UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Sobre filtros débiles y cofinalidad de ultraproductos

Tesina para optar al grado de maestro en Ciencias Matemáticas.

Autor:

Norberto Javier Rivas González

Dirigida por:

Dr. Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán
febrero de 2019

Abstract

This work aims to compile several results about feeble filters (or, equivalently, meager filters) and cofinality of ultrapowers, most of them taken from [4] and [7], and some proves was improved to be appropriate for the text. Also, the work includes a section concerning some cardinals characteristics of the continuum, groupwise dense families and its associated cardinal $\mathfrak{g}$ in particular, which is important in many of these theorems.

Resumen

En este trabajo se reunen varios resultados sobre filtros débiles (propiedad equivalente a ser magro) y cofinalidad de ultraproductos, la mayoría de ellos publicados en [4] y en [7], modificando de algunas pruebas para presentarlas de manera más apropiada entre lo que se expone. También se hablará sobre algunos cardinales característicos del continuo, especialmente del cardinal $\mathfrak{g}$, asociado a las familias grupalmente densas, el cual está involucrado en varios de los teoremas.

Palabras clave. Combinatoria Infinita. Invariantes Cardinales. Conjuntos Magros. Familias Grupalmente Densas. Topología.

Índice general

Introducción y Notación

El conjunto de los números naturales será denotado por ω (el primer ordinal infinito), $\mathcal{P}(\omega)$ es su conjunto potencia y $[\omega]^\omega$, $[\omega]^{<\omega}$ denotan a los subconjuntos de $\mathcal{P}(\omega)$ cuyos elementos son infinitos y finitos, respectivamente. Un conjunto $A \subseteq \omega$ es *cofinito* si su complemento en ω es finito. Si $A, B \subseteq \omega$ entonces A está *casi contenido* en B, denotado por $A \subseteq^* B$, si y sólo si $B \setminus A$ es finito. Una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ tiene la *propiedad de intersección finita* si la intersección de cada subfamilia finita no es vacía; si cada una de estas intersecciones es además infinita se dice que $\mathcal{A}$ es una familia *centrada*. Una familia de conjuntos es *disyunta* si cualquier pareja de ellos tiene intersección vacía, en particular los conjuntos A,B son *disyuntos* si $A \cap B = \emptyset$.

El cuantificador $(\forall^\infty n \in \omega)\ \varphi(n)$ es abreviación de $(\exists m \in \omega)(\forall n \geq m)\ \varphi(n)$, es decir, significa que todos los naturales, salvo un número finito, cumplen la propiedad φ. Dualmente, $(\exists^\infty n \in \omega)\ \varphi(n)$ es una abreviación de $\neg(\forall^\infty n \in \omega)\ \neg\varphi(n)$, es decir, un número infinito de naturales cumplen la propiedad φ.

En general, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ no vacío es un *filtro sobre* ω si es cerrado bajo intersecciones finitas y cumple con $(\forall A, B \in \mathcal{P}(\omega))\ A \subseteq B \wedge A \in \mathcal{F} \rightarrow B \in \mathcal{F}$. Los filtros considerados en este trabajo son *libres*, es decir, contienen al filtro de conjuntos cofinitos denotado por $\mathcal{F}r$. Un *ultrafiltro* $\mathcal{U}$ es un filtro $\subseteq$-maximal o, de manera equivalente, un filtro que adicionalmente cumple con $(\forall X \in \mathcal{P}(\omega))\ X \in \mathcal{F} \vee \omega \setminus X \in \mathcal{F}$. Toda familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ centrada está contenida en un filtro $\subseteq$-mínimo (el filtro *generado por* $\mathcal{A}$), y todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.

Con ${}^A B$ se denotará al conjunto de funciones con dominio en A y rango en B; en particular ${}^\omega 2$ es el conjunto de sucesiones binarias, y ${}^\omega\omega$ el conjunto de funciones de ω en ω. Dentro de este último se define el subconjunto FtO, el cual denota a las funciones *finito-a-uno*, es decir, $\mathrm{FtO} = \{f \in {}^\omega\omega : (\forall n \in \omega)\ |f^{-1}(\{n\})| < \omega)\}$. Una función $f \in {}^\omega\omega$ es *creciente* si $(\forall n, m \in \omega)\ n < m \rightarrow f(n) < f(m)$ y es *no decreciente* si $(\forall n, m \in \omega)\ n < m \rightarrow f(n) \leq f(m)$. Si $f, g \in {}^\omega\omega$, entonces $f \leq^* g$ si $(\forall^\infty n \in \omega)\ f(n) \leq g(n)$ (similarmente se definen las relaciones $f <^* g$ y $f =^* g$).

Con $\omega^{<\omega}$ se denota a $\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$ (el conjunto de las sucesiones finitas de naturales) de manera similar se define $2^{<\omega}$. Una partición $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ de ω es una *partición en intervalos* si cada I_n es un intervalo finito. Al conjunto de particiones en intervalos se le denota con IP. Las demás definiciones que no se encuentren en este apartado son canónicas y, de ser necesario, se mencionará donde pueden consultarse.

Algunos invariantes cardinales

El cardinal $\mathfrak{c}$ es el tamaño de $\mathcal{P}(\omega)$, y como Cantor mostró, $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$. Cantor también demostró que $\omega < \mathfrak{c}$ y se preguntó si existían cardinales en medio de éstos o se trataba de cardinales consecutivos (lo que se conoce como *Hipótesis del Continuo*). Se sabe que la respuesta a esto es independiente a ZFC, por ello los cardinales definidos en esta sección están, en algunos modelos, estrictamente entre ω y $\mathfrak{c}$.

Definición 1.1. *Sean $f, g \in {}^\omega\omega$, se dice que f **domina a** g si $g <^* f$. Una familia $\mathcal{B} \subseteq {}^\omega\omega$ es **acotada** si existe $f \in {}^\omega\omega$ que domina a toda función de $\mathcal{B}$. Una familia $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ es **dominante** si para cada $f \in {}^\omega\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ que domina a f.*

El cardinal $\mathfrak{b}$ se define como el mínimo tamaño de una familia no acotada, el cardinal $\mathfrak{d}$ se define como el mínimo tamaño de una familia dominante. Esto es:

$$\mathfrak{b} = \text{mín}\{|\mathcal{B}| \colon \mathcal{B} \subseteq {}^\omega\omega \ \wedge \ (\forall f \in {}^\omega\omega)\, (\exists g \in \mathcal{B})\, (\exists^\infty n \in \omega) \ \ f(n) \leq g(n)\},$$
$$\mathfrak{d} = \text{mín}\{|\mathcal{D}| \colon \mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega \ \wedge \ (\forall f \in {}^\omega\omega)\, (\exists g \in \mathcal{D})\, (\forall^\infty n \in \omega) \ \ f(n) < g(n)\}.$$

Como $g \leq^* f$ no implica a $g <^* f$ entonces la definición de dominar cambia al elegir la relación $\leq^*$ en lugar de $<^*$, sin embargo no es difícil mostrar que los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$ son independientes de tal elección. Por lo tanto, en las definiciones de $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$, se puede cambiar la relación $\leq$ por $<$, y viceversa, sin modificarlos. Más aún, este par de cardinales no cambia si las familias acotadas y dominantes se restringen a familias de funciones crecientes.

Es claro que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$. Además, estos cardinales tienen sus definiciones equivalentes usando particiones, para ello sean $\Pi = \{I_n \colon n \in \omega\}$ y $\Pi' = \{I'_n \colon n \in \omega\}$ dos particiones en intervalos, se dice que Π *domina* a Π' si $(\forall^\infty n \in \omega)(\exists k \in \omega)\ I'_k \subseteq I_n$.

Proposición 1.2. *El cardinal $\mathfrak{b}$ es el mínimo tamaño de una familia $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{IP}$ tal que ninguna otra partición domina a todos los elementos de $\mathcal{P}$ y $\mathfrak{d}$ es el mínimo tamaño de una familia $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{IP}$ tal que cualquier otra partición es dominada por algún elemento de $\mathcal{P}$.*

Prueba. Para cada función $g \in {}^\omega\omega$ creciente y positiva sea $\Pi_g = \{I_n \colon n \in \omega)\}$ la partición en intervalos con $I_0 = [0, g(0))$ y tal que si $I_n = [a, b)$ entonces $I_{n+1} = [b, g(b) + 1)$. Dualmente, si $\Pi = \{I_n \colon n \in \omega)\} \in \mathrm{IP}$ sea f^Π a la función tal que $f^\Pi(x) = \text{máx}\, I_{n+1}$ si y sólo si $x \in I_n$.

Sea $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\} \subseteq {}^\omega\omega$ una familia no acotada de funciones crecientes y positivas. Para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ sea $\Pi_{g_\alpha} = \{[b^\alpha_n, b^\alpha_{n+1}) : n \in \omega\}$ la partición dada por el párrafo anterior. Sea $\Pi = \{[a_n, a_{n+1}) : n \in \omega\} \in \mathrm{IP}$ y g_α no dominada por f^Π, entonces la existencia de infinitos testigos para $g_\alpha(x) > f^\Pi(x)$ implican que para infinitos n's existe k_n cumpliendo con $b^\alpha_{k_n} < a_n < a_{n+1} < b^\alpha_{k_n+2}$, es decir, Π no domina a Π_{g_α}, por lo tanto existe una familia de particiones en intervalos no dominada y de tamaño $\mathfrak{b}$.

Se mostrará ahora que $\mathfrak{b}$ es el tamaño mínimo de una familia de particiones no dominada. Sean $\Pi_\alpha = \{[a^\alpha_n, a^\alpha_{n+1})\colon n \in \omega\}$ menos de $\mathfrak{b}$ particiones en intervalos, entonces existe $g \in {}^\omega\omega$ creciente y positiva que domina a cada función f^{Π_α}. Sea $\Pi_g = \{[b_n, b_{n+1})\colon n \in \omega\}$. Para cada α y b_n suficientemente grande existe a_{k_n} tal que $b_n < a^\alpha_{k_n} < a^\alpha_{k+1} < b_{n+2}$ así $\Pi = \{[b_{2n}, b_{2n+2})\colon n \in \omega\}$ es una partición en intervalos que domina a cada Π_α.

La prueba con $\mathfrak{d}$ es similar. Si $\{g_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{d}\}$ es una familia dominante de funciones crecientes y positivas entonces la respectiva familia $\{\Pi_{g_\alpha} : \alpha < \mathfrak{d}\} \subseteq \mathrm{IP}$ es dominante. Y para cualquier colección con menos de $\mathfrak{d}$ particiones Π_α's existe Π (dada por la función no dominada por ninguna f^{Π_α}) no dominada por ninguna Π_α. $\square$

Definición 1.3. *Sean $X, Y \in [\omega]^\omega$, se dice que X **divide** a Y si $|Y \cap X| = |Y \setminus X| = \omega$. Una familia $\mathcal{R} \subseteq [\omega]^\omega$ es **indivisible** si no existe $X \in [\omega]^\omega$ que divida a todos los elementos de $\mathcal{R}$. Una familia $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ es **divisora** si para cada $Y \in [\omega]^\omega$ existe $X \in \mathcal{S}$ que lo divide.*

El cardinal $\mathfrak{r}$ se define como el mínimo tamaño de una familia indivisible, el cardinal $\mathfrak{s}$ se define como el mínimo tamaño de una familia divisora.

Proposición 1.4. *$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$ y $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$.*

Prueba. Primero se introducen algunas notaciones: Para cada $\Pi \in \mathrm{IP}$, Π^e y Π^o denotan la unión de los intervalos de índice par e impar respectivamente, es decir, si $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ entonces $\Pi^e = \bigcup\{I_{2n}\colon n \in \omega\}$ y $\Pi^o = \omega \setminus \Pi^e$; luego, para cada $X \in [\omega]^\omega$ sea $\Pi(X)$ una partición en intervalos fija tal que $(\forall\, I \in \Pi(X))\ X \cap I \neq \emptyset$. Ocurre que si $\Pi \in \mathrm{IP}$, $X \in [\omega]^\omega$ y Π domina a $\Pi(X)$ entonces Π^e divide a X, puesto que todos los intervalos de Π, salvo una cantidad finita, contienen un elemento de X.

Sea $\mathcal{R} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia indivisible de tamaño $\mathfrak{r}$, si existe Π que domina a todo $\Pi(X)$ con $X \in \mathcal{R}$ entonces, por lo anterior, Π^e divide a cada $X \in \mathcal{R}$, una contradicción. Entonces ninguna partición en intervalos domina a $\{\Pi(X)\colon X \in \mathcal{R}\}$, así, por el Teorema 1.2, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{r}$. De nuevo por el Teorema 1.2, sea $\{\Pi_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{d}\} \subseteq \mathrm{IP}$ una familia que domina a cualquier partición, entonces por lo anterior $\{\Pi^e_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{d}\}$ es una familia divisora, con lo cual $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$. $\square$

Definición 1.5. *Una familia $\mathcal{G} \subseteq [\omega]^\omega$ es **grupalmente densa** si cumple:*

a) $(\forall\, X, Y \in [\omega]^\omega)\ \ X \in \mathcal{G} \wedge |Y \setminus X| < \omega \ \rightarrow\ Y \in \mathcal{G}$,

b) $(\forall\, \{I_n\colon n \in \omega\} \in \mathrm{IP})\, (\exists\, A \in [\omega]^\omega)\ \bigcup\{I_n\colon n \in A\} \in \mathcal{G}$.

La parte a) dice que una familia grupalmente densa es cerrada bajo $\subseteq^*$ y la parte b) dice que para cualquier partición en intervalos existe una cantidad infinita de ellos cuya unión está en $\mathcal{G}$. Con GD se denota a la colección de todos las familias grupalmente densas.

El cardinal $\mathfrak{g}$ se define como el mínimo cardinal de una colección de familias grupalmente densas con intersección vacía, es decir:

$$\mathfrak{g} = \min\{|\mathfrak{G}| : \mathfrak{G} \subseteq \mathrm{GD} \ \wedge \ \bigcap \mathfrak{G} = \emptyset\}.$$

Proposición 1.6. $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{d}$.

Prueba. Sea $\mathcal{D} \subseteq {}^{\omega}\omega$ una familia de funciones crecientes y dominante de tamaño mínimo; para cada $f \in \mathcal{D}$ se define $\mathcal{G}_f = \{X \in [\omega]^{\omega} : (\exists^{\infty} n \in \omega)\ X \cap [n, f(n)] = \emptyset\}$. Sea $f \in \mathcal{D}$ fija. Es claro que $\mathcal{G}_f$ es cerrado bajo $\subseteq^*$. Sea $\Pi = \{I_n : n \in \omega\} \in \mathrm{IP}$ y sean I_{n_k} intervalos de Π escogidos recursivamente con $n_0 = 0$ y tal que si n_k está definido y $m_k = \max I_{n_k} + 1$. Entonces $n_{k+1} = \min\{j \in \omega \ : I_j \cap [m_k, f(m_k)] = \emptyset\}$, por lo tanto $X = \bigcup_{k \in \omega} I_{n_k} \in \mathcal{G}_f$. Finalmente, si existe $X \in \bigcap_{f \in \mathcal{D}} \mathcal{G}_f$ entonces $\nu_X \in {}^{\omega}\omega$ definida como $\nu_X(n) = \min\{x \in X : x > n\}$ no es dominada por $\mathcal{D}$, concluyendo que $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{d}$. $\square$

Definición 1.7. *Una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ es **casi ajena** si cada par $A, B \in \mathcal{A}$ de conjuntos distintos cumple que $A \cap B$ es finito.*

El cardinal $\mathfrak{a}$ se define como el mínimo tamaño de una familia casi ajena, que es $\subseteq$-maximal e infinita. Una familia casi ajena $\mathcal{A}$ es $\subseteq$-maximal si y sólo si para cada $X \in [\omega]^{\omega}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap X$ es infinito. Además se pide que la familia sea infinita, pues cualquier partición finita de ω en pedazos infinitos es casi ajena y $\subseteq$-maximal.

Es sencillo mostrar que existe una familia casi ajena de tamaño máximo, para ello se identifica a ω con el árbol $2^{<\omega}$, pues ambos son numerables, entonces cada rama de $2^{<\omega}$ representa a un conjunto infinito (la colección de los nodos que la conforman) y como cualquier par distinto de ramas tiene una cantidad finita de nodos en común, entonces existe tal familia de tamaño $\mathfrak{c}$. En [11, cap. 2] se puede consultar más sobre árboles.

Proposición 1.8. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.

Prueba. Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ una familia infinita casi ajena maximal. Como $\mathcal{A}$ es infinita se considera un conjunto numerable dentro de ella, esto es, sea $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}$. Modificando de manera finita a cada A_n se puede suponer que $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia disyunta. Más aún, quizá agregando elementos a A_0, esta familia es una partición de ω en subconjuntos infinitos.

Se identifica a ω con $\omega \times \omega$ mediante una biyección $\psi : \omega \to \omega \times \omega$ tal que $\psi[A_n] = \{n\} \times \omega$. Sea $\mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus \{A_n : n \in \omega\}$; ya que para cada $B \in \mathcal{B}$ el conjunto $B \cap A_n$ es finito entonces $\psi[B]$ está acotado en $\{n\} \times \omega$, sea f_B la función que asocia a cada n con una de estas cotas.

Si existe $f \in {}^{\omega}\omega$ que domina al conjunto $\{f_B : B \in \mathcal{B}\}$ entonces X, conjunto infinito de ω que representa la gráfica de f, es tal que $X \cap A_n$ y $X \cap B$ son finitos para cada $n \in \omega$ y $B \in \mathcal{B}$, por lo tanto $\mathcal{A}$ no es maximal, una contradicción. Se concluye entonces que existe una familia de funciones no acotadas de tamaño $|\mathcal{A}|$, con lo cual $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$. $\square$

Definición 1.9. *Una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es* ***independiente*** *si cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ finitos y disyuntos cumplen con*

$$\left|\bigcap \mathcal{A} \setminus \bigcup \mathcal{B}\right| = \omega.$$

Se sigue de la definición que toda familia independiente está contenida en $[\omega]^\omega \setminus \mathcal{F}r$. El cardinal $\mathfrak{i}$ se define como el mínimo tamaño de una familia independiente maximal.

Proposición 1.10. $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{i}$.

Prueba. Sea $\mathcal{I}$ una familia independiente maximal. Por definición de independencia, se tiene que $\mathcal{R} = \{\bigcap \mathcal{A} \setminus \bigcup \mathcal{B} \colon \mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ finitos y disyuntos$\} \subseteq [\omega]^\omega$. Si existe $X \in [\omega]^\omega$ que divide a cada elemento de $\mathcal{R}$ entonces $\mathcal{I} \cup \{X\}$ es independiente, con lo cual $X \in \mathcal{I}$ y entonces X no divide a $\omega \setminus X \in \mathcal{R}$. Así $\mathcal{R}$ es indivisible y como $\mathfrak{r} \leq |\mathcal{R}| = |\mathcal{I}|$ se concluye que $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{i}$. $\square$

Shelah mostró en el apéndice de [18] que $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{i}$; otra prueba de esto se encuentra en [3].

Definición 1.11. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro, entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ es llamada* ***base*** *de $\mathcal{F}$ si cumple con*

$$(\forall\, F \in \mathcal{F})(\exists\, B \in \mathcal{B})\ B \subseteq F.$$

El cardinal $\mathfrak{u}$ es el mínimo tamaño de cualquier base de todo ultrafiltro.

Proposición 1.12. $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{u}$.

Prueba. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ una base. Para cada $X \in [\omega]^\omega$ se tiene que $X \in \mathcal{U}$ o $\omega \setminus X \in \mathcal{U}$. En cualquier caso X no divide a algún elemento de $\mathcal{B}$ (pues $\mathcal{B}$ contiene a un subconjunto de X o a un subconjunto de su complemento). Por lo tanto $\mathcal{B}$ es indivisible y $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{u}$. $\square$

Todas las desigualdades entre los cardinales que se presentaron en este capítulo quedan resumidas en el Diagrama 1.

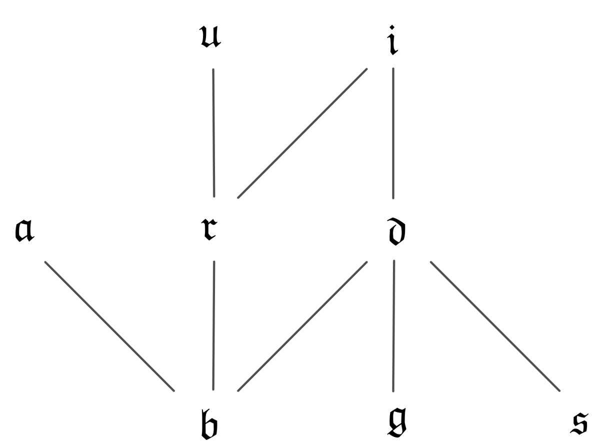

Diagrama 1

Filtros sobre ω

Si $\mathcal{F}$ es un filtro y $f \in \mathrm{FtO}$ entonces la *imagen de* $\mathcal{F}$ *bajo* f, denotada por $f(\mathcal{F})$, se define como el siguiente conjunto

$$f(\mathcal{F}) = \{X \subseteq \omega \colon f^{-1}[X] \in \mathcal{F}\},$$

el cual resulta ser un filtro (libre, ya que f es finito-a-uno); más aún, si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro también lo es $f(\mathcal{U})$. En general, $f(\mathcal{A})$ se define de la misma manera para cualquier $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$.

Definición 2.1. *Sean* $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ *dos filtros, entonces se define la relación* $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$ *si y sólo si existe* $f \in \mathrm{FtO}$ *tal que* $f(\mathcal{F}) \subseteq f(\mathcal{H})$.

Definición 2.2. *Un filtro* $\mathcal{F}$ *es* ***débil*** *si existe* $f \in \mathrm{FtO}$ *con* $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}r$. *Un filtro* $\mathcal{H}$ *es* ***fuerte*** *o* ***casi-ultra*** *si existe* $f \in \mathrm{FtO}$ *tal que* $f(\mathcal{H})$ *es un ultrafiltro.*

Todo ultrafiltro es casi-ultra, además la siguiente proposición, con observaciones sobre los filtros débiles, implica que no hay filtros que sean débiles y fuertes a la vez.

Proposición 2.3.

I) *Un filtro* $\mathcal{F}$ *es débil si y sólo si existe* $\{I_n \colon n \in \omega\} \in \mathrm{IP}$ *cumpliendo*

$$(\forall\, F \in \mathcal{F})(\forall^{\infty}\, n \in \omega)\ F \cap I_n \neq \emptyset.$$

II) *Si* $\mathcal{F}$ *es débil y* $f \in \mathrm{FtO}$ *entonces* $f(\mathcal{F})$ *es débil.*

III) *Sea* $\mathcal{F}$ *débil. Si* $\mathcal{H} \leq \mathcal{F}$ *entonces* $\mathcal{H}$ *es débil; además* $\mathcal{F} \leq \mathcal{K}$ *para cualquier filtro* $\mathcal{K}$.

Prueba. I) Sea $\mathcal{F}$ un filtro débil con f como función testigo. Entonces la partición de sus fibras cumple tal condición (ya que si $F \in \mathcal{F}$ entonces $f[X] \in f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}r$ es cofinito). Por lo tanto, basta considerar una partición en intervalos Π donde cada intervalo I_n contenga a alguna fibra $f^{-1}(\{k_n\})$, lo cual puede lograrse porque f es finito-a-uno, y así Π conserva la propiedad requerida.

Por otro lado, si tal partición en intervalos existe entonces sea $f \in {}^{\omega}\omega$ definida como $f(x) = n$ si y sólo si $x \in I_n$. La función f cumple que si $X \in f(\mathcal{F})$ entonces $(\forall^{\infty}\, n \in \omega)\ f^{-1}[X] \cap I_n \neq \emptyset$ y así $(\forall^{\infty}\, n \in \omega)\ n \in X$, es decir, $f(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}r$.

II) Sea $\mathcal{F}$ un filtro débil y $f \in \mathrm{FtO}$, por el inciso anterior existe una partición $\{I_n : n \in \omega\}$ testigo de la debilidad de $\mathcal{F}$; a partir de ésta se construye la partición en intervalos $\{J_n : n \in \omega\}$ de manera recursiva: Sea $J_0 = [0, \max f[I_0]]$ y si J_n está definido sea k_{n+1} el mínimo natural tal que $f(I_{k_{n+1}}) \cap [0, \max J_n] = \emptyset$, el cual existe puesto que f es finito-a-uno. Se define $J_{n+1} = (\max J_n, \max f[I_{k_{n+1}}]]$. Esta partición es testigo de que $f(\mathcal{F})$ sea débil ya que en caso contrario existe $X \in f(\mathcal{F})$ tal que $(\exists^\infty n \in \omega)\ X \cap J_n = \emptyset$. Entonces $f^{-1}[X] \in \mathcal{F}$ evita a los correspondientes I_{k_n}'s y $\mathcal{F}$ no sería débil.

III) Para la primera parte, sea $f \in \mathrm{FtO}$ con $f(\mathcal{H}) \subseteq f(\mathcal{F})$, por lo anterior $f(\mathcal{F})$ es débil y por lo tanto existe $g \in \mathrm{FtO}$ con $g(f(\mathcal{H})) \subseteq g(f(\mathcal{F})) = \mathcal{F}r$. Entonces para todo $X \in (g \circ f)(\mathcal{H})$ se tiene que $f^{-1}[g^{-1}[X]] \in \mathcal{H}$ con lo cual $g^{-1}[X] \in f(\mathcal{H})$; así $X \in g(f(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{F}r$. La segunda parte es trivial, ya que existe $h \in \mathrm{FtO}$ con $h(\mathcal{F}) = \mathcal{F}r \subseteq h(\mathcal{K})$. □

La relación $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$ también tiene una equivalencia en particiones.

Teorema 2.4. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ filtros. Entonces $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$ si y sólo si existe $\Pi \in \mathrm{IP}$ tal que*

$$(\forall F \in \mathcal{F})\, (\exists H \in \mathcal{H})\, (\forall I \in \Pi)\ \ H \cap I \neq \emptyset \ \rightarrow\ F \cap I_n \neq \emptyset. \tag{$*$}$$

Prueba. Si existiera tal partición $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ se define $f \in \mathrm{FtO}$ como $f(x) = n$ si y sólo si $x \in I_n$, la cual es testigo de $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$ ya que si $X \in f(\mathcal{F})$, por $(*)$, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que $(\forall n \in \omega)\ H \cap I_n \neq \emptyset \ \rightarrow\ n \in X$. Con lo cual $H \subseteq f^{-1}[X]$ y por tanto se tiene que la existencia de tal partición es suficiente.

Para ver que también es necesaria la existencia de Π que satisface $(*)$, se mostrará primero que existe una partición de ω en conjuntos finitos con tal propiedad; para ello sea $f \in \mathrm{FtO}$ testigo de $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$, entonces $\Pi' = \{f^{-1}\{n\} : n \in \omega\}$ cumple $(*)$, pues en caso contrario se tiene que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $(\forall H \in \mathcal{H})\ f[H] \setminus f[F] \neq \emptyset$ y esto da una contradicción al aplicarlo a $f^{-1}(f[F]) \in \mathcal{H}$.

Dada la partición Π' como antes, sea $\{[a_n, a_{n+1}) : n \in \omega\}$ una partición en intervalos con $a_0 = 0$ y tal que $a_{n+1} > \max \bigcup \{P \in \Pi' : P \cap [0, a_n) \neq \emptyset\}$. Por construcción se tiene que para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $H \in \mathcal{H}$ tal que si $n \geq 1$ y $H \cap [a_n, a_{n+1}) \neq \emptyset$, entonces $F \cap [a_{n-1}, a_{n+2}) \neq \emptyset$. Si $\mathcal{H}$ es débil, entonces $\mathcal{F}$ es débil y la partición dada en 2.3 cumple con $(*)$, entonces se puede suponer que $\mathcal{H}$ no es débil. De nuevo por 2.3 existen $Z \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq [\omega]^\omega$ tales que $(\forall n \in A)\ Z \cap [a_{2n}, a_{2n+2}) = \emptyset$. Sea Π la partición en intervalos tal que para cada $n, m \in A$ consecutivos $[a_{2n+1}, a_{2m+1}) \in \Pi$.

Sean $F \in \mathcal{F}$ y $H, Z \in \mathcal{H}$ del párrafo anterior. Sea $W = H \cap Z \cap (\omega \setminus I)$, donde I es el primer intervalo de Π. Si $W \cap [a_{2n+1}, a_{2m+1}) \neq \emptyset$ para $n, m \in A$ consecutivos, entonces la intersección no ocurre en $[a_{2n+1}, a_{2n+2}) \cup [a_{2m}, a_{2m+1})$ por la condición de Z, así W (y por tanto H) intersecta a $[a_{2n+2}, a_{2m})$, con lo cual $X \cap [a_{2n+1}, a_{2m+1}) \neq \emptyset$ y Π cumple la condición $(*)$. □

Si Π es una partición en intervalos cumpliendo $(*)$, cualquier partición en intervalos Π' que fusione intervalos de Π (esto es, que todo intervalo de Π' es unión finita de intervalos de Π) cumple con $(*)$. Esta observación ayuda a mostrar que la relación $\leq$ entre filtros es un pre-orden.

Teorema 2.5. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}$ filtros tales que $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \leq \mathcal{K}$, entonces $\mathcal{F} \leq \mathcal{K}$.*

Prueba. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}$ tales filtros. Si alguno de ellos es débil, entonces $\mathcal{F}$ es débil y el resultado se obtiene. Se supondrá entonces que ninguno lo es. Basta encontrar una misma partición en intervalos que cumpla $(*)$ para ambas desigualdades. Sean $\Pi = \{[a_n, a_{n+1}) : n \in \omega\}$ y $\Pi' = \{[a'_n, a'_{n+1}) : n \in \omega\}$ las particiones en intervalos testigos de $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \leq \mathcal{K}$, respectivamente. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $0 = a_0 = a'_0 < a_1 < a'_1 < a_2 < a'_2 < \cdots$, pues se pueden fusionar piezas de Π y Π' de tal manera que lo cumplan. Como $\mathcal{H}$ no es débil existe $Z \in \mathcal{H}$ y $A \in [\omega]^\omega$ tal que $Z \cap [a_n, a_{n+1}) = \emptyset$ para todo $n \in A$.

Sea $\widetilde{\Pi}$ la partición en intervalos tal que $[a'_n, a'_m) \in \widetilde{\Pi}$ para $n, m \in A$ consecutivos. Como $\widetilde{\Pi}$ fusiona partes de Π' entonces es testigo de que $\mathcal{H} \leq \mathcal{K}$. Falta entonces mostrar que Π'' cumple $(*)$ para los filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$. Sea $F \in \mathcal{F}$ y $H \in \mathcal{H}$ cumpliendo $(*)$ para la partición Π. Sea $W = H \cap Z \cap (\omega \setminus I)$ con I el primer intervalo de $\widetilde{\Pi}$, si $W \cap [a'_n, a'_m) \neq \emptyset$ para n, m consecutivos en A. Como $[a'_n, a'_m)$ es cubierto por $[a_n, a_{n+1}) \cup [a_{n+1}, a_m) \cup [a_m, a_{m+1})$, entonces W intersecta al intervalo medio (por la condición de Z), con lo cual H, y por tanto F, también lo intersecta, concluyendo la prueba. $\square$

Así la relación $\leq$ para filtros induce un orden en las clases de equivalencia (donde los filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ son equivalentes si $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \leq \mathcal{F}$), denotado por $\trianglelefteq$. De la Proposición 2.3 se sigue que $\trianglelefteq$ tiene un elemento mínimo y es la clase de los filtros débiles. Además, si $\mathcal{F}$ es un filtro en una clase $\trianglelefteq$-maximal, el ultrafiltro $\mathcal{U}$ que extiende a $\mathcal{F}$ se encuentra en la misma clase, pues trivialmente $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$. Por otro lado, todo ultrafiltro $\mathcal{V}$ se encuentra en una clase $\trianglelefteq$-maximal, pues si $\mathcal{H}$ es un filtro con $\mathcal{V} \leq \mathcal{H}$ existe $f \in {}^\omega\omega$ finito-a-uno con $f(\mathcal{V}) \subseteq f(\mathcal{H})$. Como $f(\mathcal{V})$ es ultrafiltro se tiene que $f(\mathcal{V}) = f(\mathcal{H})$ y por tanto $\mathcal{H} \leq \mathcal{V}$.

Si $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega$ entonces con $\mathrm{En}(\mathcal{X})$ se denota al conjunto de enumeraciones de $\mathcal{X}$; es decir, $\mathrm{En}(\mathcal{X}) = \{e_X \in {}^\omega\omega : X \in \mathcal{X}\}$, donde $e_X(0) = \min X$ y $e_X(n+1) = \min X \setminus \{e_X(k) : k \leq n\}$. En [17], R. C. Solomon muestra que ningún ultrafiltro libre sobre ω es generado por menos de $\mathfrak{b}$ conjuntos (es decir, $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$), aunque la prueba que utiliza se puede adaptar fácilmente para probar el siguiente teorema más general.

Teorema 2.6 (Solomon)**.** *Sean $\mathcal{F}$ un filtro y $\mathcal{B}$ una base para $\mathcal{F}$. Si $\mathrm{En}(\mathcal{B})$ es acotado entonces $\mathcal{F}$ es débil.*

Prueba. Sea $f \in {}^\omega\omega$ con $(\forall n \in \omega)\ f(n) > n$ que acota a $\mathrm{En}(\mathcal{B})$. Se define de manera recursiva la partición en intervalos $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ como $I_0 = [0, f(0)]$ y tal que si I_n está definido y $m_n = \max I_n + 1$ entonces $I_{n+1} = [m_n, f(m_n)]$. Para $B \in \mathcal{B}$ con $B \cap I_{n+1} = \emptyset$ se tiene que $e_B(m_n) > f(m_n)$ ya que $\left|B \cap \left(\bigcup_{j \leq n} I_j\right)\right| \leq m_n$, así el m_n-ésimo elemento de B se encuentra después del extremo derecho de I_{n+1} y se obtiene la desigualdad. Entonces ningún conjunto en $\mathcal{B}$ evita a infinitos elementos de la partición, con lo cual Π muestra que $\mathcal{F}$ es débil. $\square$

En particular todo filtro generado por menos de $\mathfrak{b}$ conjuntos es débil, y por tanto no es ultrafiltro, obteniendo el resultado original de Solomon. En [4] y [14] se menciona que P. Simon prueba que no se puede mejorar la cota del teorema.

Teorema 2.7 (Simon)**.** *Existe un filtro $\mathcal{F}$ no débil y generado por $\mathfrak{b}$ conjuntos.*

Prueba. La prueba se hará en dos casos dependiendo de la relación entre $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$.

Primer caso: $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$. Sea $\mathcal{A} = \{f_\alpha \in {}^\omega\omega : \alpha < \mathfrak{b}\}$ una familia no acotada de funciones crecientes tal que si $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$ entonces $f_\alpha <^* f_\beta$. Sea $g \in {}^\omega\omega$ no decreciente y no dominada por la familia $\mathcal{A}$. Para cada $\alpha < \mathfrak{b}$ se define el conjunto $X_\alpha = \{n \in \omega \ : \ f_\alpha(n) < g(n)\} \in [\omega]^\omega$. Por la propiedad de las funciones en $\mathcal{A}$ se tiene que si $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$ entonces $X_\beta \subseteq^* X_\alpha$. Por lo tanto la familia $\mathcal{X} = \{X_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}\}$ es centrada. Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por la familia $\mathcal{X}$.

Si $\mathcal{F}$ es débil, sea $\{[a_n, a_{n+1}) : n \in \omega\}$ una partición testigo. Sea $h \in {}^\omega\omega$ una función con $h(k) = g(a_{n+2})$ si y sólo si $k \in [a_n, a_{n+1})$. Para cada α sea $m_\alpha \in \omega$ tal que para todo $n \geq m_\alpha$ existe $x_n \in X_\alpha \cap [a_n, a_{n+1})$. Entonces $f_\alpha(k) \leq f_\alpha(x_{n+1}) < g(x_{n+1}) \leq g(a_{n+2}) = h(k)$ para toda k suficientemente grande. Así la familia $\mathcal{A}$ estaría acotada por h, lo cual es una contradicción.

Segundo caso: $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. Sea $\{\Pi_\alpha = \{I_n^\alpha : n \in \omega\} \in \mathrm{IP} : \alpha < \mathfrak{b}\}$ una familia dominante de particiones en intervalos. Por inducción de longitud $\mathfrak{b}$ se construyen conjuntos $\mathcal{X}_\alpha$ empezando por $\mathcal{X}_0 = \mathcal{F}r$ y tal que en el paso α si el filtro $\mathcal{F}_\alpha$ generado por $\mathcal{X}'_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{X}_\beta$ contiene un conjunto disyunto a infinitos intervalos de Π_α entonces $\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{X}'_\alpha$. Si esto no ocurre, entonces $\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{X}'_\alpha \cup \{\bigcup_{n\in\omega} I_{2n}^\alpha\}$. En cualquier paso la familia $\mathcal{X}_\alpha$ es centrada. Al final sea $\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{b}} \mathcal{X}_\alpha$ y $\mathcal{F}$ el filtro generado por esta familia. Por construcción, $\mathcal{F}$ no es débil (para toda Π partición en intervalos existe $\alpha < \mathfrak{b}$ tal que Π_α domina a Π y en el paso α se agregó un elemento a $\mathcal{F}$ que evita a infinitos elementos de Π_α y, por tanto, de Π) y tiene una base de $\mathfrak{b}$ conjuntos. $\square$

El siguiente resultado combina la definición de la relación entre filtros de esta sección con el cardinal $\mathfrak{g}$ (Definición 1.5) mostrando que los filtros que son generados por menos de $\mathfrak{g}$ conjuntos están $\leq$-debajo de todos los demás, salvo quizá los débiles.

Teorema 2.8. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ filtros. Si $\mathcal{F}$ no es débil y $\mathcal{H}$ está generado por menos de $\mathfrak{g}$ conjuntos entonces $\mathcal{H} \leq \mathcal{F}$.*

Prueba. Sea $\mathcal{B}$ base del filtro $\mathcal{H}$ tal que $|\mathcal{B}| < \mathfrak{g}$. Para cada $B \in \mathcal{B}$ se define el conjunto $\mathcal{G}_B = \{X \in [\omega]^\omega : (\exists\, F \in \mathcal{F})(\forall\, x, y \in X)\ [x, y) \cap F \neq \emptyset \ \rightarrow\ [x, y) \cap B \neq \emptyset\}$. Ya que un elemento común a cada $\mathcal{G}_B$ induce una partición en intervalos testigo de $\mathcal{H} \leq \mathcal{F}$ basta probar que cada uno de estos conjuntos es grupalmente denso.

Sea $B \in \mathcal{B}$ fijo. El conjunto $\mathcal{G}_B$ satisface la parte a) de la Definición 1.5 (trivialmente es cerrado bajo subconjuntos y para las modificaciones finitas se usa que $\mathcal{F}r \subseteq \mathcal{F}$). Sea $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ una partición en intervalos. Sin pérdida de generalidad, cada intervalo tiene un elemento de B. Como $\mathcal{F}$ no es débil, existen $A \in [\omega]^\omega$ y $F \in \mathcal{F}$ tales que $F \cap I_n = \emptyset$ para cada $n \in A$; sea $X = \bigcup_{n\in A} I_n$. Para elementos x, y de X con $[x, y) \cap F \neq \emptyset$, la intersección se da en un intervalo de Π fuera de X, por tanto $[x, y)$ incluye un elemento del conjunto B, concluyendo que $X \in \mathcal{G}_B$. $\square$

Si $\mathfrak{b} < \mathfrak{g}$, entonces el último par de teoremas implica que existe un filtro $\mathcal{F}$ que no es débil, que es $\leq$-mayor a todos los débiles y $\leq$-menor a todos los demás filtros, entonces el orden $\trianglelefteq$ tiene dos clases consecutivas en su inicio.

Caracterización de filtros débiles

El objetivo de esta sección es dar algunas equivalencias a la definición de filtro débil (Teorema 2.13), la mayoría de ellas son parte del Teorema de Talagrand (el cual se encuentra en [1]) y otras están en [3]. Algunas son propiedades topológicas, para poder llevar a cabo esto se identifica a $\mathcal{P}(\omega)$ con ${}^{\omega}2$ mediante las funciones características, y donde ${}^{\omega}2$ es el *espacio de Cantor*, es decir, visto como el producto topológico de $2 = \{0, 1\}$ discreto, o también como las ramas del árbol $(2^{<\omega}, \subseteq)$, donde la topología es generada por los *conos*, conjuntos de la forma $[p] = \{f \in {}^{\omega}2 \colon f{\restriction}_{|p|} = p\}$ para cada $p \in 2^{<\omega}$. Así, cuando se mencione una propiedad topológica de algún $X \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ en realidad se está refiriendo a la propiedad topológica de la imagen de X dentro del espacio de Cantor.

Definición 2.9. *Un par (x, Π) es un **real segmentado** si $x \in {}^{\omega}2$ y $\Pi = \{I_n \colon n \in \omega\} \in \mathrm{IP}$. Se dice que $y \in {}^{\omega}2$ **coincide** con un real segmentado (x, Π) si $(\exists^{\infty} n)\ y{\restriction}I_n = x{\restriction}I_n$.*

Sea (x, Π) un real segmentado, entonces $\mathrm{Mat}(x, \Pi)$ denota al conjunto de todos los elementos de ${}^{\omega}2$ que coinciden con (x, Π).

Las definiciones topológicas para subconjuntos de ${}^{\omega}2$ serán las canónicas a lo largo del texto; por ejemplo, $D \subseteq {}^{\omega}2$ es *denso* si intersecta a cada abierto no vacío del espacio ${}^{\omega}2$, $N \subseteq {}^{\omega}2$ es *nunca denso* si el interior de su clausura es vacío, $M \subseteq {}^{\omega}2$ es *magro* (o *de primera categoría*) si está contenido en la unión numerable de conjuntos nunca densos y $C \subseteq {}^{\omega}2$ es *comagro* si su complemento es magro, o de manera equivalente, contiene una intersección numerable de abiertos densos. Un conjunto $X \subseteq {}^{\omega}2$ tiene la *propiedad de Baire* si existe un abierto $O \subseteq {}^{\omega}2$ tal que $X \triangle O = X \setminus O \cup O \setminus X$ es magro. Además, al pensar ${}^{\omega}2$ como las ramas de $2^{<\omega}$, un conjunto $N \subseteq {}^{\omega}2$ es nunca denso si y sólo si para cada $p \in 2^{<\omega}$ existe $q \in 2^{<\omega}$ que lo extiende y tal que $[q] \cap N = \emptyset$.

Proposición 2.10. *Un conjunto $M \subseteq {}^{\omega}2$ es magro si y sólo si existe un real segmentado (x, Π) tal que $\mathrm{Mat}(x, \Pi) \cap M = \emptyset$.*

Prueba. Por la definición 2.9, se tiene que si (x, Π) es un real segmentado con $\Pi = \{I_n \colon n \in \omega\}$ entonces $\mathrm{Mat}(x, \Pi) = \bigcap_k \bigcup_{n \geq k} \{y \in {}^{\omega}2 \colon x{\restriction}I_n = y{\restriction}I_n\}$. Para n fija $\{y \in {}^{\omega}2 \colon x{\restriction}I_n = y{\restriction}I_n\}$ es un abierto en ${}^{\omega}2$, por lo tanto $\bigcup_{n \geq k} \{y \in {}^{\omega}2 : x{\restriction}I_n = y{\restriction}I_n\}$ es un conjunto denso y abierto y así $\mathrm{Mat}(x, \Pi)$ es comagro, con lo cual la existencia de (x, Π) con $\mathrm{Mat}(x, \Pi) \cap M = \emptyset$ es condición suficiente para que M sea magro.

Sea $M \subseteq \bigcup_{m \in \omega} N_n$ con cada N_n nunca denso. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $N_n \subseteq N_{n+1}$ para cada n. Por inducción se construye un real segmentado $(x, \Pi = \{I_n \colon n \in \omega\})$ tal que $(\forall\, n \in \omega)(\forall\, y \in N_n)\ x{\restriction}I_n \neq y{\restriction}I_n$ de la siguiente manera: Existe $\emptyset \subsetneq q_0^0 \in {}^{m_0}2$ y tal que $[q_0^0] \cap N_0 = \emptyset$; sea entonces $I_0 = [0, m_0)$ y $x{\restriction}_{m_0} = q_0^0$; si $I_{n-1} = [a_{n-1}, a_n)$ y $x{\restriction}_{a_n}$ están definidos, sea $\{p_i : i \in 2^{a_n}\} = {}^{a_n}2$ el a_n-ésimo nivel del árbol. Por inducción sobre $i < 2^m$ se escogen intervalos consecutivos $J_i^n \subseteq \omega$ y $q_i^n \in 2^{<\omega}$ tales que N_n no contenga una extensión de $p_i \cup \bigcup_{j \leq i} q_j^n{\restriction}_{J_j^n}$. Entonces $I_n = \bigcup_{i < 2^{a_n}} J_i^n$ y $x{\restriction}_{J_i^n} = q_i^n{\restriction}_{J_i^n}$ para cada $i < 2^{a_n}$. Como $x{\restriction}_{I_n} = y{\restriction}_{I_n}$ implica la existencia de un i tal que $q_i^n{\restriction}_{J_i^n} = x{\restriction}_{J_i^n} = y{\restriction}_{J_i^n}$, entonces este real segmentado cumple lo pedido.

Por último, si $y \in \mathrm{Mat}(x, \Pi)$ se tiene que $(\exists^\infty n)\ y \notin N_n$. Como $\{N_n : n \in \omega\}$ es $\subseteq$-monótona entonces $(\forall n)\ y \notin N_n$, concluyendo así que $y \notin M$. $\square$

Proposición 2.11. *Un conjunto $G \subseteq [\omega]^\omega$ es grupalmente denso si y sólo si es cerrado bajo $\subseteq^*$ y no magro en ${}^\omega 2$.*

Prueba. Primero una observación: Sea $\mathbb{1} \in {}^\omega 2$ la función constante con valor 1. Sea $X \subseteq \omega$ y $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ una partición en intervalos. Finalmente, sea $y_X \in {}^\omega 2$ la función característica de X. Entonces $y_X \in \mathrm{Mat}(\mathbb{1}, \Pi)$ si y sólo $y_X{\restriction}_{I_n} = \mathbb{1}$ para infinitos n's, esto es, si y sólo si la unión de estos intervalos está contenida en X.

Sea $G \subseteq [\omega]^\omega$ no magro en ${}^\omega 2$; por 2.10, para cada $\Pi = \{I_n : n \in \omega\} \in \mathrm{IP}$ existe un $y \in G$ (visto dentro de ${}^\omega 2$) tal que $y \in \mathrm{Mat}(\mathbb{1}, \Pi)$; por la observación esto significa que G cumple la parte b) de la Definición 1.5. Por otro lado si $G \subseteq [\omega]^\omega$ es grupalmente denso entonces, por la observación, para cada real segmentado de la forma $(\mathbb{1}, \Pi)$ existe $y \in G \cap \mathrm{Mat}(\mathbb{1}, \Pi)$, como G es cerrado bajo $\subseteq^*$ también intersecta a cada $\mathrm{Mat}(x, \Pi)$ con $|x^{-1}[\{1\}]| = \omega$. Entonces por la Proposición 2.10 se tiene que $G \cup [\omega]^{<\omega}$ no es magro (como se mencionó antes, en realidad esto significa que la imagen del conjunto no es magro dentro de ${}^\omega 2$), como $[\omega]^{<\omega}$ sí lo es (por ser numerable), se concluye que G no es magro. $\square$

El siguiente teorema es consecuencia inmediata de un resultado en teoría de la medida, conocido como Ley 0-1 de Kolmogorov (la prueba se encuentra en [15]), el cual afirma que para $E \subseteq {}^\omega 2$ un conjunto *tail* (es decir, tal que para cada $x, y \in {}^\omega 2$ con $x \in E$ y $x =^* y$ entonces $y \in E$) se cumplen un par de disyunciones: Si E es medible entonces su medida es cero o uno; y si E tiene la propiedad de Baire entonces es magro o comagro.

Teorema 2.12 (Sierpiński)**.** *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega) \cong {}^\omega 2$ un filtro. Entonces ocurren las siguientes dicotomías:*

i) *$\mathcal{F}$ tiene medida cero o es no medible.*

ii) *$\mathcal{F}$ es magro o no tiene la propiedad de Baire.*

Prueba. En virtud de la Ley 0-1 de Kolmogorov, ya que todo filtro es un conjunto *tail* puesto que es libre, basta probar que ningún filtro tiene medida uno y ningún filtro es comagro. Sea $\mathrm{sw} : {}^\omega 2 \to {}^\omega 2$ dada por $\mathrm{sw}(f)(n) = 1 - f(n)$, la cual es un homeomorfismo y preserva medida. Si existe un filtro $\mathcal{F}$ de medida uno entonces $\mathrm{sw}[\mathcal{F}] \subseteq {}^\omega 2 \setminus \mathcal{F}$ también tiene medida uno, por tanto no son ajenos, lo cual es una contradicción. De manera similar, si $\mathcal{F}$ es un filtro comagro entonces $\mathrm{sw}[\mathcal{F}] \subseteq {}^\omega 2 \setminus \mathcal{F}$ es un conjunto comagro contenido en un conjunto magro, una contradicción. $\square$

En particular todo ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ no es medible y no tiene la propiedad de Baire, pues ${}^\omega 2 = \mathcal{U} \cup \mathrm{sw}(\mathcal{U})$. Con todo lo anterior ya se puede mostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.13. *Para un filtro $\mathcal{F}$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

I) *$\mathcal{F}$ es débil.*

II) *$\mathrm{En}(\mathcal{F})$ es acotado.*

III) *$\{\omega \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ no es grupalmente denso.*

IV) *$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega) \cong {}^{\omega}2$ es magro.*

V) *$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega) \cong {}^{\omega}2$ tiene la propiedad de Baire.*

Prueba. Sean $\mathcal{F}$ un filtro débil y $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ una partición en intervalos testigo de su debilidad; sea $f \in {}^{\omega}\omega$ definida como $f(n) = \min\{m \in \omega : (\exists\, k \in \omega)\ I_k \subseteq [n, m)\}$. Si $\mathrm{En}(\mathcal{F})$ fuera no acotado, existiría $F \in \mathcal{F}$ tal que $(\exists^{\infty}\, n \in \omega)\ F \cap [n, f(n)] = \emptyset$; entonces F evitaría a infinitos intervalos de Π, contradiciendo la hipótesis. Esto muestra que I) implica II), y como 2.6 implica el recíproco entonces son equivalentes.

$\mathcal{F}$ es débil si y sólo si $\mathcal{F}^* = \{\omega \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ no cumple la parte b) de la definición de grupalmente denso (pues en ambos casos la partición testigo de una es también testigo de la otra), y por el Teorema 2.11 esto es equivalente a que $\mathcal{F}^*$ sea magro. Como la función sw es homeomorfismo, $\mathcal{F}^*$ es magro si y sólo si $\mathcal{F}$ lo es, con lo cual I), III) y IV) son equivalentes.

Por último, del Teorema 2.12 se tiene la equivalencia entre IV) y V). $\square$

Cofinalidad de Ultraproductos

Sea $\mathcal{F}$ es un filtro sobre ω y sean $f, g \in {}^{\omega}\omega$. Entonces se define la relación $f \leq_{\mathcal{F}} g$ si se cumple con $\{n \in \omega \colon f(n) \leq g(n)\} \in \mathcal{F}$ (se define $f <_{\mathcal{F}} g$ de manera similar). Así, para cualquier par de funciones $f, g \in {}^{\omega}\omega$ se tiene que si $f \leq_{\mathcal{F}} g$ para algún filtro $\mathcal{F}$ entonces f no domina a g, y si g domina a f entonces $f \leq_{\mathcal{F}} g$ para cualquier filtro $\mathcal{F}$. Entonces se pueden dar definiciones de los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$ más generales, con un filtro $\mathcal{F}$ como parámetro, de la siguiente manera:

$$\mathfrak{b}(\mathcal{F}) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| \colon \mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega \ \wedge \ (\neg\exists\, f \in {}^{\omega}\omega)\, (\forall\, g \in \mathcal{B}) \ \ f \geq_{\mathcal{F}} g\},$$
$$\mathfrak{d}(\mathcal{F}) = \text{mín}\{|\mathcal{D}| \colon \mathcal{D} \subseteq {}^{\omega}\omega \ \wedge \ (\forall\, f \in {}^{\omega}\omega)\, (\exists\, g \in \mathcal{D}) \ \ f \leq_{\mathcal{F}} g\}.$$

El filtro de los cofinitos recupera las definiciones originales, es decir, $\mathfrak{b}(\mathcal{F}r) = \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}(\mathcal{F}r) = \mathfrak{d}$. Además si $\mathcal{U}$ es ultrafiltro entonces $\mathfrak{b}(\mathcal{U}) = \mathfrak{d}(\mathcal{U})$, puesto que $\leq_{\mathcal{U}}$ es un orden total, es decir, para cualquier par de funciones $f, g \in {}^{\omega}\omega$ se tiene o bien $f \leq_{\mathcal{U}} g$ o bien $g \leq_{\mathcal{U}} f$. Este cardinal es la *cofinalidad del ultraproducto inducido por* $\mathcal{U}$, denotado por cf $({}^{\omega}\omega/\mathcal{U})$, ya que en el conjunto de clases de equivalencia ${}^{\omega}\omega/\sim_{\mathcal{U}}$, con $f \sim_{\mathcal{U}} g \ \leftrightarrow \ \{n \in \omega \colon f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$, $\mathfrak{d}(\mathcal{U})$ es la cofinalidad del orden $\leq_{\mathcal{U}}$. Para conocer más sobre ultraproductos se recomienda consultar [2].

Proposición 3.1. *Sean $h \in \mathrm{FtO}$ y $\mathcal{F}$ un filtro, entonces $\mathfrak{d}(\mathcal{F}) = \mathfrak{d}(h(\mathcal{F}))$.*

Prueba. Sea $h \in \mathrm{FtO}$. Se define $h^{-1} : \omega \to \omega$ como $h^{-1}(x) = \text{máx}\, h^{-1}[\{x\}]$ para $x \in \mathrm{Im}(h)$, y cero en otro caso.

Sea $\mathcal{D}$ una familia $\leq_{\mathcal{F}}$-dominante de tamaño mínimo con elementos no decrecientes; si $f \in {}^{\omega}\omega$, sea $g \in \mathcal{D}$ tal que $X = \{n \in \omega \colon (f \circ h)(n) \leq g(n)\} \in \mathcal{F}$, sea $n \in X$ y $m = h(n)$, entonces se tiene que $f(m) = (f \circ h)(n) \leq g(n) \leq g(h^{-1}(m)) = g \circ h^{-1}(m)$. Así $h[X] \subseteq \{m \in \omega \colon f(m) \leq (g \circ h^{-1})(m)\} \in h(\mathcal{F})$ y $\mathcal{D}' = \{g \circ h^{-1} \colon g \in \mathcal{D}\}$ es $\leq_{h(\mathcal{F})}$-dominante, por lo tanto $\mathfrak{d}(F) \geq \mathfrak{d}(h(\mathcal{F}))$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{D}'$ una familia $\leq_{h(\mathcal{F})}$-dominante de tamaño mínimo cuyos elementos son funciones no decrecientes. Para cada $f \in {}^{\omega}\omega$ se elige una función $g \in \mathcal{D}'$, y sea $X = \{n \in \omega \colon (f \circ h^{-1})(n) \leq g(n)\} \in h(\mathcal{F})$. Si $m \in h^{-1}[X]$ se tiene $f(m) \leq f(h^{-1}(h(m))) = (f \circ h^{-1})(h(m)) \leq g(h(m)) = g \circ h(m)$. Así $h^{-1}[X] \subseteq \{m \in \omega \colon f(m) \leq (g \circ h)(m)\} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{D} = \{g \circ h \colon g \in \mathcal{D}'\}$ es $\leq_{\mathcal{F}}$-dominante, concluyendo con $\mathfrak{d}(F) \leq \mathfrak{d}(h(\mathcal{F}))$. $\square$

Una demostración similar prueba que $\mathfrak{b}(\mathcal{F}) = \mathfrak{b}(h(\mathcal{F}))$ para cada $h \in \mathrm{FtO}$, pero con la anterior basta para implicar que si $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son dos ultrafiltros tales que $f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{V})$ para alguna función f finito-a-uno entonces estos ultrafiltros tienen la misma cofinalidad.

Definición 3.2. *Dos ultrafiltros $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son* ***casi-coherentes*** *si existe $f \in \mathrm{FtO}$ con $f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{V})$.*

Esta definición es equivalente a que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, con $\leq$ el pre-orden definido en 2.1. Además, es equivalente a que exista un par de funciones $g, h \in \mathrm{FtO}$ tal que $g(\mathcal{U}) = h(\mathcal{V})$. En efecto, sean $A, B \subseteq \omega$ disyuntos con $A \in \mathcal{U}$ y $B = \omega \setminus A \in \mathcal{V}$ (si estos conjuntos no existen es porque $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, en cuyo caso la equivalencia es trivial). Sea $f \in {}^{\omega}\omega$ definida como $f\restriction_A = g\restriction_A$ y $f\restriction_B = h\restriction_B$, la cual es una función finito-a-uno porque g y h lo son. Ahora, si $X \in f(\mathcal{U})$ entonces $f^{-1}[X] \cap A \in \mathcal{U}$ y como $f^{-1}[X] \cap A = g^{-1} \cap A$ entonces $g^{-1}[X] \in \mathcal{U}$, con lo cual $X \in g(\mathcal{U})$; esto muestra que $f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U})$. De manera similar se muestra que $f(\mathcal{V}) = h(\mathcal{V})$ concluyendo que $f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{V})$.

Por su definición, $\mathfrak{b} \leq \mathrm{cf}\,({}^{\omega}\omega/\mathcal{U}) \leq \mathfrak{d}$ para cada ultrafiltro $\mathcal{U}$. Además, en [10] se muestra que es consistente que $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ y que para cada cardinal regular κ que satisface $\mathfrak{b} \leq \kappa \leq \mathfrak{d}$ existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con $\mathrm{cf}\,({}^{\omega}\omega/\mathcal{U}) = \kappa$. En ZFC se puede probar que $\mathfrak{g}$ es una cota inferior para cualquier cofinalidad. Al igual que en la Proposición 1.6, para cada $X \in [\omega]^{\omega}$ se define $\nu_X \in {}^{\omega}\omega$ dada por $\nu_X(n) = \min\{x \in X : x > n\}$.

Teorema 3.3. *Para cada ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ sobre ω se tiene que $\mathrm{cf}\,({}^{\omega}\omega/\mathcal{U}) \geq \mathfrak{g}$.*

Prueba. Sea $\mathcal{U}$ un ultafiltro libre y $\mathcal{C} \subseteq {}^{\omega}\omega$ cofinal respecto al orden $\leq_{\mathcal{U}}$. Para cada $f \in \mathcal{C}$ se define $\mathcal{G}_f = \{X \in [\omega]^{\omega} : f \leq_{\mathcal{U}} \nu_X\}$. Como $\mathcal{C}$ es cofinal, no existe un elemento común a todos los $\mathcal{G}_f$'s. Además es claro que cada $\mathcal{G}_f$ es cerrado bajo modificaciones finitas (pues $\mathcal{U}$ es libre) y bajo subconjuntos infinitos (pues si $Y \subseteq X$ entonces $\nu_X \leq \nu_Y$).

Para mostrar que cada $\mathcal{G}_f$ es una familia grupalmente densa, y así concluir la prueba, sea $\Pi = \{I_n : n \in \omega\}$ una partición en intervalos. De manera inductiva se eligen intervalos $I_{n_k} \in \Pi$ tales que $\min I_{n_{k+1}} > \max\{f(x) : x \leq \max I_{n_k}\}$. Sean X, Y la unión de los I_{n_k}'s con k par e impar respectivamente. Para cualquier natural $m \in (\max I_{n-1}, \max I_n]$ se tiene que $f(m) < \nu_Z(m)$, con $Z \in \{X, Y\}$. Es decir, $\{m \in \omega \ : \ f(m) < \nu_X(n)\} \cup \{m \in \omega \ : \ f(m) < \nu_Y(n)\}$ es cofinito. Por lo tanto, X o Y pertenece a $\mathcal{G}_f$. □

Anteriormente se mostró que $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{d}$, esto se puede mejorar pues, como se muestra en [9], existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con $\mathrm{cf}\,({}^{\omega}\omega/\mathcal{U}) = \mathrm{cf}(\mathfrak{d})$. Así, por el teorema anterior, se tiene que $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(\mathfrak{d})$.

Un conjunto $X \in [\omega]^{\omega}$ es *pseudo-intersección* de una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ si $X \subseteq^* A$ para toda $A \in \mathcal{A}$. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es llamado *pseudo-P_κ-punto* si toda familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ con $|\mathcal{F}| < \kappa$ tiene una pseudo-intersección. Si además cada familia tiene pseudo-intersección que pertenece a $\mathcal{U}$, el ultrafiltro $\mathcal{U}$ es llamado *P_κ-punto*.

Proposición 3.4 (Nyikos)**.** *Si $\mathcal{U}$ es un pseudo-P_κ-punto y $\kappa > \mathfrak{b}$, entonces $\mathrm{cf}\,({}^{\omega}\omega/\mathcal{U}) = \mathfrak{b}$.*

Prueba. Sean $\mathcal{U}, \kappa$ como en las hipótesis y $\mathcal{C} \subseteq {}^{\omega}\omega$ una familia no acotada de tamaño $\mathfrak{b}$ con elementos no decrecientes. Se mostrará que $\mathcal{C}$ es cofinal para $\leq_{\mathcal{U}}$. En efecto, si esto no ocurre existe $h \in {}^{\omega}\omega$ con $M_g = \{n \in \omega : g(n) \leq h(n)\} \in \mathcal{U}$ para cada $g \in \mathcal{C}$. Por tanto existe $X \in [\omega]^{\omega}$ con $X \setminus M_g$ finito. Luego, existe $f \in \mathcal{C}$ y $A \in [\omega]^{\omega}$ tal que para cada $n \in A$ se tiene $h(\nu_X(n)) < f(n) \leq f(\nu_X(n))$, con lo cual $\nu_X[A] \subseteq X \setminus M_f$, lo cual es una contradicción pues ν_X es finito-a-uno. □

Teorema 3.5. *Si $\mathcal{U}$ es un pseudo-P_κ-punto entonces $\mathfrak{s} \geq \kappa$.*

Prueba. Sea $\mathcal{U}$ tal filtro y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ una familia con menos de κ elementos. Para cada $Y \in \mathcal{S}$ sea $Y' \in \{Y, \omega \setminus Y\}$ el conjunto que está en $\mathcal{U}$ (el cual existe y está bien definido por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro). Por hipótesis, existe $X \in [\omega]^\omega$ con $X \setminus Y'$ finito para todo $Y \in \mathcal{S}$; de esto se tiene que ningún elemento de la familia $\mathcal{S}$ divide a X, obteniendo la desigualdad. □

En [8] se muestra que es consistente con ZFC que $\mathfrak{b} = \aleph_1$ y exista un $P_{\aleph_2}$-punto; al combinar el par de resultados anteriores con éste se tiene que, consistentemente, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con $\mathrm{cf}\,({}^\omega\omega/\mathcal{U}) < \mathfrak{s}$. El siguiente resultado afirma que cualquier par de ultrafiltros con esta propiedad es casi-coherente.

Teorema 3.6. *Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos ultrafiltros libres sobre ω tales que* $\mathrm{cf}\,({}^\omega\omega/\mathcal{U})\,, \mathrm{cf}\,({}^\omega\omega/\mathcal{V}) < \mathfrak{s}$, *entonces son casi-coherentes.*

Prueba. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ tales ultrafiltros y sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subseteq {}^\omega\omega$ familias de funciones crecientes de tamaño menor a $\mathfrak{s}$, los respectivos testigos para $\mathrm{cf}\,({}^\omega\omega/\mathcal{U})\,, \mathrm{cf}\,({}^\omega\omega/\mathcal{V}) < \mathfrak{s}$. A cada par $(g, g') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ se le asocia la función tal que $n \mapsto \max\{g(n), g'(n)\}$. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas estas funciones. Así, para cada $f \in {}^\omega\omega$ existe $h \in \mathcal{D}$ tal que ambas desigualdades, $f \leq_{\mathcal{U}} h$ y $f \leq_{\mathcal{V}} h$, se cumplen.

Sea $h \in \mathcal{D}$ fijo. Sea $\Pi = \{I_n \colon n \in \omega\} \in \mathrm{IP}$ tal que $h(x) < \min I_{n+1}$, para toda $x \leq \min I_n$. Sea $i \in {}^\omega\omega$ la función tal que $i(x) = n$ si y sólo si $x \in I_n$. Demostrando por contradicción, se tiene que si $i(\mathcal{U})$ y $i(\mathcal{V})$ son ultrafiltros distintos, entonces existe un conjunto $X \subseteq \omega$ con $X \in i(\mathcal{U})$ y $\omega \setminus X \in i(\mathcal{V})$. Por tanto $A = \bigcup\{I_n \colon n \in X\} \in \mathcal{U}$ y $A' = \bigcup\{I_n \colon n \notin X\} \in \mathcal{V}$.

Sea $j \in {}^\omega\omega$ con $j(x) = i(x)+1$. De manera análoga, como $j(\mathcal{U}) \neq i(\mathcal{V})$ se muestra que existen dos conjuntos, $B \in \mathcal{U}$ y $B' \in \mathcal{V}$, ambos uniones de intervalos de Π, tales que si $I_n \subseteq B$ entonces $I_{n+1} \cap B' = \emptyset$. Respectivamente, como $i(\mathcal{U}) \neq j(\mathcal{V})$ existen $C \in \mathcal{U}$ y $C' \in \mathcal{V}$ tales que si $I_n \subseteq C'$ entonces $I_{n+1} \cap C = \emptyset$.

Sean $D = A \cap B \cap C \in \mathcal{U}$ y $D' = A' \cap B' \cap C' \in \mathcal{V}$. Entonces para cada $I_n \subseteq D$ se cumple que $I_{n-1} \cap D' = I_n \cap D' = I_{n+1} \cap D' = \emptyset$. Sean $E = \bigcup\{I_n \cup I_{n+1} : I_n \subseteq D\}$ y $E' = \bigcup\{I_n \cup I_{n+1} \colon I_n \subseteq D'\}$ los cuales, por lo anterior, son disyuntos.

Para $X \subseteq \omega$ infinito con $\nu_X \leq_{\mathcal{U}} h$ se tiene que $\{k \in \omega : \nu_X(k) \leq h(k)\}$ contiene infinitos k's del conjunto D (pues ambos son elementos de $\mathcal{U}$), para estos k's $\nu_X(k) \in [k, h(k)] \cap X$; por construcción de la partición, el elemento $\nu_X(k)$ se encuentra o bien en el intervalo donde está k o bien en en intervalo de la derecha, en cualquier caso se encuentra en E (pues $k \in D$). Por lo tanto $X \cap E$ es infinito. De manera similar, si $\nu_X \leq_{\mathcal{V}} h$ entonces $X \cap E'$ es infinito, y por tanto $X \setminus E$ también.

Finalmente, para cada $h \in \mathcal{D}$ los argumentos anteriores producen un conjunto E_h con las respectivas propiedades. Como para cualquier $X \subseteq \omega$ infinito existe $h \in \mathcal{D}$ con $\nu_X \leq_{\mathcal{U}} h$ y $\nu_X \leq_{\mathcal{V}} h$, entonces existe un E_h que lo divide; así, $\{E_h : h \in \mathcal{D}\}$ es una familia divisora, pero esto es absurdo pues $|\mathcal{D}| < \mathfrak{s}$. □

El siguiente teorema es el dual del anterior, ocupando el cardinal $\mathfrak{r}$.

Teorema 3.7. *Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos ultrafiltros libres sobre ω tales que* $\mathrm{cf}\left({}^{\omega}\omega/\mathcal{U}\right), \mathrm{cf}\left({}^{\omega}\omega/\mathcal{V}\right) > \mathfrak{r}$, *entonces son casi-coherentes.*

Prueba. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ tales ultrafiltros. Con el objetivo de llegar a una contradicción se supondrá que no son casi-coherentes. Sea $\mathcal{R}$ una familia indivisible de tamaño mínimo y considere la familia de funciones ν_R para cada $R \in \mathcal{R}$; esta familia no es cofinal en $\leq_{\mathcal{U}}$ ni en $\leq_{\mathcal{V}}$ pues tiene tamaño $\mathfrak{r}$, por tanto existe una función h tal que para todo $R \in \mathcal{R}$ cumple con $\nu_R \leq_{\mathcal{U}} h$ y $\nu_R \leq_{\mathcal{V}} h$. Sea E el conjunto producido por la prueba del Teorema 3.6 para esta función h, se tiene que E divide a todos los conjuntos de $\mathcal{R}$, lo cual es absurdo. □

Así, se tiene que $\mathfrak{r} < \mathfrak{s}$ implica la existencia de a lo más dos clases de casi-coherencia en ultrafiltros. En [7] se muestra que consistentemente existen dos.

El *Principio de Casi-coherencia* para ultrafiltros, denotado por NCF, afirma que existe una sola clase de casi-coherencia. En [5] se puede encontrar más sobre este principio. En particular NCF implica que $\mathfrak{d}$ es regular, lo cual sirve para probar el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *Ningún ultrafiltro $\mathcal{U}$ satisface* $\mathfrak{r} < \mathrm{cf}\left({}^{\omega}\omega/\mathcal{U}\right) < \mathfrak{s}$.

Prueba. Por contradicción. Si existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con tal propiedad entonces para cualquier otro ultrafiltro $\mathcal{V}$ se tiene o bien $\mathfrak{r} < \mathrm{cf}\left({}^{\omega}\omega/\mathcal{V}\right)$ o bien $\mathrm{cf}\left({}^{\omega}\omega/\mathcal{V}\right) < \mathfrak{s}$, en cualquier caso $\mathcal{V}$ es casi-coherente con $\mathcal{U}$ y la cofinalidad de todo ultrafiltro se encuentra estrictamente entre $\mathfrak{r}$ y $\mathfrak{s}$. En particular NCF se cumple y por tanto $\mathfrak{d}$ es regular, pero como existe un ultrafiltro $\mathcal{W}$ cumpliendo con $\mathrm{cf}\left({}^{\omega}\omega/\mathcal{W}\right) = \mathrm{cf}(\mathfrak{d}) = \mathfrak{d}$, se tiene que $\mathfrak{d} < \mathfrak{s}$, una contradicción. □

Implicaciones de $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$

El cardinal $\mathfrak{g}$, y las familias grupalmente densas, fueron introducidas por A. Blass y C. Laflamme en [6] al encontrar una propiedad combinatoria ($\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$) que implica algunas de las afirmaciones que Shelah demostró consistentes usando modelos con Forcing. En esta última parte se mencionarán algunas de ellas.

El *Principio de Dicotomía para Filtros* (FD) afirma que todo filtro o es débil o es casi-ultra, es decir, el orden $\trianglelefteq$ consta solamente de dos clases. Y como ya se mencionó, el *Principio de Casi-Coherencia para Filtros* (NCF) afirma que todo par de ultrafiltros es casi-coherente; esto es, en términos del orden $\trianglelefteq$, existe una única clase maximal. Como $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ implica la existencia de un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con una base de tamaño menor que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ entonces, por la observación hecha después del Teorema 2.8, el orden $\trianglelefteq$ consta de dos clases, la de los débiles y la consecutiva inmediata, donde se encuentra el ultrafiltro $\mathcal{U}$. Entonces se tiene que $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ implica a FD que a su vez implica a NCF.

Blass preguntó por las implicaciones inversas de estos principios. En [16] H. Mildenberger y S. Shelah muestran que NCF no implica a FD. Continua siendo un problema abierto saber si FD implica a $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$. El Teorema 3.9, presentado por Laflamme en [13], muestra que $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ implica algo cercano a FD. Blass mostró en [4] que el recíproco del Teorema 3.9 es verdadero.

Teorema 3.9. *La desigualdad $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ es equivalente a la siguiente proposición: Para toda familia no vacía $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ cerrada bajo $\subseteq^*$ existe $f \in \mathrm{FtO}$ tal que o $f(\mathcal{A}) = \mathcal{F}r$, o $f(\mathcal{A})$ es ultrafiltro, o $f(\mathcal{A}) = [\omega]^\omega$.*

Si $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$, casi todos los cardinales de la primera sección colapsan en $\mathfrak{u}$ o en $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.10. *Si $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ (o sólo FD) entonces $\mathfrak{b} = \mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.*

Por el Teorema 2.7 existe un filtro no-débil $\mathcal{F}$ generado por $\mathfrak{b}$ conjuntos. Suponiendo a FD, sea $f \in \mathrm{FtO}$ tal que $f(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro, el cual está generado por $\mathfrak{b}$ conjuntos pues la imagen de la base de $\mathcal{F}$ es una base para $f(\mathcal{F})$. Así $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{b}$, como $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{u}$ ocurre por el Teorema 2.6, entonces se tiene la primera igualdad.

Sea $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ dominante de tamaño $\mathfrak{d}$ y cuyos elementos son funciones crecientes. Para cada $f \in \mathcal{D}$ se construyen $A_f, B_f \subseteq [\omega]^\omega$ de la siguiente manera: sea $\{a_n : n \in \omega\}$ una sucesión creciente de naturales con $a_0 = 0$ y $a_{n+1} > f(a_n)$, entonces $A_f = \bigcup\{[a_{4n}, a_{4n+1}) : n \in \omega\}$ y $B_f = \bigcup\{[a_{4n+2}, a_{4n+3})\colon n \in \omega\}$. Por construcción, este par de conjuntos ajenos cumple que todo intervalo de la forma $[x, f(x)]$ no intersecta a ambos, esto es, $[x, f(x)] \cap C \neq \emptyset \;\rightarrow\; [x, f(x)] \subseteq C$ para cada $C \in \{A_f, B_f\}$. Sean $\mathcal{U}_f, \mathcal{V}_f$ ultrafiltros con $A_f \in \mathcal{U}_f$ y $B_f \in \mathcal{V}_f$. Se define el filtro $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F} = \bigcap\limits_{f \in \mathcal{D}} (\mathcal{U}_f \cap \mathcal{V}_f)$.

$\mathcal{F}$ es débil. En efecto, de no serlo sea $g \in \mathrm{FtO}$ con $g(\mathcal{F})$ ultrafiltro y sea $f \in \mathcal{D}$ tal que eventualmente $f(n) > \max g^{-1}(g(n))$. Para todo natural k suficientemente grande se tiene que existe un natural n con $g^{-1}\{k\} \subseteq [n, f(n))$. Por lo tanto sólo finitas fibras de g intersectan a A_f y B_f de manera simultanea, con lo cual $g[A_f] \cap g[B_f]$ es finito, así $g(\mathcal{U}_f)$ y $g(\mathcal{V}_f)$ son distintos, pero ambos incluyen al ultrafiltro $g(\mathcal{F})$, lo cual es absurdo.

Sea $f \in \mathrm{FtO}$ con $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}r$ y sea $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi-ajena de tamaño $\mathfrak{c}$. Para $X \in \mathcal{X}$ se tiene que $\omega \setminus X \notin f(\mathcal{F})$ (pues X es infinito), así $\omega \setminus f^{-1}[X] \notin \mathcal{F}$, luego existe $g \in \mathcal{D}$ con $\mathcal{W}_X \in \{\mathcal{U}_g, \mathcal{V}_g\}$ con $\omega \setminus f^{-1}[X] \notin \mathcal{W}_X$, es decir, $f^{-1}[X] \in \mathcal{W}_X$.

Para $X, Y \in \mathcal{X}$ distintos se tiene que $f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y]$ es finito, con lo cual $\mathcal{W}_X \neq \mathcal{W}_Y$, así se tiene una función $\varphi : \mathcal{X} \to \{\mathcal{U}_g\ , \mathcal{V}_g \colon g \in \mathcal{D}\}$ la cual es uno-a-uno. Por tanto $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{d}$ y se tiene la otra igualdad. $\square$

La prueba de que $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ implica a $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}$ ocupa varios resultados NCF y se puede encontrar en [4]. Así, de $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$ se sigue que $\mathfrak{b} = \mathfrak{r} = \mathfrak{u} < \mathfrak{g} = \mathfrak{d} = \mathfrak{i} = \mathfrak{c}$.

Referencias

[1] Bartoszyński, T. and Judah, H., *Set Theory. On the structure of the real line*, A K Peters, 1995.

[2] Bell, J. L. and Slomson, A. B., *Models and Ultraproducts: An introduction*, North-Holland, 1969.

[3] Blass, A., *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, Handbook of Set Theory (M. Foreman and A. Kanamori, eds.), vol. 1, Springer, 2010, págs. 395-489.

[4] Blass, A., *Groupwise density and related cardinals*, Archive for Mathematical Logic, vol. 30, Springer-Verlag, 1990, págs. 1-11.

[5] Blass, A., *Near Coherence of filters, I. Cofinal equivalence of models of arithmetic*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 27, 1986, págs. 579-591.

[6] Blass, A. and Laflamme, C., *Consistency results about filters and the number of inequivalent growth types*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 54, 1989, págs. 50-56.

[7] Blass, A. and Mildenberger, H., *On the Cofinality of Ultrapowers*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 64, 1999, págs. 727-736.

[8] Blass, A. and Shelah, S., *There may be simple $P_{\aleph_1}$- and $P_{\aleph_2}$-points and the Rudin-Keisler ordering may be downward directed*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 33, North-Holland, 1987, págs. 213-243.

[9] Canjar, R. M., *Cofinalities of countable ultraproducts: the existence theorem*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 30 no. 4, 1989, págs. 539-542.

[10] Canjar, R. M., *Countable ultraproducts without CH*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 37, North-Holland, 1988, págs. 1-79.

[11] Kechris, A. S., *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer, 1994.

[12] Kelley, J. L., *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 27, Springer, 1955.

[13] Laflamme, C., *Equivalence of families of functions on the natural numbers*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 330 no. 1, 1992, págs. 307-319.

[14] Laflamme, C., *Strong meager properties for filters*, Fundamenta Mathematicae, vol. 146 no. 3, 1995, págs. 283-293.

[15] Oxtoby, J. C., *Measure and Category*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, Springer, 2nd edition, 1980.

[16] Shelah, S. and Mildenberger, H., *The near coherence of filters principle does not imply the filter dichotomy principle*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 361 no. 5, 2009, págs. 2305–2317.

[17] Solomon, R. C., *Families of sets and functions*, Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 27, 1977, págs. 556-559.

[18] Vaughan, J., *Small uncountable cardinals and topology*, Open Problems in Topology (J. van Milland and G. Reed, eds.), North-Holland, 1990, págs. 195-218.