



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



# Efectos de una distribución aleatoria de materia en espacio-tiempos estáticos con simetría planar

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

RUBÉN OMAR ACUÑA CÁRDENAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. OLIVIER CHARLES-ALBERT SARBACH

CO-DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUCA TESSIERI

*Morelia, Michoacán*

*Febrero 2019*

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Descripción del espacio-tiempo de fondo</b>	<b>5</b>
1.1. Caso newtoniano	6
1.1.1. Primera derivación (integración directa)	7
1.1.2. Segunda derivación (por medio del pegado de las soluciones en el vacío)	9
1.1.3. Equivalencia entre los resultados de las dos derivaciones	12
1.2. Caso relativista	14
1.2.1. Obtención de la curvatura y el tensor de Einstein	15
1.2.2. Resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío.	17
1.2.3. Solución en presencia de las láminas	21
1.2.4. Forma pedestre del pegado de las láminas	24
1.2.5. Reformulación geométrica de las condiciones de pegado	26
1.2.6. Solución de las ecuaciones para $N$ láminas	30
1.3. Límite newtoniano	39
1.3.1. Enésima lámina	40
<b>2. Espacio-Tiempo como sistema desordenado</b>	<b>43</b>
2.1. Modelo de Anderson Unidimensional (1D)	44
2.1.1. Teorema de Furstenberg	46
2.1.2. Fórmula de Thouless	48
2.2. Equivalencia entre la matriz de transferencia del espacio-tiempo y la matriz de transferencia del modelo de Anderson 1D.	49

*ÍNDICE GENERAL*

II

2.2.1. Cálculo del exponente de Lyapunov. . . . .	52
2.3. Significado físico del exponente de Lyapunov en el espacio-tiempo . . . . .	54
2.4. Correcciones del orden $1/N$ al exponente de Lyapunov . . . . .	56
2.4.1. Desorden compositivo . . . . .	57
2.4.2. Desorden estructural . . . . .	60
<b>3. Conclusiones</b>	<b>64</b>

# Resumen

En este trabajo se presenta un análisis de las propiedades de un espacio-tiempo estático con simetría planar considerando materia distribuida de manera aleatoria. Más específicamente, se considera un modelo del espacio-tiempo conformado por  $N$  láminas de extensión infinita y espesor infinitesimal con desorden. La aleatoriedad está dada por fluctuaciones en la densidad de masa o fluctuaciones en la distancia relativa entre láminas cercanas, es decir, desorden compositivo o estructural sin correlaciones. Un resultado central de esta tesis es una demostración de la equivalencia entre el modelo de Anderson unidimensional y el modelo del espacio-tiempo con desorden puramente compositivo o puramente estructural. Esta equivalencia permite analizar las propiedades del espacio-tiempo con las herramientas de la física de materia condensada. Se usa el teorema de Furstenberg y la técnica de matrices de transferencia para el cálculo del exponente de Lyapunov. Se establece una conexión entre este exponente y el comportamiento de la curvatura del espacio-tiempo para  $N$  grande.

**Palabras clave:** Relatividad general, sistemas unidimensionales, medios aleatorios, localización de Anderson, matrices aleatorias.

# Abstract

In this work, a study of the properties of static plane symmetric space-time is presented, considering randomly distributed matter. More specifically, a space-time model consisting of  $N$  parallel infinite planes with disorder is considered. The random distribution of matter appears either as fluctuations in the density or fluctuations in the relative distances between nearby planes, corresponding to either composite or structural disorder without correlations. A central result of this work is a proof of the equivalence between the one-dimensional Anderson model and the space-time model with purely composite or purely structural disorder. This equivalence allows one to analyze the space-time properties based on tools from condensed matter physics. The Furstenberg theorem and the technique of transfer matrices are used to calculate the Lyapunov exponent. A connection between this exponent and the behavior of the space-time curvature for large  $N$  is established.

**Keywords:** General relativity, one-dimensional systems, random media, Anderson localization, random matrices

# Introducción

En la actualidad las investigaciones en las observaciones astronómicas dependen del análisis de ondas electromagnéticas y de rayos cósmicos, pero la detección reciente de ondas gravitacionales (OGs) [1] ha despertado un gran interés teórico-experimental, dado que abre la expectativa de ampliar significativamente el campo de observación y de extender las fuentes de información sobre la estructura del Universo. Las ondas gravitacionales son perturbaciones del espacio-tiempo generadas por cambios bruscos en campos fuertes gravitacionales los cuales son producidos por ejemplo por sistemas binarios, como estrellas o agujeros negros en órbita mutua o simplemente la rotación de un agujero negro con una gran protuberancia girando alrededor de su eje, a cuyos sucesos se les llama fuentes de OGs.

Hoy en día el estudio numérico de OGs se lleva a cabo considerando que las fuentes son sistemas aislados [2, 3, 4] y que las OGs se propagan en el vacío, una vez que están lejos de la fuente. Este trabajo va encaminado al estudio de la propagación de OGs a través de una región del espacio-tiempo donde el medio no es homogéneo, más concretamente, se quiere analizar los efectos de la transmisión de OGs a través de regiones extendidas del espacio-tiempo en las que se halla materia distribuida en forma aleatoria. La región a examinar es lo suficientemente lejana a las fuentes para que sea válida la aproximación al campo débil gravitacional. Esquemáticamente se puede ver en la Fig. 1, que muestra a las OGs en la región cerca de la fuente y en la región de campo débil (ondas planas), además las ondas van atravesando materia, representada por galaxias espirales en la figura.

Sin embargo si se considera el esquema completo sería algo complicado de plantear para una primera aproximación, por lo cual el problema anterior se puede reducir considerando un modelo simplificado en el cual la materia está distribuida en  $N$  láminas paralelas de extensión infinita y espesor despreciable, colocadas a una distancia finita, véase Fig. 2. El modelo de láminas de

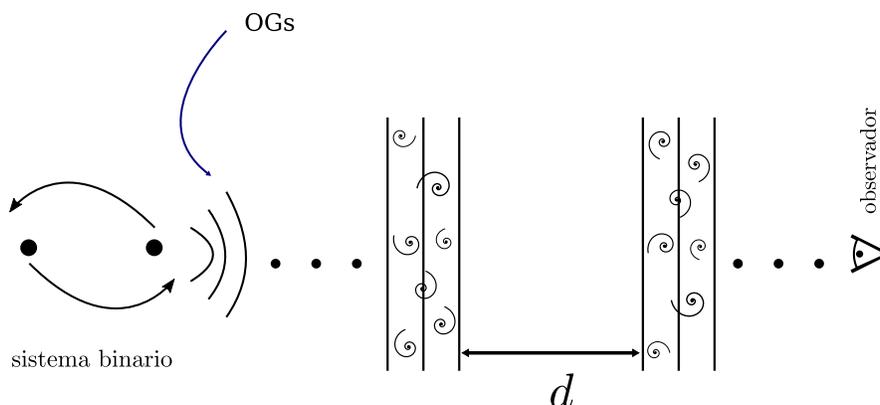


Figura 1: Esquema minimalista que representa la emisión de OGs por un sistema binario de objetos compactos ya sea como agujeros negros o estrella de neutrones. Además las OGs a su paso por el espacio-tiempo atraviesan regiones con materia, indicadas por galaxias espirales.

infinitas se adopta análogamente a lo que se hace en electrostática, cuando se considera un capacitor de placas paralelas cuya extensión se asume infinita para evaluar el campo en puntos cercanos a la placa. Lo anterior permite reducir el problema al análisis de un modelo unidimensional, por ejemplo, al considerar dirección  $x$  perpendicular a la superficie de las placas entonces se tiene simetría traslacional en la dirección  $(y, z)$ . En este trabajo, se supone entonces un espacio-tiempo con la métrica de la forma

$$g = -\alpha(t, x)^2 dt^2 + \beta(t, x)^2 dx^2 + \gamma(t, x)^2 (dy^2 + dz^2), \quad (1)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  son funciones de  $(t, x)$ . Y son determinadas resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein. Obsérvese que las componentes  $g_{yy}$ ,  $g_{zz}$  son iguales, esto es porque se está considerando isotropía en la dirección transversal. La materia es modelada como un fluido perfecto anisotrópico, es decir tendrá expresiones para la densidad de energía  $\rho(t, x)$  y presión  $p(t, x)$ , con su respectiva ecuación de estado  $p(\rho)$ .

Retomando el punto en donde la materia está distribuida de manera aleatoria, se hace a través de tomar pequeñas variaciones en la densidad de energía superficial  $\sigma_j = \sigma + \delta\sigma_j$  y pequeñas variaciones en la distancia entre las láminas  $d_j = d + \delta d_j$ , véase Fig. 2. Dichas variaciones tienen el nombre de desorden y hay diferentes tipos de él, para el caso de materia distribuida en el espacio-tiempo se le puede asociar desorden estructural (distancias alea-

torias) y/o desorden compositivo (aleatoriedad en la masa o en la densidad de energía). El análisis se hace a través de una semejanza con los modelos de enlace fuerte de la materia condensada, por ejemplo, el modelo de Anderson.

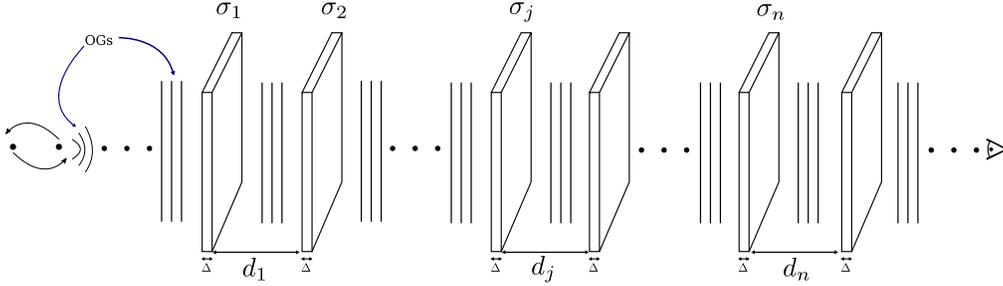


Figura 2: Esquema de la propagación de OGs a través de materia. La materia está distribuida en  $N$  de láminas de anchura  $\Delta$  y extensión infinita. Donde  $\sigma_j$  representa la densidad de energía superficial,  $d_j$  la distancia entre las láminas.

En este trabajo de tesis se plantean tres objetivos fundamentales. En primer lugar, se quiere encontrar una configuración estática del espacio-tiempo de fondo, es decir, el espacio-tiempo en la ausencia de OGs. Lo anterior se logra resolviendo las ecuaciones de Einstein-Euler para el escenario mostrado en la Fig. 2 con la simplificación de suponer que el espesor ( $\Delta$ ) es muy pequeño comparado con la distancia ( $d$ ) entre las láminas, es decir

$$\Delta \ll d; (\Delta \rightarrow 0),$$

por lo cual se solucionan las ecuaciones de Einstein-Euler en el vacío más la consideración de condiciones de pegado (frontera) sobre las láminas.

En segundo lugar, se quiere analizar el espacio-tiempo de fondo como un sistema desordenado. Es decir, como cambian las propiedades del espacio-tiempo cuando se consideran fluctuaciones aleatorias en la densidad de masa en las láminas y/o la distancia entre las láminas.

En tercer lugar, se encamina el trabajo para estudiar la propagación de ondas a través del espacio-tiempo de fondo obtenido en el primer objetivo junto con el análisis del segundo objetivo. El tipo de onda puede ser escalar, electromagnética y /o gravitacional. El estudio de este punto podría aclarar si, en analogía a lo que ocurre con la propagación de ondas electrónicas en materia condensada, también en este contexto se producen fenómenos como

la formación de bandas permitidas de energía para la propagación de las OGs o la localización de ondas mismas por efecto del carácter aleatorio de la distribución de materia en el espacio-tiempo de fondo.

## Descripción de los capítulos de la tesis

Este trabajo de tesis va encaminado al estudio de la propagación de ondas a través de una región del espacio-tiempo donde el medio es inhomogéneo. Por lo que la estructura de este trabajo está diseñada de tal manera que primero se estudie la forma del espacio-tiempo (capítulo 1) y después sus propiedades al considerar desorden (capítulo 2).

En el capítulo 1 se presentan las soluciones del espacio-tiempo de fondo en el marco de la teoría de Newton y en el marco de la teoría general de la relatividad, el espacio-tiempo está representado como en la Fig. 2. En relatividad general se encuentra la solución del espacio-tiempo de una lámina resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y con materia, usando a su vez condiciones de pegado apropiadas. Se obtiene la solución para un espacio-tiempo de  $N$  láminas considerando la solución a través de una matriz de transferencia, después se analiza el caso de láminas equidistantes e idénticas y se obtiene una expresión analítica. Al final del capítulo se obtiene el límite newtoniano en la solución del espacio-tiempo de la relatividad general llegando a una correspondencia.

En el capítulo 2 se analiza el espacio-tiempo con desorden. Se encuentra que si se considera desorden puramente compositivo o puramente estructural en el modelo de espacio-tiempo hay una correspondencia exacta con el modelo de Anderson unidimensional. Se analizan las propiedades del modelo del espacio-tiempo con herramientas de la materia condensada, por ejemplo, matrices de transferencia y el teorema de Furstenberg. Se describe en este capítulo el significado físico del exponente de Lyapunov respecto al modelo del espacio-tiempo.

**Convenciones:** En esta tesis se va a trabajar en unidades para las cuales la velocidad de la luz  $c = 1$ , de tal manera que  $G_N \sigma$  tiene unidad de inverso de longitud, donde  $G_N$  es la constante de gravitación universal y  $\sigma$  la densidad de masa superficial típica de las láminas.

# Capítulo 1

## Descripción y derivación del espacio-tiempo de fondo

En este capítulo se considera el modelo de espacio-tiempo conformado por  $N$  láminas paralelas de extensión infinita y espesor infinitesimal con una densidad de masa asociada, véase Fig. 1.1, las regiones que se encuentran entre dos láminas sucesivas tienen una densidad de masa nula.

El modelo descrito anteriormente se resuelve dentro del marco de la teoría de gravitación de Newton y después en la teoría de la relatividad general. Las soluciones están descritas a través de una matriz de transferencia, esta matriz conecta las condiciones de frontera de todo el espacio-tiempo. El caso newtoniano es relevante pues da un punto de referencia en el límite clásico de la relatividad general.

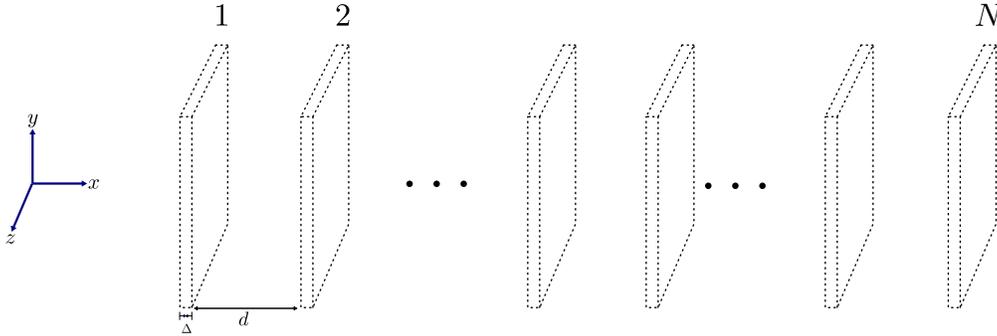


Figura 1.1: Esquema minimalista del modelo del espacio-tiempo de fondo. Representa a  $N$  láminas paralelas de extensión infinita y anchura  $(\Delta)$  infinitesimal, separadas una distancia finita  $d$ .

## 1.1. Caso newtoniano

En esta sección se estudia la solución del modelo descrito en el párrafo anterior, utilizando la teoría de gravitación de Newton. La representación gráfica del modelo se muestra en la Fig. 1.2, para este caso se considera que la  $j$ -ésima lámina esté en la posición  $x_j$  del espacio, colocadas una de otra una distancia finita y que cada una de ellas contenga una densidad superficial de masa  $\sigma_j$ . La ecuación que rige este sistema es la ecuación de Poisson gravitacional

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G_N \rho, \quad (1.1)$$

donde  $\nabla^2$  es el laplaciano<sup>1</sup>,  $\Phi$  una función escalar que representa el potencial gravitacional,  $G_N$  la constante de gravitación universal y  $\rho$  la densidad volumétrica de masa. Se resuelve la ec. (1.1) de dos formas distintas: la primera es integrando directamente y la segunda se soluciona la ecuación de Laplace<sup>2</sup> con condiciones de frontera sobre la  $n$ -ésima lámina. Se obtiene que las dos formas de obtener la solución es semejante, como es de esperarse.

<sup>1</sup> $\nabla^2 \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ .

<sup>2</sup>Ecuación de Poisson en el vacío.

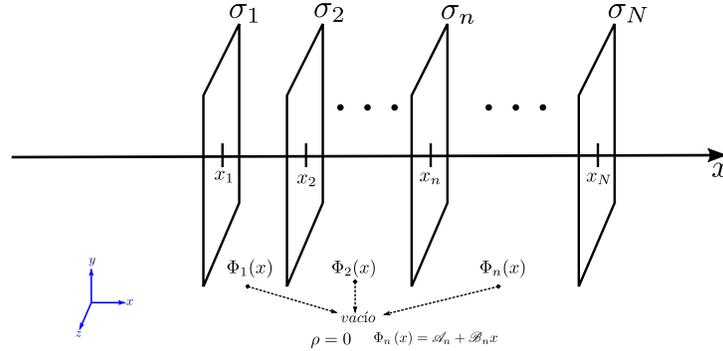


Figura 1.2: Esquema minimalista del fondo Newtoniano, con una configuración de  $N$  láminas de extensión infinita y anchura despreciable. Con  $\sigma_n$  la densidad de masa superficial en la  $n$ -ésima lámina y  $\Phi_n(x)$  el potencial gravitacional en la  $n$ -ésima región.

### 1.1.1. Primera derivación (integración directa)

Se toma la ec. (1.1) y se considera que la densidad volumétrica de masa es de la forma

$$\rho(x, y, z) = \sum_{j=1}^N \sigma_j \delta(x - x_j). \quad (1.2)$$

Obsérvese que la densidad volumétrica de masa está determinada por las densidades de masa superficial  $\sigma_j$  en cada una de las posiciones donde se encuentran las láminas. Debido a la simetría traslacional en  $(y, z)$  que tiene el sistema, se puede considerar el ansatz en el cual el potencial gravitacional no depende de  $(y, z)$ ,  $\Phi = \Phi(x)$ . Entonces la ec. (1.1) con (1.2) se simplifica como:

$$\Phi''(x) = \frac{d^2\Phi}{dx^2}(x) = 4\pi G_N \sum_{j=1}^N \sigma_j \delta(x - x_j),$$

donde se tiene una ecuación diferencial de segundo orden para  $\Phi$ .

Para encontrar la solución primero se integra desde  $-\infty$  hasta un cierto  $x$ , se asume  $x$  en el intervalo  $x_n < x < x_{n+1}$  (con  $x_0 = -\infty$  y  $x_{N+1} = \infty$ ). Es debido notar que la sumatoria tiene un límite superior hasta la  $n$ -ésima

lámina, con  $n \leq N$

$$\Phi'(x) \overbrace{-\Phi'(-\infty)}^{F_{-\infty}} = \int_{-\infty}^x \Phi''(\tilde{x}) d\tilde{x} = 4\pi G_N \overbrace{\int_{-\infty}^x \sum_{j=1}^n \sigma_j \delta(\tilde{x} - x_j) d\tilde{x}}{=\sum_{j=1}^n \sigma_j},$$

donde  $F_{-\infty}$  es la fuerza gravitacional a la izquierda de la primer lámina. La forma final de la integral es

$$\Phi'(x) = -F_n, \quad x_n < x < x_{n+1}, \quad (1.3)$$

donde  $F_n = F_{-\infty} - 4\pi G_N \sum_{j=1}^n \sigma_j$ , la cual describe la fuerza gravitacional en el intervalo  $(x_n, x_{n+1})$ . La gráfica de (1.3) se muestra en la Fig. 1.3.

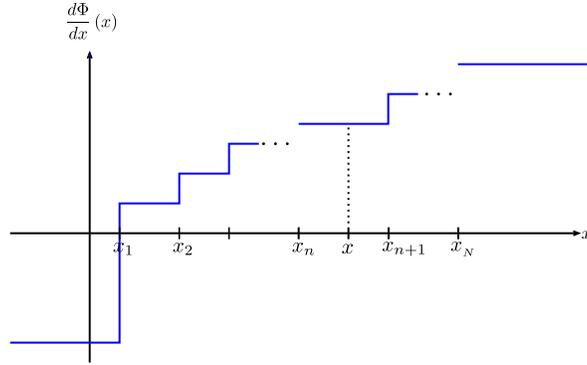


Figura 1.3: Gráfica de  $\Phi'(x)$  respecto a  $x$ .

Ahora se integra nuevamente (1.3) desde  $x_1$  a  $x$ , con  $x$  en el intervalo  $(x_n, x_{n+1})$ , y se llega a la siguiente expresión:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) F_j - (x - x_n) F_n, & x_n < x < x_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1, \\ -(x - x_1) F_{-\infty}, & x < x_1, \\ -\sum_{j=1}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) F_j - (x - x_N) F_N & x > x_N, \end{cases} \quad (1.4)$$

donde, sin pérdida de generalidad, se elige la constante de integración de forma tal que  $\Phi(x_1) = 0$ .

### 1.1.2. Segunda derivación (por medio del pegado de las soluciones en el vacío)

Ahora se resuelve la ec. (1.1) en el vacío y se imponen condiciones de pegado en los bordes de cada lámina para llegar a una forma semejante a la ec. (1.4). Para hacer lo anterior se considera la  $n$ -ésima lámina y las regiones a la izquierda y derecha, como se muestra en la Fig. 1.2.

La ec. (1.2) establece que la densidad de masa  $\rho$  es idénticamente cero en la región entre dos láminas sucesivas, entonces se ve directamente que la solución de la ec. (1.1) es:

$$\Phi(x) = \mathcal{A}_n + \mathcal{B}_n x, \quad x_n < x < x_{n+1}, \quad (1.5)$$

donde  $\mathcal{A}_n$  y  $\mathcal{B}_n$  son constantes de integración a determinar y dependen de cada una de las regiones entre las láminas. En cada intervalo  $x_n < x < x_{n+1}$  la fuerza gravitacional está dada por

$$F_n = -\Phi'(x) = -\mathcal{B}_n. \quad (1.6)$$

**Condiciones de pegado:** Para solucionar la ec. (1.1) para todo el espacio, se consideran condiciones de pegado sobre cada lámina, que son:

- a) Continuidad de  $\Phi$  en  $x = x_n$ .
- b) Salto de la derivada  $\Phi'(x)$  en  $x_n$ , que es debido a la forma de  $\rho(x, y, z)$  en la ec. (1.2). Y se obtiene integrando la ec. (1.1) en el intervalo  $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$  que corresponde a la  $n$ -ésima lámina y con  $\varepsilon \downarrow 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \Phi'(x_n + \varepsilon) - \Phi'(x_n - \varepsilon) &= \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} \Phi''(x) dx \\ &= 4\pi G_N \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} \sigma_n \delta(x - x_n) dx = 4\pi G_N \sigma_n, \end{aligned}$$

de lo anterior se deriva que la derivada primera del potencial tiene una

discontinuidad o salto<sup>3</sup> en  $x_n$  igual a

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\Phi'(x_n + \varepsilon) - \Phi'(x_n - \varepsilon)] = 4\pi G_N \sigma_n. \quad (1.7)$$

Al aplicar las condiciones a) y b) en la ec. (1.5) resulta

a)

$$\mathcal{A}_{n-1} + \mathcal{B}_{n-1}x_n = \mathcal{A}_n + \mathcal{B}_n x_n. \quad (1.8)$$

b) Tomando las ecs. (1.5) y (1.6), resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{d\Phi}{dx}(x_n + \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{B}_n \Big|_{x=x_n+\varepsilon} = \mathcal{B}_n, \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{d\Phi}{dx}(x_n - \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{B}_{n-1} \Big|_{x=x_n-\varepsilon} = \mathcal{B}_{n-1}, \end{aligned}$$

sustituyendo los resultados anteriores en la ec. (1.7)

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{n-1} + \mathbf{c}_n, \quad (1.9)$$

donde la constante  $\mathbf{c}_n$  se define como

$$\mathbf{c}_n := 4\pi G_N \sigma_n. \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (1.10)$$

En las ecs. (1.8) y (1.9), se tiene del lado derecho coeficientes de índice  $n$  y del lado izquierdo coeficientes con índice  $n-1$ , entonces las anteriores ecuaciones se pueden reformular en forma matricial como:

$$\mathbf{M}_n \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}_n \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{n-1} \\ \mathcal{B}_{n-1} \end{pmatrix} + \mathbf{c}_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

donde  $\mathbf{M}_n$  es una matriz diagonal superior, dada por

$$\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con inversa } \mathbf{M}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

---

<sup>3</sup>De aquí en adelante se denotará el salto de una función  $F(x)$  como

$$[F(x)]_{x=x_n} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [F(x_n + \varepsilon) - F(x_n - \varepsilon)]$$

Se multiplica ambos lados de la ec. (1.11) por la izquierda con  $\mathbf{M}_n^{-1}$ , se obtiene

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{n-1} \\ \mathcal{B}_{n-1} \end{pmatrix} + \mathbf{c}_n \begin{pmatrix} -x_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

es una relación de recurrencia y dice que la solución  $n$ -ésima se obtiene a través de las soluciones de menor índice. Y al desarrollar explícitamente la ec. (1.13) (iterando  $N$ -veces), entonces queda como resultado

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_N \\ \mathcal{B}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 \\ \mathcal{B}_0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^N \mathbf{c}_j \begin{pmatrix} -x_j \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

A continuación se hace un cambio de variable en la ec. (1.13), reemplazando los coeficientes  $\mathcal{A}_n$  por  $\Phi_n := \Phi(x_n) = \mathcal{A}_n + \mathcal{B}_n x_n$ . De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \mathcal{A}_n + \mathcal{B}_n x_n = \mathcal{A}_{n-1} + \mathcal{B}_{n-1} \overbrace{(x_n - x_{n-1} + x_{n-1})}^{x_n}, \\ \Phi_n &= \Phi_{n-1} + \mathcal{B}_{n-1} \Delta x_n, \quad n = 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde se ha usado la continuidad de la función  $\Phi(x)$  y con  $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$  la distancia relativa entre láminas cercanas, obsérvese que  $\Delta x_1$  no está bien definida porque contiene a  $x_0 = -\infty$ . La expresión para  $\mathcal{B}_n$  no cambia, la cual es

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{n-1} + \mathbf{c}_n. \quad (1.16)$$

La forma matricial de las ecs. (1.15) y (1.16) es:

$$\begin{pmatrix} \Phi_n \\ \mathcal{B}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n-1} \\ \mathcal{B}_{n-1} \end{pmatrix} + \mathbf{c}_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots, N, \quad (1.17)$$

la anterior ecuación se itera  $N - 1$  veces y se puede obtener

$$\begin{pmatrix} \Phi_N \\ \mathcal{B}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_N - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \mathcal{B}_1 \end{pmatrix} + \sum_{j=2}^{N-1} \mathbf{c}_j \begin{pmatrix} x_N - x_j \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{c}_N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Hasta ahora se obtuvo una ecuación de recurrencia para  $\Phi_n$  y  $\mathcal{B}_n$ , más sin embargo se introduce una matriz de transferencia que también describe la recurrencia más simple, por lo cual la ec. 1.17 puede ser representada como

$$\begin{pmatrix} \Phi_n \\ \mathcal{B}_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x_n & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{c}_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n-1} \\ \mathcal{B}_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

al iterar la anterior ecuación  $N - 1$  veces, resulta

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_N \\ \mathcal{B}_N \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=2}^N \Delta x_j & \sum_{j=2}^{N-1} \sum_{i=j+1}^N \mathbf{c}_j \Delta x_i \\ 0 & 1 & \sum_{j=2}^N \mathbf{c}_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \mathcal{B}_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_N - x_1 & \sum_{j=2}^{N-1} \mathbf{c}_j (x_N - x_j) \\ 0 & 1 & \sum_{j=2}^n \mathbf{c}_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \mathcal{B}_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Se ve directamente que los resultados de  $\Phi_N$  y  $\mathcal{B}_N$  en (1.18) son consistentes con los resultados en (1.20).

### 1.1.3. Equivalencia entre los resultados de las dos derivaciones

La solución de (1.1) con condiciones iniciales debe de describir el mismo escenario físico independientemente del método que se utilice. Partiendo del anterior párrafo en esta sección se mostrará la semejanza entre al solución de la Sec. 1.1.1 y la Sec. 1.1.2.

Sean los coeficientes dados por la ec. (1.14) dados por

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 - \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j x_j, \quad (1.21a)$$

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_0 + \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j. \quad (1.21b)$$

Se sustituyen las anteriores ecuaciones en (1.5), se obtiene

$$\Phi(x) = \mathcal{A}_0 - \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j x_j + \left( \mathcal{B}_0 + \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j \right) x, \quad x_n < x < x_{n+1}.$$

Se debe de mostrar que la anterior ecuación recupera la forma de la ec. (1.4). Al analizar para  $x < x_1$  la ec. (1.21) es para el índice  $n = 0$ , y al comparar con (1.4) se obtienen las relaciones

$$\mathcal{A}_0 = x_1 F_{-\infty}, \quad (1.22a)$$

$$\mathcal{B}_0 = -F_{-\infty}. \quad (1.22b)$$

Para el intervalo  $x_n < x < x_{n+1}$  con  $n > 0$ , se debe demostrar que

- a)  $\mathcal{B}_n \stackrel{?}{=} -F_n$ . Tomando (1.21b), (1.22b) y recordando que  $F_n = F_{-\infty} - \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j$ , resulta

$$\mathcal{B}_n = \overbrace{\mathcal{B}_0}^{-F_{-\infty}} + \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j = -F_n.$$

- b)  $\mathcal{A}_n \stackrel{?}{=} -\sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) F_j + x_n F_n$ . Para este caso se desarrolla el lado derecho de la anterior expresión

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) F_j + x_n F_n &= -\sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) \left( F_{-\infty} - \sum_{k=1}^j \mathbf{c}_k \right) + \\ &\quad + x_n \left( F_{-\infty} - \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k \right), \end{aligned}$$

donde se ha usado el resultado de a), se intercambia en el primer término del lado derecho  $j \rightarrow j - 1$  y se distribuyen términos

$$\underbrace{-(x_n - x_1) F_{-\infty}}_{\mathcal{A}_0} + \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} (x_j - x_{j-1}) \mathbf{c}_k + \cancel{x_n F_{-\infty}} - x_n \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k,$$

desarrollando explícitamente la suma sobre  $j$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 + \cancel{(x_2 - x_1)} \mathbf{c}_1 + (x_3 - x_2) (\cancel{\mathbf{c}_1} + \mathbf{c}_2) + \cdots + (\cancel{x_{n-1} - x_{n-2}}) (\mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_{n-2}) + \\ + (x_n - x_{n-1}) \left( \cancel{\mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_{n-2}} + \mathbf{c}_{n-1} \right) - x_n \left( \mathbf{c}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{c}_k \right), \end{aligned}$$

se ve directamente que el anterior desarrollo da como resultado

$$\mathcal{A}_0 - \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{c}_j = \mathcal{A}_n,$$

lo que coincide con (1.21a).

Los anteriores argumentos muestran que ambas derivaciones dan el mismo resultado, como se esperaba.

## 1.2. Caso relativista

La teoría newtoniana no representa una herramienta apropiada para analizar la propagación de ondas gravitacionales. Fenómenos de este tipo pueden describirse en el marco de la teoría de la relatividad general, que se adopta en este trabajo de tesis para encaminar el análisis de la propagación de ondas en el espacio-tiempo mencionado en la introducción.

Como se hizo en la Sec. 1.1, se considera el modelo de espacio-tiempo conformado por  $N$  láminas de extensión infinita y espesor infinitesimal colocadas una distancia finita, las láminas representan a la materia contenido en el espacio-tiempo por lo que van a tener una densidad de masa (energía) asociada, véase Fig. 1.1. Además el modelo de esta tesis se considera estático. La métrica estacionaria de la ec. (1) es

$$g = -\underbrace{e^{2a(x)}}_{=\alpha^2(x)} dt^2 + \underbrace{e^{2b(x)}}_{=\beta^2(x)} dx^2 + \underbrace{e^{2c(x)}}_{=\gamma^2(x)} (dy^2 + dz^2), \quad (1.23)$$

donde los coeficientes  $a = a(x)$ ,  $b = b(x)$ ,  $c = c(x)$  son funciones de  $x$  y se encontrarán a partir de las ecuaciones de campo de Einstein.

Se hace un cambio de variable conveniente en la ec. (1.23), de la forma

$$\hat{x} = \int^x e^{b(u)} du \Rightarrow d\hat{x} = e^{b(x)} dx,$$

se puede eliminar la función  $b(x)$ , entonces la métrica queda de la siguiente manera

$$g = -e^{2a(x)} dt^2 + d\hat{x}^2 + e^{2c(x)} (dy^2 + dz^2),$$

que sin ningún problema de notación se puede reidentificar  $\hat{x} \leftrightarrow x$  por lo cual

$$g = -e^{2a(x)} dt^2 + dx^2 + e^{2c(x)} (dy^2 + dz^2). \quad (1.24)$$

En esta representación, la coordenada  $x$  mide la distancia propia a lo largo de la dirección perpendicular a las láminas.

**Notación:** Para el siguiente análisis la convención para los índices será: letras griegas indicarán etiquetas desde 0 hasta 3, letras latinas minúsculas de 1 hasta 3 y las letras latinas mayúsculas tendrán valores 2 y 3, y además donde los numeros (0, 1, 2, 3) se refieren a las coordenadas  $(t, x, y, z)$ .

### 1.2.1. Obtención de la curvatura y el tensor de Einstein

A partir de la métrica (1.24) y de su inversa, cuyas componentes se pueden denotar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (g_{\mu\nu}) &= \text{diag}(-e^{2a(x)}, 1, e^{2c(x)}, e^{2c(x)}), \\ (g^{\mu\nu}) &= \text{diag}(-e^{-2a(x)}, 1, e^{-2c(x)}, e^{-2c(x)}), \end{aligned}$$

se calcula la curvatura y el tensor de Einstein. Para más detalle se puede consultar las siguientes referencias de libros y apuntes sobre la Teoría General de la Relatividad para las siguientes secciones [5, 6, 7, 8].

**Símbolos de Christoffel.** Los símbolos de Christoffel están definidos por

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda} (\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}),$$

con  $\kappa, \lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ ,  $g_{\mu\nu}$  los coeficientes de la métrica y  $g^{\mu\nu}$  los coeficientes de la métrica inversa.

Además los símbolos de Christoffel son simétricos para los índices inferiores  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ . Por lo que en principio se tienen 40 componentes independientes. No obstante por la forma particular de la métrica (1.24) los símbolos de Christoffel se ven reducidos sólo a las siguientes componentes diferentes de cero.

$$\Gamma^0_{01} = a', \quad (1.25a)$$

$$\Gamma^1_{00} = e^{2a}a', \quad (1.25b)$$

$$\Gamma^1_{AB} = -e^{2c}c'\delta_{AB}, \quad (1.25c)$$

$$\Gamma^C_{1B} = c'\delta^C_B, \quad (1.25d)$$

donde  $A, B, C = 2, 3$ , como se mencionó anteriormente.

**Tensor de curvatura.** Las componentes del tensor de curvatura (tensor de Riemann) en coordenadas locales, se obtienen a partir de

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\tau} \Gamma^\tau{}_{\nu\lambda} - (\mu \leftrightarrow \nu),$$

y tomando en cuenta las propiedades de simetría y antisimetría del tensor de curvatura se tiene que

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}.$$

Por lo anterior es suficiente analizar los siguientes subgrupos de componentes independientes:

$$\begin{aligned} &R^0{}_{101}, \quad R^0{}_{10B}, \quad R^0{}_{11B}, \quad R^0{}_{1AB}, \\ &R^0{}_{C0B}, \quad R^0{}_{C1B}, \quad R^0{}_{CAB}, \\ &R^1{}_{C1B}, \quad R^1{}_{CAB}, \\ &R^D{}_{CAB}. \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos correspondientes en cada subgrupo, se obtienen que las componentes diferentes de cero son

$$R^0{}_{101} = - \left[ a'' + (a')^2 \right], \quad (1.26a)$$

$$R^0{}_{C0B} = -a'c' e^{2c} \delta_{BC}, \quad (1.26b)$$

$$R^1{}_{C1B} = - \left[ c'' + (c')^2 \right] e^{2c} \delta_{BC}, \quad (1.26c)$$

$$R^D{}_{CAB} = (c')^2 e^{2c} (\delta^D{}_B \delta_{AC} - \delta^D{}_A \delta_{BC}). \quad (1.26d)$$

**Tensor de Ricci.** Por medio del tensor de Riemann se obtienen las componentes del tensor de Ricci dadas por:

$$R_{\mu\nu} = R^\kappa{}_{\mu\kappa\nu}.$$

Se comienza con la primer componente, dada por el desarrollo

$$R_{00} = R^\kappa{}_{0\kappa 0} = R^1{}_{010} + R^A{}_{0A0},$$

haciendo uso de la métrica inversa, las propiedades de simetría y una serie de pasos algebraicos se obtiene

$$R_{00} = e^{2a} \left[ a'' + (a')^2 + 2a'c' \right]. \quad (1.27)$$

Análogamente para las componentes restantes resulta que:

$$R_{11} = - \left[ a'' + (a')^2 + 2c'' + 2(c')^2 \right], \quad (1.28)$$

$$R_{AB} = -e^{2c} \left[ c'' + 2(c')^2 + a'c' \right] \delta_{AB}. \quad (1.29)$$

**Tensor de Einstein.** Las componentes del tensor de Einstein en coordenadas locales están dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.30)$$

donde  $R$  es la traza del tensor de Ricci o escalar de Ricci,

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{AB}R_{AB} \\ &= -2 \left[ a'' + (a')^2 + 2c'' + 3(c')^2 + 2a'c' \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Sustituyendo para cada una de las componentes de la ec. (1.30),

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = -e^{2a} \left[ 2c'' + 3(c')^2 \right], \quad (1.32a)$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = (c')^2 + 2a'c', \quad (1.32b)$$

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = e^{2c} \left[ a'' + (a')^2 + c'' + (c')^2 + a'c' \right] \delta_{AB}, \quad (1.32c)$$

y las otras componentes son cero.

### 1.2.2. Resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Para encontrar las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío, se necesita resolver la ecuación

$$G_{\mu\nu} = 0.$$

Sustituyendo las ecs. (1.32) en la anterior expresión se obtiene como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de las funciones  $a(x)$  y  $c(x)$ ,

el cual es:

$$2c'' + 3(c')^2 = 0, \quad (1.33a)$$

$$(c')^2 + 2a'c' = 0, \quad (1.33b)$$

$$a'' + (a')^2 + c'' + (c')^2 + a'c' = 0. \quad (1.33c)$$

Obsérvese que debido a las identidades de Bianchi  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ , solo hay dos ecuaciones independientes.

**Primer familia de soluciones:** La expresión (1.33a) es una ecuación diferencial de segundo orden no acoplada para  $c(x)$  que se puede solucionar independiente de las restantes. Se integra por variables separables, a través de un cambio de variable<sup>4</sup>, donde resulta

$$c(x) = \frac{2}{3} \log\left(\frac{3}{2}x + c_0\right) + c_1, \quad (1.34)$$

donde  $c_0, c_1$  son constantes de integración. Al tomar la exponencial en la ecuación previa resulta que:

$$e^c = \left(\frac{3}{2}x + c_0\right)^{2/3} e^{c_1} = (P + Qx)^{2/3},$$

donde  $P = c_0 e^{\frac{3}{2}c_1}$  y  $Q = \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}c_1}$ .

Ahora de la ec. (1.33b), con la suposición  $c' \neq 0$ , se despeja  $a'$  y se integra, quedando

$$a(x) = -\frac{1}{3} \log\left(\frac{3}{2}x + c_0\right) + a_1, \quad (1.35)$$

con  $a_0$  y  $a_1 = a_0 - \frac{1}{2}c_1$  constantes de integración. Análogamente a el caso de  $c(x)$ , se toma la exponencial a la ecuación anterior, la cual queda como:

$$e^a = \left(\frac{3}{2}x + c_0\right)^{-\frac{1}{3}} e^{a_1} = (P + Qx)^{-\frac{1}{3}} e^{a_0 - c_1}.$$

---

<sup>4</sup>Cambio de variable:  $u = c'$ , suponiendo  $u \neq 0$ .

Al sustituir ec. (1.34) y (1.35) en (1.33c), se satisface la igualdad. Además si se sustituyen las soluciones anteriores en (1.26) da como resultado una curvatura no trivial, y si se coloca en términos de la función lineal  $P + Qx$ :

$$R^0_{101} = -(P + Qx)^{-2} e^{-3c_1}, \quad (1.36a)$$

$$R^0_{C0B} = \frac{1}{2} (P + Qx)^{-\frac{2}{3}} e^{3c_1} \delta_{BC} = R^1_{C1B}, \quad (1.36b)$$

$$R^D_{CAB} = (P + Qx)^{-\frac{2}{3}} e^{3c_1} (\delta^D_B \delta_{AC} - \delta^D_A \delta_{BC}), \quad (1.36c)$$

por lo cual es una métrica con curvatura diferente de cero. Ahora bien, se observa que dicha solución contiene una singularidad en  $x = -\frac{P}{Q}$ , que para saber si es una singularidad auténtica o una elección inconveniente de las coordenadas se utilizan escalares de curvatura. Sea el escalar de Kretschmann, dado por

$$R^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(\frac{Q}{P + Qx}\right)^4, \quad (1.37)$$

cuyo resultado diverge para  $x \rightarrow -\frac{P}{Q}$ , que implica una singularidad de curvatura en dicho punto.

**Segunda familia de soluciones:** En el anterior procedimiento las soluciones son válidas para  $c' \neq 0$ . Ahora se considera  $c'(x) = 0$ , entonces

$$c(x) = \mathbf{c}_0, \quad (1.38)$$

con  $\mathbf{c}_0$  una constante de integración. Automáticamente las ecs. (1.33a) y (1.33b) se satisfacen, y la ec. (1.33c) se reduce a

$$a'' + (a')^2 = 0.$$

Al hacer el cambio de variable  $v = a'$  e integrando dos veces queda finalmente la solución para  $a(x)$  la cual es

$$a(x) = \log(x + \mathbf{a}_0) + \mathbf{a}_1, \quad (1.39)$$

con constantes  $\mathbf{a}_0$  y  $\mathbf{a}_1$ . Al sustituir las soluciones (1.38) y (1.39) en el tensor de curvatura, ecs. (1.26), da como resultado que todas sus componentes son iguales a cero, concluyendo que las anteriores soluciones son componentes de

una métrica que es esencialmente plana o Minkowski. Para ver explícitamente lo dicho anteriormente, se considera  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{c}_0 = 0$ , absorbiendo  $\mathbf{c}_1$  con un cambio de variable se obtiene la métrica

$$g = -x^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

llamada métrica de Rindler. Al introducir el siguiente cambio de coordenadas hiperbólicas

$$\begin{aligned} T &= x \sinh t, \\ X &= x \cosh t, \\ Y &= y, \\ Z &= z, \end{aligned}$$

llamadas coordenadas de Rindler [6] se obtiene la métrica

$$g = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2, \quad (1.40)$$

la cual tiene la forma de Minkowski. Las soluciones (1.38) y (1.39) no van a ser de interés en este trabajo, dado que bajo condiciones de pegado sobre las láminas resulta una ecuación de estado sin sentido, como se resume en el pie de página 11 de la pág. 23.

**Resumen de la solución en el vacío:** Como se dijo en el anterior párrafo, las funciones métricas de interés serán las ecs. (1.34), (1.35) obtenidas en la primer familia, al sustituirlas en la métrica (1.24), dan como resultado

$$g = -(P + Qx)^{-2/3} e^{2a_1} dt^2 + dx^2 + (P + Qx)^{4/3} (dy^2 + dz^2), \quad (1.41)$$

en donde en principio cuando se haga el análisis para un sistema de  $N$  láminas, la constante  $e^{a_1}$  puede ser diferente para cada una de las regiones a los lados de cada lámina, sin embargo en la Sec. 1.2.4 y 1.2.5 se demuestra que es una constante independiente de la región y por lo tanto no tendrá relevancia física. Por lo anterior se hace un cambio de variable<sup>5</sup> conveniente y la métrica resultante será:

$$g = -(P + Qx)^{-2/3} dt^2 + dx^2 + (P + Qx)^{4/3} (dy^2 + dz^2), \quad (1.42)$$

---

<sup>5</sup>Para  $\hat{t} = e^{a_1} t$ , sin embargo por notación  $\hat{t} \leftrightarrow t$ .

y también  $P$  puede ser eliminada mediante una traslación en  $x$ , siempre y cuando<sup>6</sup>  $Q \neq 0$ . De lo anterior y absorbiendo las constantes como se hizo anteriormente, para la coordenada  $x$ , da como resultado

$$g = -x^{-2/3} dt^2 + dx^2 + x^{4/3} (dy^2 + dz^2), \quad x > 0, \quad (1.43)$$

llamada métrica de Taub, ver [9, 10] y citas dentro. Repitiendo nuevamente lo mencionado acerca del valor de curvatura, la métrica anterior tiene curvatura no trivial y se demostró en la página 19.

**Observación:**

- Adviértase que las componentes de la métrica son adimensionales, entonces la función  $P + Qx$  necesita ser una cantidad adimensional, de lo que se sigue que  $[Q] = [L^{-1}]$ , tiene unidades del inverso de longitud.

### 1.2.3. Solución en presencia de las láminas

Para implementar que el espacio-tiempo se constituya de materia, se deben resolver las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \text{con } \kappa = 8\pi G_N,$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento. En esta tesis se supone que la materia que compone las láminas pueda modelarse como un fluido perfecto.

**Fluido perfecto:** Un fluido perfecto es aquel donde se desprecian los efectos de viscosidad y en general se considera con presión isotrópica<sup>7</sup>. Los fluidos están determinados por una ecuación de estado de la forma  $p = p(\rho)$ . El tensor de energía momento del fluido está dado, para el caso isotrópico, por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu},$$

donde  $\rho$ ,  $p$ ,  $u_\mu$  denotan la densidad de energía, la presión y la cuadrivelocidad del fluido. Las ecuaciones de movimiento para el fluido estarán dadas por:  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ .

Para escribir las ecuaciones de Einstein en presencia del fluido, conviene

<sup>6</sup>Para  $Q = 0$  la métrica (1.42) se reduce a la métrica de Minkowski.

<sup>7</sup>En este trabajo de tesis no se considera presión isotrópica.

escoger una base ortonormal<sup>8</sup> de la siguiente manera

$$e_{\hat{0}} = e^{-a}\partial_0 = e^{-a}\partial_t, \quad (1.44a)$$

$$e_{\hat{1}} = e^{-b}\partial_1 = e^{-b}\partial_x, \quad (1.44b)$$

$$e_{\hat{2}} = e^{-c}\partial_2 = e^{-c}\partial_y, \quad (1.44c)$$

$$e_{\hat{3}} = e^{-c}\partial_3 = e^{-c}\partial_z, \quad (1.44d)$$

donde los índices con gorro ( $\hat{\cdot}$ ) denotan componentes tetradiales.

Como se requiere una configuración hidrodinámica estática, es decir, donde el fluido no tenga movimiento y se encuentre distribuido dentro de los límites físicos de las láminas de manera tal que la cuadrivelocidad del fluido esté alineada con el vector  $e_{\hat{0}}$ . Además se considera un fluido perfecto anisotrópico, es decir, un fluido con presión longitudinal ( $p_L$ ) y tangencial ( $p_T$ ) que pueden ser distintas. De lo anterior se considera que las componentes tetradiales del tensor  $T_{\mu\nu}$  son

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho, \quad (1.45a)$$

$$T_{\hat{1}\hat{1}} = p_L, \quad (1.45b)$$

$$T_{\hat{2}\hat{2}} = T_{\hat{3}\hat{3}} = p_T, \quad (1.45c)$$

$$\text{otras} \quad \text{cero}, \quad (1.45d)$$

con  $\rho$  la densidad de energía del fluido.

**Nueva forma de las Ecuaciones de Einstein:** Al considerar las componentes tetradiales y las componentes del tensor de energía-momento (1.45),

---

<sup>8</sup>**Comentario:** Evaluando, se tiene que

$$g(e_{\hat{0}}, e_{\hat{0}}) = e^{-2a}g(\partial_0, \partial_0) = -1,$$

$$g(e_{\hat{i}}, e_{\hat{j}}) = \delta_{ij} = \delta_{\hat{i}\hat{j}},$$

$$g(e_{\hat{0}}, e_{\hat{j}}) = e^{-(a+c)}g(\partial_0, \partial_j) = 0,$$

donde  $i, j, \hat{i}, \hat{j} = 1, 2, 3$ , y por lo tanto  $\{e_{\hat{0}}, e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}, e_{\hat{3}}\}$  es una base ortonormal de vectores.

las componentes del tensor de Einstein toman la forma<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} G_{\hat{0}\hat{0}} &= G(e_{\hat{0}}, e_{\hat{0}}) = e^{-2a}G(\partial_0, \partial_0) = e^{-2a}G_{00}, \\ G_{\hat{1}\hat{1}} &= G(e_{\hat{1}}, e_{\hat{1}}) = G(\partial_1, \partial_1) = G_{11}, \\ G_{\hat{A}\hat{B}} &= G(e_{\hat{A}}, e_{\hat{B}}) = e^{-2c}G(\partial_A, \partial_B) = e^{-2c}G_{AB}. \end{aligned}$$

Por conveniencia, se considera el siguiente cambio de variable<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} e^{2a(x)} &= A^{-2/3}(x), \\ e^{2c(x)} &= C^{4/3}(x), \end{aligned}$$

con funciones<sup>11</sup>  $A(x)$ ,  $C(x)$ . Las ecuaciones de Einstein asumen la nueva forma:

$$G_{\hat{0}\hat{0}} = -\frac{4C''}{3C} = \kappa\rho, \quad (1.46a)$$

$$G_{\hat{1}\hat{1}} = \frac{4C'}{9C} \left( \frac{C'}{C} - \frac{A'}{A} \right) = \kappa p_L, \quad (1.46b)$$

$$G_{\hat{2}\hat{2}} = \frac{2C''}{3C} - \frac{1A''}{3A} - \frac{2}{9} \left( \frac{C'}{C} - \frac{A'}{A} \right) \left( \frac{C'}{C} + 2\frac{A'}{A} \right) = \kappa p_T, \quad (1.46c)$$

donde

$$\rho = \sigma\delta(x - x_n), \quad (1.47a)$$

$$p_T = \pi\delta(x - x_n), \quad (1.47b)$$

con  $\sigma$  la densidad de energía superficial, y  $\pi$  la presión tangencial superficial dentro de la lámina.

**Observación:** Si se supone que  $p_L = 0$ , la ec. (1.46b) implica que  $\frac{A'}{A} = \frac{C'}{C}$  y por lo cual las ecs. (1.46a) y (1.46c) se reducen a

$$\frac{A''}{A} = -\frac{3}{4}\kappa\rho = 3\kappa p_T.$$

De lo anterior se obtiene la ecuación de estado de las láminas, dada por:

$$p_L = 0, \quad p_T = -\frac{1}{4}\rho. \quad (1.48)$$

<sup>9</sup>Se recuerda que  $b = 0$ .

<sup>10</sup>Este cambio está motivado por la forma que tienen las componentes métricas en el vacío, véase (1.42).

<sup>11</sup>Nota: Si se toma en cuenta la segunda familia de soluciones en la página 19, para la cual  $C(x) = 1$ , es fácil ver que las ecs. (1.46) implican que el fluido tenga una densidad de energía nula ( $\rho = 0$ ), lo que no sería físicamente razonable.

### 1.2.4. Forma pedestre del pegado de las láminas

En esta sección se obtienen las expresiones que ayudan en el pegado de las soluciones entre cada una de las láminas de la configuración mostrada en la Fig. 1.1. Se toma la  $n$ -ésima lámina con las ecs. (1.46), y considerando las regiones<sup>12</sup> a la izquierda (I) y a la derecha (II) de la lámina ubicada en  $x = x_n$  (mostradas en la Fig. 1.4).

Para la región I,  $x_{n-1} < x < x_n$ , la densidad de energía es cero  $\rho = 0$ , por lo cual es directo resolver la ec. (1.46a), cuyo resultado es

$$C(x) = P_{n-1} + Q_{n-1}x,$$

de la ec. (1.46b), con  $p_L = 0$ , al integrarla se obtiene que

$$\log C(x) = \log A(x) + \epsilon_{n-1},$$

donde  $\epsilon_{n-1}$  es una constante de integración de la región I. Las soluciones para  $A(x)$  es de la forma:

$$A(x) = e^{-\epsilon_{n-1}} C(x).$$

Al sustituir la solución de  $C(x)$  en la anterior ecuación se obtiene

$$A(x) = e^{-\epsilon_{n-1}} (P_{n-1} + Q_{n-1}x).$$

Análogamente para la región II, donde  $x_n < x < x_{n+1}$ , la solución para  $C(x)$  y  $A(x)$  son:

$$\begin{aligned} C(x) &= P_n + Q_n x, \\ A(x) &= e^{-\epsilon_n} (P_n + Q_n x), \end{aligned}$$

donde  $\epsilon_n$  es una constante de integración que corresponde a la región II.

Para el pegado se consideran las siguientes condiciones

- a) Las funciones  $A(x)$  y  $C(x)$  son continuas en  $x = x_n$ :

Por la continuidad de  $C$  se tiene

$$P_{n-1} + Q_{n-1}x_n = P_n + Q_n x_n. \quad (1.49)$$

Por la continuidad de  $A$  se tiene

$$e^{-\epsilon_{n-1}} (P_{n-1} + Q_{n-1}x_n) = e^{-\epsilon_n} (P_n + Q_n x_n),$$

---

<sup>12</sup>Convención de índices: El lado izquierdo de  $x = x_n$  se tendrá  $n - 1$  y para el lado derecho será el índice  $n$ , ver Fig. 1.4.

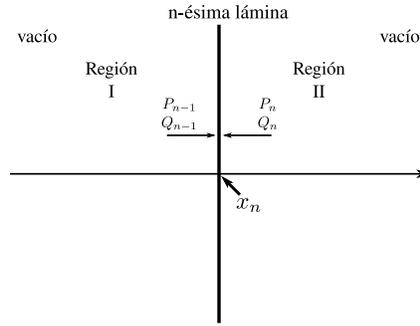


Figura 1.4: Regiones para considerar el pegado de las soluciones.

donde resulta que las constantes de integración de la región I y la región son iguales

$$\epsilon_n = \epsilon_{n-1},$$

Se concluye que las constantes  $\epsilon_n$  son independientes de  $n$ , y bajo un rescalamiento de  $t$  se puede asumir que  $\epsilon = 0$ , de tal forma que  $A(x) = C(x)$  para todo  $x$ .

- b) Salto de las derivadas de las funciones  $A(x)$  y  $C(x)$ . Al integrar la ec. (1.46a), en el intervalo  $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , se obtiene

$$-\frac{4}{3} [C'(x)]_{x=x_n} = \kappa \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} \rho C(x) dx = \kappa \sigma_n C(x_n),$$

donde se hace uso de las ecs. (1.47) y la continuidad de  $C$  en  $x = x_n$ . Al fin el salto de la derivada de  $C$  resulta igual a

$$[C'(x)]_{x=x_n} = -\frac{3\kappa\sigma_n}{4} C(x_n). \quad (1.50)$$

La ec. (1.46b) se satisface automáticamente, dado que  $A(x) = C(x)$ , por lo cual  $A'(x) = C'(x)$ . La ec. (1.46c) es consecuencia directa de a) y b) y de la ecuación de estado (1.48).

### Observaciones:

- Las soluciones del espacio-tiempo no dependen de ninguna constante de integración entre regiones de láminas sucesivas, en este caso  $\epsilon_n$ , y sin pérdida de generalidad se pueden absorber con un cambio de variable en la métrica o simplemente  $\epsilon_n = 0$ .

- Se tienen dos condiciones de pegado para las soluciones del espacio tiempo, ec. (1.49) y (1.50).

Los anteriores resultados, serán reproducidos en la Sec. 1.2.5 por medio de argumentos geométricos.

### 1.2.5. Reformulación geométrica de las condiciones de pegado

En esta sección se utilizarán argumentos geométricos para obtener las condiciones de pegado (1.49) y (1.50) de la sección anterior, a través de las condiciones de Israel [11, 6], para más detalles se pueden consultar [12, 13]. Lo anterior con la ayuda de los conceptos de la primera y segunda forma fundamental, también llamadas métrica inducida y curvatura extrínseca respectivamente. La curvatura extrínseca manifiesta como las superficies (subvariedades diferenciales) están incrustadas dentro del espacio ambiente (variedad diferencial de dimensión mayor).

**Primera y segunda forma fundamental:** Se considera la superficie  $\Sigma$  de codimensión 1, mostrado en la Fig. 1.5a, eligiendo el vector normal a la superficie  $n = \partial_x$  en dirección  $x$  (obsérvese que es un vector normalizado). La segunda forma fundamental o curvatura extrínseca está definida a través de

$$k(X, Y) = g(\nabla_X n, Y) = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_n g)(X, Y),$$

donde  $X, Y$  son dos campos vectoriales diferenciales tangentes a  $\Sigma$  y  $\mathcal{L}_n$  denota la derivada de Lie, la cual está definida como

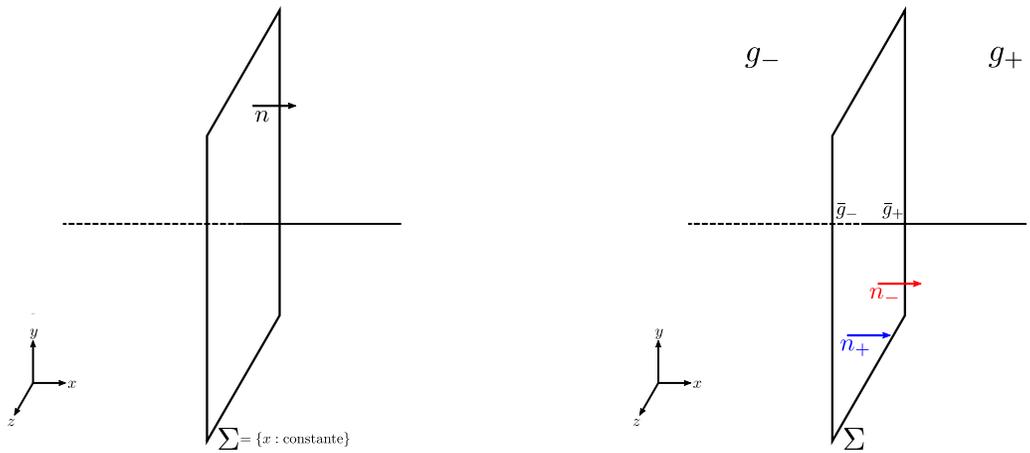
$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

En coordenadas locales, la derivada de Lie se calcula como

$$(\mathcal{L}_n g)_{\mu\nu} = n^\sigma (\partial_\sigma g_{\mu\nu}) + \left( \frac{\partial_\mu n^\sigma}{\partial_\nu n^\sigma} \right)^0 g_{\sigma\nu} + \left( \frac{\partial_\nu n^\sigma}{\partial_\mu n^\sigma} \right)^0 g_{\mu\sigma} = \partial_x g_{\mu\nu}.$$

Sean los vectores tangentes  $X = X^i \partial_i$ ,  $Y = Y^j \partial_j$  y para este caso  $i, j = \{t, y, z\}$  y tomando la base de las coordenadas en cuestión, se obtiene

$$\begin{aligned} k(X, Y) &= \frac{1}{2} \partial_x g_{ij} X^i Y^j = \frac{1}{2} (-2a' e^{2a} X^t Y^t + 2c' e^{2c} X^y Y^y + 2c' e^{2c} X^z Y^z), \\ k &= -a' e^{2a} dt^2 + c' e^{2c} (dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$



(a) Superficie  $\Sigma$  de  $x$  constante con vector normal  $n$  elegido en dirección  $x$ .

(b) Superficie  $\Sigma$  que representa a la lámina enésima de la configuración en Fig. 1.2. Se tienen dos espacios ambientes en ambos lados de  $\Sigma$ ,  $(g_+, g_-)$ , se escogen los vectores unitarios  $n_+, n_-$  en la misma dirección. Además se representan las métricas inducidas en cada lado de los planos, denotados como  $\bar{g}_+, \bar{g}_-$ .

Figura 1.5: Representación de las láminas por la superficie  $\Sigma$ .

La primer forma fundamental o la métrica inducida sobre el plano se obtiene a través de la inclusión o por la evaluación de la métrica  $g$  sobre los vectores tangentes, es decir, por la proyección  $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$ , resultando la siguiente ecuación

$$\bar{g} = -e^{2a} dt^2 + e^{2c} (dy^2 + dz^2).$$

**Condiciones de pegado de Israel [11]:** Ahora se va a considerar que el espacio-tiempo esté dividido en dos regiones por la superficie  $\Sigma$ , la cual representará la  $n$ -ésima lámina, colocada en  $x = x_n$ . Y como se muestra en la Fig. 1.5b la división del espacio resulta de tener dos métricas a cada lado, denotadas por  $g_-$  y  $g_+$ . Por lo cual se van a tener dos curvaturas extrínsecas<sup>13</sup> inducidas por el espacio ambiente de cada región, denotadas por  $k_-$  y  $k_+$ , además de dos métricas inducidas  $\bar{g}_-$  y  $\bar{g}_+$ . (Aquí el signo  $-$  y  $+$  denotan la configuración izquierda y derecha de la lámina respectivamente<sup>14</sup>, ver Fig. 1.5b).

**Primera condición:** Las métrica  $g$  (sobre todo el espacio-tiempo) debe ser continua en  $x = x_n$ , de tal forma que

$$\begin{aligned} \bar{g}_- &= \bar{g}_+ \\ -e^{2a_-} dt^2 + e^{2c_-} (dy^2 + dz^2) &= -e^{2a_+} dt^2 + e^{2c_+} (dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$

Lo anterior da como resultado la continuidad de las funciones  $a(x)$  y  $c(x)$ , por

$$\begin{aligned} a(x_n) &= a_-(x_n) = a_+(x_n), \\ c(x_n) &= c_-(x_n) = c_+(x_n). \end{aligned}$$

La continuidad de las funciones en las ecuaciones inmediatamente arriba y la métrica (1.41), implican que

$$P_{n-1} + Q_{n-1}x_n = P_n + Q_nx_n,$$

y que la constante  $e^{2a_1}$  que acompaña en la primer componente de la métrica (1.41) sea independiente de  $n$ , y por lo cual sea absorbida a través de una traslación temporal, dicho resultado es consistente con la ec. (1.49).

<sup>13</sup>Comentario: Para obtener la curvatura extrínseca se definen los vectores normales  $n_-$ ,  $n_+$  en la misma dirección, y se escogen en la dirección  $x$ .

<sup>14</sup>Además  $(\cdot)_\pm = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\cdot)(x_n \pm \varepsilon)$

Los resultados anteriores indican que

$$e^{-3a(x)} = (P + Qx) = e^{\frac{3}{2}c(x)}, \quad \text{para toda } x,$$

entonces

$$a(x) = -\frac{1}{2}c(x), \quad a'(x) = -\frac{1}{2}c'(x), \quad (1.51)$$

obteniendo la relación entre las funciones y sus derivadas de  $a(x)$  y  $c(x)$ .

**Segunda condición:** El salto de la diferencia de las curvaturas extrínsecas está dado por

$$\left[ k_{ij} \right]_{x=x_n} := k_{ij}^+ - k_{ij}^-,$$

y haciendo uso de la Ecuación de Lanczos<sup>15</sup> (ver [12] p. 430)

$$\left[ k_{ij} \right]_{x=x_n} - \bar{g}_{ij} \left[ Tr(k) \right]_{x=x_n} = -\kappa S_{ij}, \quad (1.52)$$

donde  $Tr(k) \equiv \text{Tr}_{\bar{g}}(k) = \bar{g}^{ab}k_{ab} = (a' + 2c')$  es la traza de la segunda forma fundamental con respecto a la métrica inducida,  $S_{ij}$  es el tensor de energía momento superficial, definido dentro de la lámina<sup>16</sup>, con  $i, j = \{t, y, z\}$

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_n e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_n e^{2c} & 0 \\ 0 & 0 & \pi_n e^{2c} \end{pmatrix}.$$

De los anteriores párrafos y de la ecuación de Lanczos (1.52), resultan las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \left[ 2c' \right]_{x=x_n} &= -\kappa \sigma_n, \\ \left[ a' + c' \right]_{x=x_n} &= \kappa \pi_n. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Al sustituir (1.51) en la ecuación de arriba resulta  $\left[ 2c' \right]_{x=x_n} = 4\kappa\pi_n$ , donde se obtiene la ecuación de estado  $\pi_n = -\frac{1}{4}\sigma_n$ , que concuerda con la ec. (1.48).

---

<sup>15</sup>Observación:

El signo que aparece en el lado derecho en la ecuación de Lanczos depende del signo de la segunda forma fundamental, véase por ejemplo [6], pp. 520 y 553.

<sup>16</sup>Se obtiene a través de integrar el tensor de energía-momento sobre el intervalo  $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ , tomando el límite  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Ahora si se toma en cuenta la función<sup>17</sup>  $C(x) = e^{\frac{3}{2}c(x)}$ , derivando implícitamente se obtiene que

$$2c'(x) = \frac{4C'(x)}{3C(x)},$$

$$\left[2c'\right]_{x=x_n} = \frac{4}{3} \left[\frac{C'(x)}{C(x)}\right]_{x=x_n} = \frac{4}{3} \frac{\left[C'(x)\right]_{x=x_n}}{C(x_n)},$$

donde se ha usado la continuidad de la función  $C(x)$ . Se sustituye  $C(x)$  en la Ec (1.53)

$$\left[C'(x)\right]_{x=x_n} = -\frac{3\kappa\sigma_n}{4}C(x_n),$$

y por lo tanto está de acuerdo con la ec. (1.50).

Finalmente a través de argumentos geométricos, como la primer y segunda forma fundamental junto con las condiciones de Israel, se han corroborado las condiciones de pegado obtenidas en la Sec 1.2.4.

### 1.2.6. Solución de las ecuaciones para $N$ láminas

En esta sección finalmente se encuentra la solución de las constantes  $P_n$  y  $Q_n$  en cada una de las regiones entre las  $N$  láminas del problema planteado en la sección 1.2 en la página 14, con ayuda de las condiciones de pegado vistas en la Sec. 1.2.4 y Sec. 1.2.5.

La continuidad de las funciones  $A(x)$  y  $C(x)$  da como resultado la ec. (1.49) que es:

$$P_n + Q_n x_n = P_{n-1} + Q_{n-1} x_n. \quad (1.54)$$

Ahora tomando el salto de la derivada de la función  $C(x)$ , ver ec. (1.50), resulta que

$$\left[C'(x)\right]_{x=x_n} = Q_n - Q_{n-1} = -\frac{1}{\ell_n}C(x_n) = -\frac{1}{\ell_n}(P_{n-1} + Q_{n-1}x_n),$$

donde se ha introducido la cantidad

$$\ell_n \equiv \frac{4}{3} \frac{1}{\kappa\sigma_n} \quad (1.55)$$

---

<sup>17</sup>La continuidad de la función  $c(x)$  implica la continuidad de la función  $C(x)$ .

con unidades de longitud. Despejando  $Q_n$ , se obtiene

$$Q_n = -\frac{1}{\ell_n}P_{n-1} + \left(1 - \frac{x_n}{\ell_n}\right)Q_{n-1}. \quad (1.56)$$

Las ecs. (1.54) y (1.56) forman un sistema de ecuaciones para  $Q_n$  y  $P_n$ , que en notación matricial<sup>18</sup> es de la siguiente manera

$$\mathbf{M}_n \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ -\ell_n^{-1} & 1 - \ell_n^{-1}x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix},$$

con  $\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Despejando  $P_n$  y  $Q_n$ , multiplicando ambos lados de la ecuación anterior con  $M_n^{-1}$ , que es ya conocida (véase ec. (1.12)), entonces

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\ell_n} \begin{pmatrix} x_n & x_n^2 \\ -1 & -x_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ Q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

Donde la matriz dentro de los paréntesis cuadrados es una matriz de transferencia. Se obtuvo la ecuación de recurrencia (1.57) que relaciona las constantes  $P_n, Q_n$  con  $P_{n-1}, Q_{n-1}$ .

Sea la función

$$U(x) = P_n + Q_n x, \quad x_n \leq x < x_{n+1}, \quad (1.58)$$

se define  $U_n = U(x_n)$  para  $n = 1, 2, \dots, N$ , la solución en el sitio  $x = x_n$ . Para evitar que la matriz de transferencia dependa de la distancia absoluta entre las láminas es conveniente hacer el cambio de variables  $(P_n, Q_n) \mapsto (U_n, Q_n)$  en el sistema de ecuaciones de la matriz ec. (1.57). Se obtiene para cada  $n = 2, 3, \dots, N$

$$\begin{aligned} U_n &= P_n + Q_n x_n = P_{n-1} + Q_{n-1} \left( \overbrace{x_n - x_{n-1} + x_{n-1}}^{\Delta x_n} \right) \\ &= \underbrace{P_{n-1} + Q_{n-1} x_{n-1}}_{U_{n-1}} + Q_{n-1} \Delta x_n \\ &= U_{n-1} + Q_{n-1} \Delta x_n, \end{aligned} \quad (1.59)$$

<sup>18</sup>Como se hizo en el caso Newtoniano (véase la sección 1.1 en la página 10).

donde se identifica la distancia relativa entre láminas cercanas  $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ . Ahora para  $Q_n$ , se tiene

$$Q_n = -\ell_n^{-1}P_{n-1} + (1 - \ell_n^{-1}x_n) Q_{n-1}$$

sustituyendo  $P_{n-1} = U_{n-1} - Q_{n-1}x_{n-1}$

$$Q_n = -\ell_n^{-1}U_{n-1} + (1 - \ell_n^{-1}\Delta x_n) Q_{n-1}. \quad (1.60)$$

Tomando en cuenta las ecs. (1.59) y (1.60), la forma matricial es de la forma:

$$w_n = \mathbf{T}_n w_{n-1}, \quad (1.61)$$

donde

$$w_n = \begin{pmatrix} U_n \\ Q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x_n \\ -\ell_n^{-1} & 1 - \ell_n^{-1}\Delta x_n \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots, N. \quad (1.62)$$

La matriz  $\mathbf{T}_n$  ha quedado en términos de la distancia relativa entre láminas sucesivas que ayuda a obtener un modelo equidistante.

**Observación:**

- Para  $n = 1$  se dan condiciones iniciales para  $P_0, Q_0$  y no para  $(U_0, Q_0)$ , dado que  $U_0$  no está definido. Eligiendo  $x_1 = 0$  se obtiene

$$U_1 = P_1 + Q_1 x_1 = P_0 + Q_0 x_1 = P_0. \quad (1.63)$$

De la ec. (1.56) la definición de  $Q_1$  será

$$Q_1 = -\frac{P_0}{\ell_1} + Q_0. \quad (1.64)$$

La forma de  $w_1$  se obtiene de las expresiones (1.63) y (1.64), que es

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\ell_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

- La observación en la página 21 dice que la función  $U(x) = P + Qx$  es una cantidad sin dimensiones.

**Resumen:** Se obtuvo una matriz de transferencias ( $\mathbf{T}_n$ ), en donde se pudo identificar la cantidad  $\Delta x_n$  (distancia de separación entre las láminas) que ayudará a establecer a  $\mathbf{T}_n$  como una matriz constante en el caso de láminas equidistantes e idénticas. Lo anterior no se puede lograr con la ec. (1.57).

**Láminas equidistantes e idénticas:** Ahora se considera el caso donde las láminas son equidistantes e idénticas que servirá como punto de referencia para los consiguientes análisis, dado que se obtendrá la solución analítica y explícita del espacio-tiempo de fondo a través de las constantes  $U_n$  y  $Q_n$ . Esto a través de la iteración directa de la ec. (1.61), que se traduce en obtener la matriz de transferencia total  $\mathbf{T}_N = \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2$ .

En el caso de láminas equidistantes las cantidades las cantidades  $\Delta x \equiv \Delta x_n = \Delta x_{n-1} = \dots = \Delta x_2$  son iguales. Con idénticas se quiere decir que todas las láminas tienen la misma composición y masa, entonces las cantidades  $\sigma \equiv \sigma_n = \sigma_{n-1} = \dots = \sigma_1$  serán iguales. Dado que  $\ell_n = \frac{4}{3} \frac{1}{\kappa \sigma_n}$  está en términos de la densidad superficial  $\sigma_n$ , las cantidades  $\ell \equiv \ell_n = \ell_{n-1} = \dots = \ell_1$  también serán iguales. Lo anterior declara a  $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_n$  (ec. (1.62)) como una matriz constante, por lo tanto<sup>19</sup>  $\mathbf{T}_{n+1} \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}^n$ .

La diagonalización de matrices<sup>20</sup> es útil para obtener de manera sencilla la potenciación de matrices. Para diagonalizar  $\mathbf{T}$  se encuentran los eigenvalores a través de las raíces del polinomio característico  $\mathcal{P}(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}_2)$ , con  $\mathbf{I}_2$  la matriz identidad  $2 \times 2$ . Como el determinante de  $\mathbf{T}$  es igual a 1, entonces

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{T})\lambda + 1 = 0.$$

De la anterior ecuación característica, el discriminante está dado por  $\text{Tr}(\mathbf{T})^2 - 4$ , indicando cuando se tienen eigenvalores reales o complejos, es decir

$$|\text{Tr}(\mathbf{T})| > 2 : \quad \text{eigenvalores reales,}$$

$$|\text{Tr}(\mathbf{T})| < 2 : \quad \text{eigenvalores complejos.}$$

---

<sup>19</sup>Para obtener una ecuación en potencias de  $n$  y no en potencia de  $n-1$ , por conveniencia se multiplica por una matriz más,  $T_{n+1}$ . Después se recuperará la expresión correcta.

<sup>20</sup>**Diagonalización de una matriz:**

Sea  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz cuadrada de  $n \times n$  entradas reales o complejas. Se dice que  $\mathbf{H}$  es diagonalizable si y solo si  $\mathbf{H}$  es semejante a una matriz diagonal, es decir si y solo si  $\exists \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertible tal que  $\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{G} = \mathbf{D}$ , donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal.

Se sustituyen las entradas<sup>21</sup> de (1.62) en las condiciones expuestas anteriormente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\ell} &> 4, & \text{eigenvalores reales,} \\ \frac{\Delta x}{\ell} &< 4, & \text{eigenvalores complejos.} \end{aligned}$$

Como la matriz  $\mathbf{T}$  es diagonalizable con eigenvalores  $\lambda_+, \lambda_-$  y tomando en cuenta que

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) = \lambda_+ + \lambda_- = 2 - \ell^{-1}\Delta x,$$

la sustitución de la relación anterior en (1.62), da como resultado la matriz de la forma:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & (2 - \lambda_+ - \lambda_-)\ell \\ -\frac{1}{\ell} & -(1 - \lambda_+ - \lambda_-) \end{pmatrix}.$$

Se encuentran los eigenvectores por

$$(\mathbf{T} - \lambda_{\pm}\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{0},$$

substituyendo explícitamente la matriz  $\mathbf{T}$  y realizando algunos pasos algebraicos, los eigenvectores quedan como:

$$\mathbf{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} (-1 + \lambda_+ + \lambda_- - \lambda_{\pm})\ell \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_+ &= \begin{pmatrix} (-1 + \lambda_-)\ell \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v}_- &= \begin{pmatrix} (-1 + \lambda_+)\ell \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con los eigenvectores se forma la matriz  $(\mathbf{G}) = (\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_-)$ , cuya inversa es

$$\mathbf{G}^{-1} = -\frac{1}{\ell(\lambda_+ - \lambda_-)} \begin{pmatrix} 1 & (1 - \lambda_+)\ell \\ -1 & (-1 + \lambda_-)\ell \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Y como la matriz diagonal semejante a  $\mathbf{T}$  se conforma por los eigenvalores:  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_+, \lambda_-)$ , entonces

$$\mathbf{T}^n = (\mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1})^n = \mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^2(\mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1})^{n-2} = \mathbf{G}\mathbf{D}^n\mathbf{G}^{-1}.$$

<sup>21</sup>Obsérvese que las cantidad  $\frac{\Delta x}{\ell}$  es positiva.

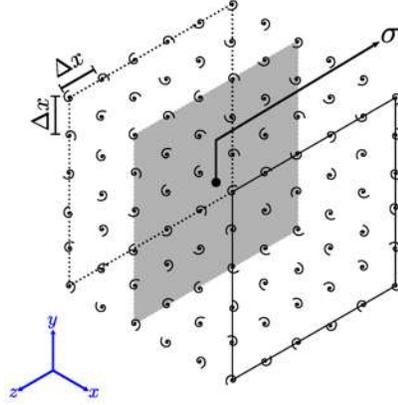


Figura 1.6: Arreglo cúbico de galaxias espirales, separadas una distancia equidistante  $\Delta x$ .

En la anterior ecuación se sustituyen las matrices obtenidas en párrafos anteriores obteniendo el resultado

$$\mathbf{T}^n = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} -(\lambda_+^n - \lambda_-^n) + \lambda_- \lambda_+^n - \lambda_+ \lambda_-^n & -\ell(2 - \lambda_+ - \lambda_-)(\lambda_+^n - \lambda_-^n) \\ \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\ell} & \lambda_+^n - \lambda_-^n - \lambda_+ \lambda_+^n + \lambda_- \lambda_-^n \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

que es la matriz general para eigenvalores reales o complejos no degenerados.

Para determinar que caso (eigenvalores reales o complejos) juegan un papel importante en este trabajo se introduce el siguiente modelo:

Se considera un arreglo cúbico de  $n^3$  galaxias, mostrado en la Fig. 1.6, este arreglo forma superficies planares que contienen una densidad de energía superficial  $\sigma$  determinada, la cual está dada por:

$$\sigma = \frac{\text{Masa galáctica}}{\text{Área}} = \left( \frac{n}{n-1} \right)^2 \frac{M_g}{\Delta x^2} \approx \frac{M_g}{\Delta x^2},$$

donde  $M_g$  representa la masa de una galaxia típica. Haciendo uso de la desigualdad  $\frac{n}{n-1} > 1$  y del límite  $\frac{n}{n-1} \rightarrow 1$  para  $n$  grandes. Tomando en cuenta que  $1/\ell = 6\pi G_N \sigma$ , el cociente que se necesita comparar, en unidades físicas, queda como

$$\frac{\Delta x}{\ell} = \frac{6\pi G_N M_g}{c^2 \Delta x} = \frac{3\pi R_S}{\Delta x},$$

donde se hace uso del radio de Schwarzschild  $R_S = \frac{2G_N M_g}{c^2}$ . De observaciones del SDSS<sup>22</sup> [14] la distancia promedio entre galaxias es  $\sim 8$  Mpc, pero puede fluctuar [15] entre los valores de  $5 - 9$  Mpc<sup>23</sup>. Un aproximado de la masa total de las galaxias se obtuvo de [16, 17, 18]. Las masas fluctúan (según el método) entre  $M_g = 1 \times 10^{12}$  a  $5 \times 10^{12} M_\odot$ <sup>24</sup>. Haciendo los cálculos numéricos correspondientes se obtiene que el radio es  $R_S \approx 0.5$ pc mientras que  $\Delta x \approx 8 \times 10^6$ pc, de lo anterior se obtiene

$$\frac{\Delta x}{\ell} \sim 10^{-7} \ll 4,$$

lo cual muestra que los eigenvalores complejos son físicamente relevantes y en este trabajo se hará uso de este hecho.

En párrafos anteriores se explicó la motivación de usar eigenvalores complejos. Ahora se considera la matriz  $\mathbf{T}$  con eigenvalores  $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C}$ . El determinante de  $\mathbf{T}$ ,  $\lambda_+ \lambda_- = 1$ , implica que los eigenvalores sean el complejo conjugado uno del otro,  $\lambda_+ = \lambda_-^*$ . Por lo cual los eigenvalores se pueden poner de la siguiente manera:

$$\lambda_\pm = e^{\pm i\mu}. \quad (1.68)$$

Asimismo la traza es

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) = 2 \cos \mu = 2 - \ell^{-1} \Delta x,$$

dando como resultado la siguiente relación

$$\frac{\Delta x}{\ell} = 2[1 - \cos(\mu)] = 4 \text{sen}^2\left(\frac{\mu}{2}\right). \quad (1.69)$$

Se reemplaza los eigenvalores de la forma (1.68) y la ec.(1.69) en (1.67), se obtiene

$$\mathbf{T}^n = \frac{1}{\text{sen} \mu} \begin{pmatrix} \text{sen} \mu n - \text{sen} \mu (n-1) & \Delta x \text{sen} \mu n \\ -\frac{4 \text{sen}^2(\frac{\mu}{2}) \text{sen} \mu n}{\Delta x} & \text{sen} \mu (n+1) - \text{sen} \mu n \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

La anterior matriz se puede simplificar, quedando de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}^n = \begin{pmatrix} \frac{\cos \mu (n-\frac{1}{2})}{\cos(\frac{\mu}{2})} & \frac{\text{sen} \mu n \Delta x}{\text{sen} \mu} \\ -\frac{2 \text{sen}(\frac{\mu}{2}) \text{sen} \mu n}{\Delta x \cos(\frac{\mu}{2})} & \frac{\cos \mu (n+\frac{1}{2})}{\cos(\frac{\mu}{2})} \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

<sup>22</sup>Por sus siglas en inglés Sloan Digital Sky Survey.

<sup>23</sup>Su volumen local de muestra tiene un diámetro menor a 10Mpc.

<sup>24</sup>Donde  $M_\odot$  indica masas solares.

Volviendo a la matriz de transferencia (1.61), e iterando  $n - 1$  veces<sup>25</sup> se obtiene

$$\begin{pmatrix} U_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{n-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \mu \left( n - \frac{3}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\mu}{2} \right)} & \frac{\operatorname{sen} \mu (n-1) \Delta x}{\operatorname{sen} \mu} \\ -\frac{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\mu}{2} \right) \operatorname{sen} \mu (n-1)}{\Delta x \cos \left( \frac{\mu}{2} \right)} & \frac{\cos \mu \left( n - \frac{1}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\mu}{2} \right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ Q_1 \end{pmatrix},$$

$n = 2, 3, \dots, N. \quad (1.72)$

Para tener la iteración hasta  $n = 1$ , que se refiere a la contribución de la lámina situada en  $x = x_1$ , es necesario considerar valores iniciales. Se sabe por (1.37) que existe una singularidad de curvatura, y por la forma de la métrica (1.42) dicha singularidad se localizará cuando  $P + Qx$  sea cero, es decir cuando  $U_n$  cambie de signo. Por lo cual para tratar de evitar la singularidad es conveniente tomar para el intervalo  $(x_0, x_1) = (-\infty, 0)$  un espacio-tiempo tipo Minkowski o una solución que sea regular. Por lo anterior se puede considerar como condiciones iniciales  $P_0 > 0$  y  $Q_0 \leq 0$ , de la ec. (1.65), se obtiene

$$U_n = \frac{P_0}{\cos \left( \frac{\mu}{2} \right)} \left[ \cos \mu \left( n - \frac{3}{2} \right) - \frac{\Delta x \operatorname{sen} \mu (n-1)}{\ell \operatorname{sen} \left( \frac{\mu}{2} \right)} \right] - |Q_0| \Delta x \frac{\operatorname{sen} \mu (n-1)}{\operatorname{sen} \mu}$$

$$Q_n = -\frac{P_0}{\Delta x \cos \left( \frac{\mu}{2} \right)} \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\mu}{2} \right) \operatorname{sen} \mu (n-1) + \frac{\Delta x \cos \mu \left( n - \frac{1}{2} \right)}{\ell \cos \left( \frac{\mu}{2} \right)} \right] - |Q_0| \frac{\cos \mu \left( n - \frac{1}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\mu}{2} \right)}$$

Los resultados previos son válidos para  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  y al simplificar queda la expresión

$$\begin{pmatrix} U_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos \left( \frac{\mu}{2} \right)} \begin{bmatrix} \cos \mu \left( n - \frac{1}{2} \right) & -\Delta x \frac{\operatorname{sen} \mu (n-1)}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\mu}{2} \right)} \\ -\frac{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\mu}{2} \right) \operatorname{sen} \mu n}{\Delta x} & -\cos \mu \left( n - \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ |Q_0| \end{bmatrix}, \quad (1.73)$$

y que es equivalente a usar la identidad de Chebyshev, si se usa el resultado de la página 23 de [19].

Ahora se analizará el momento en que ocurre la singularidad de curvatura, para esto se examina el cambio de signo en  $U_n$  y el comportamiento de la pendiente  $Q_n$ , como se dijo anteriormente.

<sup>25</sup>Véase pie de página 19 de la pág. 33.

Al escoger  $P_0 > 0$  y  $Q_0 \leq 0$  como condiciones iniciales, la función  $U(x)$  será positiva para  $x \leq 0$ . Ahora bien si en las ecuaciones de arriba se elige  $Q_0$  igual a cero, (comenzando con un espacio de Minkowski a la izquierda de la primer lámina, en dichas coordenadas), entonces  $U_n$  seguirá siendo positiva para  $\mu$  en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2n-1}, \frac{\pi}{2n-1}]$  y  $Q_n$  siempre será negativa en el mismo intervalo para  $n \geq 1$ , dado que  $\frac{\pi}{2n-1} \leq \frac{\pi}{n}$ ,  $n \geq 1$ . Que  $Q_n$  se identifique como la pendiente de la función  $U(x)$  y que sea negativa significa que para algún  $x$  grande del lado izquierdo de la lámina  $N$ ,  $U(x)$  será cero y por lo tanto ocurrirá la singularidad de curvatura.

Para  $Q_0$  diferente de cero, el factor

$$\Delta x |Q_0| \frac{\text{sen } \mu (n-1)}{2 \text{sen } \frac{\mu}{2}}$$

en el intervalo propuesto arriba, hará que  $U_n$  siga manteniendo el signo<sup>26</sup> cuando se cumpla la desigualdad

$$\tan \mu \left( n - \frac{1}{2} \right) \cot \frac{\mu}{2} < \frac{P_0}{2\Delta x |Q_0|} + 1.$$

Para la pendiente  $Q_n$ , se ve directamente que seguirá siendo negativa en el mismo intervalo,  $\mu \in [0, \frac{\pi}{2n-1}]$ .

### Observaciones:

- Para evitar la singularidad de curvatura entre las láminas se elige un valor de  $\mu$  que sea mucho menor a la cota superior, entonces la pendiente  $Q_n$  y la distancia  $\Delta x$  serán los que determinan cuando y en donde ocurre la singularidad. También se puede obtener el valor exacto a la derecha de lámina  $N$  de donde suceda la singularidad de curvatura dada por la expresión

$$x = -\frac{P_N}{Q_N} + x_N,$$

donde  $x_N$  es la posición de la lámina  $N$ .

- Se recuerda que el escalar de Kretschmann, ec. (1.37), nos da información relevante acerca de la curvatura del espacio-tiempo. Con la ayuda

---

<sup>26</sup>Tomando en consideración la cota superior de  $\mu = \frac{\pi}{2n-1}$ .

de la función de la ec. 1.58 en la página 31 se llega a

$$R^{\kappa\lambda\mu\nu}R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(\frac{U'(x)}{U(x)}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(\frac{Q_n}{U(x)}\right)^4, \quad x \in [x_n, x_{n+1}). \quad (1.74)$$

La anterior expresión nos dice que la curvatura es proporcional al cuadrado<sup>27</sup> del cociente  $U'(x)/U(x)$ . Para el caso equidistante se puede conocer la curvatura en la  $n$ -ésima lámina, por medio de la razón

$$\frac{Q_n}{U_n} = \frac{-\frac{1}{2\ell} \frac{\text{sen } \mu n}{\text{sen } \mu/2} P_0 + \cos \mu \left(n - \frac{1}{2}\right) Q_0}{\cos \mu \left(n - \frac{1}{2}\right) P_0 + 2 \text{sen } \mu/2 \text{sen } \mu \left(n - 1\right) Q_0},$$

donde se hizo uso de la ec. 1.69. Y si además se toman las condiciones iniciales  $P_0 = 1$  y  $Q_0 = 0$

$$\frac{Q_n}{U_n} = -\frac{\text{sen } \mu n}{2\ell \text{sen } \mu/2 \cos \mu \left(n - \frac{1}{2}\right)},$$

al tomar el límite  $\mu n \ll 1$  la anterior expresión resulta

$$\frac{Q_n}{U_n} = -\frac{n}{\ell}. \quad (1.75)$$

Entonces se puede inferir que la curvatura va aumentando de forma lineal con el número de láminas.

### 1.3. Límite newtoniano

En esta sección se analiza el límite clásico del espacio-tiempo de  $N$  láminas con métrica (1.42), cuya solución se mostró en la Sec. 1.2.6. Primero: se establece una correspondencia entre el potencial gravitacional newtoniano y las componentes de la métrica. Segundo: se obtiene el límite para la  $n$ -ésima lámina.

Sea la métrica (1.42) de la forma

$$g = -U(x)^{-\frac{2}{3}} dt^2 + dx^2 + U(x)^{\frac{4}{3}} (dy^2 + dz^2), \quad (1.76)$$

<sup>27</sup>Dado que la curvatura está dada por  $R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$  y el Kretchmann es una contracción del anterior tensor.

donde

$$U(x) = P + Qx. \quad (1.77)$$

El límite clásico en la teoría general de la relatividad es de la forma

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi), \quad (1.78)$$

con el potencial gravitacional newtoniano  $\Phi$ . Primero se analiza la función (1.77), la cual se puede colocar como

$$U = 1 + \psi,$$

donde  $\psi$  es una función auxiliar que tiene la propiedad  $|\psi| \ll 1$ , entonces

$$g_{00} = -U^{-\frac{2}{3}} = -(1 + \psi)^{-\frac{2}{3}} \approx -1 + \frac{2}{3}\psi = -(1 + 2\Phi),$$

De la anterior relación se obtiene la siguiente correspondencia entre  $\Phi$  y  $\psi$ ,

$$\psi = -3\Phi,$$

por lo anterior

$$U(x) = P + Qx = 1 + \psi(x) = 1 - 3\Phi(x). \quad (1.79)$$

La ec. 1.79 es la condición del límite newtoniano en la relatividad general para  $U(x)$ .

### 1.3.1. Enésima lámina

Para este caso se obtiene el límite newtoniano para la enésima lámina, partiendo de las ecs. (1.61) y (1.62) de la página 32. Reemplazando  $U_n = U(x_n)$  por  $1 - 3\Phi_n$  resulta

$$U_n = 1 - 3\Phi_n = \underbrace{U_{n-1}}_{1-3\Phi_{n-1}} + \Delta x_n Q_{n-1},$$

lo cual lleva a la siguiente ecuación

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} - \frac{1}{3}Q_{n-1}\Delta x_n.$$

Análogamente para  $Q_n$ , queda

$$Q_n = -\frac{1}{\ell_n} + \frac{3}{\ell_n} \Phi_{n-1} + \left(1 - \frac{\Delta x_n}{\ell_n}\right) Q_{n-1},$$

y dado que  $U' = Q = -3\Phi'$  entonces  $\Phi' = -\frac{1}{3}Q$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \Phi_{n-1} + \Phi'_{n-1} \Delta x_n, \\ \Phi'_n &= -\frac{1}{\ell_n} \Phi_{n-1} + \left(1 - \frac{\Delta x_n}{\ell_n}\right) \Phi'_{n-1} + \frac{1}{3\ell_n}. \end{aligned}$$

Multiplicando y dividiendo por  $\Delta x_n$ ,  $\Delta x_{n-1}$  para tener consistencia con las unidades, se llega a la forma matricial adimensional

$$\begin{pmatrix} \Phi_n \\ \Delta x_n \Phi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} \\ -\frac{\Delta x_n}{\ell_n} & \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} \left(1 - \frac{\Delta x_n}{\ell_n}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n-1} \\ \Delta x_{n-1} \Phi'_{n-1} \end{pmatrix} + \frac{\Delta x_n}{3\ell_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El límite newtoniano corresponde a tomar el límite  $\left|\frac{\Delta x_n}{\ell_n}\right| \rightarrow 0$  para orden lineal

$$\begin{pmatrix} \Phi_n \\ \Delta x_n \Phi'_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} \\ 0 & \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n-1} \\ \Delta x_{n-1} \Phi'_{n-1} \end{pmatrix} + \frac{\Delta x_n}{3\ell_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde se hace uso de la suposición que  $|\Phi| \ll 1$  entonces  $\frac{\Delta x_n}{\ell_n} \Phi_n$  es despreciable, también se nota que el término  $\Phi'_{n-1}$  es proporcional a  $\frac{\Phi_{n-1}}{\ell_{n-1}}$  del cual se obtienen términos cuadráticos de  $\frac{\Delta x_n}{\ell_n}$ . Es conveniente regresar a la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \Phi_n \\ \Phi'_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \Delta x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{n-1} \\ \Phi'_{n-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{3\ell_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al comparar el resultado previo con la ec. (1.17) en la página 11, se debe cumplir que

$$\frac{1}{3\ell_n} = \mathbf{c}_n.$$

Con ayuda de las ecs. (1.55) y (1.10) se llega a la correspondencia

$$\sigma_n^{(R)} = 2\sigma_n^{(N)}, \quad (1.80)$$

donde  $\sigma_n^{(R)}$  y  $\sigma_n^{(N)}$  denotan la densidad de energía superficial relativista y newtoniana. Para demostrar el resultado en (1.80) se considera el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi \approx R_{00} &= \kappa \left( T_{00} + \frac{1}{2}g_{00}R \right) = 4\pi G_N (T_{00} + T_{11} + T_{22} + T_{33}) \\ &= 4\pi G_N (\rho^{(R)} + 2P_T + P_L) = 2\pi G_N \rho^{(R)},\end{aligned}\quad (1.81)$$

en la anterior expresión se utilizó la ecuación de estado  $p_T = -\frac{1}{4}\rho^{(R)}$ . La ec. (1.81), por definición, debe ser la ecuación de Poisson gravitacional  $\nabla^2\Phi = 4\pi G_N \rho^{(N)}$ , entonces  $\rho^{(R)} = 2\rho^{(N)}$  lo cual demuestra la correspondencia (1.80) y cumplimiento del límite para campos débiles, cuasiestacionarios y de velocidades pequeñas comparadas con la de la luz.

Lo anterior nos da una verificación de nuestro espacio-tiempo de fondo, dado por la métrica (1.76) donde las componentes de la métrica son solucionadas por medio de (1.61) y (1.62).

**Observación:** En los siguientes capítulos, por simplicidad se escribirá «espacio-tiempo» en vez de «espacio-tiempo de fondo».

## Capítulo 2

# Espacio-Tiempo como sistema desordenado

Hasta el momento se analizaron las propiedades del espacio-tiempo sin desorden, es decir, para el caso en el cual la distancia entre las láminas es constante y la distribución de materia es la misma en cada una de las láminas de la configuración. Este capítulo se centra en examinar el espacio-tiempo de la ec. (1.42), a través de la ecuación de recurrencia (1.61) y (1.62), la cual está formada por un elemento muy importante para el análisis de este capítulo. Este elemento es una matriz  $2 \times 2$  de entradas reales no constantes, llamada matriz de transferencia (se mencionó en la Sec. 1.2.6)

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x_n \\ -\ell_n^{-1} & 1 - \ell_n^{-1} \Delta x_n \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde las entradas  $\Delta x_n$  describe la distancia entre dos láminas sucesivas y  $\ell_n$  es una variable que está relacionada con la densidad de energía superficial  $\sigma_n$  a través de  $\ell_n = \frac{4}{3} \frac{1}{\kappa \sigma_n}$ , y tiene unidades de longitud (véase ec. (1.55)).

Se consideran los efectos del desorden sobre el espacio-tiempo, esto se hace definiendo a  $\Delta x_n$  y  $\ell_n$  como variables aleatorias que fluctúan alrededor de su promedio o valor esperado. Estas cantidades contienen la información del tipo de desorden del sistema, estructural o compositivo.

Un resultado importante de esta tesis es la obtención de una equivalencia exacta entre el modelo del espacio-tiempo descrito por (2.1) y el modelo unidimensional de Anderson, lo que provee una conexión interesante entre modelos de enlace fuerte (materia condensada) y el modelo del espacio-tiempo (relatividad general). Más específicamente, se comprobará la equivalencia del

modelo de Anderson unidimensional y el modelo de espacio-tiempo con desorden puramente compositivo o estructural. Entonces se podrán utilizar la vasta bibliografía, los resultados y las herramientas de la física de la materia condensada para analizar el espacio-tiempo de interés en este trabajo.

## 2.1. Modelo de Anderson Unidimensional (1D)

En la física del estado sólido el teorema de Bloch desempeña un papel fundamental. El teorema de Bloch [20] implica que los estados electrónicos cristalinos son extendidos y que los niveles energéticos en los cristales se agrupan en bandas. El teorema de Bloch, sin embargo, no puede aplicarse a los sistemas desordenados, ya que estos carecen de la invariancia traslatoria propia de los cristales. Para finales del los 50's Philip W. Anderson [21] parte de la necesidad de describir modelos desordenados en sistemas tridimensionales de enlace fuerte con desorden sin correlación, mostrando que para un grado de desorden fuerte los estados electrónicos se localizan. Un par de años después se mostró que para sistemas de una y dos dimensiones, siempre se localizan los estados para desorden sin correlación [22, 23], incluso si el desorden es débil.

Los modelos con desorden se definen por medio de dos elementos, el primero es un hamiltoniano que depende de uno o varios parámetros aleatorios o de un potencial aleatorio, el segundo son la propiedades estadísticas del modelo.

El modelo de Anderson 1D queda definido por la ecuación de Schrödinger

$$\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1} + \varepsilon_n \Psi_n = E \Psi_n, \quad (2.2)$$

donde  $\Psi_n$  es la función de onda en el sitio  $x_n$  de una red de electrones unidimensional. La ec. (2.2) puede ser obtenida a través del potencial

$$H = \sum_n \varepsilon_n |n\rangle \langle n| + \sum_n V (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|),$$

donde se ha utilizado la notación de Dirac, con  $|n\rangle$  las eigenfunciones,  $V$  el potencial del sistema y  $\varepsilon_n$  representa el desorden de la energía en el  $n$ -ésimo sitio.

El modelo de Anderson 1D también puede ser obtenido al discretizar la

ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x),$$

donde  $m$  es la masa de los electrones,  $\Psi$  la función de onda,  $E$  la energía del sistema y  $V(x)$  un potencial aleatorio.

Las variables aleatorias  $\varepsilon_n$  se consideran independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d), y se asume que la distribución de probabilidad  $p(\varepsilon)$  sea uniforme

$$p(\varepsilon_n) = \begin{cases} \frac{1}{W} & \varepsilon_n \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right], \\ 0 & \varepsilon_n \notin \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right], \end{cases} \quad W > 0.$$

Siempre es útil tener definido el valor esperado (promedio) y la varianza (desviación cuadrada del promedio) de la variable aleatoria

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \langle \varepsilon \rangle = \int \varepsilon p(\varepsilon) d\varepsilon = 0, \\ \text{Var}(\varepsilon) &= \langle (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 \rangle = \frac{W^2}{12}. \end{aligned}$$

Un estado cuántico se dice localizado si la envolvente de la función de onda en la representación de las coordenadas decrece exponencialmente

$$\Psi(x) \sim A \exp\left(-\frac{|x - x_0|}{l_{\text{loc}}}\right), \quad |x - x_0| \gg l_{\text{loc}}.$$

El parámetro  $l_{\text{loc}}$  de la ecuación anterior constituye la longitud de localización. En la página 48 se presenta un método para calcular dicha longitud de localización.

La ec. (2.2) tiene una representación matricial de la forma

$$u_{n+1} = \mathbf{R}_n u_n, \quad (2.3)$$

donde

$$u_n := \begin{pmatrix} \Psi_n \\ \Psi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} E - \varepsilon_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Encontrar la solución al sistema lleva a iterar  $N$  veces la ecuación 2.3, donde  $N$  es el número total de sitios de la red. Con esto se puede escribir

$$u_{N+1} = \mathbf{P}_N \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_N = \mathbf{R}_N \mathbf{R}_{N-1} \cdots \mathbf{R}_1,$$

el problema consiste en obtener la matriz de transferencia total  $\mathbf{P}_N$ . Aquí el vector  $u_1$  queda determinado por los valores iniciales  $\Psi_0$  y  $\Psi_1$ , que pueden ser restringidos por la condición de frontera en  $x_0$ .

**Una forma de calcular la longitud de localización es a través de las siguientes consideraciones:** Sean  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N$  matrices cuadradas  $n \times n$  con entradas aleatorias i.i.d. tales que el valor esperado del logaritmo de la norma de la matriz  $\langle \log^+ \|\mathbf{R}_1\| \rangle < \infty$  exista, donde

$$\log^+ := \max\{0, \log x\} = \begin{cases} \log x, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}.$$

Entonces se define el exponente de Lyapunov como

$$\lambda := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle \log \|\mathbf{R}_N \mathbf{R}_{N-1} \cdots \mathbf{R}_1\| \rangle \in [-\infty, \infty). \quad (2.5)$$

Como consecuencia del lema de Fekete [24] se puede mostrar [25] que el límite existe o es  $-\infty$ , el límite es independiente de la elección de la norma.

### 2.1.1. Teorema de Furstenberg

En esta sección se enuncian dos teoremas fundamentales sobre las propiedades del exponente de Lyapunov que permiten decidir si un sistema desordenado tiene estados localizados con ayuda de la conjetura de Borland.

#### Teorema de Furstenberg-Kesten [26]

Sean  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots$  matrices aleatorias i.i.d. en  $GL(k, \mathbb{R})$ , donde  $GL(k, \mathbb{R})$  denota el grupo de matrices invertibles  $k \times k$  con entradas reales. Sea el valor esperado  $\langle \log^+ \|\mathbf{R}_1\| \rangle < \infty$ , y  $\lambda$  el exponente de Lyapunov. Entonces existe el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \|\mathbf{R}_N \mathbf{R}_{N-1} \cdots \mathbf{R}_1\| = \lambda,$$

con probabilidad 1. Se observa que el anterior resultado es más fuerte que la definición del exponente de Lyapunov dada en la ec. (2.5), porque el límite no depende de la realización de las variables aleatorias entonces es determinista.

**Teorema de Furstenberg [27]**

Sean  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots$  matrices aleatorias i.i.d. en  $SL(k, \mathbb{R})$ , el subgrupo de las matrices en  $GL(k, \mathbb{R})$  con determinante igual a uno. Sea  $G$  el subgrupo más pequeño de  $SL(k, \mathbb{R})$  que contiene el soporte de la medida de probabilidad asociada a las matrices aleatorias. Además, se supone que se cumplen las siguientes hipótesis:

- a)  $G$  es no compacto.
- b)  $G$  es fuertemente irreducible<sup>1</sup>.

Entonces, el exponente de Lyapunov es estrictamente positivo,  $\lambda > 0$ , y con probabilidad 1 vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \|\mathbf{R}_N \mathbf{R}_{N-1} \cdots \mathbf{R}_1 \underline{u}\| = \lambda > 0,$$

para todo  $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\underline{u} \neq \underline{0}$ .

El anterior resultado es de suma importancia, por las siguientes razones:

- Aún si se considera un producto de  $N$  matrices aleatorias, el teorema de Furstenberg implica que la realización particular de las variables aleatorias no importa, entonces se tiene un carácter puramente determinista, dado que el límite existe y se cumple con probabilidad 1.

---

1

**Definición:** Sea  $S \subset GL(k, \mathbb{R})$  un subconjunto del grupo  $GL(k, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 2$ . Entonces  $S$  se llama

- a) Irreducible, si no existe ningún subespacio no-trivial invariante de  $\mathbb{R}^k$ :

$$g(V) = V \text{ para todo } g \in S \Rightarrow V = \{0\} \text{ o } V = \mathbb{R}^k.$$

- b) Fuertemente irreducible, si no existe ninguna familia  $V_1, V_2, \dots, V_m$  finita de subespacios no triviales de  $\mathbb{R}^k$  tal que

$$g(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m \text{ para todo } g \in S.$$

Como ejemplo se puede considerar la rotación por 90 grados en el plano  $\mathbb{R}^2$ , la cual es irreducible pero no fuertemente irreducible, porque deja los ejes de un sistema cartesiano invariantes.

- Bajo las hipótesis del teorema de Furstenberg el exponente de Lyapunov resulta ser positivo, lo que implica que la multiplicación simultánea de matrices aleatorias tenga un crecimiento exponencial, con probabilidad 1.

### Conjetura de Borland

El crecimiento exponencial de las matrices aleatorias no es suficiente para decir que existe localización de los estados electrónicos en el Modelo de Anderson, dado que las funciones de onda no cumplen con las condiciones de frontera. Es decir, al tomar una función de onda desde la izquierda y otra desde la derecha dadas a través del producto de matrices aleatorias (2.4), se tendrá un crecimiento exponencial que no permitirá que las dos funciones de onda se puedan «embonar», lo anterior es del hecho que la energía  $E$  no es un eigenvalor del hamiltoniano. Sin embargo Borland [28] intuyó que para las energías que sean eigenvalores del hamiltoniano, se puede «empalmar» las funciones de onda. Entonces se establece la conexión del exponente de Lyapunov como el inverso de la longitud de localización  $l_{\text{loc}}$  como

$$l_{\text{loc}} = \lambda^{-1}. \quad (2.6)$$

Se puede mostrar [29] que las matrices de transferencia asociadas al sistema de Anderson (2.4) cumplen con los requisitos del teorema de Furstenberg. Como consecuencia importante de la conjetura de Borland [28, 30] junto a lo antes dicho da como resultado que todos los estados electrónicos en el modelo de Anderson 1D estén localizados, para cualquier intensidad de desorden no correlacionado [22, 30].

**Observación:** Una de las limitaciones del teorema de Furstenberg es que sólo es válido para variables aleatorias i.i.d.

### 2.1.2. Fórmula de Thouless

El teorema de Furstenberg es un excelente resultado porque garantiza que el exponente de Lyapunov sea positivo lo que implica la localización de los estados. No obstante, no proporciona un método analítico para calcularlo explícitamente. Existen diferentes maneras de calcular el exponente de Lyapunov, entre las que se pueden mencionar<sup>2</sup>

- a) Método numérico.
- b) Mapa hamiltoniano. Se encuentra la correspondencia del modelo de Anderson 1D con un oscilador paramétrico clásico<sup>3</sup>.
- c) Método de las funciones de Green.

Al usar el mapa hamiltoniano, con la suposición de desorden débil y variables aleatorias i.i.d. es posible obtener el exponente de Lyapunov de forma analítica. El resultado se conoce como fórmula de Thouless [31]

$$\lambda(E) = \frac{1}{8} \frac{\text{Var}(\varepsilon_n)}{1 - \left(\frac{E}{2}\right)^2}. \quad (2.7)$$

Se debe hacer la observación que la anterior ecuación no es válida para  $E = 0, \pm 2$ , el centro[32] y bordes de la banda de energía respectivamente, ver referencias en [33] y referencias en el, para los casos límites. Es debido comentar que también existe una generalización de la fórmula de Thouless (2.7) para variables aleatorias con correlación[34].

## 2.2. Equivalencia entre la matriz de transferencia del espacio-tiempo y la matriz de transferencia del modelo de Anderson 1D.

La matriz de transferencia (2.1) para la descripción del espacio-tiempo con  $N$  láminas con desorden, como se menciona al inicio de este capítulo, contiene dos tipos de desorden (estructural y compositivo) que son representados por las variables  $\Delta x_n$  y  $\ell_n$  respectivamente.

En esta sección se establecen dos equivalencias exactas entre el modelo del espacio-tiempo con  $N$  láminas y el modelo de Anderson 1D. La primera equivalencia es para el desorden puramente compositivo; la segunda para el desorden puramente estructural. Lo anterior es un resultado relevante e interesante; primero porque se tiene una conexión entre dos áreas de la física completamente distintas (la física de la materia condensada y la relatividad general) y segundo porque se pueden aplicar todos los resultados y herramientas que se tienen en el modelo de Anderson 1D a él modelo del espacio-tiempo de  $N$  láminas, visto en el Cap. 1.

<sup>3</sup>Es un oscilador armónico cuya frecuencia varía en el tiempo.

### Desorden compositivo.

Se empieza con el modelo (2.1), con desorden puramente compositivo (apagando el desorden estructural), tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell_n} &= \frac{1}{\ell} (1 - \epsilon_n), \\ \Delta x_n &= \Delta x_{n-1} = \dots \equiv \Delta x,\end{aligned}$$

donde  $\Delta x$  denota la distancia constante entre las láminas,  $\frac{1}{\ell} = \frac{3}{4}\kappa\sigma$  denota una cantidad constante proporcional a la densidad superficial de masa promedio, y donde

$$\epsilon_n = \frac{\ell_n - \ell}{\ell_n} = \frac{\sigma - \sigma_n}{\sigma} \quad (2.8)$$

es la variable aleatoria que describe el desorden compositivo, es decir, es la variable responsable de tener fluctuaciones en la densidad de masa. Con  $\langle \epsilon_n \rangle = 0$ , obsérvese además que se pide que  $\text{Var}(\epsilon_n) \lesssim 1$  o  $\text{Var}(\sigma_n) \lesssim \sigma$ , para que la densidad de masa se mantenga positiva.

La matriz  $\mathbf{T}_n$  queda de la forma

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T} + \epsilon_n \mathbf{S}, \quad (2.9)$$

donde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta x \\ -\frac{1}{\ell} & 1 - \frac{\Delta x}{\ell} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\ell} & \frac{\Delta x}{\ell} \end{pmatrix},$$

con  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{S}$  matrices constantes. En este caso, se recuerda el vector  $w_n = \mathbf{T}_n w_{n-1}$  de la ec. (1.61). Se quiere eliminar la variable  $Q_n$ , esto se logra con los siguientes pasos: se despeja el vector  $w_{n-1}$  y se baja de una unidad el índice  $n$ , se obtiene

$$w_{n-2} = \mathbf{T}_{n-1}^{-1} w_{n-1},$$

donde la matriz inversa de  $T_{n-1}$  queda como:

$$\mathbf{T}_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Delta x}{\ell} (1 - \epsilon_{n-1}) & -\Delta x \\ \frac{1}{\ell} (1 - \epsilon_{n-1}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Después de sumar  $w_n$  y  $w_{n-2}$  y de subir de una unidad el índice  $n$ , se obtiene

$$U_{n+1} + U_{n-1} - \overbrace{\frac{\Delta x}{\ell} \epsilon_n}^{\epsilon_n^{(A)}} U_n = \overbrace{\left(2 - \frac{\Delta x}{\ell}\right)}^{E^{(A)}} U_n. \quad (2.10)$$

La ec. (2.10) muestra la equivalencia entre el modelo de Anderson 1D (ec. (2.2)) y el problema presente. El superíndice  $A$  indicará la correspondencia con el modelo de Anderson.

### Desorden estructural.

Ahora se considera el caso de desorden puramente estructural tal que

$$\begin{aligned}\Delta x_n &= \Delta x (1 - \delta_n), \\ \ell_n &= \ell_{n-1} = \cdots \ell_1 \equiv \ell,\end{aligned}$$

donde  $\ell$  es constante y donde

$$\delta_n = \frac{\Delta x_n - \Delta x}{\Delta x}, \quad (2.11)$$

es la variable aleatoria que describe el desorden relativo de la distancia. Se asume que  $\langle \delta_n \rangle = 0$  y  $\text{Var}(\delta_n) \lesssim 1$  o  $\text{Var}(\Delta x_n) \lesssim \Delta x$ , de tal manera que se evita el traslape entre las láminas. La matriz  $\mathbf{T}_n$  para este caso es de la forma

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T} + \delta_n \mathbf{S}, \quad (2.12)$$

donde la matriz  $\mathbf{S}$  es

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta x \\ 0 & \frac{\Delta x}{\ell} \end{pmatrix}.$$

Se hace un procedimiento análogo al desorden compositivo para encontrar la equivalencia, pero ahora se eliminará la variable  $U_n$ , en donde queda una ecuación para  $Q_n$ :

$$Q_{n+1} + Q_{n-1} - \overbrace{\frac{\Delta x}{\ell} \delta_{n+1}}^{\varepsilon_n^{(A)}} Q_n = \overbrace{\left(2 - \frac{\Delta x}{\ell}\right)}^{E^{(A)}} Q_n, \quad (2.13)$$

la anterior ecuación demuestra la equivalencia con el modelo de Anderson 1D.

**Resumen:** El resultado principal de esta sección es la correspondencia entre el modelo del espacio-tiempo de  $N$  láminas, con desorden puramente

compositivo o puramente estructural, con el modelo de Anderson 1D. Dicha correspondencia se puede resumir de la siguiente forma:

$$\varepsilon_n^{(A)} = -\frac{\Delta x}{\ell} \epsilon_n, \text{ compositivo,} \quad (2.14a)$$

$$\varepsilon_n^{(A)} = -\frac{\Delta x}{\ell} \delta_{n+1}, \text{ estructural,} \quad (2.14b)$$

$$E^{(A)} = 2 - \frac{\Delta x}{\ell}. \quad (2.14c)$$

Los anteriores resultados son muy importantes dado que el modelo de Anderson 1D, como ya se mencionó en la página 48, cumple con el teorema de Furstenberg y existe una amplia literatura con resultados conocidos sobre las propiedades del exponente de Lyapunov y como calcularlo. A continuación se aplican estos resultados al modelo del espacio-tiempo en cuestión.

### 2.2.1. Cálculo del exponente de Lyapunov.

En esta sección se obtiene una expresión analítica para el exponente de Lyapunov válida para el modelo del espacio-tiempo de interés, por medio de la fórmula de Thouless introducida en la Sec. 2.1.2 del modelo de Anderson 1D. Primero hay que recordar la relación (1.69), que es

$$\frac{\Delta x}{\ell} = 2(1 - \cos \mu) = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\mu}{2}. \quad (2.15)$$

Con la ec. (2.14c) se obtiene que la energía es

$$E = E^{(A)} = 2 - \frac{\Delta x}{\ell} = 2 \cos \mu, \text{ tal que } 1 - \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 \mu.$$

Al sustituir la anterior ecuación en la fórmula de Thouless, ec. (2.7), el exponente de Lyapunov queda de la siguiente manera

$$\lambda(\mu) = \frac{1}{8} \frac{\operatorname{Var}(\varepsilon^{(A)})}{\operatorname{sen}^2 \mu}, \quad \mu \in (0, \pi), \quad \mu \neq \frac{\pi}{2} \quad (2.16)$$

con  $\varepsilon^{(A)}$  dado por la ec. (2.14a) o la ec. (2.14b) y  $\mu$  está dada como

$$\mu = \arccos \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\ell} \right).$$

**Desorden puramente compositivo:** Tomando en cuenta las expresiones (2.8) y (2.14a), se puede expresar la ec. (2.16) en términos de la densidad de masa superficial  $\sigma$  como

$$\lambda(\mu) = \frac{\tan^2(\mu/2)}{2} \text{Var}(\epsilon_n) = \frac{\tan^2(\mu/2)}{2\sigma^2} \text{Var}(\sigma_n), \quad (2.17)$$

donde  $\sigma_n$  representa la fluctuación de la densidad de masa superficial.

**Desorden puramente estructural:** En este caso se tienen las ecs. (2.11) y (2.14b). Sustituyendo en la ec. (2.16), el exponente de Lyapunov resulta

$$\lambda(\mu) = \frac{\tan^2(\mu/2)}{2} \text{Var}(\delta_{n+1}) = \frac{\tan^2(\mu/2)}{2(\Delta x)^2} \text{Var}(\Delta x_n), \quad (2.18)$$

con  $\Delta x_n$  las fluctuaciones de la distancia entre las láminas.

Las anteriores expresiones son los exponentes de Lyapunov correspondientes al desorden puramente compositivo o puramente estructural, suponiendo que este último sea suficientemente débil e i.i.d.

### Observaciones:

- El modelo del espacio-tiempo al ser equivalente al modelo de Anderson 1D, ya sea con desorden puramente compositivo o puramente estructural, tiene un crecimiento exponencial de las constantes dadas por  $U_n$  y  $Q_n$ . Dicho resultado es una consecuencia del teorema de Furstenberg.
- En la página 33, en la parte donde se toman láminas equidistantes e idénticas, la motivación para tomar el parámetro  $\mu \sim \frac{\Delta x}{\ell} \ll 1$  fue por argumentos astrofísicos. Sin embargo, ese límite corresponde a acercarse al borde de la banda de energía  $E = 2$ , que corresponde justamente al régimen donde la fórmula Thouless (2.7) deja de ser válida en general. No obstante, para el caso puramente compositivo, la ec. (2.17) resulta ser válida<sup>4</sup> al acercarse a la banda de energía  $E = 2$  por la izquierda cuando  $\mu \rightarrow 0$ .

---

<sup>4</sup>Una manera de justificar que la fórmula del Lyapunov (a través de la fórmula de Thouless) para el desorden puramente compositivo es válida para el borde de la banda de Energía  $E = 2$ , es usar la ec. (24) en [33] en el límite  $k \rightarrow \infty$ .

- Para el límite  $\mu \rightarrow 0$  en el caso de desorden puramente compositivo, la ec. (2.17) tiene el siguiente límite

$$\lambda(E) \approx \frac{\mu^2 \text{Var}(\sigma_n)}{8\sigma^2}. \quad (2.19)$$

Para analizar los bordes de la banda en el caso de desorden puramente estructural se requiere de consideraciones minuciosas las cuales no se tratarán en este trabajo de tesis y se dejan para trabajos posteriores.

- Al tomar las ecs. (1.61) y (1.62), a través del vector  $w_{n+1}$  se puede obtener una relación sencilla entre las variables  $U_n$  y  $Q_n$ , la cual es

$$Q_n = \frac{1}{\Delta x_{n+1}} (U_{n+1} - U_n). \quad (2.20)$$

Si se divide sobre  $U_n$  la anterior ecuación, se obtiene

$$\frac{Q_n}{U_n} = \frac{1}{\Delta x_{n+1}} \left( \frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \right), \quad (2.21)$$

dicha relación es relevante, porque si recordamos la ec. (1.74), es la cantidad que da información sobre la curvatura del sistema.

Surge la pregunta natural sobre el comportamiento de la curvatura respecto al crecimiento exponencial de las componentes de la métrica y en general sobre el significado físico del exponente de Lyapunov en el modelo del espacio-tiempo. Lo anterior se analizará en las subsiguientes secciones.

### 2.3. Significado físico del exponente de Lyapunov en el espacio-tiempo

En esta sección se analizan las implicaciones físicas y conceptuales de los resultados sobre el exponente de Lyapunov calculado en la Sec. 2.2.1.

Cabe recalcar que el exponente de Lyapunov, a través de la fórmula de Thouless para el espacio-tiempo, no tiene sentido para el espacio-tiempo considerado. Y es porque en la Sec. 1.2.2 se explicó que existe una singularidad de curvatura, por lo tanto se tiene una cota superior sobre el número de láminas  $N$ , mientras que para la obtención de la fórmula de Thouless y para

la definición del exponente de Lyapunov propiamente dicho se ha tomado el límite  $N \rightarrow \infty$ .

Para analizar lo anterior, primero se recuerda el escalar de Kretschmann, obtenido en la página 39 dado por la ec. (1.74), en términos de la función  $U(x) = P_n + Q_n x$  y su derivada  $U'(x)$

$$R^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(\frac{Q_n}{U(x)}\right)^4, \quad x \in [x_n, x_{n+1}). \quad (2.22)$$

El escalar de Kretschmann, como se mencionó anteriormente, es un invariante de curvatura y en su primer momento permitió discernir la presencia de una singularidad de curvatura auténtica. En general se puede tomar como una medida de magnitud de la curvatura del espacio-tiempo, en este caso será útil para cuantificar el cambio de la curvatura por efectos del desorden para cualquier valor de  $x$  menor a la posición de la singularidad. La ec. (2.22) implica que la curvatura es proporcional al cuadrado de la razón  $Q_n/U_n$  en la  $n$ -ésima lámina.

En esta sección se establece la conexión entre la razón de la curvatura  $Q_n/U_n$  que mide la curvatura y el exponente de Lyapunov. Además se analiza el comportamiento de la curvatura para el caso de desorden puramente compositivo.

## Desorden compositivo

Como se mencionó en la Sec. 2.2, el modelo del espacio-tiempo con desorden puramente compositivo corresponde al modelo de Anderson 1D. Se puede calcular el exponente de Lyapunov a través de la relación

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{U_n}{U_1} \right|. \quad (2.23)$$

Sin embargo, el modelo del espacio-tiempo desarrolla una singularidad de curvatura para un valor finito de  $n$ , que ocurre cuando la función  $U(x)$  cambia de signo. Pero la ec. (2.23) sigue siendo aproximadamente válida para un  $n$  suficientemente grande. La correspondencia del espacio-tiempo con el modelo de Anderson 1D, implica que las cantidades  $U_n$  crecen exponencialmente como  $U_n \sim \exp(\lambda n)$  para  $n$  finito pero suficientemente grande.

Considerando el anterior párrafo, la ec (2.21) puede ser escrita como:

$$\frac{Q_n}{U_n} = \frac{1}{\ell} \underbrace{\frac{\ell}{\Delta x}}_{\sim \mu^2} \overbrace{\left( \frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \right)}^{\exp(\lambda) - 1} \approx \frac{\lambda}{\ell \mu^2} \approx \frac{\text{Var}(\sigma_n)}{8\sigma^2 \ell}, \quad (2.24)$$

donde se usa la ec. (2.15), la aproximación de  $\mu \ll 1$  y la ec. de Thouless (2.19).

**Interpretación:** Para descifrar el anterior razonamiento, primero se analiza el caso sin desorden, es decir, se regresa al caso equidistante, entonces el cociente  $Q_n/U_n$  bajo la aproximación de  $\mu \ll 1$ , (véase la ec. (1.75)), es de la forma

$$\frac{Q_n}{U_n} = -\frac{n}{\ell},$$

lo que que implica que la curvatura vaya aumentando de forma lineal con el número de láminas.

En cambio la ec. (2.24) implica que la curvatura es proporcional a la varianza de las variables aleatorias  $\sigma_n$ . Es decir, cuando se implementa desorden puramente compositivo y se considera  $\mu \ll 1$ , la curvatura es independiente del número de láminas del sistema y de las condiciones iniciales del sistema, para un número  $n$  suficientemente grande.

## 2.4. Correcciones del orden $1/N$ al exponente de Lyapunov

En esta sección se hace un desarrollo explícito de la multiplicación de la matriz total  $\mathbf{A}_n = \mathbf{T}_{n+1} \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2$ , con  $\mathbf{T}_n$  dado por la ec. (2.1), a orden lineal del desorden, para el caso puramente compositivo y para el caso puramente estructural. La razón por la cual se lleva a cabo este estudio es para obtener las correcciones del orden  $1/N$  al exponente de Lyapunov calculado en la Sec. 2.2.1.

### 2.4.1. Desorden compositivo

Sea la matriz de transferencia con desorden puramente compositivo, ec. (2.9)

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T} + \epsilon_n \mathbf{S},$$

donde  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{S}$  son matrices constantes<sup>5</sup> y  $\epsilon_n$  es una variable aleatoria i.i.d. que representa el desorden. Se usa la propiedad  $\lambda_+ + \lambda_- = 2 - \frac{\Delta x}{\ell}$  de los eigenvalores de la matriz  $\mathbf{T}$ , entonces la matriz  $\mathbf{S}$  puede ser reescrita como:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\ell} & 2 - \lambda_+ - \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Ya que se estarán usando las matrices en términos de los eigenvalores de  $\mathbf{T}$ , es conveniente transformar a la base que diagonaliza a  $\mathbf{T}$  mediante la transformación  $G^{-1}$  dada en (1.66). Con respecto a esta base la matriz de transformación  $\mathbf{T}_n$  es

$$\begin{aligned} \overbrace{\mathbf{G}^{-1} \mathbf{T}_n \mathbf{G}}^{\bar{\mathbf{T}}_n} &= \overbrace{\mathbf{G}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{G}}^{\mathbf{D}} + \epsilon_n \overbrace{\mathbf{G}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{G}}^{\bar{\mathbf{S}}} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} + \epsilon_n \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_+ & -1 \\ 1 & -\lambda_- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde se recuerda que  $\lambda_{\pm}$  cumple las propiedades  $\lambda_+ \lambda_- = 1$  y  $\lambda_+^* = \lambda_-$  tal que  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\mu}$ . Se obtiene la multiplicación de las matrices<sup>6</sup>

$$\overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{n+1} \bar{\mathbf{T}}_n \cdots \bar{\mathbf{T}}_2}^{\bar{\mathbf{A}}_n} = \mathbf{D}^n + \sum_{k=1}^n \epsilon_{k+1} \mathbf{D}^{n-k} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{D}^{k-1} + \mathcal{O}(\epsilon_n^2), \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la matriz diagonal de los eigenvalores de  $\mathbf{T}$ . Substituyendo explícitamente las matrices  $\mathbf{D}$  y  $\bar{\mathbf{S}}$ , la expresión anterior queda como:

$$\bar{\mathbf{A}}_n = \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} \left[ \mathbf{1}_2 + \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \sum_{k=1}^n \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_-^{2k-1} \\ \lambda_+^{2k-1} & -1 \end{pmatrix} \right] + \mathcal{O}(\epsilon_n^2). \quad (2.26)$$

<sup>5</sup>Obsérvese que  $\mathbf{T}$  es la matriz obtenida para el caso de láminas equidistantes e idénticas, véase página 33.

<sup>6</sup>Se hace el desarrollo del producto de matrices al primer orden del desorden. Obsérvese que como se consideran variables aleatorias i.i.d. al desarrollar a ordenes mayores de  $\epsilon_n$  se tendrán términos proporcionales a  $(\epsilon_n \epsilon_m)$  con  $n \neq m$  en el producto  $\bar{\mathbf{A}}_n$ , entonces al tomar el valor medio del producto  $\epsilon_n \epsilon_m$  estos términos se anulan dado que  $\langle \epsilon_n \epsilon_m \rangle = 0$  para  $n \neq m$ . Por lo tanto dichos términos se pueden despreciar sin pérdida de información, para calcular las primeras correcciones debido al desorden.

En los anteriores párrafos se obtuvo la multiplicación matricial sucesiva de las matrices de transferencia explícitamente a orden lineal del desorden compositivo en términos de los eigenvalores de  $\mathbf{T}$  (reales o complejos). *Aplicar el teorema de Furstenberg no es viable en principio para este sistema, dado que se tiene una singularidad de curvatura para algún  $N$  finito. Sin embargo, se pueden obtener las correcciones  $1/N$  al exponente de Lyapunov para un número  $N$  finito, suficientemente grande.*

Para este caso se toma el vector inicial (1.65) asumiendo que  $P_0 = 1$ ,  $Q_0 = 0$  (Minkowski a la izquierda de la primer lámina). Al transformar en la base que diagonaliza a  $\mathbf{T}$

$$\bar{w}_1 = \mathbf{G}^{-1}w_1 = \frac{1}{\ell(\lambda_+ - \lambda_-)} \begin{pmatrix} -\lambda_+ \\ \lambda_- \end{pmatrix},$$

con el cual se calculara la norma al cuadrado

$$\|\bar{\mathbf{A}}_n \bar{w}_1\|^2 = \bar{w}_1^\dagger (\bar{\mathbf{A}}_n)^\dagger \bar{\mathbf{A}}_n \bar{w}_1.$$

En los siguiente cálculos se usan las propiedades de los eigenvalores  $\lambda_\pm$ , tal que

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{A}}_n)^\dagger \bar{\mathbf{A}}_n = & \mathbf{1}_2 + 2 \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \sum_{k=1}^n \epsilon_{k+1} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_-^{2k-1} \\ \lambda_+^{2k-1} & 0 \end{pmatrix} \\ & - \left( \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \right)^2 \sum_{k,l=1}^n \epsilon_{k+1} \epsilon_{l+1} \begin{pmatrix} 1 + \lambda_+^{2(l-k)} & -(\lambda_-^{2l-1} + \lambda_-^{2k-1}) \\ -(\lambda_+^{2l-1} + \lambda_+^{2k-1}) & 1 + \lambda_-^{2(l-k)} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

donde  $\epsilon^2$  considera términos de productos  $(\epsilon_j \epsilon_l)$  con  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Mediante (2.26) se obtiene

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{A}}_n \bar{w}_1\|^2 = & - \frac{2}{\ell^2 (\lambda_+ - \lambda_-)^2} \left\{ 1 - \left( \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \right) \sum_{k=1}^n \epsilon_{k+1} (\lambda_+^{2k+1} - \lambda_-^{2k+1}) \right. \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \right)^2 \sum_{k,l=1}^n \epsilon_{k+1} \epsilon_{l+1} \left[ 2 + \lambda_+^{2(l-k)} + \lambda_-^{2(l-k)} \right. \\ & \left. \left. + \lambda_+^{2l+1} + \lambda_-^{2l+1} + \lambda_+^{2k+1} + \lambda_-^{2k+1} \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. ESPACIO-TIEMPO COMO SISTEMA DESORDENADO 59

Se sustituye la forma explícita  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\mu}$  y las identidades  $\frac{1-\lambda_{\pm}}{1+\lambda_{\pm}} = -i \tan(\mu/2)$ ,  $\lambda_{+} - \lambda_{-} = 2i \sin \mu$ , la anterior ecuación queda como

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{A}}_n \bar{w}_1\|^2 &= \frac{1}{2\ell^2 \sin^2 \mu} \left\{ 1 - 2 \tan(\mu/2) \sum_{k=1}^n \epsilon_{k+1} \sin(2k+1)\mu \right. \\ &\quad + \tan^2(\mu/2) \sum_{k,l=1}^n \epsilon_{k+1} \epsilon_{l+1} \left[ 1 + \cos 2(l-k)\mu + \cos(2k+1)\mu \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos(2l+1)\mu \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Ahora se calcula para  $n = N$  fijo grande y considerando  $\epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 &= \frac{1}{2N} \log \left( \frac{1}{2\ell^2 \sin^2 \mu} \right) - \frac{1}{N} \tan(\mu/2) \sum_{k=1}^N \epsilon_{k+1} \sin((2k+1)\mu) \\ &\quad + \frac{1}{2N} \tan^2(\mu/2) \sum_{k,l=1}^N \epsilon_{k+1} \epsilon_{l+1} \left\{ 1 + \cos(2(l-k)\mu) + \cos((2k+1)\mu) \right. \\ &\quad \left. + \cos((2l+1)\mu) - 2 [\sin((2k+1)\mu)] [\sin((2l+1)\mu)] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned}$$

donde se usa de la aproximación  $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \dots$ .

Se recuerda que se esta considerando variables aleatorias  $\epsilon_k$  i.i.d. y por lo cual  $\langle \epsilon_k \rangle = 0$ . Al tomar el valor esperado de la ecuación anterior queda como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 \right\rangle &= \frac{1}{2N} \log \left( \frac{1}{2\ell^2 \sin^2 \mu} \right) \\ &\quad + \text{Var}(\epsilon_{k+1}) \tan^2(\mu/2) \left\{ 1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos((2k+1)\mu) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin^2((2k+1)\mu) \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned}$$

donde  $\text{Var}(\epsilon_{k+1})$  denota la varianza de las variables aleatorias  $\epsilon_{k+1}$ . Se usan

las sumatorias

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \cos(2k+1)\mu &= \frac{\operatorname{sen}(N\mu)}{\operatorname{sen}\mu} \cos((N+2)\mu), \\ \sum_{k=1}^N \operatorname{sen}^2(2k+1)\mu &= \frac{1}{2} \left[ N - \frac{\operatorname{sen}(2N\mu)}{\operatorname{sen}2\mu} \cos((2N+4)\mu) \right], \end{aligned}$$

para obtener el resultado final

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 \right\rangle &= \operatorname{Var}(\epsilon_{k+1}) \tan^2(\mu/2) \left[ \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(N\mu)}{N \operatorname{sen}\mu} \cos((N+2)\mu) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\operatorname{sen}(2N\mu)}{2N \operatorname{sen}(2\mu)} \cos((2N+4)\mu) \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

**Límite**  $N \rightarrow \infty$ : Ahora se toma el límite  $N \rightarrow \infty$  para el valor esperado (2.27):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 \right\rangle = \frac{\operatorname{Var}(\epsilon_{k+1})}{2} \tan^2(\mu/2), \quad (2.28)$$

lo que coincide con el resultado para el exponente de Lyapunov en la ec. (2.17).

**$N$  grande pero fijo:** No obstante, como se está considerando el exponente de Lyapunov para un número fijo  $N$  pero suficientemente grande, entonces se toma el límite  $N\mu \ll 1$  y para  $\epsilon_k \ll 1$ , aproximando las funciones seno y coseno se obtiene:

$$\left\langle \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 \right\rangle \approx 2\operatorname{Var}(\epsilon_{k+1}) \tan^2(\mu/2) \geq 0.$$

El anterior resultado corresponde al exponente de Lyapunov cerca del extremo de la banda de energía.

### 2.4.2. Desorden estructural

Análogamente a la sección anterior, pero ahora considerando la matriz  $\mathbf{T}_n$  para desorden desorden puramente estructural dada por la ec. (2.12)

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T} + \delta_n \mathbf{S},$$

con  $\delta_n$  variables aleatorias. Se obtiene la matriz

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta x \\ 0 & \frac{\Delta x}{\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_+ + \lambda_- - 2)\ell \\ 0 & 2 - \lambda_+ - \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Al transformar a la base que diagonaliza  $\mathbf{T}$  se obtiene

$$\bar{\mathbf{T}}_n = \bar{\mathbf{D}} + \delta_n \bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} + \delta_n \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_+ \\ -\lambda_- & -\lambda_- \end{pmatrix},$$

la matriz total<sup>7</sup>  $\bar{\mathbf{A}}_n$  está dada por

$$\bar{\mathbf{A}}_n = \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} \left[ \mathbf{1}_2 + \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \sum_{k=1}^n \delta_{k+1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_-^{2(k-1)} \\ -\lambda_+^{2(k-1)} & -1 \end{pmatrix} \right] + \mathcal{O}(\delta^2).$$

Se considera el mismo vector inicial transformado y se calculan las mismas cantidades que en el caso del desorden compositivo y se toman nuevamente en cuenta que  $\lambda_+ \lambda_- = 1$ ,  $\lambda_+ = \lambda_-^*$ .

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{A}}_n)^\dagger \bar{\mathbf{A}}_n &= \mathbf{1}_2 + 2 \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \sum_{k=1}^n \delta_{k+1} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_-^{2(k-1)} \\ -\lambda_+^{2(k-1)} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \left( \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \right)^2 \sum_{k,l}^n \delta_{k+1} \delta_{l+1} \begin{pmatrix} 1 + \lambda_+^{2(l-k)} & \lambda_-^{2(l-1)} + \lambda_-^{2(k-1)} \\ \lambda_+^{2(l-1)} + \lambda_+^{2(k-1)} & 1 + \lambda_-^{2(l-k)} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{A}}_n \bar{w}_1\|^2 &= -\frac{2}{\ell^2 (\lambda_+ - \lambda_-)^2} \left\{ 1 + \left( \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \right) \sum_{k=1}^n \delta_{k+1} (\lambda_+^{2k} - \lambda_-^{2k}) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \lambda_+}{1 + \lambda_+} \right)^2 \sum_{k,l}^n \delta_{k+1} \delta_{l+1} \left[ 2 + \lambda_+^{2(l-k)} + \lambda_-^{2(l-k)} \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda_+^{2l} - \lambda_-^{2l} - \lambda_+^{2k} - \lambda_-^{2k} \right] \right\} + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>Véase pie de página 6.

sustituyendo la forma explícita de los eigenvalores  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\mu}$ :

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{A}}_n \bar{w}_1\|^2 &= \frac{1}{2\ell^2 \operatorname{sen}^2 \mu} \left\{ 1 + 2 \tan(\mu/2) \sum_{k=1}^n \delta_{k+1} \operatorname{sen} 2k\mu \right. \\ &\quad + \tan^2(\mu/2) \sum_{k,l}^n \delta_{k+1} \delta_{l+1} \left[ 1 + \cos 2(l-k)\mu - \cos 2l\mu \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos 2k\mu \right] \right\} + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned}$$

Calculando para  $n = N$  fijo y grande y considerando  $\delta \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 &= \frac{1}{2N} \log \left( \frac{1}{2\ell^2 \operatorname{sen}^2 \mu} \right) + \frac{1}{N} \tan(\mu/2) \sum_{k=1}^N \delta_{k+1} \operatorname{sen} 2k\mu \\ &\quad + \frac{1}{2N} \tan^2(\mu/2) \sum_{k,l}^N \delta_{k+1} \delta_{l+1} \left\{ 1 + \cos 2(l-k)\mu - \cos 2l\mu \right. \\ &\quad \left. - \cos 2k\mu - 2 \operatorname{sen} 2k\mu \operatorname{sen} 2l\mu \right\} + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned}$$

entonces el valor esperado es:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 \right\rangle &= \frac{1}{2N} \log \left( \frac{1}{2\ell^2 \operatorname{sen}^2 \mu} \right) + \operatorname{Var}(\delta_{k+1}) \tan^2(\mu/2) \left[ 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos 2\mu k \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \operatorname{sen}^2 2\mu k \right] + \mathcal{O}(\delta^3), \end{aligned}$$

donde  $\operatorname{Var}(\delta_{k+1})$  denota la varianza de las variables aleatorias  $\delta_{k+1}$ . Se utilizan las sumatorias

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \cos 2k\mu &= \frac{\operatorname{sen}(N\mu) \cos((N+1)\mu)}{\operatorname{sen} \mu}, \\ \sum_{k=1}^N \operatorname{sen}^2 2k\mu &= \frac{N}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2N\mu)}{2 \operatorname{sen}(2\mu)} \cos(2(N+1)\mu), \end{aligned}$$

para obtener el siguiente resultado

$$\left\langle \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 \right\rangle = \text{Var}(\delta_{k+1}) \left[ \frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(N\mu)}{N \text{sen} \mu} \cos((N+1)\mu) + \frac{\text{sen}(2N\mu)}{2N \text{sen}(2\mu)} \cos(2(N+1)\mu) \right] \quad (2.29)$$

**Límite  $N \rightarrow \infty$ :** Siguiendo los pasos del caso compositivo se tomará el límite  $N \rightarrow \infty$  para el valor esperado de (2.29):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 \right\rangle = \frac{\text{Var}(\delta_{k+1})}{2} \tan^2(\mu/2), \quad (2.30)$$

el cual corresponde idénticamente a la ec. (2.18) y evidentemente también con el caso compositivo, véase (2.28).

**$N$  grande pero fijo:** Se toma el límite  $N\mu \ll 1$ , aproximando las funciones seno y coseno, la ec. (2.29) resulta como

$$\left\langle \frac{1}{2N} \log \|\bar{\mathbf{A}}_N \bar{w}_1\|^2 \right\rangle \approx 0.$$

Que implica que no hay correcciones a orden lineal del desorden  $\delta_n$  para el caso estructural.

# Capítulo 3

## Conclusiones

La motivación principal de esta tesis fue estudiar los efectos del desorden en una distribución de la materia sobre la estructura del espacio-tiempo. Por tal motivo se consideró un modelo sencillo que consiste de  $N$  láminas paralelas de extensión infinita y espesor despreciable colocadas a una distancia finita  $\Delta x$  entre ellas (véase Fig. 1.1). Los resultados de esta tesis van encaminados a estudiar la propagación de ondas sobre espacio-tiempos con desorden en trabajos futuros.

En el marco de la teoría de Newton se resolvió el modelo encontrando la solución con dos formas equivalentes: la primera integrando directamente la ecuación de Poisson gravitacional y la segunda pegando las soluciones de la ecuación de Laplace. La segunda forma permite obtener de manera directa una ecuación de recurrencia en forma matricial. Se demostró que a través de un cambio de variable se puede obtener una ecuación de recurrencia a través de una matriz de transferencia, ec. (1.19).

Después se transportó el modelo al formalismo de la teoría de la relatividad general, donde se propuso como *ansatz* una métrica estática con simetría planar, ec. (1.23). En este caso se encontraron dos familias de soluciones, con la ayuda de las ecuaciones de Einstein en el vacío, que corresponden a las métricas de Taub (1.43) y de Rindler (1.40). En este trabajo se descartó la métrica de Rindler porque resulta pertenecer a una región del espacio-tiempo de Minkowski con coordenadas no cartesianas; además, cuando se hace el pegado con las láminas da lugar a una ecuación de estado físicamente inaceptable densidad  $\rho$  cero y presión  $p$  negativa. Se eligieron las soluciones de Taub como un escenario viable para este trabajo debido a que puede pegarse con una ecuación de estado aceptable ( $\rho \geq 0$  y  $\rho + p \geq 0$ ) y además resultó

tener curvatura no trivial (1.36). La métrica de Taub resulta tener además una singularidad de curvatura, lo anterior se demostró usando un invariante de curvatura, en este caso fue a través del escalar de Kretschmann (1.36), véase pág. 19.

Para solucionar las ecuaciones de campo de Einstein con materia para el espacio-tiempo, con materia modelada como un fluido perfecto, se procedió de forma análoga al caso newtoniano, solucionando las ecuaciones de Einstein en el vacío entre las láminas y pegando los espacio-tiempos obtenidos con las condiciones de pegado de Israel. Se encontró la solución completa a través de una ecuación de recurrencia con el mecanismo de una matriz de transferencia, ecs. (1.61) y (1.62). Dicha matriz de transferencia se obtuvo de forma tal que quedara en términos de la densidad de masa superficial de las láminas y la distancia relativa entre láminas cercanas. Considerando el caso de láminas idénticas y equidistantes, se encontró la forma analítica de las constantes que solucionan las componentes métricas, dadas por (1.73). Para este caso se aprendió que se puede describir un espacio-tiempo con una solución de Taub para  $x < 0$  libre de singularidades, luego  $N$  láminas en  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \Delta x$ ,  $x_3 = 2\Delta x$ , ...,  $x_N = (N - 1)\Delta x$ , y una singularidad de curvatura para  $x > x_N$ , donde el número máximo  $N$  de láminas puede ser determinado como función de  $\frac{\Delta x}{\ell}$ . Al final del capítulo 1 de la tesis, se demostró la validez de las soluciones obtenidas para el modelo del espacio-tiempo de fondo, ecs. (1.80), aplicando el límite newtoniano. En este límite se obtuvieron ecuaciones equivalentes al sistema de Newton, ecs. (1.13), como era de esperarse.

A continuación, en el segundo capítulo de la tesis se analizó el espacio-tiempo obtenido en el primer capítulo considerando fluctuaciones de materia (desorden). Este desorden viene dado por fluctuaciones en la masa de las láminas (desorden compositivo) o fluctuaciones en la distancia relativa entre laminas cercanas (desorden estructural). Al considerar los dos tipos de desorden por separado, es decir, desorden puramente compositivo o desorden puramente estructural, un resultado interesante de esta tesis es que se logró establecer una equivalencia exacta con el modelo de Anderson unidimensional de la física de la materia condensada. Esta equivalencia permite la aplicación de todas la herramientas del modelo de Anderson para analizar los efectos del desorden sobre la estructura del espacio tiempo.

El teorema de Furstenberg, descrito en la Sec. 2.1.1 permite concluir que las componentes métricas crecen exponencialmente con el número de láminas  $N$ , con la taza determinada por el exponente de Lyapunov. Por lo tanto,

el análisis prosiguió en el rumbo de calcular el exponente de Lyapunov basado en los resultados conocidos y encontrar el significado para el modelo del espacio-tiempo. En particular se obtuvo la ec. (2.16) que es fórmula de Thouless para el sistema equivalente, es decir, la fórmula de Thouless asociada al modelo del espacio-tiempo con desorden compositivo ec. (2.17) o con desorden estructural ec. (2.18).

Sin embargo, las ecuaciones del exponente de Lyapunov a través de la fórmula de Thouless, están dadas en el límite cuando el número de láminas tiende a infinito, mientras (como se menciono previamente) el número de láminas  $N$  es limitado dado la presencia de la singularidad, se concluyó entonces que el exponente de Lyapunov que es físicamente relevante en este caso es un exponente de Lyapunov de talla finita, que está dado para un número finito pero suficientemente grande de láminas.

**Para el caso de desorden puramente compositivo se concluyó lo siguiente:**

- El límite  $\mu \propto \Delta x/\ell \rightarrow 0$ , corresponde al acercarse al límite superior de la banda de energía,  $E = 2$ . Se demuestró que la fórmula de Thouless es válida para dicho caso.
- A través de un análisis entre el escalar de Kretschamann y el crecimiento exponencial de las componentes métricas, se llega a la conclusión que la curvatura, dada por la razón  $\frac{Q_n}{U_n}$ , es proporcional al exponente de Lyapunov para  $n$  grande.
- El cálculo de la curvatura a través de la aproximación  $\mu \ll 1$ , da el asombroso resultado que la curvatura es proporcional a la varianza de las variables aleatorias, que es independiente del número de láminas y las condiciones de frontera, siempre y cuando el número de laminas sea suficientemente grande.

## Trabajos futuros

- Este trabajo de tesis encamina el estudio de la propagación de ondas a través del espacio-tiempo de fondo considerando desorden. Estas ondas podrían ser electromagnéticos o gravitacionales.
- El modelo que se consideró en este trabajo de tesis constituyó un modelo juguete para espacio-tiempos curvos como sistemas desordenados.

- En esta tesis se obtuvo la equivalencia del espacio-tiempo con desorden puramente compositivo o estructural con el modelo de Anderson 1D. Se podría tratar de obtener una equivalencia del espacio-tiempo con los dos tipos de desorden con un modelo de enlace fuerte asociado.
- Quedó pendiente el cálculo del exponente de Lyapunov cerca de la banda de energía para el caso de desorden estructural.
- En esta tesis se consideró un espacio-tiempo estático con simetría planar, como trabajo futuro se pueden considerar los siguientes casos:
  - Espacio-tiempos con simetría planar no estáticos.
  - Espacio-tiempos estáticos con alguna otra simetría.
  - Espacio-tiempos sin simetría.
  - Espacio-tiempos más generales.

# Bibliografía

- [1] B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [2] M. D. Duez and Y. Zlochower, “Numerical relativity of compact binaries in the 21st century,” *Reports on Progress in Physics*, 2018. [Online]. Available: <http://iopscience.iop.org/10.1088/1361-6633/aadb16>
- [3] I. Hinder, “The current status of binary black hole simulations in numerical relativity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 27, no. 11, p. 114004, 2010. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0264-9381/27/i=11/a=114004>
- [4] F. Pretorius, “Binary Black Hole Coalescence,” 2007.
- [5] O. Sarbach, “Nist,” <http://www.ifm.umich.mx/~sarbach/teaching/maestria/rg18/RG.pdf>, Marzo 2018, online; último acceso: septiembre del 2018.
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, and D. I. Kaiser, *Gravitation*, 1st ed., ser. Physics Series. W. H. Freeman, 1973.
- [7] R. M. Wald, *General relativity*, 1st ed. University of Chicago Press, 1984.
- [8] M. P. do Carmo and F. Flaherty, *Riemannian geometry*, 1st ed., ser. Mathematics. Theory & applications. Birkhäuser, 1992.
- [9] M. L. Bedran, M. O. Calvão, F. M. Paiva, and I. Damião Soares, “Taub’s plane-symmetric vacuum spacetime reexamined,” *Phys. Rev. D*, vol. 55, pp. 3431–3439, Mar 1997. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.3431>

- [10] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, 2nd ed., ser. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 2003.
- [11] W. Israel, "Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity," *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, vol. 44, no. 1, pp. 1–14, Jul 1966. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF02710419>
- [12] O. Gron and S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity*, 1st ed. Springer Science, 2007.
- [13] E. Poisson, *A Relativist's toolkit*, 1st ed. Cambridge University Press, 2004.
- [14] K. N. Abazajian *et al.*, "The seventh data release of the sloan digital sky survey," *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 182, no. 2, p. 543, 2009. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0067-0049/182/i=2/a=543>
- [15] I. D. Karachentsev, D. I. Makarov, and E. I. Kaisina, "Updated nearby galaxy catalog," *The Astronomical Journal*, vol. 145, no. 4, p. 101, 2013. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/1538-3881/145/i=4/a=101>
- [16] A. Fattahi *et al.*, "The apostle project: Local group kinematic mass constraints and simulation candidate selection," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 457, no. 1, pp. 844–856, 2016. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stv2970>
- [17] A. R. Tomczak *et al.*, "Galaxy stellar mass functions from zfourge/candels: An excess of low-mass galaxies since  $z = 2$  and the rapid buildup of quiescent galaxies," *The Astrophysical Journal*, vol. 783, no. 2, p. 85, 2014. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0004-637X/783/i=2/a=85>
- [18] P. J. McMillan, "Mass models of the milky way," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 414, no. 3, pp. 2446–2457, 2011. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18564.x>

- [19] P. Markoš and C. M. Soukoulis, *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystal and Left-Handed Materials*, 1st ed. Princeton University Press, 2008.
- [20] F. Bloch, “Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 52, no. 7, pp. 555–600, Jul 1929. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01339455>
- [21] P. W. Anderson, “Absence of diffusion in certain random lattices,” *Phys. Rev.*, vol. 109, pp. 1492–1505, Mar 1958. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492>
- [22] N. Mott and W. Twose, “The theory of impurity conduction,” *Advances in Physics*, vol. 10, no. 38, pp. 107–163, 1961. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/00018736100101271>
- [23] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, “Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 42, pp. 673–676, Mar 1979. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.673>
- [24] M. Fekete, “Über die verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 17, no. 1, pp. 228–249, Dec 1923. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01504345>
- [25] P. B. J. Lacroix, *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*, 1st ed., ser. Progress in Probability and Statics. Birkhäuser Boston, Inc., 1985, vol. 8.
- [26] H. Furstenberg and H. Kesten, “Products of random matrices,” *Ann. Math. Statist.*, vol. 31, no. 2, pp. 457–469, 06 1960. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177705909>
- [27] H. Furstenberg, “Noncommuting random products,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 108, pp. 377–428, 1963. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1963-0163345-0>
- [28] R. E. Borland, “The nature of the electronic states in disordered one-dimensional systems,” *Proc. R. Soc. London A*, vol. 274, no. 529, 1963.

- [29] H. von Dreifus and A. Klein, “A new proof of localization in the anderson tight binding model,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 124, no. 2, pp. 285–299, Jun 1989. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01219198>
- [30] K. Ishii, “Localization of eigenstates and transport phenomena in the one-dimensional disordered system,” *Progress of Theoretical Physics Supplement*, vol. 53, pp. 77–138, 1973.
- [31] D. Thouless, “Percolation and localization,” *Ill-Condensed Matter*, pp. 1–62, 1979.
- [32] M. Kappus and F. Wegner, “Anomaly in the band centre of the one-dimensional anderson model,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 45, no. 1, pp. 15–21, 1981. [Online]. Available: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0002400983&doi=10.1007%2fBF01294272&partnerID=40&md5=cb1ec1c9ad7b3f3040b64db495866890>
- [33] F. M Izrailev, S. Ruffo, and L. Tessieri, “Classical representation of the one-dimensional anderson model,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 31, p. 5263, 01 1999.
- [34] U. Kuhl, F. M. Izrailev, and A. A. Krokhin, “Enhancement of localization in one-dimensional random potentials with long-range correlations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 126402, Mar 2008. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.126402>