiene $y = 0$ como punto de equilibrio del sistema (2.35). Escribiendo $h(y)$ mediante la fórmula de Taylor alrededor del punto $y = 0$ con los dos primeros coeficientes tenemos

$$h(y) = h(0) + h'(0)y + g(y).$$

Aquí $h(0)$ es un vector, $h'(0)$ es la matriz jacobiana de $h(y)$ en el origen. Ver apéndice, teorema A.18. Entonces, la ecuación (2.35) se reescribe como

$$\dot{y} = Ay + bu + g(y). \quad (2.36)$$

Observación 2.3. *Sea $\bar{x} = (\xi, \eta)$ un punto de equilibrio de (0.1) con $u = 0$. Aplicando el cambio de variable (2.32), la matriz A de (2.36) tiene la forma:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2\xi(1-\xi)^2}{\beta} - \xi & -\frac{1-\xi}{\beta} \\ \beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Demostración. A continuación procedemos a encontrar la matriz A de (2.36). Aplicando el cambio de variable $x_1 = y_1 + \xi$ y $x_2 = y_2 + \eta$ a la parte derecha del sistema (0.1) con $u = 0$, resulta la siguiente expresión:

$$f(x - \bar{x}) = \begin{pmatrix} (y_1 + \xi) \left(1 - y_1 - \xi - \frac{y_2 + \eta}{\alpha + (y_1 + \xi)^2} \right) \\ \gamma(y_2 + \eta) \left(1 - \frac{y_2 + \eta}{y_1 \beta + \beta \xi} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Calculando el jacobiano de (2.38) en (ξ, η) , tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 - \xi - \frac{\eta}{\alpha + \xi^2} + \xi \left(-1 + \frac{2\eta\xi}{(\alpha + \xi^2)^2} \right) & -\frac{\xi}{\alpha + \xi^2} \\ \frac{\gamma\eta^2}{\beta\xi^2} & \frac{\gamma(\beta\xi - 2\eta)}{\beta\xi} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Aplicando la relación $\eta = \beta\xi$ al jacobiano, la matriz de (2.39) se reduce a

$$\begin{pmatrix} \frac{\xi(2(\xi-1)^2 - \beta)}{\beta} & \frac{\xi-1}{\beta} \\ \beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Aquí hemos usado: $-\frac{\xi}{\alpha + \xi^2} = -\frac{1-\xi}{\beta}$ y $\frac{\xi(2(\xi-1)^2 - \beta)}{\beta} = \frac{2\xi(1-\xi)^2}{\beta} - \xi$. De esta manera, queda demostrado (2.37). \square

Observación 2.4. Sea $\bar{x} = (\xi, \eta)$ un punto de equilibrio de (0.1) con $u = 0$. Aplicando el cambio de variable (2.32), la parte no lineal $g(y)$ de (2.36) tiene la forma:

$$g(y) := \begin{pmatrix} -\frac{\beta y_1^4 + p_1 y_1^3 + p_2 + y_2 p_3 + y_1 p_4 + y_1 y_2 p_5 + (-1 + \xi) y_1^2 y_2 + y_1^2 p_6}{\beta(\alpha + \xi^2 + y_1^2 + 2y_1\xi)} \\ -\frac{\gamma(y_2 - \beta y_1)^2}{\beta(\xi + y_1)} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

donde

$$p_1 := (\beta(3\xi - 1) + 2\xi(\xi - 1)^2), \quad (2.41)$$

$$p_2 := \beta\xi(\alpha(\xi - 1) + \eta + (\xi - 1)\xi^2), \quad (2.42)$$

$$p_3 := (\alpha(\xi - 1) + \xi(\beta + (\xi - 1)\xi)), \quad (2.43)$$

$$p_4 := (\alpha(\xi - 1)(\beta + 2(\xi - 1)\xi) + \beta(\eta + 3(\xi - 1)\xi^2) + 2(\xi - 1)^2\xi^3), \quad (2.44)$$

$$p_5 := (\beta + 2(\xi - 1)\xi), \quad (2.45)$$

$$p_6 := (\alpha\beta + \xi(\beta(4\xi - 3) + 4\xi(\xi - 1)^2)y_1^2(\alpha\beta + \xi(\beta(4\xi - 3) + 4\xi(\xi - 1)^2))). \quad (2.46)$$

Aquí $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Demostración. Para obtener la parte no lineal del sistema (2.36) igualamos la parte derecha de (2.34) y (2.36):

$$g(y) = f(y + \bar{x}) - Ay = \begin{pmatrix} \frac{\xi y_1(\beta - 2(\xi - 1)^2)}{\beta} + (\xi + y_1) \left(-\xi - \frac{\eta + y_2}{\alpha + (\xi + y_1)^2} - y_1 + 1 \right) + \frac{y_2 - \xi y_2}{\beta} \\ \gamma \left(-\beta y_1 + (\eta + y_2) \left(1 - \frac{\eta + y_2}{\beta \xi + \beta y_1} \right) + y_2 \right) \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Denotamos (2.47) como $\begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$. Reescribimos (2.47). Comenzamos factorizando $g_1(y_1, y_2)$ como sigue:

$$g_1 = -\frac{1}{\beta(\alpha + \xi^2 + y_1^2 + 2\xi y_1)} (\alpha\beta\xi^2 - \alpha\beta\xi + \beta\eta\xi + \beta\xi^4 - \beta\xi^3 + \beta y_1^4 + 3\beta\xi y_1^3 - \beta y_1^3 + 2\xi^3 y_1^3 - 4\xi^2 y_1^3 + 2\xi y_1^3 + \alpha\beta y_1^2 + 4\beta\xi^2 y_1^2 - 3\beta\xi y_1^2 + 4\xi^4 y_1^2 - 8\xi^3 y_1^2 + 4\xi^2 y_1^2 + \xi y_1^2 y_2 - y_1^2 y_2 + \alpha\beta\xi y_1 - \alpha\beta y_1 + 2\alpha\xi^3 y_1 - 4\alpha\xi^2 y_1 + 2\alpha\xi y_1 + \beta\eta y_1 + 3\beta\xi^3 y_1 - 3\beta\xi^2 y_1 + 2\xi^5 y_1 - 4\xi^4 y_1 + 2\xi^3 y_1 + \beta y_1 y_2 + 2\xi^2 y_1 y_2 - 2\xi y_1 y_2 + \alpha\xi y_2 - \alpha y_2 + \beta\xi y_2 + \xi^3 y_2 - \xi^2 y_2). \quad (2.48)$$

Denotamos el numerador de (2.48) como

$$n_1 := \alpha\beta\xi^2 - \alpha\beta\xi + \beta\eta\xi + \beta\xi^4 - \beta\xi^3 + \beta y_1^4 + y_1^3 (3\beta\xi - \beta + 2\xi^3 - 4\xi^2 + 2\xi) + y_1^2 (\alpha\beta + 4\beta\xi^2 - 3\beta\xi + 4\xi^4 - 8\xi^3 + 4\xi^2 + \xi y_2 - y_2) + y_1 (\alpha\beta\xi - \alpha\beta + 2\alpha\xi^3 - 4\alpha\xi^2 + 2\alpha\xi + \beta\eta + 3\beta\xi^3 - 3\beta\xi^2 + 2\xi^5 - 4\xi^4 + 2\xi^3 + \beta y_2 + 2\xi^2 y_2 - 2\xi y_2) + \alpha\xi y_2 - \alpha y_2 + \beta\xi y_2 + \xi^3 y_2 - \xi^2 y_2.$$

Reescribiendo n_1 en potencias de y_1 y y_2 , tenemos:

$$n_1 = \beta y_1^4 + p_1 y_1^3 + p_2 + y_2 p_3 + y_1 p_4 + y_1 y_2 p_5 + (-1 + \xi) y_1^2 y_2 + y_1^2 p_6.$$

De modo que sustituyendo en $g_1(y_1, y_2)$ resulta:

$$g_1(y_1, y_2) = -\frac{\beta y_1^4 + p_1 y_1^3 + p_2 + y_2 p_3 + y_1 p_4 + y_1 y_2 p_5 + (-1 + \xi) y_1^2 y_2 + y_1^2 p_6}{\beta(\alpha + \xi^2 + y_1^2 + 2y_1\xi)},$$

donde p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 son como en (2.41)-(2.46). Ahora procedemos a la simplificación de $g_2(y_1, y_2)$ y lo factorizamos como:

$$g_2(y_1, y_2) = -\frac{\gamma(-\beta\eta\xi + \eta^2 + \beta^2 y_1^2 + \beta^2 \xi y_1 - \beta\eta y_1 - 2\beta y_1 y_2 + y_2^2 - 2\beta\xi y_2 + 2\eta y_2)}{\beta(\xi + y_1)}. \quad (2.49)$$

Para reducir términos del numerador de (2.49), agrupamos los coeficientes respecto de y_1 y tomamos valores de $\xi = 0, \eta = 0$ de manera que $g_2(y_1, y_2)$ se reescribe como:

$$g_2(y_1, y_2) = -\frac{\gamma(y_2 - \beta y_1)^2}{\beta(\xi + y_1)}. \quad (2.50)$$

Así, la parte no lineal del sistema (2.36) se escribe como en (2.40). \square

Lema 2.4. *Sea (2.36) el sistema trasladado al origen. Las matrices A y $g(y)$ pertenecientes a (2.36) se definen en (2.37) y (2.40) respectivamente.*

Demostración. Ver 2.3 y 2.4. \square

Suponemos que los parámetros α y β son positivos. En consecuencia, la función $g(y)$ que aparece en (2.40) y el sistema (2.36) están bien definido en la región:

$$D_0 := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + \xi > 0, y_2 + \eta > 0\}.$$

Lema 2.5. *a) El punto de equilibrio $\bar{x} = (\frac{1}{3}, \frac{8}{81})$ correspondiente a lema 2.3 inciso a) es asintóticamente estable.*

b) El punto de equilibrio $\bar{x} = (\xi, \eta)$ perteneciente a lema 2.3 inciso c) es asintóticamente estable.

Demostración. a) En el punto de equilibrio $\bar{x} = (\frac{1}{3}, \frac{8}{81})$ el sistema linealizado del sistema no lineal (2.36) se determina por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{27} & -\frac{9}{4} \\ \frac{8}{27} & -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - TrA\lambda + \det A = \lambda^2 + \frac{19}{27}\lambda + \frac{10}{27}.$$

Por teorema de Hurwitz este polinomio tiene raíces con parte real negativa y por el teorema indirecto de Lyapunov el punto de equilibrio $\bar{x} = (\frac{1}{3}, \frac{8}{81})$ del sistema no lineal (2.36) es asintóticamente estable.

b) Analizamos la estabilidad de los tres puntos de equilibrio correspondientes a las abscisas de (2.14). Sea el punto de equilibrio $\bar{x} = (\xi_1, \eta_1)$ con ξ_1 y η_1 como en (2.14) y (2.28). Evaluando $\bar{x} = (\xi_1, \eta_1)$ en (2.37) con β como en (2.13) y $\gamma = 1$, tenemos:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{(-3\alpha^{\frac{2}{3}} - 2\alpha^{\frac{1}{3}} + 1)^{\frac{1}{3}}(\alpha^{\frac{1}{3}} - 1) - 6\alpha^{\frac{1}{3}} + \alpha^{\frac{2}{3}} + 1}{2(\alpha^{\frac{1}{3}} - 1)} & \frac{(-3\alpha^{\frac{2}{3}} - 2\alpha^{\frac{1}{3}} + 1)^{\frac{1}{3}} + \alpha^{\frac{1}{3}} + 1}{2(\alpha - \alpha^{\frac{1}{3}})} \\ \alpha^{\frac{1}{3}} - \alpha & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Calculando la traza y determinante de (2.51), tenemos:

$$\text{Tr}A_\alpha = \frac{(-3\alpha^{\frac{2}{3}} - 2\alpha^{\frac{1}{3}} + 1)^{\frac{1}{3}}(\alpha^{\frac{1}{3}} - 1) + \alpha^{\frac{2}{3}} - 8\alpha^{\frac{1}{3}} + 3}{2(\alpha^{\frac{1}{3}} - 1)} \quad (2.52)$$

$$\det A_\alpha = \frac{3\alpha^{\frac{1}{3}} - 1}{\alpha^{\frac{1}{3}} - 1}. \quad (2.53)$$

Evaluando (2.52) y (2.53) para valores de $0 < \alpha < \frac{1}{27}$, vemos que se satisface teorema 1.3. De esta manera, $\bar{x} = (\xi_1, \eta_1)$ es asintóticamente estable. Análogamente, para $\bar{x} = (\xi_2, \eta_2)$ y $\bar{x} = (\xi_3, \eta_3)$ se obtiene que son asintóticamente estable.

□

Lema 2.6. *El sistema (2.36) es completamente controlable si y solo si*

$$\frac{1 - \xi}{\beta} \neq 0. \quad (2.54)$$

Demostración. La demostración se sigue directamente utilizando el teorema de Kalman 1.4. Calculando el rang(b,Ab) tenemos:

$$\text{rang}(b, Ab) = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\xi-1}{\beta} \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Del álgebra lineal, sabemos que rango de la matriz de (2.55), es igual a 2 si el determinante de esta matriz es distinto de cero. Calculando el determinante de (2.55), tenemos:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\xi-1}{\beta} \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix} = \frac{1 - \xi}{\beta}.$$

Entonces, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\xi-1}{\beta} \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$ es igual a 2 si (2.54) se satisface .

□

Observación 2.5. *Para la construcción del control posicional que resuelve el problema de síntesis para el sistema no lineal de la forma (2.36). Utilizaremos el teorema A.22 del apéndice [11].*

En lo que sigue, estudiamos el sistema de control (2.36) en la siguiente vecindad del origen:

$$D_1 := \{y \in D_0 : \|g(y)\| \leq C_1 \|y\|\} \quad (2.56)$$

para algún $C_1 > 0$.

En adelante utilizamos el cambio de variable

$$z = Fy \tag{2.57}$$

donde

$$F := \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\xi-1} & 0 \\ \frac{(2(\xi-1)^2-\beta)\xi}{\xi-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.58}$$

Por la observación 2.2, $\xi - 1 \neq 0$. Claramente $\det F \neq 0$.

Nuestro siguiente objetivo es reducir la ecuación (2.36) al sistema de la forma

$$\dot{z} = A_0z + bw + Fg(F^{-1}z) \tag{2.59}$$

donde

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

y F es como en (2.58). Además, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Observación 2.6. *La ventaja de transformar un sistema lineal en un sistema canónico es que para el sistema canónico se conocen varios métodos de solución del problema de síntesis en particular el método de la función de controlabilidad que aplicamos en el presente trabajo. Este es un sistema modelo que toman los textos iniciales de teoría de control [3].*

La igualdad (2.59) se obtiene aplicando el cambio de variable $z = Fy$ en (2.36). Observemos que en (2.59), el control w aún no está determinado. El control w se propone en (2.73). Además, las restricciones para el control w : $|w| \leq w_1$ se dará en (2.74).

Lema 2.7. *Sea $Ay + bu$ la parte lineal del sistema (2.36) y sea*

$$c^\top = \left(\frac{\beta}{\xi-1} \quad 0 \right), \quad \xi \neq 1. \tag{2.61}$$

a) *La matriz F se puede escribir como*

$$F = \begin{pmatrix} c^\top \\ c^\top A \end{pmatrix}.$$

b) *Se satisfacen las igualdades $(c, b) = 0$ y $(c, Ab) = 1$.*

c) La transformación (2.57) puede escribirse en coordenadas como sigue:

$$z_1 = c^\top y \quad (2.62)$$

$$z_2 = c^\top Ay. \quad (2.63)$$

Demostración. a) Calculamos $c^\top A$ con A como en (2.37).

$$\begin{aligned} c^\top A &= (c_1 \ c_2) \begin{pmatrix} \frac{2\xi(1-\xi)^2}{\beta} - \xi & -\frac{1-\xi}{\beta} \\ \beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\xi-1} \frac{2\xi(1-\xi)^2}{\beta} - \xi & -\frac{\beta}{\xi-1} \frac{1-\xi}{\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(2(\xi-1)^2 - \beta)\xi}{\xi-1} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

De (2.61) y (2.64) tenemos que a) se satisface.

b) Tenemos

$$(c, b) = c^\top b = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\xi-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ahora calculamos (c, Ab) :

$$(c, Ab) = c^\top Ab = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\xi-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\xi(1-\xi)^2}{\beta} - \xi & -\frac{1-\xi}{\beta} \\ \beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

c) Las igualdades (2.62) y (2.63) se siguen de (2.61) y (2.64).

□

Ahora analizamos la parte lineal del sistema (2.36)

$$\dot{y} = Ay + bu. \quad (2.65)$$

Usando el cambio de variable (2.57) vamos a reescribir el sistema (2.65) en la forma canónica. Derivando (2.62) respecto del tiempo para la parte lineal de la ecuación (2.59), tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= c^\top \dot{y} \\ &= c^\top (Ay + bu) \\ &= c^\top Ay + c^\top bu. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Del inciso b) del lema 2.7, la ecuación (2.66) toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= c^\top Ay \\ &= z_2.\end{aligned}\tag{2.67}$$

A continuación, derivamos la igualdad (2.63). Sea

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= c^\top A\dot{y} \\ &= c^\top A(Ay + bu).\end{aligned}\tag{2.68}$$

Nuevamente, aplicando el inciso b) del lema 2.7 la igualdad (2.68) se reduce a

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= c^\top A^2 F^{-1} z + u \\ &= p_1 z_1 + p_2 z_2 + u.\end{aligned}\tag{2.69}$$

Reescribiendo (2.67) y (2.69), tenemos

$$\dot{z} = \tilde{A}z + bu\tag{2.70}$$

donde

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Continuamos reescribiendo \tilde{A} como

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

con A_0 como en (2.60). Ya que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \\ &= bp^\top\end{aligned}$$

donde

$$p = (p_1, p_2)^\top\tag{2.71}$$

con $p_1 := -\frac{\gamma(\eta-2(\xi-1)^2\xi^2)}{\eta}$ y $p_2 := \frac{\xi(2(\xi-1)^2\xi-\eta)}{\eta} - \gamma$.

La ecuación (2.70) se reescribe como

$$\dot{z} = A_0 z + bp^\top z + bu.$$

De esta manera, hemos verificado que es válida la igualdad (2.59). Finalmente, nos enfocamos en la restricción para el nuevo control w para el sistema:

$$\dot{z} = A_0 z + bw + Fg(F^{-1}z), \quad |w| \leq w_1.\tag{2.72}$$

El nuevo control w tiene la siguiente forma:

$$w := p^T z + u \quad (2.73)$$

con la restricción $|w| \leq w_1$, donde

$$w_1 := u_1 - u_2 \sum_{j=1}^2 |p_j|. \quad (2.74)$$

Observación 2.7. *El número w_1 representa la nueva restricción para el sistema de control (2.72). Esta restricción está supeditada a la restricción inicial dado para el sistema (0.1) con u_1 . El número u_2 es una magnitud auxiliar que satisface la desigualdad $u_2 < \frac{u_1}{\sum_{j=1}^2 |p_j|}$ con la cual se determina w_1 . Definiendo w_1 como en (2.74) se garantiza que el control inicial dado en (0.1) va a satisfacer las restricciones dadas de este sistema original, es decir, $|u| < u_1$.*

Asumimos que $u_2 < \frac{u_1}{\sum_{j=1}^2 |p_j|}$. como en [11], requerimos que el sistema (2.72) se considere en el vecindario

$$Q := \{z : |z_j| \leq u_2\}. \quad (2.75)$$

Nuestro siguiente paso es construir un control posicional $w(z)$ tal que $|w| \leq w_1$ y que la trayectoria de cualquier punto inicial $z_0 := (z_1^0, z_2^0)$ que pertenece a una cierta vecindad del origen llegue al origen en un tiempo finito $T(z_0)$. Para ello, utilizaremos el método de V.I. Korobov, que consiste en una función de tipo Lyapunov $\theta(z)$, que es la única solución positiva de la siguiente ecuación:

$$2a_0\theta = (K(\theta)z, z), \quad (2.76)$$

donde

$$K(\theta) := \frac{1}{4 + a_1} \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\theta^3} & -\frac{2}{\theta^2} \\ -\frac{2}{\theta^2} & -\frac{1}{\theta} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

es una matriz positiva para $\theta > 0$. El número a_1 es un número negativo tal que las matrices K y $\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K$ son ambas matrices definidas positivas. En términos del parámetro a_1 , esta condición es equivalente a la siguiente desigualdad:

$$a_1 < -\frac{9}{2}.$$

El número a_0 satisface la desigualdad

$$0 < a_0 \leq \frac{w_1^2}{2a_1(a_1 + 3)}. \quad (2.78)$$

Observación 2.8. *El número a_0 permite afianzar la restricción del control, cuanto menor es la restricción sobre el control, menor es a_0 .*

Sea

$$a := \begin{pmatrix} a_1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad D(\theta) := \begin{pmatrix} \theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

En el marco del método de Korobov, se propone el control posicional

$$w(z) := \theta^{-\frac{1}{2}} a^\top D(\theta) z. \quad (2.80)$$

Observación 2.9. *El control posicional (2.80), se puede escribir como*

$$w(z) = \frac{a_1 z_1}{\theta^2(z_1, z_2)} - \frac{3z_2}{\theta(z_1, z_2)}. \quad (2.81)$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} w(z) &= \theta^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a_1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \theta^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a_1 z_1}{\theta^{\frac{3}{2}}} - \frac{3z_2}{\theta^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \frac{a_1 z_1}{\theta^2(z_1, z_2)} - \frac{3z_2}{\theta(z_1, z_2)}. \end{aligned}$$

□

Recordemos que en [2], para el sistema lineal (2.65), se propuso una familia de controles posicionales delimitados que estabilizaban exactamente este sistema en el tiempo $T(z_0) = \theta_0$, donde θ_0 es raíz de la ecuación (2.76) para z_0 .

Reescribamos ahora las matrices K y $\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K$ en una forma más conveniente. Sea $D(\theta)$ como en (2.79). Entonces, las matrices $K = K(\theta)$ y $\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$D(\theta)K_1D(\theta) = K, \quad \frac{1}{\theta}D(\theta)K_2D(\theta) = \frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K, \quad (2.82)$$

donde

$$K_1 := \frac{1}{4 + a_1} \begin{pmatrix} a_1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad K_2 := \frac{1}{4 + a_1} \begin{pmatrix} 4a_1 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Asumimos que θ satisface la desigualdad $\theta \leq 1$.

Observación 2.10. *Notamos que las matrices K_1 y K_2 son positivas definidas, es decir, simétricas. Consecuentemente del álgebra lineal sabemos que sus valores propios son reales y positivas.*

En el siguiente lema utilizamos la definición de norma dada en el apéndice A.2.

Lema 2.8. *Sea λ_{\min, K_2} el mínimo valor propio de la matriz K_2 y C_1 la constante que aparece en (2.56). Entonces, la siguiente desigualdad es válida:*

$$\frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} \leq \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}.$$

Demostración. Denotemos

$$q := D(\theta)z. \quad (2.84)$$

Usando los teoremas (A.20) y (A.21) del apéndice y la observación 2.10, se obtiene

$$\lambda_{\min} \|q\|^2 \leq (K_2 q, q) \leq \lambda_{\max} \|q\|^2$$

Usando (2.83) y (2.84), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} &= \frac{(DK_1 Dz, Fg(F^{-1}z))}{\frac{1}{\theta}(DK_2 Dz, z)} \\ &= \frac{(K_1 q, DFg(F^{-1}D^{-1}q))}{\frac{1}{\theta}(K_2 q, q)} \\ &\leq \theta C_1 \frac{\|K_1\| \|q\| \|D\| \|F\| \|F^{-1}\| \|D^{-1}\| \|q\|}{\lambda_{\min, K_2} \|q\|^2} \\ &= \theta C_1 \frac{\|K_1\| \|q\| \|D\| \|F\| \|F^{-1}\| \|D^{-1}\| \|q\|}{\lambda_{\min, K_2} \|q\|^2} \\ &= \theta C_1 \frac{\|K_1\| \|q\|^2}{\lambda_{\min, K_2} \|q\|^2} = \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado nos da una estimación de la derivada de la función de controlabilidad θ con respecto al tiempo en virtud al sistema (2.72).

Teorema 2.9. *Sean C_1 y K_1 como en (2.56) y (2.83), respectivamente. Sea λ_{\min, K_2} los valores propios mínimos de K_2 . La siguiente desigualdad es válida:*

$$\dot{\theta} \leq -1 + \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}. \quad (2.85)$$

Demostración. Sea $a := (\frac{a_1}{\theta^2}, \frac{-3}{\theta})^\top$. Tomamos la derivada $\dot{\theta}$ de (2.76) con respecto al tiempo en virtud a $\theta = \theta(z(t))$, es decir, la derivada de la función de controlabilidad en

la trayectoria $z = z(t)$. Nos restringimos al sistema canónico (2.65). Derivando (2.76) respecto del tiempo, se tiene:

$$\frac{d}{d\theta}(2a_0\theta) = \frac{d}{d\theta}(K(\theta)z, z)$$

$$\frac{2a_0\theta\dot{\theta}}{\theta} = \left(\frac{dK(\theta)}{d\theta} z, z \right) \dot{\theta} + (K(\theta)\dot{z}, z) + (K(\theta)z, \dot{z}). \quad (2.86)$$

Ahora, como se requiere obtener $\dot{\theta}$ y que (2.86) no dependa de a_0 , entonces:

$$\left(\left(\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K \right) z, z \right) \dot{\theta} = (K(A_0z + bw), z) + (Kz, (A_0z + bw)) \quad (2.87)$$

Agregando el control descrito en la ecuación (2.80) con $K = K(\theta)$ y $D = D(\theta)$, la ecuación (2.87) queda de la forma:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K \right) z, z \right) \dot{\theta} &= \left(K \left(A_0z + b\theta^{-\frac{1}{2}}a^T Dz, z \right) + \left(Kz, (A_0z + b\theta^{-\frac{1}{2}}a^T Dz) \right) \right) \\ &= \left(K(A_0z, z) + \theta^{-\frac{1}{2}}(Kba^T Dz, z) \right) + (Kz, A_0z) + \\ &\quad \theta^{-\frac{1}{2}}(Kz, ba^T Dz) \\ &= \left(K(A_0z, z) + \theta^{-\frac{1}{2}}(Kba^T Dz, z) \right) + (A_0^T Kz, z) + \\ &\quad \theta^{-\frac{1}{2}}(Dab^T Kz, z). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Aplicando el cambio de representación de la ecuación (2.83) y haciendo uso de las identidades

$$D_\theta A_0 D_\theta^{-1} = \theta^{-1} A_0, \quad D_\theta b = \theta^{-1/2} b$$

la ecuación (2.88) se expresa como:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{\theta}DK_1D \frac{d}{d\theta}DK_1D \right) z, z \right) \dot{\theta} &= (DK_1DA_0z, z) + \theta^{-\frac{1}{2}}(DK_1Dba^T Dz, z) + \\ &\quad (A_0^T DK_1Dz, z) + \theta^{-\frac{1}{2}}(Dab^T DK_1Dz, z) \\ &= (K_1DA_0D^{-1}Dz, Dz) + \theta^{-\frac{1}{2}}(K_1Dba^T Dz, Dz) + \\ &\quad (D^{-1}A_0^T DK_1Dz, Dz) + \theta^{-\frac{1}{2}}(ab^T DK_1Dz, Dz) \\ &= \frac{1}{\theta}(K_1A_0Dz, Dz) + \frac{1}{\theta}(K_1ba^T Dz, Dz) + \\ &\quad \frac{1}{\theta}(A_0^T K_1Dz, Dz) + \frac{1}{\theta}(ab^T K_1Dz, Dz) \\ &= \frac{1}{\theta}((K_1A_0 + K_1ba^T + A_0^T K_1 + ab^T K_1) Dz, Dz). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Sea

$$D'(\theta) = \frac{1}{\theta}HD \quad y \quad H = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tomando la parte derecha de la ecuación (2.89) con $D(\theta)$ como en (2.79),

tenemos

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{\theta}DK_1D - \frac{1}{\theta}DHK_1D - \frac{1}{\theta}DK_1HD \right) z, z \right) \dot{\theta} &= \left(\frac{1}{\theta}D(K_1 - HK_1 - K_1H)Dz, z \right) \dot{\theta} \\ &= \left(\frac{1}{\theta}(K_1 - HK_1 - K_1H)Dz, Dz \right) \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Ahora igualando (2.89) y (2.90) se tiene como resultado

$$\left(\frac{1}{\theta}(K_1 - HK_1 - K_1H)Dz, Dz \right) \dot{\theta} = \frac{1}{\theta} \left((K_1A_0 + K_1ba^T + A_0^TK_1 + ab^TK_1)Dz, Dz \right)$$

de donde

$$\dot{\theta} = \frac{\left((K_1A_0 + K_1ba^T + A_0^TK_1 + ab^TK_1)Dz, Dz \right)}{\left((K_1 - HK_1 - K_1H)Dz, Dz \right)}. \quad (2.91)$$

Lema 2.10. *Sea θ la función de controlabilidad obtenida de (2.76). La derivada de la función θ respecto del tiempo en virtud del sistema canónico (2.65), satisface*

$$\dot{\theta} = -1. \quad (2.92)$$

Demostración. Tomando en cuenta (2.91) es suficiente demostrar la igualdad

$$(K_1 - HK_1 - K_1H) + (K_1A_0 + K_1ba^T + A_0^TK_1 + ab^TK_1) = 0.$$

Esta igualdad la demostraremos calculando la matriz

$$(K_1 - HK_1 - K_1H)$$

y la matriz

$$(K_1ba^T + A_0^TK_1 + ab^TK_1).$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} (K_1 - HK_1 - K_1H) &= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{4+a_1} & \frac{-2}{4+a_1} \\ \frac{-2}{4+a_1} & \frac{-1}{4+a_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-3a_1}{8+2a_1} & \frac{3}{4+a_1} \\ \frac{1}{4+a_1} & \frac{1}{8+2a_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-3a_1}{8+2a_1} & \frac{1}{4+a_1} \\ \frac{3}{4+a_1} & \frac{1}{8+2a_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4a_1}{4+a_1} & \frac{-6}{4+a_1} \\ \frac{-6}{4+a_1} & \frac{-2}{4+a_1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (K_1 ba^T + A_0^T K_1 + ab^T K_1) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_1}{4+a_1} \\ 0 & \frac{-2}{4+a_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2a_1}{4+a_1} & \frac{6}{4+a_1} \\ \frac{-a_1}{4+a_1} & \frac{3}{4+a_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a_1}{4+a_1} & \frac{-2}{4+a_1} \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} \frac{-2a_1}{4+a_1} & \frac{-a_1}{4+a_1} \\ \frac{6}{4+a_1} & \frac{3}{4+a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4a_1}{4+a_1} & \frac{6}{4+a_1} \\ \frac{6}{4+a_1} & \frac{2}{4+a_1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

De (2.93) y (2.94), claramente se cumple la igualdad

$$(K_1 - HK_1 - K_1H)(-1) = (K_1 A_0 + K_1 ba^T + A_0^T K_1 + ab^T K_1)$$

lo que es equivalente a (2.92), es decir, $\dot{\theta} = -1$. \square

Observación 2.11. La matriz $K(\theta)$ que aparece en (2.77) y el vector $a(\theta) := \theta^{-\frac{1}{2}} D(\theta)(a_1, -3)^\top$. son solución de la siguiente ecuación matricial

$$(K - HK - KH) + (K A_0 + K ba^T + A_0^T K + ab^T K) = 0. \quad (2.95)$$

A continuación obtenemos la expresión para la derivada de la función de controlabilidad con respecto al tiempo en virtud al sistema no lineal (2.72).

Sea

$$\tilde{g}(z) := Fg(F^{-1}z).$$

De la ecuación (2.76) con $K = K(\theta)$ se tiene

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{\theta} K - \frac{d}{d\theta} K \right) z, z \right) \dot{\theta} &= (K(A_0 z + bw + \tilde{g}(z)), z) + (Kz, (A_0 z + bw + \tilde{g}(z))) \\ &= (K(A_0 z + bw), z) + (Kz, (A_0 z + bw)) + (K\tilde{g}(z), z) + (Kz, \tilde{g}(z)) \\ &= (K(A_0 z + bw), z) + (Kz, (A_0 z + bw)) + (K\tilde{g}(z), z) + (Kz, \tilde{g}(z)) \\ &= (K(A_0 z + bw), z) + (Kz, (A_0 z + bw)) + (KFg(F^{-1}z), z) + \\ & \quad (Fg(F^{-1}z), Kz). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Aplicando la siguiente propiedad del producto escalar:

$$(Ax, y) = (x, A^T y), \quad (x, y) = (y, x)$$

vemos que la ecuación (2.96) es equivalente a

$$\left(\left(\frac{1}{\theta} K - \frac{d}{d\theta} K \right) z, z \right) \dot{\theta} = (K(A_0 z + bw), z) + (Kz, (A_0 z + bw)) + 2(KFg(F^{-1}z), z).$$

Por lo tanto, la derivada $\dot{\theta}$ de (2.76) se reduce a

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{(K(A_0z + bw), z) + (Kz, (A_0z + bw))}{\left(\left(\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K\right)z, z\right)} + \frac{2(KFg(F^{-1}z), z)}{\left(\left(\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K\right)z, z\right)} \\ &= -1 + \frac{2(KFg(F^{-1}z), z)}{\left(\left(\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K\right)z, z\right)}.\end{aligned}$$

□

Notación 2.11. Sea $\hat{\theta} > 0$, $C_2 > 0$ tal que para $\theta \leq \hat{\theta}$

$$-1 + \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}} \leq -C_2. \quad (2.97)$$

Sea

$$D_2 := \{z : 0 < \theta(z) < \hat{\theta}\}. \quad (2.98)$$

Lema 2.12. Supongamos que se cumple la desigualdad (2.97). Entonces la siguiente desigualdad es válida:

$$\dot{\theta} \leq -C_2. \quad (2.99)$$

Además, para $z \in D_2$, el tiempo para llegar desde z al origen es estimado por la siguiente desigualdad:

$$T(z) \leq \frac{\theta_0}{C_2}. \quad (2.100)$$

Demostración. Teniendo en cuenta (2.85) y (2.97), la desigualdad (2.99) sigue fácilmente. Para probar (2.100), primero integramos ambos lados de (2.99) en la trayectoria $z = z(t)$, en donde alcanza $\theta(z(t)) - \theta_0 \leq -C_2 t$. Al usar [11, página 552], tenemos que $z(T) = 0$, lo que implica $\theta(z(T)) = 0$. Por tanto, obtenemos (2.100). □

2.3. Elipse correspondiente al caso cuando θ es constante

A continuación, para garantizar que la trayectoria $x(t)$ que comienza cerca del punto de equilibrio (ξ, η) no abandone el primer cuadrante, reescribimos la igualdad (2.76) en una forma más conveniente:

$$\begin{aligned}2a_0\theta^4 &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{a_1}{4+a_1} & -\frac{2\theta}{4+a_1} \\ -\frac{2\theta}{4+a_1} & -\frac{\theta^2}{4+a_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= z^\top K z\end{aligned} \quad (2.101)$$

donde $K = K(\theta)$ como en (2.77).

Recordemos que a (2.101) se llega usando los cambios de variable $y = x - \bar{x}$ y $z = Fy$. En términos de la variable $y = (y_1, y_2)^\top$, la igualdad (2.101) se escribe como:

$$\begin{aligned} 2a_0\theta^4 &= z^\top F^\top F^{-1} F^\top K F F^{-1} z \\ &= y^\top K_3 y \\ &= (K_3 y, y) \end{aligned} \quad (2.102)$$

donde

$$y = F^{-1}z,$$

y $K_3 = K_3(\theta)$ como sigue:

$$K_3(\theta) := F^\top \begin{pmatrix} \frac{a_1}{4+a_1} & -\frac{2\theta}{4+a_1} \\ -\frac{2\theta}{4+a_1} & -\frac{\theta^2}{4+a_1} \end{pmatrix} F.$$

Aquí, la matriz F está dada como en (2.58). Sean $\lambda_{K_3}^1(\theta)$ y $\lambda_{K_3}^2(\theta)$ los valores propios de $K_3(\theta)$. Teniendo en cuenta que para θ positivos fijos los valores propios $\lambda_{K_3}^1(\theta)$ y $\lambda_{K_3}^2(\theta)$ son números positivos.

Lema 2.13. *La igualdad (2.101) se puede escribir como*

$$\frac{y_1^2}{\frac{(a_1+4)(\xi-1)^2 2a_0\theta^4}{a_1\beta^2}} + \frac{y_2^2}{-(a_1+4)2a_0\theta^2} = 1. \quad (2.103)$$

Demostración. Transformamos (2.102), tenemos:

$$\begin{aligned} 2a_0\theta^4 &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{K_3}^1(\theta) & 0 \\ 0 & \lambda_{K_3}^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_{K_3}^1(\theta)y_1^2 + \lambda_{K_3}^2(\theta)y_2^2 \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a\beta^2}{(a+4)(\xi-1)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\theta^2}{a+4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1\beta^2 y_1^2}{(a_1+4)(\xi-1)^2} + \frac{\theta^2 y_2^2}{-(a_1+4)} \end{aligned} \quad (2.104)$$

dividiendo la ecuación (2.104) entre $2a_0\theta^4$ tenemos (2.103). \square

Observación 2.12. *En términos de $y = x - \bar{x}$ la ecuación (2.102) se escribe como*

$$\begin{aligned} 2a_0\theta^4 &= (x - \bar{x})^\top K_3(x - \bar{x}) \\ &= \frac{a_1\beta^2(x_1 - \xi)^2}{(4+a_1)(\xi-1)^2} - \frac{\theta^2(x_2 - \eta)^2}{(4+a_1)}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Reescribiendo (2.105), tenemos:

$$\frac{(x_1 - \xi)^2}{\frac{(a_1+4)(\xi-1)^2 2a_0\theta^4}{a_1\beta^2}} + \frac{(x_2 - \eta)^2}{-(a_1+4)2a_0\theta^2} = 1.$$

Ejemplo 2.1. Veamos un ejemplo de la elipse (2.103), para valores $\beta = \frac{1}{2}$, $(\xi, \eta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $\theta = 1$, $w = 1$ y $a_1 = -6$, tenemos

$$\frac{y_1^2}{\frac{1}{54}} + \frac{y_2^2}{\frac{1}{9}} = 1. \quad (2.106)$$

Al graficar (2.106) se obtiene la figura 2.1, cuyo centro de la elipse se encuentra en el origen.

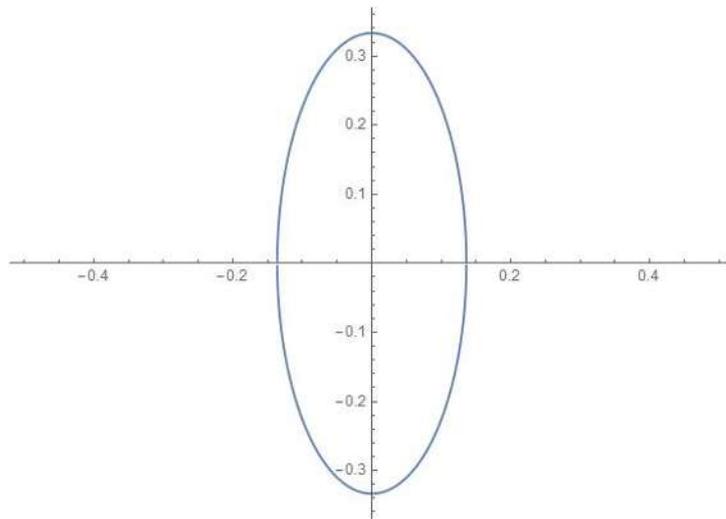


Figura 2.1: Elipse en el plano y

La elipse de la figura 2.1 en términos de la variable x se obtiene de la siguiente manera. Para el punto de equilibrio $(\xi, \eta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ con valores $\beta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{4}$, $w = 1$, $a_1 = -6$, tenemos:

$$\frac{(x_1 - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{13824}} + \frac{(x_2 - \frac{1}{4})^2}{\frac{1}{144}} = 1. \quad (2.107)$$

La gráfica de (2.107) se muestra en la figura 2.2, en donde el centro de la elipse se encuentra en $\bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

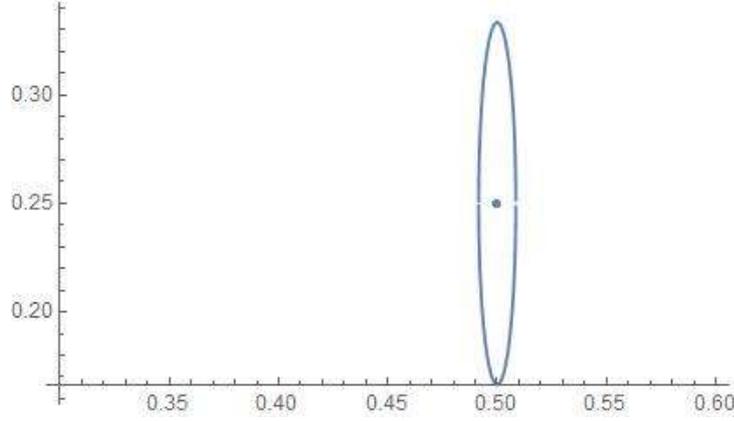


Figura 2.2: Elipse en el plano x , $\bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

Lema 2.14. Sea $\xi > 0, \eta > 0$, $\bar{x} = (\xi, \eta)$ un punto de equilibrio del sistema (0.1), y K_1 como en (2.83). Además, sea $(k_{j,\ell})_{j,\ell=1}^2 := K_1$, y el parámetro a_0 satisface (2.78). Sea $\tilde{\theta}$ el valor positivo más pequeño para el cual se cumple la siguiente desigualdad:

$$\text{máx} \left\{ \frac{2a_0\theta^4}{\lambda_{K_3}^1(\theta)}, \frac{2a_0\theta^4}{\lambda_{K_3}^2(\theta)} \right\} \leq \text{mín}\{\xi, \eta\}.$$

Así, el interior de la elipse

$$D_{\mathcal{E}} := \mathcal{E}(x, \tilde{\theta}, \bar{x}) = 0 \quad (2.108)$$

pertenece al primer cuadrante. Aquí

$$\mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) := 2a_0\theta^4 - \sum_{j,\ell=1}^2 k_{j,\ell}\theta^{j+\ell-2}(c, A^{j-1}(x - \bar{x}))(c, A^{\ell-1}(x - \bar{x})).$$

Notación 2.15. Sea Q , D_2 y $D_{\mathcal{E}}$ como en (2.75), (2.98) y (2.108), respectivamente. Sea

$$D_3 := Q \cap D_2 \cap D_{\mathcal{E}}. \quad (2.109)$$

Aquí Q and D_2 se entienden en términos de la variable x .

Ahora se presenta el principal resultado del trabajo.

Teorema 2.16. [3] Sea $\bar{x} = (\xi, \eta)$ y $D_{\mathcal{E}}$ como en lema 2.14. Sea A como en (2.37), c como en lema 2.7 y $a_1 < -\frac{9}{2}$, $a_2 = -3$. Además, sea p_j para $j = 1, 2$ como en (2.71) y supongamos que (x_1^0, x_2^0) pertenece a la región D_3 . Entonces, el control

$$u(x, \bar{x}) = \sum_{j=1}^2 a_j \theta^{j-3}(x - \bar{x})(c, A^{j-1}(x - \bar{x})) - \sum_{j=1}^2 p_j(x - \bar{x})(c, A^{j-1}(x - \bar{x})) \quad (2.110)$$

satisface la condición $|u(x)| \leq u_1$ y resuelve el problema de síntesis. El tiempo de movimiento desde $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ hasta el origen satisface la siguiente desigualdad

$$T(x_0, \bar{x}) \leq \frac{\theta_0}{C_2}. \quad (2.111)$$

Demostración. La restricción $|u(x)| \leq u_1$ se verifica empleando (2.73), (2.74) y la desigualdad $|w| \leq w_1$. Esta última desigualdad se demuestra en [2, teorema 3.1]. La desigualdad (2.111) se deriva del teorema 2.9 y lema 2.12.

Observación 2.13. Para θ fijo, la ecuación $\mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) = 0$ representa una elipse. Dado que el control (2.110) estabiliza el sistema (0.1), la trayectoria del sistema (0.1) no dejará la elipse (2.108) calculada en $\theta = \theta_0$. A su vez, θ_0 es la solución de la ecuación $\mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) = 0$ para $x = x_0$.

Observación 2.14. Destacamos que la trayectoria $x(t)$ bajo la influencia del control $u(x, \bar{x})$ se acerca al punto de equilibrio \bar{x} cuando $t \rightarrow T = T(x_0, \bar{x})$. Para $t > T$, la trayectoria permanece en el punto de equilibrio \bar{x} .

2.4. Gráfico de la trayectoria y control

Para trazar la gráfica de la trayectoria $x(t)$ desde un punto inicial dado (x_1^0, x_2^0) , así como el control $u(x(t))$ y la controlabilidad función $\theta(x(t))$, se agrega una ecuación diferencial para la variable θ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1) - \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + \alpha}, \\ \dot{x}_2 &= \gamma \left(1 - \frac{x_2}{\beta x_1} x_2\right) + u(x_1, x_2), \\ \dot{\theta} &= -1 + 2\psi(x, \theta, \bar{x}) \end{aligned}$$

con las condiciones inicial $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ y $\theta(0) = \theta_0$. Aquí θ_0 es la única raíz positiva de (2.76). Sea,

$$\psi(x, \theta, \bar{x}) := \frac{(D(\theta)K_1 D(\theta)(x - \bar{x}), Fg(F^{-1}(x - \bar{x})))}{\frac{1}{\theta}(D(\theta)K_2 D(\theta)(x - \bar{x}), (x - \bar{x}))}.$$

Observemos que el punto inicial (x_1^0, x_2^0) debe pertenecer a la región D_3 (2.109).

2.4.1. Ejemplo

Sea $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1081}{900}$, $\gamma = 1$ y $u_1 = 5$. El punto de equilibrio $\bar{x} = (\xi, \eta)$ es igual a $(\frac{9}{10}, \frac{1081}{1000})$. El vector p es igual a $(-\frac{5324}{5405}, -\frac{20377}{10810})$, $w_1 = 1$, $a_1 = -6$ y por (2.74), $2a_0 = \frac{1}{18}$.

El control posicional tiene la forma

$$u(x, \bar{x}) = -\frac{\frac{3243}{50} - \frac{1081x_1}{15}}{\theta^2} - \frac{\frac{3189x_1}{100} + 3x_2 - \frac{3993}{125}}{\theta} + \frac{79841879x_1}{9729000} + \frac{31187x_2}{10810} - \frac{14084927}{1351250}$$

con $\theta = \theta(x - \bar{x})$.

La función $\psi(x, \theta, \bar{x})$ dada por $\psi(x, \theta, \bar{x}) = \frac{\text{num}(x, \bar{x})}{\text{den}(x, \bar{x})}$ donde

$$\begin{aligned} \text{num}(x, \bar{x}) &:= x_3 (648600y_1 (10810y_1^3 + 18539y_1^2 + (114229 - 900y_2) y_1 + 9190y_2) x_1 \\ &\cdot (y_1 (3189x_3 - 10810) + 300y_2x_3) - (1034192700y_1^5 + 2821255660y_1^4 \\ &- 9 (31187000y_2 - 1414988103) y_1^3 + 4 (20250000y_2^2 + 112867650y_2 + 2774668507) y_1^2 \\ &+ 90y_2 (1620000y_2 - 14579147) y_1 + 875610000y_2^2) x_3 (y_1 (9567x_3 - 21620) + 900y_2x_3)) \\ \text{den}(x, \bar{x}) &:= \frac{3243}{50} (100y_1^2 + 180y_1 + 1081) x_1 (46742440000y_1^2 - 1945800y_1x_3 (10630y_1 \\ &+ 1000x_2 - 1081) + 27x_3^2 (10630y_1 + 1000x_2 - 1081)^2) \end{aligned}$$

con $y_1 = x_1 - \frac{9}{10}$ y $y_2 = x_2 - \frac{1081}{1000}$.

Al usar Wolfram Mathematica, hemos calculado que el tiempo de llegada de x_0 a \bar{x} es $T(x_0, \bar{x}) = 2.407427$ y que $x_1(T) = \xi$ y $|x_2(T) - \eta| \leq 1.06063 \times 10^{-9}$. La elipse correspondiente para el punto de equilibrio $(\frac{9}{10}, \frac{1081}{1000})$ viene dado por la igualdad

$$\frac{\theta^4}{18} - \frac{1}{2}\theta^2 y_2^2 + \left(-\frac{1129969\theta^2}{20000} + \frac{1149103\theta}{4500} - \frac{1168561}{2700} \right) y_1^2 + \left(\frac{1081\theta}{45} - \frac{1063\theta^2}{100} \right) y_1 y_2 = 0$$

para $\theta = 2.497329$ y $y_1 = x_1 - \frac{9}{10}$ y $y_2 = x_2 - \frac{1081}{1000}$.

Según el conocimiento de los autores, no se han aplicado metodologías de control a este sistema, que considera dos características principales: lograr la convergencia en tiempo finito con una entrada de control acotada.

A continuación, se muestran las gráficas de las trayectorias de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, el retrato fase del sistema $x_1(t)$ vs $x_2(t)$, la función de controlabilidad θ y la gráfica del control posicional u en la trayectoria $x(t)$ con condiciones iniciales $x_1^0 = 1$ y $x_2^0 = \frac{1}{2}$.

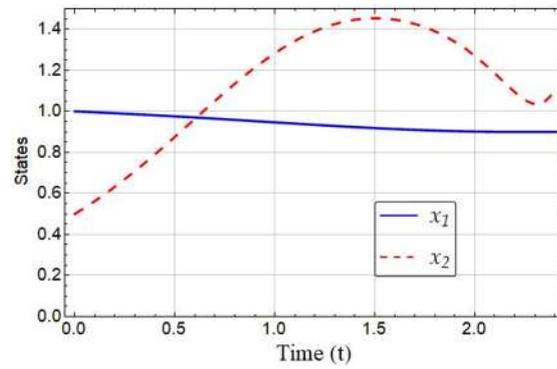


Figura 2.3: Trayectorias de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

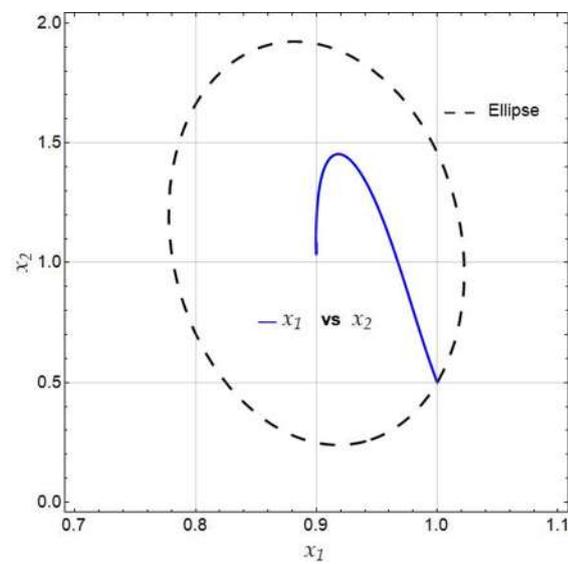


Figura 2.4: Retrato fase del sistema $x_1(t)$ vs $x_2(t)$

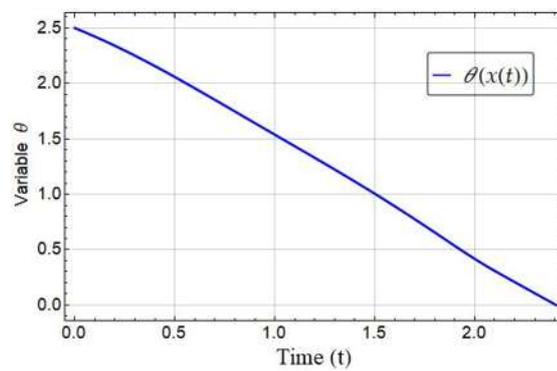


Figura 2.5: Función de controlabilidad evolución del tiempo.

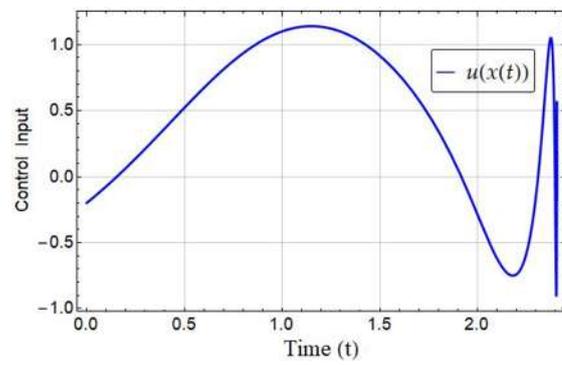


Figura 2.6: La entrada de control posicional.

dos polinomios de variable real x con coeficientes a_k, b_k reales.

El determinante

$$R := \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

se llama la resultante de los polinomios $f(x), g(x)$.

A.2. Norma de una matriz

Definición A.3. [8, página 139]. Definimos la norma de una matriz de la siguiente manera:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

donde $A = (a_{i,j}) \quad i, j = 1, \dots, n$.

A.3. Positividad y unicidad de $\theta(z)$

Teorema A.17. Sea a_0 como en (2.78) y sea $(\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)$ positiva definida, entonces la ecuación de Korobov $\varphi(\theta, z) = 2a_0\theta - (K(\theta)z, z) = 0$ tiene una única solución positiva $\theta(z)$.

Demostración. Definimos

$$\varphi(\theta, z) = 2a_0\theta - (K(\theta)z, z) \quad (\text{A.3})$$

como la ecuación de Korobov de forma reescrita, en donde $\varphi(\theta, z) = 0$ es equivalente a la ecuación (2.76).

Sea

$$\begin{aligned}\varphi(\theta, z) &= 2a_0\theta - \frac{1}{4+a_1} (z_1 \ z_2) \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\theta^3} & \frac{-2}{\theta^2} \\ \frac{-2}{\theta^2} & \frac{-1}{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= 2a_0\theta - \frac{1}{4+a_1} \left(\frac{a_1}{\theta^3} z_1^2 - \frac{4}{\theta^2} z_1 z_2 - \frac{1}{\theta} z_2^2 \right).\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

Multiplicamos por θ^3 la ecuación (A.4), entonces:

$$\psi(\theta, z) = \theta^3 \varphi(\theta, z) = 2a_0\theta^4 - \frac{a_1 z_1^2}{4+a_1} + \frac{4\theta z_1 z_2}{4+a_1} + \frac{z_2^2}{4+a_1} \theta^2. \quad (\text{A.5})$$

Observamos que las raíces de φ y ψ en (A.5) para $\theta > 0$ coinciden, además para z fijo:

$$\psi(0, z) = \frac{-a_1}{4+a_1} z_1^2$$

y el

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \psi(\theta, z) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \psi(\theta, z) = +\infty.$$

Entonces por teorema de Bolzano existe $\hat{\theta} > 0$: $\psi(\hat{\theta}, z) = 0$ por lo tanto existe solución $\theta(z)$. Para determinar que la solución sea única derivamos (A.3), entonces tenemos:

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{2a_0\theta}{\theta} - \left(\frac{dK}{d\theta} z, z \right) = \left(\left(\frac{1}{\theta} K - \frac{dK}{d\theta} \right) z, z \right).$$

Por la condición $(\frac{1}{\theta} K - \frac{d}{d\theta} K) > 0$, es decir, $((\frac{1}{\theta} K - \frac{d}{d\theta} K) z, z) > 0$, con $z \neq 0$. Así, $\psi(\theta, z)$ es monótona creciente, entonces en $(0, \infty)$ existe una única solución positiva $\theta(z)$. \square

Observación A.15. ψ tiene una raíz positiva y por lo menos una negativa.

Observación A.16. Si se deriva $\frac{d\psi}{d\theta} > 0$ para $\theta \in (0, \infty)$ entonces ψ crece.

A.4. Traza y determinante de una matriz cuadrada

Definición A.4. [21, página 139] (Determinante). Sea A una matriz cuadrada de orden $n \geq 2$, se define como determinante de A a la suma de las entradas en la primera columna de A multiplicada por sus respectivos cofactores. Esto es,

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n a_{1j} C_{1j}.$$

Observación A.17. *El determinante de una matriz de orden 1 es simplemente la entrada de la matriz. Por ejemplo, si $A = [-2]$, entonces $\det(A) = -2$.*

Definición A.5. [21, página 214] (Traza). *Se llama traza de una matriz cuadrada A de orden n , denotada " $\text{tr}(A)$ ", a la suma de los n elementos de la diagonal principal de A :*

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

A.5. Fórmula de Taylor para una función de m variables

Teorema A.18. [19, página 4] *Consideremos una función vectorial:*

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, x = [x_1, \dots, x_m].$$

La expansión de Taylor de una función vectorial se puede expresar como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x_0) \tag{A.6}$$

donde $T_i(x_0)$ son vectores. De forma explícita, es posible escribir (A.6) como:

$$f(x) = f(x_0) + J(x_0)[\Delta_i] + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\Delta_i]^\top H^1(x_0)[\Delta_i] \\ \vdots \\ [\Delta_i]^\top H^n(x_0)[\Delta_i] \end{bmatrix} + T_3 + \dots$$

donde $J(x_0) = \left[\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$ es la matriz Jacobiana ($n \times m$) y $H^k(x_0)$ son las matrices Hessianas ($m \times m$) con las segundas derivadas de la función $f_k(x)$, $k = 1, \dots, n$.

A.6. Teorema de Picard

Consideremos el problema de Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \tag{A.7}$$

donde $f(t, x)$ es una función continua y localmente Lipschitz respecto de x en el rectángulo $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$.

Entonces el problema de Cauchy (A.7) tiene una solución única en el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ donde

$$h = \min \left[a, \frac{b}{M} \right] \quad \text{y} \quad M = \max_{(t,x) \in \mathbb{R}} |f(t, x)|.$$

La demostración de este Teorema puede encontrarse en cualquier libro de ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular en [4].

A.7. Forma cuadrática

Una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de segundo grado en n variables x_1, \dots, x_n . Una forma cuadrática siempre tiene una representación

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}; i, j = 1, \dots, n)$$

donde $A = (a_{ij})_1^n$ es una matriz simétrica.

A.8. Extremos de una función cuadrática

El estudio de un sistema de dos formas es el objetivo de esta sección.

Definición A.6. [7, página 310] *Dos formas cuadráticas reales*

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_i x_k, \quad B(x, x) = \sum_{i,k=1}^n b_{ik}x_i x_k$$

determina el haz de formas $A(x, x) - \lambda B(x, x)$, donde λ es un parámetro.

Si la forma $B(x, x)$ es positiva definida el haz de formas $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ es llamado regular. La ecuación

$$|A - \lambda B| = 0 \tag{A.8}$$

es llamada la ecuación característica del haz de formas $A(x, x) - \lambda B(x, x)$.

Definición A.7. [7, página 310] *Sea λ_0 el cero de la ecuación (A.8). Dado que la matriz $A - \lambda_0 B$ es singular, existe una columna $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \neq 0$ tal que $(A - \lambda_0 B)z = 0$ ó*

$$Az = \lambda_0 Bz \quad (z \neq 0).$$

El número λ_0 se llama valor característico del haz de formas $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ y z corresponde a la columna principal ó vector principal del haz.

Teorema A.19. [7, teorema 8, página 310] La ecuación característica (A.8) siempre tendrá n raíces reales λ_k con los correspondientes vectores principales $z^k = (z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{nk})$ con $k = 1, 2, \dots, n$:

$$Az^k = \lambda_k Bz^k \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Los vectores principales z^k pueden ser escogidos de tal manera que las relaciones

$$B(z^i, z^k) = \delta_{ik} \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

se satisfagan

donde

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Teorema A.20. [7, teorema 10, página 319] El valor característico más pequeño del haz regular de formas $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ es el mínimo de la razón de las formas $A(x, x)$ y $B(x, x)$

$$\lambda_1 = \min \frac{A(x, x)}{B(x, x)},$$

y este mínimo sólo se asume para vectores principales del valor característico λ_1 .

Teorema A.21. [7, teorema 13, página 322] supongamos que a los valores característicos

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

del haz regular de formas $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ corresponden los vectores principales linealmente independientes del haz z^1, z^2, \dots, z^n . Entonces:

El valor característico más grande λ_n es el máximo de la razón de las formas $\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$:

$$\lambda_n = \max \frac{A(x, x)}{B(x, x)},$$

y este máximo sólo se asume para vectores principales del valor característico λ_n .

A.9. Síntesis de controles acotados en primera aproximación

Consideramos el sistema [11]

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{A.9}$$

Asumimos que $f(0,0) = 0$. Suponiendo que, la función vectorial f tiene segundas derivadas continuas con respecto a x y u , podemos representar el sistema (A.9) en la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu + g(x, u),$$

donde

$$A = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(0,0)}{\partial u}, \quad \|g(x, u)\| \leq C_1(\|x\|^2 + \|u\|^2).$$

Construiremos la función de controlabilidad $\theta(x)$ para el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ y, con la ayuda de esta función, encontrar un control acotado $u(x)$ que transforme un punto arbitrario de la vecindad del origen en cero en virtud del sistema $\dot{x} = Ax + Bu(x)$. Mostremos que, con una adecuada elección de $\theta(x)$ garantizamos que $u(x)$ es pequeño en una vecindad del origen, este control $u(x)$ transfiere un punto arbitrario de una vecindad del origen a cero, pero en virtud del sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$.

Teorema A.22. *Consideramos el sistema de control*

$$\dot{x} = Ax + bu + g(x, u),$$

donde A es una matriz constante $n \times n$, b es un vector n -dimensional, $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n$, $|u| \leq d$, $\|g(x, u)\| \leq C_1(\|x\|^{s_1} + \|u\|^{s_2})$ y la función vectorial $g(x, u)$ satisface la siguiente condición de Lipschitz en cada dominio $(x, u) : 0 < \rho \leq \|x\| < \rho_0$:

$$\|g(x'', u'') - g(x', u')\| \leq L_1(\rho, \rho_0)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Definimos el control $u(x)$ por la igualdad

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \theta^{(-n+i-1)/\alpha}(c, A^{i-1}x) + \sum_{i=1}^n p_i(c, A^{i-1}x),$$

donde la función $\theta(x)$ para $x \neq 0$ es determinada como positiva, solución continuamente diferenciable de la ecuación

$$2a_0 \theta^{1 + \frac{n+m-1}{\alpha}} - \sum_{i,j=1}^n f_{i,j} \theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}}(c, A^{i-1}x)(c, A^{j-1}x) = 0.$$

Existe un a_0 suficientemente pequeño, un m suficientemente grande y una vecindad del origen tal que se puede llegar al origen desde cualquier punto x_0 de esta vecindad dentro de un tiempo finito $T(x_0) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}^\alpha \theta^{1/\alpha}(x_0)$ en virtud del sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$.

Bibliografía

- [1] Apostol T. M., Calculus. Barcelona: Reverté 1990.
- [2] Choque Rivero A. E., Korobov V. I., Skoryk V.O., Controllability function as time of motion. I, (in Russian) Mat. Fiz. Anal. Geom, vol. 11, no. 2, pp. 208-225, 2004. English translation in <http://arxiv.org/abs/1509.05127>.
- [3] Choque-Rivero A. E, Ornelas-Tellez F., Bounded finite-time stabilization of the prey - predator model via Korobov's controllability function. Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21. iss. I, pp. 76-87.
- [4] Cronin J., Differential equations, introduccion and qualitative theory, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, Second Edition 1994.
- [5] Filippov A. F., Differential equations with discontinuous righthand sides. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [6] Gakkhar S. and Singh A., Complex dynamics in a prey predator system with multiple delays. Commun. Nonlinear Sci. Num. Simul., 17, 914–929, 2012.
- [7] Gantmacher F. R., Theory of matrices; Chelsea Publ., Bronx, NY, 1959.
- [8] Golub G., Matrix computations. United States of America: Johns Hopkins University Press 1996.
- [9] Hall H.S., Higher algebra: a sequel to elementary algebra for schools. London : Adamant Media Corporation 2001.
- [10] Khalil H., Nonlinear systems. East Lansing, Michigan: Pearson India 2014.
- [11] Korobov V. I., A general approach to the solution of the problem of synthesizing bounded controls in a control problem, Mat. Sb. vol. 109, no. 151, pp. 582-606, 1979 (in Russian). English transl.: Mat. Sb. vol. 37, no. 4, pp. 535-557, 1980.
- [12] Korobov V. I., Controllability function method, NITS, Inst. Comp. Research, M-Ighevsk, 2007.

-
- [13] Korobov V. I., Skoryk V. O., Construction of restricted controls for a non-equilibrium point in global sense, Vietnam Journal of Mathematics 43(2), pp 459-469, June 2015.
- [14] Korobov V. I., Sklyar G. M., Methods for constructing of positional controls and an admissible maximum principle, Differ. Uravn., 26:11, 1914-1924, 1990.
- [15] Korobov V. I., Korotyayeva Y. V., Feedback control design for systems with x-discontinuous right-hand side. J.Optim.Theory Appl 149; pp 494-512, 2011.
- [16] Nijmeijer H., Arjan van der Schaft., Nonlinear dynamical control systems, Springer, 1990.
- [17] Poznyak A. S., Polyakov A. Y., Strygin V.V., Analysis of finite-time convergence by the method of Lyapunov functions in systems with second-order sliding modes, J. Appl. Math. Mech, vol.75, pp. 289-303, 2011.
- [18] Singh A., Stabilization of prey predator model via feedback control. Applied Analysis in Biological and Physical Sciences, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 186, 2016, DOI 10.1007/978-81-322-3640-5_10.
- [19] Skala V., Efficient Taylor expansion computation of multidimensional vector functions on GPU* Annales Mathematicae et Informaticae, January 2021, Annales Mathematicae et Informaticae - AMI ISSN 1787-5021, DOI: 10.33039/ami.2021.03.004.
- [20] Van der Waerden., Algebra, Volumen 1. New York: Springer Science & Business Media 2003.
- [21] Voevodin, V. V., Álgebra lineal. Moscú: Mir 1982.