



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD GLOBAL DE PUNTOS DE NASH EN UN MODELO DE OLIGOPOLIO

TESIS

QUE, COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ESQUIVEL MUÑOZ JUVENAL ROBERTO

DIRECTOR Y ASESOR:

DR. CARLOS OSVALDO OSUNA CASTRO
DOCTOR EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN
MATEMÁTICAS BÁSICAS

MORELIA, MICH., OCTUBRE 2022



Dedicatoria

1. A mis padres Juvenal Esquivel y Guadalupe Muñoz. Ustedes han sido siempre el motor que impulsa mis sueños y esperanzas, quienes estuvieron siempre a mi lado en los días y noches más difíciles durante mis horas de estudio. Siempre han sido mis mejores guías de vida. Hoy cuando concluyo mis estudios, les dedico a ustedes este logro amados padres, como una meta más conquistada. Orgulloso de tenerlos como mis padres y agradezco que estén a mi lado en este momento tan importante. Mi madre que me enseñó nunca rendirme, que hablar lo es todo y siempre me apoyó incondicionalmente y mi padre que siempre me impulsa a ir por nuevos retos, gracias por ser esa figura honorable.
2. A mi Tia Eva, gracias por ese amor tan grande, y por ese apoyo que siempre me ha dado sin pedir nada a cambio, este trabajo también es para ti, me alegras la vida.
3. A mi hermana, Sofía Ximena por ser quien siempre quien está en todo y su amor incondicional que me motivó a ser un ejemplo para ella.
4. A Belén quien desde chica ha estado a mi pendiente y nunca me dejó solo, cuya figura de hermana mayor y amor incondicional me hacen ser un ejemplo para sus hijos.
5. Pepe Esquivel quien me ha mostrado que trabajando duro se pueden conseguir las cosas y cuya presencia es símbolo de motivación y de superación.
6. A mi novia Andrea Cristina García Madrigal por acompañarme noches en vela haciendo tareas, por ese amor y motivación que en momentos difíciles me sirvieron de guía para continuar, sin ti el camino hubiera sido mas difícil. Gracias por siempre estar presente.
7. A mi sobrina Camila, quiero que sepas que en cada paso que des voy a estar para apoyarte y siempre vas a contar conmigo.
8. A mi tutor Osvaldo Osuna Castro. Dr. En Ciencias con orientación en matemáticas Básicas. Sin usted y sus virtudes, su paciencia y constancia este trabajo no lo hubiese logrado tan fácil. Sus consejos fueron siempre útiles cuando no salían de mi pensamiento las ideas para escribir lo que hoy he logrado. Usted formó parte importante de esta historia con sus aportes profesionales que lo caracterizan. Muchas gracias por sus múltiples palabras de aliento, cuando más las necesité; por estar allí cuando mis horas de trabajo se hacían confusas. Gracias por sus orientaciones.

Gracias por ser quienes son y por creer en mí.

Índice

1. Introducción	1
2. Fundamentos teóricos preliminares	3
2.1. Campos vectoriales	3
2.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales	4
2.3. Estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad global de soluciones	5
2.4. Fundamentos teórico-metodológicos	6
2.4.1. Sistema Linealizado	6
2.4.2. Funciones de Lyapunov	7
2.5. Modelo Lotka-Volterra generalizado	8
2.5.1. Menores principales de una matriz cuadrada	9
3. Oligopolios	11
3.1. Oligopolios de Cournot	11
3.2. Modelo de Bertrand	12
3.3. Modelo de Stackelberg	12
3.4. Estudio del modelo de Cournot	13
4. Estabilidad Local	15
4.1. Estabilidad local 2×2	15
4.2. Estabilidad local 3×3	20
5. Estabilidad Global	27
5.1. Estabilidad global del sistema de 2 firmas	27
5.2. Estabilidad global del sistema de 3 firmas	31
5.3. Estabilidad global del sistema de 4 firmas	38
5.4. Estabilidad global del sistema de 5 firmas	46
6. Conclusiones	56
7. Literatura Citada	57

Índice de figuras

1.	Modelo 2x2 ejemplo 4.1	18
2.	Modelo 2x2 ejemplo 4.2	19
3.	Modelo 3x3 ejemplo 4.3	23
4.	Modelo 3x3 ejemplo 4.3	24
5.	Modelo 3x3 ejemplo 4.4 donde el punto de estabilidad (cuadro negro) está en $int(\mathbb{R}_+^3)$, los otros puntos de estabilidad están en $planos(int(\mathbb{R}^2))$	25
6.	Modelo 3x3 ejemplo 4.4	26

Resumen

El objetivo de este documento fue identificar si los puntos de equilibrio en el sistema de oligopolio de Cournot son puntos de Nash con estabilidad global, esto extiende el resultado en la literatura “The phase space structure of the oligopoly dynamical system by means of Darboux integrability” por Adam Krawiec, Tomasz Stachowiak y Marek Szydłowski, donde se probó la estabilidad local para un oligopolio de tres firmas, tomando el resultado como relevante para cuestiones económicas donde los participantes de estos oligopolios luchan por la maximización de las ganancias, tomando en cuenta las decisiones que toman los otros participantes. En términos económicos, el trabajo consistió en verificar si estos puntos de equilibrio de una competencia imperfecta que describe la situación de varias empresas compitiendo por el mercado de un mismo bien y que pueden elegir cuánto producir para intentar maximizar su ganancia, pueden ser catalogados con una estabilidad para todo el espacio en el que se desenvuelven y puede ser generalizado para un grupo de n firmas económicas. Se optó por demostrar primeramente la estabilidad local del sistema, mostrando los diagramas correspondientes a cada caso, posteriormente en la demostración para la estabilidad global, se estableció que es suficiente con verificar si las matrices cuadráticas asociadas a los sistemas cumplían con los criterios establecidos.

Palabras clave: Oligopolios, Cournot, Equilibrio, Estabilidad, Firma.

Abstract

The objective of this document was to identify if the equilibrium points in the Cournot oligopoly system are Nash points with global stability, this extends the result in the literature “The phase space structure of the oligopoly dynamical system by means of Darboux integrability ” by Adam Krawiec, Tomasz Stachowiak and Marek Szyd łowski, where local stability was tested for a three-firms oligopoly, taking the result as relevant to economic issues where the participants of these oligopolies fight for maximization of the earnings, taking into account the decisions made by the other participants. In economic terms, the work consisted of verifying whether these equilibrium points of an imperfect competition that describes the situation of several companies competing for the market of the same good and that they can choose how much to produce to try to maximize their profit can be classified with a stability for all the space in which they operate and can be generalized for a group of n economic firms. It was decided to first demonstrate the local stability of the system by showing the diagrams corresponding to each case, later the demonstration for the global stability was established in that it is enough to verify if the quadratic matrices associated with the systems met the established criteria.

1. Introducción

Las uniones y compra de nuevas empresas son estrategias empresariales en todos los rangos que tienen como finalidad la expansión corporativa, con lo cual se posiciona mejor la empresa o el conglomerado respecto a los competidores restantes. El crecimiento empresarial va de la mano de la adquisición de nuevas empresas, aprovechándose del tamaño del conglomerado y por ende del capital que disponen. El término de fusión horizontal se utiliza cuando empresas del mismo sector con líneas de producción similares se fusionan, lo cual tiene una repercusión potencial en el mercado de distorsionar los precios de los productos como punto positivo para el consumidor, reduciendo la competencia de ese sector y aumentando la eficiencia económica de la empresa.

En teoría económica se han desarrollado modelos que permiten estudiar la estructura en la que las compañías compiten. Tomando como base al oligopolio, tales como el modelo de Cournot, Bertrand y Skelberg donde la investigación de estos modelos tiene un origen en el crecimiento de dichas empresas predominantes en el mercado a partir de la adquisición.

En [16], Harris y Wiens estudian como una empresa pública dominante en un mercado de bienes homogéneos que compite con otras empresas privadas maximiza el bienestar de la empresa. Proponen que la inclusión de una empresa pública en ese mercado homogéneo de empresas privadas provocaría un equilibrio del sistema de oligopolio con lo cual dicho equilibrio implicaría mejores precios para el consumidor en comparación a un mercado solo dominado por firmas privadas.

En el artículo científico [13] Adam Krawiec, Tomasz Stachowiak y Marek Szydłowski desarrollan el sistema de oligopolio hasta 3 firmas y demuestran que los puntos de equilibrio son puntos de estabilidad local, pero no demuestran que sean de estabilidad global. Cabe señalar también que proponen una forma de estudio a partir de polinomios de Darboux para estudiar la existencia de primeras y segundas integrales y poder conocer la dependencia temporal, lo cual da información de la estructura del sistema dinámico y conocer previamente si el sistema será caótico.

Ahora bien, la economía Mexicana no está exenta de la presencia de estas estructuras oligopólicas, siendo México un país con una economía abierta a procesos de interacción económica mundial, el interés en el estudio de los oligopolios y los puntos de estabilidad de Nash (puntos dentro del espacio $\mathbb{R}^n$ donde se maximizan los beneficios) que forman estos sistemas toma relevancia como lo es en industrias de logística, banca, seguros de vida, petróleo, telecomunicaciones, gas natural, electricidad, etc..., por lo que es interesante analizar los equilibrios del sistema donde la población o el consumidor resulta siendo el real ganador de estas competencias y conocer la dinámica que gobierna el mercado.

Como objetivo general de este trabajo de investigación, se busca probar que el sistema de oligopolio de Cournot cuenta con un punto de estabilidad de Nash. Primeramente, demostrar que este atractor es un punto estable en una vecindad de este punto en $\mathbb{R}^n$ con $n = 1, \dots, 5$ y posteriormente, demostrar que es globalmente estable para dicho espacio.

Para el estudio del sistema de oligopolio en la primera parte se abordan conceptos preliminares que darán las nociones requeridas para el estudio de estos sistemas, posteriormente adentraremos en los sistemas de oligopolios que existen y en por que la elección de los oligopolios de Cournot como pilar fundamental de este trabajo. En la tercera parte de este trabajo se estudia la estructura del diagrama de fases tomando un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathbb{R}^n$ y mediante la metodología de Hartman Grobman y Routh-Hurwitz, probaremos que la estabilidad del punto de Nash es local.

Posteriormente se probará la estabilidad global para los sistemas $n \times n$ con $n = 1, \dots, 5$ en base a las matrices cuadráticas asociadas al sistema en cada caso y la verificación de las condiciones estudiadas en el capítulo 2.

2. Fundamentos teóricos preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos que se emplearán en este trabajo, así como también herramientas matemáticas necesarias para el estudio de modelos económicos de oligopolios.

2.1. Campos vectoriales

La distribución espacial de una magnitud se conoce como campo vectorial la cual asocia un vector $f(x)$ en $\mathbb{R}^n$ a cada punto de un dominio $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Con ellos se representa el movimiento, dirección y diferentes magnitudes dependiendo de la asignatura que estemos estudiando. Nuestro campo vectorial se escribe de la siguiente manera

$$f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

en particular, el campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ tienen n componentes

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

f es un campo vectorial C^k si f como función es k veces diferenciable con continuidad en el espacio $\mathbb{D}$.

En un campo f los elementos del dominio son puntos y la imagen se interpreta como vectores que se aplican sobre el punto del dominio. Varios ejemplos de campos vectoriales son: Campo eléctrico, campo gravitatorio, etc.

Campo gravitacional

De la ley de gravitación de Newton, si (x, y, z) es el vector posición del centro de masa m y M en el núcleo de la tierra, con $r = |(x, y, z)|$, entonces la fuerza atractiva que actúa sobre un objeto m es

$$f(x, y, z) = \frac{-mMG}{|(x, y, z)|^3}(x, y, z). \quad (2)$$

Campo de Van der Pol

El campo asociado a la ecuación de Van der Pol, que modela oscilaciones en un circuito eléctrico con una fuente y un elemento de resistencia no lineal, viene dado por

$$f(x, y) = (y, \mu(1 - x^2)y - x).$$

2.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales

En este apartado se exponen conceptos básicos sobre ecuaciones diferenciales, lo que permite tener una base para el estudio de los modelos que se quieren resolver mas adelante.

En general una ecuación diferencial es una relación entre una función (suficientemente derivable), sus variables y una o varias derivadas sucesivas de la función.

Si $x = x(t)$ indica una función derivable hasta el orden que convenga, una ecuación diferencial ordinaria de orden n ($n \in \mathbb{N}$) en forma implícita es una expresión del tipo

$$G(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^n(t)) = 0 \quad (3)$$

$$x^n(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{n-1}(t)). \quad (4)$$

Definición 2.1. *Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es un sistema de n ecuaciones diferenciales, expresado en forma implícita, es:*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned} \quad (5)$$

Una ecuación de esta forma se dice autónoma, si el lado derecho depende explícitamente de t , no es autónoma si en este caso el lado derecho tiene la forma $f(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$. Excepto que se diga lo contrario estaremos asumiendo que f es C^1 sobre su dominio de definición.

Definición 2.2. *Se denomina solución del sistema a cualquier familia de funciones $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ diferenciales en $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaga idénticamente las ecuaciones del sistema.*

Es muy habitual utilizar la notación vectorial introduciendo los vectores.

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)), \quad f(x(t)) = (f_1(x(t)), \dots, f_n(x(t)))$$

el sistema se puede escribir en forma compacta como

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (6)$$

ó en el caso no autónomo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \quad (7)$$

En ocasiones interesa hallar la solución al problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_1(t_0) &= x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \end{aligned} \quad (8)$$

lo cual en forma vectorial es

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) ; \quad x(t_0) = x_0 \quad (9)$$

Con lo cual el teorema de existencia y unicidad de soluciones se establece de la siguiente forma:

Teorema 2.1 (Existencia y unicidad). *Considerando el problema de valor inicial (9) y sea un rectángulo $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ con centro en $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Si $f_1, \dots, f_n$ son funciones continuas y Lipschitzianas en D (para lo cual es suficiente que f sea C^1), entonces existe una única solución del problema, $x(t)$, definida en un cierto intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$*

Dada la imposibilidad de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales pretende dar una descripción geométrica y topológica de las soluciones de un sistema de ecuaciones.

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales como el sistema (7), y sea $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$. Entonces diremos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema si, y sólo si, $f(t, x^*) = 0, \forall t \in \mathbf{I}$, (ó bien $f(x^*) = 0$, si f no depende explícitamente de t). Note en este caso tendremos que $x(t) = x^*$ constante es la solución.

2.3. Estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad global de soluciones

Definición 2.3 (Lyapunov). *Sea una ecuación diferencial (autónoma)*

$$\dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

El punto de equilibrio x_0 se dice estable si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $\delta \equiv \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tal que, para cualquier solución $y(t)$ que satisfaga $\|y(0) - x_0\| < \delta$, se cumple que $\|y(t) - x_0\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$.

1. *El punto de equilibrio x_0 es asintóticamente estable sii:*

- a) *Es una solución estable*
- b) *Existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, para cualquier solución $y(t)$ con $\|y(0) - x_0\| < \delta$, se cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = x_0$. Obsérvese que un punto de equilibrio es asintóticamente estable si es estable y para cualquier condición inicial suficientemente cercana, la solución tiene al punto de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$.*

Si la estabilidad asintótica se mantiene para todos los estados iniciales en un conjunto dado, entonces se obtiene el concepto de **estabilidad globalmente asintótica**, en forma más precisa se dice que: Sea $\Omega \subset \mathbb{D}$, el punto de estabilidad x_0 , se dice globalmente asintóticamente estable relativo a Ω si es asintóticamente estable y el dominio de atracción (las condiciones iniciales cuyas soluciones convergen a x_0 cuando $t \rightarrow \infty$) contiene a Ω .

2.4. Fundamentos teórico-metodológicos

En este apartado se discuten algunas técnicas para analizar la posible estabilidad de puntos de equilibrio, lo que nos servirá mas adelante para el estudio de nuestro modelo de oligopolio.

2.4.1. Sistema Linealizado

Suponga un sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (11)$$

con f definido sobre el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico aislado del mismo (un punto crítico es aislado si existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta de centro x_0 y radio ε no contiene puntos críticos aparte de x_0). Se toma el sistema linealizado dado por

$$\dot{x} = \mathbf{J}f(x_0) \cdot x \quad (12)$$

donde $\mathbf{J}f(x_0)$ es la matriz Jacobiana de f en el punto x_0 .

Es de esperar que localmente (cerca del punto de equilibrio x_0), el comportamiento asintótico de los sistemas (11) y (12) sea parecido. Este parecido se precisará con el Teorema de Hartman—Grobman (2.2).

Los sistemas (11),(12) se dicen topológicamente conjugados si existe una aplicación continua, biyectiva con inversa continua $h : \Omega \rightarrow V$, vecindades de x_0 verificando la condición $h(x(t, x_0)) = z(t, h(x_0))$ para todo $x_0 \in \Omega$ donde $z(t, h(x_0))$ representa la solución maximal¹ de (11) con condición inicial $h(x_0)$. Si existen abiertos de Ω y V de manera que son topológicamente conjugados los sistemas restringidos a estos abiertos, entonces los sistemas (11) y (12) se dirán localmente topológicamente conjugados. Para entendernos, una conjugación topológica lleva órbitas de un sistema en órbitas del otro sistema, preservando la orientación temporal.

La segunda definición que interviene en el enunciado del Teorema de Hartman—Grobman es el de punto equilibrio hiperbólico. Con la notación anterior x_0 se dice hiperbólico si los valores propios de la matriz Jacobiana $\mathbf{J}f(x_0)$ tienen parte real no nula. En caso contrario x_0 se dirá no hiperbólico.

Teorema 2.2 (Teorema de Hartman Grobman). *Sea x_0 un punto de equilibrio aislado hiperbólico del sistema (11). Entonces existen entornos U, V de x_0 tales que los sistemas (11) y (12) son localmente topológicamente conjugados.*

Así cuando se estudia la dinámica de un sistema no lineal, $\dot{x} = f(x)$, podemos observar la dinámica de su linealización, $\dot{x} = \mathbf{J}f(x_0) \cdot x$ y así establecer la estabilidad de los puntos de equilibrio. En particular, tenemos que:

1. Si los eigenvalores de la matriz Jacobiana tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio del sistema no lineal es asintóticamente estable.

¹Solución bajo las condiciones iniciales.

2. Si algún eigenvalor de la matriz Jacobiana tiene parte real positiva, entonces el punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ es inestable.

Un problema que plantea el resumen anterior es decidir si las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa. El criterio de Routh-Hurwitz permite determinar si las raíces de un polinomio de grado finito tienen lugar en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Definición 2.4. *Un polinomio $p(t)$ es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa.*

Definición 2.5. Matriz de Hurwitz Dado el polinomio $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, denotamos por $H(f)$ a la matriz de Hurwitz de f , la cual se define como

$$H(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_0 & a_2 & \ddots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & & \ddots & & a_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & & & \ddots & a_{n-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_{n-2} & a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.3. (Criterio Routh-Hurwitz) Sea $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ con $a_0 > 0$, $f(x)$ es Hurwitz si y sólo si $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0$, donde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ son los menores principales de $H(f)$.

2.4.2. Funciones de Lyapunov

Se considera de nuevo la ecuación $\dot{x} = f(x)$ con $f \in C^1(\mathbb{D}, \mathbb{R}^n)$ y x_0 punto de equilibrio. Sea $V : U \subseteq \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en U la cual es una vecindad de x_0 y diferenciable en $U \setminus \{x_0\}$, dada una trayectoria $\psi_t(x)$ por un punto x , se define la derivada de V a lo largo de la solución $\psi_t(x)$ por

$$\dot{V}(x) := \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x).$$

Teorema 2.4. (Estabilidad de Lyapunov) Sean x_0 punto de equilibrio y $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ como antes tal que

1. $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$,
2. $\dot{V} \leq 0$, ($\dot{V} < 0$) en $U \setminus \{x_0\}$, entonces x_0 es estable (ó asintóticamente estable).

Una función que satisface 1 o alguna de las condiciones en 2 se dice **función de Lyapunov**.

2.5. Modelo Lotka-Volterra generalizado

El modelo de Lotka-Volterra es un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica en la interacción entre varias especies. A continuación consideraremos algunos aspectos de dicho modelo puesto que el análisis de estos sistemas nos ayudará en el estudio de la estabilidad de sistemas que adoptaremos en este trabajo, así el sistema viene dado por las siguientes ecuaciones

$$\dot{x} = x(\lambda_i + \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j) \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

En [8] Bermejo, p.2, da las condiciones suficientes para la estabilidad global de un punto de equilibrio con coordenadas positivas. De hecho el autor considera un sistema generalizado del Lotka-Volterra mediante términos de cuasi-polinómios y asumiendo la existencia de un único punto de equilibrio: $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, obtiene condiciones para la estabilidad global. Dicho sistema viene dado mediante las ecuaciones:

$$\dot{x}_i = x_i(\lambda_i + \sum_{j=1}^m A_{ij} \prod_{k=1}^n x_k^{B_{jk}}) \quad i = 1, \dots, n \quad m > n \quad (14)$$

Bermejo [8] define por conveniencia la siguiente matriz $m \times m$, $Q = A \cdot B$ e introduce las funciones

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^n x_j^{B_{ij}}. \quad (15)$$

Ahora el conjunto $\bar{S}_w$ de matrices $n \times n$ simétricas, semi-definidas negativas

$$\bar{S}_w := \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^T = B \text{ y } x^T Bx \leq 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

Análogamente S_w denotará las matrices simétricas definidas negativas

$$S_w := \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^T = B \text{ y } x^T Bx < 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

Nota 2.1. Ver [8] para una prueba y mas detalles.

A continuación se muestra el siguiente resultado:

Teorema 2.5. *Suponga que el sistema (14) admite un único punto de equilibrio $x^* \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, entonces se cumple lo siguiente*

- a). *Si $Q \in \bar{S}_w$ entonces x^* es punto estable.*
- b). *Si $Q \in S_w$ entonces x^* es un punto globalmente estable.*
- c). *Tomando $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_m)$ con $c_i > 0 \quad \forall i$, sea una matriz tal que $C \cdot Q + Q^T \cdot C$ es semidefinida negativa en el caso (a) o definida negativa en el caso (b). Luego en (a) o (b).*

$$W(x) = \sum_{i=1}^m c_i \left\{ \prod_{j=1}^n x_j^{B_{ij}} - \prod_{j=1}^n (x_j^*)^{B_{ij}} - \left(\prod_{j=1}^n x_j^{B_{ij}} \right) \ln \left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{x_j^*} \right)^{B_{ij}} \right] \right\} \quad (16)$$

Es una función de Lyapunov para $x^ \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$.*

d). La variación de la función Lyapunov en el tiempo $W(x)$ a lo largo de las trayectorias de $\dot{x}$ es

$$\dot{W}(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(x^*))^T (C \cdot Q + Q^T \cdot C)(\varphi(x) - \varphi(x^*)), \quad (17)$$

donde $\varphi(X) = (\varphi(X)_1, \dots, \varphi(X)_m)^T$.

Para el caso especial del sistema (14) con un único punto de equilibrio $x^* \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, se tiene que $B = I$, la matriz identidad y la función (16), la cual es una función de Lyapunov que simplifica a la expresión reducida

$$V(x) = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right) \quad c_i > 0 \quad \forall i, \quad (18)$$

la derivada del tiempo de a lo largo de la trayectoria de (14) será la expresión

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}(x - x^*)^T (CA + A^T C)(x - x^*), \quad (19)$$

donde $C := \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ es la matriz diagonal. Se puede decir que si existe una matriz diagonal positiva C tal que $C \cdot A + A^T \cdot C$ es semidefinida negativa (i.e $A \in \overline{S}_w$) entonces x^* es estable. Más aún si $C \cdot A + A^T \cdot C$ es definida negativa ($A \in S_w$) entonces x^* es globalmente estable en $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$.

En resumen de lo anterior se puede llegar a el siguiente teorema:

Teorema 2.6. *Suponga que el sistema (13) admite un único punto de equilibrio x^* en $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, si existe una matriz diagonal positiva C , tal que*

$$CA + A^T C,$$

es negativa definida entonces la función (18) es una función de Lyapunov del sistema (13) y x^ es globalmente estable en $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$.*

En vista de los resultados anteriores una cuestión relevante para su aplicación es determinar cuándo una matriz simétrica es negativa definida en la siguiente parte discutiremos algunos criterios.

2.5.1. Menores principales de una matriz cuadrada

Definición 2.6. *(Menores principales de una matriz cuadrada.)*

Sea $A \in M_n(R)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, el menor principal de A ubicado en los renglones y columnas con índices $i_1, \dots, i_k$ se define mediante la siguiente fórmula:

$$\delta_{i_1, \dots, i_k}(A) := M_A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{pmatrix} = \det(A_{\{i_1, \dots, i_k\}, \{i_1, \dots, i_k\}}). \quad (20)$$

El número k se denomina el orden o tamaño de menor.

Definición 2.7. (*Menores principales líderes de una matriz cuadrada.*)

Sea $A \in M_n(R)$, $k \in 1, \dots, n$, el menor de esquina o sea el menor principal líder de k -ésimo orden de A se define como el menor principal que está en la intersección de los primeros k renglones y las primeras k columnas de la matriz

$$A : \Delta_k(A) = \delta_{1,\dots,k}(A) = \det(A_{\{1,\dots,k\},\{1,\dots,k\}}). \quad (21)$$

Se toma en consideración que una matriz simétrica A es definida negativa si $x^T A x < 0$, $x \neq 0$.

Teorema 2.7. *Sea A una matriz simétrica las siguientes son equivalentes:*

- *A es negativa definida.*
- *Los eigenvalores de A son negativos.*
- *En la matriz A todos los menores de esquina de órdenes impares son negativos y todos los menores de esquina de órdenes pares son positivos:*

$$\forall k \in 1, \dots, n \quad \text{sgn}(\Delta_k(q)) = (-1)^k.$$

- *En la matriz A todos los menores principales de órdenes impares son negativos y todos los menores de esquina de órdenes pares son positivos:*

$$\forall I \subseteq 1, \dots, n \quad \text{sgn}(\delta I(q)) = (-1)^{|I|}.$$

Nota 2.2. En una matriz cuadrada de orden 3 los menores principales de órdenes impares son δ_1 , δ_2 , δ_3 , $\delta_{1,2,3}$, y los menores principales de órdenes pares son $\delta_{1,2}$, $\delta_{1,3}$, $\delta_{2,3}$.

3. Oligopolios

3.1. Oligopolios de Cournot

De acuerdo con Puu en [5] p.2., un oligopolio es una forma de mercado en la que cierto mercado es dominado por un número de grandes vendedores, esta forma de mercado resulta en eliminar a la competencia y el aumento de precios. Entre menos vendedores es mas fácil que cada integrante del oligopolio sea consciente de los movimientos de los demás, por lo tanto las decisiones que toma una firma influye en los resultados de la otra.

Esta estructura de mercado se considera como un punto intermedio entre la competencia perfecta, que es una competencia libre o pura y un monopolio .

Las empresas en un mercado oligopolista suelen tener un amplio rango de patrones de comportamiento por lo tanto es muy difícil que exista una sola forma de comportarse, para ello los modelos estáticos ayudan ya que representan una forma sencilla de analizar los puntos de equilibrio del sistema.

Para el problema de maximización nos topamos con que la empresa estará inmersa en un contexto interdependiente en las estrategias de los demás participantes por lo cual se deben estimar las reacciones de los competidores en los problemas de optimización.

Del otro lado tenemos el monopolio donde solo existe un proveedor el que tiene la función de la demanda del mercado y deliberadamente tiene la capacidad de limitar su oferta cobrando un precio de monopolio más alto el cual por lo regular implica una desventaja para los consumidores. Apoyándonos en los costos marginales se equiparan, no al precio, sino al ingreso marginal, que por regla general es menor.

El duopolio y oligopolio contempla un caso más complejo que el monopolio, estos dos como el monopolista tienen en cuenta la demanda del mercado y con eso intenta equiparar los ingresos marginales con costo marginal pero ahora cada ingreso marginal de cada empresa depende no solo de su propio suministro sino también del suministro de los demás competidores por que cada uno de ellos es lo suficientemente grande como para influir en el mercado.

3.2. Modelo de Bertrand

Joseph Bertrand fue un matemático y economista el cual estableció que las empresas compiten mediante la fijación de precios en vez de considerar las cantidades de producción del bien como variable estratégica como lo establecía Cournot.

Pindyck y Rubinfeld [14], p.523, definen al modelo de Bertrand, como “Un modelo de oligopolio en el que las empresas producen un bien homogéneo, cada una considera fijo el precio de sus competidoras y todas deciden simultáneamente el precio que van a cobrar” así el mercado es el que determina las cantidades para cada empresa. Puesto que las empresas compiten disminuyendo sus precios para poder atraer al cliente de la competencia para incrementar los beneficios, llegará el punto en el que ya no se pueden bajar los precios puesto que la empresa ya no ganaría nada y no habría un incentivo de producción y es ahí, donde se denota que el precio es igual al costo marginal (CMg).

$$P = CMg$$

Para el caso de un duopolio, para las empresas (i, j) , la demanda de sus productos está en función de los precios que establezca cada empresa

$$D = f(P_i, P_j).$$

3.3. Modelo de Stackelberg

Stackelberg fue el primer economista el cual dijo que las empresas competían jerárquicamente, teniendo así empresas líderes y seguidoras las cuales esperan a que las empresas líderes tomen decisiones de nivel de producción para considerarlas y en base a ello maximizar sus ganancias.

Tarziján M. y Paredes M. [15] p.208, mencionan que:

“Muchas decisiones se toman secuencialmente, esto es, uno de los competidores decide qué hacer después de haber observado la decisión del otro. Por ejemplo, si una empresa es líder del mercado o se ha instalado antes que otra firma, esto le permite tomar decisiones con antelación.”

A diferencia del modelo de Cournot, analiza el comportamiento secuencial de las firmas, mientras en Cournot es algo simultaneo.

3.4. Estudio del modelo de Cournot

En [12] Cournot, propone el modelo de oligopolio de Cournot en 1838, el cual fue uno de los primeros modelos matemáticos propuestos en el campo de la economía. Cournot aborda el funcionamiento de un mercado con numerosos demandantes pequeños frente a unos pocos participantes grandes lo cual implica que todos los participantes influyen en el precio, y por lo tanto como en el modelo monopolístico, los oligopolistas tienen en cuenta la demanda para el cálculo de sus movimientos.

Como regla general la demanda es una función decreciente del precio, [5] p.17. En equilibrio la demanda es igual a la oferta, y también se puede hablar de la función de demanda inversa que establece cómo el precio de mercado depende de la oferta. En el caso de Cournot, es más conveniente hablar de esta función de demanda inversa:

$$p = f(Q), \quad (22)$$

donde $f'(Q) < 0$, p es el precio y Q es la oferta del mercado. Suponiendo que hay n proveedores cuyos suministros individuales se denominan q_i , la oferta del mercado se convierte en

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (23)$$

Se define la oferta residual como

$$Q_i = Q - q_i, \quad (24)$$

que es la oferta de todas las firmas juntas distintas a i .

El precio del bien es p y la demanda está dada por una demanda inversa lineal.

$$p(Q(t)) = a - b(Q(t)), \quad (25)$$

donde a y b son constantes positivas. La primera es el valor más alto en el mercado del bien. Asumimos que la función de costos tiene una forma cuadrática

$$C_i(q_i) = c_i + d_i q_i(t) + e_i q_i^2(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (26)$$

donde c_i es el costo fijo de la i -ésima firma y d_i, e_i son constantes. Como el costo marginal debe ser menor que el precio mas alto en el mercado tenemos que tener la condición respecto a la derivada de $q(t)$, $\dot{C}_i(q_i) = d_i + 2e_i q_i < a$, $i = 1, 2$

El beneficio de la i -ésima firma es

$$\Pi(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)) = (q_i(t))(a - bQ(t)) - (c + d_i(t) + e_i q_i^2(t)) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

y la respectiva ganancia marginal

$$\frac{\partial \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_i} = a - bQ(t) - b q_i(t) - d_i - 2e_i q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Se asume que las empresas tienen un conocimiento imperfecto del mercado por lo cual siguen un proceso de ajuste racional limitado, basado en una estimación del beneficio marginal $\partial \Pi_i / \partial q_i$, lo que significa que la empresa aumenta su producción cuando el beneficio marginal es positivo, cuando este se torna negativo la empresa reduce su producción.

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \alpha_i q_i(t) \frac{\partial \Pi(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

donde α_i es la velocidad de ajuste de la i -ésima empresa, entonces el sistema de oligopolio de n firmas está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a - bQ(t) - b q_1(t) - d_1 - 2e_1 q_1(t)), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a - bQ(t) - b q_2(t) - d_2 - 2e_2 q_2(t)), \\ &\vdots \\ \dot{q}_n(t) &= (\alpha_n q_n(t))(a - bQ(t) - b q_n(t) - d_n - 2e_n q_n(t)). \end{aligned} \quad (30)$$

Utilizamos el siguiente cambio de variable

$$a_i = a - d_i, \quad b_i = b + e_i, \quad (31)$$

y tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a_1 - 2b_1 q_1(t) - b q_2(t) - \dots - b q_n(t)), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a_2 - b q_1(t) - 2b_2 q_2(t) - \dots - b q_n(t)), \\ &\vdots \\ \dot{q}_n(t) &= (\alpha_n q_n(t))(a_n - 2b q_1(t) - b q_2(t) - \dots - b_n q_n(t)). \end{aligned} \quad (32)$$

Las variables q_i con $i = 1, 2, \dots, n$ deben ser positivas para tener un sentido económico real.

el cual podemos renombrar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a_1 - 2b_1 q_1(t) - b q_2(t) - \dots - b q_n(t)) = h^1(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a_2 - b q_1(t) - 2b_2 q_2(t) - \dots - b q_n(t)) = h^2(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ &\vdots \\ \dot{q}_n(t) &= (\alpha_n q_n(t))(a_n - 2b q_1(t) - b q_2(t) - \dots - b_n q_n(t)) = h^n(q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (33)$$

4. Estabilidad Local

En esta sección se estudia la estabilidad local de un sistema de oligopolio de 2 y 3 firmas, dando unos ejemplos en cada caso respectivamente para poder formular una conjetura respecto a la estabilidad global de estos sistemas.

4.1. Estabilidad local 2×2

En este primer apartado se hace enfoque el mercado de oligopolio de 2 firmas donde los jugadores producen una oferta de mercado $Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ homogénea. Teniendo como sistema de ecuaciones para el modelo 2×2

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a - bQ(t) - bq_1(t) - d_1 - 2e_1 q_1(t)), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a - bQ(t) - bq_2(t) - d_2 - 2e_2 q_2(t)),\end{aligned}\tag{34}$$

bajo el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}a_1 &= a - d_1, & a_2 &= a - d_2, \\ b_1 &= b + e_1, & b_2 &= b + e_2,\end{aligned}\tag{35}$$

existen 4 puntos de equilibrio.

Haciendo el cambio de variable correspondiente obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a_1 - 2b_1 q_1(t) - bq_2(t)), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a_2 - bq_1(t) - 2b_2 q_2(t)),\end{aligned}\tag{36}$$

en el cual las variables q_i con $i = 1, 2$ deben ser positivas para tener un sentido económico real. Este sistema lo podemos renombrar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a_1 - 2b_1 q_1(t) - bq_2(t)) = h^1(q_1, q_2), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a_2 - bq_1(t) - 2b_2 q_2(t)) = h^2(q_1, q_2).\end{aligned}\tag{37}$$

Para encontrar los puntos fijos del sistema debemos resolver el sistema $h^i(q^*) = 0$ con $i = 1, 2$, para q_1^*, q_2^* y obtenemos los siguientes puntos fijos:

$$E_1 = (0, 0),\tag{38}$$

$$E_2 = \left(\frac{a_1}{2b_1}, 0 \right),\tag{39}$$

$$E_3 = \left(0, \frac{a_2}{2b_2} \right),\tag{40}$$

$$E_4 = \left(\frac{2a_1 b_2 - b a_2}{4b_1 b_2 - b^2}, \frac{2a_2 b_1 - b a_1}{4b_1 b_2 - b^2} \right).\tag{41}$$

Sea A una matriz 2×2 y P_A su polinomio característico de la forma:

$$\lambda^2 - \tau(A) \cdot \lambda + \det(A)$$

con τ como la traza de A entonces de acuerdo con [1] Strogatz se tiene el siguiente lema para la clasificación de puntos de equilibrio.

Lemma 4.1. *Si $\tau(A)^2 - 4\Delta_2(A) > 0, \tau(A) < 0$ los eigenvalores son negativos y el punto es estable, con $\Delta_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.*

Proposición 4.2. *Sea $a_1, a_2, b_1, b_2, b > 0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$2a_1b_2 > ba_2 \quad 2a_2b_1 > ba_1 \quad b_i > b. \quad (42)$$

*Existe un único punto fijo (**Punto de estabilidad de Nash**) $E \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$*

$$E = \left(\frac{2a_1b_2 - ba_2}{4b_1b_2 - b^2}, \frac{2a_2b_1 - ba_1}{4b_1b_2 - b^2} \right), \quad (43)$$

el cual es localmente estable, donde dos empresas alcanzan un equilibrio con nivel de producción fijo.

Demostración 4.1. Para establecer el resultado utilizaremos el teorema de Hartman-Grobman estudiando así la dinámica en una vecindad del punto crítico, dicha dinámica local se obtiene a través de la aproximación lineal

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 - q_1^* \\ q_2 - q_2^* \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} q_1 - q_1^* \\ q_2 - q_2^* \end{bmatrix}, \quad (44)$$

donde M es la jacobiana en el punto q_i^* .

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial q_1} \big|_{q=q^*} & \frac{\partial h^2}{\partial q_1} \big|_{q=q^*} \\ \frac{\partial h^1}{\partial q_2} \big|_{q=q^*} & \frac{\partial h^2}{\partial q_2} \big|_{q=q^*} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

La estabilidad de los puntos críticos dependen de los eigenvalores de la matriz M que son soluciones del polinomio característico.

$$\det [M - \lambda I] = \lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det(M); \quad (46)$$

Considerando el punto crítico $E \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ y viendo el sistema desde un punto de vista económico este sería un punto de equilibrio de Nash. La matriz Jacobiana evaluada en este punto es:

$$M = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 b_1 q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* \\ -\alpha_2 b q_2^* & -2\alpha_2 b_2 q_2^* \end{bmatrix} \quad (47)$$

y el polinomio característico correspondiente es:

$$\lambda^2 - 2\lambda(\alpha_1 b_1 q_1^* + \alpha_2 b_2 q_2^*) + \alpha_1 \alpha_2 q_1^* q_2^* (b^2 - b_1 b_2) = 0. \quad (48)$$

Puesto que en base del lemma (4.1) el determinante es

$$\Delta_2(M) = 4\alpha_1 \alpha_2 b_1 b_2 q_1 q_2 - \alpha_1 \alpha_2 b^2 q_1 q_2, \quad (49)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ y $q_1^*, q_2^* > 0$ entonces

$$(4b_1 b_2) \leq b^2, \quad b_i^2 > b^2, \quad (50)$$

$\Delta_2(M) > 0$, y por lo tanto los eigenvalores de la matriz jacobiana tienen parte real no nula. Siendo la traza de M

$$\tau(M) = \alpha_1 b_1 q_1^* + \alpha_2 b_2 q_2^* \quad (51)$$

y $\tau^2(M) - 4\Delta_2(M) > 0$, el punto E_4 es estable. Por el Teorema de Hartman Grobman 2.2 E seria un punto critico hiperbólico cuyas vecindades $U, V \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ nos muestran que E es localmente estable en el sistema. ■

A continuación se desarrollan un par de ejemplos de este sistema 2×2 .

Ejemplo 4.1. Para ilustrar la estabilidad del sistema (36), consideremos un caso más simple de empresas idénticas con un ajuste de velocidad α al mercado igual a 1. Con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & a_1 &= 4, \\ b_1 &= 5, & b &= 2, \\ b_2 &= 4, & a_2 &= 4. \end{aligned} \quad (52)$$

Notando que se cumplen las condiciones en las cuales los $b_i > b$, $b^2 - 4b_1 b_2 < 0$ y $2a_1 b_2 - b a_2, 2a_2 b_1 - b a_1 > 0$ entonces el modelo tiene un sentido económico real en el primer cuadrante $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$.

Tenemos que nuestra matriz Jacobiana M es

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{60}{19} & -\frac{12}{19} \\ -\frac{16}{19} & -\frac{64}{19} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

donde los eigenvalores y respectivos eigenvectores son

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -\frac{48}{19}. \quad (54)$$

$$V_1 = \left(\frac{3}{4}, 1\right)^T, \quad V_2 = (-1, 1)^T. \quad (55)$$

y cuyo determinante y traza son

$$\Delta_2(A) = \frac{192}{19}, \quad \tau(A) = -\frac{124}{19}.$$

Como $\tau(M) - 4\Delta_2(A) < 0$, de acuerdo con (4.1), los eigenvalores tienen parte real no nula y como la traza es negativa el punto E es un punto estable atractor el cual representa un punto de Nash en el modelo de Cournot donde las dos empresas maximizan su beneficio. Como se puede ver en la figura 1 el punto E es un punto de estabilidad local para toda vecindad de E .

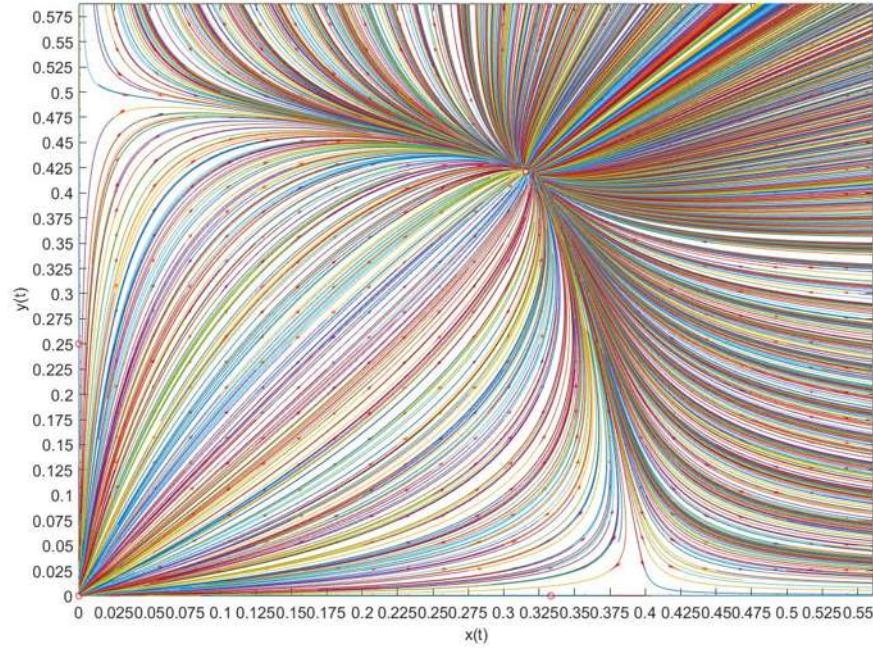


Figura 1: Modelo 2x2 ejemplo 4.1

Ejemplo 4.2. Para mostrar la inestabilidad del sistema (37), consideremos un caso en el que las desigualdades no sean respetadas pero si manteniendo el ajuste de velocidad idéntico en ambas firmas y con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & a_1 &= 2, \\ b_1 &= 2, & b &= 7, \\ b_2 &= 4, & a_2 &= 2. \end{aligned} \tag{56}$$

Donde tenemos por matriz jacobiana

$$M = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & \frac{14}{17} \\ -\frac{42}{17} & -\frac{48}{17} \end{bmatrix} \tag{57}$$

En la cual $b_i \not\geq b$, $b^2 - 4b_1b_2 \not\leq 0$ y $2a_1b_2 - ba_2, 2a_2b_1 - ba_1 < 0$ y como podemos ver no hay un punto de Nash ■.

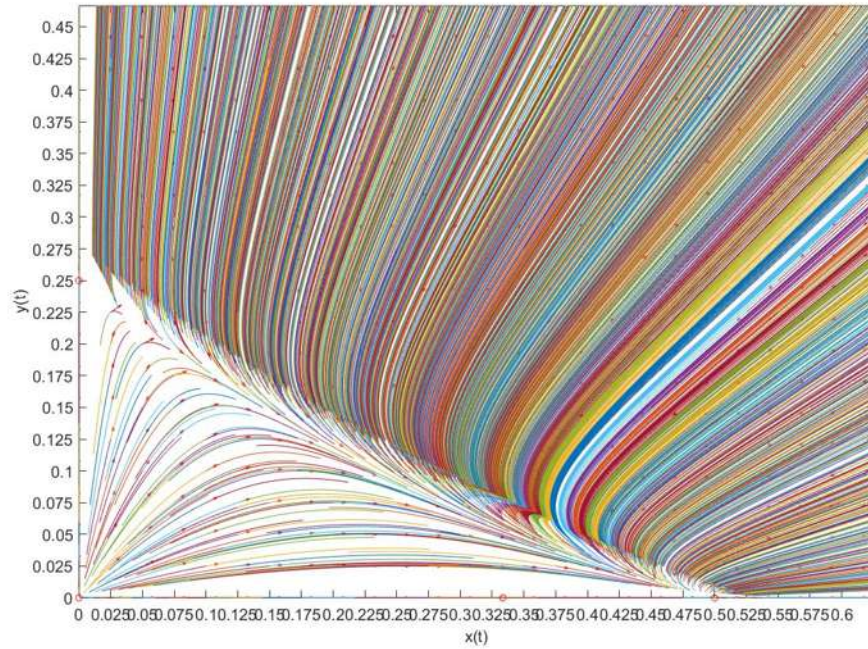


Figura 2: Modelo 2x2 ejemplo 4.2

4.2. Estabilidad local 3×3

En este segundo apartado nos centraremos ahora el mercado de oligopolio de 3 firmas donde los jugadores producen una oferta de mercado $Q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$ homogénea. Teniendo como sistema de ecuaciones para el modelo de 3×3 :

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a - bQ(t) - bq_1(t) - d_1 - 2e_1 q_1(t)), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a - bQ(t) - bq_2(t) - d_2 - 2e_2 q_2(t)), \\ \dot{q}_3(t) &= (\alpha_3 q_3(t))(a - bQ(t) - bq_3(t) - d_3 - 2e_3 q_3(t)),\end{aligned}\tag{58}$$

y haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}a_1 &= a - d_1, & a_2 &= a - d_2, & a_3 &= a - d_3, \\ b_1 &= b + e_1, & b_2 &= b + e_2, & b_3 &= b - e_3,\end{aligned}\tag{59}$$

llegamos al siguiente sistema que podemos renombrar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a_1 - 2b_1 q_1(t) - bq_2(t) - bq_3(t)) = h^1(q_1, q_2, q_3), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a_2 - bq_1(t) - 2b_2 q_2(t) - bq_3(t)) = h^2(q_1, q_2, q_3), \\ \dot{q}_3(t) &= (\alpha_3 q_3(t))(a_3 - bq_1(t) - bq_2(t) - 2b_3 q_3(t)) = h^3(q_1, q_2, q_3).\end{aligned}\tag{60}$$

Para el cual al resolver el sistema $h^i(q^*) = 0$ con $i = 1, 2, 3$, para q_1^*, q_2^*, q_3^* obtenemos los siguientes puntos fijos.

$$E_1 = (0, 0, 0),\tag{61}$$

$$E_2 = \left(\frac{a_1}{2b_1}, 0, 0 \right),\tag{62}$$

$$E_3 = \left(0, \frac{a_2}{2b_2}, 0 \right),\tag{63}$$

$$E_4 = \left(0, 0, \frac{a_3}{2b_3} \right),\tag{64}$$

$$E_5 = \left(\frac{2a_1 b_2 - ba_2}{4b_1 b_2 - b^2}, \frac{2a_2 b_1 - ba_1}{4b_1 b_2 - b^2}, 0 \right),\tag{65}$$

$$E_6 = \left(0, \frac{2a_2 b_3 - ba_3}{4b_2 b_3 - b^2}, \frac{2a_3 b_2 - ba_2}{4b_2 b_3 - b^2} \right),\tag{66}$$

$$E_7 = \left(\frac{2a_1 b_3 - ba_3}{4b_1 b_3 - b^2}, 0, \frac{2a_3 b_1 - ba_1}{4b_1 b_3 - b^2} \right),\tag{67}$$

$$E_8 = \left(\frac{\frac{4a_1 b_2 b_3 + (-a_1 + a_2 + a_3)b^2 - 2(a_2 b_3 + a_3 b_2)b}{8b_1 b_2 b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2}}{\frac{4a_2 b_1 b_3 + (a_1 - a_2 + a_3)b^2 - 2(a_1 b_3 + a_3 b_1)b}{8b_1 b_2 b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2}}, \frac{\frac{4a_2 b_1 b_3 + (a_1 - a_2 + a_3)b^2 - 2(a_1 b_3 + a_3 b_1)b}{8b_1 b_2 b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2}}{\frac{4a_3 b_1 b_2 + (a_1 + a_2 - a_3)b^2 - 2(a_1 b_2 + a_2 b_1)b}{8b_1 b_2 b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2}}, \frac{\frac{4a_3 b_1 b_2 + (a_1 + a_2 - a_3)b^2 - 2(a_1 b_2 + a_2 b_1)b}{8b_1 b_2 b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2}}{\frac{4a_1 b_2 b_3 + (-a_1 + a_2 + a_3)b^2 - 2(a_2 b_3 + a_3 b_2)b}{8b_1 b_2 b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2}} \right).\tag{68}$$

Proposición 4.3. Sea E_8 un punto de equilibrio para el sistema (60), de tal manera que $a_i, b_i, b > 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_i > b. \quad (69)$$

dicho punto es un punto es localmente estable para (60).

Demostración 4.2. Utilizamos de nuevo el teorema de Hatman-Grobman para estudiar primeramente la dinámica en la vecindad del punto de Nash E_8 a través de la aproximación lineal

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 - q_1^* \\ q_2 - q_2^* \\ q_3 - q_3^* \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} q_1 - q_1^* \\ q_2 - q_2^* \\ q_3 - q_3^* \end{bmatrix}, \quad (70)$$

donde M es:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial q_1} \big|_{q=q^*} & \frac{\partial h^2}{\partial q_1} \big|_{q=q^*} & \frac{\partial h^3}{\partial q_1} \big|_{q=q^*} \\ \frac{\partial h^1}{\partial q_2} \big|_{q=q^*} & \frac{\partial h^2}{\partial q_2} \big|_{q=q^*} & \frac{\partial h^3}{\partial q_2} \big|_{q=q^*} \\ \frac{\partial h^1}{\partial q_3} \big|_{q=q^*} & \frac{\partial h^2}{\partial q_3} \big|_{q=q^*} & \frac{\partial h^3}{\partial q_3} \big|_{q=q^*} \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Puesto que queremos ver el sistema desde un punto de vista económico real, tomamos el punto $E_8 \in \text{int}(\mathbb{R}_+^3)$ y evaluamos ahí la matriz M en el punto de Nash E_8

$$M = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 b_1 q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* \\ -\alpha_2 b q_2^* & -2\alpha_2 b_2 q_2^* & -\alpha_2 b q_2^* \\ -\alpha_3 b q_3^* & -\alpha_3 b q_3^* & -2\alpha_3 b_3 q_3^* \end{bmatrix}, \quad (72)$$

en este caso se calcula el polinomio característico para $n = 3$ de M para ver la estabilidad del sistema.

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \text{tra}(A)^2 \lambda^2 + \text{tra}(A)^3 \lambda - \det(A) = \\ \lambda^3 + 2(\alpha_1 b_1 q_1^* + \alpha_2 b_2 q_2^* + \alpha_3 b_3 q_3^*) \lambda^2 \\ + [\alpha_1 \alpha_2 q_1^* q_2^* (4b_1 b_2 - b^2) + \alpha_1 \alpha_3 q_1^* q_3^* (4b_1 b_3 - b^2) + \alpha_2 \alpha_3 q_2^* q_3^* (4b_2 b_3 - b^2)] \lambda \\ + 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 q_1^* q_2^* q_3^* (b^3 + 4b_1 b_2 b_3 - b^2(b_1 + b_2 + b_3)) = 0. \end{aligned} \quad (73)$$

Aquí el signo del discriminante del polinomio característico nos va a decir si los eigenvalores son reales o complejos, si el discriminante es positivo entonces todos los eigenvalores son reales y por el criterio de Hurvitz (2.3) como los coeficientes del polinomio característico ($\gamma_1 \lambda^3 + \gamma_2 \lambda^2 + \gamma_3 \lambda + \gamma_4$) son positivos, ($\gamma_i > 0$) y $\gamma_2 \gamma_1 > \gamma_3 \gamma_0$ entonces el punto crítico es estable.

Ejemplo 4.3. Probemos la estabilidad del sistema (60) tomando una velocidad de ajuste $\alpha = 1$ respetando las desigualdades establecidas y con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1, & b &= 2, \\ b_1 &= 3, & a_1 &= 2, \\ b_2 &= 4, & a_2 &= 2, \\ a_3 &= 4, & b_3 &= 6,\end{aligned}\tag{74}$$

y nuestra matriz M quedaría con los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} -\frac{72}{61} & -\frac{24}{61} & -\frac{24}{61} \\ -\frac{16}{61} & -\frac{64}{61} & -\frac{16}{61} \\ -\frac{34}{61} & -\frac{34}{61} & -\frac{204}{61} \end{bmatrix}.\tag{75}$$

Dado el polinomio $f(x) = \lambda^3 + \frac{340}{61}\lambda^2 + \frac{61216}{3721}\lambda + \frac{2369664}{226981}$, denotamos por $H(f)$ a la matriz de Hurwitz de f , la cual se define como:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{340}{61} & \frac{2369664}{226981} & 0 \\ 1 & \frac{61216}{3721} & 0 \\ 0 & \frac{340}{61} & \frac{2369664}{226981} \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\Delta_1 > 0$; $\Delta_2 \approx 81,256 > 0$, $\Delta_3 = \frac{43705552011264}{51520374361} > 0$, los eigenvalores del sistema son reales y como $\gamma_2\gamma_1 \approx 91,7 > 10,44 \approx \gamma_0\gamma_3$, se cumplen con la condiciones del sistema y E_8 es un punto estable ■.

$$E_8 = (0,1967, 0,1311, 0,2787).\tag{76}$$

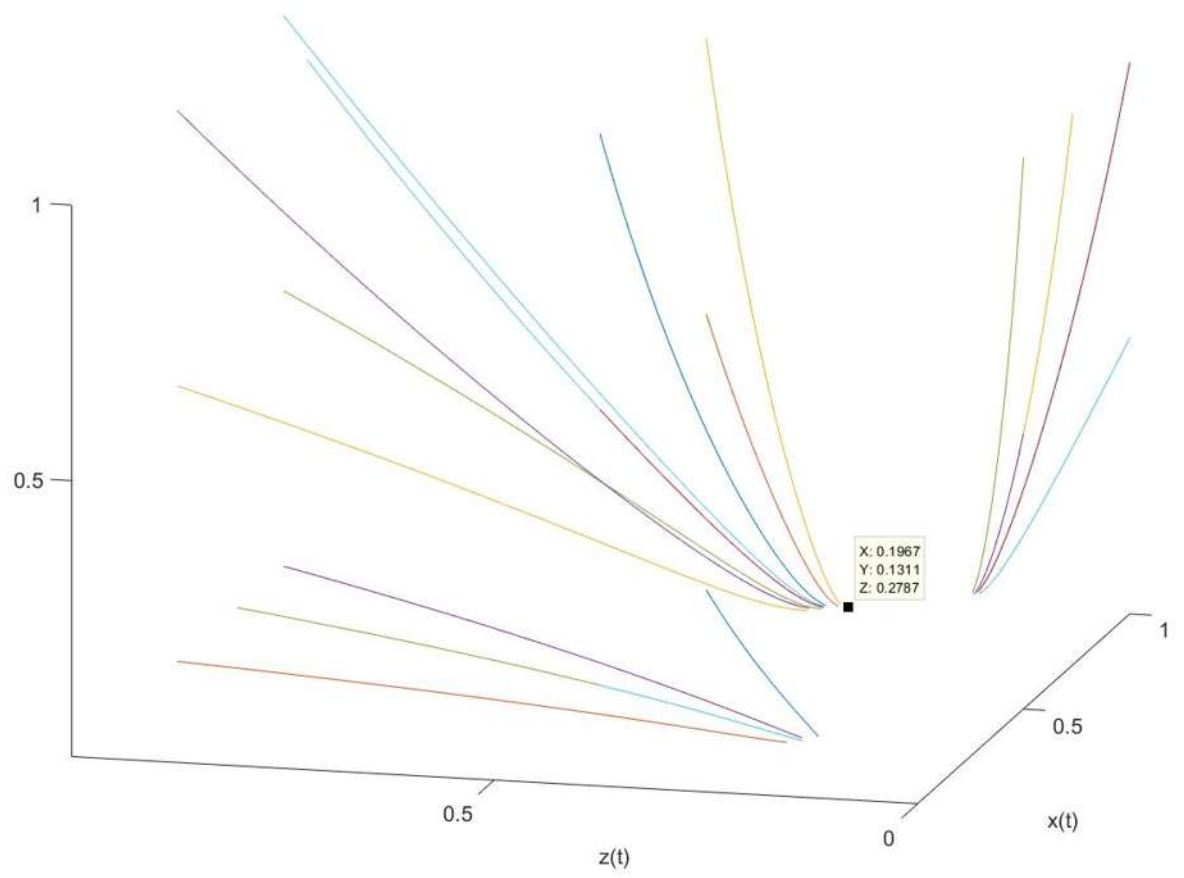


Figura 3: Modelo 3x3 ejemplo 4.3

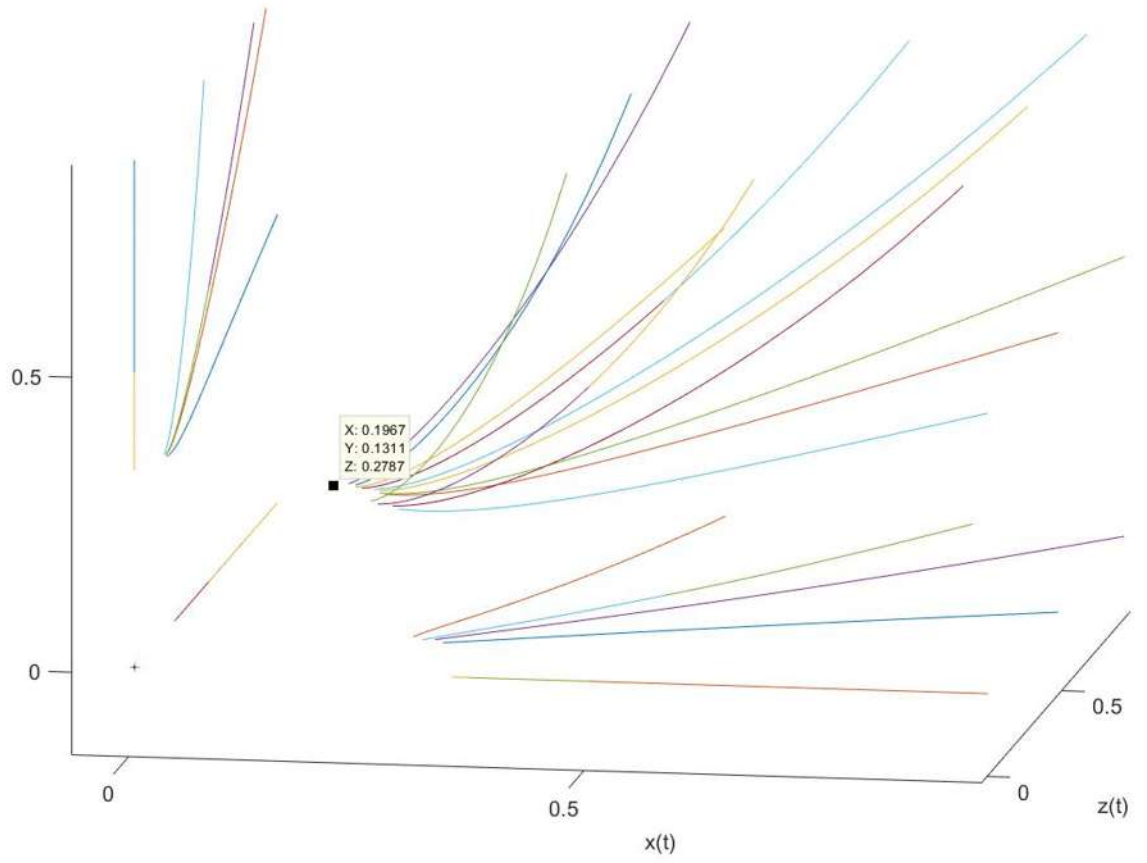


Figura 4: Modelo 3x3 ejemplo 4.3

Ejemplo 4.4. Sea un modelo de tres firmas con un a velocidad de ajuste idéntica $\alpha = 1$ y sean los datos:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & b &= 2, \\ b_1 &= 7, & a_1 &= 5, \\ b_2 &= 9, & a_2 &= 3, \\ a_3 &= 12, & b_3 &= 20, \end{aligned} \tag{77}$$

dando como resultante la matriz Jacobiana evaluada en E_8

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{2597}{613} & -\frac{371}{613} & -\frac{371}{613} \\ -\frac{125}{613} & -\frac{1125}{613} & -\frac{125}{613} \\ -\frac{343}{613} & -\frac{343}{613} & -\frac{6860}{613} \end{bmatrix}. \tag{78}$$

Dado el polinomio $f(x) = \lambda^3 + \frac{10582}{613}\lambda^2 + \frac{56476084}{375769}\lambda + \frac{95439750}{375769}$, denotamos por $H(f)$ a la matriz de Hurwitz de f , la cual se define como:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{10582}{613} & \frac{95439750}{375769} & 0 \\ 1 & \frac{56476084}{375769} & 0 \\ 0 & \frac{10582}{613} & \frac{95439750}{375769} \end{pmatrix},$$

y teniendo que $\Delta_1 > 0$; $\Delta_2 \approx 2340,5 > 0$, $\Delta_3 \approx 594452 > 0$, los eigenvalores del sistema son reales y como $\gamma_2\gamma_1 \approx 2594,4834 > 253,9851 \approx \gamma_0\gamma_3$, se cumple con la condiciones del sistema y E_8 es un punto estable local ■.

$$E_8 = (0,3026, 0,102, 0,2798). \quad (79)$$

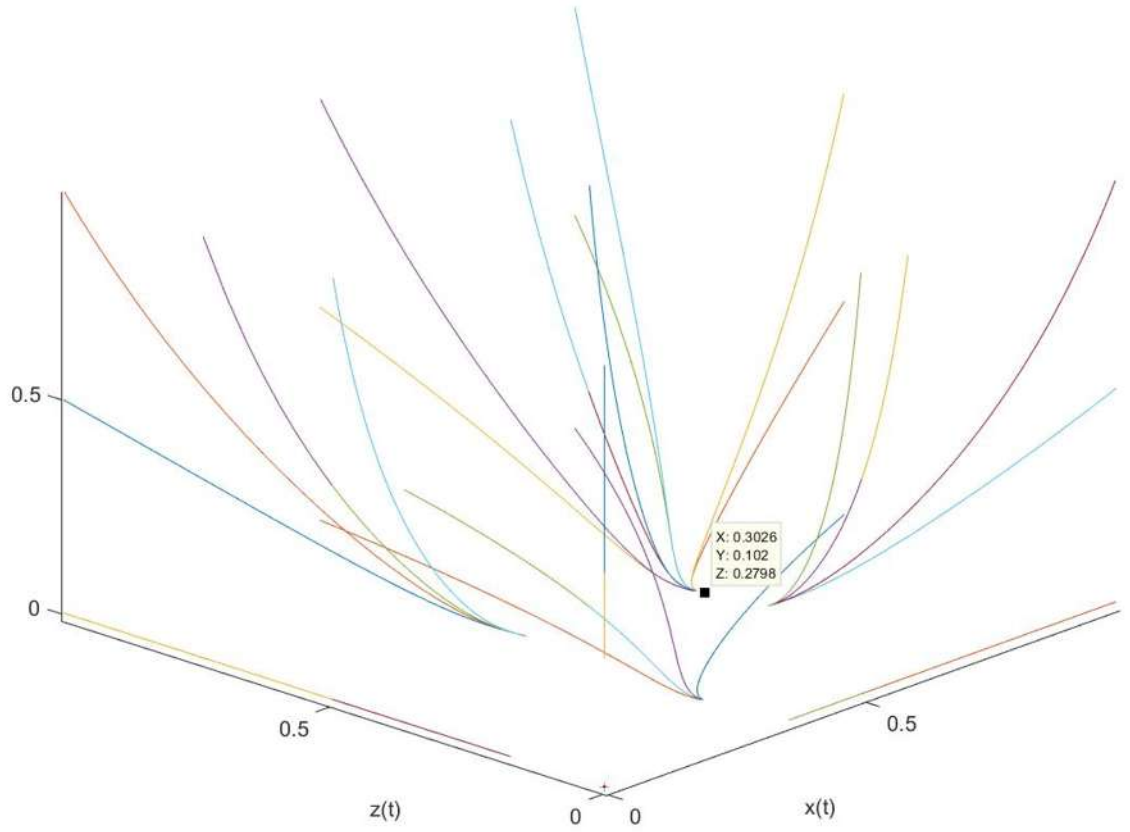


Figura 5: Modelo 3x3 ejemplo 4.4 donde el punto de estabilidad (cuadro negro) está en $int(\mathbb{R}_+^3)$, los otros puntos de estabilidad están en $planos(int(\mathbb{R}^2))$.

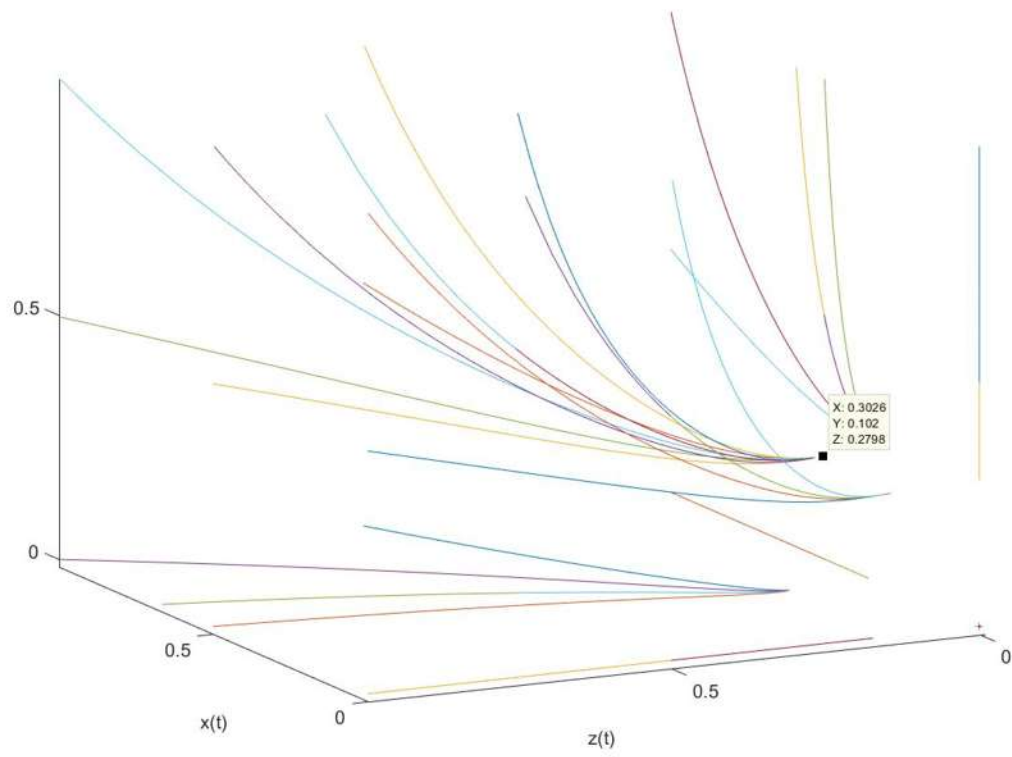


Figura 6: Modelo 3x3 ejemplo 4.4

Debido a las simulaciones realizadas se puede ver que existe estabilidad global la cual analizaremos en el siguiente capítulo.

5. Estabilidad Global

En este capítulo se abordará la estabilidad global de sistemas de oligopolios y tomaremos ventaja de la estructura de oligopolios que tiene las mismas características que el sistema de Lotka Volterra. Se analizará la posible estabilidad global del equilibrio de Nash, para ello se requiere encontrar una matriz diagonal C y condiciones para que $CA + A^T C$ sea negativa definida, lo cual se hará con criterio 3 del teorema (2.7).

5.1. Estabilidad global del sistema de 2 firmas

Como un primer resultado.

Proposición 5.1. *Sea $a_1, a_2, b_1, b_2, b > 0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$2a_1b_2 > ba_2, \quad 2a_2b_1 > ba_1, \quad b_i > b, \quad (80)$$

entonces el punto de equilibrio de Nash $E_4 \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$:

$$E_4 = \left(\frac{2a_1b_2 - ba_2}{4b_1b_2 - b^2}, \frac{2a_2b_1 - ba_1}{4b_1b_2 - b^2} \right), \quad (81)$$

es un punto de globalmente estable del sistema (37).

Demostración 5.1.

Por el teorema de Bermejo (2.6) se requiere encontrar una matriz diagonal C y encontrar las condiciones de tal manera que $CA + A^T C$ sea negativa definida, donde la matriz asociada A viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -2b_1 & -b \\ -b & -2b_2 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar el resultado hay que encontrar una matriz diagonal $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ con $c_i > 0$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

de tal manera que $CA + A^T C$ sea negativa definida. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} CA + A^T C &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2b_1 & -b \\ -b & -2b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b_1 & -b \\ -b & -2b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4c_1b_1 & -(c_1 + c_2)b \\ -(c_1 + c_2)b & -4c_2b_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

y tomando $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, tenemos que

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -2b_1 & -b \\ -b & -2b_2 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar que $CA + A^T C$ es definida negativa, de la tercer equivalencia de (2.7) requerimos que los determinantes de los menores de esquina impares y pares sean negativos

y positivos respectivamente, a demás de que los menores principales impares y pares sean negativos y positivos respectivamente, con lo cual hacemos los cálculos correspondientes:

Menores de esquina:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -2b_1 < 0, \\ \Delta_2 &= 4b_1b_2 + b^2 > 0,\end{aligned}$$

y los menores principales:

$$\delta_1 = -2b_1 < 0, \quad (82)$$

$$\delta_2 = -2b_2 < 0, \quad (83)$$

$$\delta_{1,2} = 4b_1b_2 - b^2 > 0, \quad (84)$$

siendo Δ_1 el menor de esquina impar, δ_1, δ_2 los menores principales impares, Δ_2 el menor de esquina par y $\delta_{1,2}$ el menor principal par. Entonces la matriz $CA + A^TC$ es negativa definida y por lo tanto $E_4 \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ es un punto de Nash globalmente estable ■.

A continuación se analiza la estabilidad global en varios ejemplos:

Ejemplo 5.1. Para probar la estabilidad global de un sistema de oligopolios de 2 firmas idénticas con una velocidad de ajuste $\alpha = 1$ con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1, & a_1 &= 4, \\ b_1 &= 5, & b &= 2, \\ b_2 &= 4, & a_2 &= 4.\end{aligned} \quad (85)$$

Primeramente se calculan los puntos fijos del sistema:

$$E_1 = (0, 0), \quad (86)$$

$$E_2 = \left(\frac{4}{10}, 0\right), \quad (87)$$

$$E_3 = \left(0, \frac{4}{8}\right), \quad (88)$$

$$E_4 = \left(\frac{24}{80}, \frac{32}{80}\right), \quad (89)$$

siendo (89) el punto de equilibrio de Nash. Sea A nuestra matriz asociada :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Partimos a hacer el calculo de $CA + A^TC$

$$CA + A^TC = \begin{pmatrix} -20c_1 & -2(c_1 + c_2) \\ -2(c_1 + c_2) & -16c_2 \end{pmatrix}$$

Tomando $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Ahora se calculan los menores de esquina:

$$\Delta_1 = -10 < 0,$$

$$\Delta_2 = 84 > 0,$$

y los menores principales

$$\delta_1 = -10 < 0, \tag{90}$$

$$\delta_2 = -8 < 0, \tag{91}$$

$$\delta_{1,2} = 76 > 0. \tag{92}$$

Puesto que se cumple el criterio c) de (2.7) el punto de Nash (89) es un punto de estabilidad global ■.

Ejemplo 5.2. Ahora veamos el caso del sistema de oligopolio 2×2 con velocidades de ajuste $\alpha = 1$ con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & a_1 &= 2, \\ b_1 &= 2, & b &= 7, \\ b_2 &= 4, & a_2 &= 2, \end{aligned} \tag{93}$$

y verifiquemos si existe estabilidad global en el punto de estabilidad.

Primeramente se calculan los puntos fijos del sistema:

$$E_1 = (0, 0), \tag{94}$$

$$E_2 = \left(\frac{2}{4}, 0 \right), \tag{95}$$

$$E_3 = \left(0, \frac{2}{8} \right), \tag{96}$$

$$E_4 = \left(-\frac{2}{17}, \frac{6}{17} \right). \tag{97}$$

Ahora se puede ver que (97) no es un punto de estabilidad de Nash ya que $E_4 \notin \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ pero dejando eso por un lado, si continuamos con el criterio c) de 2.7. Sea entonces la matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Se calcula $CA + A^T C$

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -8c_1 & -7(c_1 + c_2) \\ -7(c_1 + c_2) & -16c_2 \end{pmatrix}$$

y tomando $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$,

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ahora nos disponemos a calcular los Menores de esquina

$$\Delta_1 = -4 < 0,$$

$$\Delta_2 = 81 > 0,$$

y los menores principales

$$\delta_1 = -4 < 0, \tag{98}$$

$$\delta_2 = -8 < 0, \tag{99}$$

$$\delta_{1,2} = -17 < 0. \tag{100}$$

Puesto que no se cumplen todas las condiciones del el criterio c) de (2.7) el punto E_4 (89) no es un punto de estabilidad global ■.

5.2. Estabilidad global del sistema de 3 firmas

El siguiente resultado generaliza el resultado obtenido en [13] por A. Krawiec donde se reducen a probar solamente la estabilidad del sistema de oligopolio. En este apartado constará en probar la estabilidad global del punto de Nash de nuestro sistema de oligopolio.

Proposición 5.2. *Sea $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b > 0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$b_i > b, \quad (101)$$

entonces el punto de equilibrio de Nash en $E_8 \in \text{int}(\mathbb{R}_+^3)$ es

$$E_8 = \begin{pmatrix} \frac{4a_1b_2b_3 + (-a_1 + a_2 + a_3)b^2 - 2(a_2b_3 + a_3b_2)b}{8b_1b_2b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2}, \\ \frac{4a_2b_1b_3 + (a_1 - a_2 + a_3)b^2 - 2(a_1b_3 + a_3b_1)b}{8b_1b_2b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2}, \\ \frac{4a_3b_1b_2 + (a_1 + a_2 - a_3)b^2 - 2(a_1b_2 + a_2b_1)b}{8b_1b_2b_3 + 2b^3 - 2(b_1 + b_2 + b_3)b^2} \end{pmatrix}, \quad (102)$$

donde es un punto de estabilidad global del sistema con la siguiente condición:

$$\begin{aligned} q_1^* &> 0 \text{ i.e. } 4a_1b_2b_3 + (-a_1 + a_2 + a_3)b^2 - 2(a_2b_3 + a_3b_2)b > 0, \\ q_2^* &> 0 \text{ i.e. } 4a_2b_1b_3 + (a_1 - a_2 + a_3)b^2 - 2(a_1b_3 + a_3b_1)b > 0, \\ q_3^* &> 0 \text{ i.e. } 4a_3b_1b_2 + (a_1 + a_2 - a_3)b^2 - 2(a_1b_2 + a_2b_1)b > 0. \end{aligned}$$

Demostración 5.2. Por el teorema de Bermejo (2.6) requerimos encontrar una matriz diagonal C y encontrar las condiciones de tal manera que $CA + A^T C$ sea negativa definida, donde la matriz asociada A viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b \\ -b & -b & -2b_3 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar el resultado hay que encontrar una matriz diagonal $C = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$ con $c_i > 0$;

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

de tal manera que $CA + A^T C$ sea negativa definida. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} CA + A^T C &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b \\ -b & -b & -2b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b \\ -b & -b & -2b_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4c_1b_1 & -(c_1 + c_2)b & -(c_1 + c_3)b \\ -(c_1 + c_2)b & -4c_2b_2 & -(c_2 + c_3)b \\ -(c_1 + c_3)b & -(c_2 + c_3)b & -4c_3b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tomando $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b \\ -b & -b & -2b_3 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) requerimos que los determinantes de los menores de esquina impares y pares, sean negativos y positivos respectivamente, además de que los menores principales impares y pares, sean negativos y positivos respectivamente, con lo cual hacemos los cálculos correspondientes:

Menores de esquina:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -2b_1 < 0, \\ \Delta_2 &= 4b_1b_2 - b^2 > 0, \\ \Delta_3 &= -8b_1b_2b_3 + 2b^2(b_1 + b_2 + b_3) - 2b^3 < 0, \end{aligned}$$

y los menores principales

$$\delta_1 = -2b_1 < 0, \tag{103}$$

$$\delta_2 = -2b_2 < 0, \tag{104}$$

$$\delta_3 = -2b_3 < 0, \tag{105}$$

$$\delta_{1,2,3} = -8b_1b_2b_3 + 2b^2(b_1 + b_2 + b_3) - 2b^3 < 0, \tag{106}$$

$$\delta_{1,3} = 4b_1b_3 - b^2 > 0, \tag{107}$$

$$\delta_{1,2} = 4b_1b_2 - b^2 > 0, \tag{108}$$

$$\delta_{2,3} = 4b_2b_3 - b^2 > 0, \tag{109}$$

$$\tag{110}$$

siendo Δ_1, Δ_3 los menores de esquina impares, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_{1,2,3}$ los menores principales impares, Δ_2 el menor de esquina par y $\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{2,3}$ los menores principales pares. Entonces la matriz $CA + A^T C$ es negativa definida y por lo tanto $E_8 \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ es un punto de Nash globalmente estable ■.

A continuación se probará la estabilidad global en varios ejemplos:

Ejemplo 5.3. Probemos la estabilidad global del sistema 60 tomando una velocidad de ajuste $\alpha = 1$ respetando las desigualdades establecidas y tomando los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1, & b &= 2, \\ b_1 &= 3, & a_1 &=, \\ b_2 &= 4, & a_2 &= 2, \\ a_3 &= 4, & b_3 &= 6.\end{aligned}\tag{111}$$

Como primer se requiere calcular los puntos fijos del sistema

$$E_1 = (0, 0, 0), \tag{112}$$

$$E_2 = \left(\frac{2}{6}, 0, 0\right), \tag{113}$$

$$E_3 = \left(0, \frac{2}{8}, 0\right), \tag{114}$$

$$E_4 = \left(0, 0, \frac{4}{12}\right), \tag{115}$$

$$E_5 = \left(\frac{12}{44}, \frac{8}{44}, 0\right), \tag{116}$$

$$E_6 = \left(0, \frac{16}{92}, \frac{28}{92}\right), \tag{117}$$

$$E_7 = \left(\frac{16}{68}, 0, \frac{20}{68}\right), \tag{118}$$

$$E_8 = \left(\frac{12}{61}, \frac{8}{61}, \frac{17}{61}\right), \tag{119}$$

siendo (119) el punto de equilibrio de Nash. Sea la matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Procedemos a calcular $CA + A^TC$

$$CA + A^TC = \begin{pmatrix} -12c_1 & -2(c_1 + c_2) & -2(c_1 + c_3) \\ -2(c_1 + c_2) & -16c_2 & -2(c_2 + c_3) \\ -2(c_1 + c_3) & -2(c_2 + c_3) & -24c_3 \end{pmatrix},$$

y tomando $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$CA + A^TC = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) requerimos calcular los menores principales y los menores esquina para poder verificar la estabilidad global.
Menores de esquina:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -6 < 0, \\ \Delta_2 &= 44 > 0, \\ \Delta_3 &= -488 < 0.\end{aligned}$$

menores principales:

$$\delta_1 = -6 < 0, \tag{120}$$

$$\delta_2 = -8 < 0, \tag{121}$$

$$\delta_3 = -12 < 0, \tag{122}$$

$$\delta_{1,2,3} = -488 < 0, \tag{123}$$

$$\delta_{1,3} = 68 > 0, \tag{124}$$

$$\delta_{1,2} = 44 > 0, \tag{125}$$

$$\delta_{2,3} = 92 > 0. \tag{126}$$

$$\tag{127}$$

Ya que se cumplen todas las desigualdades de (2.7), llegamos a la conclusión de que E_8 es un punto de estabilidad de Nash globalmente estable ■.

Ejemplo 5.4. Veamos ahora otro ejemplo de estabilidad global de la misma manera tomando una velocidad de ajuste $\alpha = 1$, respetando las desigualdades establecidas y teniendo los siguientes valores

$$\begin{aligned}\alpha &= 1, & b &= 2, \\ b_1 &= 7, & a_1 &= 5, \\ b_2 &= 9, & a_2 &= 3, \\ a_3 &= 12, & b_3 &= 20.\end{aligned} \tag{128}$$

Primeramente calculemos los puntos fijos del sistema

$$E_1 = (0, 0, 0), \tag{129}$$

$$E_2 = \left(\frac{5}{14}, 0, 0 \right), \tag{130}$$

$$E_3 = \left(0, \frac{3}{18}, 0 \right), \tag{131}$$

$$E_4 = \left(0, 0, \frac{12}{40} \right), \tag{132}$$

$$E_5 = \left(\frac{84}{248}, \frac{32}{248}, 0 \right), \tag{133}$$

$$E_6 = \left(0, \frac{96}{716}, \frac{210}{716}\right), \quad (134)$$

$$E_7 = \left(\frac{176}{556}, 0, \frac{158}{556}\right), \quad (135)$$

$$E_8 = \left(\frac{371}{1226}, \frac{1251}{1226}, \frac{343}{1226}\right). \quad (136)$$

Siendo E_8 nuestro punto de estabilidad de Nash estando en $int(\mathbb{R}_+^3)$, partamos a hacer el análisis de estabilidad global de E_8 . Calculemos $CA + A^T C$ siendo la matriz asociada al sistema 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -14 & -2 & -2 \\ -2 & -18 & -2 \\ -2 & -2 & -40 \end{pmatrix}.$$

De tal manera que

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -28c_1 & -2(c_1 + c_2) & -2(c_1 + c_3) \\ -2(c_1 + c_2) & -18c_2 & -2(c_2 + c_3) \\ -2(c_1 + c_3) & -2(c_2 + c_3) & -80c_3 \end{pmatrix},$$

y tomando $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -14 & -2 & -2 \\ -2 & -18 & -2 \\ -2 & -2 & -40 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) requerimos que los determinantes de los menores de esquina impares y pares sean negativos y positivos respectivamente, a demás de que los menores principales impares y pares sean negativos y positivos respectivamente, con lo cual hacemos los cálculos correspondientes:

Menores de esquina:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -14 < 0, \\ \Delta_2 &= 248 > 0, \\ \Delta_3 &= -9808 < 0, \end{aligned}$$

y los menores principales:

$$\delta_1 = -14 < 0, \quad (137)$$

$$\delta_2 = -18 < 0, \quad (138)$$

$$\delta_3 = -40 < 0, \quad (139)$$

$$\delta_{1,2,3} = -9808 < 0, \quad (140)$$

$$\delta_{1,3} = 556 > 0, \quad (141)$$

$$\delta_{1,2} = 248 > 0, \quad (142)$$

$$\delta_{2,3} = 716 > 0. \quad (143)$$

$$(144)$$

Puesto que todas las desigualdades son cumplidas $CA + A^T C$ es definida negativa y el punto de estabilidad de Nash E_8 es un punto de estabilidad global ■.

Ejemplo 5.5. En este tercer ejemplo pongamos a prueba el punto de estabilidad E_8 y analicemos si la estabilidad es global en este punto.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & b &= 200, \\ b_1 &= 30, & a_1 &= 27, \\ b_2 &= 15, & a_2 &= 300, \\ a_3 &= 150, & b_3 &= 10. \end{aligned} \quad (145)$$

Como primer paso calculemos sus puntos fijos

$$E_1 = (0, 0, 0), \quad (146)$$

$$E_2 = \left(\frac{27}{60}, 0, 0 \right), \quad (147)$$

$$E_3 = \left(0, \frac{300}{30}, 0 \right), \quad (148)$$

$$E_4 = \left(0, 0, \frac{150}{20} \right), \quad (149)$$

$$E_5 = \left(\frac{210}{1400}, \frac{1260}{1400}, 0 \right), \quad (150)$$

$$E_6 = \left(0, \frac{3600}{200}, \frac{-55500}{200} \right), \quad (151)$$

$$E_7 = \left(\frac{-2460}{800}, 0, \frac{3600}{800} \right), \quad (152)$$

$$E_8 = \left(-\frac{777}{8894}, \frac{85107}{8894}, \frac{29136}{8894} \right). \quad (153)$$

Podemos observar como el punto de estabilidad E_8 no es un punto de estabilidad de Nash pero calculemos $CA + A^TC$ para verificar si este es un punto de estabilidad global. Sea nuestra matriz asociada al sistema

$$A = \begin{pmatrix} -60 & -200 & -200 \\ -200 & -30 & -200 \\ -200 & -200 & -20 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$CA + A^TC = \begin{pmatrix} -60 & -200 & -200 \\ -200 & -30 & -200 \\ -200 & -200 & -20 \end{pmatrix},$$

con lo cual obtenemos los cálculos siguientes:

Menores de esquina

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -60 < 0, \\ \Delta_2 &= -38200 \not> 0, \\ \Delta_3 &= -11636000 < 0,\end{aligned}$$

y los menores principales

$$\delta_1 = -60 < 0, \tag{154}$$

$$\delta_2 = -30 < 0, \tag{155}$$

$$\delta_3 = -20 < 0, \tag{156}$$

$$\delta_{1,2,3} = -11636000 < 0, \tag{157}$$

$$\delta_{1,3} = -38800 \not> 0, \tag{158}$$

$$\delta_{1,2} = -38200 \not> 0, \tag{159}$$

$$\delta_{2,3} = -39400 \not> 0. \tag{160}$$

$$\tag{161}$$

Entonces E_8 no es un punto de estabilidad global, tampoco es de estabilidad de Nash y como no está en $int(\mathbb{R}_+^3)$ este punto no tiene un sentido real económico ■.

5.3. Estabilidad global del sistema de 4 firmas

En este apartado analizaremos ahora el mercado de oligopolio de 4 firmas. Teniendo como sistema de ecuaciones para el modelo de 4×4 :

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a - bQ(t) - bq_1(t) - d_1 - 2e_1 q_1(t)), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a - bQ(t) - bq_2(t) - d_2 - 2e_2 q_2(t)), \\ \dot{q}_3(t) &= (\alpha_3 q_3(t))(a - bQ(t) - bq_3(t) - d_3 - 2e_3 q_3(t)), \\ \dot{q}_4(t) &= (\alpha_4 q_4(t))(a - bQ(t) - bq_4(t) - d_4 - 2e_4 q_4(t)),\end{aligned}\tag{162}$$

y haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}a_1 &= a - d_1, & a_2 &= a - d_2, & a_3 &= a - d_3, & a_4 &= a - d_4, \\ b_1 &= b + e_1, & b_2 &= b + e_2, & b_3 &= b - e_3, & b_4 &= b - e_4,\end{aligned}\tag{163}$$

llegamos al siguiente sistema que podemos renombrar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a_1 - 2b_1 q_1(t) - bq_2(t) - bq_3(t) - bq_4(t)) = h^1(q_1, q_2, q_3, q_4), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a_2 - bq_1(t) - 2b_2 q_2(t) - bq_3(t) - bq_4(t)) = h^2(q_1, q_2, q_3, q_4), \\ \dot{q}_3(t) &= (\alpha_3 q_3(t))(a_3 - bq_1(t) - bq_2(t) - 2b_3 q_3(t) - bq_4(t)) = h^3(q_1, q_2, q_3, q_4), \\ \dot{q}_4(t) &= (\alpha_4 q_4(t))(a_4 - bq_1(t) - bq_2(t) - bq_3(t) - 2b_4 q_4(t)) = h^4(q_1, q_2, q_3, q_4).\end{aligned}\tag{164}$$

Para el cual al resolver el sistema $h^i(q^*) = 0$ con $i = 1, 2, 3, 4$, para $q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*$ y $\alpha = 1$ obtenemos los siguientes puntos fijos:

$$E_1 = (0, 0, 0, 0),\tag{165}$$

$$E_2 = \left(\frac{a_1}{2b_1}, 0, 0, 0\right),\tag{166}$$

$$E_3 = \left(0, \frac{a_2}{2b_2}, 0, 0\right),\tag{167}$$

$$E_4 = \left(0, 0, \frac{a_3}{2b_3}, 0\right),\tag{168}$$

$$E_5 = \left(0, 0, 0, \frac{a_4}{2b_4}\right),\tag{169}$$

$$E_6 = \left(\frac{2a_1 b_4 - b a_4}{4b_1 b_4 - b^2}, 0, 0, \frac{2a_4 b_1 - b a_1}{4b_1 b_4 - b^2}\right),\tag{170}$$

$$E_7 = \left(\frac{2a_1 b_3 - b a_3}{4b_1 b_3 - b^2}, 0, \frac{2a_3 b_1 - b a_1}{4b_1 b_3 - b^2}, 0\right),\tag{171}$$

$$E_8 = \left(0, 0, \frac{2a_3 b_4 - b a_4}{4b_3 b_4 - b^2}, \frac{2a_4 b_3 - b a_3}{4b_3 b_4 - b^2}\right),\tag{172}$$

$$E_9 = \left(0, \frac{2a_2b_4 - ba_4}{4b_2b_4 - b^2}, 0, \frac{2a_4b_2 - ba_2}{4b_2b_4 - b^2} \right), \quad (173)$$

$$E_{10} = \left(0, \frac{2a_2b_3 - ba_3}{4b_2b_3 - b^2}, \frac{2a_3b_2 - ba_2}{4b_2b_3 - b^2}, 0 \right), \quad (174)$$

$$E_{11} = \left(\frac{2a_1b_2 - ba_2}{4b_1b_2 - b^2}, \frac{2a_2b_1 - ba_1}{4b_1b_2 - b^2}, 0, 0 \right), \quad (175)$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0, \\ \frac{4a_2b_3b_4 + (-a_2 + a_3 + a_4)b^2 - 2(a_4b_3 + a_3b_4)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ \frac{4a_3b_2b_4 + (a_2 - a_3 + a_4)b^2 - 2(a_4b_2 + a_2b_4)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ \frac{4a_4b_2b_3 + (a_2 + a_3 - a_4)b^2 - 2(a_3b_2 + a_2b_3)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2} \end{pmatrix}, \quad (176)$$

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0, \\ \frac{4a_1b_3b_4 + (-a_1 + a_3 + a_4)b^2 - 2(a_4b_3 + a_3b_4)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ \frac{4a_4b_1b_3 + (a_1 + a_3 - a_4)b^2 - 2(a_3b_1 + a_1b_3)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ \frac{4a_3b_1b_4 + (a_1 - a_3 + a_4)b^2 - 2(a_4b_1 + a_1b_4)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2} \end{pmatrix}, \quad (177)$$

$$E_{14} = \begin{pmatrix} \frac{4a_1b_2b_4 + (-a_1 + a_2 + a_4)b^2 - 2(a_4b_2 + a_2b_4)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ \frac{4a_2b_1b_4 + (a_1 - a_2 + a_4)b^2 - 2(a_4b_1 + a_1b_4)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ 0, \\ \frac{4a_4b_1b_2 + (a_1 + a_2 - a_4)b^2 - 2(a_2b_1 + a_1b_2)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2} \end{pmatrix}, \quad (178)$$

$$E_{15} = \begin{pmatrix} \frac{4a_1b_2b_3 + (-a_1 + a_2 + a_3)b^2 - 2(a_3b_2 + a_2b_3)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ \frac{4a_2b_1b_3 + (a_1 - a_2 + a_3)b^2 - 2(a_3b_1 + a_1b_3)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ \frac{4a_3b_1b_2 + (a_1 + a_2 - a_3)b^2 - 2(a_2b_1 + a_1b_2)b}{8b_2b_3b_4 + 2b^3 - 2(b_2 + b_3 + b_4)b^2}, \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (179)$$

$$E_{16} = \begin{pmatrix} \frac{-8b^3(1-b_1)(b_3-1)(1-b_4) + 8b^2(b_2-1)(-bb_1b_4 + bb_1 + bb_3 + bb_4 - 2b - 2b_1b_3b_4 + 2b_1b_4)}{3b^4 - 4b^3b_1 - 4b^3b_2 + 4b^2b_1b_2 - 4b^3b_3 + 4b^2b_2b_3 - 4b^3b_4 + 4b^2b_1b_4 + 4b^2b_3b_4 - 16b_1b_2b_3b_4}, \\ \frac{(a_1 - 2a_2 + a_3 + a_4)b^3 + 2b^2b_1(a_2 - a_3 - a_4) + 2b^2b_3(-a_1 + a_2 - a_4) + 2b^2b_4(-a_1 + a_2 - a_3) + 4b(a_4b_1b_3 + a_3b_1b_4 + a_1b_3b_4) - 8a_2b_1b_3b_4}{3b^4 - 4b^3b_1 - 4b^3b_2 + 4b^2b_1b_2 - 4b^3b_3 + 4b^2b_2b_3 - 4b^3b_4 + 4b^2b_1b_4 + 4b^2b_3b_4 - 16b_1b_2b_3b_4}, \\ \frac{(a_1 + a_2 - 2a_3 + a_4)b^3 + 2b^2b_1(-a_2 + a_3 - a_4) + 2b^2b_2(-a_1 + a_3 - a_4) + 2b^2b_4(-a_1 - a_2 + a_3) + 4b(a_4b_1b_2 + a_2b_1b_4 + a_1b_2b_4) - 8a_3b_1b_2b_4}{3b^4 - 4b^3b_1 - 4b^3b_2 + 4b^2b_1b_2 - 4b^3b_3 + 4b^2b_2b_3 - 4b^3b_4 + 4b^2b_1b_4 + 4b^2b_3b_4 - 16b_1b_2b_3b_4}, \\ \frac{(a_1 + a_2 + a_3 - 2a_4)b^3 + 2b^2b_1(-a_2 - a_3 + a_4) + 2b^2b_2(-a_1 - a_3 + a_4) + 2b^2b_3(-a_1 - a_2 + a_4) + 4b(a_3b_1b_2 + a_2b_1b_3 + a_1b_2b_3) - 8a_4b_1b_2b_3}{3b^4 - 4b^3b_1 - 4b^3b_2 + 4b^2b_1b_2 - 4b^3b_3 + 4b^2b_2b_3 - 4b^3b_4 + 4b^2b_1b_4 + 4b^2b_3b_4 - 16b_1b_2b_3b_4} \end{pmatrix}. \quad (180)$$

Proposición 5.3. Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b > 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_i > b. \quad (181)$$

entonces el punto de equilibrio de Nash $E_{16} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^4)$, donde E_{16} es un punto de estabilidad global del sistema con la siguiente condición:

$$q_1^* > 0, \quad q_2^* > 0, \quad q_3^* > 0, \quad q_4^* > 0.$$

Demostración 5.3. Por el teorema de Bermejo (2.6) requerimos encontrar una matriz diagonal C y encontrar las condiciones de tal manera que $CA + A^T C$ sea negativa definida, donde la matriz asociada A viene dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 b_1 q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* \\ -\alpha_2 b q_2^* & -2\alpha_2 b_2 q_2^* & -\alpha_2 b q_2^* & -\alpha_2 b q_2^* \\ -\alpha_3 b q_3^* & -\alpha_3 b q_3^* & -2\alpha_3 b_3 q_3^* & -\alpha_3 b q_3^* \\ -\alpha_4 b q_4^* & -\alpha_4 b q_4^* & -\alpha_4 b q_4^* & -2\alpha_4 b_4 q_4^* \end{bmatrix}, \quad (182)$$

entonces, tomando $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_4 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b & -b \\ -b & -b & -2b_3 & -b \\ -b & -b & -b & -2b_4 \end{pmatrix}.$$

Hay que encontrar

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix},$$

de tal manera que $CA + A^T C$ sea negativa definida. Con lo cual tenemos que :

$$\begin{aligned} CA + A^T C &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b & -b \\ -b & -b & -2b_3 & -b \\ -b & -b & -b & -2b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b & -b \\ -b & -b & -2b_3 & -b \\ -b & -b & -b & -2b_4 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4c_1 b_1 & -(c_1 + c_2)b & -(c_1 + c_3)b & -(c_1 + c_4)b \\ -(c_1 + c_2)b & -4c_2 b_2 & -(c_2 + c_3)b & -(c_2 + c_4)b \\ -(c_1 + c_3)b & -(c_2 + c_3)b & -4c_3 b_3 & -(c_3 + c_4)b \\ -(c_1 + c_4)b & -(c_2 + c_4)b & -(c_3 + c_4)b & -4c_4 b_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y usando $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b & -b \\ -b & -b & -2b_3 & -b \\ -b & -b & -b & -2b_4 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) requerimos que los determinantes de los menores de esquina impares y pares sean negativos y positivos respectivamente, a demás de que los menores principales impares y pares sean negativos y positivos respectivamente, con lo cual hacemos los cálculos correspondientes:

Menores de esquina:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -2b_1 < 0, \\ \Delta_2 &= 4b_1b_2 - b^2 > 0, \\ \Delta_3 &= -8b_1b_2b_3 + 2b^2(b_1 + b_2 + b_3) - 2b^3 < 0, \\ \Delta_4 &= -3b^4 + 4b^3(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) - 4b^2(b_4(b_1 + b_2 + b_3) + b_1(b_2 + b_3) + b_2b_3) + 16b_1b_2b_3b_4,\end{aligned}$$

y los menores principales

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -2b_1 < 0, \\ \delta_2 &= -2b_2 < 0, \\ \delta_3 &= -2b_3 < 0, \\ \delta_4 &= -2b_4 < 0, \\ \delta_{1,2,3} &= -8b_1b_2b_3 + 2b^2(b_1 + b_2 + b_3) - 2b^3 < 0, \\ \delta_{2,3,4} &= -8b_2b_3b_4 + 2b^2(b_2 + b_3 + b_4) - 2b^3 < 0, \\ \delta_{1,3,4} &= -8b_1b_3b_4 + 2b^2(b_1 + b_3 + b_4) - 2b^3 < 0, \\ \delta_{1,2,4} &= -8b_1b_2b_4 + 2b^2(b_1 + b_2 + b_4) - 2b^3 < 0, \\ \delta_{1,3} &= 4b_1b_3 - b^2 > 0, \\ \delta_{1,2} &= 4b_1b_2 - b^2 > 0, \\ \delta_{2,3} &= 4b_2b_3 - b^2 > 0, \\ \delta_{2,4} &= 4b_2b_4 - b^2 > 0, \\ \delta_{1,4} &= 4b_1b_4 - b^2 > 0, \\ \delta_{3,4} &= 4b_3b_4 - b^2 > 0, \\ \delta_{1,2,3,4} &= \det(A) = \Delta_4,\end{aligned}$$

siendo Δ_1, Δ_3 los menores de esquina impares, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_{1,2,3}, \delta_{1,3,4}, \delta_{2,3,4}, \delta_{1,2,4}$ los menores principales impares, Δ_2, Δ_4 los menores de esquina pares y $\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{1,4}, \delta_{2,3}, \delta_{2,4}, \delta_{3,4}$ los menores principales pares. Entonces la matriz $CA + A^TC$ es negativa definida y por lo tanto $E_{16} \in \text{int}(\mathbb{R}^4)$ es un punto de Nash globalmente estable ■.

Ejemplo 5.6. Como primer ejemplo veremos el caso con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1, & b &= 5, \\ b_1 &= 15, & a_1 &= 10, \\ b_2 &= 20, & a_2 &= 7, \\ b_3 &= 45, & a_3 &= 20, \\ b_4 &= 50, & a_4 &= 15.\end{aligned}\tag{183}$$

Empezamos calculando el punto E_{16} ,

$$E_{16} = \left(\frac{54}{205}, \frac{21}{205}, \frac{8}{41}, \frac{5}{41} \right)\tag{184}$$

entonces obtenemos:

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -30 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -40 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -80 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -100 \end{pmatrix},$$

de la tercer equivalencia de (2.7) se requiere calcular los menores principales y los menores esquina para poder verificar la estabilidad global.

Menores de esquina:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -30 < 0, \\ \Delta_2 &= 1175 > 0, \\ \Delta_3 &= -105050 < 0, \\ \Delta_4 &= 10275625 > 0,\end{aligned}$$

y los menores principales

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -30 < 0, \\ \delta_2 &= -40 < 0, \\ \delta_3 &= -90 < 0, \\ \delta_3 &= -100 < 0, \\ \delta_{1,2,3} &= -105050 < 0, \\ \delta_{2,3,4} &= -355650 < 0, \\ \delta_{1,3,4} &= -265850 < 0, \\ \delta_{1,2,4} &= -116850 < 0, \\ \delta_{1,3} &= 2675 > 0, \\ \delta_{1,2} &= 1175 > 0, \\ \delta_{2,3} &= 3575 > 0, \\ \delta_{2,4} &= 3975 > 0, \\ \delta_{1,4} &= 2975 > 0, \\ \delta_{3,4} &= 8975 > 0, \\ \delta_{1,2,3,4} &= \det(A) = 10275625 > 0.\end{aligned}$$

Entonces E_{16} es un punto de Nash globalmente estable en $\text{int}(\mathbb{R}_+^4)$ ■.

Ejemplo 5.7. Veamos otro ejemplo con los siguientes valores que respetan las condiciones del modelo propuesto. Como primer ejemplo veremos el caso con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1, & b &= 8, \\ b_1 &= 35, & a_1 &= 60, \\ b_2 &= 40, & a_2 &= 27, \\ b_3 &= 225, & a_3 &= 200, \\ b_4 &= 50, & a_4 &= 155.\end{aligned}\tag{185}$$

Empezamos calculando el punto E_{16}

$$E_{16} = \left(\frac{2418729}{3815408}, \frac{1336263}{15261632}, \frac{1547779}{3815408}, \frac{11139673}{7630816} \right)\tag{186}$$

con lo cual

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -70 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -80 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -450 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -100 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) se calculan los menores principales y los menores esquina para poder verificar la estabilidad global.

Menores de esquina:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -70 < 0, \\ \Delta_2 &= 5536 > 0, \\ \Delta_3 &= -2497024 < 0, \\ \Delta_4 &= 244186112 > 0,\end{aligned}$$

y los menores principales

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -70 < 0, \\ \delta_2 &= -80 < 0, \\ \delta_3 &= -450 < 0, \\ \delta_3 &= -100 < 0, \\ \delta_{1,2,3} &= -2497024 < 0, \\ \delta_{2,3,4} &= -3575824 < 0, \\ \delta_{1,3,4} &= -3126224 < 0, \\ \delta_{1,2,4} &= -551024 < 0, \\ \delta_{1,3} &= 31436 > 0, \\ \delta_{1,2} &= 5536 > 0, \\ \delta_{2,3} &= 35936 > 0, \\ \delta_{2,4} &= 7936 > 0, \\ \delta_{1,4} &= 6936 > 0, \\ \delta_{3,4} &= 44936 > 0, \\ \delta_{1,2,3,4} &= \det(A) = 244186112 > 0.\end{aligned}$$

Entonces E_{16} es un punto de Nash globalmente estable en $\text{int}(\mathbb{R}_+^4)$ ■.

Ejemplo 5.8. Ahora se estudiará un caso que incumpla con las especificaciones de los valores del modelo. Como tercer ejemplo veremos el siguiente caso, siendo los siguientes valores :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & b &= 80, \\ b_1 &= 225, & a_1 &= 10, \\ b_2 &= 90, & a_2 &= 87, \\ b_3 &= 25, & a_3 &= 200, \\ b_4 &= 10, & a_4 &= 335. \end{aligned} \tag{187}$$

Se empieza calculando el punto E_{16}

$$E_{16} = \left(\frac{2221}{1835}, \frac{27219}{7340}, \frac{47312}{5505}, \frac{45079}{22020} \right) \tag{188}$$

siendo así:

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -500 & -80 & -80 & -80 \\ -80 & -180 & -80 & -80 \\ -80 & -80 & -50 & -80 \\ -80 & -80 & -80 & -20 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) se calculan los menores principales y los menores esquina para poder verificar la estabilidad global.

Menores de esquina

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -450 < 0, \\ \Delta_2 &= 74600 > 0, \\ \Delta_3 &= -5012800 < 0, \\ \Delta_4 &= -132120000 \not> 0, \end{aligned}$$

y los menores principales

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= -450 < 0, \\
\delta_2 &= -180 < 0, \\
\delta_3 &= -50 < 0, \\
\delta_3 &= -20 < 0, \\
\delta_{1,2,3} &= -5012800 < 0, \\
\delta_{2,3,4} &= -1181500 < 0, \\
\delta_{1,3,4} &= -1427200 < 0, \\
\delta_{1,2,4} &= -2585500 < 0, \\
\delta_{1,3} &= 16100 > 0, \\
\delta_{1,2} &= 74600 > 0, \\
\delta_{2,3} &= 2600 > 0, \\
\delta_{2,4} &= -2800 \not> 0, \\
\delta_{1,4} &= 2600 > 0, \\
\delta_{3,4} &= -5400 \not> 0, \\
\delta_{1,2,3,4} &= \det(A) = 244186112 > 0.
\end{aligned}$$

Como el menor esquina Δ_4 y los menores principales $\delta_{2,4}, \delta_{1,4}$ no cumplen con la tercer equivalencia de nuestro criterio entonces E_{16} es un punto de equilibrio que no es de Nash globalmente estable en $\text{int}(\mathbb{R}_+^4)$ ■.

5.4. Estabilidad global del sistema de 5 firmas

En este apartado analizaremos ahora el mercado de oligopolio de 5 firmas. Teniendo como sistema de ecuaciones para el modelo de 5×5 :

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a - bQ(t) - bq_1(t) - d_1 - 2e_1 q_1(t)), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a - bQ(t) - bq_2(t) - d_2 - 2e_2 q_2(t)), \\ \dot{q}_3(t) &= (\alpha_3 q_3(t))(a - bQ(t) - bq_3(t) - d_3 - 2e_3 q_3(t)), \\ \dot{q}_4(t) &= (\alpha_4 q_4(t))(a - bQ(t) - bq_4(t) - d_4 - 2e_4 q_4(t)), \\ \dot{q}_5(t) &= (\alpha_5 q_5(t))(a - bQ(t) - bq_5(t) - d_5 - 2e_5 q_5(t)),\end{aligned}\tag{189}$$

y haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}a_1 &= a - d_1, & a_2 &= a - d_2, & a_3 &= a - d_3, & a_4 &= a - d_4, & a_5 &= a - d_5, \\ b_1 &= b + e_1, & b_2 &= b + e_2, & b_3 &= b - e_3, & b_4 &= b - e_4, & b_5 &= b - e_5,\end{aligned}\tag{190}$$

llegamos al siguiente sistema que podemos renombrar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= (\alpha_1 q_1(t))(a_1 - 2b_1 q_1(t) - bq_2(t) - bq_3(t) - bq_4(t) - bq_5(t)) = h^1(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5), \\ \dot{q}_2(t) &= (\alpha_2 q_2(t))(a_2 - bq_1(t) - 2b_2 q_2(t) - bq_3(t) - bq_4(t) - bq_5(t)) = h^2(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5), \\ \dot{q}_3(t) &= (\alpha_3 q_3(t))(a_3 - bq_1(t) - bq_2(t) - 2b_3 q_3(t) - bq_4(t) - bq_5(t)) = h^3(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5), \\ \dot{q}_4(t) &= (\alpha_4 q_4(t))(a_4 - bq_1(t) - bq_2(t) - bq_3(t) - 2b_4 q_4(t) - bq_5(t)) = h^4(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5), \\ \dot{q}_5(t) &= (\alpha_5 q_5(t))(a_5 - bq_1(t) - bq_2(t) - bq_3(t) - bq_4(t) - 2b_5 q_5(t)) = h^5(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5).\end{aligned}\tag{191}$$

Para el cual, al resolver el sistema $h^i(q^*) = 0$, con $i = 1, 2, 3, 4$, para $q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*$ y $\alpha = 1$, obtenemos los siguientes puntos fijos:

$$E_1 = (0, 0, 0, 0, 0),\tag{192}$$

$$E_2 = \left(\frac{a_1}{2b_1}, 0, 0, 0, 0\right),\tag{193}$$

$$E_3 = \left(0, \frac{a_2}{2b_2}, 0, 0, 0\right),\tag{194}$$

$$E_4 = \left(0, 0, \frac{a_3}{2b_3}, 0, 0\right),\tag{195}$$

$$E_5 = \left(0, 0, 0, \frac{a_4}{2b_4}, 0\right),\tag{196}$$

$$E_6 = \left(0, 0, 0, 0, \frac{a_5}{2b_5}\right),\tag{197}$$

$$E_6 = \left(\frac{a_5 b + 2a_1 b_5}{4b_1 b_5 - b^2}, 0, 0, 0, \frac{a_1 b + 2a_5 b_1}{4b_1 b_5 - b^2}\right),\tag{198}$$

$$E_7 = \left(0, 0, 0, \frac{a_5 b + 2a_4 b_5}{4b_4 b_5 - b^2}, \frac{a_4 b + 2a_5 b_4}{4b_4 b_5 - b^2}\right),\tag{199}$$

$$E_8 = \left(0, 0, \frac{a_5b + 2a_3b_5}{4b_3b_5 - b^2}, 0, \frac{a_3b + 2a_5b_3}{4b_3b_5 - b^2} \right), \quad (200)$$

$$E_9 = \left(0, \frac{a_5b + 2a_2b_5}{4b_2b_5 - b^2}, 0, 0, \frac{a_2b + 2a_5b_2}{4b_2b_5 - b^2} \right), \quad (201)$$

$$E_{10} = \left(0, \frac{a_4b + 2a_2b_4}{4b_2b_4 - b^2}, 0, \frac{a_2b + 2a_4b_2}{4b_2b_4 - b^2}, 0 \right), \quad (202)$$

$$E_{11} = \left(0, \frac{a_3b + 2a_2b_3}{4b_2b_3 - b^2}, \frac{a_2b + 2a_3b_2}{4b_2b_3 - b^2}, 0, 0 \right), \quad (203)$$

$$E_{12} = \left(\frac{a_5b + 2a_1b_5}{4b_1b_5 - b^2}, 0, 0, 0, \frac{a_1b + 2a_5b_1}{4b_1b_5 - b^2} \right), \quad (204)$$

$$E_{13} = \left(\frac{a_4b + 2a_1b_4}{4b_1b_4 - b^2}, 0, 0, \frac{a_1b + 2a_4b_1}{4b_1b_4 - b^2}, 0 \right), \quad (205)$$

$$E_{14} = \left(\frac{a_3b + 2a_1b_3}{4b_1b_3 - b^2}, 0, \frac{a_1b + 2a_3b_1}{4b_1b_3 - b^2}, 0 \right), \quad (206)$$

$$E_{15} = \left(\frac{a_2b + 2a_1b_2}{4b_1b_2 - b^2}, \frac{a_1b + 2a_2b_1}{4b_1b_2 - b^2}, 0, 0, 0 \right), \quad (207)$$

⋮

$$E_{32} = (\dots). \quad (208)$$

Por comodidad, y debido a la extensión del punto E_{32} , no será escrito, pero se pide que sus coordenadas sean positivas.

Proposición 5.4. *Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b > 0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$b_i > b. \quad (209)$$

entonces el punto de equilibrio de Nash $E_{32} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^5)$, donde E_{32} es un punto de estabilidad global del sistema que cumple con la siguiente condición:

$$q_1^* > 0, \quad q_2^* > 0, \quad q_3^* > 0, \quad q_4^* > 0, \quad q_5^* > 0.$$

Demostración 5.4. Por el teorema de Bermejo (2.6) se busca encontrar una matriz diagonal C y las condiciones de tal manera que $CA + A^T C$ sea negativa definida, donde la matriz asociada A viene dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 b_1 q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* & -\alpha_1 b q_1^* \\ -\alpha_2 b q_2^* & -2\alpha_2 b_2 q_2^* & -\alpha_2 b q_2^* & -\alpha_2 b q_2^* & -\alpha_2 b q_2^* \\ -\alpha_3 b q_3^* & -\alpha_3 b q_3^* & -2\alpha_3 b_3 q_3^* & -\alpha_3 b q_3^* & -\alpha_3 b q_3^* \\ -\alpha_4 b q_4^* & -\alpha_4 b q_4^* & -\alpha_4 b q_4^* & -2\alpha_4 b_4 q_4^* & -\alpha_4 b q_4^* \\ -\alpha_5 b q_5^* & -\alpha_5 b q_5^* & -\alpha_5 b q_5^* & -\alpha_5 b q_5^* & -2\alpha_5 b_5 q_5^* \end{bmatrix}, \quad (210)$$

así, tomando $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1$, se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b & -b & -b \\ -b & -b & -2b_3 & -b & -b \\ -b & -b & -b & -2b_4 & -b \\ -b & -b & -b & -b & -2b_5 \end{pmatrix}.$$

Ahora es necesario encontrar

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix}$$

de tal manera que $CA + A^T C$ sea negativa definida. Se tiene que

$$\begin{aligned} CA + A^T C &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b & -b & -b \\ -b & -b & -2b_3 & -b & -b \\ -b & -b & -b & -2b_4 & -b \\ -b & -b & -b & -b & -2b_5 \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b & -b & -b \\ -b & -b & -2b_3 & -b & -b \\ -b & -b & -b & -2b_4 & -b \\ -b & -b & -b & -b & -2b_5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4c_1b_1 & -(c_1 + c_2)b & -(c_1 + c_3) & -(c_1 + c_4) & -(c_1 + c_5) \\ -(c_1 + c_2)b & -4c_2b_2 & -(c_2 + c_3) & -(c_2 + c_4) & -(c_2 + c_5) \\ -(c_1 + c_3)b & -(c_2 + c_3)b & -4c_3b_3 & -(c_3 + c_4) & -(c_3 + c_5) \\ -(c_1 + c_4)b & -(c_2 + c_4)b & -(c_3 + c_4) & -4b_4c_4 & -(c_4 + c_5) \\ -(c_1 + c_5)b & -(c_2 + c_5)b & -(c_3 + c_5) & -(c_4 + c_5) & -4b_5c_5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y haciendo $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -2b_1 & -b & -b & -b & -b \\ -b & -2b_2 & -b & -b & -b \\ -b & -b & -2b_3 & -b & -b \\ -b & -b & -b & -2b_4 & -b \\ -b & -b & -b & -b & -2b_5 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) se necesita que los determinantes de los menores de esquina impares y pares sean negativos y positivos respectivamente, a demás de que los menores principales impares y pares sean negativos y positivos respectivamente, con lo

cual hacemos los cálculos correspondientes.

Menores de esquina:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -2b_1 < 0, \\
\Delta_2 &= 4b_1b_2 - b^2 > 0, \\
\Delta_3 &= -8b_1b_2b_3 + 2b^2(b_1 + b_2 + b_3) - 2b^3 < 0, \\
\Delta_4 &= -3b^4 + 4b^3(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) - 4b^2(b_4(b_1 + b_2 + b_3) + b_1(b_2 + b_3) + b_2b_3) + 16b_1b_2b_3b_4 < 0, \\
\Delta_5 &= -4b^5 + 6b^4b_1 + 6b^4b_2 - 8b^3b_1b_2 + 6b^4b_3 \\
&\quad - 8b^3b_1b_3 - 8b^3b_2b_3 + 8b^2b_1b_2b_3 + 6b^4b_4 - 8b^3b_1b_4 - 8b^3b_2b_4 + 8b^2b_1b_2b_4 \\
&\quad - 8b^3b_3b_4 + 8b^2b_1b_3b_4 + 8b^2 + b_2b_3b_4 + 6b^4b_5 - 8b^3b_1b_5 - 8b^3b_2b_5 + 8b^2b_2b_5 + 8b^2b_1b_2 \\
&\quad + b_5 - 8b^3b_3b_5 + 8b^2b_1b_3b_5 + 8b^2b_2b_3b_5 - 8b^3 \\
&\quad + b_4b_5 + 8b^2b_1b_4b_5 + 8b^2b_3b_4b_5 - 32b_1b_2b_3b_4b_5,
\end{aligned}$$

y los menores principales

$$\delta_1 = -2b_1 < 0,$$

$$\delta_2 = -2b_2 < 0,$$

$$\delta_3 = -2b_3 < 0,$$

$$\delta_4 = -2b_4 < 0,$$

$$\delta_5 = -2b_5 < 0,$$

$$\delta_{1,2,3} = -8 * b_1 * b_2 * b_3 + 2 * b^2 * (b_1 + b_2 + b_3) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{1,2,4} = -8 * b_1 * b_2 * b_4 + 2 * b^2 * (b_1 + b_2 + b_4) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{1,2,5} = -8 * b_1 * b_2 * b_5 + 2 * b^2 * (b_1 + b_2 + b_5) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{1,3,4} = -8 * b_1 * b_3 * b_4 + 2 * b^2 * (b_1 + b_3 + b_4) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{1,3,5} = -8 * b_1 * b_3 * b_5 + 2 * b^2 * (b_1 + b_3 + b_5) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{1,4,5} = -8 * b_1 * b_4 * b_5 + 2 * b^2 * (b_1 + b_4 + b_5) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{2,3,4} = -8 * b_2 * b_3 * b_4 + 2 * b^2 * (b_2 + b_3 + b_4) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{2,4,5} = -8 * b_2 * b_4 * b_5 + 2 * b^2 * (b_2 + b_4 + b_5) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{3,4,5} = -8 * b_3 * b_4 * b_5 + 2 * b^2 * (b_3 + b_4 + b_5) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{2,3,5} = -8 * b_2 * b_3 * b_5 + 2 * b^2 * (b_2 + b_3 + b_5) - 2b^3 < 0,$$

$$\delta_{1,2} = 4 * b_1 * b_2 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{1,3} = 4 * b_1 * b_3 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{1,4} = 4 * b_1 * b_4 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{1,5} = 4 * b_1 * b_5 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{2,3} = 4 * b_2 * b_3 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{2,4} = 4 * b_2 * b_4 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{2,5} = 4 * b_2 * b_5 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{3,4} = 4 * b_3 * b_4 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{3,5} = 4 * b_3 * b_5 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{4,5} = 4 * b_4 * b_5 - b^2 > 0,$$

$$\delta_{1234} = -3 * b^4 + 4 * b^3(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$$

$$-4 * b^2 * (b_4 * (b_1 + b_2 + b_3) + b_1 * (b_2 * b_3) + b_2 * b_3) + 16 * b_1 * b_2 * b_3 * b_4 > 0,$$

$$\delta_{1,3,4,5} = -3 * b^4 + 4 * b^3(b_1 + b_3 + b_4 + b_5)$$

$$-4 * b^2 * (b_5 * (b_1 + b_3 + b_4) + b_1 * (b_3 * b_4) + b_3 * b_4) + 16 * b_1 * b_3 * b_4 * b_5 > 0,$$

$$\delta_{2,3,4,5} = -3 * b^4 + 4 * b^3(b_2 + b_3 + b_4 + b_5)$$

$$-4 * b^2 * (b_5 * (b_2 + b_3 + b_4) + b_2 * (b_3 * b_4) + b_3 * b_4) + 16 * b_2 * b_3 * b_4 * b_5 > 0,$$

$$\delta_{1,3,4,5} = -3 * b^4 + 4 * b^3(b_1 + b_3 + b_4 + b_5)$$

$$-4 * b^2 * (b_5 * (b_1 + b_3 + b_4) + b_1 * (b_3 * b_4) + b_3 * b_4) + 16 * b_1 * b_3 * b_4 * b_5 > 0,$$

$$\delta_{1,2,3,5} = -3 * b^4 + 4 * b^3(b_1 + b_2 + b_3 + b_5)$$

$$-4 * b^2 * (b_5 * (b_1 + b_2 + b_3) + b_1 * (b_2 * b_3) + b_2 * b_3) + 16 * b_1 * b_2 * b_3 * b_5 > 0.$$

Menores principales pares	menores esquina pares
$\delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{1,4}, \delta_{1,5}$ $\delta_{2,3}, \delta_{2,4}, \delta_{2,5}, \delta_{3,4}$ $\delta_{3,5}, \delta_{4,5}, \delta_{1234}$ $\delta_{1,3,4,5}, \delta_{2,3,4,5}$ $\delta_{1,3,4,5}, \delta_{1,2,3,5}$	Δ_2, Δ_4

Menores principales impares	menores esquina impares
$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ $\delta_4, \delta_5, \delta_{1,2,3}$ $\delta_{1,2,4}, \delta_{1,2,5}, \delta_{1,3,4}$ $\delta_{1,3,5}, \delta_{1,4,5}, \delta_{2,3,4}$ $\delta_{2,4,5}, \delta_{3,4,5}$ $\delta_{2,3,5}, \delta_{1,2,3,4,5}$	Δ_1, Δ_3 Δ_5

Entonces la matriz $CA + A^T C$ es negativa definida y por lo tanto $E_{32} \in \text{int}(\mathbb{R}^5)$ es un punto de Nash globalmente estable ■.

Ejemplo 5.9. Como primer ejemplo se tiene el caso con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 1, & b &= 5, \\
 b_1 &= 15, & a_1 &= 10, \\
 b_2 &= 20, & a_2 &= 20, \\
 b_3 &= 45, & a_3 &= 7, \\
 b_4 &= 50, & a_4 &= 15, \\
 b_5 &= 55, & a_5 &= 20,
 \end{aligned} \tag{211}$$

Se empieza calculando el punto E_{32}

$$E_{32} = \left(\frac{27}{127} \frac{161}{345}, \frac{11}{25} \frac{157}{469}, \frac{3}{127} \frac{494}{345}, \frac{2}{25469} \frac{770}{}, \frac{3}{25} \frac{719}{469} \right), \tag{212}$$

entonces

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -30 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -40 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -90 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -100 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -110 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) requerimos calcular los menores principales y los menores esquina para poder verificar la estabilidad global.

Menores principales pares	menores esquina pares
$\delta_{1,2} = 1175, \delta_{1,3} = 2675, \delta_{1,4} = 2975, \delta_{1,5} = 3275$ $\delta_{2,3} = 3575, \delta_{2,4} = 3975, \delta_{2,5} = 4375, \delta_{3,4} = 8975$ $\delta_{3,5} = 9875, \delta_{4,5} = 10975, \delta_{1234} = 9023125$ $\delta_{1,3,4,5} = 25575625, \delta_{2,3,4,5} = 34325625$ $\delta_{1,3,4,5} = 25575625, \delta_{1,2,3,5} = 10065625$	$\Delta_2 = 1175, \Delta_4 = 9\ 023\ 125$

Menores principales impares	menores esquina impares
$\delta_1 = -30, \delta_2 = -40, \delta_3 = -90$ $\delta_4 = -100, \delta_5 = -110, \delta_{1,2,3} = -104250$ $\delta_{1,2,4} = -116000, \delta_{1,2,5} = -127750, \delta_{1,3,4} = -264750$ $\delta_{1,3,5} = -291500, \delta_{1,4,5} = -324250, \delta_{2,3,4} = -354500$ $\delta_{2,4,5} = -434000, \delta_{3,4,5} = -982750$ $\delta_{2,3,5} = -390500, \delta_{1,2,3,4,5} = -1134003550$	$\Delta_1 = -30, \Delta_3 = -105050$ $\Delta_5 = -1134003550$

Por lo cual, E_{32} es un punto de Nash globalmente estable en $int(\mathbb{R}_+^5)$ ■.

Ejemplo 5.10. Tomando otro ejemplo con los siguientes valores que respetan las condiciones del modelo propuesto. Como segundo ejemplo veremos el caso con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1, & b &= 8, \\
b_1 &= 45, & a_1 &= 60, \\
b_2 &= 60, & a_2 &= 72, \\
b_3 &= 220, & a_3 &= 230, \\
b_4 &= 240, & a_4 &= 425, \\
b_5 &= 245, & a_5 &= 450.
\end{aligned} \tag{213}$$

Empezamos calculando el punto E_{32}

$$E_{32} = \left(\frac{16966030}{36191227}, \frac{139698575}{289529816}, \frac{247474785}{289529816}, \frac{32169695}{36191227} \right), \tag{214}$$

entonces

$$CA + A^T C = \begin{pmatrix} -70 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -80 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -450 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -100 \end{pmatrix}.$$

De la tercer equivalencia de (2.7) requerimos calcular los menores principales y los menores esquina para poder verificar la estabilidad global.

Menores principales pares	menores esquina pares
$\delta_{1,2} = 10736, \delta_{1,3} = 39536, \delta_{1,4} = 43136, \delta_{1,5} = 44036$ $\delta_{2,3} = 52736, \delta_{2,4} = 57536, \delta_{2,5} = 58736, \delta_{3,4} = 211136$ $\delta_{3,5} = 215536, \delta_{4,5} = 235136, \delta_{1234} = 2106693632$ $\delta_{1,3,4,5} = 8661997312, \delta_{2,3,4,5} = 11562975232$ $\delta_{1,3,4,5} = 8661997312, \delta_{1,2,3,5} = 2153807872$	$\Delta_2 = 10736, \Delta_4 = 2106693632$

Menores principales impares	menores esquina impares
$\delta_1 = -90, \delta_2 = -120, \delta_3 = -440$ $\delta_4 = -480, \delta_5 = -490, \delta_{1,2,3} = -4711424$ $\delta_{1,2,4} = -5140864, \delta_{1,2,5} = -5248224, \delta_{1,3,4} = -18944384$ $\delta_{1,3,5} = -19339744, \delta_{1,4,5} = -21101184, \delta_{2,3,4} = -25278464$ $\delta_{2,4,5} = -28155264, \delta_{3,4,5} = -103398784$ $\delta_{2,3,5} = -25806464, \delta_{1,2,3,4,5} = -1105565331200$	$\Delta_1 = -90, \Delta_3 = -4714024$ $\Delta_5 = -1105565331200$

Entonces E_{32} es un punto de Nash globalmente estable en $int(\mathbb{R}_+^5)$ ■.

6. Conclusiones

Un aspecto importante en la evolución de un mercado viene dada por la interacción de un número finito de empresas en un producto o servicio, los llamados oligopolios. Así es de especial interés entender la dinámica de estos actores, un fenómeno de máxima relevancia es el estudio de puntos de equilibrio de Nash en estos modelos matemáticos para actores en conflicto y cooperación. Esta investigación tuvo como objetivo general demostrar que el modelo de oligopolio de Cournot cuenta con un punto de estabilidad de Nash el cual es un atractor global para $\mathbb{R}^n$ con $n = \{2, \dots, 5\}$.

En este trabajo de tesis se establecen condiciones para que un modelo matemático de oligopolio de Cournot exista, se analiza vía criterio de Routh-Hurwitz y teorema de Hartman-Grobman la estabilidad local de estos puntos de equilibrio en el caso de ciertas firmas, donde se llega a que el punto de estabilidad de Nash el cual es un atractor en una vecindad de ese espacio, es un punto de estabilidad local.

Posteriormente mediante modelos que provienen de biomatemáticas, en la interacción de poblaciones se estudia la estabilidad global, se aplican criterios que caracterizan la dinámica global en términos de propiedades algebraicas de ciertas matrices asociadas. Se extienden casos particulares en la literatura, por ejemplo: [13] donde se estudia la estabilidad local en el caso de 3 firmas, en este trabajo se presentan resultados hasta para 2-5 firmas, también se presentan ejemplos numéricos para ilustrar nuestros resultados teóricos y se demuestra que las matrices cuadráticas asociadas al sistema de la forma $CA + A^T C$, cumplen con el criterio de 2.7 y por lo tanto son matrices definidas negativas, lo cual implica que el punto de Nash de ese sistema es catalogado como "punto de estabilidad global".

7. Literatura Citada

- [1] Strogatz, S. H. (2019). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2nd ed.). CRC Press.
- [2] Ruiz Silva, A. (2011). *Análisis y control de un brazo mecánico* [Tesis de licenciatura, Universidad de Sonora]. UNISON.
- [3] Braslavsky, J.H. (2020). *Estabilidad Según Lyapunov. Sistemas Estacionarios*. Recuperado de <https://www-eng.newcastle.edu.au/jhb519/teaching/snolin/material/cap03.pdf>
- [4] Gallego, L. (2020). *Oligopolio — Policonomics. Polinomics*. Recuperado de <https://policonomics.com/es/oligopolio/>
- [5] Puu, T. (2014). *Oligopoly: Old Ends - New Means* (2011th ed.). Springer.
- [6] Meléndez, V. L. (2017). *Modelos de oligopolio* (2nd ed., Vol. 1). Recuperado de <https://web.ua.es/es/giecryal/documentos/modelos-oligopolio-peru.pdf>
- [7] Asencio Organician.J (2017). *Modelo depredador-presa de Volterra-Lotka* [Tesis de licenciatura, Universidad de la Laguna]. RIULL.
- [8] Hernández-Bermejo, B. (2019). *Stability Conditions and Liapunov Functions for Quasi-Polynomial Systems*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1910.00372>
- [9] Garcia Rivas, I., & Román Roy, N. (2008). *Ecuaciones diferenciales* (E-book ed., Vol. 1). Departamento de de Matemática Aplicada Barcelona.
- [10] Cánovas Peña, J. S. (2012). *Apuntes de Transformadas y Ecuaciones* (1.a ed., Vol. 1). Recuperado de <http://www.dmae.upct.es/jose/ampmat/ecuaytran.pdf>
- [11] Cantó .B, Coll .C, Sánchez . E. (2009) . *Sobre la estabilidad globalmente asintótica de sistemas singulares no lineales*. Congreso de Matematica Aplicada. (pp. 1–8)
- [12] Cournot, A. (2012). *Researches Into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth, the With an Essay (Classic Reprint)*. Forgotten Books.
- [13] Krawiec, A., Stachowiak, T., y Szydlowski, M. (2017). *The phase space structure of the oligopoly dynamical system by means of Darboux integrability..* arXiv. <https://arxiv.org/abs/1708.02193v1>
- [14] Pindyck, R. S. (2021). *Microeconomia* (7.a ed.). Prentice Hall/Pearson.
- [15] Paredes, R., y Tarzijan, J. (2002). *Organizacion Industrial Para La Estrategia Empresarial* (Spanish Edition). Prentice Hall.

- [16] Harris, R., y Wiens, E. (1980). *Government Enterprise: An Instrument for the Internal Regulation of Industry.*, The Canadian Journal of Economics, Vol. 13.1980, 1, p. 125-32. [http://links.jstor.org/sici?sici=0008-4085%281980 ... EAIFT%3E2.0.CO%3B2-C](http://links.jstor.org/sici?sici=0008-4085%281980...EAIFT%3E2.0.CO%3B2-C)