



UNIVERSIDAD
MICHUACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO



INSTITUTO DE FÍSICA Y
MATEMÁTICAS

ESTRUCTURA INTERNA DE MESONES
PSEUDOESCALARES

TESIS

Que para obtener el título de:

**Maestra en Ciencias en el Área de la
Física**

Presenta:

Isela Melany Higuera Angulo

Director de Tesis:

Dr. Adnan Bashir

Morelia, Michoacán

Agosto, 2019

Abstract

We present a study of the internal structure of pseudo-scalar mesons through an algebraic model based on Schwinger-Dyson equations (SDEs). This allowed us to find a relationship between the spectral density of a pseudo-scalar meson and its respective parton distribution amplitude (PDA) based on phenomenological parametrizations that have been invoked by experimental data. This work helps us successfully build the parton distribution functions (PDFs), generalized parton distributions (GPDs) and form factors (FFs) in order to obtain a better understanding of the internal structure of these mesons.

Resumen

Presentamos un estudio acerca de la estructura interna de mesones pseudo-escalares mediante un nuevo modelo algebraico basado en las ecuaciones de Swinger-Dyson. Esto nos permitió encontrar una relación entre la densidad espectral de un mesón pseudoescalar y su respectiva PDA basada en parametrizaciones fenomenológicas que han sido invocadas por los datos experimentales. Este trabajo nos ayuda a contruir exitosamente las PDFs, GPDs, y los FF en orden de obtener un mejor entendimiento de la estructura interna de estos mesones.

Palabras clave: física hadrónica, ecuaciones de Shwinger-Dyson, modelo algebraico, amplitudes de distribución partónicas, funciones de distribución partónicas.

*A mi bella familia por su apoyo incondicional y amor infinito.
A quienes más amo en el mundo.*

Agradecimientos

Primeramente, agradezco de todo corazón a mi preciada familia por ser siempre mi principal fuente de motivación para seguir adelante. Gracias por todo el esfuerzo y apoyo que me han brindado sin dudar pese a la distancia. Mi más grande cariño y agradecimiento es para ustedes.

También, con cariño especial, agradezco a Luis Albino Fernandez Rangel quien ha sido para mi un pilar de vital importancia durante el transcurso de mi maestría. Gracias por compartirme un poco de tus valiosos conocimientos los cuáles han sido imprescindibles.

Asimismo, expreso mi profundo agradecimiento al Dr. Adnan Bashir, ya que su apoyo y sus extraordinarias enseñanzas han sido cruciales para mi formación hasta el día de hoy.

Por último, al CONACyT por el apoyo económico brindado durante el periodo de mi maestría.

Índice general

Abstract	I
Resumen	III
Motivación	1
1. Introducción	3
1.1. Simetrías de Isospin e Interacciones Fuertes	5
1.2. Modelo de Quarks	8
1.3. Cromodinámica Cuántica	11
1.3.1. Lagrangiano de QCD	11
1.4. Reglas de Feynman	14
1.5. Simetría Quiral y su Rompimiento	18
2. Estructura Interna de Hadrones	21
2.1. Dispersión Elástica	22
2.1.1. Factores de Forma	25
2.2. Dispersión Inelástica	28
2.3. Modelo Partónico de Feynman	30
2.4. Amplitud de Distribución Partónica	31
3. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	33
3.1. Ecuación de GAP	33
3.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	41
4. Modelo Algebraico	45
4.1. Función de Onda de Bethe-Salpeter	45
4.2. Función de Onda en el Frente de Luz	49
4.3. Amplitud de Distribución Partónica	52
4.4. Densidad Espectral	53
4.4.1. Ejemplo: Pión no masivo ($m_\pi=0$)	56
4.5. Funciones de Distribución Partónicas	58
4.6. Factores de Forma	61
4.6.1. Radio de Carga	61

5. Resultados	63
5.1. El Mesón η_c	64
5.1.1. Densidad Espectral $\rho(w)$	66
5.1.2. Amplitud de Distribución Partónica	66
5.1.3. Función de Onda en el Frente de Luz	67
5.1.4. Funciones de Distribución	67
5.1.5. Factores de Forma	68
5.2. El Mesón η_b	70
5.2.1. Densidad Espectral $\rho(w)$	71
5.2.2. Amplitud de Distribución Partónica	72
5.2.3. Función de Onda en el Frente de Luz	73
5.2.4. Funciones de Distribución	73
5.2.5. Factores de Forma	74
6. Conclusiones	77
A. Parametrización de Feynman	79
Bibliografía	83

Motivación

La física de partículas se ha encargado de estudiar las estructuras fundamentales de la materia y sus interacciones, con el entusiasmo de descifrar los más grandes secretos que éstas celosamente esconden. El desarrollo del llamado *Modelo Estándar* (SM, por sus siglas en inglés) que describe las interacciones electrodébiles y las interacciones fuertes, ha sido uno de los grandes éxitos en la actualidad para el entendimiento y descripción de las partículas hasta hoy conocidas.

La *Cromodinámica Cuántica* (QCD, por sus siglas en inglés) es la teoría dentro del SM que describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones. Estas, son las únicas partículas que no se pueden encontrar de manera libre en la naturaleza sino que permanecen confinados en hadrones, mismos para los cuáles no ha sido posible calcular con exactitud el espectro, su masa y su estructura interna, volviéndose uno de los retos más grandes de la física de partículas. La razón principal es que la constante de acoplamiento para escalas de bajas energías se vuelve más grande que uno lo que imposibilita el estudio perturbativo de primeros principios en QCD. En este regimen de interacción, se definen objetos no-perturbativos tales como las Funciones de Distribución Partónicas (PDFs, por sus siglas en inglés). Estos objetos codifican información de la estructura interna de los hadrones así como también los Factores de Forma (FFs, por sus siglas en inglés) y las Distribuciones Partónicas Generalizadas (GPDs, por sus siglas en inglés).

En las últimas décadas la construcción de laboratorios y aceleradores de partículas, como por ejemplo el *Jefferson Lab* (JL, por sus siglas en inglés), el Gran Colisionador de Hadrones (LHC, por sus siglas en inglés), el Acelerador Circular de Hadrones y Electrones (HERA, por sus siglas en inglés), Belle, BaBar, entre otros, han permitido la obtención de un gran número de resultados experimentales que pueden contrastarse con la teoría, para a su vez entender de manera cada vez más precisa las interacciones entre los constituyentes fundamentales de la naturaleza dentro de los hadrones.

Hoy en día existen parametrizaciones fenomenológicas que han sido comparadas con los datos experimentales, las cuales nos permiten extraer de manera eficiente las PDFs, GPDs y FFs. Sin embargo, para obtener una mayor comprensión dinámica de la teoría que nos proporcionan estas funciones podemos recurrir a su vez a métodos no-perturbativos exitosos como han sido las *Ecuaciones de Schwinger-Dyson* (SDEs, por sus siglas en inglés).

De acuerdo a esto, presentamos un estudio de la estructura interna de mesones

pseudo-escalares tales como el pion, η_c y η_b a través de un nuevo modelo algebraico fundamentado en las SDEs que nos permitió encontrar una relación efectiva entre la densidad espectral de un mesón pseudo-escalar y su respectiva Función de Distribución Partónica (PDA, por sus siglas en inglés) basada en parametrizaciones fenomenológicas lo cuál nos ayudó a construir de manera exitosa las PDFs, GPDs y FFs para así obtener un mayor entendimiento de dichos mesones. Esto, en la actualidad nos será de gran ayuda para la descripción de otros mesones pseudo-escalares, ya que es la primera vez que se obtiene una relación que nos facilite esta ardua tarea.

El trabajo de tesis está distribuido de la siguiente manera: En el capítulo 1, se presenta una introducción a la teoría de las interacciones fuertes, mediante su simetría, el modelo de quarks, el rompimiento de la simetría, etc. En el capítulo 2, presentamos el estudio de los procesos de dispersión de partículas con los cuáles introducimos el significado y la importancia del conocimiento de funciones como las PDAs, FFs, PDFs y GPDs. En el capítulo 3, damos a conocer la descripción de las famosas ecuaciones de Shwinger-Dyson, como la física que se encuentra detrás de ellas. En el capítulo 4, se encuentra el trabajo principal de esta tesis, donde se realizan los cálculos necesarios para la obtención de la relación entre la densidad espectral y la PDA de un mesón para el entendimiento de su estructura interna. En el capítulo 5, mostramos los resultados debidos a nuestro análisis del modelo algebraico. Por último, en el capítulo 6, encontramos las conclusiones directas de esta tesis.

Capítulo 1

Introducción

Desde la antigüedad, el ser humano ha sentido fascinación y curiosidad por entender todo aquello que le rodea, sumergiéndose lentamente en uno de los enigmas más intrigantes del conocimiento: ¿De qué está hecho el universo?

Para responder esta pregunta, se ha buscado entender cuál es el nivel más fundamental de la materia. Una de las primeras ideas fue la de Anaxímenes de Mileto, quien proponía que todas las sustancias podían ser descritas a partir de 4 elementos: tierra, agua, fuego y aire. Sin embargo, ésta propuesta era errónea. 25 siglos después, Mendeléyev logró clasificar todas las sustancias hasta entonces conocidas en la famosa tabla periódica. Aunque la propuesta de Mendeléyev era correcta, la idea de que la estructura más fundamental de la materia fueran más de 100 elementos era muy complicada, por lo que se pensó que posiblemente existían otros objetos más pequeños que compusieran dichos elementos. Con los experimentos de J.J. Thompson a finales del siglo XIX acerca del estudio del comportamiento y los efectos de los rayos catódicos [1, 2], el experimento de la lámina de oro de E. Rutherford [3] y los experimentos de J. Chadwick [4] a principios del siglo XX, cada uno de los elementos de la tabla periódica pudo ser descrito en términos de tres componentes básicos: electrones, protones y neutrones. Por mucho tiempo se pensó que estas tres partículas eran los bloques fundamentales que constituían la materia. Sin embargo, las observaciones de rayos cósmicos, así como experimentos subsecuentes, revelaron la existencia de toda una variedad de nuevas partículas (hoy en día denominadas hadrones y leptones), que no podían ser explicadas en términos de electrones, protones y neutrones. Teniendo cada una de estas partículas diferentes propiedades físicas tales como la masa, carga eléctrica, espín, extrañesa, encanto, belleza, número bariónico, número leptónico, isospín, hipercarga, tiempo de vida, modos de decaimiento, surge nuevamente la necesidad de encontrar un sistema de clasificación.

Con el trabajo de científicos como S. Glashow [5], S. Weinberg [6], A. Salam [7], M. Gell-Mann [8], Y. Ne'man [9], G. Zweig [10], entre otros, se sientan las bases teóricas de lo que hoy en día conocemos como el *Modelo Estándar* (SM) de partículas elementales, el cual describe tres de las cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza (fuerte, electromagnética y débil) en términos de lo que hasta ahora creemos son los

constituyentes fundamentales de la materia: quarks y leptones. Estos constituyentes son fermiones de espín-1/2 que interactúan a través del intercambio de bosones de espín-1, frecuentemente llamados bosones de norma, todos ellos clasificados en la figura 1.1 (en ésta se ha incluido al bosón de Higgs descubierto en 2012 [11], el cuál es responsable de dar masa a todas estas partículas fundamentales que tienen masa).

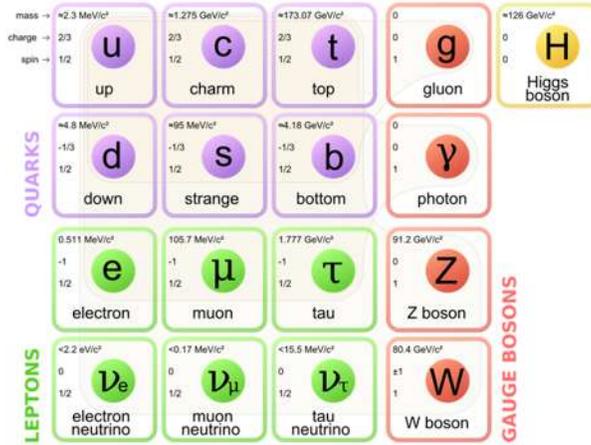


Figura 1.1: Partículas que conforman el SM de las interacciones fundamentales de la materia [13].

Los bosones de norma, mediadores de la interacción fuerte, son los gluones; los correspondientes a la interacción débil son los bosones W^\pm y el bosón Z ; mientras que para la interacción electromagnética, el bosón correspondiente es el fotón. Además de las partículas del SM, también se ha propuesto la existencia un bosón de espín-2, mediador de la fuerza gravitacional: el gravitón, pero aún no se ha encontrado señal alguna de él. Cabe mencionar que la magnitud de la fuerza gravitacional es tan pequeña en comparación con las fuerzas fuerte y electrodébil que, a escalas subatómicas, ésta se puede despreciar.

Los leptones y quarks son fermiones conocidos como partículas de materia. Cada uno de éstos tiene su correspondiente antipartícula la cuál tiene asociada la misma masa pero con todos los números cuánticos opuestos. Los neutrinos no tienen carga eléctrica, y sólo interactúan débilmente; el resto de los leptones, los cuáles tienen carga entera (en unidades de la carga del electrón, e), interactúan entre sí a través de las fuerzas débiles y electromagnéticas. Los quarks, por otro lado, tienen carga fraccionaria y pueden interactuar a través de las fuerzas débiles, electromagnéticas y fuertes. Además, existen 6 diferentes versiones de los quarks, a las cuáles se les llama *sabores*. A diferencia del resto de las partículas del SM, los quarks y gluones nunca han sido observados de manera aislada, si no que siempre se encuentran confinados en grupos formando los hadrones. A esta propiedad se le conoce como *confinamiento*.

En su versión teórica primitiva, los quarks eran considerados meros artilugios matemáticos en términos de los cuales se podían describir los hadrones y algunos de sus

números cuánticos (isospín, hipercarga, extrañeza, número bariónico, etc.). Los bariones eran “construidos” a partir de tres de estos quarks, hoy en día denominados quarks de valencia, mientras que los mesones podían ser construidos a partir de un quark y un antiquark. A este esquema de clasificación se le conoce como el *modelo de quarks*, el cuál ganó credibilidad al lograr predecir la existencia del barión Ω^- . Sin embargo, el modelo de quarks rápidamente comenzó a mostrar algunas inconsistencias serias, por ejemplo, en este modelo, el barión Δ^{++} es representado por tres quarks u en el estado base, pero debido a que este barión tiene espín-3/2, la proyección del espín-1/2 de los 3 quarks en el estado base debe estar orientado en la misma dirección, pero esto viola el principio de exclusión de Pauli. Para corregir este problema, fue necesario introducir un nuevo número cuántico llamado *color*, de manera que los quarks se lograrán distinguir entre ellos y no se violará el principio de exclusión de Pauli. Este nuevo número cuántico puede tomar tres valores posibles (y sus correspondientes anti-valores) y dado que es un número cuántico que caracteriza a los grados de libertad (quarks) internos en los hadrones, la suma total de éste debe ser cero, tanto para bariones como para mesones, es decir, los hadrones son neutros de color. Típicamente se utilizan las etiquetas rojo, verde y azul para este número cuántico (y sus correspondientes anti-colores), en analogía con los colores primarios ya que, por ejemplo, en un barión con tres quarks constituyentes el color total debe ser cero. Además, el estado hadrónico representado por los quarks constituyentes debe ser invariante ante el intercambio de color, de lo contrario existiría una degeneración en los bariones y mesones (por ejemplo, existirían forzosamente varios tipos de protones con diferentes colores). Esta simetría ante permutaciones de color es una simetría exacta en la naturaleza y matemáticamente se representa con el grupo $SU_C(3)$, donde el subíndice C hace referencia a que es una simetría del color.

Vemos así que las simetrías juegan un papel importante en la física de partículas, ya que estas pueden ser asociadas a leyes de conservación mediante su descripción matemática por teoría de grupos. Ejemplos de estos grupos son $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$, por mencionar algunos. Por otra parte se dice que existe una simetría cuando aplicamos un grupo de transformaciones a una función de onda que describen ciertas partículas y el lagrangiano correspondiente permanece invariante. A continuación veremos dos simetrías importantes para el desarrollo de de la teoría de este trabajo de tesis.

1.1. Simetrías de Isospin e Interacciones Fuertes

Una de las primeras observaciones respecto al protón y al neutrón fue la gran similitud en la magnitud de sus masas, lo que hizo preguntarse si en realidad eran dos manifestaciones de una misma partícula (como es el caso de los dos estados del electrón con espín \uparrow y \downarrow) a la que llamaron *nucleón*. De esta manera surgió un nuevo número cuántico llamado *isospín* en asociación al espín por su afinidad en la estructura matemática. Así, el protón y el neutrón no solamente son partículas de espín-1/2 sino también poseen isospín. Con lo cuál el nucleón fue postulado por Heisenberg a tener isospín $I = 1/2$ y proyección $I_3 = \pm 1/2$. Por convención la partícula con $I = 1/2$,

$I_3 = +1/2$ se identifica con el protón mientras el neutrón se identifica con $I = 1/2$, $I_3 = -1/2$. Siendo así $SU(2)$ el grupo de simetría en el cuál (p, n) forman una representación fundamental. Los generadores de este grupo pueden escribirse de la siguiente manera:

$$I_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad (1.1)$$

donde $i = 1, 2, 3$ y σ_i son las matrices de Pauli las cuáles son matrices hermitianas. Además, los generadores I_i cumplen con la relación

$$[I_j, I_k] = i\varepsilon_{jkl}I_l, \quad (1.2)$$

donde $\varepsilon_{jkl} = +1(-1)$ si jkl forman una permutación cíclica (anticíclica) de 123 y es 0 de otra manera. Los operadores de isospín actúan sobre la base de eigenvectores de esta representación que se escoge como

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

Cabe mencionar también que las matrices de transformación que forman elementos del grupo $SU(2)$ son

$$U(\alpha_i) = e^{-i\alpha_i\sigma_i/2}, \quad (1.4)$$

las cuales son matrices unitarias.

De esta forma, recordando las propiedades de momento angular para la construcción de un sistema de dos partículas y los operadores

$$I_{\pm} = I_1 \pm iI_2. \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} I^2|p\rangle &= \frac{3}{4}|p\rangle, & I^2|n\rangle &= \frac{3}{4}|n\rangle, \\ I_3|p\rangle &= +\frac{1}{2}|p\rangle, & I_3|n\rangle &= -\frac{1}{2}|n\rangle, \\ I_-|p\rangle &= |n\rangle, & I_+|n\rangle &= |p\rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

El sistema nucleón-nucleón tendrá un triplete de isospin $I = 1$ y un singlete de isospin $I = 0$ como mostramos a continuación:

$$\left. \begin{aligned} |I = 1, I_3 = 1\rangle &= pp \\ |I = 1, I_3 = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(pn + np) \\ |I = 1, I_3 = -1\rangle &= nn \end{aligned} \right\} \text{Triplete} \quad (1.7)$$

$$|I = 0, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn - np) \left. \right\} \text{Singlete} \quad (1.8)$$

Cabe recalcar que la simetría de isospin nos hace referencia a que el protón y el neutrón tiene la misma masa.

A lo largo de los años surgieron otras observaciones particulares que dieron lugar a otros números cuánticos tales como:

- **Número bariónico** El número *bariónico* se introdujo para explicar la estabilidad del protón; se le otorgó el número bariónico $B = 1$ al protón y a todos aquellos bariones que decaen en él, $B = -1$ a sus antipartículas y $B = 0$ al resto, mesones, leptones y bosones de norma.

- **Extrañeza** En 1953 Gell-Mann y Nishijima establecieron el número cuántico *extrañeza*, el cuál se introdujo para explicar el tiempo de vida tan largo que tenían algunas partículas, lo que permitía que estas decayeran débilmente en otros hadrones más ligeros como el protón y el pión en lugar de decaer fuertemente o eléctricamente. A su vez, estas partículas “extrañas” se producían a través de interacciones fuertes. Esto fue explicado al observar que las partículas con esta propiedad se producen en pares conservando extrañeza. Se le asignó el número $S = 1$ a los Kaones; $S = -1$ a las partículas $\Sigma's$, $\Lambda's$ y todas las partículas que las producen; $S = -2$ a $\Xi's$ y $S = 0$ para todas las demás. Las antipartículas tienen extrañeza opuesta.

Las partículas con extrañeza decaen débilmente donde se viola la conservación de extrañeza mientras que mediante las interacciones fuerte y electromagnética se conserva.

Gell-Mann y Nishijima observaron la existencia de una relación entre todos estos números cuánticos.

$$\begin{aligned} Q &= I_3 + \frac{(B + S)}{2} \\ &\equiv I_3 + \frac{Y}{2}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde Y es un número cuántico llamado *hipercarga* definido como $Y = B + S$. Esta relación permitió dar un paso más hacia la clasificación de la enorme cantidad de partículas descubiertas hasta ese momento. Aquí la simetría $SU(3)$ fue implementada para esta descripción.

El grupo de simetría $SU(3)$ tiene 8 generadores los cuáles pueden escribirse como:

$$t_a = \frac{1}{2}\lambda_a \tag{1.10}$$

donde $a = 1, 2, \dots, 8$ y las matrices λ_a son las matrices de Gell-Mann las cuáles son

matrices hermitianas de 3×3 de traza nula y se escriben como:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & (1.11) \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde vemos que λ_3 y λ_8 son matrices diagonales. Además los generadores cumplen la siguiente relación:

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c \quad (1.12)$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura del grupo; éstas son antisimétricas ante el intercambio entre cualesquiera dos de sus índices a , b ó c .

Estas simetrías en conjunto con los números cuánticos, fueron las bases necesarias para la construcción del modelo de quarks de Gell-Mann con el cuál se obtuvo un mayor entendimiento de las propiedades de los hadrones lográndolos clasificar con los ahora conocidos quarks de valencia.

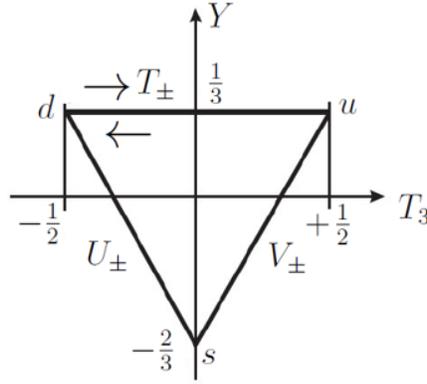
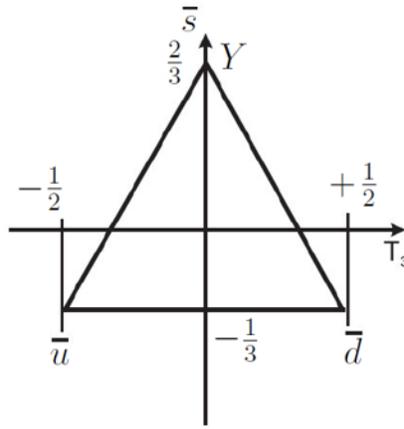
1.2. Modelo de Quarks

En los años 60 Murray Gell-Mann observó que los mesones y bariones tenían patrones de simetrías y trazó el octete que forman los bariones de espín-1/2 a lo que le llamó "*the eightfold way*" introduciendo así el famoso *modelo de quark*. Gell-Mann postuló que los hadrones estaban constituidos por tres quarks hipotéticos: *up* (u), *down* (d) y *strange* (s), asignándoles los números cuánticos del cuadro 1.1. Los antiquarks tienen valores opuestos. Ordenando a los quarks en el plano (I_3, Y) , se observó que

Quark	Espín	B	Q	I_3	S	Y
u	1/2	1/3	2/3	1/2	0	1/3
d	1/2	1/3	-1/3	-1/2	0	1/3
s	1/2	1/3	-1/3	0	-1	-2/3

Cuadro 1.1: Números cuánticos de los quarks.

estos forman triángulos equiláteros como se muestra en las figuras 1.2, 1.3. Gell-Mann dedujo que fijando a los quarks u , d y s como una representación fundamental del grupo

Figura 1.2: Quarks de Gell-Mann en el plano (I_3, Y) .Figura 1.3: Antiquarks de Gell-Mann en el plano (I_3, Y) .

$SU(3)$ con las propiedades antes mencionadas, se podrían construir las partículas hasta entonces conocidas, siendo así la primera representación exitosa capaz de predecir una nueva partícula después encontrada. Esta representación fundamental está dada de la siguiente manera:

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Los antiquarks, se pueden representar con la misma base, denotándolos simplemente como $|\bar{u}\rangle$, $|\bar{d}\rangle$, $|\bar{s}\rangle$ para diferenciarlos. También se escogen los generadores en la representación conjugada $\bar{t}_a = \bar{\lambda}_a/2$ con $\bar{\lambda}_a = (-\lambda_a)^T = -\lambda_a^*$. Conjuntamente, para el grupo $SU(3)$ tenemos los operadores de creación y destrucción:

$$T_{\pm} = t_1 \pm it_2, \quad U_{\pm} = t_6 \pm it_7, \quad V_{\pm} = t_4 \pm it_5, \quad (1.14)$$

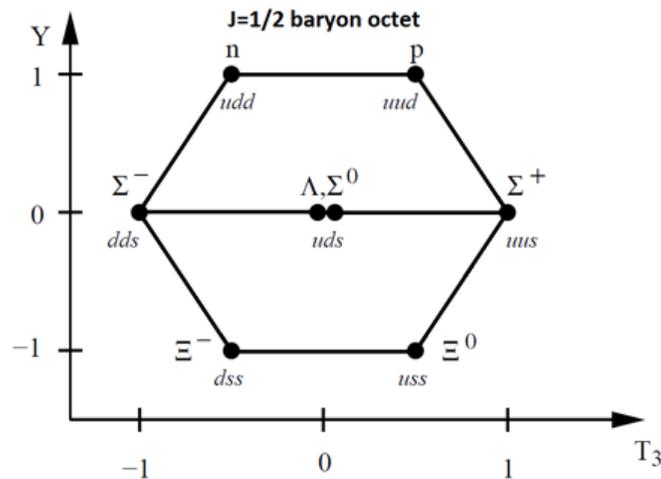


Figura 1.5: Octete de bariones más ligeros en el plano (I_3, Y) .

sus números cuánticos, tiempos de vida y modos de decaimiento de dicho hadrón, se llegó a la conclusión de que este estaba compuesto por un nuevo quark, llamado *charm* c y por su antipartícula *anticharm* \bar{c} . Años después la historia se repetía encontrando al final dos partículas fundamentales adicionales, los quarks *bottom* (b) y *top* (t), encontrando en total tres generaciones de quarks.

Después de muchos años de arduo trabajo hoy en día no existe duda acerca de la existencia de los quarks que constituyen los hadrones, pese a que no podemos verlos libres en la naturaleza, a su vez, hemos llegado a tener un mayor entendimiento acerca de las interacciones entre quarks y gluones las cuáles son regidas por el grupo $SU_c(3)$. En seguida, introduciremos la teoría que describe estas interacciones.

1.3. Cromodinámica Cuántica

Actualmente, sabemos que los hadrones están compuestos por los quarks de valencia y todo un mar de quarks y gluones unidos por las interacciones fuertes. Las propiedades físicas de un hadrón están en principio completamente determinadas por la dinámica entre los quarks y gluones que le constituyen, siendo QCD la teoría que mejor ha logrado describir las interacciones fuertes entre estos constituyentes. Debido a que la dinámica de un sistema puede ser extraída del lagrangiano correspondiente, en la siguiente sección nos enfocaremos en el estudio del lagrangiano de QCD.

1.3.1. Lagrangiano de QCD

Las teorías cuánticas de campo (QFTs, por sus siglas en inglés) son uno de los conceptos teóricos más importantes del último siglo, pues logran combinar de manera consistente dos de las teorías centrales de la física moderna: la relatividad especial y

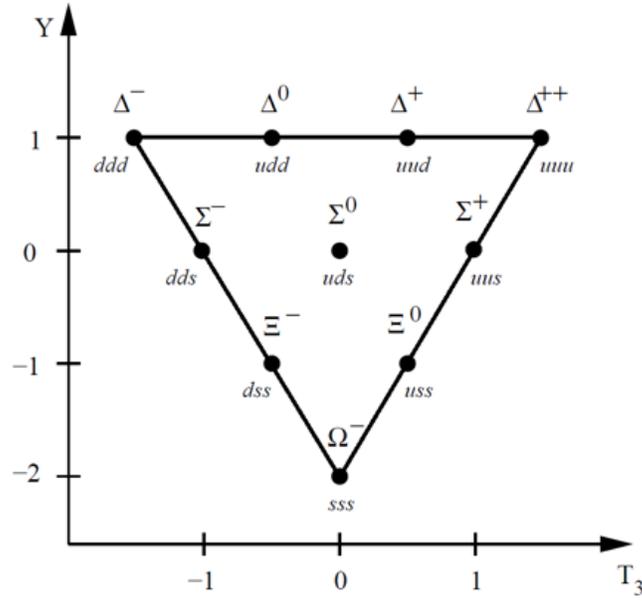


Figura 1.6: Decuplete de bariones pesados en el plano (I_3, Y) .

la mecánica cuántica. Entre estas QFTs, se encuentran las llamadas *teorías de norma*, las cuáles han probado ser altamente exitosas en la descripción de fenómenos a nivel fundamental, de hecho, el SM está basado en este tipo de teorías.

Las teorías de norma se basan en el conocido *principio de norma*, el cuál establece que: las interacciones entre partículas fundamentales son obtenidas al imponer que el lagrangiano del sistema sea invariante bajo un cierto grupo de simetría; esta simetría debe ser local y continua, y es llamada *simetría de norma*.

La simetría de norma correspondiente al SM es $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$, donde el grupo de norma $SU_L(2) \times U_Y(1)$ es la simetría que describe el sector electrodébil (teoría que unifica las interacciones electromagnética y débil), y $SU_C(3)$ es la simetría fundamental de QCD. A continuación se estudiarán cómo, al demandar invarianza de norma bajo $SU_C(3)$ en el lagrangiano que describe a los quarks, se introduce interacciones entre éstos.

Dado que los quarks son fermiones de espín-1/2, éstos son descritos por el lagrangiano de Dirac:

$$\mathcal{L}_{Dirac}(x) = \bar{\psi}_q^j(x)(i \not{\partial} - m_j)\psi_q^j(x), \quad (1.17)$$

donde $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ y m_j es la masa de los quarks. Los quarks son representados con el campo fermiónico $\psi_q^j(x)$, siendo q el índice de color y j el índice de sabor (se entiende una suma sobre índices repetidos). Para introducir interacciones entre los quarks, es necesario demandar que este lagrangiano sea invariante bajo el conjunto de transformaciones de norma pertenecientes a $SU_C(3)$. Para los campos fermiónicos, la transformación de

norma está dada por:

$$\begin{aligned}\psi_q(x) &\rightarrow \psi'_q(x) = U\psi_q(x), \\ \bar{\psi}_q(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_q(x) = \bar{\psi}_q(x)U^\dagger,\end{aligned}\tag{1.18}$$

donde U es una matriz unitaria arbitraria de 3×3 , ya que se encuentra en la representación regular del grupo de simetría (entiéndase por grupo un conjunto de elementos que es cerrado bajo el producto y cumplen ciertas propiedades específicas). En general U puede ser escrita como:

$$U = e^{ig_s\alpha^a(x)t^a},\tag{1.19}$$

en donde g_s es un parámetro que juega el rol de la constante de acoplamiento fuerte, los 8 elementos $\alpha_a(x)$ (donde $a = 1, \dots, 8$) son funciones escalares y cada una de las 8 matrices t^a son los generadores del grupo $SU_C(3)$, que cumplen con la relación de la ec. (1.12)

Regresando al tema de la invarianza de norma es fácil ver que el lagrangiano de la ec. (1.17) no es invariante ante la transformación (1.18), ya que con esta transformación de norma tenemos:

$$\mathcal{L}_{Dirac}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{Dirac} + \bar{\psi}(x)U^\dagger i\gamma^\mu(\partial_\mu U)\psi(x),\tag{1.20}$$

donde por simplicidad hemos omitido los índices de color y sabor para el campo fermiónico ψ .

Para garantizar la invarianza de norma en el lagrangiano de la ec. (1.17), es necesario promover la derivada parcial ∂_μ a una derivada covariante D_μ , definida como:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s t^a G_\mu^a,\tag{1.21}$$

siendo G_μ^a campos vectoriales de espín-1, cuya transformación de norma es

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu'^a = G_\mu^a - \partial_\mu \alpha^a(x) - g_s f^{abc} \alpha^b(x) G_\mu^c(x).\tag{1.22}$$

Con estas reglas de invarianza de norma, el lagrangiano de Dirac, se redefine de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{Dirac}(x) \rightarrow \mathcal{L}_I(x) \equiv \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}_{Dirac}(x) - g_s \bar{\psi}(x)\gamma^\mu t^a \psi(x) G_\mu^a.\tag{1.23}$$

Para poder identificar a los campos G_μ^a como partículas físicas (en este caso a los gluones), es necesario que el lagrangiano contenga los términos tanto de energía cinético como energía potencial, por lo que hace falta introducir un término correspondiente a la energía cinética en la ec. (1.23) de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_I(x) \rightarrow \mathcal{L}_{QCD}(x) \equiv \mathcal{L}_I(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu},\tag{1.24}$$

en donde $F_{\mu\nu}^a$ es el tensor de energía momento de los gluones, definido como:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (1.25)$$

en donde el último término de la expresión anterior es responsable de introducir interacciones entre los bosones de norma consigo mismos, característico de las teorías no-abelianas, es decir, de teorías descritas por un grupo de simetría no conmutativo.

De manera explícita, el lagrangiano de QCD se escribe

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - g_s \bar{\psi}(x)\gamma^\mu t^a \psi(x)G_\mu^a - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (1.26)$$

Es importante mencionar que, para poder cuantizar la teoría, es necesario introducir en el lagrangiano (1.26) el conocido término de fijación de norma, así como también es necesario introducir los llamados fantasmas para garantizar la unitariedad de la teoría. Sin embargo, estos temas quedan fuera del alcance de esta tesis.

El lagrangiano de QCD, ec. (1.26), codifica en principio la dinámica generada por las interacciones fuertes entre quarks y gluones, la cuál es responsable de dar a los hadrones algunas de sus propiedades físicas como la masa, el espín, las distribuciones eléctrica y magnética, entre otras. Sin embargo, extraer la dinámica de primeros principios es una labor extremadamente complicada. Afortunadamente, existe una formulación esquemática que nos ayuda a “visualizar” de manera pictórica el comportamiento de las partículas fundamentales y sus interacciones, los llamados “*diagramas de Feynman*”, de los cuales hablaremos en la siguiente sección.

1.4. Reglas de Feynman

Los diagramas de Feynman nos ayudan a representar de manera gráfica las expresiones matemáticas involucradas en el cálculo de procesos de dispersión entre partículas como a describir estados ligados de estas. Cada elemento en estos diagramas representa un elemento matemático (el cuál puede ser un número, una matriz, un campo fermiónico o bosónico) que depende de la QFT en cuestión. El factor asociado a cada elemento en el diagrama, es designado por las llamadas *reglas de Feynman*.

Supongamos un proceso arbitrario de dispersión en QCD, esquematizado en la figura 1.7, en el cuál tenemos m partículas en el estado inicial, las cuales interaccionan fuertemente unas con otras, dando como resultado n partículas en el estado final. Para fines de interpretación, resulta útil escoger un eje temporal; en nuestro caso el eje horizontal representa al tiempo el cuál avanza de izquierda a derecha.

En QCD, las reglas de Feynman asociadas a la Figura 1.7 son las siguientes:

- **Líneas externas**

Las líneas externas, representan a las partículas libres (iniciales y finales) involucradas en el proceso de dispersión. El término “libre” hace referencia a que la

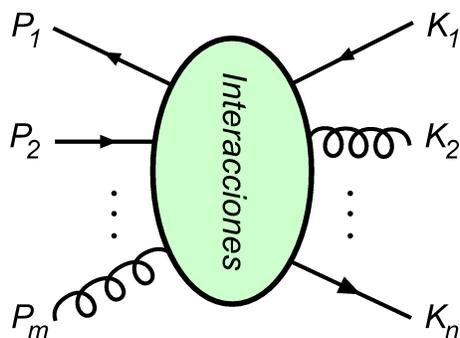


Figura 1.7: Representación de un proceso de dispersión en QCD.

partícula no interacciona antes (o después) del proceso de dispersión. Cada partícula en el estado inicial o final debe estar etiquetada con su respectivo cuadrimomento. En la figura 1.7, la i -ésima partícula en el estado inicial tiene un momento P_i el cuál debe apuntar hacia el punto de interacción (denotado con una elipse verde), mientras que la j -ésima partícula en el estado final tiene un momento K_j el cual debe apuntar hacia afuera del punto de interacción. La región verde indica que las partículas entrantes comienzan a interactuar entre ellas, y esta interacción puede ser representada en sí misma con líneas internas de propagación y vértices de interacción; cada una de las líneas internas, llamadas *propagadores*, deben ser etiquetadas con un momento. Además, para partículas polarizadas, es necesario agregar una etiqueta para el espín. Las líneas solidas denotan fermiones, de manera que si la flecha apunta en dirección temporal positiva ésta representa una partícula (quark en este caso), mientras que si la flecha apunta en dirección temporal negativa ésta denota la correspondiente antipartícula. Los “resortes” denotan a los gluones, y en principio éstos deberían llevar dos etiquetas adicionales, una que represente su carácter tensorial y otra para el color. Los factores para cada línea externa son:

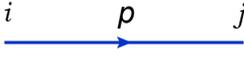
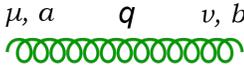
$$\begin{array}{l}
 \text{Quarks:} \\
 \text{Anti-Quarks:} \\
 \text{Gluones:}
 \end{array}
 \begin{cases}
 \text{Entrante } u \\
 \text{Saliente } \bar{u} \\
 \text{Entrante } \bar{v} \\
 \text{Saliente } v \\
 \text{Entrante } \epsilon^\mu \\
 \text{Saliente } \epsilon^{\mu*}
 \end{cases}$$

donde $u \equiv u(P_i, s_i)$ y $v \equiv u(K_j, s_j)$ son espinores de Dirac para fermión y anti-fermión libres, respectivamente (donde s denota el espín), los cuáles están determinados por la ecuación de Dirac, ec. (1.17), en espacio de momentos. Además, ϵ^μ representa la polarización de los gluones.

- **Propagadores y vértices internos** En el régimen de energías en el que las interacciones son débiles en magnitud, denominado el *régimen perturbativo* (que

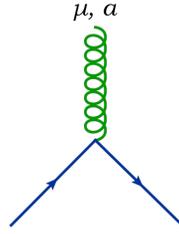
para QCD es a muy altas energías), la representaciones diagramáticas para los propagadores internos, los vértices y sus correspondientes factores son:

Propagadores

Quark		$iS_0(p) = \delta_{ij} \frac{i}{\not{p} - m},$
Gluón		$i\delta^{ab} \Delta_0^{\mu\nu}(q) = -i \frac{\delta^{ab}}{q^2} \left[g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right],$
Fantasma		$i\delta^{ab} G_0(k^2) = i \frac{\delta^{ab}}{k^2},$

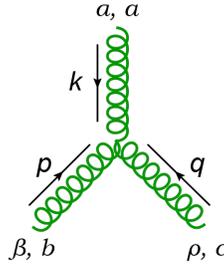
Vértices

Quark-Gluón



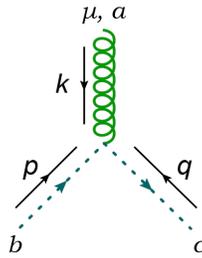
$$-ig_s T^a \gamma^\mu,$$

3-Gluones



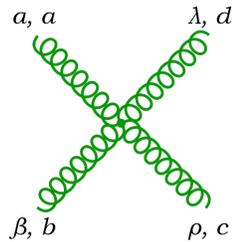
$$-g_s f^{abc} \left[g^{\alpha\beta} (k - p)^\rho + g^{\beta\rho} (p - q)^\alpha + g^{\rho\alpha} (q - k)^\beta \right],$$

Fantasma-Gluón



$$g_s f^{abc} q^\mu,$$

4-Gluones



$$-ig_s^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} - g^{\alpha\lambda} g^{\rho\beta}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\lambda\beta}) \right],$$

(1.27)

en donde las letras griegas denotan el índice de Lorentz (indicando el carácter vectorial de los gluones), las letras a, b, c y d son el índice de color y las letras k, p y q denotan el cuadrimomento de la partícula, cuyos componentes se definen como $k^\mu = (E_k, \vec{k})$, siendo E_k la energía de la partícula con momento \vec{k} . Para el propagador del gluón vemos la presencia del parámetro ξ , el cuál es conocido como *parámetro de norma* y está relacionado con el término de fijación de norma en el lagrangiano de QCD. Además, se introdujo la regla de Feynman para el propagador de la partícula fantasma, los cuales mencionamos que son necesarios para preservar la unitariedad de la teoría.

Estos propagadores y vértices pueden ser obtenidos directamente del lagrangiano de QCD (ecuación 1.26), motivo por el cuál se hace referencia a ellos como expresiones a *nivel árbol*. Además de los vértices aquí presentados, existen otros con más líneas involucradas, llamados *vértices de n-puntos*, pero éstos no tienen una expresión a nivel árbol.

Notemos que para cada vértice a nivel árbol está asociado un coeficiente g_s (la constante de acoplamiento de $SU(3)$, el cuál está asociado con el llamado *acoplamiento de las interacciones fuertes*, α_s , de la siguiente manera: $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$. Este acoplamiento toma valores pequeños en el régimen perturbativo $\alpha_s(M_z^2) = 0,1193 \pm 0,0028$ [16] y muy grandes en el régimen no-perturbativo $\alpha_s > 1$, para las interacciones electromagnéticas este acoplamiento es la conocida constante de estructura fina, $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$, donde e es el valor absoluto de la carga del electrón.

Es importante recalcar que la representación diagramática de los propagadores no está relacionada con la trayectoria de las partículas.

■ Conservación de energía y momento

Para cada vértice de $(m+n)$ -puntos debemos escribir una función delta de Dirac, $(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \dots + q_m - p_1 - \dots - p_n)$, donde q_i es el momento de la i -ésima partícula entrante y p_j es el momento de la j -ésima partícula saliente. Esta delta de Dirac garantiza la conservación de energía y momento.

■ Integración de momentos internos

Dado que estamos describiendo sistemas cuánticos, debemos tomar en cuenta todas las posibilidades en las que un cierto proceso puede ocurrir. Por tanto, debemos considerar todas las configuraciones de momentos internos. Para ello se debe introducir un factor $d^4 q_i / (2\pi)^4$ para cada momento interno, e integrarlo sobre todo el espacio de momentos.

En la actualidad, los cálculos a segundo orden en QCD (NLO) presentan divergencias cuando se realizan las integrales de lazos en 4 dimensiones, éstas divergencias pueden clasificarse en dos tipos: infrarrojas y ultravioletas. Las divergencias ultravioletas se presentan cuando se extiende la teoría a escalas de energía muy

elevadas, ya que se necesita calcular diagramas de Feynman que contienen loops obteniendo series que convergen a infinito, mientras que las divergencias infrarrojas aparecen cuando se emiten partículas a escalas de energía muy bajas. Existen varios métodos para extraer los términos divergentes y cancelarlos: el gluón masivo, Regularización Dimensional (DREG, por sus siglas en inglés), etc. El más utilizado en la actualidad es DREG, ya que es invariante de norma y preserva las propiedades intrínsecas de QCD. Este método se basa en realizar la integral en $D = 4 - 2\epsilon$ dimensiones en lugar de 4 y extraer las divergencias antes de tomar el límite del ϵ a cero. Sin embargo, este tema va más allá de los objetivos de esta tesis.

1.5. Simetría Quiral y su Rompimiento

La simetría quiral es una simetría de QCD en el límite en el que las masas de los quarks pueden ser despreciadas. Como sabemos, la masa corriente de los quarks (es decir, la masa de los quarks libres) no es nula. Sin embargo, considerando las masas corriente de los quarks u , d e incluso el quark s , pueden ser despreciadas en comparación a las masas de los hadrones, lo que sugiere señales de un hecho físico de la simetría asociada a $m_u \approx m_d \approx 0$. Es por esto que la simetría quiral puede ser considerada una simetría aproximada a las interacciones fuertes. Esta simetría es asociada a la corriente vector axial, la cuál es espontáneamente rota, a esto lo conocemos como *rompimiento espontáneo de la simetría quiral* donde se observa una generación dinámica de masas para estas partículas.

Una consecuencia importante de esta ruptura de simetría es la existencia del llamado bosón de Goldstone. El bosón de Goldstone para QCD es el pión, el cuál debido a esta ruptura de simetría debe de tener masa cero. La pequeña masa de los piones se debe al rompimiento explícito de la simetría quiral, es decir, se debe al hecho de que quarks libres tienen masa no nula.

Como modo de ejemplo, de la corriente de Noether, para contemplar esto más a detalle podemos considerar el lagrangiano de dos sabores de fermiones sin masa, donde los resultados pueden ser directamente aplicados a QCD. Entonces, consideramos el lagrangiano de Dirac para $m = 0$ es:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j, \quad (1.28)$$

donde el subíndice j puede representar u, d .

Consideremos la siguiente transformación:

$$\psi_j \longrightarrow e^{-i\frac{\vec{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}}{2}} \psi_j \simeq \left(1 - i\frac{\vec{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}}{2}\right) \psi_j, \quad (1.29)$$

donde $\vec{\tau}$ son las matrices de Pauli para el isospín. El campo conjugado se transforma como:

$$\bar{\psi}_j \longrightarrow \bar{\psi}_j e^{i\frac{\vec{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}}{2}} \simeq \bar{\psi}_j \left(1 + i\frac{\vec{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}}{2}\right). \quad (1.30)$$

De esta forma, podemos ver que el lagrangiano (1.28) es invariante bajo la transformación (1.29)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j &\longrightarrow \mathcal{L}' = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j - i\boldsymbol{\theta} \cdot \left(i\bar{\psi}_j \not{\partial} \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_j - i\bar{\psi}_j \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \not{\partial} \psi_j \right) \\ &= i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j,\end{aligned}\tag{1.31}$$

de donde, la corriente conservada asociada es

$$V_\mu^a = \bar{\psi}_j \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} \psi_j,\tag{1.32}$$

la cuál es conocida como corriente vectorial.

Ahora, consideramos la siguiente transformación:

$$\psi_j \longrightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{\theta}} \psi_j = \left(1 - i\gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) \psi_j,\tag{1.33}$$

Entonces el campo conjugado se transformaría como:

$$\bar{\psi}_j \longrightarrow \bar{\psi}_j e^{-i\gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{\theta}} \simeq \bar{\psi}_j \left(1 - i\gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{\theta} \right).\tag{1.34}$$

donde hemos contemplado las relaciones de conmutación de las matrices gamma, en particular $\gamma_0 \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_0$. Así, podemos observar que el lagrangiano (1.28) también permanece invariante con la transformación (1.33)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j &\longrightarrow \mathcal{L}' = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j - i\boldsymbol{\theta} \cdot \left(i\bar{\psi}_j \not{\partial} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_j - i\bar{\psi}_j \gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \not{\partial} \gamma_\mu \psi_j \right) \\ &= i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j,\end{aligned}\tag{1.35}$$

vemos que el segundo término se cancela por la anticonmutación de γ_5 y γ_μ . La corriente asociada será entonces

$$A_\mu^a = \bar{\psi}_j \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi_j,\tag{1.36}$$

la cuál es conocida como corriente vectorial axial. Vemos entonces que el lagrangiano para dos fermiones sin masa en QCD permanece invariante ante ambas transformaciones, las cuáles forman la llamada simetría quiral.

En contraste, si introducimos el término de masa en el lagrangiano

$$\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}_j \psi_j,\tag{1.37}$$

podemos ver que este término será invariante ante la transformación (1.29) pero no ante la transformación (1.33), ya que para la transformación (1.33) este término se transforma como:

$$\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}_j \psi_j \longrightarrow -m\bar{\psi}_j \psi_j + 2im\boldsymbol{\theta} \cdot \left(\bar{\psi}_j \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \gamma_5 \psi_j \right).\tag{1.38}$$

Por esto vemos un rompimiento de simetría para los quarks debida a su masa corriente pero dado a que esta masa es considerablemente pequeña podemos tratarlo como una simetría aproximada. Sin embargo, esta es la razón por la que se observa una generación dinámica de masas conforme la energía disminuye, pasando del régimen perturbativo al no-perturbativo. Esto se verá con mayor detalle en la sección 3 con las Ecuaciones de Shwinger-Dyson.

Por otra parte, ahora que ya contamos con los ingredientes básicos para calcular procesos en QCD, podemos avanzar en dirección al cálculo de procesos de dispersión de los hadrones involucrados, pues de ello surgirán algunas cantidades importantes para la descripción de hadrones, para ello, el próximo paso es entender cómo podemos describir la dispersión entre partículas en base a secciones eficaces.

Capítulo 2

Estructura Interna de Hadrones

Para entender de manera intuitiva el significado de una sección eficaz de dispersión, resulta conveniente comenzar con un ejemplo muy sencillo. Supongamos que un jugador de fútbol está practicando tiros libres a la portería desde el centro de la cancha. La probabilidad de que el jugador anote un gol está directamente relacionada con el tamaño de la portería; entre más grande sea ésta, mayor será la probabilidad de anotar. La sección eficaz correspondiente es el área dentro de la cuál el balón entrará a gol, en éste caso es el área de la portería. Si ahora pensamos que lanzamos dos balones, uno contra otro, la probabilidad de que éstos choquen (o se rocen) en el aire está relacionada con el área de cada balón perpendicular al movimiento del otro balón: esta área es la sección eficaz de choque entre estos dos balones.

Para la colisión entre dos o más partículas subatómicas, la interpretación de la sección eficaz de dispersión, representada con la letra griega σ , ya no es tan intuitiva como en los ejemplos clásicos que fueron mencionados. Contrario al ejemplo de los balones en el que la dispersión ocurre sólo cuando éstos chocan el uno con el otro, la dispersión entre partículas subatómicas sucede en la región de alcance del potencial creado por la otra partícula. La interacción depende de la escala de energía del proceso.

La sección eficaz diferencial, representado por $d\sigma$, entre partículas depende básicamente de tres elementos:

- **La *amplitud invariante* del proceso**, $\mathcal{M}(A_1 A_2 \cdots A_m \rightarrow B_1 B_2 \cdots B_n)$, la cuál está relacionada con la probabilidad de que un conjunto de m partículas $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ en el estado inicial interactúen entre sí, dando lugar a un conjunto de n partículas $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ en el estado final. Esta amplitud contiene información sobre la naturaleza de la interacción entre las partículas involucradas.
- **El *espacio fase invariante de Lorentz*, $dLips$** : se define como el número de estados finales posibles por unidad de energía. Este contiene información acerca de los momentos y energías finales del proceso.
- **El *flujo inicial***: el cuál contiene toda la información cinemática del proceso (masa, ángulo de incidencia y dispersión, energía y momentos antes y después de la

colisión, etc.) y se define como el número de partículas del haz incidente que cruzan una unidad de área perpendicular al haz por unidad de tiempo, multiplicado por la densidad de partículas del objetivo.

El ejemplo más sencillo de una sección eficaz diferencial es para la *dispersión elástica* entre dos partículas, es decir, aquella dispersión en la que las partículas en el estado final son las mismas que en el estado inicial. Para la dispersión elástica entre dos partículas A y B , con espines s_A y s_B , respectivamente, la sección eficaz diferencial se escribe

$$d\sigma(AB \rightarrow AB) = \frac{|\overline{\mathcal{M}(AB \rightarrow AB)}|^2}{(\text{flujo inicial}) V^2} dLips, \quad (2.1)$$

en donde V es el volúmen del espacio dentro del cual las interacciones toman lugar. También, se define el promedio de espines en la amplitud invariante como

$$|\overline{\mathcal{M}(AB \rightarrow AB)}|^2 = \frac{1}{(2s_A + 1)} \frac{1}{(2s_B + 1)} \sum_{s_A, s_B} |\mathcal{M}(AB \rightarrow AB)|^2, \quad (2.2)$$

donde la suma es sobre todas las polarizaciones de los espines. Para este proceso, el flujo inicial se define como

$$(\text{flujo inicial}) V^2 = 4 [(P_A \cdot P_B)^2 - m_A^2 m_B^2]^{1/2}, \quad (2.3)$$

donde P_A y P_B son los cuádrimomentos entrantes asociados a las partículas A y B , con masas m_A y m_B , respectivamente. Además, para este proceso, el espacio fase se define como

$$dLips = (2\pi)^4 \delta^4(P_A + P_B - K_A - K_B) \frac{d^3 \vec{K}_A}{(2\pi)^3 2E_A^f} \frac{d^3 \vec{K}_B}{(2\pi)^3 2E_B^f}, \quad (2.4)$$

en donde K_A y K_B son los cuádrimomentos salientes asociados a las partículas A y B , con energías finales E_A^f y E_B^f , respectivamente.

Dado a que la forma de la amplitud invariante depende de la naturaleza de las partículas involucradas y el tipo de interacción que toma lugar entre ellas, es conveniente escoger un proceso específico a manera de ejemplo: la dispersión entre un electrón (con carga $-e$) y un protón (con carga e), ambos de espín-1/2.

2.1. Dispersión Elástica

La dispersión elástica entre un electrón y un protón está representada en la figura 2.1.

Debido a que la dispersión $e^- p \rightarrow e^- p$ es un proceso electromagnético, es necesario introducir las reglas de Feynman para el propagador del fotón y para el vértice fermión

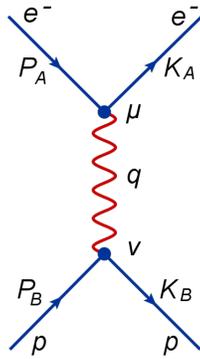


Figura 2.1: Representación de la dispersión elástica electrón-protón.

fotón a nivel de árbol, en el marco de QED:

Propagador del fermión		$iS_0(p) = \frac{i\delta_{ij}}{\not{p} - m_f},$
Propagador del fotón		$i\Delta_0^{\mu\nu}(q) = -\frac{i}{q^2} \left[g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right],$
Vértice fermión-fotón		$ig_f\gamma^\mu,$

donde m_f es la masa del fermión (electrón o protón en este caso) y g_f denota su correspondiente carga eléctrica ($-e$ para el electrón y $+e$ para el protón).

La amplitud invariante para la dispersión $e^-p \rightarrow e^-p$, Figura 2.1, se escribe

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(e^-p \rightarrow e^-p) &= j_p^\mu(P_B, K_B) \left(i\Delta_{\mu\nu}^0(q) \right) j_{e^-}^\mu(P_A, K_A) \\
 &= \bar{u}_p(K_B) (+ie\gamma^\nu) u_p(P_B) \left(i\Delta_{\mu\nu}^0(q) \right) \bar{u}_e(K_A) (-ie\gamma^\mu) u_e(P_A) \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

en donde hemos omitido los índices de espín en los espinores u_e y u_p correspondientes al electrón y el protón, respectivamente. El promedio sobre los espines para esta amplitud invariante se puede reescribir como

$$\overline{|\mathcal{M}(e^-p \rightarrow e^-p)|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu}^e W_p^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

en la norma de Feynman ($\xi = 1$). El *tensor electrónico* ($L_{\mu\nu}^e$) y el *tensor protónico*

$(W_p^{\mu\nu})$ (sin considerar la estructura del protón) se definen de la siguiente manera

$$L_{\mu\nu}^e \equiv \frac{1}{2} \sum_{s_e} \left(\bar{u}_e(K_A) \gamma_\mu u_e(P_A) \right) \left(\bar{u}_e(K_A) \gamma_\nu u_e(P_A) \right)^* , \quad (2.7)$$

$$W_p^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{s_p} \left(\bar{v}_p(K_B) \gamma^\mu v_p(P_B) \right) \left(\bar{v}_p(K_B) \gamma^\nu v_p(P_B) \right)^* , \quad (2.8)$$

en donde la suma es sobre las proyecciones del espín del electrón (s_e) y el protón (s_p). Es posible reescribir la sección eficaz para este proceso como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-p \rightarrow e^-p) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[1 + \frac{q^2}{2M_p^2} \tan^2(\theta/2) \right] , \quad (2.9)$$

en donde θ es el ángulo de dispersión del electrón y q^2 es la energía del fotón mediador de la interacción. Además, $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}$ es la sección eficaz asociada a la dispersión entre un electrón y otra partícula fundamental de espín-0, donde el subíndice ‘‘Mott’’ es en honor al científico Nevill Francis Mott, esta sección eficaz se define como

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{\alpha_{em}^2 \cos^2(\theta/2)}{16M_p^2 E_e^i \sin^4(\theta/2)} \frac{E_e^i}{E_e^f} , \quad (2.10)$$

en donde E_e^i y E_e^f son las energías inicial y final de electrón, respectivamente y M_p es la masa del protón. A partir de la ec. (2.9) es posible describir el protón contemplando su estructura interna si se introducen los factores de forma eléctrico $A(q^2)$ y magnético $B(q^2)$ obteniendo una sección eficaz de la forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-p \rightarrow e^-p) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} [A(q^2) + B(q^2) \tan^2(\theta/2)] , \quad (2.11)$$

los factores de forma $A(q^2)$ y $B(q^2)$ se relacionan con los factores de forma eléctrico y magnético de Saks G_E y G_M , del protón de la siguiente manera:

$$A(q^2) = \frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1 + \tau} , \quad (2.12)$$

$$B(q^2) = 2\tau G_M^2(q^2) , \quad (2.13)$$

donde a su vez, estas densidades están relacionada con los famosos factores de forma de Dirac (F_1) y de Pauli (F_2), de la siguiente manera:

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) - \tau \kappa F_2(q^2) , \quad (2.14)$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2) , \quad (2.15)$$

donde $F_1(0) = F_2(0) = 1$. En las expresiones anteriores, κ es el momento magnético anómalo del protón, τ es una *variable de escalamiento* definida como $\tau = Q^2/4M_p^2$, donde se define $Q^2 \equiv -q^2$.

Interrumpiendo brevemente los procesos de dispersión, vemos necesario introducir el enfoque teórico del significado de los factores de forma para conocer la información que estos pueden proporcionarnos acerca de la estructura interna de los hadrones.

2.1.1. Factores de Forma

Un proceso electromagnético es una de las maneras más limpias de estudiar la estructura nuclear de un hadrón en lugar de utilizar las partículas α que empleó Rutherford para encontrar el núcleo de un átomo. Supongamos una dispersión elástica entre un electrón y una partícula compuesta, por ejemplo un protón ($e^-p \rightarrow e^-p$). De acuerdo a la sección anterior, sabemos que el electrón interactúa electromagnéticamente con el protón por medio de un fotón. Asimismo, si se aumenta la frecuencia del fotón, este puede llegar a interactuar con los quarks constituyentes del protón. Además, por supuesto, los quarks interactúan fuertemente entre ellos mediante el intercambio de gluones. El acoplamiento entre quarks y gluones a bajas energías es tan intenso que estas interacciones no pueden ser tratadas de manera perturbativa. Por esta razón, es necesario describir la dispersión electrón-protón en términos de objetos que encapsulen la naturaleza no-perturbativa de las interacciones fuertes que toman lugar dentro del protón: los *factores de forma* (FFs), los cuáles codifican el aspecto no puntual del hadrón describiendo así de manera covariante la estructura interna de hadrones en términos de sus componentes fundamentales. Estas funciones son además cantidades fenomenológicas accesibles en el experimento. Un caso más simple que estudiar un blanco de espín-1/2, sería considerar el caso de un blanco de espín-0, como lo son todos los mesones pseudo-escalares, por ejemplo, el pión.

Dado a que el enfoque de esta tesis son los mesones pseudo-escalares, comenzaremos considerando la dispersión entre un electrón y un pión $e^-\pi^+(\pi^-) \rightarrow e^-\pi^+(\pi^-)$ como se muestra en la fig. 2.2. En dicha figura, el círculo hace referencia a todas las posibles interacciones que tomen lugar entre el fotón y los componentes fundamentales del pión.

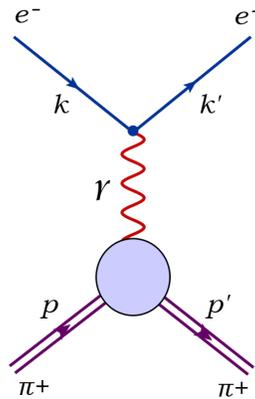


Figura 2.2: Dispersión $e^-(k) + \pi^+(p) \rightarrow e^-(k') + \pi^+(p')$.

Iniciando la discusión con una dispersión de Coulomb pero considerando el caso en el cuál el potencial $V^0(\mathbf{r})$ es debido a una densidad de carga $\rho(\mathbf{r})$. Entonces $V^0(\mathbf{r})$ debe satisfacer la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V^0(\mathbf{r}) = -Ze\rho(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

Podemos notar que para $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ recuperamos la forma puntual de la fuente de potencial como $V^0(\mathbf{r}) = Ze/4\pi|\mathbf{r}|$. Calculando la transformada de Fourier

$$\tilde{V}^0(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V^0(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (2.17)$$

donde $q = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ y para encontrar explícitamente $\tilde{V}^0(\mathbf{q})$ notemos primero de la definición de $V^0(\mathbf{r})$ que

$$\begin{aligned} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \nabla^2 V^0(\mathbf{r}) &= -Ze \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ &\equiv -Ze F(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde el factor de forma estático $F(\mathbf{q})$ se ha introducido. Además la transformada de Fourier de $\rho(\mathbf{r})$ satisface que

$$F(0) = \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1, \quad (2.19)$$

lo que significa que la carga total es Ze . Además, también se tiene que

$$\int (\nabla^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) V^0(\mathbf{r}) = -q^2 \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V^0(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (2.20)$$

Entonces utilizando los resultados de las ecs. (2.17, 2.18 y 2.20) se tiene

$$\tilde{V}^0(\mathbf{q}) = \frac{F(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} Ze. \quad (2.21)$$

Vemos entonces que al orden más bajo en teoría de perturbaciones, la matriz de elementos de transición está dada por la amplitud puntual multiplicada por el factor de forma $F(\mathbf{q})$ el cuál en este caso simple tiene la interpretación de la transformada de Fourier de la distribución de carga.

En la ausencia de una teoría completa podemos acudir a la invarianza de Lorentz y la conservación de corriente electromagnética para restringir la forma general del vértice pión-pión-fotón y así obtener una generalización de este factor de forma estático para el pión real. Primeramente, tomando en cuenta la invarianza de Lorentz, el vértice electromagnético de un pión tiene la forma

$$j_{\pi^+}^\mu(p, p') = \langle \pi^+, p' | j_{em, \pi}^\mu(0) | \pi^+, p \rangle = e [F(q^2)(p' + p)^\mu + G(q^2)q^\mu], \quad (2.22)$$

donde las funciones F y G son los factores de forma. Para obtener esto se consideró la condición $p' = p + q$, donde $p^2 = p'^2 = M_\pi^2 \Rightarrow q^2 = 2M_\pi^2 - 2p \cdot p'$. Ahora, para identificar el factor de forma del pión debemos considerar nuestro segundo principio, la conservación de corriente electromagnética. Es decir, se debe satisfacer la condición de conservación de corriente

$$q_\mu \langle \pi^+(p') | \hat{j}_{em, \pi}^\mu(0) | \pi^+(p) \rangle = 0, \quad (2.23)$$

entonces, de la ec. anterior y de la ec. (2.22) se tiene la condición

$$q_\mu [F(q^2)(p' + p)^\mu + G(q^2)q^\mu] = 0, \quad (2.24)$$

el primer término ($q \cdot (p' + p)$) es cero ya que es la condición de conservación de corriente electromagnético para el vértice de una partícula puntual, pero para el segundo término tenemos $q^2 \neq 0$, por lo que la conservación de corriente implica que

$$G(q^2) = 0. \quad (2.25)$$

En otras palabras, todos los efectos virtuales de la interacción fuerte en el vértice pión-pión-fotón se describen mediante una función escalar de Lorentz y el vértice electromagnético del pión es:

$$j_{\pi^+}^\mu(p, p') = eF(q^2)(p' + p)^\mu, \quad (2.26)$$

De esta forma, el pión sólo tiene un factor de forma electromagnético $F(q^2)$, el cuál es la generalización del factor de forma estático visto anteriormente. Y nuevamente este FF es normalizado por la condición $F(0) = 1$. En adición podemos observar que la amplitud invariante de la ec. (2.5) para $e^-(k) + \pi^+(p) \rightarrow e^-(k') + \pi^+(p')$ estaría dada simplemente intercambiando $j_p^\mu(P_B, K_B)$ por $j_{\pi^+}^\mu(p, p')$ y los correspondientes momentos para el electrón. Es así como esperamos que cuando q^2 es relativamente pequeño, la amplitud sea tal que el objetivo permanezca intacto. Y cuando q^2 aumenta, se espera que la amplitud de un proceso inelástico, el cuál envuelve la producción de partículas extras, aumente; mientras que la amplitud de un proceso elástico disminuya correspondientemente.

Una vez obtenido el factor de forma, es posible encontrar el radio de carga de una partícula mediante su FF como veremos a continuación.

Radio de Carga

Recordando la expresión

$$F(q^2) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (2.27)$$

donde $d^3\mathbf{r} = d\phi \sin\theta d\theta r^2 dr$, entonces el FF para una densidad de carga radial será

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty r^2 \rho(r) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{iqr \cos\theta} \\ &= 2\pi \int_0^\infty r \rho(r) \left[\frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} \right] dr \\ &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \rho(r) \text{sen}(qr) dr, \end{aligned} \quad (2.28)$$

trabajando en el límite de momento transferido pequeño, de esta manera podemos realizar una expansión en $\text{sen}(qr)$, entonces de la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
F(q^2) &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \rho(r) \left[qr - \frac{1}{3}(qr)^3 + \dots \right] dr \\
&= \int_0^\infty \rho(r) d^3r - \frac{q^2}{6} \int_0^\infty r^2 \rho(r) d^3r + \mathcal{O}(q^4) \\
&= 1 - \frac{q^2}{6} \int_0^\infty \psi^* r^2 \psi d^3r + \mathcal{O}(q^4) \\
&= 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle + \mathcal{O}(q^4), \tag{2.29}
\end{aligned}$$

donde $\rho(r) = \psi^* \psi$ es la densidad de probabilidad. Esta expresión nos lleva a que

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}. \tag{2.30}$$

Regresando con los procesos de dispersión, vemos que ocurre un fenómeno muy común en los aceleradores de partículas y es que llegando a una energía relativamente alta, el hadrón al que colocamos como objetivo puede llegar a romperse por el gran momento transversal del fotón, dando como resultado una gran cantidad de partículas; a este fenómeno lo conocemos como dispersión inelástica profunda.

2.2. Dispersión Inelástica

Para procesos de dispersión elástica, el ángulo de dispersión θ , la energía del fotón q^2 y la energía final E_e^f del electrón no son variables independientes. Sin embargo, estas variables se vuelven independientes en los llamados procesos de *dispersión inelástica profunda* (DIS) electrón-protón, en los que la energía del electrón incidente es suficientemente grande para romper al protón en X hadrones. La representación diagramática para la DIS $e^-p \rightarrow e^-X$, en la aproximación de un sólo fotón intercambiado, se encuentra en la figura 2.3.

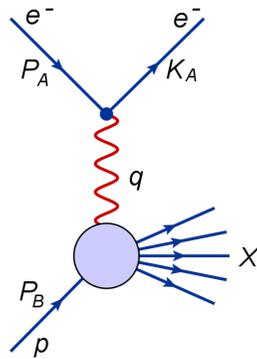
La amplitud invariante (promediada sobre espines) para la dispersión inelástica $e^-p \rightarrow e^-X$, puede escribirse, en analogía a la ecuación 2.6, como

$$\overline{|\mathcal{M}(e^-p \rightarrow e^-X)|^2} = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu}^e W_X^{\mu\nu}, \tag{2.31}$$

donde, en analogía con la ecuación 2.8, se define

$$W_X^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4y e^{iy \cdot P_B} \sum_X \langle p | j^\mu(y) | X \rangle \langle X | j^\nu(0) | p \rangle, \tag{2.32}$$

en donde $j^\mu(x)$ es la corriente electromagnética característica del vértice de interacción $p\gamma X$ (en general puede ser una corriente electrodébil). El *Ket* $|A\rangle$ representa un estado con A hadrones.

Figura 2.3: Dispersión inelástica $e^-p \rightarrow e^-X$.

La sección eficaz para el proceso representado en la figura 2.3 puede escribirse (sin demostración) como

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu}(e^-p \rightarrow e^-X) = \frac{\pi\alpha^2}{4E_e^i{}^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{E_e^i E_e^f} [W_2 \cos^2(\theta/2) + 2W_1 \sin^2(\theta/2)] , \quad (2.33)$$

donde ahora las funciones de estructura del protón, $W_1 \equiv W_1(Q^2, \nu)$ y $W_2 \equiv W_2(Q^2, \nu)$, dependen de la energía del fotón Q^2 y de la diferencia entre la energía inicial y la energía final del electrón, $\nu = E_e^i - E_e^f$.

En principio, uno podría esperar que la dependencia en W_1 y W_2 de las variables Q^2 y ν fuera algo muy complicado, que reflejara la complejidad de los procesos de dispersión inelástica, sin embargo, en 1969 Bjorken [17] predijo que en el régimen de DIS, esto es, cuando Q^2 y ν son infinitamente grandes (en comparación con las escalas naturales del sistema, como las masas de las partículas), las funciones W_1 y W_2 se comportan de una manera muy sencilla: en DIS, estas funciones de estructura *escalan*, es decir, se vuelven funciones no de Q^2 y ν de manera independiente, sino de la razón Q^2/ν entre ellos. Esta propiedad es conocida como el *escalamiento de Bjorken*. Por ello, es conveniente introducir las siguientes variables de escalamiento:

$$x = Q^2/2M_p\nu , \quad (2.34)$$

$$y = \nu/E_e^i . \quad (2.35)$$

Explícitamente, el escalamiento de Bjorken nos dice que para valores muy grandes de Q^2 y ν , pero un valor fijo para x , tenemos que

$$W_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x) , \quad (2.36)$$

$$W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x) . \quad (2.37)$$

Posteriormente, trabajos de Callan, Gross y Feynman [18, 19] mostraron que $2xF_1(x) = F_2(x)$. No debemos confundir estas funciones F_1 y F_2 con los factores de forma de Dirac y Pauli.

Una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones 2.36 y 2.37 es que, en el régimen de DIS, la sección eficaz para la dispersión $e^-p \rightarrow e^-X$, ecuación 2.33, no depende de Q^2 . Este tipo de comportamiento sólo ocurre en procesos de dispersión elásticos, como podemos ver en la ecuación 2.9.

La razón por la que la sección eficaz para la DIS describe una dispersión tipo elástica para valores muy grandes de Q^2 y ν es porque, en este régimen de energías enormes, el electrón ya no interactúa con el protón como un objeto puntual, sino que interactúa con los quarks que le constituyen, los cuales siendo partículas fundamentales no pueden romperse. Esta interpretación intuitiva del escalamiento de Bjorken fue dada por Feynman, quien en realidad proponía que a muy altas energías, el electrón interactuaba con los constituyentes puntuales de espín-1/2 del protón, a los que él llamó *partones* (*modelo de partones* de Feynman). En la actualidad, hacemos referencia no sólo a los quarks como partones, sino también a los gluones.

2.3. Modelo Partónico de Feynman

En el *modelo de partones* de Feynman vemos la evidencia de que los nucleones están compuestos por partículas puntuales libres llamados quarks o partones de espín-1/2. Además la dispersión electrón-protón puede interpretarse como una suma incoherente de la dispersión elástica del electrón con los quarks, explicando así la no dependencia de Q^2 en las funciones de estructura de la dispersión del nucleón. Por todo esto, la relación básica del modelo de partones es

$$\sigma_{eh}(P_B, q) = \sum_a \int_0^1 \sigma_{ea}(xP_B, q) f_{a/h}(x), \quad (2.38)$$

siendo $\sigma_{eh}(P_B, q)$ la sección eficaz para $e^-(P_A) + p(P_B) \rightarrow e^-(K_A) + X$, mientras que $\sigma_{ea}(xP_B, q)$ es la sección eficaz de $e^-(P_A) + a(xP_B) \rightarrow e^-(K_A) + a(xP_B + q)$ para un partón a con una fracción de momento del hadrón h , además $f_{a/h}(x)$ es la *función de distribución partónica* (PDF) la cuál es interpretada como la probabilidad de encontrar un partón del tipo a (que puede ser cualquier gluón o quark) dentro de un cierto hadrón (en este caso el protón), con una cierta fracción de momento $x \in [0, 1]$ del hadrón. Debido a que estas funciones dependen del tipo de partón, es entonces necesario sumar sobre todos los posibles tipos de partones a . Además, asumimos que las PDFs son independientes del proceso.

A su vez, vemos que la sección eficaz hadrónica inelástica es la suma de las convoluciones de secciones eficaces partónicas elásticas con las distribuciones partónicas del hadrón, lo cuál en mecánica cuántica esto representa una incoherencia de la dispersión a grandes momentos q y las distribuciones partónicas, dado a que se suman las probabilidades sin sumar las amplitudes. Una justificación heurística de ello es que la unión del nucleón implica procesos de larga distancia entre los quarks, lo que no interfiere con la dispersión a corta distancia, esto es debido a la forma funcional del acoplamiento

de QCD, es decir que a grandes momentos el acoplamiento de QCD es pequeño lo que significa que los quarks casi no interactúan entre ellos.

Asimismo, apelando al modelo de partones, el tensor $W_X^{\mu\nu}$ asociado a la dispersión $e^-p \rightarrow e^-X$ en la aproximación de intercambio de un solo fotón, representada en la figura 2.3, puede ser escrito como

$$W_X^{\mu\nu}(q, P_B) = \sum_a \int_y^1 \frac{dx}{x} f_{a/p}(x, \mu) H_a^{\mu\nu}(q, xp, \mu, \alpha_s(\mu)) + \text{correcciones}, \quad (2.39)$$

donde μ define la escala de factorización y el término denominado “correcciones” toma en cuenta los procesos de intercambio de dos o más fotones. Por último, cada coeficiente tensorial $H_a^{\mu\nu}$ está relacionado únicamente con la dispersión entre el fotón y el correspondiente partón a .

En el afán de buscar el entendimiento completo de la estructura interna de un hadrón existen otras funciones (además de los factores de forma y las funciones de distribución partónicas) que nos ayudan a continuar con esta ardua tarea, y son las conocidas *amplitudes de distribución partónicas* (PDAs) y las *distribuciones partónicas generalizadas* (GPDs) de las que hablaremos a continuación.

2.4. Amplitud de Distribución Partónica

Las amplitudes de distribución de partones son las análogas a las funciones de onda en el espacio de momentos en la mecánica cuántica que a su vez incluyen todas las propiedades que demanda una teoría cuántica de campos (QFT). Estas funciones nos permiten estudiar la distribución de momentos de los quarks de valencia vestidos dentro de un hadrón. Además las PDAs se describen en el formalismo del cono de luz, ya que es ahí donde las eigenfunciones del hamiltoniano son independientes del cuadrimomento del sistema.

La definición explícita de una PDA se entiende como la distribución de probabilidad de que se encuentre un par quark-antiquark de valencia con fracciones de momento x y $1 - x$ respectivamente de tal manera que estos formen un estado ligado. Matemáticamente, se define como la proyección de la función de onda de Bethe-Salpeter (la cuál veremos en el capítulo 3) en el cono de luz. Para un mesón pseudoescalar se tendría

$$f_M \phi_M(x) = Tr_{CD} \int_{dk} \delta(n \cdot k - xn \cdot P) \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_M(k, P), \quad (2.40)$$

donde f_M es la constante de decaimiento del mesón, $\phi(x)$ corresponde a la PDA, P es el momento total del mesón tal que $P^2 = -m_M^2$ (con m_M la masa del mesón M). n es el cuatri-vector del frente de luz, el cuál cumple con $n^2 = 0$, $n \cdot P = -m_M$. Por último, \int_{dk} es una definición invariante de Poincaré de la integral cuatro-dimensional. En el límite conforme (a escala $\mu \rightarrow \infty$), independientemente de la constitución de los quarks de valencia, la PDA toma la forma:

$$\phi^{CL}(x) = \phi(x, \mu \rightarrow \infty) = 6x(1 - x). \quad (2.41)$$

Por otra parte, los momentos de la distribución para la PDA están dados por:

$$\langle x^m \rangle = \int_0^1 x^m \phi_M(x) dx, \quad (2.42)$$

donde se debe cumplir que

$$\langle x^0 \rangle = \int_0^1 dx \phi_M(x) = 1. \quad (2.43)$$

Existe una íntima conexión entre las PDAs, los FF, las PDFs o más generalmente entre otras funciones llamadas distribuciones partónicas generalizadas, éstas últimas representan una distribución espacial de los partones y en ciertos límites pueden reducirse a los FF y las PDFs (En el capítulo 4 veremos un análisis más detallado de esta conexión).

Asimismo como podemos observar, la PDA está representada en términos de la función de onda de Bethe-Salpeter la cuál contiene el propagador del quark y la amplitud de Bethe-Salpeter, por esto es necesario realizar un estudio más detallado en el enfoque de las ecuaciones de Shwinger-Dyson como veremos a continuación.

Capítulo 3

Ecuaciones de Schwinger-Dyson

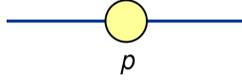
Una de las maneras más eficientes de describir hadrones en la actualidad es calculando los propagadores y las interacciones de quarks y gluones por medio de las llamadas ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDEs) [20, 21, 22]. Estas ecuaciones (nombradas así en honor a Julian Schwinger y Freeman Dyson) son un conjunto infinito de ecuaciones integrales acopladas que relacionan las ecuaciones de Green de una teoría cuántica de campos. Dichas ecuaciones proporcionan una descripción completa de la teoría, por lo que posibilitan el estudio de algunas de las propiedades más importantes de QCD que no pueden ser explicadas con teoría de perturbaciones, por ejemplo: la generación dinámica de masas para quarks y el confinamiento de quarks y gluones.

Para calcular las SDEs podemos partir de las integrales de trayectoria de Feynman o podemos tener una derivación intuitiva haciendo una expansión diagramática perturbativa en potencias del acoplamiento α . De ello nos resulta una serie infinita de ecuaciones integrales acopladas, por lo que es necesario truncarlas. El truncamiento más conocido y sistemático es perturbativo. Sin embargo, pese a la eficacia de este método vista en los resultados, no siempre podemos realizar esta expansión dado a que en ocasiones α no es necesariamente mucho menor a 1, por lo tanto nos son necesarios métodos no-perturbativos para truncar estas ecuaciones infinitas. Existen diversos truncamientos, los cuáles mencionaremos más adelante. A continuación derivaremos algunas de las SDEs por este medio general e intuitivo y utilizaremos un truncamiento sencillo para ello llamado Interacción de Contacto (CI).

3.1. Ecuación de GAP

Antes de comenzar es necesario introducir la representación diagramática del los propagadores y el vértice completo. La palabra completo hace referencia a que cuentan con todas las correcciones posibles de vestimento por lo cuál también tienen sus respectivas reglas de Feynman con algunos factores adicionales a las reglas para los propagadores a nivel árbol (o desnudos).

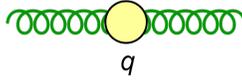
El propagador fermiónico completo se muestra en la fig. 3.1 denotado por $S(p)$. Con

Figura 3.1: Propagador fermiónico completo $S(p)$.

su respectiva regla de Feynman

$$iS(p) = \frac{iF(p^2)}{\not{p} - M(p^2)}, \quad (3.1)$$

donde $F(P^2)$ es la renormalización de la función de onda del fermión y $M(p^2)$ es la función de masa, notemos que para $F(p^2) = 1$ y $M(p^2) = m$ volvemos al propagador fermiónico desnudo visto en el capítulo 1.

Figura 3.2: Propagador Gluónico completo $\Delta_{\mu\nu}(q)$.

De igual forma ocurre para el propagador del gluón completo (representado en la fig. 3.2) el cuál estaría dado de la siguiente manera:

$$i\delta^{ab}\Delta_{\mu\nu}(q) = -i\delta^{ab} \left[\Delta(q^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right], \quad (3.2)$$

donde $\Delta(q^2)$ es la función de vestimento para la parte transversa del propagador del gluón. Nuevamente con $\Delta(q^2) = 1$ recuperaríamos el propagador desnudo del gluón visto en el capítulo 1 en norma arbitraria.

Por último el vértice quark-gluón sería: $-igT^a\Gamma^\mu(k, p)$ que corresponde al diagrama 3.3, donde $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$, λ^a son las matrices de Gell-Mann. Además a nivel árbol se tiene que $\Gamma^\mu(k, p) \equiv \Gamma_0^\mu(k, p) = \gamma^\mu$.

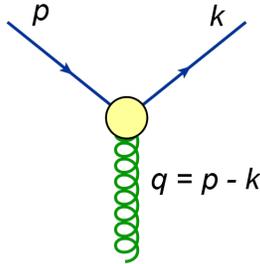


Figura 3.3: Vértice Quark-Gluón.

Ahora podemos proseguir calculando la SDE para el propagador del quark, la cuál también es llamada ecuación de GAP. Para el desarrollo analítico podemos deducir

el propagador completo del quark mediante las correcciones perturbativas posibles al propagador fermiónico desnudo $S_0(p)$. A su vez, para este desarrollo intuitivo consideraremos la interacción en QED recordando los diagramas de Feynman vistos en el capítulo anterior donde el fotón es el bosón de norma mediador de esta interacción. La representación diagramática de estas correcciones se muestra en la fig. 3.4 donde vemos cuatro diferentes tipo de correcciones: las re-correcciones (repeticiones y combinaciones de todos los tipos de correcciones), las correcciones al propagador fermiónico, las correcciones al propagador fotónico y las correcciones al vértice.

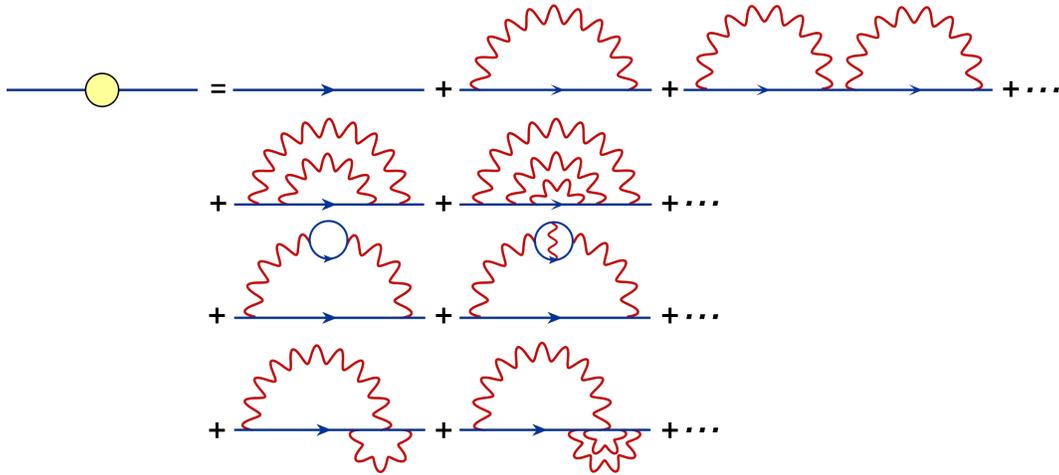


Figura 3.4: Correcciones al propagador fermiónico.

Del lado derecho de la ecuación cada tipo de corrección también la representaremos con un círculo relleno en su propagador o vértice correspondiente logrando reducir la expresión anterior como se muestra en la fig. 3.5. Las correcciones al vértice las representamos de un solo lado para no repetirlas dos veces.

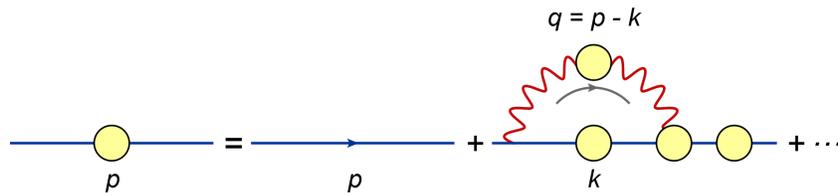


Figura 3.5: Propagador fermiónico completo.

Esta representación diagramática se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
 iS(p) &= iS_0(p) + iS_0(p)\Sigma(p)iS_0(p) + iS_0(p)\Sigma(p)iS_0(p)\Sigma(p)iS_0(p) + \dots \\
 &= iS_0(p) + iS_0(p)\Sigma(p) [iS_0(p) + iS_0(p)\Sigma(p)iS_0(p) + \dots] \\
 &= iS_0(p) + iS_0(p)\Sigma(p)iS(p),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

donde hemos nombrado $\Sigma(p)$ a la autoenergía (fig. 3.6) y $S_0(p)$ es el propagador fermiónico desnudo.

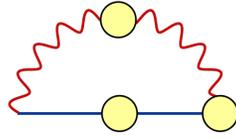


Figura 3.6: Autoenergía.

Multiplicando a la derecha de la ec. (3.3) por $-iS^{-1}(p)$ se tiene

$$1 = S_0(p)S^{-1}(p) + iS_0(p)\Sigma(p), \quad (3.4)$$

y multiplicando a la izquierda por $S_0^{-1}(p)$ obtenemos

$$S_0^{-1} = S^{-1}(p) + i\Sigma(p), \quad (3.5)$$

de donde es fácil ver que

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - i\Sigma(p). \quad (3.6)$$

Esta ecuación es llamada SDE para el propagador del quark, ella también puede ser representada diagramáticamente como se muestra en la fig. 3.7.

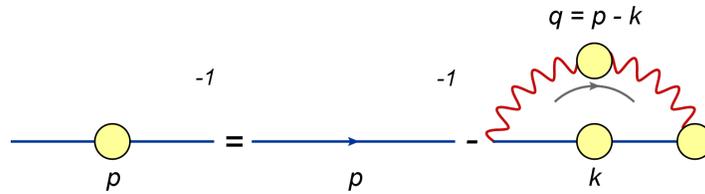


Figura 3.7: DSE para el propagador del quark.

Así mismo es posible extender este resultado para la interacción en QCD intercambiando el propagador del fotón por el propagador del gluón. Cabe recordar que el gluón tiene otras interacciones consigo mismo a diferencia del fotón. Sin embargo haciendo los cálculos mediante otros métodos más complejos se llega al mismo resultado.

Las SDEs se resuelven típicamente en el espacio de Euclideo, por lo que podemos emplear una rotación de Wick para transformar el problema del espacio de Minkowski al espacio Euclideo. Para realizar este cambio de espacios introducimos las variables de momento en el espacio Euclideo (k_1, k_2, k_3, k_4) mediante el cambio de variable

$$k_4 = ik^0, \quad \mathbf{k}^E = \mathbf{k}^M, \quad (3.7)$$

donde los subíndices E y M denotan los espacios Euclideo y Minkowski respectivamente para cualquier vector en el espacio de configuraciones o momentos. Esto implica

que para estudiar productos internos, un conjunto efectivo de reglas es

Minkowski	\rightarrow	Euclideo
$\int_M d^4k$	\rightarrow	$i \int_E d^4k$
\not{p}	\rightarrow	$-i\gamma \cdot p$
$k \cdot p$	\rightarrow	$-k \cdot p$
p^μ	\rightarrow	$-ip^\mu$
$g^{\mu\nu}$	\rightarrow	$\delta_{\mu\nu}$
γ^μ	\rightarrow	γ_μ

donde $\delta_{\mu\nu}$ es la delta de Kronecker y las matrices de Dirac satisfacen que

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu, \quad \gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \quad (3.8)$$

Contando con esto podemos calcular la autoenergía y así obtener la ecuación correspondiente al propagador inverso del quark, pues de acuerdo a las reglas de Feynman la autoenergía está dada en el espacio de Minkowski por

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= Z_1(\mu^2, \Lambda^2) \int_M \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [-igT^a\gamma^\mu] [iS(k)] [-igT^b\Gamma^\nu(k, p)] [i\delta^{ab}\Delta_{\mu\nu}(p-k)] \\ &= C_F Z_1(\mu^2, \Lambda^2) \int_M \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^2 \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(p-k), \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $C_F \equiv T^a T^b = 4/3$ y $Z_1(\mu^2, \Lambda^2)$ es la constante de renormalización del vértice quark-gluón que depende del punto de renormalización μ^2 y la escala de masa Λ^2 . De esta manera, la ec. (3.6) en el espacio de Minkowski es

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - iC_F Z_1(\mu^2, \Lambda^2) \int_M \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^2 \gamma^\mu S(k) \Gamma^\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(p-k), \quad (3.10)$$

y cambiando al espacio Euclideo se tiene

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= Z_2(\mu^2, \Lambda^2) (i\gamma \cdot p + m) \\ &\quad + C_F Z_1(\mu^2, \Lambda^2) \int_E \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^2 \gamma_\mu S(k) \Gamma_\nu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(p-k), \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde hemos sustituido el propagador fermiónico desnudo inverso y $Z_2(\mu^2, \Lambda^2)$ es la constante de renormalización del campo del quark. Esta ecuación es conocida como ecuación de GAP para el quark.

Adicionalmente, el propagador del quark vestido en el espacio Euclideo puede tener diversas representaciones que corresponden al propagador fermiónico general tales como:

$$\begin{aligned} S(p) &= -i\gamma \cdot p \sigma_v(p^2) + \sigma_s(p^2) \\ &= \frac{1}{i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2)} \\ &= \frac{F(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde

$$\sigma_v(p^2) = \frac{F(p^2)}{p^2 + M(p^2)}, \quad \sigma_s(p^2) = \frac{M(p^2)F(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)}, \quad (3.13)$$

y

$$A(p^2) = \frac{1}{F(p^2)}, \quad B(p^2) = \frac{M(p^2)}{F(p^2)}. \quad (3.14)$$

En QCD la ecuación de GAP en conjunto con estas representaciones del propagador fermiónico generales nos sirven para obtener la función de masa. Para resolver esta ecuación es necesario sustituir el vértice quark-gluón y el propagador del gluón. Sabemos que el vértice quark-gluón consiste en 12 estructuras tensoriales, escribiéndose como:

$$\Gamma^\mu(l, k, \mu) = \sum_{j=1}^4 \left(f_j^{(1)} i\gamma^\mu + f_j^{(2)} i\ell^\mu + f_j^{(3)} ik^\mu \right) \tau_j(l, k), \quad (3.15)$$

donde los $f_j^m(l^2, l \cdot k, k^2, m^2)$ con $m = 1, 2, 3$ son funciones invariantes de Lorentz y $\tau_j(l, k) = \{1, \not{k}, \not{l}, [\not{l}, \not{k}]\}$. Sin embargo, para resolver la autoenergía se propone el siguiente ansatz:

$$\begin{aligned} g^2 \Delta_{\mu\nu}(p-k) &= \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2}, \\ \Gamma_\nu(k, p) &= \gamma_\nu, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde m_G^2 es la escala de masa del gluón y se escoge $Z_1 = Z_2 = 1$. De esta forma tenemos que la ec. (3.11) se reduce a

$$S^{-1}(p) = (i\gamma \cdot p + m) + \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_E \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(k) \gamma_\mu. \quad (3.17)$$

Haciendo un cambio de notación donde $\int \frac{d^4 k}{4\pi^2} \rightarrow \int_k^\Lambda$

$$S^{-1}(p) = (i\gamma \cdot p + m) + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_k^\Lambda \gamma_\mu S(k) \gamma_\mu, \quad (3.18)$$

Sustituyendo la ec. (3.12) en la ecuación anterior

$$\frac{i\gamma \cdot p + M(p^2)}{F(p^2)} = (i\gamma \cdot p + m) + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_k^\Lambda \gamma_\mu \frac{F(k^2)}{i\gamma \cdot k + M(k^2)} \gamma_\mu, \quad (3.19)$$

Multiplicando por $\gamma \cdot p$ y desarrollando un poco

$$\begin{aligned} \frac{ip^2}{F(p^2)} + \frac{M(p^2)}{F(p^2)} \gamma \cdot p &= ip^2 + m\gamma \cdot p + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \left[\int_k^\Lambda \gamma_\mu \frac{-i\gamma \cdot p \gamma \cdot k F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \gamma_\mu \right. \\ &\quad \left. + \int_k^\Lambda \gamma_\mu \frac{\gamma \cdot p M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \gamma_\mu \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde haciendo $q \rightarrow -q$ vemos que la primera integral es impar por lo que la igualamos a cero, adicionalmente tomando la traza de la ecuación resultante vemos facilmente que $F(p^2) = 1$ y a su vez podemos encontrar $M(p^2)$.

$$Tr [M(p^2)] = Tr \left[m + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_k^\Lambda \frac{\gamma \cdot p M(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \gamma_\mu \gamma_\mu \right], \quad (3.21)$$

donde $Tr[\gamma_\mu \gamma_\mu] = \delta_{\mu\mu} = 4$, además tenemos que $d^4k = k^3 dk \sin^2 \theta d\theta \sin \phi d\phi d\psi$ donde $\theta, \phi \in [0, \pi]$ y $\psi \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned} \int d^4k &= \int_0^\infty dk k^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\psi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dk^2 k^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) (2) (2\pi) \\ &= \pi^2 \int_0^\infty dk^2 k^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Realizando este cambio en la integración y notando que $M(p) = M$ es una solución de la ec. de GAP, se consigue

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int dk^2 k^2 \frac{1}{k^2 + M^2}, \quad (3.23)$$

también haciendo el cambio de variable $s = k^2$

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2}. \quad (3.24)$$

Posteriormente, realizamos una regularización de tiempo propio, para lo cuál se tiene

$$\int_a^b dx e^{-x(s+M)} = \frac{e^{-a(s+M)} - e^{-b(s+M)}}{s + M^2}, \quad (3.25)$$

Así

$$\frac{1}{s + M^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(s+M^2)} \implies \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} d\tau e^{-\tau(s+M^2)} = \frac{F(s)}{s + M^2}, \quad (3.26)$$

donde $\tau_{UV}^2 = 1/\Lambda_{UV}^2$, $\tau_{IR}^2 = 1/\Lambda_{IR}^2$ son los reguladores infrarojo y ultravioleta. De esta forma,

$$F(s) = e^{-(s+M^2)r_{UV}^2} - e^{-(s+M^2)r_{IR}^2}, \quad (3.27)$$

sustituyendo la ec. (3.26) en la ec. (3.23)

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2} \left[e^{-(s+M^2)r_{UV}^2} - e^{-(s+M^2)r_{IR}^2} \right]. \quad (3.28)$$

Ahora, realizando un cambio de variable en la integral de $s + M^2 = s'$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2} \left[e^{-(s+M^2)r_{UV}^2} - e^{-(s+M^2)r_{IR}^2} \right] &= \int_{M^2}^\infty ds' \frac{s' - M^2}{s'} \left[e^{-s'r_{UV}^2} - e^{-s'r_{IR}^2} \right] \\
&= \int_{M^2}^\infty ds' \left[e^{-s'r_{UV}^2} - e^{-s'r_{IR}^2} \right] \\
&\quad - M^2 \int_{M^2}^\infty ds' \frac{1}{s'} e^{-s'r_{UV}^2} \\
&\quad + M^2 \int_{M^2}^\infty ds' \frac{1}{s'} e^{-s'r_{IR}^2}, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

realizando nuevamente otro cambio de variable $s'r_{UV}^2 = t$ tendríamos que la primera integral nos resultaría:

$$\begin{aligned}
\int_{M^2}^\infty ds' \left[e^{-s'r_{UV}^2} - e^{-s'r_{IR}^2} \right] &= \int_{M^2 r_{UV}^2}^\infty dt r_{UV}^{-2} e^{-t} - \int_{M^2 r_{IR}^2}^\infty dt r_{IR}^{-2} e^{-t} \\
&= \frac{1}{r_{UV}^2} e^{-M^2 r_{UV}^2} - \frac{1}{r_{IR}^2} e^{-M^2 r_{IR}^2}, \tag{3.30}
\end{aligned}$$

la segunda integral:

$$\begin{aligned}
-M^2 \int_{M^2}^\infty ds' \frac{1}{s'} e^{-s'r_{UV}^2} &= -M^2 \int_{M^2 r_{UV}^2}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} \\
&= -M^2 \Gamma(0, M^2 r_{UV}^2), \tag{3.31}
\end{aligned}$$

y la tercera integral:

$$\begin{aligned}
M^2 \int_{M^2}^\infty ds' \frac{1}{s'} e^{-s'r_{IR}^2} &= M^2 \int_{M^2 r_{IR}^2}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} \\
&= M^2 \Gamma(0, M^2 r_{IR}^2), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

donde hemos tomado en cuenta que

$$\Gamma(\alpha, y) = \int_y^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t}. \tag{3.33}$$

Posteriormente, nombrando a la integral completa (ec. (3.29)) como $\mathcal{C}(M^2, \tau_{IR}^2, r_{UV}^2)$ se tendría

$$\mathcal{C}(M^2, \tau_{IR}^2, r_{UV}^2) = \frac{1}{r_{UV}^2} e^{-M^2 r_{UV}^2} - \frac{1}{r_{IR}^2} e^{-M^2 r_{IR}^2} - M^2 \Gamma(0, M^2 r_{UV}^2) + M^2 \Gamma(0, M^2 r_{IR}^2), \tag{3.34}$$

Por lo tanto la ec. (3.28) nos quedaría como:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \mathcal{C}(M^2, \tau_{IR}^2, r_{UV}^2). \tag{3.35}$$

Este es un resultado importante para QCD ya que podemos calcular la masa vestida del quark que encontramos a bajos momentos de energía. Por otra parte, en cálculos más realistas de QCD podemos apreciar como se genera esta masa efectiva de aproximadamente 300 MeV mediante un mecanismo dinámico no-perturbativo al variar la energía, este mecanismo se conoce como rompimiento dinámico de simetría quiral. En la gráfica 3.8 [23] podemos ver este fenómeno claramente.

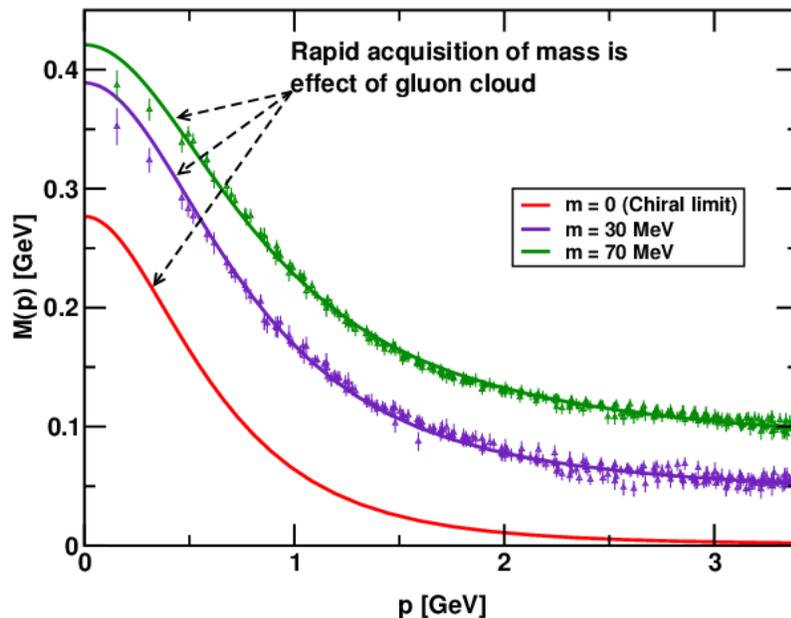


Figura 3.8: Función de Masa para quarks ligeros.

3.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

Los estados ligados más simples de QCD son los mesones, los cuales como vimos están compuestos por un quark y un antiquark. La ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) describe estos estados ligados e involucra el propagador completo del quark y un kernel de interacción entre el quark y el antiquark. La BSE homogénea se puede escribir como:

$$i\Gamma_M(p) = \int d^4k iS(k+p) i\Gamma_M(p) iS(k) \mathcal{K}, \quad (3.36)$$

donde $\Gamma_M(p)$ es la amplitud de Bethe-Salpeter (BSA) y \mathcal{K} es el kernel de interacción de la BSE el cual debe ser consistente con el truncamiento de la ecuación gap. $\Gamma_M(p)$ se puede calcular con las SDE separadamente para encontrar un kernel adecuado.

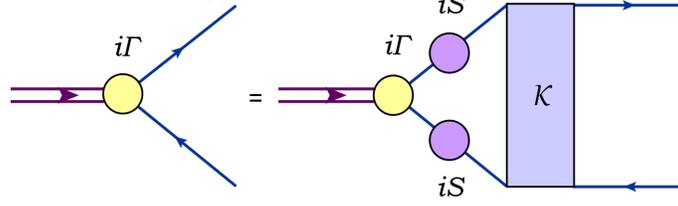


Figura 3.9: BSE para el vértice mesón-quark.

Por otra parte, la BSA de cualquier partícula pseudoescalar (con $J^{PC} = 0^{-+}$) puede ser descompuesta en cuatro estructuras ($\mathbb{1}$, \not{k} , \not{p} , $\not{k}\not{p}$) de la siguiente manera:

$$\Gamma_M^j(k, p) = \tau^j \gamma_5 [iE_M(k; p) + \gamma \cdot p F_M(k; p) + \gamma \cdot k k \cdot p G_M(k; p) + \sigma_{\mu\nu} k_\mu p_\nu H_M(k; p)], \quad (3.37)$$

donde τ^j con $j = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli y las amplitudes E_M , F_M , G_M y H_M son funciones escalares de k^2 y $k \cdot p$.

El vértice mesón-quark-antiquark $\Gamma_M(k, P)$ están relacionados mediante la función de onda de Bethe-Salpeter:

$$\chi_M(k; P) = S_q(k) \Gamma_M(k; P) S_{\bar{q}}(k - P). \quad (3.38)$$

En el modelo de interacción de contacto en el espacio de configuraciones (también llamado “NJL model” por Nambu y Jona-Lasino), la BSA para un estado ligado $q\bar{q}$ no depende del momento relativo (k) lo cuál se puede ver en la función de Green. Por lo que se tiene que la ec. (3.37) se reduce a

$$\Gamma_M(p) = \gamma_5 \left[iE_M(p) + \frac{\gamma \cdot p}{M} F_M(p) \right], \quad (3.39)$$

donde extrajimos la masa vestida del quark por razones dimensionales.

Para calcular el vértice axial se toma en cuenta la BSE inhomogenea (fig. 3.10), de donde se tiene

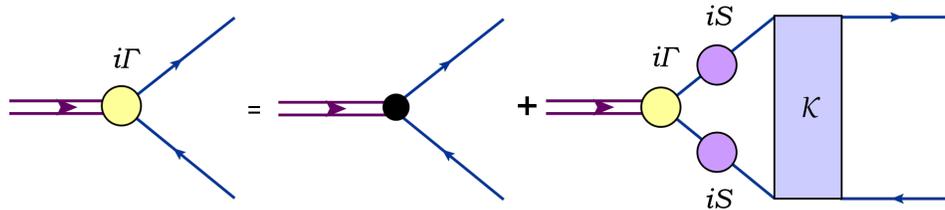


Figura 3.10: BSE para el vértice mesón-quark.

$$i\Gamma_{5\mu}(k, p) = i\gamma_5 \gamma_\mu + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} iS(k+p) i\Gamma_{5\mu}(k+p, p) iS(k) \mathcal{K}, \quad (3.40)$$

donde todas las funciones de Green deben satisfacer una identidad Axia-Vector de Ward-Green-Takahashi

$$p_\mu \Gamma_{5\mu}(k, p) = iS^{-1}(k)\gamma_5 - i\gamma_5 S^{-1}(k - p). \quad (3.41)$$

En el modelo de CI se toma el ansatz de la ec. (3.16) donde el vértice quark-gluón se considera en el orden más bajo y el propagador del gluón como constante. De esta manera, un kernel de que cumple con todas las propiedades simétricas necesarias para describir la interacción del quark y el antiquark en QCD es

$$\mathcal{K} = \frac{4}{3m_G^2} \gamma_\mu \gamma_\nu \delta_{\mu\nu}. \quad (3.42)$$

Así como la CI, existen más métodos de truncamiento eficientes. Sin embargo, utilizamos este a manera de ilustración ya que es un modelo sencillo que ha dado buenos resultados en la actualidad [24, 25].

Por otra parte, es posible resolver numéricamente la BSE y obtener regillas de estimaciones numéricas para las funciones escalares E_M y F_M . Sin embargo, este tipo de regillas pueden ser inadecuadas para futuros cálculos de funciones no-perturbativas, por lo tanto se desarrollan parametrizaciones que interpolan estas regillas. Utilizando la representación adecuada, es posible proporcionar un modelo algebraico perspicaz tanto para el propagador del quark como para la amplitud de Bethe-Salpeter. La idea para la BSA es mantener sólo el término diagonal de la ec. (3.37), asumiendo que es el término dominante; mientras que para el propagador del quark se utiliza sólo la construcción de una parametrización básica que utiliza la masa efectiva del quark. Cabe mencionar que, como vimos, un concepto importante en QCD es la generación dinámica de masas; sin embargo, al hacer uso del modelo algebraico nos restringimos a la masa generada (o efectiva) después del rompimiento dinámico de la simetría quiral que es en el régimen de momentos pequeños de la fig. 3.8.

En el siguiente capítulo haremos uso de un modelo algebraico adecuado para describir mesones pseudoescalares lo que nos permitirá obtener una mejor descripción de la estructura interna de estos en base a todo lo aprendido hasta este capítulo.

Capítulo 4

Modelo Algebraico

En este capítulo se propone un modelo algebraico para el propagador del quark y la BSA para desarrollar la función de onda de BS en el frente de luz y con ello calcular las amplitudes de distribución partónicas, de esta manera nos será posible derivar las funciones de distribución partónicas generalizadas, las funciones de distribución partónicas y los factores de forma elásticos de mesones quarkonia tales como η_c y η_b de una manera directa. A manera de test de nuestro modelo, reproduciremos las funciones de distribución y los factores de forma electromagnéticos del pión (en la aproximación de simetría de isospín) previamente reportados en la literatura [26, 28].

4.1. Función de Onda de Bethe-Salpeter

Como vimos en el capítulo anterior, la función de onda de BS es el producto de la BSA y los propagadores del quark y el antiquark de un mesón, es decir

$$\chi_M(k_-; P) = S_q(k) \Gamma_M(k_-; P) S_{\bar{q}}(k - P) , \quad (4.1)$$

donde $k_- = k - P/2$, $P^2 = -m_M^2$ es la masa del mesón M (en nuestro caso $M = \pi, \eta_c, \eta_b$); Γ_M es la BSA y $S_{q(\bar{q})}$ es el propagador del quark (antiquark). Es preciso recordar que $S_{q(\bar{q})}$ obedece su correspondiente ecuación de SD, la cuál se representa de manera diagramática en la figura 3.7. Análogamente, la BSA obedece su propia ecuación (BSE), la cuál se representa en la figura 3.9. En el capítulo anterior discutimos la forma general del propagador del quark y sus funciones de vestimiento. En particular, mostramos que para la interacción de contacto la función de masa se reduce a una constante, $M(p^2) = M_{q(\bar{q})}$. Este resultado nos motiva a utilizar el siguiente ansatz para el propagador del quark:

$$S_{q(\bar{q})}(k) = [-i\gamma \cdot k + M_{q(\bar{q})}] \Delta(k^2, M_{q(\bar{q})}^2) , \quad (4.2)$$

donde $M_{q(\bar{q})}$ es la masa dinámicamente generada del quark (antiquark) vestido, el subíndice $q(\bar{q})$ representa el sabor del quark (antiquark) y donde se define

$$\Delta(s, t) = \frac{1}{s + t} . \quad (4.3)$$

Por otra parte, el ansatz propuesto para la BSA es:

$$n_M \Gamma_M(k, P) = i\gamma_5 \int_{-1}^1 dw \rho_M(w) \left[\hat{\Delta}(k_w^2, \Lambda_w^2) \right]^\nu, \quad (4.4)$$

donde $\hat{\Delta}(s, t) = t\Delta(s, t)$, $k_w = k + (w/2)P$, $\rho_M(w)$ es la densidad espectral cuya forma determina el comportamiento puntual de la BSA asociada, n_M es la constante de normalización canónica relacionada, y Λ_w^2 está dada de la siguiente manera:

$$\Lambda_w^2 \equiv \Lambda^2(w) = M_q^2 - \frac{1}{4}(1-w^2)m^2 + \frac{1}{2}(M_{\bar{q}}^2 - M_q^2). \quad (4.5)$$

Aunque la ec. (4.4) ha sido previamente utilizada en la literatura, es la primera vez que utilizamos la forma funcional de $\Lambda(w)$ (ec. (4.5)) ya que anteriormente ha sido utilizada como una constante. Esta forma nos permite integrar de manera analítica las integrales involucradas, como mostraremos en este capítulo. Una de las fortalezas de estos Ansätze es que pueden ser escogidos para garantizar que el cálculo algebraico de resultados puntualmente similares a las predicciones de QCD y resultados experimentales actuales de PDFs y PDAs. Análizando la ec. (4.5), vemos que el mínimo de la función $\Lambda^2(w)$ se encuentra en

$$w_0 = \frac{M_{\bar{q}}^2 - M_q^2}{m_M^2},$$

que corresponde a

$$\Lambda^2(w_0) = \frac{2(M_{\bar{q}}^2 - M_q^2)m_M^2 - m_M^4 - (M_{\bar{q}}^2 - M_q^2)^2}{4m_M^2}, \quad (4.6)$$

de la cuál podemos deducir que $\Lambda^2(w_0)$ es positiva sólo si se satisface que

$$M_{\bar{q}} - M_q \leq m_M \leq M_{\bar{q}} + M_q, \quad (4.7)$$

consonante con el llamado *defecto de masa* de un estado ligado de dos partículas. Este requerimiento es fundamental para asegurar la positividad de la densidad espectral. Por otra parte, sustituyendo las ecs. (4.2, 4.4) en la ec. (4.1) se tiene

$$\begin{aligned} n_M \chi_M^{(2)}(k_-, P) &= [-i\gamma \cdot k + M_q] i\gamma_5 [-i\gamma \cdot (k - P) + M_{\bar{q}}] \int_{-1}^1 dw \rho_M(w) \Lambda_w^{2\nu} \\ &\quad \times \Delta(k^2, M_q^2) [\Delta(k_{w-1}^2, \Lambda_w^2)]^\nu \Delta((k - P)^2, M_{\bar{q}}^2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} [-i\gamma \cdot k + M_q] i\gamma_5 [-i\gamma \cdot (k - P) + M_{\bar{q}}] &= -\gamma_5 [M_q \gamma \cdot P + \gamma \cdot k (M_{\bar{q}} - M_q) \\ &\quad + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu + i(-k^2 + k \cdot P - M_q M_{\bar{q}})], \end{aligned} \quad (4.9)$$

con

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] . \quad (4.10)$$

De esta manera podemos definir las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(k, P) \equiv & -\gamma_5 [M_q \gamma \cdot P + \gamma \cdot k (M_{\bar{q}} - M_q) \\ & + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu + i (-k^2 + k \cdot P - M_q M_{\bar{q}})] , \end{aligned} \quad (4.11)$$

y

$$\mathcal{D}(k, P) \equiv \Delta(k^2, M_q^2) [\Delta(k_{w-1}^2, \Lambda_w^2)]^\nu \Delta((k-P)^2, M_{\bar{q}}^2) , \quad (4.12)$$

de modo que

$$n_{M\chi_M^{(2)}}(k_-, P) = \mathcal{M}(k, P) \int_{-1}^1 dw \rho_K(w) \Lambda_w^{2\nu} \mathcal{D}(k, P) . \quad (4.13)$$

Utilizando la parametrización de Feynman definida en la ec. (A.17) del apéndice A, es posible reescribir

$$\mathcal{D}(k, P) = \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \frac{u^{\nu-1}}{\sigma^{\nu+2}} , \quad (4.14)$$

donde hemos definido

$$\sigma \equiv uA + vB + (1-u-v)C , \quad (4.15)$$

con $A = k_{w-1}^2 + \Lambda_w^2$, $B = (k-P)^2 + M_{\bar{q}}^2$ y $C = k^2 + M_q^2$. Expandiendo y reordenando términos, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma = & \left[k - \left(v - \frac{1}{2} u \tilde{w} \right) P \right]^2 - \frac{1}{4} (2v - u \tilde{w})^2 P^2 + \Lambda_w^2 u \\ & + (M_{\bar{q}}^2 - M_q^2) v + (1-u) M_q^2 + \left(v + \frac{1}{4} u \tilde{w}^2 \right) P^2 , \end{aligned} \quad (4.16)$$

redefiniendo $\tilde{w} = w - 1$. Utilizando los cambios de variable

$$\beta = 1 - u , \quad \alpha = v - \frac{1}{2} u \tilde{w} , \quad (4.17)$$

y recordando que $P^2 = -m_M^2$, es posible reescribir de manera compacta

$$\sigma = [k - \alpha P]^2 + \Omega_M^2 , \quad (4.18)$$

definiendo

$$\begin{aligned} \Omega_M^2 \equiv & \beta M_q^2 + (1-\beta) \Lambda_w^2 + (M_{\bar{q}}^2 - M_q^2) \left[\alpha - \frac{1}{2} (1-\beta)(1-w) \right] \\ & + \left[\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{4} (1-\beta)(1-w^2) \right] m_M^2 . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Tomando en cuenta los nuevos parámetros de Feynman α y β , ec. (4.17), los límites de integración en la ec. (4.14) cambiarían, de modo que la ec. (4.13) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} n_M \chi_M^{(2)}(k_-, P) &= \int_{-1}^1 dw \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \phi(w, u, v) \\ &= \int_{-1}^1 dw \int_0^1 d\beta \int_{\frac{1}{2}(\beta-1)(w-1)}^{\frac{1}{2}[(w+1)\beta-(w-1)]} d\alpha \phi(w, \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde $\phi(w, \alpha, \beta)$ es el correspondiente integrando de la ec. (4.13) escrito en términos de los nuevos parámetros de Feynman. Cambiando el orden de integración entre α y β , se tiene que

$$\begin{aligned} n_M \chi_M^{(2)}(k_-, P) &= \int_{-1}^1 dw \left[\int_0^{\frac{1}{2}(1-w)} d\alpha \int_{\frac{2\alpha}{w-1}+1}^1 d\beta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}(1-w)}^1 d\alpha \int_{\frac{2\alpha+(w-1)}{w+1}}^1 d\beta \right] \phi(w, \alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Si ahora cambiamos el orden de integración entre w y α , vemos que

$$\begin{aligned} n_M \chi_M^{(2)}(k_-, P) &= \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} dw \int_{\frac{2\alpha}{w+1}+1}^1 d\beta \right. \\ &\quad \left. + \int_{1-2\alpha}^1 dw \int_{\frac{2\alpha+(w-1)}{w+1}}^1 d\beta \right] \phi(w, \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (4.22)$$

de manera que la ec. (4.13) se reescribe como

$$\begin{aligned} \chi_M^{(2)}(k_-, P) &= \mathcal{M}(k, P) \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} dw \int_{\frac{2\alpha}{w+1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 dw \int_{\frac{2\alpha+(w-1)}{w+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_w^{2\nu} \rho_M(w)}{n_M \sigma^{\nu+2}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Además, de las ecs. (4.5, 4.19) es fácil ver que

$$\Omega_M^2 = M_q^2 + \alpha(\alpha-1)m_M^2 + \alpha(M_q^2 - M_q^2) = \Lambda^2(1-2\alpha) \equiv \Lambda_{1-2\alpha}^2, \quad (4.24)$$

por lo que la ec. (4.18) se reescribe ahora como

$$\sigma = [k - \alpha P]^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2. \quad (4.25)$$

Una vez obtenida la función de onda de BS para el mesón M, es posible obtener sus correspondientes funciones de distribución (PDA, FF, PDFs, DGPs) a partir de la llamada *función de onda en el frente de luz*. Esto será discutido a detalle en las siguientes secciones.

4.2. Función de Onda en el Frente de Luz

Para un mesón pseudoescalar M , la función de onda en el frente de luz (LFWF), ψ_M , puede escribirse de la siguiente manera

$$f_M \psi_M(x, k_\perp^2) = Tr_{CD} \int_{dk_\parallel} \delta(n \cdot k - xn \cdot P) \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_M^{(2)}(k_-, P), \quad (4.26)$$

donde nuevamente f_M es la constante de decaimiento leptónica del mesón, n es el cuadri-vector del frente de luz, tal que $n^2 = 0$ y $n \cdot P = -m_M$. La traza indica que se aplica sobre los índices de color (C) y espinor de Dirac (D). Además, sin pérdida de generalidad utilizaremos la notación $\int_{dk_\parallel} = \frac{1}{\pi} \int d^2 k_\parallel$. Por otra parte, la distribución de momentos de Mellin para la LFWF está dada de la siguiente manera:

$$\langle x^m \rangle_{\psi_M} = \int_0^1 dx x^m \psi_M(x, k_\perp^2), \quad (4.27)$$

y entonces, de acuerdo a la ec. (4.26) se tiene

$$\begin{aligned} f_M \langle x^m \rangle_{\psi_M} &= Tr_{CD} \int_{dk_\parallel} \int_0^1 dx x^m \delta(n \cdot k - xn \cdot P) \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_M^{(2)}(k_-, P) \\ &= \frac{1}{n \cdot P} Tr_{CD} \int_{dk_\parallel} \left[\frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right]^m \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_M^{(2)}(k_-, P). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sustituyendo la ec. (4.23) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} f_M \langle x^m \rangle_{\psi_M} &= \frac{1}{n \cdot P} \frac{\Gamma(\nu + 2)}{\Gamma(\nu)} \int_{dk_\parallel} \left[\frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right]^m Tr_{CD} [\gamma_5 \gamma \cdot n \mathcal{M}(k; P)] \\ &\times \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} dw \int_{\frac{2\alpha}{w+1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 dw \int_{\frac{2\alpha+(w-1)}{w+1}}^1 d\beta \right] \\ &\times \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_w^{2\nu} \rho_M(w)}{n_M \sigma^{\nu+2}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Recordando la definición de $\mathcal{M}(k, p)$, ec. (4.11), obtenemos la traza

$$\begin{aligned} Tr_{CD} [\gamma_5 \gamma \cdot n \mathcal{M}(k; P)] &= Tr \{ \gamma \cdot n \gamma \cdot P \} M_q + Tr \{ \gamma \cdot n \gamma \cdot k \} (M_{\bar{q}} - M_q) \\ &\quad + Tr \{ \gamma \cdot n \sigma_{\mu\nu} \} k_\mu P_\nu + i Tr \{ \gamma \cdot n (-k^2 + k \cdot P - M_q M_{\bar{q}}) \} \\ &= 12 n \cdot P \left[M_q + \frac{n \cdot k}{n \cdot P} (M_{\bar{q}} - M_q) \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ec. (4.29) se tiene

$$\begin{aligned}
\langle x^m \rangle_{\psi_M} &= 12 \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_{dk_{\parallel}} \left[\frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right]^m \left[M_q + \frac{n \cdot k}{n \cdot P} (M_{\bar{q}} - M_q) \right] \\
&\times \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} dw \int_{1+\frac{2\alpha}{w-1}}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 dw \int_{\frac{w-1+2\alpha}{w+1}}^1 d\beta \right] \\
&\times \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_w^{2\nu} \rho_M(w)}{f_M n_M \sigma^{\nu+2}}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Notemos que es posible escribir la descomposición

$$k = k_{\parallel} + k_{\perp}, \tag{4.32}$$

donde k_{\parallel} y k_{\perp} son las componentes paralela y perpendicular de k respecto a n , respectivamente, de manera que se satisface entonces

$$\begin{aligned}
n \cdot k &= n \cdot k_{\parallel}, \\
n \cdot k_{\perp} &= 0, \\
k^2 &= k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $k \rightarrow k + \alpha P$ en la definición de σ , ec. (4.25), e implementando posteriormente la descomposición para k definida en la ec. (4.32), podemos reescribir

$$\begin{aligned}
\int_{dk_{\parallel}} \frac{[n \cdot k]^m}{\sigma^{\nu+2}} \left[M_q + \frac{n \cdot k}{n \cdot P} (M_{\bar{q}} - M_q) \right] &= \int_{dk_{\parallel}} \frac{[n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P]^m}{[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2]^{\nu+2}} \\
&\times \left[M_q + \frac{(n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P)}{n \cdot P} (M_{\bar{q}} - M_q) \right]. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

En la expresión anterior encontramos integrales del tipo (con $l = 0, 1$):

$$\int_{dk_{\parallel}} \frac{[n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P]^{m+l}}{[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2]^{\nu+2}} = \sum_{j=0}^{m+l} \binom{m+l}{j} (\alpha n \cdot P)^{m+l-j} \int_{dk_{\parallel}} \frac{[n \cdot k_{\parallel}]^j}{[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2]^{\nu+2}}, \tag{4.35}$$

donde hemos aplicado una expansión binomial, con $\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$. Debido a su carácter antisimétrico, las integrales con exponente $j = \text{impar}$ son trivialmente cero. Cuando el exponente es par y diferente de cero, las integrales son proporcionales a $(n \cdot n)^j$, pero dado que $n^2 = 0$, dichas integrales también son cero. Por ejemplo, para $j = 2$ tenemos

$$\int_{dk_{\parallel}} \frac{[n \cdot k_{\parallel}]^2}{[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2]^{\nu+2}} = n_{\mu} n_{\nu} \int_{dk_{\parallel}} \frac{k_{\parallel \mu} k_{\parallel \nu}}{[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2]^{\nu+2}} \sim n_{\mu} n_{\nu} g_{\mu\nu} = n^2 = 0. \tag{4.36}$$

Por lo tanto, en la expresión (4.35) únicamente el término con $j = 0$ contribuirá a la expansión. De esta manera, la ec. (4.34) se reduce a

$$\begin{aligned}
& \int_{dk_{\parallel}} \frac{[n \cdot k]^m}{[k^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2]^{\nu+2}} \left[M_q + \frac{n \cdot k}{n \cdot P} (M_{\bar{q}} - M_q) \right] \\
&= (\alpha n \cdot P)^m [M_q + \alpha(M_{\bar{q}} - M_q)] \int_{dk_{\parallel}} \frac{1}{[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2]^{\nu+2}} \\
&= (\alpha n \cdot P)^m \frac{[M_q + \alpha(M_{\bar{q}} - M_q)]}{(\nu + 1) [k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2\alpha}^2]^{\nu+1}}, \tag{4.37}
\end{aligned}$$

donde hemos integrado tomando en cuenta lo siguiente:

$$\int_{dk_{\parallel}} = \frac{1}{\pi} \int d^2 k_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} = \int_0^{\infty} dk_{\parallel}^2. \tag{4.38}$$

Sustituyendo la ec. (4.37) en la ec. (4.31), cambiando $\alpha \rightarrow x$ y normalizando obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle x^m \rangle_{\psi_M} &= \frac{\nu}{\pi F_N} \int_0^1 dx x^m \left[\int_{-1}^{1-2x} dw \int_{1+\frac{2x}{w-1}}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 dw \int_{\frac{w-1+2x}{w+1}}^1 d\beta \right] \\
&\times [M_q + \alpha(M_{\bar{q}} - M_q)] \frac{(1 - \beta)^{\nu-1} \Lambda_w^{2\nu} \rho_M(w)}{[k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2x}^2]^{\nu+1}}, \tag{4.39}
\end{aligned}$$

donde F_N es un factor de normalización. Comparando la expresión anterior con la ec. (4.27) es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\psi_M(x, k_{\perp}^2) &= \frac{\nu}{\pi F_N} \left[\int_{-1}^{1-2x} dw \int_{1+\frac{2x}{w-1}}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 dw \int_{\frac{w-1+2x}{w+1}}^1 d\beta \right] \\
&\times [M_q + x(M_{\bar{q}} - M_q)] \frac{(1 - \beta)^{\nu-1} \Lambda_w^{2\nu} \rho_M(w)}{[k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2x}^2]^{\nu+1}}, \tag{4.40}
\end{aligned}$$

donde hemos integrado tomando en cuenta

$$\int d^2 k_{\perp} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp} = \pi \int_0^{\infty} dk_{\perp}^2. \tag{4.41}$$

Podemos observar que el único término que depende del parámetro β en la LFWF, ec. (4.40), es $(1 - \beta)^{\nu-1}$ por lo que dicho término se puede integrar y evaluar de manera trivial para $\nu > 0$, obteniendo

$$\begin{aligned}
\psi_M(x, k_{\perp}^2) &= \frac{2^{\nu}}{\pi F_N} \left[x^{\nu} \int_{-1}^{1-2x} dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^{\nu})}{(1-w)^{\nu}} + (1-x)^{\nu} \int_{1-2x}^1 dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^{\nu})}{(1+w)^{\nu}} \right] \\
&\times \frac{[M_q + x(M_{\bar{q}} - M_q)]}{[k_{\perp}^2 + \Lambda_{1-2x}^2]^{\nu+1}}, \tag{4.42}
\end{aligned}$$

donde hemos definido

$$\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu) = \Lambda_w^{2\nu} \rho_M(w). \quad (4.43)$$

Resulta conveniente definir el cambio de variable $y = 1 - 2x$ en la ec. (4.42). De esta manera tenemos que la LFWF está dada como

$$\begin{aligned} \psi_M(y, k_\perp^2) &= \frac{1}{2\pi F_N} \left[(1-y)^\nu \int_{-1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1-w)^\nu} + (1+y)^\nu \int_y^1 dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1+w)^\nu} \right] \\ &\times \frac{[(1+y)M_q + (1-y)M_{\bar{q}}]}{[k_\perp^2 + \Lambda_y^2]^{\nu+1}}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde redefinimos $\psi_M(y, k_\perp^2) \equiv \psi_M(x \rightarrow (1-y)/2, k_\perp^2)$. Este nuevo cambio de variable permite extraer de manera más sencilla la densidad espectral *efectiva* $\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)$ a partir de la PDA, como veremos a detalle en la sección 4.4. En la próxima sección calculamos la PDA para nuestro modelo.

4.3. Amplitud de Distribución Partónica

Dentro del formalismo de cuantización en el cono de luz, las ecs. (2.40, 4.26) proporcionan una conexión inmediata entre la LFWF y la PDA de un mesón. De manera explícita, tenemos que

$$\phi_M(x) = \frac{1}{16\pi^3} \int d^2 k_\perp \psi_M(x, k_\perp^2), \quad (4.45)$$

donde debe cumplirse que (*c.f.* ec. (2.43))

$$\int_0^1 dx \phi_M(x) = 1. \quad (4.46)$$

Sustituyendo la ec. (4.40) en la ec. (4.45), vemos que al integrar la expresión resultante respecto a k_\perp se obtiene la siguiente PDA:

$$\begin{aligned} \phi_M(x) &= \frac{1}{F_N} \left[\int_{-1}^{1-2x} dw \int_{1+\frac{2x}{w-1}}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 dw \int_{\frac{w-1+2x}{w+1}}^1 d\beta \right] \\ &\times [M_q + x(M_{\bar{q}} - M_q)] \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_w^{2\nu} \rho_M(w)}{\Lambda_{1-2x}^{2\nu}}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Utilizando nuevamente el cambio de variable $y = 1 - 2x$, o (equivalentemente) introduciendo la ec. (4.42) en la ec. (4.45), la PDA se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \phi_M(y) &= \frac{1}{2\nu F_N} \left[(1-y)^\nu \int_{-1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1-w)^\nu} + (1+y)^\nu \int_y^1 dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1+w)^\nu} \right] \\ &\times \frac{[(1+y)M_q + (1-y)M_{\bar{q}}]}{\Lambda_y^{2\nu}}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde hemos redefinido $\phi(y) \equiv \phi(x \rightarrow (1-y)/2)$. De las ecs. (4.44,4.48) podemos ver que para nuestro modelo, la PDA está naturalmente relacionada a la LFWF a través de un factor multiplicativo, es decir

$$\psi_M(y, k_\perp^2) = \frac{\nu}{\pi} \frac{\Lambda_y^{2\nu}}{[k_\perp^2 + \Lambda_y^2]^{\nu+1}} \phi_M(y). \quad (4.49)$$

Finalmente, el factor de normalización F_N se puede calcular introduciendo la ec. (4.47) en la ec. (4.46), resultando en

$$F_N = \int_{-1}^1 dw \int_0^1 d\beta \int_{\frac{1}{2}(1-\beta)(1-w)}^{\frac{1}{2}[(1+w)\beta+(1-w)]} dx [M_q + x(M_{\bar{q}} - M_q)] \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_w^{2\nu} \rho_M(w)}{\Lambda_{1-2x}^{2\nu}}. \quad (4.50)$$

Podemos ver que para observar a detalle el comportamiento de nuestra PDA nos es necesario proponer una densidad espectral como lo hacen en la literatura actualmente [26, 28]. Por ello, para dejar de vislumbrar o adivinar nos propusimos deducir dicha densidad espectral de manera sistemática por primera vez de tal manera que ella sea capaz de describir la amplitud de distribución partónica del mesón deseado, siendo así este el objetivo principal de la presente tesis. En la siguiente sección vemos como obtener dicha densidad.

4.4. Densidad Espectral

En esta sección mostraremos cómo extraer la densidad espectral la PDA fenomenológica estudiada en las secciones anteriores. Para este fin, notemos que la ec. (4.48) se puede describir como

$$F_N \phi(y) = \varphi_\nu^-(y) + \varphi_\nu^+(y), \quad (4.51)$$

donde

$$\varphi_\nu^\pm(y) \equiv \pm \tau_\nu^\pm(y) \int_{\pm 1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1 \pm w)^\nu}, \quad (4.52)$$

con

$$2\nu \tau_\nu^\pm(y) \equiv \frac{[(1+y)M_q + (1-y)M_{\bar{q}}] (1 \pm y)^\nu}{[M_q^2 - \frac{1}{4}(1-y^2)m_M^2 + \frac{1}{2}(1-y)(M_{\bar{q}}^2 - M_q^2)]^\nu}. \quad (4.53)$$

Además, derivando la ec. (4.51) es obvio que

$$F_N \frac{d\phi}{dy} = \frac{d\varphi_\nu^-}{dy} + \frac{d\varphi_\nu^+}{dy}, \quad (4.54)$$

$$F_N \frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi_\nu^-}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_\nu^+}{dy^2}. \quad (4.55)$$

En este trabajo estamos interesados en mesones quarkonia o con simetría de isospín, en donde los dos quarks constituyentes son la antipartícula del otro. Para estos mesones se tiene entonces que $M_q = M_{\bar{q}} \equiv M$ y por tanto $\Lambda^2(y) = M^2 - \frac{1}{4}(1 - y^2)m_M^2$. Además, $\tau_\nu^\pm(y)$ se reduce a la siguiente expresión

$$\tau_\nu^\pm(y) = \frac{M}{\nu} \left[\frac{(1 \pm y)}{M^2 - \frac{1}{4}(1 - y^2)m_M^2} \right]^\nu. \quad (4.56)$$

Aplicando la primera y segunda derivada a $\tau_\nu^\pm(y)$ respecto a y , tenemos

$$\frac{d\tau_\nu^\pm(y)}{dy} = \pm\nu \frac{4M^2 - (1 \pm y)^2 m_M^2}{(1 \pm y) [4M^2 - (1 - y^2)m_M^2]} \tau_\nu^\pm(y) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tau_\nu^\pm(y)}{dy^2} &= \frac{\nu}{(1 \pm y)^2 [4M^2 - (1 - y^2)m_M^2]^2} \{16M^4(\nu - 1) \\ &\quad - 8m_M^2 M^2(1 \pm y) [\nu(1 \pm y) \pm 2y] + m_M^4(1 \pm y)^4(\nu + 1)\} \tau_\nu^\pm(y). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por otro lado, calculando la primera derivada de la ec. (4.52), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_\nu^\pm}{dy} &= \mp \frac{d\tau_\nu^\pm(y)}{dy} \int_{\pm 1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1 \pm w)^\nu} \mp \tau_\nu^\pm \frac{d}{dy} \int_{\pm 1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1 \pm w)^\nu} \\ &\quad \mp \frac{d\tau_\nu^\pm(y)}{dy} \int_{\pm 1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1 \pm w)^\nu} \mp \tau_\nu^\pm \frac{\tilde{\rho}(y; \Lambda_y^\nu)}{(1 \pm y)^\nu}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde hemos aplicado el teorema fundamental del cálculo, el cuál nos dice que

$$\frac{d}{dy} \int_a^y f(\xi) d\xi = f(y). \quad (4.60)$$

Entonces, sustituyendo las ecs. (4.52, 4.57) y $\tilde{\rho}(y, \Lambda_y^\nu) = \Lambda_y^{2\nu} \rho(y)$ en la ec. (4.59) tendremos

$$\frac{d\varphi_\nu^\pm}{dy} = \pm\nu \frac{[4M^2 - (1 \pm y)^2 m_M^2]}{(1 \pm y) [4M^2 - (1 - y^2)m_M^2]} \varphi_\nu^\pm \mp \frac{M}{\nu} \rho(y). \quad (4.61)$$

Podemos observar que el segundo término del lado derecho se cancela en la suma de $\frac{d\varphi_\nu^+}{dy}$ y $\frac{d\varphi_\nu^-}{dy}$ en la ec. (4.54), así como también en la ec. (4.55), por lo cuál se despreciará en lo sucesivo. De aquí podemos calcular la segunda derivada,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_\nu^\pm}{dy^2} &= \mp \frac{d^2\tau_\nu^\pm(y)}{dy^2} \int_{\pm 1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1 \pm w)^\nu} \mp \frac{d\tau_\nu^\pm}{dy} \frac{d}{dy} \int_{\pm 1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1 \pm w)^\nu} \\ &= \mp \frac{d^2\tau_\nu^\pm(y)}{dy^2} \int_{\pm 1}^y dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1 \pm w)^\nu} \mp \frac{d\tau_\nu^\pm}{dy} \frac{\tilde{\rho}(y; \Lambda_y^\nu)}{(1 \pm y)^\nu}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde nuevamente hemos utilizado la ec. (4.60). Sustituyendo las ecs. (4.57, 4.58) y $\tilde{\rho}(y, \Lambda_y^\nu)$ en la ecuación anterior, e inmediatamente sustituyendo también la ec. (4.52) tendríamos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_\nu^\pm}{dy^2} &= \{16M^4(\nu - 1) - 8m_M^2 M^2(1 \pm y) [\nu(1 \pm y) \pm 2y] + m_M^4(1 \pm y)^4(\nu + 1)\} \\ &\times \frac{\nu \varphi_\nu^\pm}{(1 \pm y)^2 [4M^2 - (1 - y^2) m_M^2]^2} - \frac{M [4M^2 - (1 \pm y)^2 m_M^2]}{(1 \pm y) [4M^2 - (1 - y^2) m_M^2]} \rho(y). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Tenemos así que las ecs.(4.51, 4.52, 4.61, 4.63-4.55,) forman un sistema de ecuaciones para $\phi(y)$, $\frac{d\phi(y)}{dy}$ y $\frac{d^2\phi(y)}{dy^2}$ en términos de φ_ν^- , φ_ν^+ y $\rho(y)$. De esta manera podremos revertir el sistema para encontrar $\rho(y)$ y así obtener $\tilde{\rho}(y, \Lambda_y^\nu)$. De la ec. (4.51), vemos fácilmente que

$$\varphi_\nu^-(y) = F_N \phi(y) - \varphi_\nu^+(y). \quad (4.64)$$

Entonces, para obtener una ecuación en términos de $\rho(y)$, $\phi(y)$ y sus derivadas, sustituyamos las ecs. (4.61, 4.64) en la ec. (4.54) y desarrollando se tiene que

$$F_N \frac{d\phi(y)}{dy} = \frac{2\nu}{(1 - y^2)} \varphi_\nu^+(y) - \frac{[4M^2 - (1 - y)^2 m_M^2]}{(1 - y) [4M^2 - (1 - y^2) m_M^2]} \nu F_N \phi(y), \quad (4.65)$$

de donde despejamos φ_ν^+ ,

$$\varphi_\nu^+ = \frac{(1 - y^2)}{2\nu} F_N \frac{d\phi(y)}{dy} + \frac{[4M^2 - (1 - y)^2 m_M^2]}{2 [4M^2 - (1 - y^2) m_M^2]} (1 + y) F_N \phi(y). \quad (4.66)$$

Por otra parte, sustituyendo las ecs. (4.63, 4.64) en la ec. (4.55) y desarrollando, se tiene

$$\begin{aligned} F_N \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} &= \{16M^4(\nu - 1) - 8m_M^2 M^2(1 - y) [\nu(1 - y) - 2y] + m_M^4(1 - y)^4(\nu + 1)\} \\ &\times \frac{\nu F_N \phi(y)}{16(1 - y)^2 \Lambda_y^4} - [4M^2(\nu - 1) + (1 - y^2) m_M^2(\nu + 1)] \frac{\nu y \varphi_\nu^+}{(1 - y^2)^2 \Lambda_y^2} \\ &- \frac{2M \rho(y)}{(1 - y^2)}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

y sustituyendo la ec. (4.66) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} F_N \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} &= \left\{ M^4(\nu - 1) - \frac{1}{2} m_M^2 M^2 [\nu + (\nu - 2)y^2] + \frac{1}{16} m_M^4 (1 - y^2)^2 (\nu + 1) \right\} \\ &\times \frac{\nu F_N \phi(y)}{(1 - y^2) \Lambda_y^4} - \left\{ \frac{y [4M^2(\nu - 1) + (1 - y^2) m_M^2 (\nu + 1)]}{2(1 - y^2) \Lambda_y^2} \right\} F_N \frac{d\phi(y)}{dy} \\ &- \frac{2M \rho(y)}{(1 - y^2)}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

de donde finalmente podemos despejar

$$\begin{aligned} \rho(y) = & -\frac{F_N}{2M} \left\{ (1-y^2) \frac{d^2\phi(y)}{dy^2} + \frac{2y}{\Lambda_y^2} \left[M^2(\nu-1) + \frac{1}{4}(1-y^2)m_M^2 \right] \frac{d\phi(y)}{dy} \right. \\ & - \frac{\nu}{\Lambda_y^4} \left[M^4(\nu-1) - \frac{1}{2}m_M^2 M^2 (\nu + (\nu-2)y^2) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{16}m_M^4(1-y^2)^2(\nu+1) \right] \phi(y) \right\}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Hay que recordar que $\tilde{\rho}(y; \Lambda_y^\nu) = \Lambda_y^{2\nu} \rho(y)$ y $\Lambda_y^2 = M^2 - \frac{1}{4}(1-y^2)m_M^2$. Este resultado es de gran importancia ya que en la actualidad suele proponerse una densidad espectral para lograr describir las LFWF como también las PDAs. Sin embargo, aunque esto ha sido de utilidad, no es un método exacto. Por esta razón, nos propusimos encontrar esta densidad espectral que lograra reproducir de manera sistemática las PDAs sin necesidad de vislumbrar su forma funcional, en consecuencia hemos obtenido por primera vez una llave teórica para describir mesones pseudoescalares que no han sido estudiados hasta ciertos límites. A partir de ello, podremos desarrollar las GPDs, PDFs y FF, lo cuál nos permitirá tener una mayor información de los mesones a estudiar. Veremos esto a detalle en la próxima sección.

4.4.1. Ejemplo: Pión no masivo ($m_\pi=0$)

En esta subsección aplicaremos la ecuación diferencial de $\rho(y)$ derivada en la subsección anterior, ec. (4.69), para extraer la densidad espectral correspondiente a un pión no masivo, $m_\pi = 0$, previamente estudiado en [26]. En el estudio citado, se comienza proponiendo una densidad espectral que ajusta la amplitud dominante de BS, y a partir de esta densidad se calcula la correspondiente PDA. En nuestro estudio, tomamos como input inicial dicha PDA y a partir de ella calculamos la correspondiente $\rho(y)$ para posteriormente comparar con el estudio citado. En [26], la PDA tiene la forma (no normalizada)

$$\phi_\pi(x) = x^\nu(1-x)^\nu, \quad (4.70)$$

donde haciendo el cambio de variable $y = 1 - 2x$ tenemos

$$\phi_\pi(y) = \frac{1}{4^\nu}(1-y^2)^\nu. \quad (4.71)$$

La PDA debe cumplir la ec. de normalización (4.46), por lo que el factor de normalización será

$$F_N = \int_0^1 dx \phi_\pi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dy \phi_\pi(y) = \frac{1}{2^{2\nu+1}} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^\nu, \quad (4.72)$$

pero haciendo el cambio de variable $y^2 = t$ vemos que

$$F_N = \frac{1}{2^{2\nu+1}} \int_0^1 dt t^{-1/2} (1-t)^\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}, \quad (4.73)$$

donde hemos tomado en cuenta la ec. (4.98) y contemplado que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. De esta manera, la PDA normalizada es

$$\phi(y) = \frac{2^{2\nu+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\nu+1)} (1-y^2)^\nu, \quad (4.74)$$

de donde es evidente que la primera y segunda derivada de $\phi(y)$ respecto a y serán

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = -\frac{2^{2\nu+2}\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\nu+1)} y(1-y^2)^{\nu-1}, \quad (4.75)$$

$$\frac{d^2\phi(y)}{dy^2} = \frac{2^{2\nu+2}\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\nu+1)} (1-y^2)^{\nu-2} [(2\nu-1)y^2 - 1]. \quad (4.76)$$

Dado que para este caso tenemos que $m_\pi^2 = 0$, entonces $\Lambda_y^2 = M_{q(\bar{a})}^2 \equiv M^2$, por lo que la ec. (4.69) nos quedaría como

$$\rho(y) = -\frac{1}{2M} \left\{ (1-y^2) \frac{d^2\phi(y)}{dy^2} + 2(\nu-1)y \frac{d\phi(y)}{dy} - \nu(\nu-1)\phi(y) \right\}. \quad (4.77)$$

Sustituyendo las ecs. (4.74-4.76) en la ecuación anterior, la densidad espectral sería

$$\rho(y) = -\frac{2^{2\nu-2}}{\sqrt{\pi}M} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\nu+1)} \left\{ 2\nu [(2\nu-1)y^2 - 1] (1-y^2)^{\nu-1} - 4\nu(\nu-1)y^2 \right. \\ \left. \times (1-y^2)^{\nu-1} - \nu(\nu-1)(1-y^2)^\nu \right\}. \quad (4.78)$$

Así

$$\rho(y) = \frac{2^{2\nu-2}}{\sqrt{\pi}M} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\nu+1)} \nu(\nu+1)(1-y^2)^\nu. \quad (4.79)$$

Sin embargo, la densidad espectral también debe cumplir que

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho(y) dy = 1. \quad (4.80)$$

Entonces,

$$\rho(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma^2(\nu+1)} (1-y^2)^\nu, \quad (4.81)$$

donde el factor de normalización para la densidad espectral es

$$f_N = \frac{2^{2\nu-3}\nu(\nu+1)}{\sqrt{\pi}M} \frac{\Gamma(\nu+3/2)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)}. \quad (4.82)$$

Podemos ver que la expresión (4.81) cumple con la forma funcional de la densidad espectral propuesta en [26]. Adicionalmente, para $\nu = 1$ podemos observar que se obtiene $\phi(x) = 6x(1-x)$ la cuál corresponde al llamado límite asintótico.

Ahora, contando con la densidad espectral a partir de una PDA adecuada, observamos que podemos obtener la LFWF como vimos anteriormente, con ella nos será posible estudiar más ampliamente el mesón al calcular las Funciones Partónicas Generalizadas.

4.5. Funciones de Distribución Partónicas

Una expresión para la GPD de un mesón se obtiene a partir de la superposición de la LFWF como se muestra a continuación:

$$H_M(x, \xi, t) = \int \frac{d^2 k_\perp}{16\pi^3} \psi_M^* \left(\frac{x-\xi}{1-\xi}, k_\perp + \frac{(1-x)\Delta_\perp}{(1-\xi)2} \right) \psi_M \left(\frac{x+\xi}{1+\xi}, k_\perp - \frac{(1-x)\Delta_\perp}{(1+\xi)2} \right), \quad (4.83)$$

donde ξ nos dice que tan colineal choca el fotón con el quark, $t = \frac{\Delta_\perp^2}{1+\xi^2}$ y se tiene que cumplir que

$$\frac{1}{N_H} \int_0^1 dx H_M(x, 0, 0) = 1, \quad (4.84)$$

donde N_H es el factor de normalización. Además, por simplicidad trabajaremos con la variable $y = 1 - 2x$, en términos de la cual, la GPD se reescribe como

$$H_M(y, \xi, t) = \int \frac{d^2 k_\perp}{16\pi^3} \psi_M^* \left(\frac{y+\xi}{1-\xi}, k_\perp + \frac{(1+y)\Delta_\perp}{(1-\xi)4} \right) \psi_M \left(\frac{y-\xi}{1+\xi}, k_\perp - \frac{(1+y)\Delta_\perp}{(1+\xi)4} \right). \quad (4.85)$$

Recordando las ec. (4.44) y (4.41) tenemos que la expresión anterior se reduce a

$$H_M(y, \xi, t) = \frac{g(y, \xi)}{16\pi^2} \int_0^\infty dk_\perp^2 \frac{1}{\left[k_\perp^2 + 2c_1 k_\perp \cdot \Delta_\perp + c_1^2 \Delta_\perp^2 + \Lambda^2 \left(\frac{y+\xi}{1-\xi} \right) \right]^{\nu+1}} \times \frac{1}{\left[k_\perp^2 + 2c_2 k_\perp \cdot \Delta_\perp + c_2^2 \Delta_\perp^2 + \Lambda^2 \left(\frac{y-\xi}{1+\xi} \right) \right]^{\nu+1}}, \quad (4.86)$$

donde $c_1 = \frac{1}{4} \frac{1+y}{1+\xi}$, $c_2 = -\frac{1}{4} \frac{1+y}{1+\xi}$ y

$$\begin{aligned}
g(y, \xi) &= \frac{1}{4\pi^2 F_N^2} \left[\frac{(1+y)M_q + (1-y-2\xi)M_{\bar{q}}}{(1-\xi)^{\nu+1}} \right] \left[\frac{(1+y)M_q + (1-y+2\xi)M_{\bar{q}}}{(1+\xi)^{\nu+1}} \right] \\
&\times \left[(1-y-2\xi)^\nu \int_{-1}^{\frac{y+\xi}{1-\xi}} dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1-w)^\nu} + (1+y)^\nu \int_{\frac{y+\xi}{1-\xi}}^1 dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1+w)^\nu} \right] \\
&\times \left[(1-y+2\xi)^\nu \int_{-1}^{\frac{y-\xi}{1+\xi}} dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1-w)^\nu} + (1+y)^\nu \int_{\frac{y-\xi}{1+\xi}}^1 dw \frac{\tilde{\rho}(w; \Lambda_w^\nu)}{(1+w)^\nu} \right].
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Además, observando la ec. (4.48) es fácil ver que

$$g(y, \xi) = \frac{\nu^2}{\pi^2} \Lambda^{2\nu} \left(\frac{y+\xi}{1-\xi} \right) \phi \left(\frac{y+\xi}{1-\xi} \right) \Lambda^{2\nu} \left(\frac{y-\xi}{1+\xi} \right) \phi \left(\frac{y-\xi}{1+\xi} \right). \tag{4.88}$$

Por otra parte, sin pérdida de generalidad nombraremos $\Lambda \left(\frac{y+\xi}{1-\xi} \right) = \Lambda_1$ y $\Lambda \left(\frac{y-\xi}{1+\xi} \right) = \Lambda_2$.

Ahora, la integral de la ec. (4.86) se puede resolver utilizando parametrización de Feynman (Apéndice A), por lo que el integrando lo podemos representar de la siguiente manera:

$$\frac{1}{A^{\nu+1} B^{\nu+1}} = \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 du \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[uA + (1-u)B]^{2\nu+2}}, \tag{4.89}$$

donde

$$\begin{aligned}
&uA + (1-u)B \\
&= [k_\perp^2 + 2c_1 k_\perp \cdot \Delta_\perp + c_1^2 \Delta_\perp^2 + \Lambda_1^2] u + [k_\perp^2 + 2c_2 k_\perp \cdot \Delta_\perp + c_2^2 \Delta_\perp^2 + \Lambda_2^2] (1-u) \\
&= k_\perp^2 + \Delta_\perp^2 [uc_1^2 + (1-u)c_2^2] + 2k_\perp \cdot \Delta_\perp [uc_1 + (1-u)c_2] + u\Lambda_1^2 + (1-u)\Lambda_2^2 \\
&= \{k_\perp + \Delta_\perp [uc_1 + (1-u)c_2]\}^2 + \Delta_\perp^2 (c_1 - c_2)^2 u(1-u) + \Lambda_2^2 + u(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2) \\
&= \{k_\perp + \Delta_\perp [uc_1 + (1-u)c_2]\}^2 + \frac{t(1+y)^2}{4(1-\xi^2)} u(1-u) + u(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2) + \Lambda_2^2.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Renombrando $s_1 = \Delta_\perp [uc_1 + (1-u)c_2]$, $s_2 = \frac{t(1+y)^2}{4(1-\xi^2)} u(1-u) + u(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2) + \Lambda_2^2$ tenemos que la ec. (4.86) se puede reescribir como:

$$H_M(y, \xi, t) = \frac{g(y, \xi)}{16\pi^2} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^\infty dk_\perp^2 \int_0^1 du \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[(k_\perp + s_1)^2 + s_2]^{2\nu+2}}. \tag{4.91}$$

Haciendo $k_\perp \rightarrow k_\perp - s_1$ la integral sobre k_\perp se puede resolver fácilmente como sigue

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dk_\perp^2 \frac{1}{[k_\perp^2 + s_2]^{2\nu+2}} &= -\frac{1}{(2\nu+1)} \frac{1}{[k_\perp^2 + s_2]^{2\nu+1}} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{(2\nu+1)} \frac{1}{s_2^{2\nu+1}},
\end{aligned} \tag{4.92}$$

de esta manera, la ec. (4.91) tendría la siguiente forma:

$$H_M(y, \xi, t) = \frac{g(y, \xi)}{16\pi^2} \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{\Gamma^2(\nu + 1)} \int_0^1 du \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[au^2 + bu + c]^{2\nu+1}}, \quad (4.93)$$

donde hemos hecho

$$a = -\frac{t(1+y)^2}{4(1-\xi^2)}, \quad b = \frac{t(1+y)^2}{4(1-\xi^2)} + \Lambda_1^2 - \Lambda_2^2, \quad c = \Lambda_2^2. \quad (4.94)$$

El resultado de esta integral se puede encontrar en [27] (ec. 3.198), donde, por ejemplo, para $\nu = 1$ se tiene la siguiente GPD normalizada:

$$H_M(y, \xi, t) = \frac{g(y, \xi)}{32\pi^2 N_H} \left\{ \frac{b^2(a+b) + 2c(2a+b)^2 + 4ac^2}{c(a+b+c)(4ac-b^2)^2} + \frac{4(3ab+2ac+b^2)}{(4ac-b^2)^{5/2}} \right. \\ \left. \times \arctan \left[-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{(2c+b)} \right] \right\}. \quad (4.95)$$

De la ec. (4.84) es claro que para obtener N_H sólo es necesario hacer $\xi = t = 0$ en las ecs. (4.93) y (4.88), (recordando la definición $\Lambda(y) \equiv \Lambda_y$) obteniendo

$$H_M(y, 0, 0) = \frac{\nu^2}{16\pi^4 N_H} \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{\Gamma^2(\nu + 1)} \frac{\phi^2(y)}{\Lambda_y^2} \int_0^1 du u^\nu (1-u)^\nu, \quad (4.96)$$

donde haciendo nuevamente el cambio de variable $y = 1 - 2x$, tenemos que el factor de normalización es

$$N_H = \frac{\nu^2}{32\pi^4} \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{\Gamma^2(\nu + 1)} \int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)}{\Lambda_y^2} \int_0^1 du u^\nu (1-u)^\nu \\ = \frac{\nu^2}{32\pi^4} \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{\Gamma(2\nu + 2)} \int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)}{\Lambda_y^2}, \quad (4.97)$$

en donde la integral en u se ha resuelto utilizando la definición de la función beta que esta dada por

$$B(x, y) = \int_0^1 du u^{x-1} (1-u)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (4.98)$$

Una vez obtenida la GPD, podemos introducir la definición de las Funciones de Distribución Partónicas en términos de estas, las cuáles están dadas de la siguiente manera:

$$q_M(y) = H_M(y, 0, 0), \quad (4.99)$$

es decir que la ec. (4.96) es la PDF del mesón M.

4.6. Factores de Forma

Así mismo podemos encontrar los Factores de Forma en base a las GPDs, los cuáles están dados como:

$$F_M(t) = \int_0^1 dx H(x, 0, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dy H(y, 0, t), \quad (4.100)$$

donde observando las ecs. (4.88, 4.93) vemos que

$$H_M(y, 0, t) = \frac{\nu^2}{16\pi^4 N_H} \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{\Gamma^2(\nu + 1)} \Lambda_y^{4\nu} \phi^2(y) \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[au^2 + bu + c]^{2\nu+1}}, \quad (4.101)$$

con $a = -\frac{t}{4}(1 + y^2)$, $b = \frac{t}{4}(1 + y^2)^2$ y $c = \Lambda_y^2$, así el FF del mesón M estará dado como:

$$F_M(t) = \frac{\nu^2}{32\pi^4 N_H} \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{\Gamma^2(\nu + 1)} \int_{-1}^1 dy \Lambda_y^{4\nu} \phi^2(y) \int_0^1 du \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[au^2 + bu + c]^{2\nu+1}}. \quad (4.102)$$

Estas ecuaciones son esenciales para tener una mejor descripción del mesón en cuestión. Una forma de verificar nuestros resultados es obteniendo el radio de carga de este.

4.6.1. Radio de Carga

En esta subsección calcularemos el radio de carga de un mesón en función de la PDA mediante las funciones de distribución. Del capítulo 2 sabemos que el factor de forma de una partícula está relacionado con el radio de carga de la siguiente manera:

$$F : M(t \rightarrow 0) \simeq 1 - \frac{1}{6} r_M^2 t + \mathcal{O}(t^2), \quad (4.103)$$

por lo que tomando la ec. (4.102) y realizando una expansión de Taylor al rededor de $t \rightarrow 0$ podremos comparar con la expresión anterior ec. (4.103) para así encontrar el radio de carga. Es decir que

$$F_M(t \rightarrow 0) \simeq F_M(t = 0) + F'_M(t = 0)t + \mathcal{O}(t^2). \quad (4.104)$$

Entonces, de las ecs. (4.84, 4.100) tenemos que

$$F_M(0) = \frac{1}{2N_H} \int_{-1}^1 dy H_M(y, 0, 0) = 1, \quad (4.105)$$

lo cual es consistente con la ec. (4.103) evaluada en $t = 0$. Luego, aplicando la derivada a la ec. (4.102) se obtiene

$$F'_M(t = 0) = \frac{\nu^2}{32\pi^4 N_H} \frac{\Gamma(2\nu + 1)}{\Gamma^2(\nu + 1)} \int_{-1}^1 dy \Lambda_y^{4\nu} \phi^2(y) \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 du \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[au^2 + bu + c]^{2\nu+1}} \right\} \Big|_{t=0} \quad (4.106)$$

donde

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 du \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[au^2 + bu + c]^{2\nu+1}} \right\} \Big|_{t=0} = \int_0^1 du u^\nu (1-u)^\nu \left[-\frac{(2\nu+1)}{4\Lambda_y^{4\nu+4}} (1+y^2) u(1-u) \right], \quad (4.107)$$

con a , b y c definidos en la ec. (4.94) para $\xi = 0$, por lo que

$$F'_M(t=0) = -\frac{\nu^2(2\nu+1)}{128\pi^4 N_H} \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)}{\Lambda_y^4} (1+y)^2 \int_0^1 du [u(1-u)]^{\nu+1}. \quad (4.108)$$

Utilizando la ec. (4.98) para integrar la expresión anterior respecto a u , tenemos

$$F'_M(t=0) = -\frac{\nu^2(2\nu+1)}{128\pi^4 N_H} \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma^2(\nu+1)} \frac{\Gamma^2(\nu+2)}{\Gamma(2\nu+4)} \int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)(1+y)^2}{\Lambda^4(y)}, \quad (4.109)$$

y sustituyendo el factor de normalización N_H dado en la ec. (4.97), se tiene

$$F'_M(t=0) = -\frac{(2\nu+1)}{8} \frac{(\nu+1)}{(2\nu+3)} \frac{\int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)(1+y)^2}{\Lambda_y^4}}{\int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)}{\Lambda_y^2}}. \quad (4.110)$$

De esta manera la ec. (4.104) tendrá la forma

$$F_M(t \rightarrow 0) \simeq 1 - \frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{8(2\nu+3)} \left\{ \frac{\int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)(1+y)^2}{\Lambda_y^4}}{\int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)}{\Lambda_y^2}} \right\} t + \mathcal{O}(t^2), \quad (4.111)$$

por lo que comparando con la ec. (4.103) vemos fácilmente que

$$r_M^2 = \frac{3}{4} \frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{(2\nu+3)} \left\{ \frac{\int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)(1+y)^2}{\Lambda_y^4}}{\int_{-1}^1 dy \frac{\phi^2(y)}{\Lambda_y^2}} \right\}. \quad (4.112)$$

Dado que Λ_y^2 depende de la masa del meson y de sus quarks constituyentes, ec. (4.5), en la ecuación anterior es entonces evidente que el radio de carga depende de manera explícita de los parametros ν , m_M y $M_{q(\bar{q})}$. Esto quiere decir que para un radio de carga dado (que puede ser fijado a partir de datos experimentales o estudios previos), el valor de la masas $M_{q(\bar{q})}$ va a depender del valor del parámetro ν que se esté utilizando en el modelo, y por supuesto dependerá también de los parámetros característicos del mesón como su masa m_M y su correspondiente PDA, $\phi(y)$.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados que se obtuvieron en el estudio de las funciones de estructura de los mesones η_c y η_b utilizando nuestro modelo algebraico.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo estudiaremos la estructura interna de los mesones pseudoescalares η_c y η_b dentro de nuestro modelo algebraico. Como hemos visto a lo largo de esta tesis, la PDA de un mesón nos da la información de la distribución de momentos de sus quarks constituyentes y es a partir de ésta que se extrae la densidad espectral $\rho(w)$ del mesón en cuestión y se estudian sus funciones de distribución. Para ello, utilizaremos como *input* las correspondientes PDAs descritas en [29], en donde se estudian los mesones de nuestro interés dentro del marco de las SDEs utilizando la aproximación *rainbow-ladder* (RL) y una interacción más sofisticada referida como *kernel DB* (*Chiral Symmetry Breaking Improved Kernel*). En dicho estudio, se propone una parametrización para la PDA de la forma

$$\phi_M(y) = \frac{1}{F_N} (1 - y^2) e^{-a^2 y^2}, \quad (5.1)$$

donde a es constante propia de cada mesón y F_N es una constante de normalización definida como

$$F_N = \frac{1}{4a^3} \left[(2a^2 - 1) \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(a) + 2ae^{-a^2} \right], \quad (5.2)$$

que a su vez

$$\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt. \quad (5.3)$$

En la tabla 5.1 se muestran los valores de a y los valores de las masas concernientes a los mesones η_c , η_b y sus quarks constituyentes reportados en [29] correspondientes a la aproximación RL. Las masas de los quarks presentadas en la tabla 5.1 corresponden al valor de la función de masa en el infrarrojo, i.e. $M_q = \mathcal{M}_q(p^2 \rightarrow 0)$. Además, las masas m_M de cada mesón corresponden al valor experimental [30].

Partiendo de la parametrización para la PDA, ec. (5.1), se obtiene la densidad

	m_M [GeV]	M_q [GeV]	a
η_c	2.98	1.63	1.7
η_b	9.39	4.52	2.6

Cuadro 5.1: Parámetros relevantes para η_c y η_b tomados de [29].

espectral mediante la ec. (4.69) como

$$\begin{aligned} \rho(y) = & -\frac{2}{M_q F_N} \left\{ [2 + a^2(1 - y^2)] a^2 y - \frac{1}{\Lambda_y^2} \left[M_q^2(\nu - 1) + \frac{1}{4}(1 - y^2)m_M^2 \right] \right. \\ & \times \left[\frac{1}{(1 - y^2)} + a^2 \right] - \frac{\nu}{\Lambda_y^4} \left[M_q^4(\nu - 1) - \frac{1}{2}m_M^2 M_q^2 (\nu + (\nu - 2)y^2) \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_M^4}{16}(1 - y^2)^2(\nu - 1) \right] \right\} (1 - y^2) e^{-a^2 y^2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para mesones quarkonia tales como η_c y η_b se tiene que $M_{\bar{q}} = M_q$, por lo que

$$\Lambda_y^2 = M_q^2 - \frac{1}{4}(1 - y^2)m_M. \quad (5.5)$$

Además, de las ecs. (4.49) y (5.1) vemos que la LFWF está dada de la siguiente manera:

$$\psi_M(y, k_{\perp}^2) = \frac{\nu}{\pi F_N} \frac{\Lambda_y^{2\nu}}{[k_{\perp}^2 + \Lambda_y^2]^{\nu+1}} (1 - y^2) e^{-a^2 y^2}. \quad (5.6)$$

En la siguiente sección mostramos los resultados obtenidos para el mesón η_c .

5.1. El Mesón η_c

Partiremos con el mesón η_c , para el cuál escogimos los parámetro fijos m_{η_c} y a que se muestran en la tabla 5.1 con un radio de carga $r_{\eta_c}^2 = 0.25$ fm, de acuerdo con [33].

Comenzamos el análisis partiendo de la ec. (4.112) la cuál es claro que depende tanto de ν como de M_c , esto se muestra en la figura 5.1 donde observamos que para cada radio de carga le corresponderá un cierto valor de M_c para cada ν específico, a su vez en la gráfica 5.2 podemos observar el comportamiento de ν dependiendo de M_c . De esta manera se observa como para obtener el radio de carga que fijamos, existe un cierto valor de M_c para cada valor de ν . Además, en la gráfica 5.2 se muestran los valores de ν para la masa M_c correspondiente. Sin embargo, consideramos sólo los valores de $\nu > 0$ como se mencionó en el capítulo anterior ya que de lo contrario obtendríamos indeterminaciones en nuestros resultados. Asimismo notamos que conforme aumenta ν aumenta a su vez la masa del quark constituyente, por lo que los parámetros a escoger deberán tomar en cuenta estos cambios. En base a esto y a la consideración que los valores de las masas

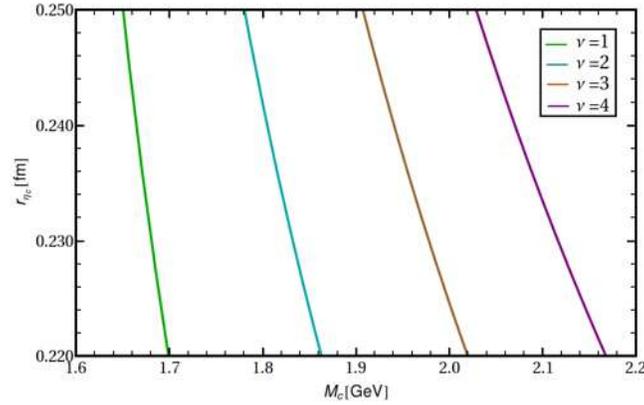


Figura 5.1: Radio de carga para el mesón η_c en función de la masa de sus quarks constituyentes $c(\bar{c})$ para $\nu = 1, 2, 3, 4$, líneas verde, azul cielo, café y púrpura, respectivamente.

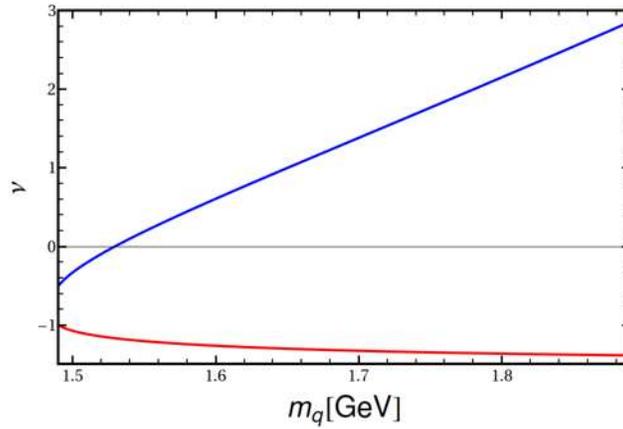


Figura 5.2: Dependencia de la masa de los quarks constituyente $c(\bar{c})$ sobre ν .

deban cumplir con la desigualdad de la ec. (4.7) para un estado ligado, escogimos tres valores de ν que podríamos proyectarnos resultados realistas. Estos son $\nu = 0.75$, $\nu = 1.75$ y $\nu = 2$ con los cuáles se obtuvieron masas efectivas para los quarks constituyentes de $M_c = 1.618$ GeV, $M_c = 1.748$ GeV y $M_c = 1.780$ GeV, respectivamente.

Como se muestra en la tabla 5.1, de acuerdo a [29] se encuentra una masa $M_c = 1.63$ GeV para la aproximación RL. En esta aproximación, para el propagador del quark, ec. (3.11), se considera el vértice quark-gluón desnudo y el propagador del gluón completo; mientras que para la ec. de BS, ec. (3.36), se considera el kernel de interacción, nuevamente como el propagador completo del gluón. De esta forma, determinamos que en comparación con las masas obtenidas en estos estudios más refinados donde se utilizan las DSEs, hay una diferencia del 0.73 %, 7.23 % y 9.22 % para las masas del quark c correspondientes a $\nu = 0.75$, $\nu = 1.75$ y $\nu = 2$, respectivamente. Es decir, que

encontramos diferencias menores al 10 % entre las masas de los quarks constituyente de nuestro modelo y el truncamiento de RL.

Por otra parte, de acuerdo a las ecs. (5.1 y 5.6) podemos ver fácilmente que en base a los parámetros considerados se debe tener una PDA fija a diferencia de la densidad espectral y la LFWF las cuáles cambiarían dependiendo de cada ν . Para visualizar esto de mejor manera, en la siguiente sección mostraremos los resultados de la densidad espectral.

5.1.1. Densidad Espectral $\rho(w)$

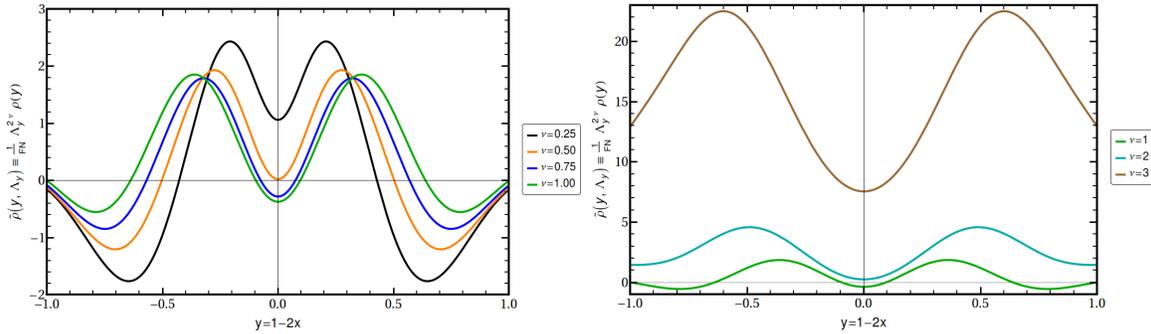


Figura 5.3: Densidades espectrales para diferentes ν .

El análisis de la densidad espectral para el mesón η_c en base a la ec. (5.4) con los valores de $\nu = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 3$, se muestra en las gráficas de la fig. 5.3 donde del lado izquierdo se encuentran los ejemplos de ν 's menores a 1 y del lado derecho los ejemplos de ν 's mayores e iguales a 1. Notamos para éstas un comportamiento sinusoidal variando en sus mínimos y máximos respecto las diferentes ν 's donde podemos ver fácilmente que $\rho(y)$ se dispara hacia arriba conforme ν aumenta lo cuál es debido a la masa de los quarks constituyentes que también aumenta considerablemente. Por esta razón, $\nu = 2$ es el valor máximo que hemos escogido para la proposición de nuestro modelo algebraico.

Como hemos visto a lo largo de esta tesis, la densidad espectral es la función que nos da acceso a toda la información interna de un mesón, por lo que este resultado es de suma importancia para la obtención del resto de nuestros resultados. A continuación veremos los resultados para la PDA basada en la $\rho(y)$ obtenida con las ν 's propuestas.

5.1.2. Amplitud de Distribución Partónica

Para la obtención de nuestra PDA tomamos la densidad espectral $\rho(w)$, ec. (5.4) y la empleamos en la ec. (4.48), siendo esta la PDA para el modelo Λ_w como se muestra en la fig. 5.4, como esperabamos podemos observar que nuestro modelo reproduce exactamente la PDA fenomenológica del mesón η_c [29] y a su vez se obtiene una PDA fija para cualquier valor de ν .

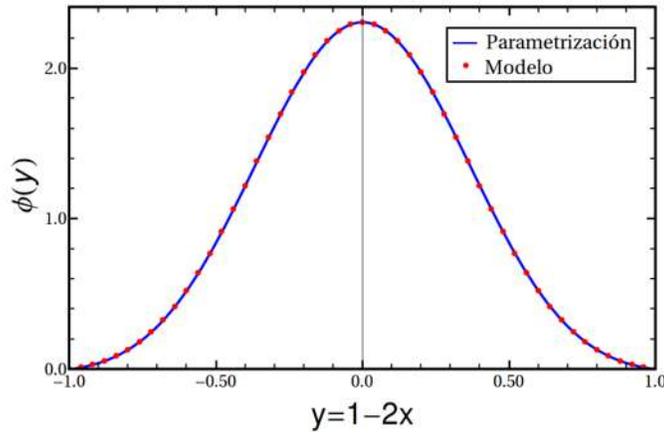


Figura 5.4: PDA para el mesón η_c .

Por otra parte, analizando esta PDA vemos que tiene forma de una delta de Dirac semi-angosta como resulta ser para los mesones pesados, esto es debido a que los quarks constituyentes c y \bar{c} tienen la misma probabilidad de estar confinados en el mesón η_c siendo así esta probabilidad de $1/2$ para cada quark de valencia. De lo contrario, la PDA presentaría “deformidades” en su forma funcional. Además debido a que estos son quarks pesados, los efectos relativistas son pequeños y la mayor cantidad de energía del mesón es debida a sus masas.

Ahora, proseguimos con los resultados obtenidos para la LFWF del mesón η_c .

5.1.3. Función de Onda en el Frente de Luz

Mediante la densidad espectral obtenida anteriormente también se logró calcular la función de onda en el frente de luz para el mesón η_c como hemos visto anteriormente de acuerdo a la ec. (4.44), esta puede apreciarse en la fig. 5.5, donde hemos escogido la LFWF para $\nu = 2$ para observar su comportamiento; sin embargo, la forma funcional de las LFWF es la misma para diferentes ν 's pero estas se verán reescaladas.

Se puede observar que la amplitud de la función de onda disminuye ligeramente conforme aumenta el momento k_{\perp}^2 , además, para un k_{\perp}^2 fijo la LFWF es ligeramente angosta y cóncava al igual que la PDA.

Una vez contamos con las LFWFs se obtuvieron las funciones partónicas generalizadas, a continuación mostramos estos resultados.

5.1.4. Funciones de Distribución

Las GPDs se obtuvieron en base a las LFWF o a su vez de las PDAs como se muestra en las ecs. (4.83, 4.88, 4.93), de esta forma en la fig. 5.6 observamos la GPD para $\xi = 0$ y diferentes valores de t , donde nuevamente hemos considerado $\nu = 2$ sin pérdida de generalidad ya que se aprecia el mismo reescalamiento que en las LFWFs.

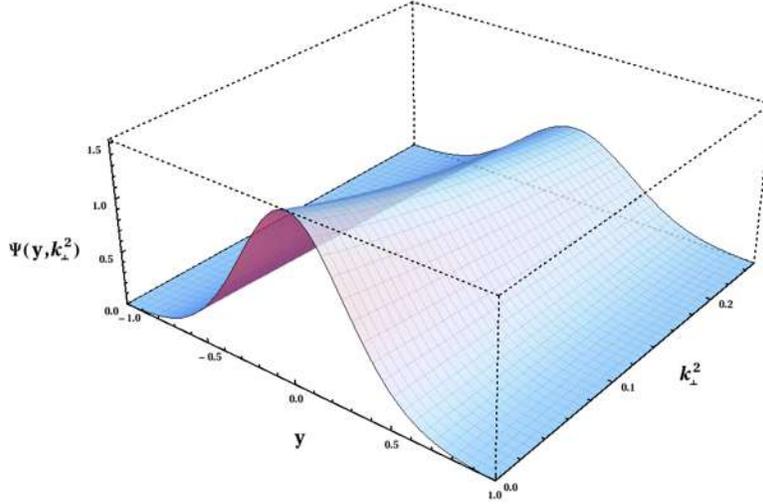


Figura 5.5: LFWF para el mesón η_c .

Podemos notar como disminuye la amplitud de onda conforme aumenta t a la vez que esta se desliza ligeramente hacia la derecha del eje y .

Vemos nuevamente que la GPD, a diferencia de la PDA si varía ligeramente dependiendo de ν ya que la GPD si depende directamente de la masa de los quarks constituyentes como se observa en las ecs. (4.88, 4.93, 5.5)

Conjuntamente, en conformidad con la ec. (4.99) se tiene que la GPD para $t = 0$ en la gráfica 5.6 es también la función de distribución partónica, observamos que la PDF también tiene forma de delta de Dirac con cierta anchura y que el máximo de esta depende nuevamente de la variable ν como de la masa de los quarks constituyentes. Por otra parte, cabe mencionar que aunque la PDF y la PDA dan información de la distribución de momentos de los quarks constituyentes dentro del mesón, la PDF también considera los quarks y gluones del mar a diferencia de la PDA que se enfoca en los quarks de valencia vestidos.

Por último mostramos a continuación el análisis de los factores de forma y las comparaciones con datos encontrados en la literatura.

5.1.5. Factores de Forma

Una vez contamos con las GPDs logramos la obtención de los FF elásticos mediante la ec. (4.102). Así, en la fig. 5.7 mostramos los FF multiplicados por la energía del fotón interactuante ($Q^2 F(Q^2)$) para las diferentes ν 's que escogimos, consideramos los FF de esta manera ya que es esta cantidad la que se estudia en los experimentos en la actualidad. Conjuntamente, observamos que la forma funcional es la esperada para los mesones pseudo-escalares.

Por otra parte, en la literatura encontramos resultados para los FF [31, 33] basa-

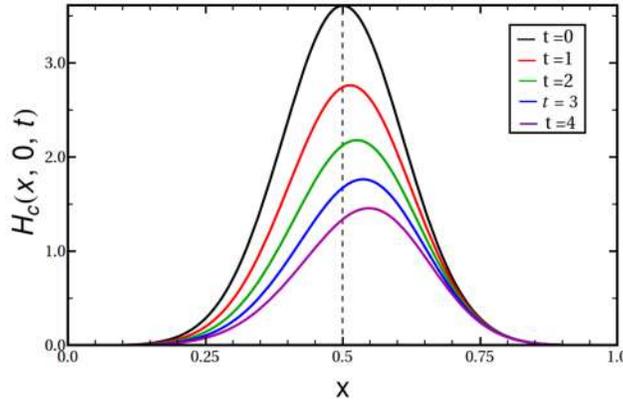


Figura 5.6: GPDs con $\xi = 0$ para diferentes ν . En la parte superior izquierda se presenta la GPD para $\nu = 0.75$. En la parte superior derecha encontramos la GPD para $\nu = 1.75$. Por último en la parte inferior se muestra la GPD para $\nu = 2$.

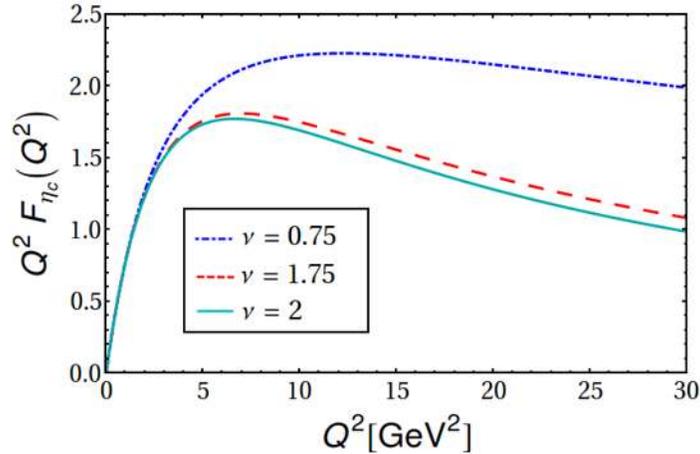


Figura 5.7: FF de η_c para diferentes ν .

dos en modelos eficientes ya conocidos, como por ejemplo: lattice-QCD de [32], otro modelo algebraico (AM) e interacción de contacto de [31]. De esta manera en la fig. 5.8 mostramos nuestros resultados en comparación con los anteriormente mencionados, donde podemos apreciar que obtuvimos resultados exitosos respecto a estos. Notamos que para $\nu = 1.75$ (línea roja rayada) nuestro modelo concuerda de manera satisfactoria con los resultados de lattice-QCD, así como a su vez, para $\nu = 0.75$ (línea azul punteada-rayada) vemos que el nuestro modelo concuerda de manera efectiva con AM visto en [31].

Ahora que tenemos resultados para η_c podemos proceder con el mismo modelo para otro mesón que cumple con las mismas características principales que este tiene, tal como el mesón η_b . En la siguiente sección mostraremos los resultados obtenidos para η_b en base a nuestro nuevo modelo algebraico.

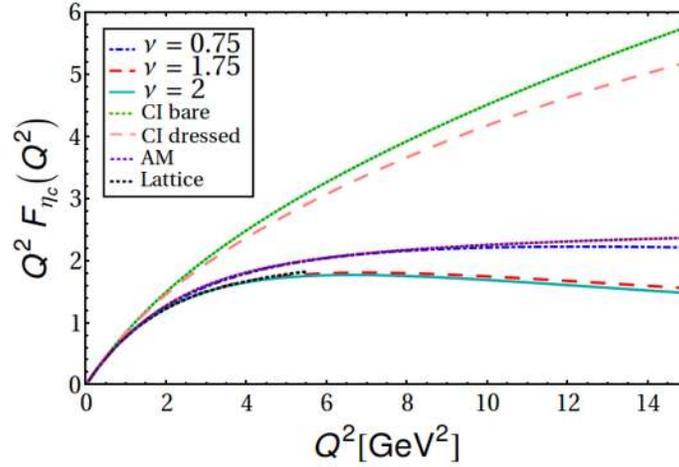


Figura 5.8: $Q^2 F_{\eta_c}(Q^2)$ para nuestros resultados, interacción de contacto, un modelo algebraico [31] y lattice-QCD [32].

5.2. El Mesón η_b

Debido a que el mesón η_b también es un mesón pseudo-escalar y a su vez es un mesón *quarkonium*, podemos proceder exactamente de la misma manera que lo hicimos para η_c pero escogiendo los parámetros adecuados para este. Así, primero fijamos m_{η_b}

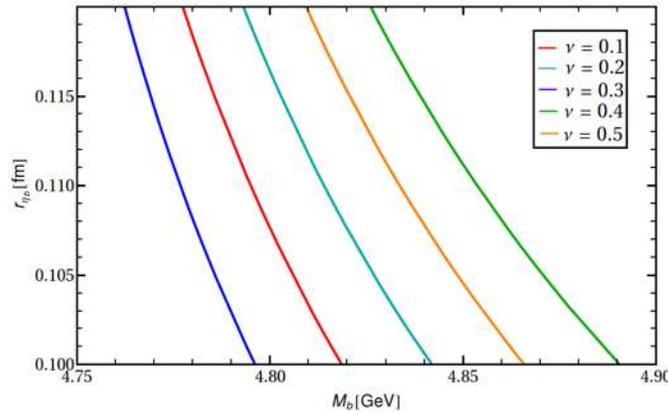


Figura 5.9: Radio de carga para el mesón η_b en función de la masa de sus quarks constituyentes $b(\bar{b})$ para $\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ líneas roja, cyan, purpura, verde y naranja, respectivamente.

y a los cuáles se muestran en la tabla 5.1, al mismo tiempo fijamos un radio de carga $r_{\eta_b}^2 = 0.109 \text{ fm}$ de acuerdo con [31]. Ahora, siguiendo nuevamente la ec. (4.112) que depende tanto de M_b como de ν se obtiene la gráfica 5.9 donde se muestran los valores de $\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$, observamos así el mismo comportamiento que teníamos anteriormente para η_c , es decir, que a cada valor del radio de carga le corresponde

un valor de M_b que a su vez depende de ν . Asimismo, en la fig. 5.10 se muestra la dependencia que existe de M_b sobre ν , donde ν aumenta correspondientemente con M_b . Además, como se mencionó anteriormente, para nuestro modelo, consideramos $\nu > 0$ y el cumplimiento de la condición 4.7.

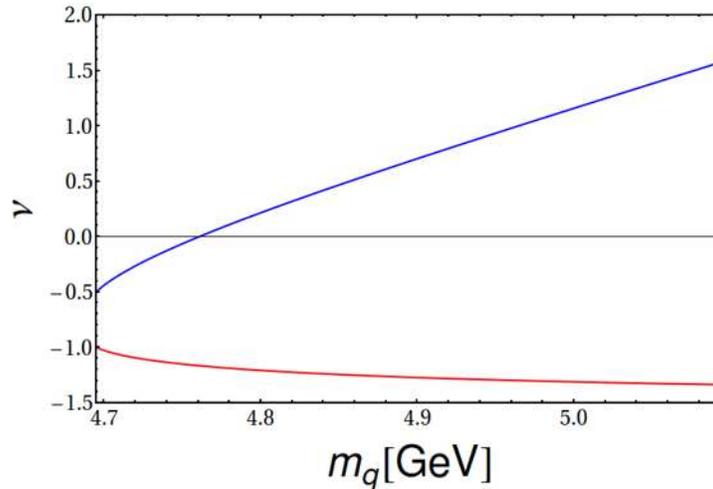


Figura 5.10: Dependencia de la masa de los quarks constituyente $b(\bar{b})$ sobre ν .

Tomando en cuenta este análisis, se escogieron valores de ν que pudieran describirnos resultados realistas, los cuáles son $\nu = 0.1, 0.2, 0.3$ a los que le corresponden masas efectivas del quark b de $M_b = 4.77847$ GeV, $M_b = 4.79707$ GeV y $M_b = 4.81643$ GeV respectivamente. Conjuntamente, de acuerdo a [29] para el truncamiento de RL el cuál es un estudio más refinado donde se utilizan las DSEs, se tiene una masa del quark de valencia b de $M_b = 4.52$ GeV, exponiendonos una diferencia de 5.71%, 6.12% y 6.55% para las masas correspondientes a $\nu = 0.1, \nu = 0.2$ y $\nu = 0.3$ respectivamente. Nuevamente, encontramos diferencias en la masas menores al 10% respecto al truncamiento de RL.

Ahora, teniendo los parámetros apropiados para describir el mesón η_b podemos proseguir con la extracción de la densidad espectral en base a la PDA parametrizada de la ec. (5.1).

5.2.1. Densidad Espectral $\rho(w)$

De acuerdo a la ec. (5.4) con los valores de la tabla 5.1 se lograron extraer las densidades espectrales para el mesón η_b con los valores de $\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1, 1.5$ para observar el comportamiento de $\rho(y)$. Esto lo observamos en la fig. 5.11 donde de lado izquierdo se muestran los valores de $\nu < 0.5$ y del lado derecho se muestran los valores de $\nu \geq 0.5$. Vemos nuevamente un comportamiento similar al de las densidades espectrales de η_c ya que, $\rho(y)$ tiene una forma oscilatoria donde para un determinado valor de ν la densidad espectral comienza a elevarse considerablemente, para η_b esto es a partir de $\nu = 0.5$ como se puede observar en la fig. 5.11 lo cuál es evidente de la masa

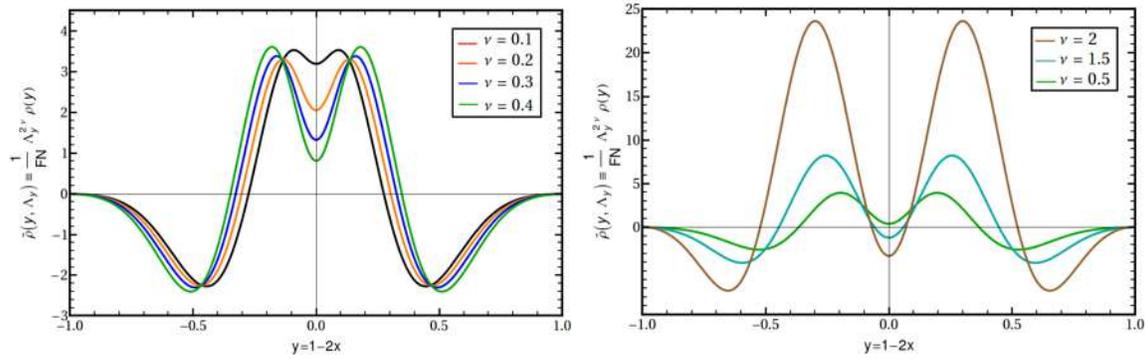


Figura 5.11: Densidades espectrales para diferentes ν .

del quark constituyente, ya que esta también elevaría su valor y se alejaría mucho del valor experimental.

Contando con la densidad espectral, procedemos al análisis del resto de nuestros resultados con las ν 's elegidas ($\nu = 0.1, 0.2, 0.3$).

5.2.2. Amplitud de Distribución Partónica

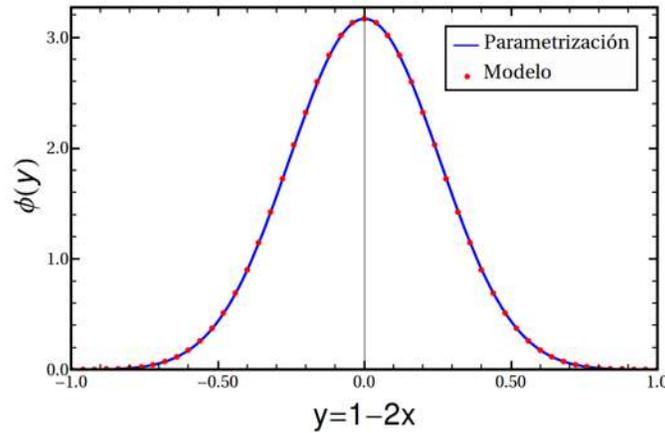


Figura 5.12: PDA para el mesón η_b .

Tomando la densidad espectral $\rho(w)$ y empleandola en la ec. (4.48) extrajimos la PDA para η_b correspondiente a nuestro modelo. Esta se muestra en la fig. 5.12, nuevamente, como esperabamos nuestro modelo reproduce exactamente la PDA fenomenológica del mesón η_b [29].

Por otra parte, analizando la PDA vemos que nuevamente esta tiene una forma de una Gaussiana (o delta de Dirac con anchura) pero siendo más angosta que la PDA del mesón η_c lo que nos indica que mediante más pesado es un mesón quarkonia más angosta será la PDA. Esto corresponde al hecho de que mientras más pesados son los quarks

de valencia encontramos efectos relativistas menores. Además, vemos que la forma funcional similar a una delta de Dirac está presente para los mesones quarkonia lo que nos dice correspondientemente que los quarks de valencia tienen la misma probabilidad de encontrarse en el mesón con fracción de momento $1/2$ del mesón.

Seguido de esto, mostraremos los resultados para la LFWF del mesón η_b .

5.2.3. Función de Onda en el Frente de Luz

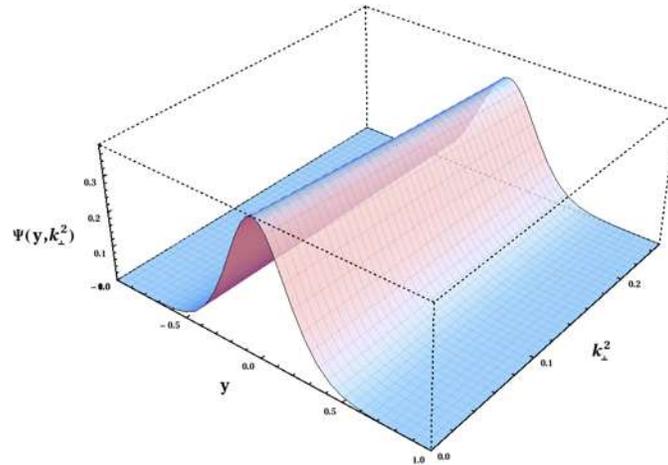


Figura 5.13: LFWF para el mesón η_b .

Como vimos anteriormente, mediante la densidad espectral obtenida, se logró calcular la función de onda en el frente de luz para el mesón η_b de la misma forma que para η_c de acuerdo a la ec. (4.44) lo que también puede obtenerse mediante la PDA conforme la ec. (4.49). La LFWF para $\nu = 0.2$ puede apreciarse en la fig. 5.13. Observamos que para un k_\perp^2 fijo la LFWF es cóncava y más angosta que para η_c , por otra parte, similarmente a η_c la forma funcional de la LFWF es igual para cada ν pero reescalada, además vemos que la amplitud de la onda va disminuyendo ligeramente conforme k_\perp^2 aumenta.

Seguido de las LFWF se realizó el cálculo de las funciones de distribución (GPDs y PDFs), en la siguiente sección vemos los resultados de estas.

5.2.4. Funciones de Distribución

Contando con la LFWF y la PDA obtuvimos la distribución partónica generalizada como antes, a partir de las ecs. (4.83, 4.88, 4.93) mediante la LFWF o la PDA. En la fig. 5.14 mostramos las GPDs para $\xi = 0$ y diferentes valores de t y sin pérdida de generalidad para $\nu = 0.2$. Se puede observar nuevamente como disminuye la amplitud conforme aumenta t a la vez que la GPD se desliza ligeramente hacia la derecha. Nuevamente, la GPD tiene la misma forma para las diferentes ν 's pero reescalada.

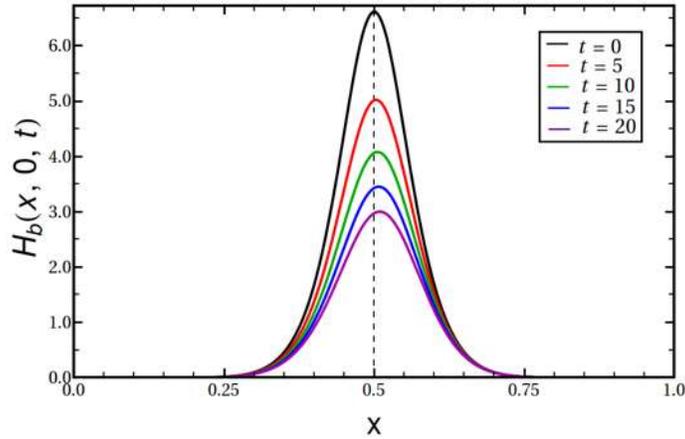


Figura 5.14: GPD para $\xi = 0$ y diferentes valores de t .

Conjuntamente de la ec. (4.99) sabemos que la GPD para $t = 0$ es a su vez la PDF. Notamos entonces que al igual que para η_c tenemos escalamientos para las LFWF, GPDs y PDFs conforme cambia ν a diferencia de la PDA que permanece igual.

Por último, en la siguiente sección se muestran los resultados para los factores de forma y las comparaciones con resultados encontrados en la literatura.

5.2.5. Factores de Forma

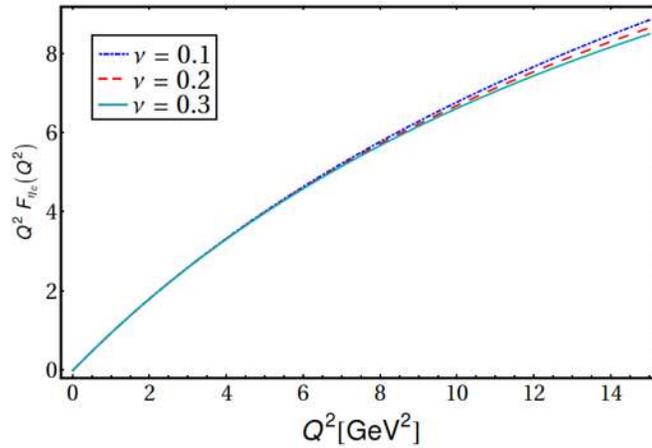


Figura 5.15: FF de η_b para diferentes ν .

Una vez contamos con las GPDs de η_b calculamos los Factores de Forma elásticos en base a estos mediante la ec. (4.102). Los FFs de η_b para las diferentes ν 's que escogimos se representan conforme $Q^2 F(Q^2)$ en la fig. 5.15 donde observamos nuevamente la forma funcional esperada para los mesones pseudo-escalares.

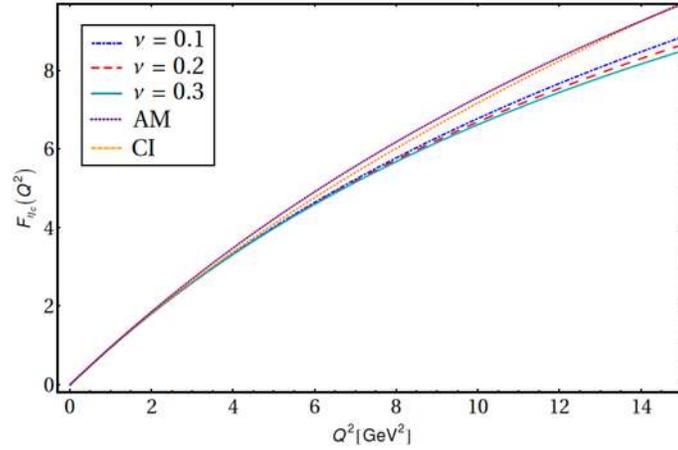


Figura 5.16: Resultados de $Q^2 F(Q^2)$ para η_b para diferentes ν 's, interacción de contacto y un modelo algebraico conocido [33].

Por otra parte, en la literatura encontramos resultados de $Q^2 F(Q^2)$ [31, 33] en base a los modelos: interacción de contacto y un modelo algebraico ya conocido en la literatura [33]. En la fig. 5.7 vemos comparados nuestros resultados con los resultados de los modelos mencionados. Podemos apreciar en la fig. 5.15 que para bajas energías nuestros resultados están en acuerdo con los modelos de CI y AM separándose parcialmente a partir de $Q^2 \approx 5 \text{ GeV}$.

Mediante este profundo análisis realizado para los mesones pseudoescalares η_c y η_b se lograron tener las conclusiones del siguiente capítulo.

Capítulo 6

Conclusiones

En un esquema no-perturbativo de QCD, obtener las funciones de distribución de un mesón es de vital importancia para el propósito del entendimiento de su estructura interna, en particular obtener las GPDs es de gran ayuda para el cumplimiento esta tarea, ya que son estas funciones las que tienen un enfoque espacial dandonos información acerca de la distribución de momentos del mesón como de la carga electromagnética de este. Podemos pensar que una primera aproximación a estas funciones puede surgir mediante las DSEs. Sin embargo, este trabajo se vuelve bastante extenso para fines prácticos, por lo que la proposición de modelos acordes con la realidad que nos permitan una descripción completa del mesón puede ser de bastante utilidad para visualizar más allá de lo que hasta ahora conocemos.

Como vimos, nuestro nuevo modelo algebraico nos permitió obtener un método efectivo para la extracción de las densidades espectrales de mesones pseudo-escalares capaces de reproducir sus correspondientes PDAs fenomenológicas.

Con el apoyo de este nuevo modelo propuesto hemos conseguido obtener un análisis más completo y un mayor entendimiento de la estructura interna de los mesones η_c y η_b . En base a estos análisis podemos concluir que las PDAs de los mesones quarkonia tienen forma de una Delta de Dirac lo cuál esperabamos debido a las parametrizaciones, esto es debido a que sus quarks de valencia tienen el mismo peso y la misma probabilidad de encontrarse dentro del mesón con una fracción $1/2$ del momento total del mismo, de igual forma, notamos que mientras más pesado es el mesón la PDA se vuelve más angosta ya que los efectos relativistas son menores. Estas PDAs nos dan como consecuencia densidades espectrales sinusoidales y a su vez LFWF cóncavas las cuáles mientras más pesado es el mesón en cuestión las LFWF son más angostas para un k_{\perp}^2 fijo.

Para las GPDs donde $\xi = 0$, se observó igualmente una forma de delta de Dirac donde la amplitud de onda disminuye y se desliza ligeramente hacia la derecha en el eje del momento del mesón mediante el aumento de t , de ello se lograron extraer las PDFs y los FF, para los cuáles se observó exactamente la forma funcional que nos sugieren los experimentos hasta el día de hoy para pequeños momentos cuadrados del fotón y a su vez, se observaron resultados completamente satisfactorios en la concordancia con

lattices y el modelo algebraico ya conocido.

Concluimos así que nuestro modelo algebraico ha sido exitoso en la descripción de funciones distribución ya conocidas para mesones pseudo-escalares, lo que nos da seguridad al momento de desarrollar nueva información en base a este para próximos estudios.

Apéndice A

Parametrización de Feynman

En este apéndice veremos un método de integración necesario para resolver los problemas enfrentados. Este método es llamado parametrización de Feynman, el cuál consiste en reducir integrales que contienen factores elevados a ciertas potencias en el denominador.

Para comenzar partimos del hecho

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A-B} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) = \frac{1}{A-B} \int_B^A \frac{dz}{z^2}. \quad (\text{A.1})$$

Ocupando el cambio de variable $u = \frac{z-B}{A-B} \Rightarrow du = \frac{1}{A-B} dz$, donde $z \in [B, A] \Rightarrow u \in [0, 1]$ se tendrá

$$\frac{1}{A-B} \int_B^A \frac{dz}{z^2} = \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)B]^2}, \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)B]^2}, \quad (\text{A.3})$$

esta ec. también puede reescribirse ocupando la delta de Dirac como:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{\delta(1-u-v)}{[uA + vB]^2}. \quad (\text{A.4})$$

De la misma forma podemos encontrar la parametrización de Feynman para tres denominadores como

$$\begin{aligned} \frac{1}{ABC} &= \frac{1}{C-B} \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} \right) \\ &= \frac{1}{C-B} \left\{ \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)B]^2} - \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)C]^2} \right\} \\ &= \frac{1}{C-B} \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)x]^2} \Bigg|_{x=C}^{x=B}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde hemos ocupado la parametrización (A.3). Ahora, debemos expresar el integrando de la ecuación anterior como

$$\int_C^B f(x)dx = \frac{1}{[uA + (1-u)x]^2} \Big|_{x=C}^{x=B}, \quad (\text{A.6})$$

entonces,

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{[uA + (1-u)x]^2} \right\} = \frac{-2(1-u)}{[uA + (1-u)x]^3}, \quad (\text{A.7})$$

así, de acuerdo a la ecuación anterior y ocupando el cambio de variable

$$v = (1-u) \frac{(x-C)}{(B-C)} \Rightarrow dv = \frac{1}{B-C} (1-u) dx, \quad (\text{A.8})$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{[uA + (1-u)x]^2} \Big|_{x=C}^{x=B} &= \int_C^B \frac{-2(1-u)dx}{[uA + (1-u)x]^3} \\ &= 2(B-C) \int_0^{1-u} \frac{dv}{[uA + vB + (1-u-v)C]^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

sustituyendo este resultado en la ec. (A.5) llegamos a que

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} \frac{dv}{[uA + vB + (1-u-v)C]^3}, \quad (\text{A.10})$$

y ocupando la delta de Dirac

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 dw \frac{\delta(1-u-v-w)}{[uA + vB + wC]^3}. \quad (\text{A.11})$$

De manera análoga al proceso para obtener (A.11) se puede encontrar la parametrización de Feynman para cuatro denominadores y así sucesivamente de manera que la parametrización de Feynman para n denominadores no repetidos sería

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 \cdots A_n} &= (n-1) \int_0^1 du_1 \int_0^{1-u_1} du_2 \cdots \int_0^{1-\sum_{k=1}^{n-2} u_k} du_{n-1} \\ &\quad \times \frac{1}{[u_1 A_1 + \cdots + u_{n-1} A_{n-1} + (1 - \sum_{k=1}^{n-1} u_k) A_n]^n}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

y usando la delta de Dirac

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_n \frac{\delta(1 - \sum_{k=1}^n u_k)}{(\sum_{k=1}^n u_k A_k)^n}, \quad (\text{A.13})$$

Notemos ahora que también podemos obtener una expresión para denominadores con exponentes. Primero es fácil mostrar que

$$\frac{1}{A^\nu} = -\frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \left[\frac{1}{A} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Lo que en una parametrización de Feynman implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^\nu BC} &= -\frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \left[\frac{1}{ABC} \right] \\ &= -2 \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^x du \int_0^{1-u} dv \frac{1}{[uA + vB + (1-u-v)C]^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

donde hemos utilizado la ec. (A.10). Por otra parte, es fácil mostrar que

$$\frac{d^\alpha}{dA^\alpha} \frac{1}{[uA + \dots]^\beta} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} [uA + \dots]^{-(\alpha+\beta)} u^\alpha. \quad (\text{A.16})$$

Entonces, para $\alpha = \nu - 1$ y $\beta = 3$ se tiene

$$\frac{1}{A^\nu BC} = \frac{\Gamma(\nu + 2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{u^{\nu-1}}{[uA + vB + (1-u-v)C]^{\nu+2}}. \quad (\text{A.17})$$

Si siguiendo el mismo análisis podemos obtener la parametrización de Feynman para dos denominadores con exponentes

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^\nu B^\nu} &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu)} \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{dB^{\nu-1}} \left[\frac{1}{AB} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(\nu)} \int_0^1 du \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{dB^{\nu-1}} \frac{1}{[uA + (1-u)B]^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

y utilizando nuevamente la ec. (A.16) llegamos a

$$\frac{1}{A^\nu B^\nu} = \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \int_0^1 du \frac{u^{\nu-1} (1-u)^{\nu-1}}{[uA + (1-u)B]^{2\nu}}. \quad (\text{A.19})$$

Estas últimas dos parametrizaciones de Feynman nos serán de gran ayuda en el capítulo 4.

Bibliografía

- [1] J. J. Thomson, *Philosophical Magazine* **44** (1897) 293;
- [2] J. J. Thomson, *Philosophical Magazine* **48** (1899) 295
- [3] E. Rutherford, *Philosophical Magazine*, **21** (1911) 669
- [4] J. Chadwick, *Nature* **129** (1932) 312
- [5] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579
- [6] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264
- [7] A. Salam, *Proceedings del 'The Nobel Symposium', Estocolmo, Suecia, 1968*
- [8] M. Gell-Mann, "The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry"(No. TID-12608; CTSL-20). *California Inst. of Tech., Pasadena. Synchrotron Lab.*
- [9] M. Gell-Mann y Y. Ne'eman, *Science* **147** (1965) 1026
- [10] G. Zweig (1964), "An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking II", *Publicado en 'Developments in the Quark Theory of Hadrons'. Volumen 1. Nonantum, Mass., Hadronic Press, 1980. pp. 22-101.*
- [11] ATLAS collaboration, *Physics Letters B.* 716 (2012) 1-29 ; CMS collaboration, *Physics Letters B.* 716 (2012) 30- 61.
- [12] J. J. Thomson, *Philosophical Magazine* **44** (1897) 293
- [13] <http://cienciadesofa.com/2015/02/que-es-la-teoria-de-cuerdas.htm>
- [14] J.D. Bjorken, S.L. Glashow *Phys. Lett.* 11 255 (1964)
- [15] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani *Phys.Rev. D2* (1970) 1285-1292
- [16] G. Dissertori. *Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.* 26 (2016) 113-128
- [17] J.D. Bjorken. *Phys.Rev.* 179 (1969) 1547-1553
- [18] Curtis G. Callan, Jr., David J. Gross. *Phys.Rev.Lett.* 22 (1969) 156-159

- [19] *Richard P. Feynman. Phys.Rev.Lett. 23 (1969) 1415-1417*
- [20] *F.J. Dyson. Phys.Rev. 75 (1949) 1736-1755*
- [21] *Julian S. Schwinger. Proc.Nat.Acad.Sci. 37 (1951) 452-455*
- [22] *Julian S. Schwinger. Proc.Nat.Acad.Sci. 37 (1951) 455-459*
- [23] *Craig D. Roberts. IRMA Lect.Math.Theor.Phys. 21 (2015) 355-458*
- [24] *L.X. Gutierrez-Guerrero, A. Bashir, I.C. Cloet, C.D. Robert. Phys.Rev. C81 (2010) 065202*
- [25] *H.L.L. Roberts, A. Bashir, L.X. Gutierrez-Guerrero, C.D. Roberts, D.J. Wilson .Phys.Rev. C83 (2011) 065206*
- [26] *Lei Chang, I. C. Cloët , J. J. Cobos-Martínez Phys.Rev.Lett. 110 (2013) no.13, 132001*
- [27] *I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. VI edition Table of Integrals, Series, and Products.*
- [28] *Shu-Sheng Xu, Lei Chang, Craig D. Roberts Phys.Rev. D97 (2018) no.9, 094014*
- [29] *Minghui Ding, Fei Gao, Lei Chang, Yu-Xin Liu, Craig D. Roberts. Phys.Lett. B753 (2016) 330-335*
- [30] *K.A. Olive, et al., Chin. Phys. C 38 (2014) 090001*
- [31] *Marco A. Bedolla, Khépani Raya, J. J. Cobos-Martínez, Adnan Bashir. Phys.Rev. D93 (2016) no.9, 094025*
- [32] *J. J. Dudek, R. G. Edwards, N. Mathur, and D. G. Richards, J.Phys.Conf.Ser. 69, 012006 (2007).*
- [33] *Khepani Raya, Marco A. Bedolla, J.J. Cobos-Martínez, Adnan Bashir. Few Body Syst. 59 (2018) no.6, 133*
- [34] *J. J. Dudek, R. G. Edwards, N. Mathur, and D. G. Richards, J.Phys.Conf.Ser. 69, 012006 (2007).*