



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS  
TESIS DE MAESTRÍA

---

**Sistemas Dinámicos en Cosmología.  
Interacción en el Sector Oscuro bajo un  
acoplamiento tipo Yukawa.**

---

*Autor:*

Jorge Luis FUENTES VENEGAS

*Asesor:*

Dr. Ulises NUCAMENDI GÓMEZ

*Tesis presentada en cumplimiento de los requisitos para la obtención  
del grado de Maestro en Ciencias en el Área de Física*

*en el*

Instituto de Física y Matemáticas

Morelia, Mich. Marzo 2016





# Declaración de Autoría

Yo, Jorge Luis FUENTES VENEGAS, declaro que ésta tesis titulada, 'Sistemas Dinámicos en Cosmología. Interacción en el Sector Oscuro bajo un acoplamiento tipo Yukawa.' y el trabajo presentado en ella son míos. Confirmo que:

- Este trabajo fue realizado en su totalidad o principalmente, para la candidatura a un grado de Maestría en esta Universidad.
- Si cualquier parte de esta tesis ha sido previamente utilizada para un título o cualquier otra instancia en esta Universidad, o cualquier otra institución, se ha manifestado claramente.
- Donde he consultado la obra publicada de otros autores, esto se les atribuye claramente.
- Donde he citado del trabajo de otros autores, la fuente siempre está dada. Con la excepción de estas citas, esta tesis es enteramente mi propio trabajo.
- He reconocido todas las principales fuentes de ayuda.
- Cuando la tesis se basa en el trabajo realizado por mí mismo en forma conjunta con otros autores, se ha dejado claro exactamente lo que fue hecho por los demás y con lo que he contribuido yo mismo.

Firma:

---

Fecha:

---



*“Dios no sólo juega a los dados: a veces los tira donde no se pueden ver.”*

Stephen William Hawking

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

## *Resumen*

Instituto de Física y Matemáticas

Maestro en Ciencias en el Área de Física

**Sistemas Dinámicos en Cosmología. Interacción en el Sector Oscuro bajo un acoplamiento tipo Yukawa.**

por Jorge Luis FUENTES VENEGAS

En este trabajo estudiamos los efectos de la interacción dentro del sector oscuro, es decir, entre la materia y la energía oscura bajo un acoplamiento del tipo Yukawa como lo hacen A. A. Costa, L. C. Olivari y E. Abdalla en su artículo de 2015 [1]. El estudio se hace desde el punto de vista de los Sistemas Dinámicos para saber si la dinámica del sistema interactuante difiere o no del sistema sin interacción presentado en el artículo de quintaesencia de E. Copeland, A. Liddle y D. Wands publicado en 1998 [2], obteniendo que aún con éste tipo de interacción, la dinámica del sistema parece preferir la misma que sin la interacción, de donde se concluye que, de la misma manera que en el artículo de A. A. Costa, al tomar una interacción del tipo Yukawa no se afecta la dinámica del sistema, es decir, se obtienen los mismos resultados tomando en cuenta o no la interacción. Así, podría ser que en nuestro Universo exista esta interacción, puesto que no hay nada que difiera de las observaciones y la dinámica es la misma que sin ella.

*Palabras clave:* Quintaesencia interactuante, Cosmología, Campo Escalar, Energía Oscura, Materia Oscura, Sector Oscuro, Acoplamiento de Yukawa



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

## *Abstract*

Instituto de Física y Matemáticas

Master's Degree in the Field of Physics

**Dynamical Systems in Cosmology.  
Interacting Dark Sector through a Yukawa coupling.**

by Jorge Luis FUENTES VENEGAS

In the present work we study the effects of an interaction in the dark sector, *i.e.* between dark matter and dark energy through a Yukawa coupling as it is done in the 2015 paper written by A. A. Costa, L. C. Olivari and E. Abdalla [1]. To do so we use Dynamical Systems theory to compare the dynamics of the interacting system with the non interacting system shown in the 1998 paper about Quintessence by E. Copeland, A. Liddle and D. Wands [2], obtaining that with such interaction the dynamics of the system seem to prefer the same dynamics as the non interacting one, so we find the same results as A. A. Costa, taking into account a Yukawa coupling does not affect the dynamics of the system, we obtain the same results with or without the interaction. So as there is no relevant difference between the observational probes and the dynamics with or without interaction, it might be possible to think that such interaction exists.

*Keywords:* Interacting Quintessence, Cosmology, Scalar Field, Dark Energy, Dark Matter, Dark Sector, Yukawa Coupling



# *Agradecimientos*

Al terminar un trabajo tan complicado como lo es el desarrollo de una tesis, es inevitable caer en el egocentrismo que lleva a concentrar la mayor parte del mérito al aporte que ha hecho uno mismo. Sin embargo, analizando objetivamente, de manera inmediata se tiene que la magnitud de este aporte no hubiese sido posible sin la participación de personas que han facilitado las cosas para que el trabajo llegue a un buen término. Por lo mismo, es un placer utilizar este espacio para ser justo con estas personas, sin las cuales este trabajo no hubiera existido, expresándoles mis agradecimientos.

Primero que nada, debo agradecer de manera especial y sincera al Dr. Ulises NUCA-MENDI GÓMEZ por haber confiado en mi persona, por la paciencia y por la dirección de este trabajo. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades presupuestas durante el desarrollo de esta tesis.

Quiero expresar también mi más sincero agradecimiento a CONACyT por su importante aporte a través del apoyo No. 380806 sin el cual este proyecto no hubiera sido posible.

Gracias también a mis sinodales el Dr. Francisco ASTORGA y el Dr. Juan Carlos ARTEAGA por tomarse el tiempo y la dedicación para leer este trabajo y corregirlo en donde fue necesario así como sus apreciables y muy necesarias anotaciones y correcciones para hacer de éste un trabajo de calidad.

Un gran agradecimiento también a mis compañeros, que siempre me apoyaron y ayudaron en todo lo que estuvo a su alcance para poder sacar adelante esta tesis, gracias a Gabriela, a Roberto y a Efraín por ayudarme con sus ideas cuando yo creía que los problemas ya no tenían solución.

A mi madre, que siempre me ha apoyado y me ha acompañado en todas las etapas de mi vida profesional de manera incondicional. A mi padre, que siempre encuentra la manera de apoyarme aunque no se encuentre en la misma ciudad, estando siempre atento de mi crecimiento y mi proceso. A Kenia, que desde hace mucho tiempo y hasta el día de hoy sigue dándome ánimos para terminar éste proceso y continuar con todos los proyectos que tenemos a futuro.

Muchas gracias a todos.

# Contenidos

<b>Declaración de Autoría</b>	<b>ii</b>
<b>Resumen</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vi</b>
<b>Contenidos</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>xi</b>
<b>Introducción</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Cosmología Estándar</b>	<b>1</b>
1.1 Cosmología FLRW . . . . .	1
1.2 Materia Oscura . . . . .	3
1.3 La Constante Cosmológica $\Lambda$ y la Energía Oscura . . . . .	5
1.4 Inflación . . . . .	7
1.5 Modificando el Modelo Cosmológico Estándar . . . . .	8
<b>2 Modelo <math>\Lambda</math>CDM</b>	<b>9</b>
2.1 Ecuaciones Generales . . . . .	9
2.2 Ecuaciones Dinámicas . . . . .	10
2.3 Análisis de Estabilidad . . . . .	11
2.3.1 Universo de RADIACIÓN . . . . .	12
2.3.2 Universo EINSTEIN-DE SITTER . . . . .	12
2.3.3 Universo de DE SITTER . . . . .	13
2.3.4 Universo de MILNE . . . . .	13
<b>3 Cosmología de Campo Escalar</b>	<b>15</b>
3.1 Ecuaciones Generales . . . . .	16
3.2 Energía Oscura Escalar . . . . .	17
3.3 Ecuaciones Dinámicas . . . . .	17

3.4	Quintaesencia con $\lambda$ constante. . . . .	19
3.4.1	Análisis de Estabilidad . . . . .	19
3.5	Quintaesencia con $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ . . . . .	23
3.5.1	Análisis de Estabilidad . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Energía y Materia Oscura Interactuantes</b>	<b>29</b>
4.1	Ecuaciones de movimiento Cosmológicas para Energía Oscura interac- tuante con Materia Oscura . . . . .	31
4.2	Modelo de Interacción . . . . .	34
4.2.1	Interacción tipo Yukawa . . . . .	34
4.2.2	Ecuaciones Básicas . . . . .	35
4.2.3	Ecuaciones de Evolución . . . . .	35
4.2.4	Análisis de Estabilidad . . . . .	37
4.3	Resultados . . . . .	38
4.3.1	Consideraciones Analíticas . . . . .	39
4.3.2	Soluciones Numéricas . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Teoremas Matemáticos</b>	<b>47</b>
A.1	El Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	47
A.2	Estabilidad y Funciones de Lyapunov . . . . .	50
<b>B</b>	<b>Soluciones Numéricas en <i>Mathematica</i></b>	<b>55</b>
B.1	LCDM . . . . .	55
B.2	Quintaesencia . . . . .	57
B.2.1	Sin acoplamiento. . . . .	57
B.2.2	Con acoplamiento. . . . .	58
<b>C</b>	<b>Códigos de PYTHON</b>	<b>61</b>
C.1	LCDM . . . . .	61
C.2	Quintaesencia . . . . .	63
C.2.1	Sin acoplamiento . . . . .	63
C.2.2	Con acoplamiento . . . . .	65
	<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Lista de Figuras

2.1	Gráfica del Modelo $\Lambda$ CDM	14
2.2	Gráfica del Modelo $\Lambda$ CDM (rotada)	14
3.1	Gráfica de Quintaesencia $\lambda = 1$	22
3.2	Gráfica de Quintaesencia $\lambda = 2$	22
3.3	Gráfica de Quintaesencia $\lambda = 3$	23
3.4	Gráfica de Quintaesencia $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ con $p = 2$ .	25
3.5	Gráfica de Quintaesencia $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ con $p = 50$ .	25
3.6	Gráfica de Quintaesencia $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ con $p = 50$ (proyección).	26
3.7	Gráfica de Quintaesencia $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ con $p \rightarrow \infty$ (proyección).	26
4.1	Gráfica de Quintaesencia con Interacción de Yukawa con $\lambda = 1$ y $w = 0$ .	40
4.2	Gráfica de Quintaesencia con Interacción de Yukawa con $\lambda = 1$ y $w = 0$ .	41
4.3	Gráfica de Quintaesencia con Interacción de Yukawa con $\lambda = 2$ y $w = 0$ .	41
4.4	Gráfica de Quintaesencia con Interacción de Yukawa con $\lambda = 2$ y $w = 0$ .	42
4.5	Gráfica de Quintaesencia con Interacción de Yukawa con $\lambda = 3$ y $w = 0$ .	42
4.6	Gráfica de Quintaesencia con Interacción de Yukawa con $\lambda = 3$ y $w = 0$ .	43
4.7	Gráfica de Quintaesencia con Interacción de Yukawa con $\lambda = 3$ y $w = 0$ . (rotada)	43



# Lista de Tablas

2.1	Cambio de $w$ por $\gamma$ . . . . .	10
2.2	Puntos críticos de $\Lambda$ CDM . . . . .	11
3.1	Puntos críticos de Quintaesencia con $\lambda = \text{cte.}$ . . . . .	19
3.2	Eigenvalores de Quintaesencia con $\lambda = \text{cte.}$ . . . . .	20
3.3	Puntos críticos de Quintaesencia con $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ . . . . .	24
3.4	Eigenvalores de Quintaesencia con $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ . . . . .	25
3.5	Estabilidad de Quintaesencia con $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ . . . . .	27
4.1	Puntos críticos de Quintaesencia con acoplamiento de Yukawa & $\lambda = \text{cte.}$ . . . . .	36
4.2	Eigenvalores de Quintaesencia con acoplamiento de Yukawa & $\lambda = \text{cte.}$ . . . . .	37
4.3	Estabilidad de Quintaesencia con acoplamiento de Yukawa . . . . .	38



# Introducción

El año de 1998 se considera como un parteaguas en la Cosmología moderna, pues fue en ese periodo cuando se dieron a conocer los resultados de las observaciones de un considerable número de supernovas tipo Ia que sorpresivamente indicaron que el Universo se expande *aceleradamente*.

Las observaciones sobre supernovas de tipo Ia cerraron un primer capítulo de la Cosmología, en el que la pregunta central era: *¿De qué está hecho el Universo?* Podemos afirmar sin equivocarnos que los esfuerzos de la humanidad para contestar esta interrogante han estado presentes a lo largo de toda su historia. Sin embargo, una sorpresa se presentó en 1998 cuando se tuvo la certeza de que la mayor parte del contenido material de nuestro Universo observable (aproximadamente el 96% del total) está hecho de materia aún desconocida para la ciencia. Este es el acertijo central de lo que se llama de manera genérica como el problema de la Materia Oscura (*Dark Matter*, según su denominación en inglés).

A partir del descubrimiento de la expansión acelerada del Universo, se cayó en la cuenta de que la Materia Oscura debía estar compuesta de al menos dos tipos generales de materia: la Materia Oscura Fría (*Cold Dark Matter*, CDM) que forma galaxias y en general la estructura cosmológica que hoy observamos y la Energía Oscura (*Dark Energy*, DE) que sería la responsable directa de la expansión acelerada del Universo.

En el Capítulo 1 se explica qué es la materia oscura y de la energía oscura más a fondo, utilizando el principio cosmológico y la métrica de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker para nuestro fondo cósmico.

Asimismo, en el año de 1998 se publicó el artículo [2], en donde se utilizaron los *Sistemas Dinámicos* para analizar la Quintaesencia, una manera de explicar la aceleración del universo, tomando un *campo escalar* que tiene el mismo efecto que la Energía Oscura para la aceleración del Universo.

El uso de los sistemas dinámicos en la cosmología es muy variado, se utiliza tanto para demostrar que teorías ya probadas por observaciones tienen buenos fundamentos

matemáticos en lo que afirman, como para probar teorías nuevas o propuestas que aún no tienen observaciones que las respalden, así como para probar si son factibles nuevas teorías que se obtienen de observaciones y difieren por algún parámetro de la teoría usual. Normalmente se usan los sistemas dinámicos para poder acotar teóricamente los parámetros faltantes para que la teoría quede cerca de los intervalos de confianza necesarios para reproducir las observaciones.

En el Capítulo 2 hablamos del modelo cosmológico más usual, el que está respaldado por las observaciones y a la vez es el más sencillo, claramente tiene sus problemas, pero es una gran aproximación para describir nuestro Universo. Se muestra de manera general como se pueden usar los sistemas dinámicos en este escenario, mostrando que los resultados concuerdan con lo que se cree que es la evolución de nuestro Universo hasta la fecha.

Para hacer un estudio más a fondo de los campos escalares en Cosmología, en el Capítulo 3, al igual que en [2, 3] estudiamos el problema con uno de los potenciales más sencillos para poder comparar con el modelo  $\Lambda$ CDM y probar si es factible el uso de un campo escalar para obtener la aceleración del Universo que se observa hoy y bajo qué condiciones.

En este trabajo, como el título lo señala, el problema principal es estudiar la interacción en el sector oscuro bajo un acoplamiento del tipo Yukawa como lo hacen, de manera observacional en [1], primero hay que obtener las ecuaciones de movimiento cosmológicas para el caso en que la Materia Oscura Fría y la Energía Oscura interactúan, para luego poder llegar a un sistema dinámico y poder analizar si en este caso es posible llegar a lo que se tiene hoy en día, como en  $\Lambda$ CDM y en Quintaesencia usual, esto se trata en el Capítulo 4, mostrando tanto resultados analíticos como gráficas de las simulaciones numéricas.

Finalmente, en el Capítulo 5 se discuten los resultados y se ve la conclusión del trabajo que sirve de soporte a lo obtenido en [1], en ésta misma parte se discute cuál puede ser el rumbo futuro de esta investigación y el trabajo futuro que podría seguirse más adelante.

En el Apéndice A se muestran los teoremas matemáticos en los que se basa fuertemente el análisis hecho en el presente trabajo, en él se encuentran el *Teorema de Hartman-Grobman* y el *Teorema de Estabilidad de Lyapunov* así como una explicación detallada de lo que son las funciones de Lyapunov.

Dentro de los Apéndice B y C se pueden encontrar los códigos numéricos utilizados para el análisis de estos problemas de sistemas dinámicos, para que quien guste pueda reproducir los resultados, corregirlos o mejorarlos.

# Capítulo 1

## Cosmología Estándar

El Modelo Cosmológico Estándar es una descripción fenomenológica de la evolución del Universo ampliamente aceptada actualmente. Los motivos de ésto recaen en su simplicidad y en el hecho de que reproduce una variedad de resultados observacionales que vienen de múltiples fuentes independientes. Por ésta última razón, también se le llama el Modelo de Concordancia. Está basado en tres ingredientes básicos: Inflación, Materia Oscura Fría (*Cold Dark Matter*, CDM) y en la constante cosmológica ( $\Lambda$ ), así como en el Modelo Estándar de la Física de Partículas y en la Relatividad General. En éste capítulo repasaremos los resultados más relevantes del Modelo de Concordancia, así como algunas de sus limitaciones.

### 1.1 Cosmología FLRW

Comencemos con el ingrediente principal de todos los modelos cosmológicos: *el Principio Cosmológico*. Éste principio nos dice que las propiedades del Universo son las mismas para todos los observadores, en escalas suficientemente grandes, lo que implica que el Universo es homogéneo e isotrópico. Esto a su vez restringe el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  para ser el tensor métrico de Friedman-Lemâitre-Robertson-Walker (FLRW), dado por el elemento de línea:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (1.1)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala cosmológico,  $a(t_0) = a_0$ ,  $d\Omega$  es el elemento de línea para la 2-esfera y  $k$  es una constante proporcional al escalar de curvatura de la parte espacial del espacio-tiempo: en un espacio plano es cero, para un espacio cerrado es positivo y es negativo si el espacio es abierto, *i.e.* hiperbólico.

La dinámica de este espacio-tiempo está relacionada solamente con el factor de escala  $a(t)$ , que hasta el momento es una función arbitraria. Para encontrar las ecuaciones de evolución, es necesario introducir la métrica (1.1) en las Ecuaciones de Einstein<sup>1</sup> [4]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  es el escalar de Ricci y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía momento. Habiendo escogido el tensor métrico (1.1), lo único desconocido ahora es  $T_{\mu\nu}$ . Sin embargo, hay muy poca libertad de elección debido a que se asumió homogeneidad e isotropía, de modo que el tensor de energía momento se reduce al de un fluido perfecto:

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(t) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

en donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $p$  es la presión del fluido. Lo que resulta de introducir la métrica (1.1) en la ecuación (1.2) son las ecuaciones de Friedmann y Raychaudhuri, respectivamente:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.5)$$

donde  $H$  es la tasa de expansión del Universo, también llamado parámetro de Hubble. Sin más información acerca de los campos específicos que originan el tensor de energía momento, estas ecuaciones proveen una descripción completa de la evolución del Universo. Lo que esto quiere decir es que la evolución de la densidad de energía,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (1.6)$$

no es independiente de las ecuaciones (1.4) y (1.5). De cualquier manera, es muy útil determinar  $\rho(t)$  como función del factor de escala  $a(t)$ . Ésto sólo es posible si existe una ecuación de estado (*Equation of State*, EoS)  $p = p(\rho)$  que relacione la presión y la densidad de energía.

La EoS depende fundamentalmente del tipo de materia que se introduzca en la teoría. Sin embargo, para propósitos comológicos, un simple e importante ejemplo es un fluido con una EoS lineal, es decir:

$$p = w\rho \quad (1.7)$$

---

<sup>1</sup>Nótese que utilizamos unidades donde  $\hbar = c = 1$ .

en donde el parámetro de la EoS  $w$  se toma como constante por el momento. Se ve inmediatamente de la ecuación (1.5) que el signo de  $\ddot{a}$  está fuertemente relacionado con el valor de éste parámetro. En particular, el umbral para una aceleración nula ocurre cuando  $w = -1/3$ , lo que significa que solamente una presión negativa, menor a este valor, puede adecuarse para obtener una expansión acelerada. Después de esto, con esta EoS, la solución a la ecuación (1.6) es simplemente

$$\rho(a) = \rho^0 a^{-3(1+w)} \quad (1.8)$$

donde  $\rho^0$  es la densidad de energía al día de hoy. Los campos conocidos del Modelo Estándar de la Física de Partículas pueden ser descritos cosmológicamente por fluidos con ésta EoS, y de acuerdo a su energía pueden ser separados en dos casos extremos: materia no relativista, con  $w_m = 0$ , y materia relativista o radiación con  $w_r = 1/3$ . Como es de esperarse, la densidad de energía varía con el volumen  $a^{-3}$  para materia no relativista ( $\rho_m$ ), o con  $a^{-4}$  para radiación ( $\rho_r$ ) debido a una contribución adicional por parte del corrimiento al rojo cosmológico. En otras teorías existen otro tipo de casos, como la materia ultra rígida (*ultra-stiff matter*), con  $w = 1$  y  $\rho_s \propto a^{-6}$  así como el caso más exótico con  $w = -1$  que da origen a una densidad de energía constante  $\rho_\Lambda$  y una expansión exponencial como en el caso de un Universo dominado por constante cosmológica. Éstos dos últimos son los valores límite para  $w$  si se elige respetar la condición de energía dominante. Cerraremos nuestra discusión de la Cosmología FLRW introduciendo el parámetro de densidad  $\Omega = 8\pi G\rho/3H^2$  y el llamado *parámetro de desaceleración*, dado por:

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2}\Omega(1+3w) \quad (1.9)$$

que puede ser generalizado para fluidos compuestos formados por múltiples fluidos con parámetros de densidad  $\Omega_i$  y parámetros de la EoS  $w_i$ , tomando  $w$  como un parámetro efectivo:  $w = \sum_i w_i \Omega_i / \Omega$ .

Más que la geometría del espacio-tiempo en sí, el Modelo de Concordancia hace ciertas hipótesis acerca de las componentes del Universo. Específicamente, postula la existencia de materia oscura fría y modela la expansión acelerada del universo a través de una constante cosmológica  $\Lambda$ . En lo que sigue, motivaremos la necesidad de éstas dos componentes y mencionaremos algunos de los principales resultados observacionales.

## 1.2 Materia Oscura

La Materia Oscura (*Dark Matter*, DM) fue descubierta por primera vez por las observaciones de Jan Oort en 1932 y confirmada poco después por Fritz Zwicky en 1933 [5].

Jan Oort encontró estrellas en la Vía Láctea que no deberían estar atrapadas gravitacionalmente a la galaxia, considerando solamente la masa visible de la galaxia. Mientras que F. Zwicky descubrió anomalías en la distribución de velocidades de galaxias en el cúmulo de Coma. En ambos casos, las mediciones de masa derivadas de la dinámica daban lugar a valores mucho más grandes que aquellos obtenidos por las mediciones de la luminosidad de los objetos visibles. Aunque una parte de ésta materia, después se descubrió que era solamente gas caliente que solamente emitía rayos-X, la mayor parte era completamente invisible, es decir, no parecía interactuar electromagnéticamente.

Las detecciones iniciales fueron sólo las dos primeras piezas de un gran rompecabezas de evidencia a favor de la materia oscura. La que tuvo el mayor impacto en la comunidad científica fue la medición de las curvas de rotación de galaxias por Rubin y Ford en 1970 [6]. A escalas cosmológicas, las pruebas de la materia oscura provienen de mapear el cielo en microondas. Las anisotropías de la Radiación del Fondo Cósmico (*Cosmic Microwave Background*, CMB) proveen información importante para muchos parámetros cosmológicos [7]. En particular, una de las conclusiones es que  $\Omega_{dm}$ , densidad de materia oscura, es considerablemente más grande que  $\Omega_b$ , la densidad de materia bariónica. Ésta medida también fue corroborada por la determinación de la densidad del número de bariones de la nucleosíntesis [8] y de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas (*Baryon Acoustic Oscillations*, BAO) [9], mostrando que la materia oscura es, al menos en su mayoría, no bariónica.

La composición real de la materia oscura continúa siendo un misterio, de cualquier manera se tienen algunas pistas de lo que pudiera ser. Además de ser no-bariónica, hay evidencia de que debe de ser fría, es decir, se tiene la hipótesis de que puede estar compuesta de partículas no relativistas. Ésta conclusión viene de las observaciones de estructura a diferentes escalas: solamente con materia oscura fría puede haber estructura a pequeña escala como galaxias; materia oscura caliente no puede colapsar en estas escalas, pues escapa muy fácilmente a la atracción gravitacional debido a su naturaleza relativista. Además de esto, el descubrimiento del Cúmulo Bala (1E 0657-558) reveló que la sección eficaz de interacción de la materia oscura consigo misma es muy pequeña, prácticamente despreciable [10].

Éstas y otras pistas llevaron a la comunidad científica a creer en la existencia de la materia oscura. Aunque todavía no ha sido detectada directamente, muchos candidatos han aparecido<sup>2</sup>, la mayoría bajo el nombre de partículas masivas débilmente interactuantes (*Weakly Interacting Massive Particles*, WIMPs). La mayoría de estos candidatos son fermiones, como aquellos que surgen de super simetría (SUSY), pero también hay candidatos bosónicos, como el axión, que está muy bien motivado, o el

---

<sup>2</sup>Ver [11] para una revisión más a detalle.

phion, aunque es auto-interactuante [12, 13]. El escenario más probable podría ser uno en el cual coexistan varias partículas que cumplen con los requerimientos de la materia oscura.

La comunidad experimental se encuentra muy concentrada en ésta búsqueda, y se están construyendo muchos detectores nuevos para tratar de detectar directamente la materia oscura. La última gran conmoción en ésta área vino de las colaboraciones DAMA/LIBRA, donde confirmaban la detección de partículas de materia oscura [14]. Sin embargo, hasta el momento estos resultados no han sido compatibles con otros experimentos similares, lo que da lugar a dudas en la validez de los resultados<sup>3</sup>.

### 1.3 La Constante Cosmológica $\Lambda$ y la Energía Oscura

El descubrimiento de la expansión acelerada del Universo por el Proyecto de Cosmología de Supernovas [16] y por el Equipo de Búsqueda de Supernovas High- $z$  [17] en 1998 revolucionó nuestro conocimiento del Universo. Estos dos resultados mostraron que, además de la materia oscura, parece que existe una fuente desconocida de energía, más abundante el día de hoy que el resto de los otros constituyentes del Universo y con una presión efectiva negativa. El nombre general que se le da a ésta componente es Energía Oscura (DE) [18], aunque no todas las explicaciones de este resultado son a causa de una nueva componente, es decir, puede ser que se necesite una nueva teoría general de la gravedad<sup>4</sup>.

La solución más simple fue propuesta por el mismo Einstein [20], aunque con el objetivo de obtener una solución cosmológica estática. Como se mencionó antes, la situación estática que Einstein quería requería de una componente con presión negativa, más precisamente, una con  $\omega_{\text{eff}} = -1/3$ . Siendo ésta una ecuación de estado muy inusual, Einstein la descartó como una solución no-física y escogió en su lugar añadir su famosa Constante Cosmológica  $\Lambda$  a la acción gravitacional:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} R + \mathcal{L} - \Lambda \quad (1.10)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica y  $\mathcal{L}$  es el Lagrangiano de todos los otros campos. La variación de ésta acción con respecto a la métrica da lugar a las ecuaciones de campo modificadas,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

<sup>3</sup>Véase, por ejemplo, [15] para más detalles de la compatibilidad del resultado de DAMA con otros experimentos.

<sup>4</sup>Véase, por ejemplo, [19] y sus referencias.

Moviendo el término con  $\Lambda$  al lado derecho de la ecuación (1.11) es fácil ver que dicho término es equivalente a un fluido con  $\omega = -1$  como se dijo antes. Como se descubrió después, primero por Slipher y luego por Hubble, el Universo no es estático, pero la idea de Einstein aún es útil hoy en día para explicar la expansión acelerada del Universo. Suponiendo que ésto es verdad, las observaciones mencionadas antes han reportado un valor medido de  $\Lambda_{\text{exp}}$  del orden de

$$\Lambda_{\text{exp}} \sim 10^{-47} \text{GeV}^4 \quad (1.12)$$

Sin embargo, existen algunos problemas con la constante cosmológica. En la manera en que Einstein la introdujo se suponía que fuese un nuevo parámetro de la teoría de gravedad y que podría tomar cualquier valor. Por otra parte, la teoría cuántica de campos predice la existencia de una energía del vacío  $\rho_V$ , asociada con campos cuánticos, que asimismo deberían contribuir a una Constante Cosmológica efectiva  $\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda + \rho_V$ . El problema surgió cuando se estimó la contribución de dicho vacío, por ejemplo, sumando las energías de los modos nulos de un campo cuántico de masa  $m$  [21]:

$$\rho_V = \int_0^M \frac{4\pi k^2 dk}{2\pi} \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + k^2} = \frac{M^4}{16\pi^4} + \frac{m^2 M^2}{16\pi^2} + \frac{m^4}{64\pi^2} \log\left(\frac{m^2 e^{1/2}}{4M^2}\right) + \mathcal{O}(M^{-1}) \quad (1.13)$$

donde  $M$  es un corte que se introduce para regularizar los cálculos,  $m$  es la masa del campo y  $e$  es el número de Euler. Un argumento común para escoger el valor de  $M$  es proponiendo que es la escala hasta la cual uno puede confiar en la teoría cuántica de campos. Usualmente eso significa escoger la masa de Planck, lo que lleva a un valor aproximadamente 120 órdenes de magnitud más grande que  $\Lambda_{\text{exp}}$ . Existen otras aproximaciones, como escoger distintas escalas, pero la discrepancia entre los valores obtenidos y el experimental nunca es menor que decenas de órdenes de magnitud. Para que cualquier cálculo sea cierto, uno debe suponer que la parte gravitacional de  $\Lambda_{\text{eff}}$  cancela la contribución del vacío de una manera antinaturalmente exacta. Éste es el famoso problema del *fine tuning* de la constante cosmológica y, como era de esperarse, éste era un problema conocido desde hace ya mucho tiempo, inclusive antes de que se descubriera la expansión del Universo<sup>5</sup>.

La necesidad de una  $\Lambda$  distinta de cero impuesta por los resultados recientes de supernovas, da lugar a un problema distinto: el hecho de que su densidad correspondiente es hoy en día del mismo orden de magnitud que la densidad de materia no relativista. Éste es el tan llamado problema de coincidencia y puede verse de distintas maneras. La pregunta usual es: *¿Por qué ahora?* Porque parece ser muy improbable que la raza humana se haya desarrollado a un ritmo tal para observar éste fenómeno exactamente

<sup>5</sup>Véase por ejemplo la revisión de Weinberg [22], de 1989, o también [23] para trabajos más recientes en la materia.

durante la transición entre las épocas de dominación de materia y la dominación de  $\Lambda$ . Otra manera de explicarlo tiene que ver con que el valor de  $\Lambda$  parece estar dentro de un rango muy pequeño que permite la formación de “una buena cantidad” de estructura, algo que también se considera muy improbable. Similarmente, existe otra coincidencia en el tiempo en el que  $\Lambda$  comienza a dominar y el tiempo cuando la formación de estructura se vuelve no-lineal.

Todos estos problemas están ligados fundamentalmente a la falta de conocimiento sobre esta misteriosa constante: todo se resolvería si su valor fuera correctamente calculado de principios fundamentales. Muchos intentos se han hecho hasta el momento, pero ninguno de ellos con los resultados deseados. Se quiere enfatizar que hay dos problemas distintos: el hecho de que la energía del vacío no gravita y el origen de la expansión acelerada, junto con las coincidencias antes mencionadas. Si la solución al problema de la energía oscura es realmente la constante cosmológica entonces claramente los dos problemas están relacionados. Si no, y si, por ejemplo, alguna simetría se encontrara para cancelar la constante cosmológica, uno tendría que encontrar qué es lo que ocasiona la expansión acelerada. Éste último camino ha sido seguido por mucho tiempo y es la base de ésta tesis. Describiremos una de las maneras de tomar la energía oscura sin la constante cosmológica, sentando las bases para este trabajo.

## 1.4 Inflación

Nuestra introducción a la cosmología estándar estaría incompleta sin una discusión acerca de inflación [24]. Empezamos por referirnos rápidamente al problema de la planitud y su relación con el parámetro de curvatura  $k$ . Reescribiendo la ecuación (1.4), usando el parámetro de densidad  $\Omega$ , encontramos que

$$\frac{3k}{8\pi G} = (1 - \Omega^{-1})\rho a^2 \quad (1.14)$$

La conclusión entonces es que la curvatura depende fuertemente del valor de  $\Omega$ , especialmente en qué tan cerca se encuentre de la unidad. Aún más, se espera que el valor de  $\rho a^2$  disminuya con el tiempo (a menos que las componentes del universo sean exóticas), lo que quiere decir que  $|1 - \Omega^{-1}|$  debe incrementarse durante la evolución del Universo para mantener  $k$  constante. Sin embargo, mediciones cosmológicas revelaron que  $\Omega$  se encuentra extraordinariamente cerca de 1 en el presente, lo que significa que  $|1 - \Omega^{-1}| \lesssim 10^{-60}$  en la Época de Planck, es decir, el espacio era muy plano en esa época, aparentemente, sin razón alguna.

Inflación presenta una solución a este gran problema de *fine tuning*. Ésta teoría supone que el Universo ha sufrido una expansión muy rápida, posiblemente exponencial, poco después del Big Bang. De ésta manera el término de curvatura de la ecuación (1.4) se vuelve despreciable después de inflación, o, en otras palabras, el espacio se vuelve esencialmente plano desde ese punto en adelante. Por esta razón, en casi todas las discusiones acerca de cosmología en épocas actuales,  $k$  se toma como 0, como es el caso en ésta tesis.

Existían también otros problemas que fueron resueltos por la teoría de inflación. El llamado problema del horizonte es posiblemente el más importante, y está relacionado con la homogeneidad y la isotropía observados en el Universo. El problema consiste en el hecho de que regiones que no deberían estar causalmente conectadas parecen tener las mismas propiedades físicas. Inflación claramente soluciona este problema puesto que aumenta el tamaño de pequeñas regiones causalmente conectadas por muchos órdenes de magnitud, que después originan regiones de tamaño observable en el Universo actual.

Después del periodo inflacionario la temperatura y la densidad de energía de materia y radiación son efectivamente nulas. Por ésta razón cada modelo inflacionario debe explicar cómo el Universo abandonó ese estado y se volvió dominado por materia y radiación. Ésto se logra mediante un proceso llamado *recalentamiento*. Después de la fase inflacionaria, el campo que origina la inflación — el inflatón — comienza a oscilar. Éstas oscilaciones dan origen a la creación cuántica de partículas, que eventualmente consumen toda la energía del inflatón y recalientan el Universo. Entre los modelos de recalentamiento estudiados hasta ahora, uno de los más eficientes es el llamado escenario del precalentamiento [25], en el cual la frecuencia de oscilación es variable, lo que da lugar a resonancias paramétricas que permiten una producción de partículas más rápida.

## 1.5 Modificando el Modelo Cosmológico Estándar

El Modelo Cosmológico Estándar se basa en la materia oscura y en la constante cosmológica, lo que parece ser una descripción incompleta. Hay un gran número de problemas con la constante cosmológica y la materia oscura, aunque mejor entendidas que la energía oscura, aún se encuentran muy lejos de ser un asunto terminado. De ahí la motivación de hacer este estudio y el trabajo de muchos para reemplazar el Modelo de Concordancia por alguno que de mayor información del sector oscuro.

# Capítulo 2

## Modelo $\Lambda$ CDM

En este capítulo se presentarán las ecuaciones que gobiernan la evolución del Universo, las llamadas ecuaciones de Friedmann. En el caso del modelo  $\Lambda$ CDM junto con la métrica de FLRW tomamos todas las componentes como si fuesen fluidos perfectos, nuestro propósito es presentar un análisis dinámico para un fluido con cualquier ecuación de estado (EoS) incluyendo aquel de una constante cosmológica. Asimismo, reescribimos las ecuaciones de Friedmann de una manera más sencilla de manejar y de ahí se obtiene el sistema dinámico a estudiar. Posteriormente se encuentran los puntos críticos del sistema y analizamos su estabilidad. Cabe notar que a diferencia del Capítulo 1, aquí asumiremos que nuestro Universo no es plano, *i.e.*  $k \neq 0$ , debido a que en las observaciones aún se tienen pequeñas fluctuaciones sobre el valor de  $k$ , de donde se cree que puede ser distinto de cero.

### 2.1 Ecuaciones Generales

Partimos de las ecuaciones de Friedmann (1.4) y (1.5) y las reescribimos en términos de la ecuación de evolución del fluido perfecto (1.7) obteniendo de esta manera:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda) \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \quad (2.2)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad de energía de materia bariónica usual y materia oscura,  $\rho_r$  es la densidad de energía de radiación y  $\rho_\Lambda$  la densidad de energía relacionada con la constante cosmológica.

Ahora hacemos el cambio de notación:  $w_i = \gamma_i - 1$ , de modo que la ecuación (1.7) toma la forma

$$p_i = w_i \rho_i = (\gamma_i - 1) \rho_i \quad (2.3)$$

de esta manera tenemos los siguientes valores de  $\gamma$  para cada tipo de fluido que constituye el Universo:

TABLA 2.1: Cambio de  $w$  por  $\gamma$

$w_m = 0$	$\rightarrow$	$\gamma_m = 1$
$w_r = 1/3$	$\rightarrow$	$\gamma_r = 4/3$
$w_\Lambda = -1$	$\rightarrow$	$\gamma_\Lambda = 0$
$w_k = -1/3$	$\rightarrow$	$\gamma_k = 2/3$

De ésta manera, podemos ver que la ecuación (1.8) se convierte en

$$\rho_i(a) = \rho_i^0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma_i} \quad (2.4)$$

## 2.2 Ecuaciones Dinámicas

Con el fin de obtener nuestro sistema dinámico, definimos las variables adimensionales de manera estándar:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i \quad (2.5)$$

De modo que la ecuación de Friedmann (1.4) da lugar a la siguiente restricción:

$$1 = \Sigma_i \Omega_i = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k \quad (2.6)$$

donde hemos definido  $\Omega_k = -k/a^2 H^2$ .

Para expresar la dinámica escogemos como nueva variable  $H$ :

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -(1 + q) \quad (2.7)$$

donde hemos definido el factor de desaceleración  $q = 1 - \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_k - 2\Omega_\Lambda$ . Ahora bien, definiendo la derivada  $X' \equiv dX/dN$  donde  $N \equiv \log(a)$  la relación anterior toma la forma:

$$H' = -(1 + q)H \quad (2.8)$$

Así, utilizando (1.6) y (2.8) obtenemos nuestras ecuaciones dinámicas para cada  $\Omega_i$ :

$$\Omega'_i = \Omega_i [2(1 + q) - 3\gamma_i] \quad (2.9)$$

Dependiendo de cada fluido es el tipo de ecuación dinámica que se tiene:

---


$$\begin{aligned} \Omega'_r &= [2(q - 1)] \Omega_r \\ \Omega'_m &= [2q - 1] \Omega_m \\ \Omega'_k &= [2q] \Omega_k \\ \Omega'_\Lambda &= [2(q + 1)] \Omega_\Lambda \end{aligned}$$


---

De modo que podemos observar que la ecuación para  $H$  se desacopla de la dinámica de  $\Omega'_i \propto q\Omega_i$ , asimismo, de la restricción (2.6) se ve que podemos obtener  $\Omega_r$  de las demás densidades, de modo que nuestro sistema consiste solamente de 3 ecuaciones, y no de 4. De esta manera, obteniendo  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$  y  $\Omega_k$  tendremos el comportamiento de  $H$  y de  $\Omega_r$ . Para nuestras variables dinámicas tenemos ciertos rangos, los cuales se pueden ver simplemente como  $\Omega_m \geq 0$  y  $\Omega_r \geq 0$ , que utilizando las restricciones se pueden reescribir como  $1 \geq \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k$ .

Siguiendo los pasos de [26] pero nuestro sistema, tenemos que

$$q = 1 - \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_k - 2\Omega_\Lambda \quad (2.10)$$

## 2.3 Análisis de Estabilidad

Para el análisis de estabilidad, utilizamos la definición de  $q$  dada en (2.10), y obtenemos los puntos críticos  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k)$  de manera estándar haciendo cada  $\Omega'_i = 0$ , como se puede observar en la Tabla 2.2, donde se muestra su existencia, el coeficiente de desaceleración  $q$  y si existe o no dicha aceleración en ese Universo.

TABLA 2.2: Puntos críticos de  $\Lambda$ CDM

Punto	Estabilidad	Existencia	$q$	Aceleración
(0, 0, 0)	Repulsor	Siempre	1	No
(1, 0, 0)	Punto Silla	Siempre	1/2	No
(0, 1, 0)	Atractor	Siempre	-1	Sí
(0, 0, 1)	Punto Silla	Siempre	0	No

Utilizando  $q$  es posible determinar si existe aceleración o no en el Universo, si  $q \geq 0$  no hay aceleración y si  $q < 0$  entonces sí se tiene aceleración.

Ahora bien, cada punto tiene su propia naturaleza, por lo mismo es bueno hacer un análisis detallado de cada uno de ellos.

Por otra parte, nos interesa saber también el comportamiento de cada universo, es decir, el ritmo de expansión que tiene, para ello recurrimos la ecuación (2.8) para  $H$  de donde obtenemos una ecuación para nuestro factor de escala  $a(t)$

$$a(t) = a_0 [(q + 1)H_0 t]^{1/(q+1)} \quad (2.11)$$

### 2.3.1 Universo de RADIACIÓN

Éste universo corresponde al punto crítico  $(0, 0, 0)$ , es un universo plano, ya que  $k = 0$  y con constante cosmológica nula,  $\Lambda = 0$ . Aquí tenemos que  $q = 1$  de (2.10). Puesto que  $q > 0$ , no tenemos aceleración, sino desaceleración del universo, matemáticamente, visto como un punto en el espacio es un *repulsor*<sup>1</sup>, cualquier perturbación por pequeña que sea siempre será alejada de éste punto, como se puede ver en la Fig. 2.1, de manera que si partimos de algún lugar cercano a éste punto, como parecen indicar las observaciones, evolucionamos de tal manera que nos alejamos cada vez más de éste Universo.

En nuestro universo dominado por radiación, gracias a la ecuación (2.11), nuestro factor de escala  $a(t)$  tiene la forma

$$a(t) = a_0 [2H_0 t]^{1/2} \quad (2.12)$$

### 2.3.2 Universo EINSTEIN-DE SITTER

Éste universo corresponde al punto crítico  $(1, 0, 0)$ . Así como el dominado por RADIACIÓN, éste universo es plano,  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$ , solamente que aquí tenemos materia, es la segunda etapa del universo, aquí todavía  $q > 0$ , por lo que hay desaceleración. Éste punto es inestable, de hecho es un *punto silla*, de manera que cuando se perturba un poco, las trayectorias pueden ser atraídas hacia éste, pero después se ven expulsadas de él como si se tratase de un repulsor, en éste punto el universo estuvo durante mucho tiempo, es en la época en la que se crearon las galaxias y todo lo que podemos observar, como estrellas, planetas y demás objetos que conocemos en el universo, incluyendo la materia oscura.

<sup>1</sup>Para definiciones de *repulsor*, *punto silla* y *atractor* véase [27].

En éste universo dominado por materia, nuestro factor de escala tiene una ecuación dada por

$$a(t) = a_0 \left[ \frac{3}{2} H_0 t \right]^{2/3} \quad (2.13)$$

### 2.3.3 Universo de DE SITTER

Éste universo corresponde al punto crítico  $(0, 1, 0)$ , así como los anteriores este universo es plano  $k = 0$ , pero aquí lo que domina es la energía, o bien la constante cosmológica  $\Lambda$ , y tenemos  $q = -1$  de modo que en éste universo tenemos aceleración, que es la que se puede observar hoy en nuestro universo, en algún punto de la historia de nuestro universo la materia dejó de dominar y cedió el paso a la constante cosmológica, ésta transición se está llevando a cabo hoy en día, nuestro universo se expande aceleradamente y la materia que conocemos no es capaz de frenar esta aceleración. Desde el punto de vista de sistemas dinámicos éste universo es un *atractor* futuro, puesto que cualquier perturbación que demos a nuestros *puntos sillas* tiende a irse hacia el atractor de constante cosmológica  $\Lambda$  como se ve en la Fig. 2.1.

En éste universo de energía, el factor de escala tiene la forma

$$a(t) = a_0 e^{H_0 t} \quad (2.14)$$

Asimismo, tenemos que, de la segunda ecuación de Friedman (2.2), usando la densidad constante del punto crítico de la constante cosmológica, podemos obtener el valor de  $H_0$

$$H^2 = \left( \frac{8\pi G}{3} \right) \rho_\Lambda^* = \left( \frac{8\pi G}{3} \right) \left( \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) = \frac{\Lambda}{3}$$

de modo que se tiene que en este caso  $H_0 = \sqrt{\Lambda/3}$ .

### 2.3.4 Universo de MILNE

Éste universo corresponde al punto crítico  $(0, 0, 1)$ , aquí el universo solamente contiene curvatura, es una imagen un poco difícil de imaginar, sin materia, sin radiación, sin energía, puramente curvatura, éste universo es un *punto silla*, estaría situado justamente entre la era dominada por materia y la de constante cosmológica, pero al ser puramente teórica, no se cree que haya pasado realmente, como se ve en la Fig. 2.1 cualquier perturbación pequeña que se haga tiende a alejarse de éste para irse al punto dominado por constante cosmológica.

Aquí el factor de escala es lineal con el tiempo

$$a(t) = a_0 t \tag{2.15}$$

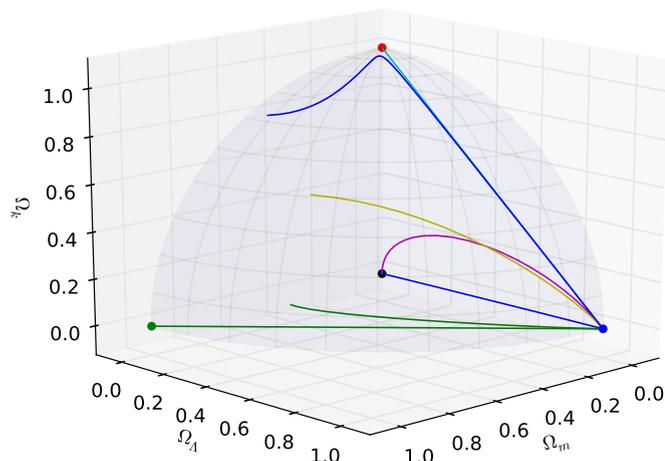


FIGURA 2.1: Gráfica del modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM con distintas condiciones iniciales que muestra como todas las pequeñas perturbaciones, aunque siguen distintas rutas, tienden a evolucionar hacia el universo dominado por constante cosmológica (derecha abajo).

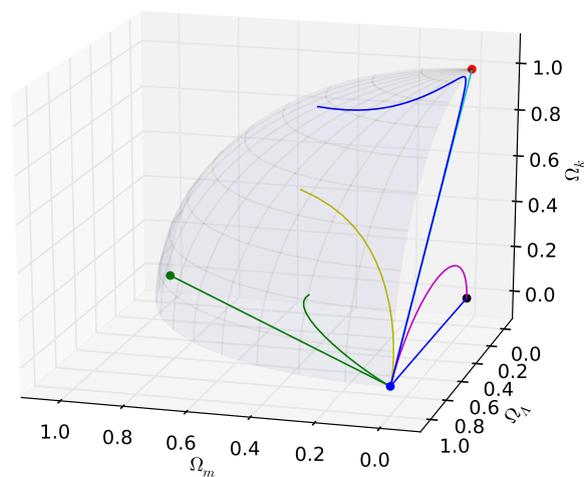


FIGURA 2.2: Gráfica del modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM (rotada) con distintas condiciones iniciales que muestra como todas las pequeñas perturbaciones, aunque siguen distintas rutas, tienden a evolucionar hacia el universo dominado por constante cosmológica (abajo).

## Capítulo 3

# Cosmología de Campo Escalar

Los campos escalares son extremadamente importantes en la física moderna. Siendo invariantes bajo transformaciones de coordenadas, son los campos tensoriales más simples, de orden 0. Un ejemplo es el recientemente detectado campo de Higgs, que provee el mecanismo para dotar de masa a las partículas del Modelo Estándar de Física de Partículas, o el campo del inflatón, presumiblemente el campo escalar que origina inflación. Éste último, en particular, da origen a una dinámica similar a aquella de la energía oscura, ya que ambos dan origen a expansión acelerada del Universo. Por ésta razón, es razonable el asumir que la energía oscura puede también ser descrita por un campo escalar, en lugar de una constante cosmológica.

Las primeras sugerencias para ir más allá de la constante cosmológica y sustituirla por un campo escalar fueron hechas por Wetterich [28], y Ratra & Peebles [29], aunque hubo algunos intentos anteriores intentando estudiar un término con una *variable cosmológica* [30]. Como puede deducirse de las fechas de publicación, éstos intentos solo trataron de resolver el problema del *fine tuning* o para arreglar el problema de la energía que hacía falta en el Universo, como había muchísima evidencia de que el Universo era plano y que la materia regular no era suficiente para lograr dicha energía. Solamente después del descubrimiento de la expansión acelerada del Universo fue que éstos modelos se tornaron verdaderamente importantes.

Ha habido bastante actividad en ésta área, motivado más que nada por explicar la expansión acelerada del Universo sin los problemas de la constante cosmológica. Eso es exactamente lo que queremos hacer en esta tesis, con el elemento extra de que dejamos que la energía oscura interactúe con la materia oscura. Así, vamos a ver los efectos de introducir campos escalares en un universo FLRW, con el objetivo de modelar la energía oscura.

### 3.1 Ecuaciones Generales

Consideremos, como en [3], un campo escalar para la energía oscura, o quintaesencia en la presencia de materia no relativista descrita por un fluido barotrópico perfecto. La acción está dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + S_m \quad (3.1)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$ ,  $M_{\text{pl}}$  es la masa de Planck reducida,  $R$  es el escalar de Ricci y  $S_m$  es la acción de la materia. Asumimos en ésta parte que la materia no relativista no tiene un acoplamiento directo con el campo  $\phi$ .

Estudiaremos la dinámica de la quintaesencia en un espacio FLRW plano, *i.e.*  $k = 0$ , a diferencia de la sección anterior.

De calcular el tensor de energía-momento haciendo variar la acción (3.1) con respecto a la métrica y utilizando el principio cosmológico, que implica homogeneidad, tenemos que el tensor de energía toma la forma

$$T^{\mu\nu} = \dot{\phi} \delta_0^\mu \delta_0^\nu + g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} - V(\phi) \right) \quad (3.2)$$

que al comparar con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

se encuentra que la parte espacial de la 4-velocidad  $U^\mu$  es cero y que la densidad de energía y la presión están dadas por:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.4)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.5)$$

Es claro que el parámetro de la ecuación de estado  $w_\phi = p_\phi/\rho_\phi$  satisface que  $-1 \leq w_\phi \leq 1$ , dejando así que los campos escalares puedan describir un gran rango de posibles fluidos, en particular, la energía oscura, algo que es único para éste tipo de campos.

La ecuación de movimiento par  $\phi$  puede ser derivada equivalentemente de las ecuaciones de Euler-Lagrange o de la divergencia del tensor de energía-momento. Y está dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (3.6)$$

donde  $V_{,\phi} \equiv dV/d\phi$ . Esta ecuación es similar a la ecuación para una partícula de masa unitaria en un potencial  $V$  con un término de fricción proporcional a  $H$ , que podría simplificar el análisis.

### 3.2 Energía Oscura Escalar

Habiendo derivado las ecuaciones fundamentales, describamos la energía oscura como un campo escalar. Comencemos con el caso en el que el campo escalar es la única componente del universo. En esa situación las ecuaciones de evolución toman la forma

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho_\phi = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) \quad (3.7)$$

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad (3.8)$$

Con este sistema de ecuaciones podemos determinar  $\phi(t)$  y la forma de  $V(\phi)$  si  $a(t)$  es conocido. Asumiendo una dependencia exponencial, es decir,  $a(t) \propto t^p$ , la solución es:

$$\phi(t) = \sqrt{2p} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad V(\phi) \propto (3p-1)e^{-\sqrt{2/p}\phi} \quad (3.9)$$

donde  $t_0$  es una constante de integración. Los resultados indican que para un potencial exponencial se puede obtener expansión acelerada si la pendiente es suficientemente pequeña, es decir,  $p > 1$ . Ésta condición se puede entender mejor observando el parámetro de la ecuación de estado: satisface  $w_\phi < -1/3$  si  $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ , es decir, si el campo escalar va bajando lentamente por el potencial. Para que ésto suceda la pendiente del potencial debe ser pequeña en comparación a su altura, así el parámetro

$$\lambda = -\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \quad (3.10)$$

debe ser pequeño. Para el caso exponencial, la condición se traduce en  $\lambda^2 < 2$ .

### 3.3 Ecuaciones Dinámicas

Además de que se puede obtener la expansión acelerada del universo, los modelos exponenciales poseen *scaling solutions* cuando otro fluido se encuentra presente. En estas soluciones, el campo emula la evolución del fluido: las dos densidades de energía son proporcionales y sus parámetros de ecuación de estado son iguales. La mejor manera de estudiar las *scaling solutions* es encontrando los puntos fijos del sistema dinámico

construido de las ecuaciones de evolución

$$H^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_m \right) \quad (3.11)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (3.12)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m(1 + w_m) = 0 \quad (3.13)$$

donde  $\rho_m$  y  $w_m$  son la densidad de energía y el parámetro del fluido de materia de fondo respectivamente. Este sistema dinámico es estudiado de una manera más sencilla usando las variables [2]

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_{\text{pl}}H} \quad y \equiv \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}M_{\text{pl}}H} \quad (3.14)$$

El parámetro de densidad del campo  $\Omega_\phi \equiv \rho_\phi/(3M_{\text{pl}}^2H^2)$  se puede expresar como

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 \quad (3.15)$$

y de las ecuaciones de Friedmann tenemos que para el fluido de materia de fondo se satisface  $\Omega_m = 1 - \Omega_\phi$ . De la ecuación para  $w$  se tiene fácilmente que

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (3.16)$$

Definamos una ecuación de estado efectiva

$$w_{\text{eff}} \equiv -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (3.17)$$

donde  $\dot{H}/H^2$  puede ser evaluado de (3.11) como

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -3x^2 - \frac{3}{2}(1 + w_m)(1 - x^2 - y^2) \quad (3.18)$$

Tomando las derivadas de  $x$  y de  $y$  con respecto a  $N \equiv \ln a$  y usando (3.12) y (3.18) obtenemos el sistema dinámico

---


$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}x \left[ (1 - w_m)x^2 + (1 + w_m)(1 - y^2) \right] \\ \frac{dy}{dN} &= -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y \left[ (1 - w_m)x^2 + (1 + w_m)(1 - y^2) \right] \end{aligned}$$


---

donde  $\lambda$  es definido igual que antes.

### 3.4 Quintaesencia con $\lambda$ constante.

Los modelos con una  $\lambda$  constante corresponde al potencial exponencial [2, 31–34]

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{\text{pl}}} \quad (3.19)$$

en este caso las ecuaciones dinámicas se cierran. Los puntos críticos del sistemas pueden ser obtenidos haciendo  $dx/dN = 0$  y  $dy/dN = 0$  [2]:

TABLA 3.1: Puntos críticos de Quintaesencia con  $\lambda = \text{cte.}$

	Punto	$\Omega_\phi$	$w_\phi$	$w_{\text{eff}}$	$q$
(a)	(0, 0)	0	indef.	$w_m$	$(1 + 3w_m)/2$
(b.1)	(1, 0)	1	1	1	2
(b.2)	(-1, 0)	1	1	1	2
(c)	$(-\frac{\lambda}{\sqrt{6}}, \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}})$	1	$\frac{\lambda^2}{3} - 1$	$\frac{\lambda^2}{3} - 1$	$\frac{\lambda^2}{2} - 1$
(d)	$(\frac{\sqrt{6}(1+w_m)}{2\lambda}, \frac{\sqrt{3/2(1-w_m^2)}}{\lambda})$	$3(1 + w_m)/\lambda^2$	$w_m$	$w_m$	$(1 + 3w_m)/2$

Si tomamos en cuenta materia no relativista ( $w_m = 0$ ), entonces la época dominada por materia ( $w_{\text{eff}} \simeq 0$ ,  $\Omega_\phi \ll 1$ ) puede obtenerse sea por (a) o (d). El punto (d) es la llamada *scaling solution* [2, 31], donde la fracción  $\Omega_m/\Omega_\phi$  ( $\neq 0$ ) permanece constante. Para que se logre la época dominada por materia de la *scaling solution*, se necesita que  $\lambda^2 \gg 1$ . Por otro lado, bajo la condición  $\lambda^2 > 2$ , la época de aceleración cósmica ( $w_{\text{eff}} < -1/3$ ) se puede lograr por el punto (c). Esto muestra que la transición del punto (d) al (c) no es posible, pero para  $\lambda^2 < 2$  el sistema puede evolucionar de (a) hacia (c). La era dominada por radiación corresponde al punto (a) con  $w_{\text{eff}} = w_m = 1/3$ .

#### 3.4.1 Análisis de Estabilidad

Para estudiar la estabilidad de los puntos críticos  $(x, y) = (x_c, y_c)$ , consideramos perturbaciones lineales  $\delta x$  y  $\delta y$  alrededor de ellos. Así, las perturbaciones satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dN} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y \end{pmatrix}_{x=x_c, y=y_c} \quad (3.20)$$

donde  $f_1(x, y)$  y  $f_2(x, y)$  son los lados derechos de las ecuaciones de nuestro sistema dinámico. En nuestro caso, con éstas ecuaciones,  $\mathcal{M}$  toma la forma:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y^2 - 1 & (\sqrt{6} - 4x)y \\ -\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 4x)y & 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + x^2 - 6y^2 \end{pmatrix}_{x=x_c, y=y_c} \quad (3.21)$$

Al evaluar en los puntos críticos, obtenemos los eigenvalores mostrados en la Tabla 3.2 de donde se puede obtener la estabilidad de cada uno de los puntos utilizando los criterios de [27] y reproduciendo así lo obtenido en [2, 3].

Así, como se puede ver en las Fig. 3.1, 3.2 y 3.3, la dinámica y la naturaleza de los puntos (a)-(d), cambia según la  $\lambda$  que se escoja en cada caso, llegando algunos inclusive a desaparecer [2].

 TABLA 3.2: Eigenvalores de Quintaesencia con  $\lambda = \text{cte.}$ 

Punto	$\mu_1$	$\mu_2$	Estabilidad
(a)	$(3/2)(w_m - 1)$	$(3/2)(w_m + 1)$	Punto Silla
(b.1)	$3 - (\sqrt{6}/2)\lambda$	$3(1 - w_m)$	Repulsor si $\lambda < \sqrt{6}$ Punto Silla si $\lambda > \sqrt{6}$
(b.2)	$3 + (\sqrt{6}/2)\lambda$	$3(1 - w_m)$	Repulsor si $\lambda > -\sqrt{6}$ Punto Silla si $\lambda < -\sqrt{6}$
(c)	$(\lambda^2 - 6)/2$	$\lambda^2 - 3(1 + w_m)$	Atractor si $\lambda^2 < 3(1 + w_m)$ Punto Silla si $3(1 + w_m) < \lambda^2 < 6$
(d)	$\mu_{d1}$	$\mu_{d2}$	Atractor si $3(1 + w_m) < \lambda^2 < \frac{24(1+w_m)}{9(1+w_m)-2}$ Espiral estable si $\lambda^2 > \frac{24(1+w_m)}{9(1+w_m)-2}$

donde:

$$\mu_{d1} = -\frac{3}{4\lambda} \left[ -\lambda(w_m - 1) + \sqrt{w_m - 1} \sqrt{7\lambda^2 + (3\lambda^2 - 8w_m - 16)w_m - 24} \right]$$

$$\mu_{d2} = \frac{3}{4\lambda} \left[ \lambda(w_m - 1) + \sqrt{w_m - 1} \sqrt{7\lambda^2 + (3\lambda^2 - 8w_m - 16)w_m - 24} \right]$$

Notemos que en todos los casos tomamos  $-1 \leq w_m \leq 1$ . Si dejamos correr  $w_m$  en el rango  $(-\infty, \infty)$  los puntos (a)-(d) pueden ser tanto atractores, como repulsores y puntos silla, pero nos estamos quedando en el rango de materia conocida, bariónica, oscura y radiación. Por ejemplo, el punto (a) puede ser *atractor* si  $w_m \in (-\infty, -1)$  o bien un *repulsor* si  $w_m \in (1, \infty)$ , que claramente son rangos que no se encuentran dentro de la materia conocida.

Si ambos eigenvalores  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de la matriz  $\mathcal{M}$  son negativos, entonces el punto correspondiente es *estable*. Si alguno de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  es negativo, entonces es un *punto silla*. Si ambos  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son positivos, entonces el punto es *inestable*. Cuando  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son complejos, tomamos en cuenta su parte real y entonces son espirales estables o inestables [27].

Los eigenvalores del punto crítico (c) son  $\mu_1 = (\lambda^2 - 6)/2$  y  $\mu_2 = \lambda^2 - 3(1 + w_m)$  [2], así que es estable siempre y cuando se cumpla la condición  $\lambda^2 < 3(1 + w_m)$  para  $0 \leq w_m \leq 1$ . La condición para aceleración cósmica corresponde a  $\lambda^2 < 2$ , en éste caso el punto (c) es estable. Del mismo modo, para el punto (a) sus eigenvalores son  $\mu_1 = (3/2)(w_m - 1)$  y  $\mu_2 = (3/2)(w_m + 1)$ , de manera que este punto es un punto silla para  $0 \leq w_m \leq 1$ . Esto significa que para  $\lambda^2 < 2$ , la solución eventualmente sale del punto (a) para aproximarse al punto atractor (c).

La ecuación de estado de la energía oscura (3.16) para el punto (a) no está determinada, pero en un universo realista,  $x$  e  $y$  no son exactamente cero. La evolución temprana de  $w$  depende de las condiciones iniciales de  $x$  e  $y$ . Si  $x^2 \gg y^2$  o  $x^2 \ll y^2$ , tenemos que  $w \simeq 1$  o  $w \simeq -1$ , respectivamente. Finalmente, la solución se aproxima al valor constante  $w = \lambda^2/3 - 1$ . Ya que  $w$  es dinámica y cambia de esta manera, el modelo de quintaesencia con el potencial exponencial es distinguible del modelo  $\Lambda$ CDM.

Para modelos de quintaesencia en los que  $\lambda$  no es constante, el sistema dinámico no es cerrado. En estos casos la situación se complica, pero es posible encontrar soluciones analíticas para  $w$  clasificando potenciales de quintaesencia según la evolución de  $w$ .

Notemos que como la solución dominada por el campo escalar es un atractor futuro para  $\lambda^2 < 3(1 + w_m)$ , la existencia de ese campo escalar en el presente está descartada, a menos que su densidad de energía haya sido suprimida casi por completo con respecto al valor atractor ( $\Omega_\phi = 1$ ) para la mayor parte de la era dominada por polvo donde  $w_m = 0$ . Sin embargo, esos modelos han sido considerados posibles como *modelos de constante cosmológica que decae* [29, 31, 35].

La propiedades peculiares de la *scaling solution*, que se ven como un atractor en el futuro para el potencial exponencial con  $\lambda^2 > 3(1 + w_m)$ , no son del todo novedosas pero ameritan una mayor investigación [2, 3, 29].

Una posibilidad podría ser que el campo escalar con un potencial exponencial pueda absorber una cantidad significativa de la densidad de energía de nuestro universo de hoy en día, pues la presión efectiva del campo escalar mimetiza el polvo sin presión y su efecto dinámico sería exactamente el mismo que la materia oscura fría. Por ejemplo, si  $\lambda = 3$  entonces esperamos  $\Omega = 1/3$  hoy [2].

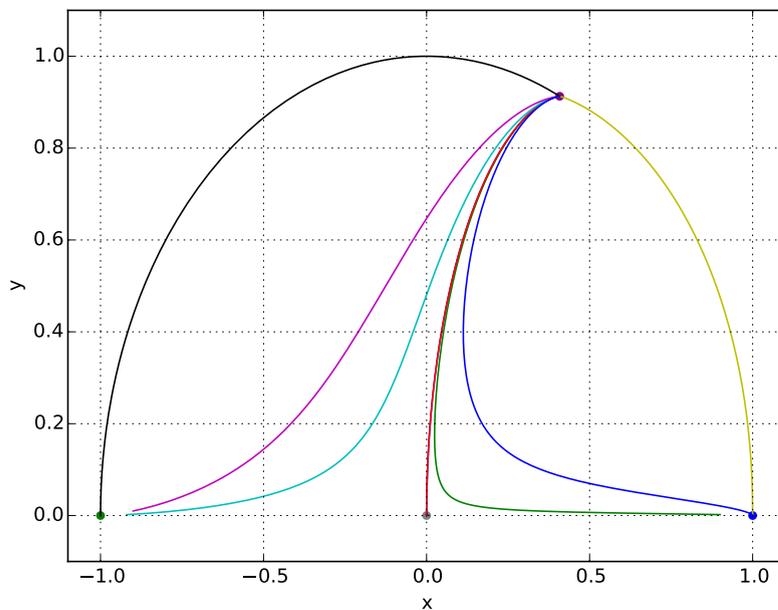


FIGURA 3.1: Espacio fase cuando  $\lambda = 1$ . El atractor futuro es el punto dominado por campo escalar en  $x = \sqrt{1/6}$ ,  $y = \sqrt{5/6}$ .

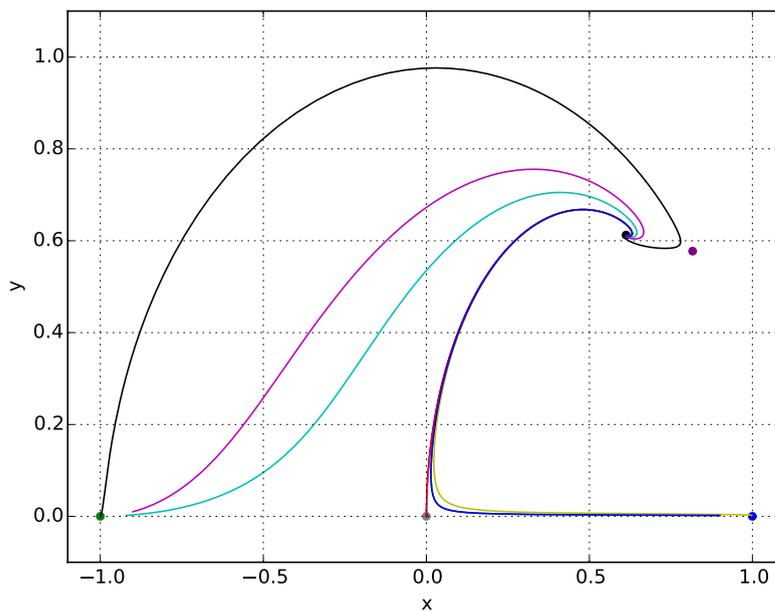


FIGURA 3.2: Espacio fase cuando  $\lambda = 2$ . El punto donde el universo está dominado por el campo escalar es un punto silla en  $x = \sqrt{2/3}$ ,  $y = \sqrt{1/3}$  y el atractor es la *scaling solution* en  $x = y = \sqrt{3/8}$ .

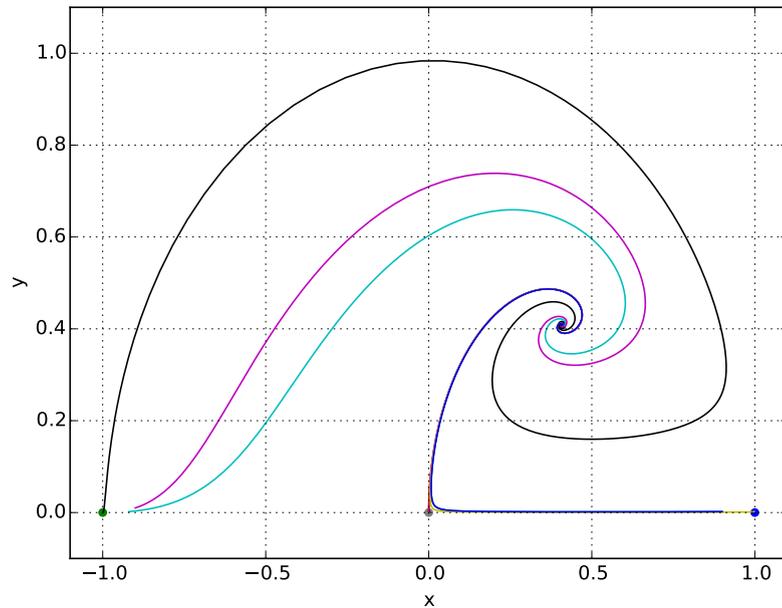


FIGURA 3.3: Espacio fase cuando  $\lambda = 3$ . Aquí el atractor futuro de la *scaling solution* es un espiral estable con  $x = y = \sqrt{1/6}$ .

### 3.5 Quintaesencia con $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$

En este caso, nuestra  $\lambda$  ya no es constante por (3.19), de hecho toma la forma:

$$\lambda = -\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} = \frac{p}{\phi} \quad (3.22)$$

Por lo que es necesario, para evitar tener  $\phi$  en nuestro sistema, definir una nueva variable  $\Gamma$  definida de la siguiente manera [3]:

$$\Gamma = V \frac{d^2V}{d\phi^2} \left( \frac{dV}{d\phi} \right)^{-2} = \frac{V(V_{,\phi\phi})}{(V_{,\phi})^2} \quad (3.23)$$

que en nuestro caso toma la forma  $\Gamma = 1 + \frac{1}{p} > 1$ .

Ahora bien, como  $\lambda$  ya no es una constante, debemos tomarla en cuenta en nuestro sistema dinámico, volviendo a tomar las variables como en (3.14), solamente aumentando como nuestra nueva variable  $\lambda$ , y derivándola con respecto a  $N \equiv \ln a$ , nuestro sistema dinámico para este potencial de Ley de Potencias, deja de ser dos-dimensional y ahora se aumenta la dimensión de  $\lambda$ , tomando la siguiente forma:

---


$$\begin{aligned}\frac{dx}{dN} &= -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}x \left[ (1 - w_m)x^2 + (1 + w_m)(1 - y^2) \right] \\ \frac{dy}{dN} &= -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y \left[ (1 - w_m)x^2 + (1 + w_m)(1 - y^2) \right] \\ \frac{d\lambda}{dN} &= -\sqrt{6}\lambda^2 x (\Gamma - 1)\end{aligned}$$


---

donde se puede ver que si  $\Gamma = 1$  recuperamos el caso exponencial de antes.

Volviendo a hacer el análisis para encontrar los puntos críticos del mismo modo que con el potencial exponencial, obtenemos que los puntos críticos son aquellos mostrados en la Tabla 3.3.

TABLA 3.3: Puntos críticos de Quintaesencia con  $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$

	Punto	$\Omega_\phi$	$w_\phi$	$w_{\text{eff}}$	$q$
(a)	$(0, 0, \lambda)$	0	indef.	$w$	$(1 - 3w)/2$
(b)	$(0, 0, 0)$	0	indef.	$w$	$(1 - 3w)/2$
(c.1)	$(-1, 0, 0)$	1	1	1	0
(c.2)	$(1, 0, 0)$	1	1	1	0
(d)	$(0, 1, 0)$	1	-1	-1	0

Como se puede ver, el “punto” (a) en realidad no es un punto, sino una línea recta con una infinidad de puntos. Del hecho de que  $\Gamma = 1 + \frac{1}{p}$  se puede ver la gran dependencia que tiene el sistema del parámetro  $p$ , ya que mientras mayor sea, comienzan a deformarse las trayectorias, como se puede ver en las figuras 3.5 y 3.6 a diferencia de la figura 3.4 donde las trayectorias son más homogéneas. Claramente, cuando  $p \rightarrow \infty$  se tiene que  $\Gamma \rightarrow 1$  y recuperamos quintaesencia usual, sobre los planos donde  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$  y  $\lambda = 3$ , como se ve en la figura 3.7.

### 3.5.1 Análisis de Estabilidad

El análisis de estabilidad dos-dimensional está bien estudiado y clasificado [27], pero en el caso de mayores dimensiones no se pueden generalizar resultados puesto que hay más grados de libertad y es muy sencillo caer en el caos. En éste caso de la Ley de Potencias, al igual que en Quintaesencia con  $\lambda$  constante, podemos obtener los eigenvalores de la matriz  $\mathcal{M}$  dada como en (3.20) y se pueden ver en la tabla 3.4. Como se puede ver ahí, todos los puntos (a)-(d) tienen al menos un eigenvalor igual a cero, lo que significa que

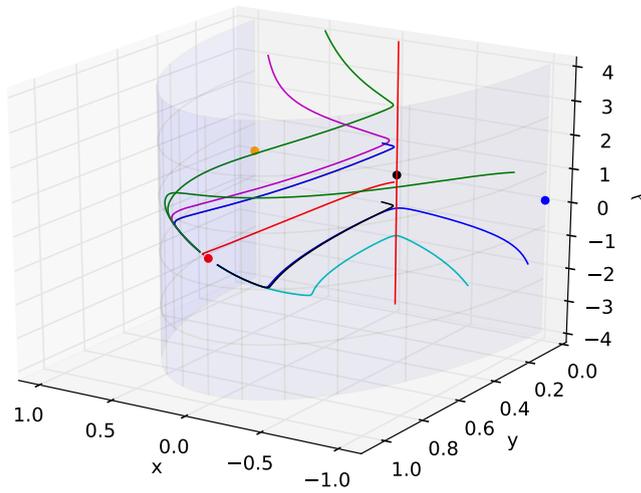


FIGURA 3.4: Espacio fase con  $p = 2$ .

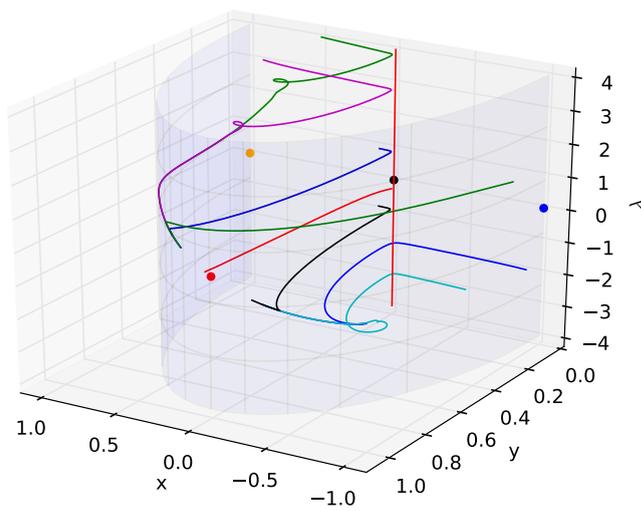


FIGURA 3.5: Espacio fase con  $p = 50$ .

son puntos fijos *no-hiperbólicos*, de manera que el estudio usual para la estabilidad no es del todo posible, para este caso, utilizamos la **Estabilidad de Lyapunov** [27].

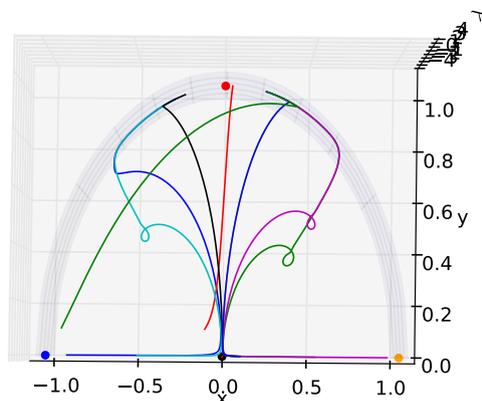


FIGURA 3.6: Espacio fase con  $p = 50$  mostrado desde la parte superior para que sea posible ver cómo se deforman las trayectorias dependiendo de  $p$ .

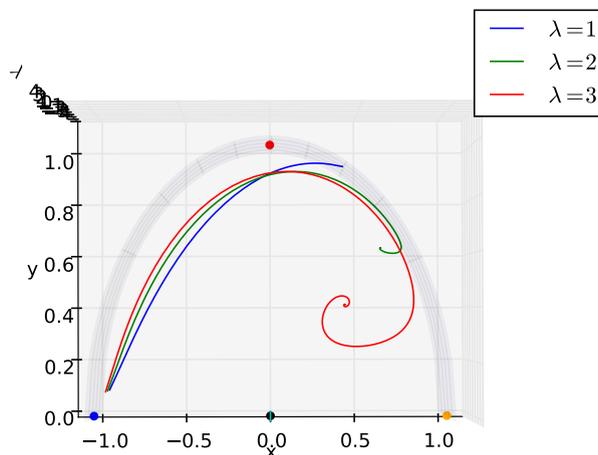


FIGURA 3.7: Espacio fase con  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$  y  $\lambda = 3$  cuando  $p \rightarrow \infty$ .

TABLA 3.4: Eigenvalores de Quintaesencia con  $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$

Punto	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
(a)	0	$3(w - 1)/2$	$3(w + 1)/2$
(b)	0	$3(w - 1)/2$	$3(w + 1)/2$
(c.1)	3	0	$3(1 - w)$
(c.2)	3	0	$3(1 - w)$
(d)	-3	0	$-3(1 + w)$

Para clasificar los puntos fijos no-hiperbólicos utilizamos la siguiente *función de Lyapunov*<sup>1</sup>:

$$V(\mathbf{x}) = V(x, y, \lambda) = \alpha x + \beta \frac{(y-1)}{y} + \gamma \lambda \quad (3.24)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son constantes cualesquiera. En el punto (d), tenemos  $V(\mathbf{x}_0) = 0$ , una de las condiciones de las funciones de Lyapunov, por lo que es nuestro candidato a ser un atractor (punto estable). Ahora bien, necesitamos calcular la estabilidad de nuestros puntos, para eso, de la condición  $V^*(\mathbf{x}_0) = DV(\mathbf{x}_0) \cdot f(\mathbf{x}_0) \leq 0$  en una bola de radio  $\delta$  centrada en el punto fijo,  $\mathcal{B}_\delta(\mathbf{x}_0)$ , podemos obtener restricciones para los valores de  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , primero que nada, se necesita que  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , así como lo siguiente:

$$0 < p < 1 \quad \gamma \geq -\frac{[243(2w + 3\sqrt{6} - 20)\alpha - 100(54w + \sqrt{6} - 60)\beta]p}{18\sqrt{6}(p-1)} \quad (3.25)$$

$$p = 1 \quad \beta \leq \frac{243(2w + 3\sqrt{6} - 20)\alpha}{\sqrt{6} - 60 - 54w} \quad (3.26)$$

$$p > 1 \quad \gamma \leq -\frac{[243(2w + 3\sqrt{6} - 20)\alpha - 100(54w + \sqrt{6} - 60)\beta]p}{18\sqrt{6}(p-1)} \quad (3.27)$$

donde hemos restringido que  $-1 \leq w \leq 1$ . Por simplicidad para el estudio, tomamos  $\alpha = 1$  y  $w = 0$ , obteniendo que  $\beta \leq (4860 - 729\sqrt{6})/(6000 - 100\sqrt{6}) \approx 0.534195$ , por lo que  $\beta = 1/2$  funciona. Y con estos valores, obtenemos que podemos tomar el valor de

$$\gamma \approx \frac{(310\sqrt{6} - 679)p}{18(p-1)}$$

debemos notar que cuando  $p = 1$  no tenemos restricciones sobre  $\gamma$ , asimismo en los casos cuando  $p > 1$  o  $p < 1$  las restricciones son sobre  $\gamma$  solamente sin importar el valor de  $\beta$ , así, nuestros valores de  $\gamma$  y de  $\beta$  funcionan para cualquier  $p$ .

Habiendo hecho esto, nuestra función de Lyapunov toma la forma:

$$V(\mathbf{x}) = x + \frac{y-1}{2y} + \frac{(310\sqrt{6} - 679)p}{18(p-1)} \lambda \quad (3.28)$$

de donde se puede ver la fuerte dependencia en  $p$  del sistema. Ahora bien, con la ecuación (3.28) ya podemos determinar la estabilidad de nuestros puntos críticos utilizando  $V^*(\mathbf{x})$ <sup>2</sup>, como se ve en la tabla 3.5.

<sup>1</sup>Una explicación más detallada se encuentra en el Apéndice A.

<sup>2</sup>Dependiendo de su signo, se sabe la estabilidad del punto.

TABLA 3.5: Estabilidad de Quintaesencia con  $V(\phi) = M^{4+p}\phi^{-p}$ 

Punto	$V^*(\mathbf{x})$	Estabilidad
(a)	$> 0$	Inestable si $\lambda \in \mathbb{R}$
	$= 0$	<i>Estable</i> si $\lambda \in \mathbb{C}$
(b)	$> 0$	Inestable
(c.1)	$> 0$	Inestable
(c.2)	$> 0$	Inestable
(d)	$\leq 0$	Estable

donde hemos tomado

$$V^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{py} \left\{ -\frac{3}{2}p(1+w)y^2 + py^3 [\sqrt{6}z - 3(w+1)x] + \frac{1}{2}p [3(w+1) - 3(w-1)x^2 - \sqrt{6}xz] \right. \\ \left. + xy \left[ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(310\sqrt{6} - 679)pz^2 - 3p(w-1)(x^2 - 1) \right] \right\}$$

Notemos que la estabilidad según Lyapunov convierte al punto en un atractor si  $V^*(\mathbf{x}) \leq 0$ , y la inestabilidad en un punto silla o repulsor si  $V^*(\mathbf{x}) > 0$ , lo cual concuerda con lo que se observa en las simulaciones numéricas que se muestran en las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 en donde el punto dominado por la energía potencial del campo escalar.

Cabe resaltar que esto es una aproximación dado que no hay una teoría generalizada al estudio de estabilidad en tres dimensiones.

## Capítulo 4

# Energía y Materia Oscura Interactuantes

Existe un gran número de propuestas para describir materia oscura y energía oscura, pero la mayoría de ellas asume que estas componentes no interactúan y las tratan como fluidos. Sin embargo, no existen argumentos teóricos que prohíban tal interacción ni tampoco lo impiden las observaciones, así que es natural estudiar la situación general donde la materia oscura y la energía oscura están acopladas y, con suerte, esto puede permitir entender mejor la naturaleza de estas componentes. De hecho, las densidades de energía que se ven hoy en día, sugieren que debe haber una conexión entre ellas.

Asumamos un universo formado por cuatro componentes: un fluido de materia bariónica ( $b$ ), un fluido de radiación ( $r$ ), un fluido para la materia oscura ( $DM$ ) y un fluido para la energía oscura ( $DE$ ). Aún más, todas estas componentes se encuentran interactuando gravitacionalmente y adicionalmente solamente las componentes oscuras interactúan de manera no gravitacional a través del intercambio de energía mediado por un término de interacción [36].

Las ecuaciones de movimiento o las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left[ T_{\mu\nu}^b + T_{\mu\nu}^{DM} T_{\mu\nu}^{DE} \right] \quad (4.1)$$

donde las ecuaciones de movimiento para cada fluido son:

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^b = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^r = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DM} = -F_\mu \quad (4.4)$$

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DE} = F_\mu \quad (4.5)$$

donde el tensor de energía momento respectivo para cada fluido  $i$  está definido por ( $i = b, r, DM, DE$ ):

$$T^i_{\mu\nu} = \rho_i u_\mu u_\nu + (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) p_i \quad (4.6)$$

aquí  $u_i$  es la velocidad de los fluidos (asumiendo que es igual para cada uno),  $\rho_i$  y  $p_i$  son la densidad y la presión del fluido  $i$  respectivamente medidas por un observador con velocidad  $u^\mu$ .  $F_\mu$  es el cuadrivector de interacción entre el sector oscuro y su forma no es conocida *a priori* porque en general no tenemos una teoría fundamental, en caso de existir alguna, para predecir su estructura.

Proyectamos las ecuaciones (4.2)–(4.5) en una parte paralela a la velocidad  $u^\mu$ :

$$u^\mu \nabla^\nu T^b_{\mu\nu} = 0 \quad (4.7)$$

$$u^\mu \nabla^\nu T^r_{\mu\nu} = 0 \quad (4.8)$$

$$u^\mu \nabla^\nu T^{DM}_{\mu\nu} = -u^\mu F_\mu \quad (4.9)$$

$$u^\mu \nabla^\nu T^{DE}_{\mu\nu} = u^\mu F_\mu \quad (4.10)$$

y en otra parte ortogonal a la velocidad utilizando el proyector  $h_{\beta\mu} = g_{\beta\mu} + u_\beta u_\mu$  actuando sobre la hipersuperficie ortogonal a la velocidad  $u^\mu$ :

$$h^{\mu\beta} \nabla^\nu T^b_{\mu\nu} = 0 \quad (4.11)$$

$$h^{\mu\beta} \nabla^\nu T^r_{\mu\nu} = 0 \quad (4.12)$$

$$h^{\mu\beta} \nabla^\nu T^{DM}_{\mu\nu} = -h^{\mu\beta} F_\mu \quad (4.13)$$

$$h^{\mu\beta} \nabla^\nu T^{DE}_{\mu\nu} = h^{\mu\beta} F_\mu \quad (4.14)$$

usando (4.6) en (4.7)–(4.10) obtenemos las ecuaciones de conservación de masa y energía para cada fluido:

$$u^\mu \nabla_\mu \rho_b + (\rho_b + p_b) \nabla_\mu u^\mu = 0 \quad (4.15)$$

$$u^\mu \nabla_\mu \rho_r + (\rho_r + p_r) \nabla_\mu u^\mu = 0 \quad (4.16)$$

$$u^\mu \nabla_\mu \rho_{DM} + (\rho_{DM} + p_{DM}) \nabla_\mu u^\mu = u^\mu F_\mu \quad (4.17)$$

$$u^\mu \nabla_\mu \rho_{DE} + (\rho_{DE} + p_{DE}) \nabla_\mu u^\mu = -u^\mu F_\mu \quad (4.18)$$

por otro lado, usando (4.6) en (4.11)–(4.14) obtenemos las ecuaciones de Euler para cada fluido:

$$h^{\mu\beta}\nabla_{\mu}p_b + (\rho_b + p_b)u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\beta} = 0 \quad (4.19)$$

$$h^{\mu\beta}\nabla_{\mu}p_r + (\rho_r + p_r)u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\beta} = 0 \quad (4.20)$$

$$h^{\mu\beta}\nabla_{\mu}p_{DM} + (\rho_{DM} + p_{DM})u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\beta} = h^{\mu\beta}F_{\mu} \quad (4.21)$$

$$h^{\mu\beta}\nabla_{\mu}p_{DE} + (\rho_{DE} + p_{DE})u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\beta} = -h^{\mu\beta}F_{\mu} \quad (4.22)$$

Finalmente, podemos cerrar el sistema de ecuaciones asumiendo las siguientes ecuaciones de estado para las componentes bariónica, de materia oscura y de radiación respectivamente:

$$p_b = 0 \quad (4.23)$$

$$p_{DM} = 0 \quad (4.24)$$

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r \quad (4.25)$$

mientras que para la energía oscura asumimos una ecuación de estado con un parámetro  $w$  constante:

$$p_{DE} = w\rho_{DE} \quad (4.26)$$

## 4.1 Ecuaciones de movimiento Cosmológicas para Energía Oscura interactuante con Materia Oscura

Asumimos que la métrica de fondo está descrita por la métrica plana de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) descrita por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (4.27)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala y  $t$  es el tiempo cósmico.

En estas coordenadas escogemos la cuadrivelocidad normalizada

$$u^{\mu} = (1, 0, 0, 0) \quad (4.28)$$

de modo que tenemos:

$$\nabla_{\mu}u^{\mu} = 3\frac{\dot{a}}{a} \equiv 3H \quad (4.29)$$

$$u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\beta} = 0 \quad (4.30)$$

donde  $H$  es el parámetro de Hubble y el punto significa la derivada con respecto al tiempo cósmico. En congruencia con las simetrías de isotropía espacial y homogeneidad para el espacio tiempo de FLRW, las densidades y presiones de los fluidos dependen únicamente del tiempo cósmico,  $\rho_i(t)$ ,  $p_i(t)$  y, al mismo tiempo, las componentes paralelas y ortogonales del cuadvivector de interacción con respecto a la velocidad son respectivamente:

$$u^\mu F_\mu = Q(a) \quad (4.31)$$

$$h^{\mu\beta} F_\mu = 0 \quad (4.32)$$

donde  $Q(a)$  se conoce como la función de interacción que depende del factor de escala. Utilizando las ecuaciones de estado (4.23)–(4.26), la métrica (4.27) y las expresiones (4.28)–(4.32) en las ecuaciones de conservación de masa y energía para los fluidos (4.15)–(4.18) se obtiene:

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \quad (4.33)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (4.34)$$

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + p_{DE}) = Q \quad (4.35)$$

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = -Q \quad (4.36)$$

Por otro lado, las ecuaciones de Euler (4.19)–(4.22) se satisfacen de la misma manera, pero no producen ninguna nueva ecuación.

De momento, solamente utilizaremos las ecuaciones de conservación de masa y energía en el sector oscuro, sin tomar en cuenta la materia bariónica ( $b$ ) ni la radiación ( $r$ ), así, nos concentraremos en el estudio de describir la interacción de la materia oscura y la energía oscura con un intercambio de energía  $Q$  en las ecuaciones de conservación:

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + p_{DE}) = Q \quad (4.37)$$

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = -Q \quad (4.38)$$

donde  $\rho_{DE}$  y  $\rho_{DM}$  son la densidad de energía de la energía oscura y de la materia oscura, respectivamente.

Uno podría estudiar esta interacción fenomenológicamente sin hacer ninguna hipótesis acerca de la naturaleza del sector oscuro y tratando de manera directa ambos como si fueran un fluido de dos componentes. El acoplamiento  $Q$  usualmente se toma de la forma  $Q = \delta_{DE}H\rho_{DE} + \delta_{DM}H\rho_{DM}$ , donde  $H$  es el parámetro de expansión del Universo

y los  $\delta_i$  son los términos de acoplamiento. Éste tratamiento se encuentra, por ejemplo, en los estudios observacionales de [37, 38].

Los modelos de unificación conectan naturalmente las dos componentes oscuras. Un modelo muy bien estudiado de este tipo de modelos es el modelo del gas de Chaplyngin y sus generalizaciones [39–41], donde la materia oscura y la energía oscura se describen como un solo fluido con una ecuación de estado dada por:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad (4.39)$$

donde  $A$  es un parámetro positivo y  $0 \leq \alpha \leq 1$  ( $\alpha = 1$  para el modelo de Chaplyngin original). La unificación se ve en la solución de la ecuación de conservación:

$$\rho(a) = \left[ A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (4.40)$$

donde  $B$  es una constante de integración. Para tiempos pequeños, la expresión es bien aproximada por  $\rho(a) \propto a^{-3}$ , describiendo así materia no relativista, mientras que para tiempos más grandes se aproxima a una constante, representando en este caso la energía oscura. Estas dos componentes pueden ser separadas en  $\rho_{DE}$  y  $\rho_{DM}$ . Aún más, se puede llegar a una ecuación explícita para la interacción entre las componentes oscuras de la ecuación de estado de la energía oscura [42]:

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = -\dot{\rho}_{DE} \quad (4.41)$$

Un mapeo entre el modelo del Gas de Chaplyngin Generalizado (GCG) y la interacción discutida anteriormente se puede ver en [37].

Un camino alternativo para estudiar la interacción asume que la energía oscura se describe mediante un campo escalar  $\phi$  y que se encuentra en interacción con un fluido, el tan llamado *Modelo de Quintaesencia interactuante*. Los modelos de [43, 44], inspirados por las modificaciones de la gravedad de Brns-Dicke, usan una interacción en que el acoplamiento se escoge

$$Q = f(\phi)\dot{\phi}\rho_b \quad (4.42)$$

donde  $f(\phi)$  es una función genérica del campo y  $\rho_b$  es la densidad de energía del fluido con el que se interactúa. Un mecanismo similar es el del modelo camaleón [45]. En estos casos, el campo interactúa con todas las otras componentes de Universo, dando así efectos observables en pruebas de la gravedad del sistema solar. Sin embargo, pueden ser modificadas fácilmente para tener solamente interacción [46] desarrolla ésta aproximación, con un potencial exponencial y una interacción derivada de una *scaling solution*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Véase la sección 3.3 del Capítulo 3

Existen otro tipo de aproximaciones para atacar las interacciones entre materia y energía oscura tomando ambos como campos, abandonando así la necesidad de fluidos en el tratamiento de estas componentes. Usualmente se utilizan dos campos nuevos,  $\phi$  para la energía oscura y  $\chi$  para la materia oscura. Para ver más acerca de este tipo de estudio, se puede ver [47–49].

En esta tesis, tomamos el modelo en que tratamos la energía oscura mediante un campo escalar  $\phi$  y hacemos el cambio de  $\rho_b$  por  $\rho_{DM}$ , tomando como referencia la interacción del tipo Yukawa descrita en [1].

## 4.2 Modelo de Interacción

Consideremos el sector oscuro con un campo escalar canónico  $\phi$  que representa la energía oscura y un campo fermiónico que representa la materia oscura, todo descrito por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) - m(\phi)\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_K[\psi] \quad (4.43)$$

donde  $V(\phi)$  es el potencial del campo escalar, que en principio, puede tener cualquier forma funcional,  $\mathcal{L}_K$  es la parte cinética de la parte fermiónica del Lagrangiano y  $m(\phi)$  es la masa fermiónica efectiva, que para el modelo mostrado en [1], está dado por

$$m(\phi) = M - \beta\phi \quad (4.44)$$

donde  $M$  es la masa fermiónica y  $\beta$  es la constante de acoplamiento de Yukawa. De ahora en adelante tomamos la métrica de un Universo plano de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

### 4.2.1 Interacción tipo Yukawa

De las ecuaciones de conservación (4.37) y (4.38) tenemos la función genérica  $Q$  que representa el intercambio de energía en el sector oscuro, ésta  $Q$  está relacionada con la masa fermiónica efectiva que aparece en el Lagrangiano por la relación [1, 50, 51]:

$$Q_\mu = -\frac{\partial \ln m(\phi)}{\partial \phi} \rho_\phi \nabla_\mu \phi \quad (4.45)$$

de aquí que el modelo que consideramos es el dado por [1]:

$$Q = \frac{\beta}{M - \beta\phi} \rho \dot{\phi} = \frac{r}{1 - r\phi} \rho \dot{\phi} \quad (4.46)$$

donde se define  $r \equiv \beta/MM_{\text{pl}}$ , se normaliza todo con la masa reducida de Planck  $M_{\text{pl}} = 1/\sqrt{8\pi G}$ , donde  $G$  es la constante de gravitación y hemos cambiado la notación de la densidad de energía por  $\rho_\phi$  y simplemente  $\rho$  para la energía oscura y la materia oscura, respectivamente. De (4.46) se ve que la interacción  $\beta$  y la masa fermiónica  $M$  están degeneradas, así que no podemos saber ambos a la vez, solamente su razón  $r$ , por lo cual usamos  $r$  como nuestro parámetro de interacción en lugar de  $\beta$ .

### 4.2.2 Ecuaciones Básicas

Las ecuaciones, al igual que en el Capítulo 3 provienen de las ecuaciones de Friedmann (2.1) y (2.2) donde se toma en cuenta ahora que  $k = 0$  y que nuestra energía oscura no está dada por  $\Lambda$  sino por nuestro campo escalar  $\phi$ .

Considerando que el sector oscuro del Universo respeta las características del modelo [1], las ecuaciones de conservación serían, para todas las componentes del Universo, las siguientes:

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (4.47)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \quad (4.48)$$

$$\dot{\rho} + 3H\rho = -\frac{r}{1-r\phi}\rho\dot{\phi} \quad (4.49)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1+w)\rho_\phi = \frac{r}{1-r\phi}\rho\dot{\phi} \quad (4.50)$$

donde  $\rho_r$  y  $\rho_b$  son las densidades de energía de radiación y materia bariónica usual, donde no hay interacción. Como la ecuación de estado para  $w$  de la energía oscura y la interacción  $Q$  dependen del campo escalar  $\phi$  y su derivada  $\dot{\phi}$ , tenemos que utilizar la ecuación de Klein-Gordon (3.6) y modificarla para describir completamente nuestra componente de energía oscura:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = \frac{r}{1-r\phi}\rho \quad (4.51)$$

### 4.2.3 Ecuaciones de Evolución

Para nuestro estudio, estaremos enfocándonos solamente en el sector oscuro del Universo, es decir, las únicas componentes que tomaremos en cuenta serán la materia y la energía oscura, dejando fuera del estudio la materia bariónica y la radiación.

Del mismo modo que en el Capítulo 3 escogemos las variables óptimas para reescribir nuestras ecuaciones como un sistema dinámico, y éstas, de manera análoga a (3.14) son:

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_{\text{pl}}H} \quad y \equiv \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}M_{\text{pl}}H} \quad z \equiv \frac{M_{\text{pl}}}{\phi} \quad (4.52)$$

tomando las derivadas con respecto a  $N \equiv \ln a$  y tomando en cuenta (4.51) nuestro sistema dinámico toma la forma:

---


$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{zr}{z-r} (1-x^2-y^2) - 3x + \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda y^2 + \frac{3}{2} x \left[ (1-w)x^2 + (1+w)(1-y^2) \right] \\ \frac{dy}{dN} &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda xy + \frac{3}{2} y \left[ (1-w)x^2 + (1+w)(1-y^2) \right] \\ \frac{dz}{dN} &= -\sqrt{6} z^2 x \end{aligned}$$


---

donde  $\lambda = -V_{,\phi}/V$ ,  $r$  es nuestra constante de acoplamiento de Yukawa y  $w$  es el parámetro de la ecuación de estado con la cual está interactuando nuestro campo escalar, es decir, es la manera general donde no solo estamos tomando en cuenta la materia oscura, sino podríamos, en principio, escoger radiación o algún otro tipo de fluido exótico.

Como se puede observar, la constante de interacción  $r$  solamente aparece en el término de  $dx/dN$ , por lo que se esperaría que modificara la dinámica sobre esta dirección. El término de  $dy/dN$  es el mismo que en el sistema dinámico del capítulo 3 y puede observarse que del término de  $dz/dN$ , cuando aumenta  $z$  éste tiende a irse al plano  $xy$ , por lo que mientras mayor sea  $z$  (*i.e.* menor sea nuestro campo  $\phi$  por la definición (4.52) de nuestras variables) más rápido estaremos cerca del plano  $xy$ .

De la misma manera que en el capítulo anterior, los puntos críticos pueden obtenerse haciendo  $dx/dN = dy/dN = dz/dN = 0$ , y se tiene que los puntos críticos son:

TABLA 4.1: Puntos críticos de Quintaesencia con acoplamiento de Yukawa &  $\lambda = \text{cte.}$

	Punto	$\Omega\phi$	$w_\phi$	$w_{\text{eff}}$	$q$
(a)	(0, 0, 0)	0	indef.	$w$	$(1-3w)/2$
(b.1)	(-1, 0, 0)	1	1	1	0
(b.2)	(1, 0, 0)	1	1	1	0
(c)	$(\frac{\lambda}{\sqrt{6}}, \sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}, 0)$	1	$\frac{\lambda^2}{3} - 1$	$\frac{\lambda^2}{3} - 1$	$(\lambda^2 - 3)/2\lambda^2$
(d)	$(\frac{\sqrt{6}(1+w)}{\lambda}, \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(1-w^2)}}{\lambda}, 0)$	$3(1+w)/\lambda^2$	$w$	$w$	$q_d$

donde

$$q_d = -\frac{(3w-1)[\lambda^2 - 3(w+1)]}{2\lambda^2}$$

de donde se tiene que es posible la aceleración en los puntos (a), (c) y (d). En el punto (a) se tiene aceleración si  $w > 1/3$ , que no está descartado pues restringimos nuestro estudio en  $-1 \leq w \leq 1$ . Algún fluido con  $w \approx 1$  haría que el punto (a) fuese acelerante. El punto (c) tendría aceleración si  $\lambda^2 < 3$ , asimismo el punto (d) sería acelerante si  $\lambda^2 < 3(1+w)$ . Notemos que, en particular, cuando  $w = 0$  tenemos que es posible una transición entre los puntos (c) y (d).

#### 4.2.4 Análisis de Estabilidad

Para el análisis de estabilidad, podemos obtener los eigenvalores mostrados en la Tabla 4.2, pero del mismo modo que en el capítulo anterior, se tiene que nuestros puntos son no-hiperbólicos[27], de donde tenemos que buscar otra manera para analizarlos, pues la linealización y el Teorema de Hartman-Grobman<sup>2</sup> no pueden ser aplicados aquí.

TABLA 4.2: Eigenvalores de Quintaesencia con acoplamiento de Yukawa &  $\lambda = \text{cte}$ .

Punto	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
(a)	0	$3(1+w)/2$	$3(1+w)/2 - 3$
(b.1)	0	$3 + \sqrt{3/2}\lambda$	$3(1-w)$
(b.2)	0	$3 - \sqrt{3/2}\lambda$	$3(1-w)$
(c)	0	$(\lambda^2 - 6)/2$	$\lambda^2 - 3(1+w)$
(d)	0	$\mu_{2d}$	$\mu_{3d}$

donde

$$\mu_{2d} = \frac{3}{4} \left( w - 1 - \frac{\sqrt{(w-1)[\lambda^2(9w+7) - 24(1+w)^2]}}{\lambda} \right)$$

$$\mu_{3d} = \frac{3}{4} \left( w - 1 + \frac{\sqrt{(w-1)[\lambda^2(9w+7) - 24(1+w)^2]}}{\lambda} \right)$$

Por lo tanto, del mismo modo que en la sección 3.5 del Capítulo 3, utilizamos el Teorema de Estabilidad y Funciones de Lyapunov<sup>3</sup>, en este caso, con el acoplamiento de

<sup>2</sup>Véase el Apéndice A para su formulación y demostración.

<sup>3</sup>Véase el Apéndice A para más detalles.

tipo Yukawa tomamos como función de Lyapunov la siguiente:

$$V(\mathbf{x}) = V(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \quad (4.53)$$

como se ve en el Apéndice A, necesitamos que  $V(\mathbf{x}_0) = 0$  si es un punto fijo, de modo que tenemos como restricción a los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  que:

$$\beta \neq 0 \quad \alpha = \left( \frac{\lambda^2 - 6}{\lambda^2} \right) \beta \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad \lambda < 3 \quad (4.54)$$

$$\beta \neq 0 \quad \alpha = \left( \frac{w-1}{w+1} \right) \beta \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad \lambda \geq 3 \quad (4.55)$$

Utilizando las condiciones anteriores (4.54) y (4.55) tenemos la siguiente función de Lyapunov, tomando por simplicidad,  $\beta = \gamma = 1$ :

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left( \frac{\lambda^2 - 6}{\lambda^2} \right) x^2 + y^2 + z^2 & \text{si } \lambda < 3 \\ \left( \frac{w-1}{w+1} \right) x^2 + y^2 + z^2 & \text{si } \lambda \geq 3 \end{cases} \quad (4.56)$$

TABLA 4.3: Estabilidad de Quintaesencia con acoplamiento de Yukawa

Punto	$V^*(\mathbf{x})$	Estabilidad
(a)	$> 0$	Inestable
(b.1)	$> 0$	Inestable
(b.2)	$> 0$	Inestable
(c)	$\leq 0$	Estable si $\lambda < 3$
	$> 0$	Inestable si $\lambda \geq 3$
(d)	$> 0$	Inestable si $\lambda < 3$
	$\leq 0$	Estable si $\lambda \geq 3$

donde

$$V^*(\mathbf{x}) = 2 \left( \frac{w-1}{w+1} \right) x \left\{ \frac{\sqrt{6}}{2} y^2 \lambda - 3x - \frac{\sqrt{6}(x^2 + y^2 - 1)z}{z-2} - \frac{3}{2} x [x^2(w-1) + (1+w)(y^2-1)] \right\} - 2\sqrt{6}xz^3 - y^2 \left[ \sqrt{6}\lambda x + 3x^2(w-1) + 3(w+1)(y^2-1) \right]$$

### 4.3 Resultados

Los resultados mostrados en la Tabla 4.3 muestran que aún en la presencia de la interacción de tipo Yukawa en el sector oscuro, la dinámica tres-dimensional no difiere de la

dos dimensional analizada en el Capítulo 2, como se puede observar en las Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 de las soluciones numéricas, éstas coinciden con la dinámica de quintaesencia con potencial exponencial con  $\lambda$  constante, confirmando así los resultados obtenidos en [1] donde, utilizando resultados observacionales, se obtiene que tomando en cuenta ésta interacción, los resultados son los mismos que si no existiera interacción alguna dentro del sector oscuro.

### 4.3.1 Consideraciones Analíticas

Cabe mencionar que hay algunas consideraciones que debemos tomar en cuenta, como el hecho de que hemos dejado sin mencionar el análisis de los puntos asintóticos, es decir, al infinito [27], debido a que en el infinito, gracias a nuestra restricción  $1 = x^2 + y^2$  solamente puede estar la variable  $z$  y haciendo un cambio de variable  $z \rightarrow 1/\tilde{z}$ , o bien, lo equivalente  $\tilde{z} = \phi$ , obtenemos un sistema dinámico equivalente al que presentamos antes, solamente que los puntos de  $z$  en infinito están ahora en  $\tilde{z} = 0$ , haciendo así más sencillo su estudio. Así, el sistema dinámico con este cambio para estudiar el comportamiento en infinito, toma la forma:

---


$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{r}{1-r\tilde{z}} (1-x^2-y^2) - 3x + \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda y^2 + \frac{3}{2} x \left[ (1-w)x^2 + (1+w)(1-y^2) \right] \\ \frac{dy}{dN} &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \lambda xy + \frac{3}{2} y \left[ (1-w)x^2 + (1+w)(1-y^2) \right] \\ \frac{d\tilde{z}}{dN} &= \sqrt{6}x \end{aligned}$$


---

de donde podemos observar que si queremos  $\tilde{z} = 0$  entonces tenemos necesariamente  $x = 0$ , pero no hay manera de que  $y$  cumpla los requisitos para que el sistema se haga cero, es decir, para que tengamos  $f(\mathbf{x}_0) = 0$ , de donde se tiene que no hay un punto crítico en el infinito, así, no es necesario añadir éste análisis a nuestro análisis de estabilidad previo.

Del mismo modo, cabe resaltar que nuestra función de Lyapunov (4.20) es una función  $C^\infty(\mathbb{R})$  de modo que cumple de manera inmediata las hipótesis del Teorema de Lyapunov mostrado en A, de manera que es posible determinar la estabilidad de nuestros puntos críticos utilizándola. De cualquier manera, la Estabilidad de Lyapunov es un método efectivo para cuando se tiene un sistema con dimensión  $n > 2$ , con puntos fijos no-hiperbólicos.

### 4.3.2 Soluciones Numéricas

Con la finalidad de poder mostrar de una mejor manera la dinámica del sistema, del mismo modo que en el Capítulo 3, se puede hacer un análisis numérico para corroborar los resultados analíticos, de manera que se puede observar en las siguientes figuras, la dinámica del sistema tres dimensional con el acoplamiento de Yukawa, viendo así que no difiere de gran manera de lo analizado en el Capítulo 2 y en [2, 3].

Notemos que en las figuras 4.1 hasta 4.6 se muestra un medio cilindro, éste es el dominio en el cual se encuentran nuestras soluciones *físicas* del sistema debido a nuestra condición  $1 = x^2 + y^2$ , por lo que se mantiene lo visto en el Capítulo 2, de modo que el único parámetro libre es  $z$  que podría correr hasta infinito, pero el caso cuando  $z \rightarrow \infty$  no es de importancia puesto que ahí no se tiene ningún punto fijo, como se vió en la sección anterior.

Así, nuestras soluciones numéricas muestran un gran ajuste entre las simulaciones numéricas del sistema de Quintaesencia con acoplamiento de Yukawa y la teoría de Lyapunov de estabilidad.

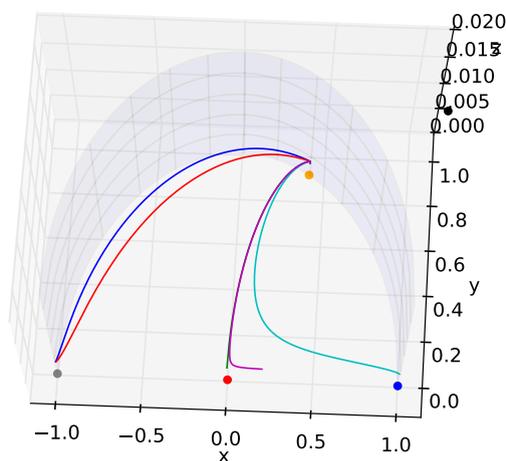


FIGURA 4.1: Espacio fase con  $\lambda = 1$  y  $w = 0$ . Utilizamos una pequeña perturbación en el eje  $z$  que es nuestro acoplamiento de Yukawa,  $\delta z \approx 0.003$ .

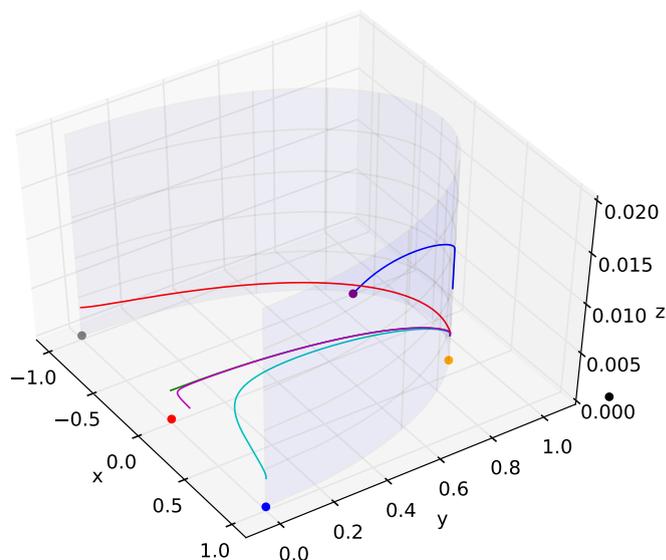


FIGURA 4.2: Espacio fase con  $\lambda = 1$  y  $w = 0$ . Aquí utilizamos una condición inicial  $\mathbf{x} = (0.5, 0.5, 0.012)$  y se puede ver que el flujo aún así tiende a nuestro atractor igual que en [2, 3], de modo que la interacción no afecta la dinámica del sistema, de hecho tiende a decaer para quedarse en Quintaesencia usual. Notemos que la línea del flujo no alcanza a tocar el punto atractor debido al tiempo de cómputo necesario al resolver el sistema por parte de PYTHON.

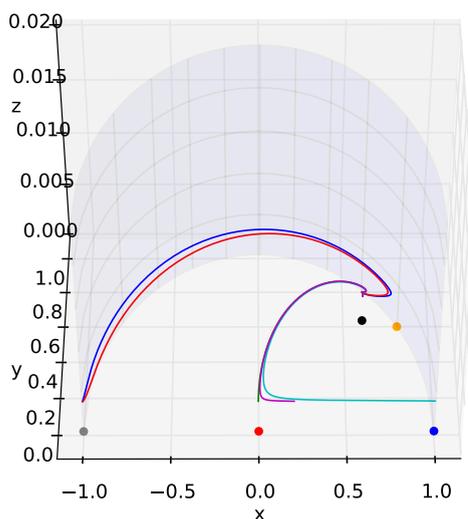


FIGURA 4.3: Espacio fase con  $\lambda = 2$  y  $w = 0$ . Se puede ver que el comportamiento es el mismo que si no existiera interacción.

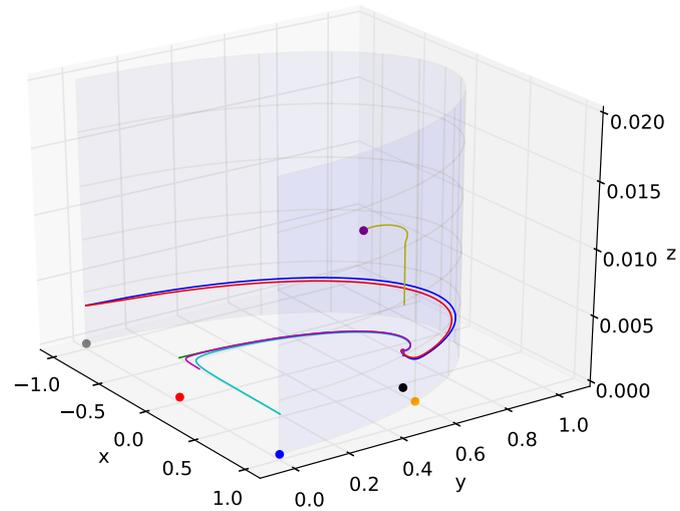


FIGURA 4.4: Espacio fase con  $\lambda = 2$  y  $w = 0$ . Del mismo modo que antes, se utiliza la condición inicial  $\mathbf{x} = (0.5, 0.5, 0.012)$  y se puede observar que el flujo tiende a decaer hacia nuestro punto fijo.

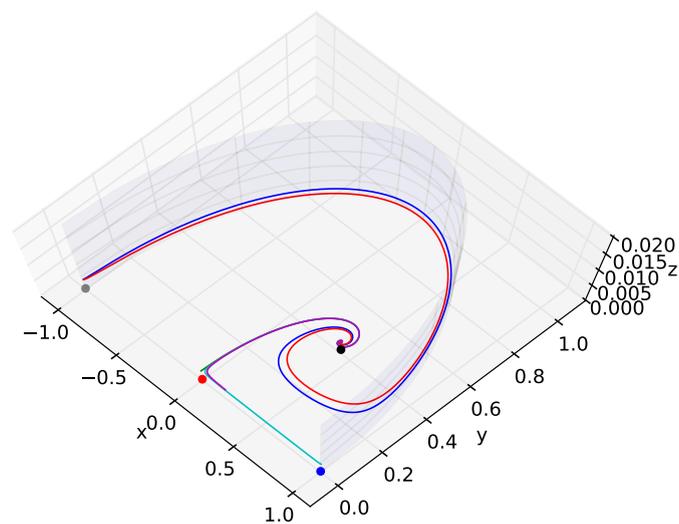


FIGURA 4.5: Espacio fase con  $\lambda = 3$  y  $w = 0$ . Se puede ver que el comportamiento es el mismo que si no existiera interacción.

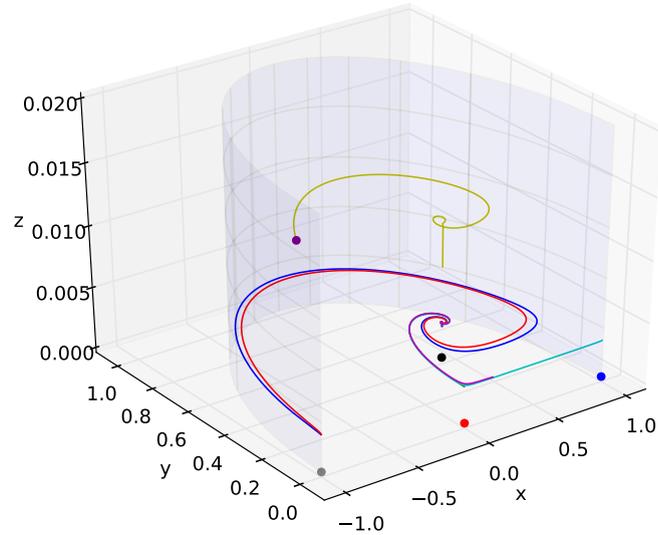


FIGURA 4.6: Espacio fase con  $\lambda = 3$  y  $w = 0$ . En esta figura, para dar énfasis en que la dinámica es equivalente a la dos dimensional estudiada en [2, 3], se utiliza la condición inicial  $\mathbf{x} = (-0.5, 0.5, 0.012)$  y se puede observar que el flujo tiende a decaer hacia nuestro punto fijo que es la *scaling solution*. De nueva cuenta pareciera que nuestro flujo no toca el punto fijo pero esto es debido al tiempo de máquina que maneja PYTHON que es llevado hasta su límite.

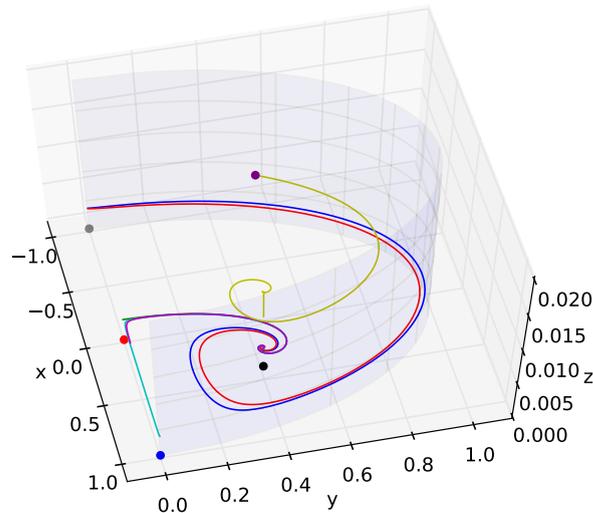


FIGURA 4.7: Espacio fase con  $\lambda = 3$  y  $w = 0$  (rotado). En esta figura, para dar énfasis en que la dinámica es equivalente a la dos dimensional estudiada en [2, 3], se utiliza la condición inicial  $\mathbf{x} = (-0.5, 0.5, 0.012)$  y se puede observar que el flujo tiende a decaer hacia nuestro punto fijo que es la *scaling solution*. De nueva cuenta pareciera que nuestro flujo no toca el punto fijo pero esto es debido al tiempo de máquina que maneja PYTHON que es llevado hasta su límite.



## Capítulo 5

# Conclusiones y Trabajo Futuro

En éste trabajo se estudiaron algunos casos de Quintaesencia con distintos potenciales y con una interacción de tipo Yukawa dentro del sector oscuro. Este estudio tiene como objetivo mostrar cómo se han utilizado los Sistemas Dinámicos en LCDM, visto en el Capítulo 2. Los resultados básicos acerca de la Cosmología de Campo Escalar se muestran en el Capítulo 3 y se concluye que la energía oscura puede ser bien descrita por un campo escalar y se muestran dos tipos distintos de potenciales, donde se ve que los campos escalares tienen propiedades interesantes como las *scaling solutions*.

El modelo de interacción se presentó en el Capítulo 4. A través de éste estudio se pudo observar que la dinámica teniendo un potencial de interacción del tipo Yukawa no cambia los puntos fijos ni la naturaleza del sistema, haciendo que Quintaesencia con un acoplamiento del tipo Yukawa sea muy parecida, casi idéntica a la Quintaesencia usual, sin interacción. Confirmando así lo obtenido en [1], de donde se obtuvo la idea de hacer este análisis en primer lugar.

Se pudo observar que los puntos críticos, a diferencia de otras creencias, no cambian al introducir éste tipo de interacción, de hecho en las figuras 4.1 a 4.6 se puede ver que el sistema tiende a anular la interacción para comportarse como una Quintaesencia usual.

Asimismo, se pudo reafirmar que el estudio de sistemas  $n$ -dimensionales con  $n > 2$  puede hacerse de manera muy eficiente utilizando el Teorema de Estabilidad y las Funciones de Lyapunov, aunque aún no exista un método general para dimensiones mayores, el mostrado en este trabajo es muy eficiente y bastante *accesible* en términos de dificultad.

Como un trabajo futuro estaría el problema de tratar el sistema de Quintaesencia con acoplamiento de tipo Yukawa utilizando otros potenciales, como por ejemplo el de Ley de Potencias visto en el Capítulo 3, para ver si con otro tipo de potencial que no es

---

el exponencial con  $\lambda$  constante, la dinámica del sistema varía o se queda igual, como se pudo ver en este trabajo. Asimismo, se espera poder continuar con el estudio de sistemas dinámicos en otros modelos, para probar su viabilidad y su validez con los datos que se obtendrán a partir de los próximos años con los experimentos que están a punto de comenzar.

# Apéndice A

## Teoremas Matemáticos

Para respaldar las acciones llevadas a cabo en la presente tesis, se utilizan bastantes teoremas matemáticos para el estudio de los sistemas dinámicos [27], los cuales se presentan a continuación.

### A.1 El Teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman es un resultado muy importante en la teoría local cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$ , el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{A.1}$$

tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{A.2}$$

con  $A = \mathbf{D}f(\mathbf{x})$ . Para éste teorema, asumimos que el punto fijo  $\mathbf{x}_0$  ha sido trasladado al origen.

**Definición.** Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales como (A.1) y (A.2) se dice que son *topológicamente equivalentes* en una vecindad del origen o que tienen *la misma estructura cualitativa cerca del origen* si hay un homeomorfismo  $H$  que mapea un conjunto abierto  $U$ , que contiene el origen, a un abierto  $V$ , que contiene el origen, que mapea las trayectorias de (A.1) en  $U$  en trayectorias de (A.2) en  $V$  y preserva la

orientación. Si el homeomorfismo  $H$  preserva la parametrización dada por el tiempo, entonces los sistemas (A.1) y (A.2) se dice que son *conjugados topológicos* en una vecindad del origen.

**Teorema de Hartman-Grobman.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene el origen, sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  y sea  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (A.1). Supóngase que  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y que la matrix  $A = \mathbf{Df}(\mathbf{0})$  no tiene ningún valor propio con parte real nula. Entonces existe un homeomorfismo  $H$  de un conjunto abierto  $U$  que contiene el origen a un conjunto abierto  $V$  que contiene el origen tal que para cada  $\mathbf{x}_0 \in U$ , hay un intervalo  $I_0 \subset \mathbb{R}$  que contiene al cero tal que para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$  y  $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At} H(\mathbf{x}_0)$$

es decir,  $H$  mapea trayectorias de (A.1) cerca del origen a trayectorias de (A.2) cerca del origen y preserva la parametrización.

**Bosquejo de la Demostración.** Considere el sistema no lineal (A.1) con  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $A = \mathbf{Df}(\mathbf{0})$ .

1. Suponga que la matriz  $A$  está escrita en la forma:

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

donde los valores propios de  $P$  tienen parte real negativa y los valores propios de  $Q$  tienen parte real positiva.

2. Sea  $\phi_t$  el flujo del sistema (A.1) y escribamos la solución como

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \phi_t(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) \\ \mathbf{z}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbf{y}_0 \in E^S$ , el subespacio estable de  $A$  y  $\mathbf{z}_0 \in E^U$ , el subespacio inestable de  $A$ .

3. Defina las funciones

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{y}(1, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) - e^P \mathbf{y}_0$$

y

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}(1, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) - e^Q \mathbf{z}_0$$

Entonces  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{0}) = D\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{0}) = D\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{0}) = 0$ . Y como  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  y  $\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  son continuamente diferenciables. Entonces,

$$\|D\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)\| \leq a$$

y

$$\|D\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)\| \leq a$$

en el conjunto compacto  $|\mathbf{y}_0|^2 + |\mathbf{z}_0|^2 \leq s_0^2$ . La constante  $a$  puede ser tomada tan pequeña como se desee escogiendo un  $s_0$  suficientemente pequeño. Tomamos que  $\mathbf{Y}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  y  $\mathbf{Z}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  son funciones suaves que son iguales a  $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  y  $\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  para  $|\mathbf{y}_0|^2 + |\mathbf{z}_0|^2 \leq (s_0/2)^2$  y cero para  $|\mathbf{y}_0|^2 + |\mathbf{z}_0|^2 \geq s_0^2$ . Entonces por el teorema del valor medio

$$|\mathbf{Y}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)| \leq a\sqrt{|\mathbf{y}_0|^2 + |\mathbf{z}_0|^2} \leq a(|\mathbf{y}_0| + |\mathbf{z}_0|)$$

y

$$|\mathbf{Z}(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)| \leq a\sqrt{|\mathbf{y}_0|^2 + |\mathbf{z}_0|^2} \leq a(|\mathbf{y}_0| + |\mathbf{z}_0|)$$

para todo  $(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbb{R}^n$ . Ahora sean  $B = e^P$  y  $C = e^Q$ . Entonces, tenemos que [27]:

$$b = \|B\| < 1 \qquad \text{y} \qquad c = \|C^{-1}\| < 1$$

4. Para

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

defina las transformaciones

$$L(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} B\mathbf{y} \\ C\mathbf{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

y

$$T(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} B\mathbf{y} + \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ C\mathbf{z} + \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

es decir,  $L(\mathbf{x}) = e^A \mathbf{x}$  y localmente  $T(\mathbf{x}) = \phi_t(\mathbf{x})$ .

**Lema.** Existe un *homeomorfismo*  $H$  de un conjunto abierto  $U$  que contiene al origen a otro conjunto abierto  $V$  que contiene el origen tal que

$$H \circ T = L \circ H$$

Éste lema se establece utilizando el método de aproximaciones sucesivas [27].

5. Ahora tomemos  $H_0$  como el homeomorfismo definido en el lema y sean  $L^t$  y  $T^t$  unas familias de transformaciones uniparamétricas definidas así:

$$L^t(\mathbf{x}_0) = e^{At}\mathbf{x}_0 \quad y \quad T^t(\mathbf{x}_0) = \phi_t(\mathbf{x}_0)$$

Defínase

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds$$

Entonces se sigue que usando el lema existe una vecindad del origen para la cual

$$L^t H = H T^t$$

Asimismo, del lema anterior  $H_0 = L^{-1} H_0 T$ , lo que implica que

$$\int_{-t}^0 L^{-s} H_0 T^s ds = \int_{1-t}^1 L^{-s} H_0 T^s ds$$

Entonces,  $H T^t = L^t H$  o equivalentemente

$$H \circ \phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At} H(\mathbf{x}_0)$$

y puede mostrarse como en [27] que  $H$  es un homeomorfismo en  $\mathbb{R}^n$ . Con esto se completa el bosquejo de la demostración del Teorema de Hartman-Grobman.

## A.2 Estabilidad y Funciones de Lyapunov

Discutiendo la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{A.3}$$

la estabilidad de cualquier punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  de (A.3) está determinado por los signos de las partes reales de los eigenvalores  $\lambda_j$  de la matriz  $Df(\mathbf{x}_0)$ . Un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{x}_0$  es asintóticamente estable si y sólo si  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$  para  $j = 1, \dots, n$ ; es decir, si y sólo si  $\mathbf{x}_0$  es un atractor<sup>1</sup>. Un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{x}_0$  es inestable si y sólo si es un repulsor<sup>2</sup> o un punto silla. La estabilidad de puntos de equilibrio **no hiperbólicos** es típicamente más difícil de determinar. Un método, debido a **Lyapunov**, que es muy útil para averiguar la estabilidad de los puntos de equilibrio no hiperbólicos se presenta a continuación.

<sup>1</sup>En algunos textos se refieren a éstos puntos como *sumideros*.

<sup>2</sup>En algunos textos se refieren a éstos puntos como *fuentes*.

**Definición 1.** Sea  $\phi_t$  el flujo de la ecuación diferencial (A.3) definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  de (A.3) es *estable* si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  y  $t \geq 0$  tenemos

$$\phi_t(\mathbf{x}) \in N_\epsilon(\mathbf{x}_0)$$

El punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  es *inestable* si no es estable. El punto  $\mathbf{x}_0$  es *asintóticamente estable* si existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$$

Una consecuencia inmediata de la definición es que *si un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  de (A.3) es asintóticamente estable, entonces  $\mathbf{x}_0$  es estable.*

Del Teorema de Hartman-Grobman y del Teorema de la Variedad Estable [27] se sigue que cualquier atractor de (A.3) es asintóticamente estable y cualquier repulsor o punto silla de (A.3) es inestable. De modo que, *cualquier punto de equilibrio hiperbólico de (A.3) es asintóticamente estable o inestable.*

**Teorema 1.** Si  $\mathbf{x}_0$  es un atractor del sistema no lineal (A.3) y  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0$  para todos los eigenvalores  $\lambda_j$  de la matriz  $Df(\mathbf{x}_0)$ , entonces dado un  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ , el flujo  $\phi_t(\mathbf{x})$  de (A.3) satisface

$$|\phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0| \leq e^{\alpha t}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Como un punto de equilibrio hiperbólico es, ya sea asintóticamente estable o inestable, el único tiempo en el que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  de (A.3) puede ser estable pero no asintóticamente estable es cuando  $Df(\mathbf{x}_0)$  tiene un eigenvalor cero o un par de eigenvalores puramente imaginarios que son complejos conjugados,  $\lambda = \pm ib$ . Se sigue del siguiente teorema [27], que todos los demás eigenvalores  $\lambda_j$  de  $Df(\mathbf{x}_0)$  deben satisfacer  $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$  si  $\mathbf{x}_0$  es estable.

**Teorema 2.** Si  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio estable de (A.3), ninguno de los eigenvalores de  $Df(\mathbf{x}_0)$  tiene una parte real positiva.

Vemos que los puntos de equilibrio estables que no son asintóticamente estables pueden ocurrir solamente en puntos de equilibrio no hiperbólicos. Pero la cuestión de si un punto no hiperbólico es estable, asintóticamente estable o inestable es una pregunta muy delicada. El siguiente método, debido a Lyapunov, es muy útil para contestar esta pregunta.

**Definición 2.** Si  $f \in C^1(E)$ ,  $V \in C^1(E)$  y  $\phi_t$  es el flujo de la ecuación diferencial (A.3), entonces para  $\mathbf{x} \in E$  la derivada de la función  $V(E)$  a lo largo de la solución  $\phi_t(\mathbf{x})$  es

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} V(\phi_t(\mathbf{x})) \Big|_{t=0} = DV(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$$

La última igualdad viene de la regla de la cadena. Si  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es negativo en  $E$  entonces  $V(\mathbf{x})$  decrece a lo largo de la solución  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  en  $\mathbf{x}_0 \in E$  en  $t = 0$ . Aún más, en  $\mathbb{R}^2$ , si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  con igualdad solamente cuando  $\mathbf{x} = 0$ , entonces para un pequeño  $C$  positivo, la familia de curvas  $V(\mathbf{x}) = C$  constituye una familia de curvas cerradas que encierran el origen y las trayectorias de (A.3) cruzan estas curvas del exterior al interior con un  $t$  decreciente; es decir, el origen en (A.3) es asintóticamente estable.

A una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las hipótesis del siguiente teorema se le llama *función de Lyapunov*.

**Teorema 3.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$ . Suponga que  $f \in C^1(E)$  y que  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Supóngase también que existe una función  $V \in C^1(E)$  que satisface que  $V(\mathbf{x}_0) = 0$  y que  $V(\mathbf{x}) > 0$  si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ . Entonces

- (a) Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in E$ ,  $\mathbf{x}_0$  es estable.
- (b) Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ,  $\mathbf{x}_0$  es asintóticamente estable.
- (c) Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ,  $\mathbf{x}_0$  es inestable.

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, se asume que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = 0$ .

- (a) Escogemos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño para que  $\overline{N_\delta(\mathbf{0})} \subset E$  y sea  $m_\epsilon$  el mínimo de la función continua  $V(\mathbf{x})$  en el conjunto compacto

$$S_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| = \epsilon\}$$

Entonces, como  $V(\mathbf{x}) > 0$  para  $\mathbf{x} \neq 0$ , se sigue que  $m_\epsilon > 0$ . Como  $V(\mathbf{x})$  es continua y  $V(\mathbf{0}) = 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $|\mathbf{x}| < \delta$  implica que  $V(\mathbf{x}) < m_\epsilon$ . Como  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para  $\mathbf{x} \in E$ , se tiene que  $V(\mathbf{x})$  decrece a lo largo de las trayectorias de (A.3), de modo que para todo  $\mathbf{x}_0 \in N_\delta(\mathbf{0})$  y  $t \geq 0$  tenemos

$$V(\phi_t(\mathbf{x}_0)) \leq V(\mathbf{x}_0) < m_\epsilon$$

Ahora supóngase que para  $|\mathbf{x}_0| < \delta$  hay un  $t_1 > 0$  tal que  $\phi_{t_1}(\mathbf{x}_0) = \epsilon$ ; es decir, tal que  $\phi_{t_1}(\mathbf{x}_0) \in S_\epsilon$ . Entonces como  $m_\epsilon$  es el mínimo de  $V(\mathbf{x})$  en  $S_\epsilon$ , esto implica que

$$V(\phi_{t_1}(\mathbf{x}_0)) \geq m_\epsilon$$

lo que contradice la desigualdad anterior. De modo que para  $|\mathbf{x}_0| < \delta$  y  $t \geq 0$  se tiene que  $|\phi_t(\mathbf{x})| < \epsilon$ ; es decir,  $\mathbf{0}$  es un punto de equilibrio estable.

- (b) Supongamos que  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  para todo  $\mathbf{x} \in E$ . Entonces  $V(\mathbf{x})$  es estrictamente decreciente a lo largo de las trayectorias de (A.3). Sea  $\phi_t$  el flujo de (A.3) y sea  $\mathbf{x}_0 \in N_\delta(\mathbf{0})$ , la vecindad definida en (a). Entonces, por la parte (a), si  $|\mathbf{x}_0| < \delta$ ,  $\phi_t(\mathbf{x}_0) \subset N_\epsilon(\mathbf{0})$  para todo  $t > 0$ . Por la compacidad de  $\overline{N_\epsilon(\mathbf{0})}$ , se tiene que hay una secuencia  $\{t_n\}$  tal que  $\phi_{t_n}(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{y}_0 \in \overline{N_\epsilon(\mathbf{0})}$ . Falta mostrar que  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ . Ahora bien, como  $V(\mathbf{x})$  es estrictamente decreciente a lo largo de las trayectorias de (A.3) y como  $V(\phi_{t_n}(\mathbf{x}_0)) \rightarrow V(\mathbf{y}_0)$ , por la continuidad de  $V$ , se tiene que

$$V(\phi_t(\mathbf{x}_0)) > V(\mathbf{y}_0)$$

para todo  $t > 0$ . Pero si  $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$ , entonces para  $s > 0$  tenemos que  $V(\phi_s(\mathbf{y}_0)) < V(\mathbf{y}_0)$  y, por continuidad, se tiene que para todo  $\mathbf{y}$  suficientemente cercano a  $\mathbf{y}_0$  tenemos que  $V(\phi_s(\mathbf{y})) < V(\mathbf{y}_0)$  para  $s > 0$ . Pero entonces para  $\mathbf{y} = \phi_{t_n}(\mathbf{x}_0)$  y  $n$  suficientemente grande, tenemos

$$V(\phi_{s+t_n}(\mathbf{x}_0)) < V(\mathbf{y}_0)$$

lo que contradice la desigualdad anterior. Así,  $\mathbf{y}_0 \equiv \mathbf{0}$  y de ahí se tiene que  $\mathbf{0}$  es asintóticamente estable.

- (c) Sea  $M$  el máximo de la función continua  $V(\mathbf{x})$  en el conjunto compacto  $\overline{N_\epsilon(\mathbf{0})}$ . Como  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ ,  $V(\mathbf{x})$  es estrictamente creciente a lo largo de las trayectorias de (A.3). Así, si  $\phi_t$  es el flujo de (A.3), entonces para cualquier  $\delta > 0$  y  $\mathbf{x}_0 \in N_\delta \setminus \{\mathbf{0}\}$  tenemos

$$V(\phi_t(\mathbf{x}_0)) > V(\mathbf{x}_0) > 0$$

para todo  $t > 0$ . Y como  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es positivo definido, ésta última ecuación implica

$$\inf_{t \geq 0} \dot{V}(\phi_t(\mathbf{x}_0)) = m > 0$$

De modo que,

$$V(\phi_t(\mathbf{x}_0)) - V(\mathbf{x}_0) \geq mt$$

para todo  $t \geq 0$ . Así,

$$V(\phi_t(\mathbf{x}_0)) > mt > M$$

para un  $t$  suficientemente grande; es decir,  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  queda fuera del conjunto cerrado  $\overline{N_\epsilon(\mathbf{0})}$ . Por lo tanto,  $\mathbf{0}$  es inestable.  $\square$

**Nota.** Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  para todo  $\mathbf{x} \in E$  entonces las trayectorias de (A.3) están sobre superficies en  $\mathbb{R}^n$  (o curvas en  $\mathbb{R}^2$ ) definidas por  $V(\mathbf{x}) = c$ .



## Apéndice B

# Soluciones Numéricas en *Mathematica*

Códigos hechos en *Mathematica 9.0* para los casos de LCDM y Quintaesencia con y sin acoplamiento.

### B.1 LCDM

(\*Parámetro de desaceleración\*)

```
q[om_, ol_, ok_] := 1 - ok - 2 ol - (1/2) om;  
q2[{om_, ol_, ok_}] := 1 - ok - 2 ol - (1/2) om;
```

(\*Funciones para Subscript[F, M], Subscript[F, \[CapitalLambda]] y \ Subscript[F, K]\*)

```
fm[om_, ol_, ok_] := FullSimplify[(2 q[om, ol, ok] - 1) om];  
fl[om_, ol_, ok_] := FullSimplify[2 (1 + q[om, ol, ok]) ol];  
fk[om_, ol_, ok_] := FullSimplify[2 q[om, ol, ok] ok];
```

(\*Derivadas de Subscript[F, M]\*)

```
fmm[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fm[om, ol, ok], om]];  
fml[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fm[om, ol, ok], ol]];  
fmk[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fm[om, ol, ok], ok]];
```

(\*Derivadas de Subscript[F, \[CapitalLambda]])

```
flm[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fl[om, ol, ok], om]];
```

```
fll[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fl[om, ol, ok], ol]];
flk[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fl[om, ol, ok], ok]];
```

```
(*Derivadas de Subscript[F, K]*)
```

```
fkm[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fk[om, ol, ok], om]];
fkl[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fk[om, ol, ok], ol]];
fkk[om_, ol_, ok_] = FullSimplify[D[fk[om, ol, ok], ok]];
```

```
(*Fixed points*)
```

```
s = Solve[{fm[om, ol, ok] == 0, fl[om, ol, ok] == 0,
          fk[om, ol, ok] == 0}];
```

```
(*Radiación*)
```

```
ur = {s[[1, 2, 2]], s[[1, 3, 2]], s[[1, 1, 2]]};
```

```
(*Materia*)
```

```
um = {s[[3, 3, 2]], s[[3, 2, 2]], s[[3, 1, 2]]};
```

```
(*Constante Cosmológica*)
```

```
ul = {s[[2, 2, 2]], s[[2, 3, 2]], s[[2, 1, 2]]};
```

```
(*Curvatura*)
```

```
uk = {s[[4, 1, 2]], s[[4, 2, 2]], s[[4, 3, 2]]};
```

```
(*Matriz de Derivadas*)
```

```
M[{om_, ol_, ok_}] := {{fmm[om, ol, ok], fml[om, ol, ok],
                        fmk[om, ol, ok]}, {flm[om, ol, ok], fll[om, ol, ok],
                        flk[om, ol, ok]}, {fkm[om, ol, ok], fkl[om, ol, ok],
                        fkk[om, ol, ok]}};
```

```
(*Eigenvalores*)
```

```
evr = Eigenvalues[M[ur]];
```

```
evm = Eigenvalues[M[um]];
```

```
evl = Eigenvalues[M[ul]];
```

```
evk = Eigenvalues[M[uk]];
```

```
(*Análisis de Estabilidad*)
```

```
an[{x_, y_, z_}] :=
```

```
  If[Sign[x] == Sign[y] == Sign[z] && x > 0, "Repulsor",
```

```
     If[Sign[x] == Sign[y] == Sign[z] && x < 0, "Attractor", "Saddle"]];
```

```
{ur, an[evr]}, {um, an[evm]}, {ul, an[evl]}, {uk, an[evk]}}
```

## B.2 Quintaesencia

### B.2.1 Sin acoplamiento.

(\*Sistema dinámico 2-D. Funciones Subscript[F, x] y Subscript[F, y]\*)

```
f1[x_, y_] := -3 x +
  Sqrt[6]/2 1 y^2 + (3/2) x ((1 - w) x^2 + (1 + w) (1 - y^2));
f2[x_, y_] := -Sqrt[6]/2 1 x y +
  3/2 y ((1 - w) x^2 + (1 + w) (1 - y^2));
```

(\*Derivadas de Subscript[F, x] y Subscript[F, y]\*)

```
f1x[x_, y_] = D[f1[x, y], x];
f1y[x_, y_] = D[f1[x, y], y];
f2x[x_, y_] = D[f2[x, y], x];
f2y[x_, y_] = D[f2[x, y], y];
```

(\*Fixed Points\*)

```
sln = FullSimplify[Solve[{f1[x, y] == f2[x, y] == 0}, {x, y}]];
```

(\*Matrix de Derivadas\*)

```
M[{x_, y_}] := {{f1x[x, y], f1y[x, y]}, {f2x[x, y], f2y[x, y]}};
```

```
p1 = {sln[[1, 1, 2]], sln[[1, 2, 2]]};
```

```
p2 = {sln[[2, 1, 2]], sln[[2, 2, 2]]};
```

```
p3 = {sln[[3, 1, 2]], sln[[3, 2, 2]]};
```

```
p4 = {sln[[4, 1, 2]], sln[[4, 2, 2]]};
```

```
p5 = {sln[[5, 1, 2]], sln[[5, 2, 2]]};
```

```
p6 = {sln[[6, 1, 2]], sln[[6, 2, 2]]};
```

```
p7 = {sln[[7, 1, 2]], sln[[7, 2, 2]]};
```

(\*Eigenvalores para cada punto\*)

```
evp1 = Eigenvalues[M[p1]];
```

```
evp2 = Eigenvalues[M[p2]];
```

```
evp3 = Eigenvalues[M[p3]];
```

```
evp4 = Eigenvalues[M[p4]];
```

```
evp5 = Eigenvalues[M[p5]];
```

```

evp6 = Eigenvalues[M[p6]];
evp7 = Eigenvalues[M[p7]];

(*Análisis de Estabilidad*)
an[{x_, y_}] := If[Sign[x] == Sign[y] && x > 0, "Repulsor",
  If[Sign[x] == Sign[y] && x < 0, "Atractor", "Saddle"]];

N@{{p1, an[evp1]}, {p2, an[evp2]}, {p3, an[evp3]}, {p4,
  an[evp4]}, {p5, an[evp5]}, {p6, an[evp6]}, {p7, an[evp7]}} //
  MatrixForm

```

### B.2.2 Con acoplamiento.

```

(*Sistema dinámico 3-D.*)
fx[x_, y_, z_] :=
  Sqrt[3/2] (z r)/(z - r) (1 - x^2 - y^2) - 3 x +
  Sqrt[6]/2 1 y^2 + (3/2) x ((1 - w) x^2 + (1 + w) (1 - y^2));
fy[x_, y_, z_] := -Sqrt[6]/2 1 x y +
  3/2 y ((1 - w) x^2 + (1 + w) (1 - y^2));
fz[x_, y_, z_] := -Sqrt[6] z^2 x;

(*Derivadas*)
fxx[x_, y_, z_] = D[fx[x, y, z], x];
fxy[x_, y_, z_] = D[fx[x, y, z], y];
fxz[x_, y_, z_] = D[fx[x, y, z], z];
fyx[x_, y_, z_] = D[fy[x, y, z], x];
fyy[x_, y_, z_] = D[fy[x, y, z], y];
fyz[x_, y_, z_] = D[fy[x, y, z], z];
fzx[x_, y_, z_] = D[fz[x, y, z], x];
fzy[x_, y_, z_] = D[fz[x, y, z], y];
fzz[x_, y_, z_] = D[fz[x, y, z], z];

(*Fixed Points*)
sln = FullSimplify[
  Solve[{fx[x, y, z] == fy[x, y, z] == fz[x, y, z] == 0}, {x, y, z}]];

```

```

(*Matrix de Derivadas*)
M[{x_, y_, z_}] := {{fxx[x, y, z], fxy[x, y, z],
  fxz[x, y, z]}, {fyx[x, y, z], fyy[x, y, z],
  fyz[x, y, z]}, {fzx[x, y, z], fzy[x, y, z], fzz[x, y, z]}};

p1 = {sln[[1, 1, 2]], sln[[1, 2, 2]], sln[[1, 3, 2]]};
p2 = {sln[[2, 1, 2]], sln[[2, 2, 2]], sln[[2, 3, 2]]};
p3 = {sln[[3, 1, 2]], sln[[3, 2, 2]], sln[[3, 3, 2]]};
p4 = {sln[[4, 1, 2]], sln[[4, 2, 2]], sln[[4, 3, 2]]};
p5 = {sln[[5, 1, 2]], sln[[5, 2, 2]], sln[[5, 3, 2]]};
p6 = {sln[[6, 1, 2]], sln[[6, 2, 2]], sln[[6, 3, 2]]};
p7 = {sln[[7, 1, 2]], sln[[7, 2, 2]], sln[[7, 3, 2]]};

(*Eigenvalores para cada punto*)
evp1 = Eigenvalues[M[p1]];
evp2 = Eigenvalues[M[p2]];
evp3 = Eigenvalues[M[p3]];
evp4 = Eigenvalues[M[p4]];
evp5 = Eigenvalues[M[p5]];
evp6 = Eigenvalues[M[p6]];
evp7 = Eigenvalues[M[p7]];

q[{x_, y_, z_}] := (1/2) (1 - x^2 - y^2) (1 -
  3 (-1 - (2/3) (-3 x^2 - 3/2 (1 + w) (1 - x^2 - y^2))));

(*Análisis de Estabilidad*)
an[{x_, y_, z_}] :=
  If[Sign[x] == Sign[y] == Sign[z] && x > 0, "Repulsor",
  If[Sign[x] == Sign[y] == Sign[z] && x < 0, "Atractor", "Saddle"]];

{"PUNTO", "Q"}, {"-----", "-----"}, {p1, q[p1]}, {p2, q[p2]}, {p3,
  q[p3]}, {p4, FullSimplify@q[p4]}, {p5, FullSimplify@q[p5]}, {p6,
  FullSimplify@q[p6]}, {p7, FullSimplify@q[p7]}};

```



# Apéndice C

## Códigos de PYTHON

Códigos hechos en PYTHON para la solución numérica de LCDM y Quintaesencia con y sin interacción.

### C.1 LCDM

```
x_min = 0.
x_max = 1.
y_min = 0.
y_max = 1.
z_min = 0.
z_max = 1.
t_min = 0.
t_max = 50
N_points = 500
t = np.linspace(t_min, t_max, N_points)

##### VARIABLES #####
l = 1./2.
w = 1./3.
d = 0.00001

def q(x, y, z):
    """docstring for q"""
    the_q = 1 - 0.5 * x - 2 * y - z
    return the_q
```

```
##### SISTEMA DINAMICO #####
def dyn_sys(init, t):
    x1 = init[0]
    y1 = init[1]
    z1 = init[2]
    x1_dot = (2 * q(x1, y1, z1) - 1) * x1
    y1_dot = 2 * (1 + q(x1, y1, z1)) * y1
    z1_dot = 2 * q(x1, y1, z1) * z1
    return [x1_dot, y1_dot, z1_dot]

##### SOLUCIONADOR #####
def solver(init_x, init_y, init_z):
    init_0 = [init_x, init_y, init_z]
    soln = odeint(dyn_sys, init_0, t)
    return soln

##### PERTURBACIONES #####
# (0,0,0)
x_0 = d
y_0 = d
z_0 = d
solution = solver(x_0, y_0, z_0)
#label1 = 'Prueba 1'
x1 = solution[:, 0]
y1 = solution[:, 1]
z1 = solution[:, 2]

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

ax.plot(x1, y1, z1)

plt.show()
```

## C.2 Quintaesencia

### C.2.1 Sin acoplamiento

```

# -----
# Parametros para plot
# -----
d = 0.002
l = 3.
w = 0.
t_min = 0. # here t is time variable (ln a?)
t_max = 100 #
N_points = 5000 #
t = np.linspace(t_min, t_max, N_points) # time grid
# -----

def dyn_sys(init, t):
    x1 = init[0]
    y1 = init[1]

    A = (1.0 - w) * x1**2.0 + (1.0 + w) * (1.0 - y1**2.0)

    # Ecuaciones dinamicas
    x1_dot = - 3. * x1 - np.sqrt(1.5)* y1**2.0 * (-1) + (1.5) * x1 * A
    y1_dot = np.sqrt(1.5) * x1 * y1 * (-1) + (1.5) * y1 * A
    return [x1_dot, y1_dot]

def solver(init_x, init_y):
    # -----
    # condiciones iniciales
    # -----
    init_0 = [init_x, init_y] # vector inicial
    # -----
    # Resolver las ecuaciones diferenciales
    # -----
    soln = odeint(dyn_sys, init_0, t)
    return soln

```

```
#####  
# Encontrando algunas soluciones:  
#####  
  
# solucion No.: 1  
# -----  
x_0 = d  
y_0 = d  
solution = solver(x_0, y_0)  
x1 = solution[:, 0]  
y1 = solution[:, 1]  
  
plt.plot(x1, y1)  
plt.grid(True)  
  
plt.scatter(0,0, color='gray')  
plt.scatter(1,0, color='blue')  
plt.scatter(-1,0, color='green')  
plt.scatter(1/(np.sqrt(6.0)), np.sqrt(1.0-(1**2.)/6.), color='purple')  
plt.scatter(np.sqrt(1.5) * (1+w)/1, np.sqrt(1.5 * (1 - w**2 )/1**2 ), color='black')  
  
plt.show()
```

## C.2.2 Con acoplamiento

```

t_min = 0.
t_max = 50
N_points = 5000
t = np.linspace(t_min, t_max, N_points)

##### VARIABLES #####
w = 0.
l = 3.
d = 0.003
r = 5.

##### SISTEMA DINAMICO #####
def dyn_sys(init, t):
    x1 = init[0]
    y1 = init[1]
    z1 = init[2]

    A = (1.0 - w) * x1**2.0 + (1.0 + w) * (1.0 - y1**2.0)

    x1_dot = np.sqrt(1.5) * ((z1 * r)/(z1-r)) * (1-x1**2-y1**2) - 3. * x1
              - np.sqrt(1.5) * y1**2. * (-1) + 1.5 * x1 * A
    y1_dot = np.sqrt(1.5) * x1 * y1 * (-1) + 1.5 * y1 * A
    z1_dot = - np.sqrt(6.) * x1 * (z1 ** 2.)
    return [x1_dot, y1_dot, z1_dot]

##### SOLUCIONADOR #####
def solver(init_x, init_y, init_z):
    init_0 = [init_x, init_y, init_z]
    soln = odeint(dyn_sys, init_0, t)
    return soln

##### PERTURBACIONES #####
# (-1,0,0)
x_0 = -1 + d
y_0 = d
z_0 = d
solution = solver(x_0, y_0, z_0)

```

```
#label1 = 'Prueba 1'
x1 = solution[:, 0]
y1 = solution[:, 1]
z1 = solution[:, 2]

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

ax.plot(x1, y1, z1)

ax.scatter(-1, 0, 0, color = 'gray')
ax.scatter(0, 0, 0, color = 'red')
ax.scatter(1, 0, 0, color = 'blue')
ax.scatter(1/(np.sqrt(6.0)), np.sqrt(1.0-(1**2.)/6.), 0, color = 'orange')
ax.scatter(np.sqrt(3./2.)*(1+w)/1, (3./2.)*(0.5)*((1-w**2)**(0.5))/1, 0,
           color = 'black')
ax.scatter(-0.5, 0.5, 0.012, color = 'purple')

# CILINDRO
x = np.linspace(-1, 1, 100)
z = np.linspace(-0, 0.02, 100)
Xc, Zc = np.meshgrid(x, z)
Yc = np.sqrt(1-Xc**2)

# DIBUJAR PARAMETROS
rstride = 20
cstride = 10
ax.plot_surface(Xc, Yc, Zc, alpha = 0.05, rstride = rstride, cstride = cstride)

ax.set_xlim3d([-1.1,1.1])
ax.set_ylim3d([-0.1,1.1])
ax.set_zlim3d([-0,0.02])

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')

ax.axis('on')
plt.show()
```

# Bibliografía

- [1] A. A. Costa, L. C. Olivari, and E. Abdalla. Quintessence with Yukawa Interaction. *Phys. Rev. D*, 92(103501), November 2015.
- [2] E. Copeland, A. Liddle, and D. Wands. Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Phys. Rev. D*, 57(4686-4690):6, November 1998.
- [3] S. Tsujikawa. Quintessence: a review. *Class. Quantum Grav.*, 30(214003):18, October 2013.
- [4] Albert Einstein. The Foundation of the General Theory of Relativity. *Annalen Phys.*, 49(769), 1926.
- [5] F. Zwicky. Spectral displacement of extra galactic nebulae. *Helv. Phys. Acta*, 6(110), 1933.
- [6] V. Rubin, N. Thonnard, J. Ford, and W. K. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605/R=4kpc/ to UGC /R=122 kpc/. *Astrophys. J.*, 238(471), 1980.
- [7] E. Komatsu et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys. J. Suppl.*, 192(18), 2011.
- [8] S. Burles, K. Nollett, and M. S. Turner. What is the BBN prediction for the baryon density and how reliable is it? *Phys. Rev. D*, 63(063512), 2001.
- [9] D. J. Eisenstein et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *Astrophys. J.*, 633(560), 2005.
- [10] M. Markevitch, A. Gonzalez, D. Clowe, A. Vikhlinin, L. David, et al. Direct constraints on the dark matter self-interaction cross-section from the merging galaxy cluster 1E0657-56. *Astrophys. J.*, 606(819), 2004.
- [11] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Phys. Rept.*, 405(279), 2005.

- 
- [12] M. Bento, O. Bertolami, R. Rosenfeld, and L. Teodoro. Selfinteracting dark matter and invisibly decaying Higgs. *Phys. Rev. D*, 62(041302), 2000.
- [13] M. Bento, O. Bertolami, and R. Rosenfeld. Cosmological constraints on an invisibly decaying Higgs boson. *Phys. Lett. B*, 518(276), 2001.
- [14] R. Bernabel et al. First results from DAMA/LIBRA and the combined results with DAMA/NaI. *Eur. Phys. J. C*, 56(333), 2008.
- [15] C. Savage, G. Gelmini, P. Gondolo, and K. Freese. Compatibility of DAMA/LIBRA dark matter detection with other searches. *JCAP*, 0904(010), 2009.
- [16] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517(565), 1999.
- [17] A. G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116(1009), 1998.
- [18] S. Perlmutter, M. S. Turner, and M. J. White. Constraining dark energy with SNe Ia and large scale structure. *Phys. Rev. Lett.*, 83(670), 1999.
- [19] O. Bertolami, P. Frazao, and J. Paramos. Accelerated expansion from a non-minimal gravitational coupling to matter. *Phys. Rev. D*, 81(104046), 2010.
- [20] Albert Einstein. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1917(142), 1917.
- [21] J. F. Koksmá and T. Prokopec. The Cosmological Constant and Lorentz Invariance of the Vacuum State. arXiv:1105.6296, 2011.
- [22] S. Weinberg. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61(1), 1989.
- [23] O. Bertolami. The Cosmological Constant Problem: A User's guide. *Int. J. Mod. Phys. D*, 18(2303), 2009.
- [24] A. H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D*, 23(347), 1981.
- [25] L. Kofman, A. D. Linde, and A. A. Starobinsky. Reheating after Inflation. *Phys. Rev. Lett.*, 73(3195), 1994.
- [26] J. P. Uzan and R. Lehoucq. A Dynamical Study of the Friedmann Equations. *Eur. Phys. J.*, 22(4), 2001.
- [27] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Number 7 in Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1991.

- 
- [28] C. Wetterich. Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry. *Nucl. Phys. B*, 302 (668), 1988.
- [29] B. Ratra and P. Peebles. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys. Rev. D*, 37(3406), 1988.
- [30] O. Bertolami. Time Dependent Cosmological Term. *Nuovo Cim. B*, 93(36), 1986.
- [31] P. G. Ferreira and M. Joyce. Cosmology with a primordial scalar field. *Phys. Rev. D*, 58(023503), June 1998.
- [32] F. Lucchin and S. Matarrese. Power-law inflation. *Phys. Rev. D*, 32(1316), September 1985.
- [33] J. J. Halliwell. Scalar fields in cosmology with an exponential potential. *Phys. Lett. B*, 185(3-4):3, February 1987.
- [34] Y. Kitada and K. Maeda. Cosmic no-hair theorem in power-law inflation. *Phys. Rev. D*, 45(1416), February 1992.
- [35] P. T. P. Viana and A. Liddle. Perturbation evolution in cosmologies with a decaying Cosmological Constant. *Phys. Rev. D*, 57(674), January 1998.
- [36] F. C. Solano and U. Nucamendi. Reconstruction of the interaction term between dark matter and dark energy using SNe Ia. *JCAP*, 1204:011, 2012.
- [37] O. Bertolami, F. Gil Pedro, and M. Le Delliou. Dark Energy-Dark Matter Interaction and the Violation of the Equivalence Principle from the Abell Cluster A586. *Phys. Lett. B*, 654(165), 2007.
- [38] Z. K. Guo, N. Ohta, and S. Tsujikawa. Probing the Coupling between Dark Components of the Universe. *Phys. Rev. D*, 76(023508), 2007.
- [39] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier. An Alternative to Quintessence. *Phys. Lett. B*, 511(265), 2001.
- [40] N. Bilic, G. B. Tupper, and R. D. Viollier. Unification of Dark Matter and Dark Energy: The Inhomogeneous Chaplygin gas. *Phys. Lett. B*, 535(17), 2002.
- [41] M. Bento, O. Bertolami, and A. Sen. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification. *Phys. Rev. D*, 66(043507), 2002.
- [42] M. Bento, O. Bertolami, and A. Sen. The Revival of the unified dark energy - dark matter model? *Phys. Rev. D*, 70(083519), 2004.
- [43] C. Wetterich. The Cosmon model for an asymptotically vanishing time dependent cosmological 'constant'. *Astron. Astrophys.*, 301(321), 1995.

- 
- [44] L. Amendola. Coupled Quintessence. *Phys. Rev. D*, 62(043511), 2000.
- [45] J. Khoury and A. Weltman. Chaemeleon cosmology. *Phys. Rev. D*, 69(044026), 2004.
- [46] W. Zimdahl, D. Pavon, and L. Chimento. Interacting Quintessence. *Phys. Lett. B*, 521(133), 2001.
- [47] G. R. Farrar and P. J. E. Peebles. Interacting dark matter and dark energy. *Astrophys. J.*, 604(1), 2004.
- [48] G. Huey and B. D. Wandelt. Interacting Quintessence. The Coincidence problem and cosmic acceleration. *Phys. Rev. D*, 74(023519), 2006.
- [49] S. Micheletti, E. Abdalla, and B. Wang. A Field Theory Model for Dark Matter and Dark Energy in Interaction. *Phys. Rev. D*, 79(123506), 2009.
- [50] L. Amendola. Linear and non-linear perturbations in dark energy models. *Phys. Rev. D*, 69(103524), 2004.
- [51] V. Pettorino and C. Baccigalupi. Coupled and Extended Quintessence: theoretical differences and structure formation. *Phys. Rev. D*, 77(103003), 2008.