UNAM-UMSNH
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE FISICA Y MATEMÁTICAS

Propiedades de uniformización sobre sistemas de escaleras

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

CÉSAR ISMAEL CORRAL ROJAS

DIRECTOR: DR. FERNANDO HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

MORELIA, MICHOACÁN FEBRERO DEL 2018

Agradecimientos

A mi familia, que siempre está ahí para mí cuando los necesito.

A todos mis profesores en el posgrado, pero principalmente a Fer, a quién desde la licenciatura le debo un agradecimiento público por todos los consejos dentro y fuera del salón.

A Paul, por hacer todo lo posible en ayudar a que mi estancia en Toronto fuera lo más amena posible y también por enseñarme todo lo relacionado al tema sobre el cual escribo este trabajo.

A Michael, por todo el tiempo que nos dedicó durante los cursos impartidos y por todo el conocimiento que me transmitió durante este par de años.

Al CONACYT, por el apoyo económico durante estos dos años sin el cual no habría sido posible esta etapa de mis estudios. Particularmente, por el apoyo de la beca mixta para realizar mi estancia en Toronto durante mi último semestre, la cual tuvo como fruto este trabajo y una gran cantidad de experiencias.

A la Universidad Michoacana de Sán Nicolás de Hidalgo y a la Universidad Nacional Autónoma de México.

A todos mis amigos del posgrado y de FisMat.

ABSTRACT

We will study several properties over ladder systems, particularlly, uniformization properties over colorations, which are equivalents to the statement that a topological space, naturally asociated to the ladder system satisfies some properties of separability and compactness.

Among the results, we construct a model in which every space asociated to a ladder system is countably metacompact but no countably paracompact.

Key words:ladder, souslin, paracompact, metacompact, uniformization.

RESUMEN

Estudiaremos diversas propiedades sobre sistemas de escaleras, en particular, propiedades de uniformización sobre coloraciones; las cuales son equivalentes a que un espacio topológico naturalmente asociado a dicho sistema de escaleras tenga ciertas propiedades de separabilidad y compacidad.

Entre los resultados, se presenta un modelo en el cual todo espacio asociado a un sistema de escaleras es numerablemente metacompacto pero no es numerablemente paracompacto.

Palabras clave:escaleras, souslin, paracompacto, metacompacto, uniformización.

Índice general

Introducción y notación

En este pequeño texto trabajaremos diversas propiedades de uniformización y anti-uniformización sobre sistemas de escaleras definidas en un subconjunto estacionario de los límites de ω_1. La principal motivación es investigar que propiedades se cumplen en modelos de la forma $MA(S)[S]$ (o $PFA(S)[S]$). Los resultados logrados fueron obtenidos durante mi estancia en York University, Toronto; bajo la supervición del Dr. Paul Szeptycki. Algunos de estos resultados obtenidos son la Proposición 14 y la Proposición 21, los cuales establecen completamente que propiedades de uniformización se cumplen en extensiones de la forma $MA(S)[S]$.

Recordemos que un subconjunto $C \subseteq \omega_1$ es un *club* si es cerrado y no acotado. También, un subconjunto $S \subseteq \omega_1$ es *estacionario* si para todo club $C \subseteq \omega_1$ se tiene que $S \cap C \neq \emptyset$. Aunque mayormente trabajaremos solo con la combinatoria involucrada, muchas de estas propiedades de uniformización tienen equivalencias topológicas con un espacio naturalmente asociado a un sistema de escaleras dado. La mayoría de los conceptos usados de teoría de conjuntos siguen la notación y las definiciones de [6]. Del mismo modo, la mayoría de los conceptos topológicos mencionados pueden ser consultados en [4].

En particular, un árbol es un conjunto parcialmente ordenado $(T, \leq)$ tal que para todo $t \in T$ se tiene que $pred*(t)_T = \{s \in T : t \leq s\}$ es un conjunto bien ordenado. La altura de t en T denotada por $l(t)_T$ es el tipo de orden de $pred*(t)_T$ con el orden invertido. Cuando no haya riesgo de confusión omitiremos el subíndice T. El α-ésimo nivel de T es el conjunto $Lev_\alpha(T) = \{t \in T : l(t) = \alpha\}$. Dos elementos $s, t \in T$ son compatibles si ellos son $\leq$-comparables, en tal caso denotamos esto por $s \parallel t$. Si dos elementos $s, t \in T$ no son compattibles, decimos que son incompatibles y lo denotamos por $s \perp t$. Un subconjunto $A \subseteq T$ es una anticadena si para todos $x, y \in A$ se tiene que $x \perp y$. Por último, $[T]$ denotará el conjunto de ramas de T y para cada $s \in T$, $\langle s \rangle = \{t \in T : t \leq s\}$.

Respecto a subconjuntos de un conjunto dado, sean κ y λ dos números cardinales (posiblemente números naturales) con $\lambda \leq \kappa$. Entonces $[\kappa]^\lambda = \{A \subseteq \kappa : |A| = \lambda\}$ y $[\kappa]^{<\lambda} = \{A \subseteq \kappa : |A| < \lambda\}$.

Ya que utilizaremos en varias ocasiones técnicas de forcing y de submodelos elementales simultaneamente, adoptaremos la convención de forzar sobre el universo V. Esto será simplemente por notación sin abandonar la idea de que realmente estamos trabajando con submodelos transitivos numerables de fragmentos finitos de ZFC. Dada una condición de forcing $p \in \mathbb{P}$ y una fórmula φ; decimos que p decide φ (denotado por $p \parallel \varphi$), si se cumple que o bien $p \Vdash$ "φ" o $p \Vdash$ "$\neg\varphi$". Si $\dot{f}$ es un $\mathbb{P}$-nombre para una función, y $p \Vdash$ "$x \in dom(\dot{f})$" decimos que p decide $f(x)$ (denotado por $p \parallel f(x)$), si existe un $\mathbb{P}$-nombre $\dot{A}$ tal que $p \Vdash$ "$\dot{f}(x) = \dot{A}$". Del mismo modo decimos que p decide $\dot{f}$ si para todo $x \in dom(f)$ se tiene que $p \parallel f(x)$

Recordemos también algunas propiedades topológicas que usaremos a través del texto.

Definición 1. Un espacio topológico X es *numerablemente metacompacto*, si para toda cubierta abierta $\{U_n : n \in \omega\}$ de X existe un refinamiento que es punto finito (es decir, que cada punto del espacio pertenece a una cantidad finita de elementos del refinamiento).

Si además existe dicho refinamiento localmente finito (para todo $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que $V \cap U_n = \emptyset$ para todos salvo una cantidad finita de n's), decimos que el espacio es *numerablemente paracompacto*.

Como ya se mencionó, todas las nociones no definidas de teoría de conjuntos y topología pueden ser consultadas en [6] y [4] respectivamente.

Propiedades de uniformización

Notación 2. Si no se afirma lo contrario explícitamente, $S \subseteq lim(\omega_1)$ denotará un subconjunto estacionario.

Definición 3. Un *sistema de escaleras* sobre S es una sucesión $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ tal que para todo $\alpha \in S$, L_α es un subconjunto no acotado de α de tipo de orden ω.

Definición 4. Dado un sistema de escaleras $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$, decimos que L es *uniformizable* si para cada sucesión $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha \in S\rangle$ de funciones tal que $f_\alpha : L_\alpha \to \omega$, existe una función $F : \omega_1 \to \omega$ que las uniformiza; es decir, $\forall \alpha \in S\, (F \restriction_{L_\alpha} =^* f_\alpha)$.

Consistentemente, todo sistema de escaleras es uniformizable, de hecho, es una consecuencia del axioma de Martin que todo sistema de escaleras satisface esta propiedad.

Para ver esto simplemente notemos que si $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ es un sistema de escaleras y $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha \in S\rangle$ es una sucesión de funciones tales que $f_\alpha : L_\alpha \to \omega$ para cada $\alpha \in S$; entonces

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(L, \bar{f}) = \{(p, F) : p \in Fin(\omega_1, \omega), F \in [\text{lím}(\omega_1)]^{<\omega}\}$$

es c.c.c., donde $(p, F) \leq (q, G)$ si, y sólo si, $p \supset q$, $F \supset G$ y además para todos $\alpha \in G$ y $\beta \in L_\alpha \cap (dom(p) \setminus dom(q))$ se tiene que $p(\beta) = f_\alpha(\beta)$.

Sin embargo, y como veremos más adelante, es posible que ningún sistema de escaleras sea uniformizable, por lo tanto, debilitando dicha propiedad, definiremos varias propiedades de uniformización más débiles sobre sistemas de escaleras.

Definición 5. Sea $n \in \omega$. Un sistema de escaleras satisface la propiedad $\mathcal{P}_n$ (respectivamente $\mathcal{P}_{<\omega}$) si para cada $f : S \to \omega$ existe $F : \omega_1 \to [\omega]^n$ (respectivamente $[\omega]^{<\omega}$) tal que:

1. $F \restriction_{L_\alpha}$ es eventualmente constante.

2. Si $F \restriction_{L_\alpha}$ es eventualmente a_α, entonces $f(\alpha) \in a_\alpha$.

Omitiendo la condición de que la función F sea eventualmente constante sobre las escaleras, tenemos propiedades aún más débiles:

Definición 6. Sea $n \in \omega$. Un sistema de escaleras satisface la propiedad $\mathcal{M}_n$ (respectivamente $\mathcal{M}_{<\omega}$) si para cada $f : S \to \omega$ existe $F : \omega_1 \to [\omega]^n$ (respectivamente $[\omega]^{<\omega}$) tal que

$$\forall \alpha \in S \; \forall^\infty \beta \in L_\alpha \, (f(\alpha) \in F(\beta)) \, ,$$

donde $\forall^\infty$ denota "para todos salvo una cantidad finita de".

Observación 7. Notemos que la propiedad $\mathcal{P}_0$ es equivalente a ser uniformizable cuando todas las funciones f_α son constantes. En particular, si un sistema de escaleras es uniformizabe, entonces satisface $\mathcal{P}_0$.

Demostración. Para ver esto simplemente basta identificar una sucesión de funciones $\bar{f} = \{f_\alpha : \alpha \in S\}$ con la función $f : S \to \omega$ definida por $f(\alpha) = n_\alpha$ si, y sólo si, la función f_α es la constante n_α. $\square$

También es claro de las definiciones que

$$\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1} \implies \mathcal{M}_{n+1} \implies \mathcal{M}_{n+2}.$$

Dado un sistema de escaleras, también se puede construir un espacio topológico similar a los Ψ-espacios construidos a partir de una familia AD.

Definición 8. Sea $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S \rangle$ un sistema de escaleras, definimos el espacio $X_L = \omega_1 \times \{0\} \cup S \times \{1\}$ donde $\omega_1 \times \{0\}$ es discreto, y para cada $\alpha \in S$, los conjuntos de la forma $\{(\alpha, 1)\} \cup ((L_\alpha \times \{0\}) \setminus F)$ donde $F \in [\omega_1 \times \{0\}]^{<\omega}$ forman una base local para $(\alpha, 1)$.

Cuando no exista riesgo de ambigüedad, nos referiremos a los puntos de X_L simplemente como elementos de S y de ω_1, olvidándonos de la segunda coordenada.

Observación 9. Dado un sistema de escaleras L, el espacio X_L siempre es localmente compacto, primero numerable (y de hecho localmente numerable), Hausdorff y no Hausdorff por colecciones.

Demostración. Recordemos que un espacio X es Hausdorff por colecciones, si para cualquier cerrado discreto $\{x_i : i \in I\} \subseteq X$, existen abiertos disjuntos $\{U_i : i \in I\}$ tales que $x_i \in U_i$.

Por la forma en que hemos definido los abiertos básicos del espacio X_L, es claro que el espacio es localmente compacto y localmente numerable. Por otro lado es claro también que el espacio es Hausdorff pues para cada $\alpha \neq \beta$ se tiene que $|L_\alpha \cap L_\beta| < \aleph_0$.

Finalmente para ver que no es Hausdorff por colecciones, observemos que $S \times \{1\} \subseteq X_L$ es un cerrado discreto. Luego, para cada $\alpha \in S$ sea U_α abierto tal que $(\alpha, 1) \in U_\alpha$. Definamos $g : S \to \omega_1$ tal que $g(\alpha)$ es el mínimo $\beta \in \omega_1$ tal que $(\beta, 0) \in U_\alpha$. Por el "pressing down lemma", tenemos que existe $S' \subseteq S$ estacionario tal que $g \restriction_{S'}$ es constante; en particular, para todos $\alpha, \beta \in S'$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. $\square$

A pesar de que algunas propiedades topológicas de separabilidad y compacidad siempre se cumplen para este tipo de espacios, hay algunas que dependen de ciertas propiedades de uniformización.

Lema 10. *El espacio X_L es normal si, y sólo si L satisface $\mathcal{P}_0$.*

Demostración. Recordemos que la propiedad de normalidad es equivalente para dos subconjuntos que para una cantidad numerable de subconjuntos. Por esta razón, utilizaremos como definición de normalidad que para cada colección numerable de cerrados ajenos, existen expansiones abiertas ajenas que los contienen.

Notemos que ya que el subconjunto $\omega_1 \times \{0\}$ es discreto, basta con considerar cerrados contenidos en $S \times \{1\}$. Por tanto, es suficiente con mostrar que para cada partición numerable de $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$, existen abiertos disjuntos $\{U_n : n \in \omega\}$, tales que para cada $n \in \omega$, se cumple que $S_n \times \{1\} \subseteq U_n$. Por último, si $F : \omega_1 \to [\omega]^1$, supondremos que $F : \omega_1 \to \omega$.

($\Rightarrow$) Sea $f : S \to \omega$ y definamos para cada $n \in \omega$, $U_n := f^{-1}(n) \times \{1\}$. Para cada $n \in \omega$ sea $U'_n \supseteq U_n$ expansión abierta y definamos $F : \omega_1 \to \omega$ por $F(\beta) = n$ si, y sólo si, $(\beta, 0) \in U'_n$ (definimos también $F(\beta) = 0$ en caso de que $(\beta, 0) \notin \bigcup_{n\in\omega} U'_n$). Luego, es claro que F uniformiza f en el sentido de $\mathcal{P}_0$.

($\Leftarrow$) Sea $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ una partición y definamos $f : S \to \omega$ por $f(\alpha) = n$, si $(\alpha, 1) \in U_n$. Sea $F : \omega_1 \to \omega$ que uniformiza f en el sentido de $\mathcal{P}_0$. Luego, para cada $\alpha \in S$, existe $g(\alpha) < \alpha$, tal que para todo $\beta \in (L_\alpha \setminus g(\alpha))$, se tiene que $F(\beta) = f(\alpha)$. De este modo y definiendo para cada $n \in \omega$

$$U'_n = (U_n) \cup (\cup\{(L_\alpha \setminus g(\alpha)) : (\alpha, 1) \in U_n\})$$

es fácil ver que $\{U'_n : n \in \omega\}$ es la expansión abierta buscada. □

Lema 11. *X_L es numerablemente metacompacto si, y sólo si L satisface $\mathcal{M}_{<\omega}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $f : S \to \omega$ y definamos para cada $n \in \omega$,

$$U_n = \left(f^{-1}(n) \times \{1\}\right) \cup \left(\left(\cup\{L_\alpha : \alpha \in f^{-1}(n)\}\right) \times \{0\}\right).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $X_L = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ (pues los puntos sobrantes son aislados). Sea $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ refinamiento punto finito y definamos para cada $n \in \omega$

$$U'_n = \bigcup\{V \in \mathcal{V} : V \subseteq U_n\}.$$

Notemos que $\{U'_n : n \in \omega\}$ sigue siendo una cubierta punto finita, y además para cada $n \in \omega$, se tiene que

$$U'_n \cap (S \times \{1\}) = U_n \cap (S \times \{1\}).$$

Luego, definamos F tal que para cada $\beta \in \omega_1$

$$F(\beta) = \{n \in \omega : (\beta, 0) \in U'_n\} \in [\omega]^{<\omega}.$$

Sea entonces $\alpha \in S$ y supongamos que $f(\alpha) = n$; entonces $(\alpha, 1) \in U_n$, y por tanto existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $(\alpha, 1) \in V \subseteq U_n$ y como para todos salvo una cantidad finita de $\beta \in L_\alpha$ se cumple que $(\beta, 0) \in V$, se tiene que también para todos salvo una cantidad finita de $\beta \in L_\alpha$, $n \in F(\beta)$ por definición, pues $(\beta, 0) \in U'_n$.

($\Leftarrow$) Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una cubierta numerable de X_L. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{U_n \cap (S \times \{1\}) : n \in \omega\}$ es una partición de $S \times \{1\}$. Definamos $f : S \to \omega$ por $f(\alpha) = n$ si, y sólo si $(\alpha, 1) \in U_n$ y sea $F : \omega_1 \to [\omega]^{<\omega}$ dada por $\mathcal{M}_{<\omega}$. Definamos para cada $n \in \omega$

$$U'_n := (U_n \cap (S \times \{1\})) \cup ((\beta, 0) : n \in F(\beta)).$$

Notemos que de nuevo $U'_n \cap (S \times \{1\}) = U_n \cap (S \times \{1\})$, así que sin pérdida de generalidad podemos suponer para cada $n \in \omega$, $U'_n \subseteq U_n$ (podemos intersectar U'_n con U_n y los puntos de $\omega_1 \times \{0\}$ que queden sin cubrir son irrelevantes pues son puntos aislados). Es fácil ver que $\{U'_n : n \in \omega\}$ es un refinamiento punto finito, procediendo como en la primera parte de la prueba. $\square$

Corolario 12. *Si L satisface $\mathcal{P}_{<\omega}$, entonces X_L es numerablemente paracompacto.*

Demostración. Por el lema anterior, basta probar que para cada $\alpha \in S$, existe una vecindad U_α de $(\alpha, 1)$, tal que $\{n \in \omega : U_n \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito. Por $\mathcal{P}_{<\omega}$, tenemos que $F \restriction_{L_\alpha}$ es eventualmente constante, por tanto, existe $H \subseteq L_\alpha$ finito tal que para todo $\beta \in L_\alpha \setminus H$ se tiene que $F(\beta) = s_\alpha$ para algún $s_\alpha \in [\omega]^{<\omega}$. Definamos $U_\alpha = \{(\alpha, 1)\} \cup \{(L_\alpha \setminus H) \times \{0\}\}$. Es claro entonces que $\{n \in \omega : U_n \cap U_\alpha \neq \emptyset\} = s_\alpha$. $\square$

El diagrama (1) tomado de [1] muestra un esquema con todas estas relaciones entre propiedades de uniformización que son ciertas en ZFC.

Ahora procederemos a mostrar que consistentemente, también es posible que ningún sistema de escaleras sea uniformizable; de hecho es posible que ningún sistema de escaleras cumpla $\mathcal{M}_n$ para ningún $n \in \omega$ y que X_L nunca sea numerablemente paracompacto, y en particular, que L no satisface $\mathcal{P}_{<\omega}$.

Otra prueba de que ningún sistema de escaleras es uniformizable el cual se sigue de $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ (y entonces de CH) se puede encontrar en [3].

Lema 13. *Sea $L = \{L_\alpha : \alpha \in S\}$ un sistema de escaleras, entonces X_L es numerablemente paracompacto si, y sólo si, para toda función $f : S \to \omega$,*

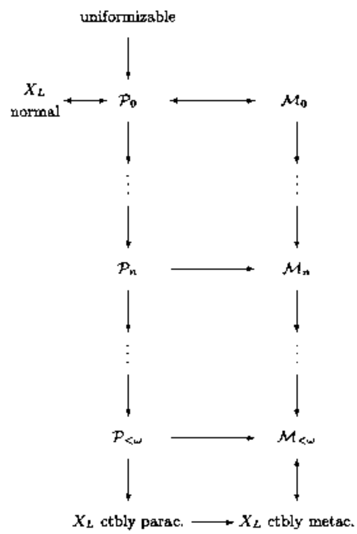

Figura 1: Relaciones en ZFC (uniformización)

podemos encontrar un par de funciones $F : \omega_1 \to [\omega]^{<\omega}$ *y* $g : S \mapsto [\omega]^{<\omega}$ *tal que para toda* $\alpha \in S$ *y para todos salvo una cantidad finita de* $\beta \in L_\alpha$ *se tiene que*

$$(f(\alpha) \in F(\beta) \subseteq g(\alpha)) .$$

Demostración. La prueba básicamente es idéntica a la prueba del lema 11 y su corolario. □

Notemos que si sustituimos el símbolo de contención por el de igualdad en $(f(\alpha) \in F(\beta) \subseteq g(\alpha))$, obtenemos la definición de $\mathcal{P}_{<\omega}$; sin embargo, aún es una pregunta abierta si estas dos propiedades son equivalentes.

El siguiente resultado obtenido con Paul Szeptycki y con gran ayuda de Osvaldo Guzmán, es el primer paso para determinar que propiedades de uniformización son ciertas en extensiones del tipo $MA(S)[S]$.

Proposición 14. *Sea* T *un árbol de Suslin y* b *una rama genérica sobre* T*. Si* $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ *es un sistema de escaleras con* $S \in V[b]$*, entonces*

(a) L *no satisface* $\mathcal{M}_n$ *para ningún* $n \in \omega$*.*

(b) X_L no es numerablemente paracompacto.

Demostración. (a). Sean $S \in V[b]$ estacionario y $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S \rangle$ un sistema de escaleras. Por la estructura del árbol de Suslin, podemos asumir que $T \subseteq \omega^{<\omega_1}$, por tanto $b : \omega_1 \to \omega$.

Para cada $\alpha \in \text{lím}(\omega_1)$, sea $\alpha' \geq \alpha$ tal que si $s \in Lev_{\alpha'}(T)$ entonces $s \parallel$ "$\alpha \in \dot{S}$". Para cada $s \in Lev_{\alpha'}(T)$ definamos también α_s de la siguiente manera:

- Si $s \Vdash$ "$\alpha \notin \dot{S}$", entonces $\alpha_s = \alpha'$
- Si $s \Vdash$ "$\alpha \in \dot{S}$", entonces $\alpha_s \geq \alpha'$ es tal que para todo $t \leq s$, si $t \in Lev_{\alpha_s}(T)$, entonces $t \parallel L_\alpha$.

Lo anterior puede hacerce gracias a que "$\alpha \in \dot{S}$" se puede decidir por una anticadena, como en T toda anticadena es numerable y T tiene altura ω_1, podemos asumir que dicha anticadena es en realidad un nivel. Del mismo modo podemos decidir L_α, pues tenemos que decidir una cantidad numerable de sentencias de la forma "$\beta \in L_\alpha$" con $\beta < \alpha$, y podemos tomar el supremo de los niveles donde decidimos cada una de estas sentencias.

Por último, definamos $\alpha^* = \sup\{\alpha_s : s \in Lev_{\alpha'}(T)\}$.

En $V[b]$, definamos la función $f : S \to \omega$ por $f(\alpha) = b(\alpha^*)$. Es suficiente ver que si $F : \omega_1 \to [\omega]^n$ es una función en $V[b]$, entonces F no uniformiza f en el sentido de $\mathcal{M}_n$ y para esto, probaremos que el conjunto de condiciones que fuerzan esto es denso en T.

Sea $t \in T$. Notemos que el conjunto $S_t = \{\beta > l(t) : t \nVdash \text{"}\beta \notin \dot{S}\text{"}\}$ es estacionario. Para ver esto, supongamos que no y sea $C \subseteq \omega_1$ un club tal que $S_t \cap C = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C \subseteq (l(t), \omega_1)$, entonces $\forall \beta \in C(t \Vdash \text{"}\beta \notin \dot{S}\text{"})$, es decir $t \Vdash$ "$\dot{S} \cap \check{C} = \emptyset$", lo cual es una contradicción.

Sea $M \prec H(\theta)$, para θ suficientemente grande, tal que $T, \dot{F} \in M$. Como $C = \{N \cap \omega_1 : N \prec H(\theta) \wedge T, \dot{F} \in N\}$ es un club, podemos asumir que $\delta = M \cap \omega_1 \in S_t$. Luego, para cada $\alpha < \delta$, como $\alpha \in M$, existe un nivel $\alpha' < \delta$ tal que todo nodo de $Lev_{\alpha'}(T)$ decide $\dot{F}(\alpha)$. De este modo, regresando a V, tenemos que $\dot{F} \restriction_\delta$ es decidido por todo nodo en $Lev_\delta(T)$.

Ahora, como $\delta \in S_t$, existe $s \supseteq t$ con $s \in Lev_{\delta^*}(T)$ tal que $s \Vdash$ "$\delta \in \dot{S}$". Más aún, como $l(s) = \delta^*$, s también decide L_δ, y por tanto $s \parallel \dot{F} \restriction_{L_\delta}$.

Sea $r \in [T]$ una rama genérica tal que $s \subseteq r$, trabajemos en $V[r]$. Definamos $A_0 = \emptyset$. Si existe $m_0 \in \omega$ tal que $\exists^\infty m \in \omega(m_0 \in F(L_\delta(m)))$ (donde $L_\delta(m)$ es el m-ésimo elemento de L_δ), definamos $A_1 = \{m_0\}$, de otro modo sea $A_1 = A_0$. De nuevo, si existe $m_1 \in \omega \setminus \{m_0\}$ tal que $\exists^\infty m \in \omega(m_0, m_1 \in F(L_\delta(m)))$ definamos $A_2 = \{m_0, m_1\}$, de otro modo sea $A_2 = A_1$. Repitiendo este proceso, definamos $A = A_n$; como $F : \omega_1 \to [\omega]^n$, tenemos que $|A| \leq n$, $|\{m \in \omega : A \subseteq L_\delta(m)\}| = \aleph_0$ y además:

$$(*) \qquad \nexists l \in \omega \setminus A\,(|\{m \in \omega : A \cup \{l\} \subseteq L_\delta(m)\}| = \aleph_0)\,.$$

Definamos $B = \{m \in \omega : A \subseteq L_\delta(m)\} \in [\omega]^\omega$. De nuevo trabajando en V, sea $m \in \omega \setminus A$. Como $l(s) = \delta^*$, se tiene que $s^\frown m \Vdash$ "$\dot{f}(\delta) = m$", y por $(*)$, se cumple que

$$s^\frown m \Vdash \text{“}\forall^\infty l \in B(f(\delta) = m \notin F(L_\delta(l)))\text{”}$$

lo cual implica que

$$s^\frown m \Vdash \text{“}\exists^\infty l \in \omega(f(\delta) = m \notin F(L_\delta(l)))\text{”}$$

es decir, $s^\frown m \Vdash$"F no uniformiza f en el sentido de $\mathcal{M}_n$".

(b). Para este inciso usaremos la equivalencia dada por el lema 13. Definimos la función f de la misma manera. Repitiendo lo hecho en (a), pero sustituyendo el codominio de F por $[\omega]^{<\omega}$, para cada $t \in T$, podemos encontrar un $s \leq t$ y un $\delta \in \omega_1$ tales que $l(s) = \delta^*$, $s \Vdash$ "$\delta \in \dot{S}$" y s decide $F \restriction_{L_\delta}$.

De nuevo tomemos $r \subseteq T$ una rama genérica tal que $s \subseteq r$. Definamos

$$H = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{m \geq n} F(L_\delta(m))$$

en $V[r]$. Notemos que si H es infinito, entonces F no testifica que X_L es numerablemente paracompacto, pues no existe $g(\delta) \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $F \restriction_{L_\delta}$ esté eventualmente contenido en $g(\delta)$. Si por otro lado $|H| < \omega$, tomemos $m \in \omega \setminus H$ y procediendo como en (a) es fácil ver que $s^\frown m \Vdash$"F no testifica que X_L es numerablemente paracompacto". $\square$

En [1], se prueba también que es consistente con CH, que cada sistema de escaleras $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ satisface $\mathcal{P}_{n+1}$ pero no satisface $\mathcal{M}_n$.

Tampoco es posible mejorar la proposición anterior para probar que ningún sistema de escaleras satisface $\mathcal{M}_{<\omega}$, pues en ZFC estas existen.

Para ver esto, sea $S = \text{lím}(\omega_1)$ y para cada $\alpha \in \text{lím}(\omega_1)$ definamos L_α de tal modo que para cada $n \in \omega$, $L_\alpha(n) = \beta + n$; donde $\beta \in \text{lím}(\omega_1)$. Entonces la función $F(\beta + n) = n = \{0, \ldots, n-1\}$ donde $\beta \in \text{lím}(\omega_1)$ uniformiza toda $f : S \to \omega$.

En vista de lo anterior, es inútil intentar forzar la falsedad de $\mathcal{M}_{<\omega}$ para todo sistema de escaleras; sin embargo, aún podemos intentar probar que no solo existe un sistema de escaleras que cumple $\mathcal{M}_{<\omega}$, si no que todo sistema de escaleras cumple esta propiedad.

Notemos que la propiedad $\mathcal{M}_{<\omega}$ es hereditaria respecto a los índices del sistema. Esto es, si $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ satisface $\mathcal{M}_{<\omega}$ y $S' \subseteq S$, entonces $L' = \langle L_\alpha : \alpha \in S'\rangle$ también satisface $\mathcal{M}_{<\omega}$. Por tanto, es suficiente con probar el resultado para sistemas de escaleras totales (es decir, en los que $S = \text{lím}(\omega_1)$).

Para seguir la notación estandar, y como a partir de ahora no trabajaremos con un subconjunto estacionario S si no con $\text{lím}(\omega_1)$; en lo que resta, S denotará un árbol de Suslin coherente. También asumiremos que $S \subseteq \omega^{<\omega_1}$.

Definición 15. Decimos que un árbol de Suslin S es *coherente* si para cada $s, t \in S$ se tiene que $|s\Delta t| < \aleph_0$, donde

$$s\Delta t = \{\xi \in dom(s) \cap dom(t) : s(\xi) \neq t(\xi)\}.$$

El siguiente es un axioma el cual surge de debilitar MA.

Definición 16. MA(S) se define como el siguiente enunciado:
Existe un árbol de Suslin coherente S, tal que para todo forcing $\mathbb{P}$ tal que $\mathbb{P} \times S$ es c.c.c. y para cada sucesión $\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha \in \omega_1\rangle$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, existe $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro $\mathcal{D}$-genérico.

Pruebas de como obtener un modelo de MA(S) se pueden encontrar en [5] y [7].

Notación 17. "MA(S)[S] $\implies$ φ", denotará que φ es cierta después de forzar con S sobre un modelo de MA(S).

Definidos estos términos, procederemos ahora a demostrar que MA(S)[S] implica que todo sistema de escaleras satisface $\mathcal{M}_{<}\omega$.

Antes de continuar probaremos un lema el cual usaremos más adelante.

Lema 18. *Sea $B = \{t_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq S$ no numerable. Entonces para todo $\gamma \in \omega_1$ existe una cadena $\{t_{\alpha_\xi} : \xi \in \gamma\}$ de tipo de orden γ.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumamos que $\alpha \neq \beta$ implica que $t_\alpha \neq t_\beta$. Notemos que existe $s \in S$ tal que B es denso bajo s.

Para ver esto, sea $D = \{r \in S : (B \text{ es denso bajo } r) \vee (B \cap \langle r \rangle = \emptyset)\}$. Claramente D es denso en S. Sea $A \subseteq D$ anticadena maximal. Sin pérdida de generalidad asumamos que $A = Lev_\delta(S)$ para algún $\delta \in \omega_1$. Notemos que si para todo $r \in A$ se cumple que $B \cap \langle r \rangle = \emptyset$, entonces $B \subseteq S_\delta = \{s \in S : l(s) < \delta\}$, lo cual es imposible pues S_δ es numerable. Por tanto, existe $s \in A$ tal que B es denso bajo s.

Sea $b \subseteq S$ una rama genérica tal que $s \subseteq b$. Como B es denso bajo s; en particular tenemos que $|b \cap B| = \omega_1$, luego, para todo $\gamma \in \omega_1$, existe $\alpha_\gamma \in \omega_1$ tal que $type(b \restriction_{\alpha_\gamma} \cap B) = \gamma$. Sea $r \in S$ tal que $r \Vdash$ "$type(b \restriction_{\alpha_\gamma} \cap B) = \gamma$", podemos asumir que $l(r) \geq \alpha_\gamma$, y por tanto $type(r \restriction_{\alpha_\gamma} \cap B) = \gamma$. □

Definición 19. Dados $\dot{f}$ un S-nombre para una función de $\text{lím}(\omega_1)$ a ω y $\dot{L} = \langle \dot{L}_\alpha : \alpha \in \text{lím}(\omega_1) \rangle$ un S-nombre para un sistema de escaleras total Podemos encontrar una función estrictamente creciente $g : \omega_1 \to \omega_1$ tal que para cada $\alpha \in \text{lím}(\omega_1)$ y cada nodo $s \in Lev_{g(\alpha)}(S)$ se tiene que s decide tanto a $\dot{f}(\alpha)$ como $\dot{L}_\alpha$ (pensando $\dot{L}_\alpha$ como una función de ω en α).

Sea $C = g[\omega_1]$ (para una de tales g) y definamos $S_C = \{s \in S : l(s) \in C\}$ con el orden heredado de S. Entonces definimos el forcing $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\dot{f}, \dot{L})$ por:

$$\mathbb{P} = \{(p, F) : p \in Fin(S_C, [\omega]^{<\omega}) \wedge F \in [\text{lím}(\omega_1)]^{<\omega}\}$$

y $(p, F) \leq (q, G)$ si, y sólo si $p \supseteq q$, $F \supseteq G$ y para todos $\alpha \in G$, $s \in dom(p) \setminus dom(q)$ y $t \in A(p)$

$$\Big[\Big((s \subseteq t) \wedge (l(t) \geq g(\alpha)) \wedge (t \Vdash \text{“}l_{S_C}(s) \in \dot{L}_\alpha \wedge \dot{f}(\alpha) = n\text{”})\Big) \implies (n \in p(s))\Big]$$

donde $A(p)$ es el conjunto de elementos minimales del dominio de p y $l_{S_C}(s)$ es la altura de s en S_C, la cual es igual a $g^{-1}(l(s))$.

Un filtro genérico G sobre $\mathbb{P}$ nos proporciona una función total F_G de S_C a $[\omega]^{<\omega}$ la cual es una S_C-uniformización de $\dot{f}$ sobre $\dot{L}$ en el sentido de $\mathcal{M}_{<\omega}$. Esto significa que realmente la función F_G nos da un S-nombre para una función F la cual uniformiza $\dot{f}$ en el sentido de $\mathcal{M}_{<\omega}$. Recordemos que como estamos asumiendo que S es un subconjunto de $\omega^{<\omega_1}$, entonces una rama genérica es una función de ω_1 a ω.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que g es la función identidad y trabajar con S en lugar de S_C. Esto con el objetivo de hacer los argumentos más claros y evitar un exceso de notación que haga el trabajo más tedioso. Luego, para cada $\alpha \in \text{lím}(\omega_1)$, podemos asumir que todo nodo $s \in Lev_\alpha(S)$ decide tanto a $\dot{f}(\alpha)$ como $\dot{L}_\alpha$.

El lector que se encuentre incómodo con esta situación puede repetir todos los argumentos que haremos a continuación utilizando la función original g para trasladar la información entre S y S_C.

Lema 20. *Sea G un filtro genérico sobre $\mathbb{P}$. Entonces*

$$h_G = \bigcup\{p : \exists F((p, F) \in G)\}$$

es una función total de S a $[\omega]^{<\omega}$ tal que si b es una rama genérica sobre S, entonces la función $H : \omega_1 \to [\omega]^{<\omega}$ definida por $H(\alpha) = h_G(b \restriction_\alpha)$ uniformiza f en el sentido de $\mathcal{M}_{<\omega}$.

Demostración. Para cada $s \in S$, notemos que $D_s = \{(p, F) : s \in dom(p)\}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Para ver esto, si $(p, F) \in \mathbb{P}$ es tal que $s \notin dom(p)$, definamos $a_s = \{n_t^\alpha : t \in A(p) \wedge \alpha \in F\}$ donde n_t^α es tal que $t \Vdash$ "$l(s) \in \dot{L}_\alpha \wedge \dot{f}(\alpha) = n_t^\alpha$", $(s \subseteq t)$ y $(l(t) \geq \alpha)$. Si alguna de las tres condiciones no se cumple, entonces definamos simplemente $n_t^\alpha = 0$. De este modo $(p \cup (s, a_s), F) \leq (p, F)$. Luego h_G es realmente una función total de S a $[\omega]^{<\omega}$

Ahora basta probar que para toda rama genérica b, para cada $\alpha \in \text{lím}(\omega_1)$ y para todos salvo una cantidad finita de $\beta \in L_\alpha$ se cumple que $f(\alpha) \in F(\beta)$ (en $V[b]$).

Notemos que para cada $\alpha \in \text{lím}(\omega_1)$, el conjunto $D_\alpha = \{(p, F) : \alpha \in F\}$ es denso por que $(p, F \cup \{\alpha\}) \leq (p, F)$ siempre se cumple. Entonces sea $(p_0, F_0) \in G$ tal que $\alpha \in F_0$. Escojamos algún $\beta \in \omega_1$ tal que

$$V[b] \models \beta \in L_\alpha \wedge b\restriction_\beta \notin dom(p_0)$$

Fijemos ahora $(p_1, F_1) \in G$ y $(p_2, F_2) \in G$ tales que $b\restriction_\beta \in dom(p_1)$ y $b\restriction_\alpha \in dom(p_2)$. Sea $(p, F) \in G$ una extensión común de (p_i, F_i) para $i \in 3$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $b\restriction_\alpha \in A(p)$ (de otro modo podemos trabajar con alguna extensión de $b\restriction_\alpha$ en $A(p)$). Entonces tenemos lo siguiente:

- $\alpha \in F_0$
- $b\restriction_\beta \in dom(p) \setminus dom(p_0)$
- $b\restriction_\alpha \in A(p)$
- $b\restriction_\beta \subseteq b\restriction_\alpha$
- $l\,(b\restriction_\alpha) \geq \alpha$
- $b\restriction_\alpha \Vdash$ "$l\,(b\restriction_\beta) \in \dot{L}_\alpha \wedge \dot{f}(\alpha) = n$" para algún $n \in \omega$

donde el último punto se debe a que estamos asumiendo que $S = S_C$. Entonces, como $(p, F) \leq (p_0, F_0)$, se tiene que:

$$V[b] \models f(\alpha) = n \in p(b\restriction_\beta) = h_G(b\restriction_\beta) = H(\beta)$$

con lo cual terminamos la prueba. $\square$

Proposición 21. *$MA(S)[S]$ implica que todo sistema de escaleras (total) satisface $\mathcal{M}_{<\omega}$.*

Usando el Lema 20, nos basta con probar que el producto $\mathbb{P} \times S$ es c.c.c. para probar la proposición anterior.

Lema 22. *$\mathbb{P} \times S$ es c.c.c..*

Demostración. Sea $\langle (t_\alpha, (p_\alpha, F_\alpha)) : \alpha \in \omega_1 \rangle \subseteq \mathbb{P} \times S$. Podemos asumir que $\{dom(p_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ y $\{F_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ forman Δ-sistemas con raices r y R respectivamente. También podemos asumir que para todos $\alpha, \beta \in \omega_1$ se tiene que $(p_\alpha \restriction_r = p_\beta \restriction_r)$ y que existe una función creciente $h : \omega_1 \to \omega_1$ tal que $\{l(s) : s \in r\} \cup R \subseteq h(0)$, y para cada $\alpha \in \omega_1$ también $\{l(s) : s \in dom(p_\alpha) \setminus r\} \cup (F_\alpha \setminus R) \subseteq (h(\alpha), h(\alpha+1))$.

Notemos que para usar Δ-sistema estamos asumiendo que $\{(p_\alpha, F_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ es no numerable, ya que si este no fuera el caso podemos asumir que todos los (p_α, F_α) son iguales y simplemente basta tomar $\alpha, \beta \in \omega_1$ tales que $t_\alpha \parallel t_\beta$, lo cual es posible por que S es c.c.c..

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{t_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es no numerable. De este modo podemos asumir que también $t_\alpha \in (h(\alpha), h(\alpha+1))$. Usando el Lema 18, sea $\{t_{\alpha_i} : i \in \omega+1\}$ una cadena de tipo de orden $\omega+1$ en S. Para hacer los argumentos más limpios, asumamos también que $\{t_i : i \in \omega+1\}$ es dicha $\omega+1$-cadena.

En caso de que $\{t_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ no fuera no numerable, podemos simplemente tomar los primeros $\omega+1$ elementos $\{(p_i, F_i) : i \in \omega+1)\}$, asumir que los respectivos t_i's son todos iguales, y omitir el paso anterior.

Para terminar la prueba, probaremos que existen $\alpha, \beta \in \omega+1$ tales que (p_α, F_α) y (p_β, F_β) son compatibles.

Fijemos $s \in A(p_\omega)$ y $\eta \in F_\omega \setminus R$ y definamos $B_s^\eta = \{\gamma < h(\omega) : s \Vdash \text{“}\gamma \in \dot{L}_\eta\text{”}\}$. Notemos que para cada $s \in A(p_\omega)$ y cada $\eta \in F_\omega$ el conjunto B_s^η es finito y en consecuencia, también lo es $B = \bigcup\{B_s^\eta : s \in A(p_\omega) \wedge \eta \in F_\omega\}$. Luego, existe un $n \in \omega$ tal que $B \cap (h(n), h(n+1)) = \emptyset$. Probaremos que (p_ω, F_ω) y (p_n, F_n) son compatibles.

Definamos $(p', F') = (p_\omega \cup p_n, F_\omega \cup F_n)$. Para ver que $(p', F') \leq (p_n, F_n)$ sean $\alpha \in F_n$ y $s \in dom(p') \setminus dom(p_n) = dom(p_\omega) \setminus r \subseteq (h(\omega), h(\omega+1))$. Como $\alpha \in F_n \subseteq h(0) \cup (h(n), h(n+1))$, se tiene que $\alpha < l(s)$, y en consecuencia ningún $t \in A(p')$ puede forzar que $l(s) \in \dot{L}_\alpha$. Luego, trivialmente se tiene que $(p', F') \leq (p_n, F_n)$.

Para ver que $(p', F') \leq (p_\omega, F_\omega)$, sean $\eta \in F_\omega$ y $s \in dom(p') \setminus dom(p_\omega) = dom(p_n) \setminus r \subseteq (h(n), h(n+1))$. Si se da el caso de que $\eta \in R$, de nuevo se tiene que $l(s) > \eta$ y ningún $t \in A(p')$ puede forzar $l(s) \in \dot{L}_\eta$. Por otro lado si $\eta \in F_\omega \setminus R$, y tomamos $t \in A(p')$ tal que $s \subseteq t$ y $l(t) \geq \eta > h(\omega)$, en particular tenemos que $t \in A(p_\omega)$, y por la elección de n satisfaciendo $B \cap (h(n), h(n+1)) = \emptyset$, se cumple que $t \nVdash \text{“}l(s) \in \dot{L}_\eta\text{”}$. $\square$

Propiedades de anti-uniformización

Con las Proposiciones 14 y 21, tenemos que MA(S)[S] implica que todo sistema de escaleras satisface solo la propiedad de uniformización $\mathcal{M}_{<\omega}$ y ninguna otra. Por otro lado, un tipo opuesto de propiedades son las llamadas propiedades de anti-uniformización. A partir de ahora S denota de nuevo un subconjunto estacionario de $\text{lím}(\omega_1)$.

Definición 23. Un sistema de escaleras $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S \rangle$ satisface la propiedad:

- (G_1) Si para cada $f : \omega_1 \to \omega$, el conjunto

  $$\{\alpha \in S : |f[L_\alpha]| = \aleph_0\}$$

  no es estacionario.

- (G_2) Si para cada $f : \omega_1 \to \omega$, el conjunto

  $$\{\alpha \in S : f \restriction_{L_\alpha} \text{ es finito a uno}\}$$

  no es estacionario.

- (G_3) Si para cada $f : \omega_1 \to \omega$, el conjunto

  $$\{\alpha \in S : f \restriction_{L_\alpha} \text{ es finalmente uno a uno}\}$$

  no es estacionario.

- (H_1) Si para cada $f : \omega_1 \to \omega$, el conjunto
$$\{\alpha \in S : |f[L_\alpha]| < \aleph_0\}$$
es estacionario.
- (H_2) Si para cada $f : \omega_1 \to \omega$, el conjunto
$$\{\alpha \in S : f \restriction_{L_\alpha} \text{ no es finito a uno}\}$$
es estacionario.
- (H_3) Si para cada $f : \omega_1 \to \omega$, el conjunto
$$\{\alpha \in S : f \restriction_{L_\alpha} \text{ no es finalmente uno a uno}\}$$
es estacionario.

El nombre de propiedades de anti-uniformización se debe a que si un sistema de escaleras $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ es uniformizable, entonces no satisface H_3. Para ver esto, sea $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha \in S\rangle$ una sucesión de funciones inyectivas, luego si f uniformiza la sucesión $\bar{f}$, entonces se tiene que $f \restriction_{L_\alpha}$ es finalmente uno a uno para todo $\alpha \in S$.

Del mismo modo que ciertas propiedades de uniformización son equivalentes a ciertas propiedades del espacio X_L, tenemos que la propiedad H_2 tiene su traducción topológica.

Lema 24. *Un sistema de escaleras $L = \{L_\alpha : \alpha \in S\}$ satisface H_2 si, y sólo si $S' \times \{1\}$ no es un subconjunto G_δ de X_L para algún $S' \subseteq S$ de la forma $S' = C \cap S$ donde $C \subseteq \omega_1$ es un club.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $S\times\{1\}$ es G_δ. Sea $S\times\{1\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, donde los U_n son decrecientes. Definamos $f : \omega_1 \to \omega$ por $f(\beta) = \min\{n \in \omega : (\beta, 0) \notin U_n\}$.

Sea $\alpha \in S$; como $(\alpha, 1) \in S = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, para cada $n \in \omega$ se cumple que $L_\alpha \setminus U_n$ es finito, y por tanto $f \restriction_{L_\alpha}$ es finito a uno.

($\Leftarrow$) Supongamos que L no satisface H_2 y sea $f : \omega_1 \to \omega$ que lo testifica. Entonces existe un club $C \subseteq \omega_1$ tal que para todo $\alpha \in S' = C \cap S$, $f \restriction_{L_\alpha}$ es finito a uno. Así, definiendo
$$U_n = S' \times \{1\} \bigcup \cup\{(f^{-1}(m), 0) : m < n\}$$
se tiene que los U_n son abiertos y $S' = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. $\square$

En general, supondremos que $S = S'$ renombrando la escalera si es necesario.

Algunas formas de obtener sistemas de escaleras con propiedades de antiuniformización es utilizando principios de adivinanza.

Definición 25. Decimos que un sistema de escaleras $\{L_\alpha : \alpha \in \text{lím}(\omega_1)\}$ es una sucesión $\clubsuit$, si para cada $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$, se tiene que $\{\alpha \in \omega : L_\alpha \subseteq^* A\}$ es un conjunto estacionario.

Lema 26. *Si un sistema de escaleras $L = \langle L_\alpha : \alpha \in \text{lím}(\omega_1)\rangle$ es una sucesión $\clubsuit$, entonces satisface H_1.*

Demostración. Sean $f : \omega_1 \to \omega$ y $n \in \omega$ tal que $A := f^{-1}(n)$ es no numerable. Luego, el conjunto $\{\alpha \in \omega : L_\alpha \subseteq^* A\}$ es estacionario, y claramente para cada uno de estos $\alpha \in \omega_1$ se tiene que $|f[L_\alpha]| < \aleph_0$. $\square$

Definición 27. Decimos que una sucesión $\{N_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una sucesión $\diamondsuit^\#$, si cada N_α es un submodelo elemental numerable de una porción suficiente de ZFC y se tiene que:

- $\{N_\alpha \cap \mathcal{P}(\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ forma una sucesión $\diamondsuit^+$.
- $\{\alpha : \alpha = (\omega_1)^{N_\alpha}\}$ es estacionario.

Recordemos que $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1\rangle$ es una sucesión $\diamondsuit^+$, si para cada $\alpha \in \omega_1$, A_α es un subconjunto numerable de $\mathcal{P}(\alpha)$, y para cada $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$, el conjunto

$$C = \{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha \in A_\alpha\}$$

es un club, y además, para todo $\alpha \in C$ se tiene que $C \cap \alpha \in A_\alpha$.

Proposición 28. *$\diamondsuit^\#$ implica que existe una escalera que satisface G_1.*

Demostración. La prueba se puede encontrar en [1]. $\square$

El diagrama (2) muestra las relaciones entre las propiedades de antiuniformización. En dicho diagrama $\diamondsuit^\# \to G_1$ es simplemente una forma corta de decir que $\diamondsuit^\#$ implica que existe un sistema de escaleras que satisface G_1.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\diamondsuit^{\#} & & \clubsuit & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
G_1 & \longrightarrow & H_1 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
G_2 & \longrightarrow & H_2 & \longleftrightarrow & S \text{ no es } G_\delta \text{ en } X_L \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
G_3 & \longrightarrow & H_3 & &
\end{array}
$$

Figura 2: Relaciones de anti-uniformización

En [9], Shelah construyó un sistema de escaleras $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ tal que X_L es normal pero S no es un subconjunto G_δ en X_L, lo cual es equivalente a que L satisface $\mathcal{P}_0$ y H_2. Este resultado muestra que una cierta combinación de propiedades de uniformización con propiedades de antiuniformización da lugar a espacios topológicos los cuales sirven como fuentes de ejemplos y contraejemplos.

La siguiente es la pregunta abierta más relevante respecto a estas propiedades:

Pregunta 29. *¿Existe un sistema de escaleras $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ que satisface $\mathcal{M}_{<\omega}$ y G_1?*

La importancia de esta pregunta reside en que hay un par de preguntas topológicas abiertas las cuales se resuelven con la existencia de un sistema de escaleras que satisfasga $\mathcal{M}_{<\omega}$ y G_1. Por un lado, la pregunta de si todo subespacio numerablemente paracompacto de ω_1^2 es normal, tiene una respuesta negativa (consistentemente) con la existencia de sistema de escaleras como el que mencionamos. Por otro lado, la pregunta de si es consistente que exista un espacio numerablemente paracompacto, localmente compacto, *screenable* (cada cubierta abierta tiene un refinamiento σ-disjunto) el cual no es paracompacto, es equivalente a la existencia de tal sistema de escaleras (para espacios de tamaño ω_1; pero se puede generalizar definiendo las propiedades equivalentes en cardinales más grandes).

Otra pregunta planteada en [1] es la siguiente: ¿es consistente tener una sucesión $\clubsuit$ que satisface $\mathcal{M}_{<\omega}$?

Luego, con los resultados vistos hasta ahora, y en busca de responder a esta pregunta y a la Pregunta 29, surgieron las siguientes preguntas:

- ¿$MA(S)[S]$ implca que existe un sistema de escaleras que satisface G_1?
- ¿$MA(S)[S]$ implca que existe una sucesión $\diamondsuit^{\#}$?
- ¿$MA(S)[S]$ implca que existe una sucesión $\clubsuit$?

Ahora sabemos que la respuesta a las primeras dos preguntas es negativa, pues si tenemos una escalera $L = \langle L_\alpha : \alpha \in S\rangle$ que satisface G_1, y como sabemos que toda escalera satisface $\mathcal{M}_{<\omega}$, entonces se cumple que para cada $f : S \to \omega$ existe un club C_f tal que si F uniformiza L en el sentido de $\mathcal{M}_{<\omega}$, entonces F es testigo para f de que la escalera $L' = \langle L_\alpha : \alpha \in C_f \cap S\rangle$ satisface las condiciones del Lema 13. Luego, utilizando la función f usada en la prueba de la Proposición 14, y repitiendo la prueba usando el hecho de que $C_f \cap S$ es estacionario, podemos ver que ninguna función F puede satisfacer las condiciones del Lema 13 en la escalera $L' = \langle L_\alpha : \alpha \in C_f \cap S\rangle$, y por tanto la suposición de la existencia de una escalera que satisface G_1 nos lleva a una contradicción.

También conjeturamos que la respuesta a la tercer pregunta es negativa sin que tengamos por ahora una prueba completa a la mano.

De cualquier modo, sería interesante determinar exactamente cuáles propiedades de antiuniformización se cumplen en extensiones de la forma $MA(S)[S]$, como ya lo hicimos con las propiedades de uniformización. Incluso, aún podríamos suponer que nuestras hipótesis son más fuertes, sustituyendo $MA(S)[S]$ por $PFA(S)$, si es necesario, el cual se define de manera similar.

Bibliografía

[1] Zoltán Balogh, Todd Eisworth, Gary Gruenhage, Oleg Pavlov, and Paul Szeptycki. Uniformization and anti-uniformization properties of ladder systems. *Fund. Math*, 181:189–213, 2004.

[2] Keith J Devlin. The combinatorial principle $\diamondsuit^{\#}$. *Journal of Symbolic Logic*, pages 888–899, 1982.

[3] Keith J. Devlin and Saharon Shelah. A weak version of $\diamond$ which follows from $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. *Israel Journal of Mathematics*, 29(2):239–247, Jun 1978.

[4] Ryszard Engelking. General topology, sigma series in pure mathematics, vol. 6, 1989.

[5] Ilijas Farah. Oca and towers in p (n)/fin. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 37(4):861–866, 1996.

[6] Kenneth Kunen. *Set theory an introduction to independence proofs*, volume 102. Elsevier, 2014.

[7] Paul Larson. An variation for one souslin tree. *The Journal of Symbolic Logic*, 64(1):81–98, 1999.

[8] Paul Larson and Stevo Todorcevic. Katetov's problem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 354(5):1783–1791, 2002.

[9] S Shelah. A consistent counterexample in the theory of collectionwise hausdorff spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 65(2):219–224, 1989.

[10] Stevo Todorcevic. Forcing with a coherent souslin tree. *preprint*, 2011.