



**UNIVERSIDAD MICHOCANA
DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO**



FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**“DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA EN
ESTADO ESTACIONARIO DE SISTEMAS FISICOS
EN EL DOMINIO FISICO”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO ELECTRICISTA**

**PRESENTA:
HUGO CÉSAR REYES VEGA**

**ASESOR:
Dr. GILBERTO GONZÁLEZ ÁVALOS**

MORELIA, MICH

Julio 2009

Resumen

En este trabajo se obtiene el estado estacionario de dos sistemas físicos que son una central hidroeléctrica básica y un generador síncrono en coordenadas dq0 mediante la técnica de Bond Graph.

Los sistemas físicos se trasladan al ambiente de Bond Graph se obtienen los vectores clave y posteriormente se obtienen las ecuaciones de estado.

El estado estacionario se obtiene mediante el cambio de asignación de causalidad al Bond Graph del sistema físico, su cambio de causalidad, es de causalidad integral a causalidad derivativa a los elementos de almacenamiento del sistema, de esta manera es como se obtiene la expresión del estado estacionario.

Finalmente se comprueban los resultados obtenidos de las variables de estado en estado estable mediante el simulador 20-sim.

ÍNDICE

	Pág.
Lista de Figuras.....	VII
Lista de Tablas.....	VIII

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción.....	1
1.2 Modelado de sistemas en el dominio físico.....	1
1.3 Objetivo.....	2
1.4 Justificación.....	3
1.5 Metodología de la investigación.....	3
1.6 Descripción de los capítulos.....	4

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES: BOND GRAPH

2.1. Introducción a los sistemas físicos.....	5
2.2. Antecedentes de modelado de sistemas físicos en Bond Graph.....	6
2.2.1. Descripción del método de Bond Graph.....	6
2.3. Componentes básicos de un Bond Graph.....	7
2.3.1. Puertos-1 Elementos Pasivo.....	9
2.3.2. Puertos-1 Activos o Fuentes.....	10
2.3.3. Puertos-2 Elementos Ideales.....	11
2.3.4. Puertos-3 Elementos de unión.....	11
2.4. Causalidad para los multipuertos básicos	13
2.5. Bond Activo.....	16

2.6. Procedimiento breve para el modelado de sistemas.....	17
2.7. Vectores Clave o Vectores Significativos.....	17
2.7.1. Relaciones de campo y ecuaciones de estado.....	18
2.7.2. Representación de espacio de estados.....	20

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE SISTEMAS EN ESTADO ESTACIONARIO

3.1. Introducción.....	21
3.2. Respuesta de un sistema.....	22
3.3. Estado estacionario de un sistema modelado en espacio de estado.....	24
3.3.1. Definición de conceptos.....	24
3.3.2. Estado Estable.....	27
3.4. Estado estacionario de un sistema en el dominio de la frecuencia.....	28
3.5. Modelado de un sistema en un Bond Graph con causalidad derivativa.....	29
3.5.1. Relación de un BGI y un BGD.....	32
3.5.2. Obtención directa simbólica del estado estacionario de un sistema Modelado en un Bond Graph con causalidad derivativa.....	34
3.6. Ejemplo 1 Sistema Eléctrico.....	35
3.6.1. Modelado matemático del sistema eléctrico.....	36
3.6.2. Obtención de la matriz de estructura unión (Causalidad Integral)..	37
3.6.3. Obtención de la representación de espacio de estado.....	39

3.6.4. Bond Graph en causalidad derivativa del sistema eléctrico.....	40
3.6.5. Obtención de la matriz de estructura unión (Causalidad Derivativa)....	41
3.6.6. Estado Estacionario del Sistema Eléctrico.....	43
3.7. Ejemplo 2 Sistema Mecánico.....	43
3.7.1. Modelo matemático del sistema mecánico.....	44
3.7.2. Obtención de la matriz de estructura unión (Causalidad Integral).....	45
3.7.3. Obtención de la representación de espacio de estado.....	46
3.7.4. Bond Graph en causalidad derivativa del sistema mecánico.....	47
3.7.5. Obtención de la matriz de estructura unión (Causalidad Derivativa)....	47
3.7.6. Estado Estacionario del Sistema Mecánico.....	48

CAPÍTULO 4. ESTADO ESTACIONARIO EN BOND GRAPH

4.1. Introducción.....	49
4.2. Obtención del estado estacionario de una central hidroeléctrica básica.....	49
4.2.1. Central Hidroeléctrica en Bond Graph.....	50
4.2.2. Vectores clave de la central hidroeléctrica.....	51
4.2.3. Relaciones constitutivas de los elementos de almacenamiento y disipación.....	53
4.2.4. Obtención de la matriz estructura de unión de la central hidroeléctrica..	54
4.2.5. Obtención de la representación de espacio de estado.....	55
4.2.6. Sistema de la central hidroeléctrica en representación de espacio de estados.....	57

4.2.7. Bond Graph de la Central Hidroeléctrica con asignación en Causalidad Derivativa.....	58
4.2.7.1. Obtención de la matriz de estructura de unión (causalidad derivativa)..	59
4.2.8. Estado estacionario de la central hidroeléctrica.....	61
4.2.9. Graficas de las variables de estado con el programa 20-sim.....	62
4.3. Estado Estacionario de un Generador Síncrono.....	66
4.3.1. Descripción física de la maquinas síncrona.....	66
4.3.2. Eje de cuadratura q y eje directo d.....	68
4.3.3. Modelo en Bond Graph de un Generador Síncrono en ejes dq0.....	68
4.3.3.1. Vectores clave del Generador Síncrono.....	69
4.3.3.2. Relaciones constitutivas de los elementos de almacenamiento y Disipación.....	69
4.3.3.3. Obtención de la matriz estructura unión del Generador Síncrono.....	69
4.3.3.4. Obtención de la representación de espacio de estados del Generador Síncrono en ejes dq0.....	70
4.3.3.5. El sistema del Generador Síncrono en representación de espacio de estado.....	71
4.3.4. Bond Graph del Generador Síncrono en ejes dq0 con asignación en Causalidad Derivativa.....	72
4.3.4.1. Obtención de la matriz estructura unión (Causalidad Derivativa).....	73
4.3.4.2. Estado Estacionario de la máquina síncrona en ejes dq0.....	74

4.3.5. Graficas de los valores de las variables de estado en estado estacionario obtenidas con el programa 20-sim.....	75
4.4. Estado Estacionario de un Generador síncrona conectado a un bus infinito.....	78
4.4.1. Bond Graph del sistema generador síncrono-bus infinito en causalidad derivativa.....	79
4.4.2. Estado Estacionario del sistema a partir de su Bond Graph.....	81
4.4.3. Simulación del sistema a partir de su Bond Graph.....	82
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.....	85
BIBLIOGRAFÍA.....	87

LISTA DE FIGURAS

1.1 Modelado de sistemas.....	1
1.2 Metodología.....	3
2.1 Bond con sus variables de potencia.....	7
2.2 Puertos – 1 activos; a) Fuente de flujo, b) Fuente de esfuerzo.....	10
2.3 Puertos – 2 a) Girador, b) Transformador.....	11
2.4 Unión 0.....	12
2.5 Unión 1.....	12
2.6 Causalidad para un Bond.....	13
2.7 Elemento C en causalidad integral.....	15
2.8 Elemento C en causalidad derivativa.....	15
2.9 Bond Activo.....	16
2.10 Bond Graph con un bond activo.....	16
2.11 Diagrama de bloques de la unión de un bond graph.....	18
3.1 Sistemas de control.....	21
3.2 Respuesta de un sistema a tres condiciones iniciales.....	21
3.3 Respuesta de un sistema.....	23
3.4 Sistema eléctrico del ejemplo 1.....	35
3.5 Bond Graph en causalidad integral del ejemplo 1.....	36
3.6 Bond Graph en causalidad derivativa del ejemplo 2.....	40
3.7 Sistema mecánico del ejemplo 2.....	43
3.8 Bond Graph en causalidad integral del ejemplo 2.....	44
3.9 Bond Graph en causalidad derivativa del ejemplo 2.....	47
4.1 Diagrama de una central hidroeléctrica.....	50
4.2 a) Modelo físico de una central hidroeléctrica.....	50
4.2 b) Bond Graph completo de central hidroeléctrica con causalidad integral.....	51
4.3 Bond Graph completo de central hidroeléctrica con causalidad derivativa.....	58

4.4 Entrada de caudal en la presa.....	63
4.5 Momento rotacional en la turbina.....	63
4.6 Enlace de flujo en la inductancia del generador.....	64
4.7 Flujo acumulado en el capacitor de la carga.....	64
4.8 Flujo en la inductancia de la carga.....	65
4.9 Esquema de una máquina síncrona.....	67
4.10 Modelo en Bond Graph de un Generador Síncrono en ejes d-q	68
4.11 Bond Graph del Generador Síncrono en ejes d-q con causalidad derivativa....	72
4.12 Comportamiento de la variable de estado p_5	76
4.13 Comportamiento de la variable de estado p_3	77
4.14 Modelo en Bond Graph de un generador síncrono conectado en bus infinito...78	
4.15 Modelo en Bond Graph derivativo de un generador síncrono en coordenadas abc operando a velocidad constante.....	79
4.16 Comportamiento de la variable de estado p_7	83
4.17 Comportamiento de la variable de estado p_6	83
4.18 Comportamiento de la variable de estado p_{13}	84
4.19 Comportamiento del sistema.....	84

LISTA DE TABLAS

2.1 Variables generalizadas de sistemas eléctricos y mecánicos traslacionales.....	8
2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales e hidráulicos.....	9
2.3 Elemento R.....	10
2.4 Elemento C.....	10
2.5 Elemento I.....	10
2.6 Consideraciones causales para los multipuertos básicos.....	14
2.7 Formas causales para puertos 1.....	15
4.1 Comparando valores.....	65

Capítulo 1

1.1 Introducción

En este capítulo se presenta el modelado de sistemas físicos utilizando la técnica de Bond Graph y en particular en este trabajo se analiza la determinación del estado estacionario de las variables de estado de un sistema lineal e invariante en el tiempo por medio de la técnica de Bond Graph asignando causalidad derivativa a los elementos de almacenamiento. Así mismo, en este capítulo se definen también los objetivos de este trabajo de titulación y al final del capítulo se hace una explicación de los capítulos posteriores.

1.2 Modelado de Sistemas en el Dominio Físico

El primer paso en el análisis de un sistema dinámico, es obtener su modelo. Los modelos pueden tomar muchas formas distintas, según el sistema particular de que se trate y las circunstancias. Los modelos son normalmente construidos para resolver un problema propuesto. En la Figura 1.1 se muestra que algunos sistemas físicos pueden ser modelados en el dominio físico, así mismo, por ejemplo para un sistema eléctrico se pueden determinar las ecuaciones de los elementos, las ecuaciones de equilibrio, así como el modelo matemático del sistema.

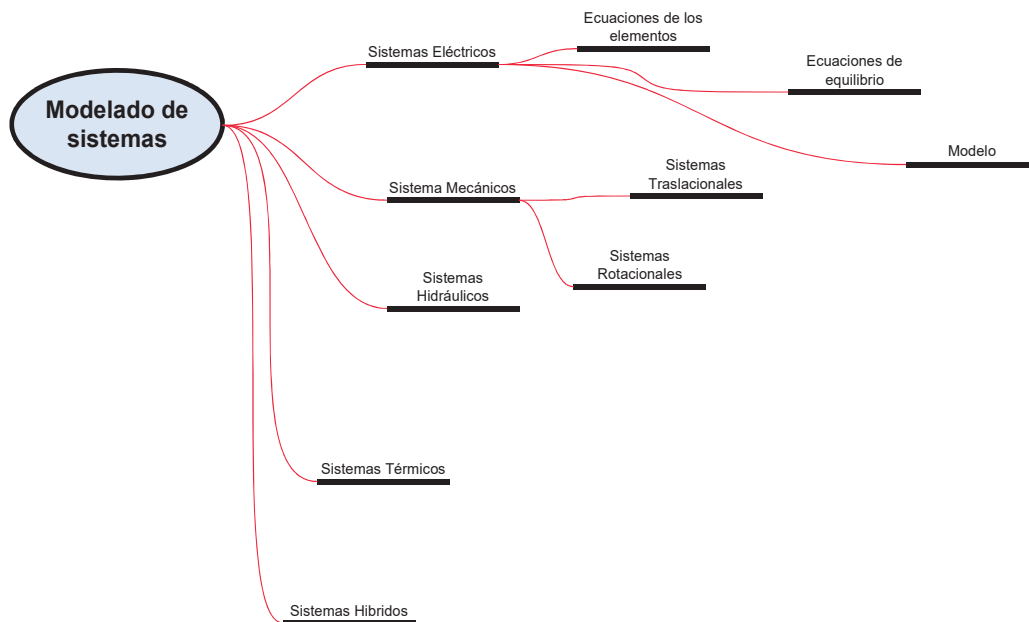


Figura 1.1 Modelado de Sistemas.

La metodología de Bond Graph (modelado en el dominio físico o BG) ha venido tomando importancia relevante en el diseño, modelado y construcción de sistemas, ya que puede ser aplicado en el estudio de sistemas que presentan diferentes dominios de energía. Por otro lado, debido a la naturaleza de Bond Graph, permite realizar análisis gráficos sobre los sistemas y los elementos que lo integran, lo cual permite conocer aspectos en su comportamiento interno. La causalidad en los elementos de un sistema modelado en un Bond Graph permite determinar de manera directa las posibles interacciones energéticas entre los elementos o subsistemas que conforma a un sistema.

En particular el modelado en Bond Graph representa un enfoque unificado para el modelado y manipulación de sistemas dinámicos de ingeniería que permite obtener sus ecuaciones de estado y conocer sus propiedades de observabilidad, controlabilidad y dependencia lineal de sus elementos, basado en una representación gráfica y la generalización de los conceptos de variable de flujo y esfuerzo. [1]

Bond Graph permite el modelado de sistemas de ingeniería en diversos campos:

- Eléctricos
- Mecánicos
- Hidráulicos
- Térmicos
- Etc.

1.3 OBJETIVO

El objetivo de este trabajo de tesis es la determinación simbólica del valor de estado estacionario de las variables de estado de un sistema, modelado en Bond Graph.

1.4 JUSTIFICACIÓN

- Introducir una técnica relativamente nueva de modelado de sistemas que es la técnica de Bond Graph.
- Encontrar el estado estacionario de un sistema de una manera gráfica.
- Obtener la inversión de la matriz A en el ambiente de Bond Graph (La cual se logra cambiando la causalidad a los elementos de almacenamiento del sistema).

1.5 Metodología de la investigación

La metodología de investigación en este trabajo de tesis se describe en la figura 1.2.

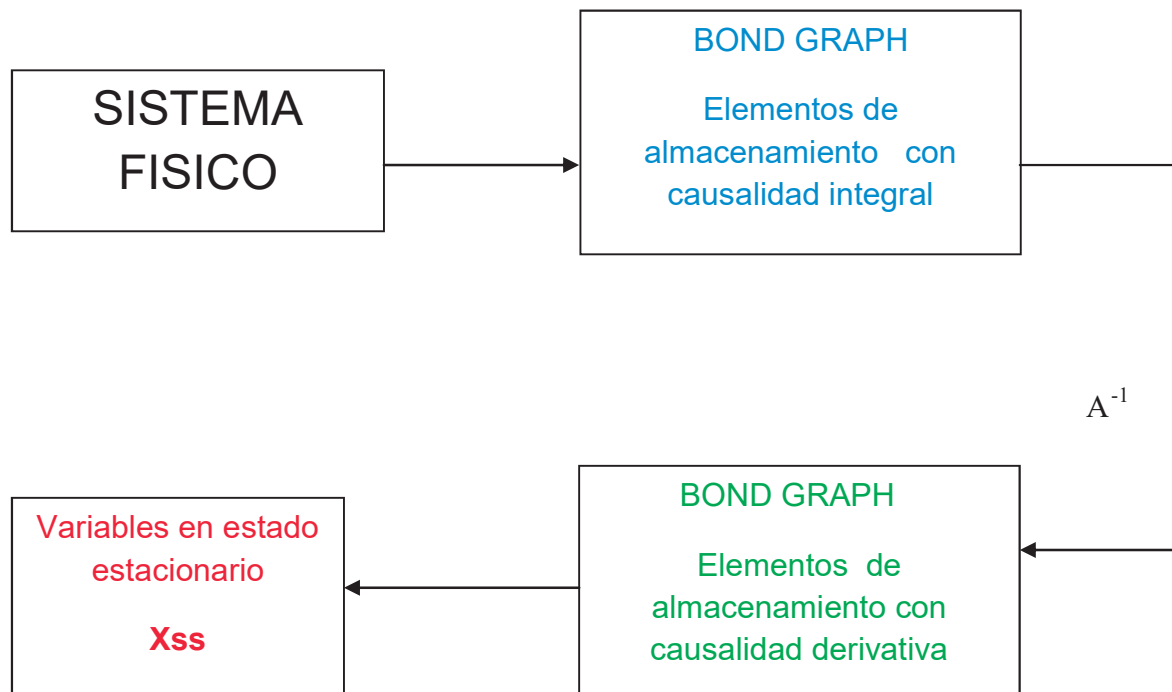


Figura 1.2 Metodología.

1.6 Descripción de los Capítulos

En el capítulo 1 se da una breve descripción del modelado de sistemas en el dominio físico, es decir, del modelado de Bond Graph. En este capítulo también se plantean los objetivos de este trabajo, justificación y metodología de la investigación.

En el capítulo 2 se explican los antecedentes del modelado en Bond Graph, así como los componentes básicos necesarios para el modelado de un sistema físico en este marco de referencia.

En el capítulo 3 se presenta la respuesta en estado estacionario de un sistema, modelado en espacio de estados o en el dominio de la frecuencia. También se describe la asignación en causalidad derivativa a un Bond Graph y sobre la relación que hay en un Bond Graph Integral (BGI) y un Bond Graph Derivativo (BGD). Finalmente, se propone la determinación directa simbólica del estado estacionario de un sistema modelado en un Bond Graph.

En capítulo 4, por medio de la técnica de Bond Graph y aplicando causalidad derivativa a los elementos de almacenamiento se obtiene el estado estacionario de las variables de estado de dos sistemas físicos que son, una Central Hidroeléctrica básica y un Generador Síncrono en ejes d-q operando a velocidad constante. También en este capítulo se comprueban los resultados obtenidos con el programa de simulación de sistemas modelados en Bond Graph denominado 20-Sim.

En el capítulo 5, se presentan conclusiones generales y recomendaciones de este trabajo de tesis.

Capítulo 2 Antecedentes: Bond Graph

2.1 Introducción a los Sistemas Físicos

Un sistema puede ser definido como la combinación de elementos o componentes que actúan de manera conjunta para realizar una función perfectamente definida, que no podría ser llevada a cabo por alguno de los elementos que forman parte de él. Los campos de aplicación en los que el término sistema se puede emplear no se limitan únicamente al área técnica, sino también de ciencias sociales, humanidades y las disciplinas de tipo económico.

Considérese un universo de sistemas en el que se incluyen todos los tipos de sistemas posibles, todos los que están representados por modelos matemáticos que no tienen restricción alguna. Una primera división se puede hacer en base a la causalidad, la cual establece que todo efecto es resultado de una causa. Los sistemas son representados mediante leyes que se rigen bajo este principio, son aquellos que se conocen como sistemas causales. Por lo anterior, se puede afirmar que todo sistema físico es un sistema causal.

Los sistemas que son de mayor interés en dinámica, son los que se encuentran en base al principio de superposición, el cual establece que la salida producida por un sistema que ha sido excitado por varias entradas simultáneas es igual a la suma de las salidas que produce el sistema cuando se aplican las entradas en forma individual.

Una propiedad de interés de los sistemas dinámicos es la referente a la linealidad, ya sea de los elementos que forman el sistema o del mismo sistema. No todos los sistemas dinámicos poseen esta propiedad, pero para nuestro caso sistemas lineales son los de mayor interés.

Otra propiedad importante de los sistemas dinámicos es la referente a la invarianza en el tiempo del sistema, es decir, los sistemas dinámicos son funciones del tiempo. Por lo tanto, la respuesta producida por estos será también función del tiempo.

2.2 Antecedentes de Modelado de Sistemas en Bond Graph

La técnica de Bond Graph fue creada por el profesor Henry Paynter del Departamento de Ingeniería Mecánica del Instituto de tecnología de Massachusetts (1959) para modelar justamente la interacción entre los subsistemas hidráulico, mecánico y eléctrico en el proceso de generación hidroeléctrica. El objetivo fue superar las limitaciones de las técnicas de modelado clásicas basadas en funciones de transferencia y diagramas de bloques que solo manejan una entrada y una salida.

Esta técnica fue formalizada por Karnopp en 1983, Rosenberg (1990), Thoma (1991), y Breedbeld (1994), esta técnica a mostrado su eficiencia en gran número de aplicaciones, para el diseño de sistemas, simulación y determinación de las leyes de control y de esta manera puede ser ubicada entre los métodos necesarios para la construcción de modelos.

2.2.1 Descripción del Modelado en Bond Graph

Esta técnica está basada en el flujo de potencia entre los componentes del sistema, consiste en señales, líneas y símbolos propios que permiten representar gráficamente el modelo físico. Proporciona una visualización de las interacciones entre sus distintos componentes y suministra implícita y sistemáticamente la modelización matemática del sistema en forma de variables de estado, facilitando el uso de recursos computacionales para la simulación, que se realiza directamente de esta representación grafica.

Además, un Bond Graph es una representación gráfica de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía.

Bond Graph es un enfoque general que permite construir modelos de sistemas eléctricos, magnéticos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos y térmicos utilizando solamente un pequeño conjunto de elementos ideales.

2.3 Componentes Básicos de un Bond Graph

Las partes principales de un sistema son llamadas subsistemas y las partes no reducibles son llamadas componentes. Un subsistema es una parte de un sistema que es modelado como un sistema en sí mismo, donde un componente es modelado como una entidad. Los lugares en los cuales los subsistemas pueden ser interconectados, son lugares en los cuales la energía puede fluir, tales lugares son llamados puertos.

Para modelar un sistema, es necesario dividir un sistema en partes más pequeñas que puedan ser modeladas y estudiadas experimentalmente y después ensamblarlas al modelo del sistema.

El componente fundamental de un bond graph es el bond de energía utilizado para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema. El Bond es representado por una semiflecha indicando en la dirección de ésta como fluye la energía entre los puertos al cual está conectado, como se puede observar en la figura 2.1.

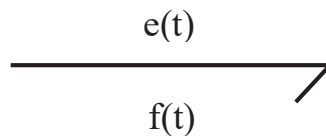


Figura 2.1. Bond con sus variables de potencia.

Las variables de potencia son llamadas *esfuerzo* $e(t)$ y *flujo* $f(t)$. Estas variables son llamadas *variables de bond generalizadas* debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía.

Ejemplos de estos pares de variables son voltaje y corriente para un sistema eléctrico, fuerza y velocidad para un sistema mecánico, presión y caudal para un sistema hidráulico. La relación de ambas variables está dada por:

$$P(t) = e(t)f(t) \quad (2.1)$$

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamadas variables de estado denominadas momento $p(t)$ o esfuerzo acumulado $e_a(t)$ y desplazamiento $q(t)$ o flujo acumulado $f_a(t)$ están dadas por:

$$p(t) = e_a(t) = \int e(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$q(t) = f_a(t) = \int f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

En la Tabla 2.1 y 2.2 se muestran las variables de potencia y de energía generalizadas aplicadas a los dominios de energía para sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

Tabla 2.1 Variables Generalizadas de Sistemas Eléctricos y Sistemas Mecánicos Traslacionales.

Variabes	General	Eléctrico	Mecánico Traslacional
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad
Momento	$p(t) = \int e(t) dt$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_R(t)$ Momento Rotacional
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t) dt$	$q(t)$ Carga	$x(t)$ Distancia
Potencia	$P(t) = e(t)f(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p) dp$ $E(q) = \int e(q) dq$	$\int i(\lambda) d\lambda$ $\int e dq$	$\int V(P_R) dP_R$ $\int F(x) dx$

Tabla 2.2 Variables Generalizadas de Sistemas Mecánicos Rotacionales y de Sistemas Hidráulicos.

VARIABLES	Mecánico Rotacional	Hidráulico
Esfuerzo	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$\omega(t)$ Velocidad angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$H(t)$ Momento angular	$P_p(t)$ Integral de Presión
Desplazamiento	$\theta(t)$ Angulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$\int \omega(H)dH$ $\int \tau(\theta)d\theta$	$\int Q(P_p)dP_p$ $\int P_e(V)dV$

2.3.1 Puertos-1 Elementos Pasivos

Los elementos de puertos-1 pasivos, se consideran elementos ideales, los cuales representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía; llamamos a estos elementos pasivos. Se determinan puertos-1 Pasivos aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo.

-Elementos de disipación R

-Elementos de almacenamiento de flujo C

-Elementos de almacenamiento de esfuerzo I

Las tablas 2.3, 2.4 y 2.5 muestran los elementos de disipación R, de almacenamiento de flujo C y de almacenamiento de esfuerzo I, para sistemas eléctricos, mecánico e hidráulicos.

Tabla 2.3 Elemento R

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$v(t)=Ri(t)$	$F(t)=bV(t)$	$\Delta P_r(t)=RQ(t)$
No-Lineal	$v=\varphi(i)$	$F=\varphi(V)$	$\Delta P=\varphi(Q)$

Tabla 2.4 Elemento C

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int i \, dt$	$F(t) = k \int V \, dt$	$P_r(t)=C \int \Delta Q \, dt$
No-Lineal	$v(t) = \varphi(q)$	$F(t) = \varphi(x)$	$P_r(t)=\varphi(V)$

Tabla 2.5 Elemento I

Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int v \, dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F \, dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r \, dt$
No-Lineal	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_p)$

2.3.2 Puertos-1 Activos o Fuentes

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados *fuentes*. Existen dos tipos de fuentes, *fente de esfuerzo* (voltaje, fuerza o presión) y fuente de flujo (corriente, velocidad o caudal) denotadas por MS_e y MS_f , y su representación se muestra en la fig. 2.2, en donde una fuente es un elemento activo sencillo llamado Puerto-1 Activo.



Figura 2.2 Puertos-1 Activos; a) Fuente de Esfuerzo, b) Fuente de Flujo.

2.3.3 Puertos-2 Elementos Ideales

Consideramos ahora dos elementos ideales puerto-2, llamados *transformadores* (TF) y *girador* (GY), que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo. Caracterizándose por tener dos puertos, y una relación lineal entre esfuerzos y flujo.

Los Bonds que representan a un transformador TF y a un girador GY se muestran en la figura 2.3, donde n y r son módulos del transformador y el girador respectivamente.

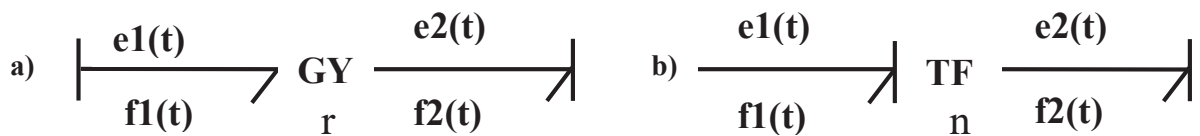


Figura 2.3 Puertos-2; a) Girador, b) Transformador.

Las relaciones de las variables de bond generalizadas para el Transformador TF, están dadas por:

$$e_1(t) = ne_2(t) \quad (2.4)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n} f_2(t) \quad (2.5)$$

Y para el Girador GY:

$$e_1(t) = rf_2(t) \quad (2.6)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r} e_2(t) \quad (2.7)$$

2.3.4 Puertos-3 Elementos de Unión

Los puertos-3 son llamados uniones dado que ellos sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema. Estos puertos-3 representan unas de las

ideas fundamentales del formalismo de Bond Graph, representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones en serie y en paralelo.

Considerar la unión de flujo, unión-0 o unión de esfuerzo común para las conexiones en paralelo que se muestra en la figura 2.4.

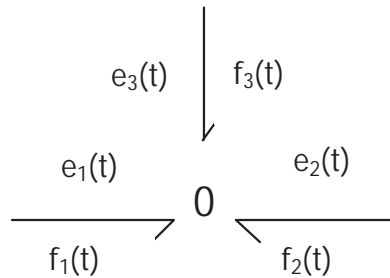


Figura 2.4 Unión 0

Las relaciones de interconexión que describen una unión flujo están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.8)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.9)$$

El otro elemento de puerto-3, es la unión de esfuerzo, unión-1 o de flujo común para la conexión en serie, su representación se muestra en la figura 2.5.

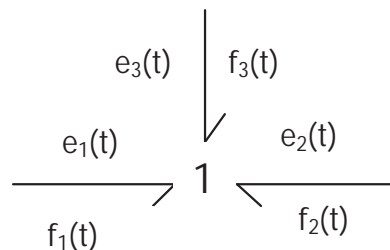


Figura 2.5 Unión-1

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.10)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.11)$$

2.4 Causalidad para los Multipuertos Básicos

Las relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Una marca en un bond, llamada trazo causal, indica cómo $e(t)$ y $f(t)$ simultáneamente son determinados causalmente en un bond. Cuatro ejemplos de causalidad se muestran en la figura 2.6.

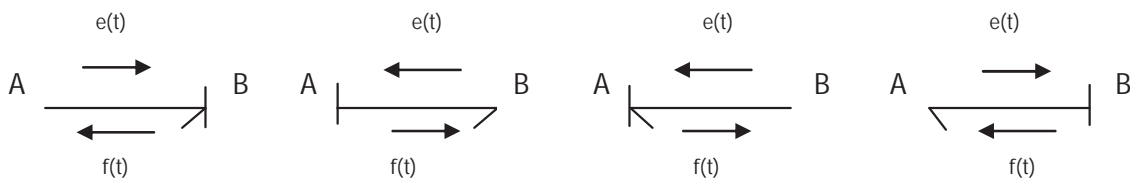






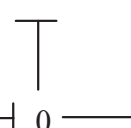
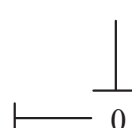
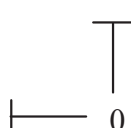
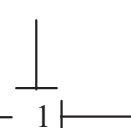

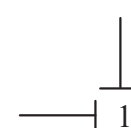
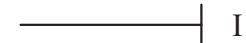







Figura 2.6. Causalidad para un Bond.

El trazo causal indica un sentido de entrada-salida para $e(t)$ y $f(t)$ en cada puerto de los dos componentes juntos. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal.

Las reglas de causalidad que se deben de cumplir para cada elemento modelado en Bond Graph se presentan en la Tabla 2.6.

Tabla 2.6 Consideraciones Causales para los multipuertos básicos.

Causalidad Necesaria	MSe 	Ms _f 	
Causalidad Restrictiva	 TF 	 TF 	
			
			
Causalidad Integral	 I	 C	
Causalidad Derivativa	 I	 C	
Causalidad Arbitraria	 R	 R	

Considerando un elemento-C, la relación constitutiva es de $f(t)$ a $e(t)$ y almacena flujo, es decir, relaciona $e(t)$ a una variable de flujo acumulada $q(t) = \int f(t) dt$. Esto es, si $f(t)$ es la entrada a un elemento-C como se muestra en la figura 2.7, se integra primero para encontrar $q(t)$ y entonces $e(t)$ es una salida relacionada a $q(t)$, a esta causalidad en un elemento de almacenamiento se le llama causalidad integral, debido a que la integral de la entrada $f(t)$ se relaciona con la salida $e(t)$, esto es:

$$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t) dt \tag{2.12}$$

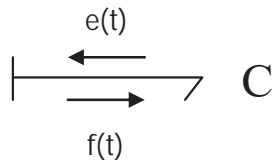


Figura 2.7 Elemento C en causalidad integral.

Invirtiendo la causalidad, mostrada en la figura 2.7, se obtiene la misma relación (2.12) pero escrita con derivadas:

$$f(t) = C \frac{de(t)}{dt} \tag{2.13}$$

A esta causalidad se le llama causalidad derivativa de un elemento de almacenamiento.

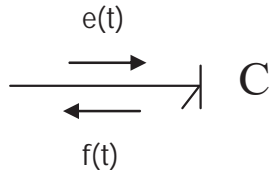


Figura 2.8 Elemento C en causalidad derivativa.

En la tabla 2.7 se muestran los Puertos 1 con la causalidad correspondiente a cada elemento considerado, con la relación causal aplicada al elemento.

Tabla 2.7 Formas causales para Puertos 1.

Elemento	Forma Causales	Relación Causal
Fuente de Esfuerzo	$MS_e \longrightarrow \diagup$	$e(t) = E(t)$
Fuente de Flujo	$MS_f \longleftarrow \diagdown$	$f(t) = F(t)$
Resistencia	$\longleftarrow \diagdown R$	$e(t) = \Phi_R[f(t)]$
	$\longrightarrow \diagup R$	$f(t) = \Phi_R^{-1}[e(t)]$
Capacitancia	$\longleftarrow \diagdown C$	$e(t) = \square_C^{-1}[\int^t f(\tau)d\tau]$
	$\longrightarrow \diagup C$	$f(t) = \frac{d}{dt}[\square_C e(t)]$
Inductancia	$\longrightarrow \diagup I$	$f(t) = \square_I^{-1}[\int^t e(\tau)d\tau]$
	$\longleftarrow \diagdown I$	$e(t) = \frac{d}{dt}[\square_I f(t)]$

Se dice que un Bond Graph es causalmente correcto, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones.

2.5 Bond Activo

Un bond normal tiene dos señales, esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. A diferencia, un bond activo comunica una de las dos señales posibles en una sola dirección.

Un bond activo se presenta por una flecha completa, como se muestra en la figura 2.9, indicando un flujo de señal de potencia cero.



Figura 2.9 Bond Activo.

Un bond activo se utiliza como una señal en un diagrama de bloques, la cual conecta un bloque a otro sin consumir energía como se muestra en la figura 2.10.

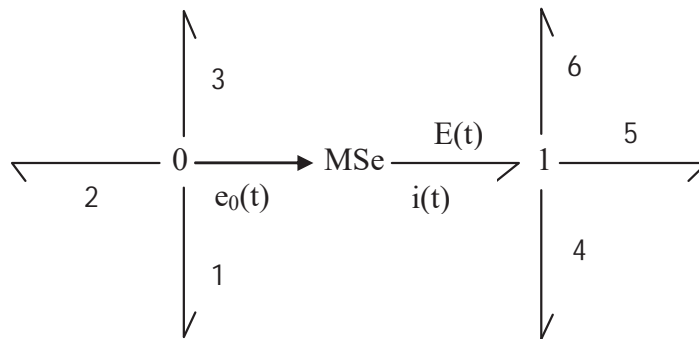


Figura 2.10 Bond Graph con un Bond activo.

El bond activo que entra a MSe indica que $E(t)$ es modulada por e_0 , así, $E(t) = Ge_0(t)$, donde G es la ganancia de voltaje. El bond activo viene de una unión-0, el voltaje $e_0(t)$ es el mismo que e_1 , e_2 , y e_3 .

Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a $e_0(t)$ es despreciable. La suma de las corrientes en la unión-0, se debe únicamente a i_1 , i_2 e i_3 .

2.6 Procedimiento para el Modelado de Sistemas en Bond Graph

En esta sección se mencionan los pasos para representar un sistema en un Bond Graph:

- 1.- Se dibuja una unión-0 para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
- 2.- Se dibuja una unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y elementos disipadores.
- 3.- Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
- 4.- Remover la unión-0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a esta unión.
- 5.- Simplificar la gráfica de acuerdo a las siguientes reglas:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \searrow \end{array} 1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \searrow \end{array} \qquad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \searrow \end{array} 0 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \searrow \end{array}$$

2.7 Vectores Clave o Vectores Significativos

En un Bond Graph en forma convencional, todos los bonds pueden ser clasificados en bonds externos, que conectan a los elementos o puertos R, C, I, MS_e y MS_f , y en bonds internos que conectan a 0, 1, TF y GY. Así mismo, los bonds externos pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía. En la siguiente figura 2.11 se muestra el diagrama a bloques de la Estructura Unión de un Bond Graph.

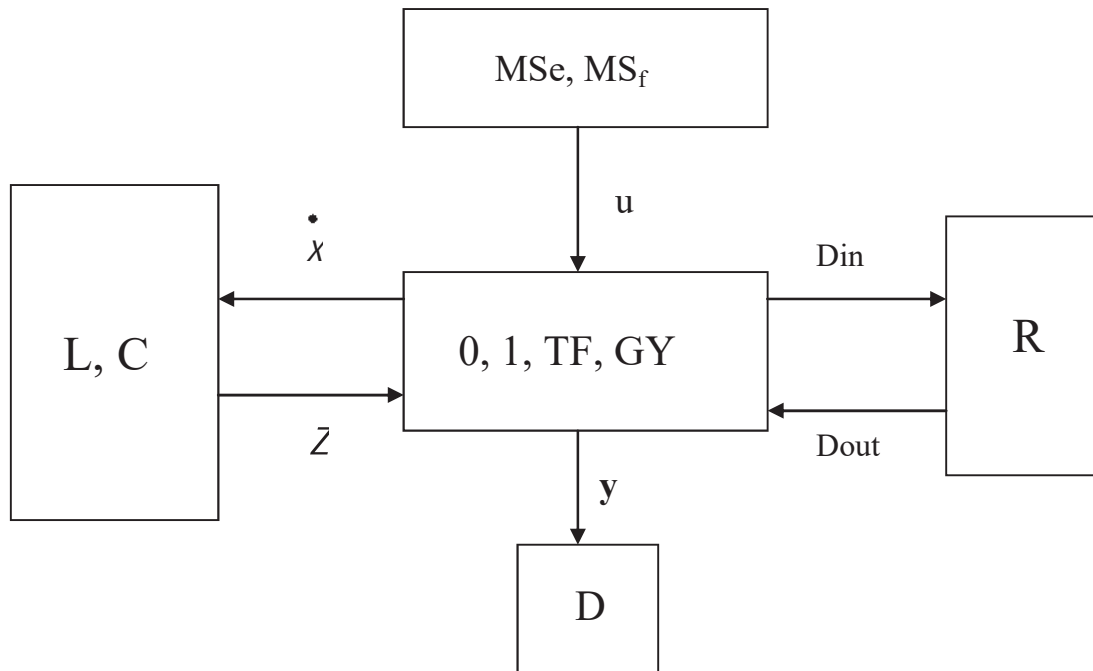


Figura 2.11 Diagramas de bloques de la estructura de Unión de un Bond Graph.

Las variables (MSe, MS_f) , (L, C) y (R) denotan los campos de fuente, de almacenamiento y de disipación respectivamente, (D) el detector y $(0,1,TF, GY)$ la estructura de unión con transformadores, TF, giradores, GY, uniones-0 y uniones-1.

2.7.1 Relaciones de campo y ecuación de estado

Las relaciones de campo no lineales de la figura 2.11 de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.14)$$

$$z_d(t) = \Phi_{F_d}(x_d) \quad (2.15)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.16)$$

donde:

Φ_{F_i} denota una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{F_d} denota una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{outi} con D_{ini} para $i = 1, \dots, r$.

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual es llamada como su relación constitutiva. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.17)$$

$$D_{out} = LD_{in}(t) \quad (2.18)$$

Donde L y F son matrices reales de dimensión $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

donde la estructura de unión está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Los elementos de S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son los módulos del transformador y girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

P1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

P2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades P1 y P2 están basadas en el principio de conservación de energía.

2.7.2 Representación de espacio de estados

Un sistema está representado en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.21)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.22)$$

Relacionando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$A_p = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.23)$$

$$B_p = (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.24)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.25)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.26)$$

donde,

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (2.27)$$

Las ecuaciones anteriores permiten la obtención directa del modelado de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación de Bond Graph.

Capítulo 3

Análisis de Sistemas en Estado Estacionario

3.1 Introducción

Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente y cumplen determinado objetivo. Un sistema no está limitado a objetivos físicos. El concepto de sistema puede aplicarse a fenómenos dinámicos abstractos, como los que se encuentran en economía. Por tanto, el término *sistema* hay que interpretarlo como referido a sistemas físicos, biológicos, económicos y otros.

Los *sistemas de control* son aquellos dedicados a obtener la salida deseada de un sistema o proceso. En un sistema general se tienen una serie de entradas que provienen del sistema a controlar, llamado planta, y se diseña un sistema para que, a partir de estas entradas, modifique ciertos parámetros en el sistema planta, con lo que las señales anteriores volverán a su estado normal ante cualquier variación.

Un sistema de control básico es mostrado en la figura 3.1.

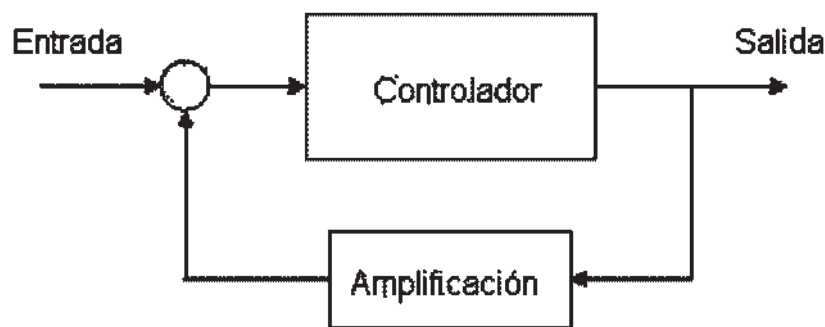


Figura 3.1 Sistema de Control.

La *respuesta temporal* de un sistema de control consta de dos partes: la transitoria y la respuesta en estado estacionario.

La *respuesta transitoria* constituye el hecho de que los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente, y presentan estados transitorios cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones, hasta que alcanzan una situación estacionaria. Por respuesta en estado estacionario se entiende la forma en que la salida del sistema tiende a infinito.

Se dice que un sistema *físico* está en *estado estacionario* cuando las características del mismo no varían con el tiempo.

La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable.

Si la salida de un sistema en estado estacionario no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un error en estado estacionario. Este error indica la exactitud del sistema.

Al analizar un sistema de control, se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria, así como el tiempo requerido para alcanzar el nuevo estado de reposo y el valor del error mientras sigue a la señal de entrada, así como el comportamiento en estado estacionario.

3.2 Respuesta de un Sistema

La respuesta en el tiempo de un sistema *estable* a una entrada de prueba consta de dos componentes:

- Respuesta transitoria.
- Respuesta estacionaria o estado estacionario.

Se llama repuesta transitoria a la que va del estado inicial al estado en que la salida alcanza aproximadamente su valor final constante llamado *ganancia del sistema*. Por respuesta estacionaria se entiende la forma en la que la salida se comporta cuando t tiende a infinito. Ambas respuestas son representadas en la figura 3.2.

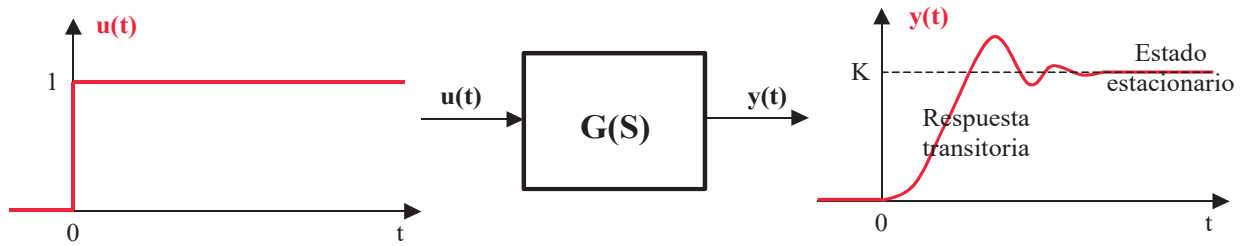


Figura 3.2 Respuesta de un sistema.

La respuesta general del sistema es,

$$\text{Respuesta} = \text{respuesta transitoria} + \text{respuesta de estado estacionario}.$$

En general, la forma específica de la respuesta a un escalón unitario dependerá del propio sistema, de sus parámetros y de las condiciones iniciales, sin embargo, el valor final sólo depende del sistema en sí, como se muestra en la figura 3.3, en donde se muestra la respuesta de un mismo sistema ante tres condiciones iniciales distintas.

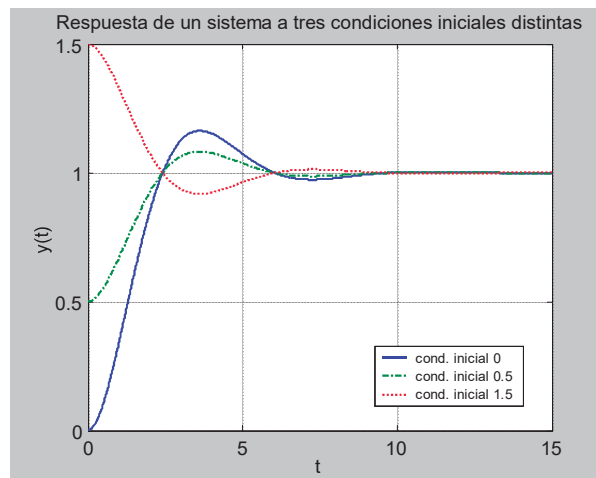


Figura 3.3 Respuesta de un sistema a tres condiciones iniciales.

Dicho valor final puede calcularse a partir de la función transferencia $G(s)$ y la entrada $U(s)$ utilizando el Teorema del Valor Final,

$$y_{\text{final}} = y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s)$$

Ejemplo: El sistema cuya respuesta se muestra en la figura 3.3 es la función transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Para una entrada siendo un escalón unitario

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto, la salida en estado estacionario está dada por,

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2 + s + 1} \frac{1}{s} = 1$$

Lo cual coincide con lo observado en la figura 3.3.

3.3 Estado Estacionario de un Sistema Modelado en Espacio de Estado

Un sistema moderno complejo posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí en una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas. El enfoque en el espacio de estados para los análisis de sistemas es el más conveniente.

3.3.1 Definición de Conceptos

A continuación se describen algunos conceptos, como estado, variables de estado, vector de estado y espacio de estado.

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables denominadas *variables de estado* tales que el conocimiento de esas variables en $t=t_0$, conjuntamente con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Variables de estado. Las variables de estado de un sistema dinámico son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico.

Si se necesitan al menos n variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial $t=t_0$ el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Vector de estado. Si se requieren n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, se puede considerar a esa n variables como n componentes de un vector \mathbf{x} . Tal vector recibe el nombre de *vector de estado*.

Espacio de estado. El espacio n -dimensional cuyos ejes coordenados consisten en el eje x_1 , el eje x_2, \dots , el eje x_n , se denomina *espacio de estado*. Todo estado estará representado por un punto en el espacio de estado.

En el análisis en el espacio de estado, se utilizan tres tipos de variables en el modelado de sistemas dinámicos:

- Variables de entrada
- Variables de salida
- Variables de estado

Suponemos que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene n integradores. También suponemos que existen r entradas y m salidas. Definimos n salidas de los integradores como variables de estado. El sistema se describe mediante,

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{X}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned}$$

Las salidas del sistema están definidas por,

$$Y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$Y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$Y_m(t) = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

Si se definen

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Las ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) \\ y(t) &= g(x, u, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde la primera es la ecuación de estado y la segunda la ecuación de salida.

Si las funciones vectoriales f y g involucran explícitamente el tiempo t , el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se linealizan las ecuaciones alrededor del estado de operación, tenemos las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) \\ y(t) &= C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por lo que las matrices son,

$A(t)$ → matriz de estado

$B(t)$ → matriz de entrada

$C(t)$ → matriz de salida

$D(t)$ → matriz de transmisión directa

Si las funciones vectoriales f y g no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso las ecuaciones son:

$$\text{Ecuación de Estado} \longrightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.5)$$

$$\text{Ecuación de Salida} \longrightarrow y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.6)$$

3.3.2 Estado Estable

La respuesta del estado estable es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado del sistema físico cuando el periodo dinámico ha finalizado. Entonces,

$$\dot{x}(t) = 0$$

Así, obteniendo el estado estacionario de un sistema modelado en espacio de estado,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.7)$$

$$Ax + Bu = 0$$

Despejando las variables de estado x ,

$$Ax = -Bu$$

Por lo que el estado estacionario de las variables del estado del sistema es,

$$x_{ss} = -A^{-1}Bu_{ss} \quad (3.8)$$

Donde x_{ss} y u_{ss} son los valores de estado estacionario de las variables de estado y de la entrada, respectivamente.

Notar que bajo este enfoque es necesario que la matriz de estados, A , sea invertida es decir, que todos los estados del sistema sean linealmente independientes.

Para la ecuación de salida, se obtiene

$$y_{ss} = Cx + Du \quad (3.9)$$

sustituyendo la ecuación de estado estacionario (3.8) en (3.9) queda de la siguiente manera:

$$y_{ss} = C(-A^{-1}Bu_{ss}) + Du_{ss}$$

$$y_{ss} = (D - A^{-1}B) * u_{ss} \quad (3.10)$$

donde y_{ss} es el valor en estado estacionario de la salida.

3.4 Estado Estacionario de un Sistema en el Dominio de la Frecuencia

El *dominio de la frecuencia* es un término usado para describir el análisis de funciones matemáticas o señales respecto a su frecuencia.

Un gráfico del dominio temporal muestra la evolución de una señal en el tiempo, mientras que un gráfico frecuencial muestra las componentes de la señal según la frecuencia en la que oscilan dentro de un rango determinado. Una representación frecuencial incluye también la información sobre el desplazamiento de fase que debe ser aplicado a cada frecuencia para poder recombinar las componentes frecuenciales y poder recuperar de nuevo la señal original.

Un sistema puede representarse en el espacio de estado por la siguiente ecuación:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.7)$$

Donde x es el vector de estado, u es la entrada e y es la salida. La transformada de Laplace de la ecuación están dadas por

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

Aplicando el Teorema del Valor Final se tiene:

$$X_{SS} = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{s \rightarrow 0} X(s)$$

$$X_{SS} = \lim_{s \rightarrow 0} (sI - A)^{-1} BU(s) \quad ; U(0) = U_{SS}$$

$$X_{SS} = -A^{-1} BU(0) = -A^{-1} BU_{SS}$$

Por lo tanto, dado un sistema en el dominio del tiempo o de la frecuencia, se puede determinar la respuesta de estado estacionario del sistema utilizando la última ecuación obtenida.

3.5 Modelado de un Sistema en un Bond Graph en una asignación en Causalidad Derivativa

La Causalidad Derivativa se representa cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes.

La respuesta del estado estable es útil para saber los valores que alcanza cada variable de estado del sistema físico cuando el periodo dinámico ha finalizado.

Haciendo $\dot{x} = 0$

$$\text{Se tiene:} \quad X_{SS} = -A^{-1} Bu_{SS} \quad (3.8)$$

$$y_{SS} = (D - CA^{-1}B)u_{SS} \quad (3.10)$$

Entonces, a partir de (3.8) para calcular el estado estable, se requiere invertir la matriz A^{-1} y esto no es fácil de obtener para algunos sistemas de orden alto.

Sin embargo, un Bond Graph con asignación en causalidad derivativa de los elementos de almacenamiento puede ser utilizado para resolver directamente el problema y obtener A^{-1} .

Sea la estructura unión de un sistema modelado en Bond Graph en donde los elementos de almacenamiento tienen una asignación en causalidad derivativa de manera predefinida, la cual está definida por,

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{ind} \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{outd} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$D_{outd} = L_d D_{ind} \quad (3.12)$$

Los elementos de almacenamiento en (3.11) tienen una asignación en causalidad derivativa, D_{ind} y D_{outd} están definidos de la misma manera que D_{out} y D_{in} con su causalidad asignada en este nuevo bond graph. En caso de tener que cambiar la causalidad a los elementos disipativos se tendrá que definir nuevamente D_{ind} y D_{outd} para que la causalidad en las uniones esté correcta.

La ecuación de estado y la ecuación de salida en un Bond Graph en Causalidad Derivativa (BGD) están dadas por,

$$z = A^* \dot{x} + B^* u \quad (3.13)$$

$$y_d = C^* \dot{x} + D^* u \quad (3.14)$$

De las ecuaciones (3.11), (3.13) y (3.14) se obtienen A^* , B^* , C^* y D^* . A partir de la ecuación (3.11) se obtienen las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17) multiplicando renglón por columna.

$$z = J_{11} \dot{x} + J_{12} D_{outd} + J_{13} u \quad (3.15)$$

$$D_{in} = J_{21} \dot{x} + J_{22} D_{outd} + J_{23} u \quad (3.16)$$

Como $D_{out} = L_d D_{ind}$

$$D_{ind} - J_{22} L_d D_{ind} = J_{21} \dot{x} + J_{23} u$$

$$(I - J_{22} L_d) D_{ind} = J_{21} \dot{x} + J_{23} u$$

$$D_{ind} = (I - J_{22} L_d)^{-1} (J_{21} \dot{x} + J_{23} u)$$

$$y_d = J_{31} \dot{x} + J_{32} D_{out} + J_{33} u \quad (3.17)$$

Sustituyendo la (3.16) en (3.15) y en (3.17) queda de la siguiente manera,

$$z = J_{11} \dot{x} + J_{12} L_d (I - J_{22} L_d)^{-1} (J_{21} \dot{x} + J_{23} u) + J_{13} u \quad (3.15)$$

$$y_d = J_{31} \dot{x} + J_{32} L_d (I - J_{22} L_d)^{-1} (J_{21} \dot{x} + J_{23} u) + J_{33} u \quad (3.17)$$

$$N = L_d (I - J_{22} L_d)^{-1} \quad (3.18)$$

De esta manera se obtienen A^* , B^* , C^* y D^* descritas por,

$$A^* = J_{11} + J_{12} N J_{21} \quad (3.19)$$

$$B^* = J_{13} + J_{12} N J_{23} \quad (3.20)$$

$$C^* = J_{31} + J_{32} N J_{21} \quad (3.21)$$

$$D^* = J_{33} + J_{32} N J_{23} \quad (3.22)$$

3.5.1 Relación de un BGI y un BGD

La relación que existe de un Bond Graph Integral y un Derivativo es que se obtienen del mismo sistema físico y se puede hacer una relación de la siguiente manera:

Bond Graph Integral

Bond Graph Derivativo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.7)$$

$$z = A^* \dot{x} + B^* u \quad (3.13)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.9)$$

$$y_d = C \dot{x} + Du \quad (3.14)$$

Estructura Unión (Integral)

Estructura Unión (Derivativa)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Despejando \dot{x} de (3.13) y sustituyendo en (3.7)

$$z = A^* \dot{x} + B^* u \quad (3.13)$$

$$A^* \dot{x} = z - B^* u$$

$$\dot{x} = (A^*)^{-1} z + (-A^*)^{-1} B^* u$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$(A^*)^{-1} z + (-A^*)^{-1} B^* u = Ax + Bu$$

Como $z = Fx$ entonces,

$$(A^*)^{-1}Fx + (-A^*)^{-1}B^*u = Ax + Bu$$

$$A = (A^*)^{-1}F \rightarrow (A^*)^{-1} = AF^{-1}$$

$$A^* = A^{-1}F \quad (3.24)$$

$$B = (-A^*)^{-1}B^* \rightarrow B^* = (-A^*)B = -FA^{-1}B$$

$$B^* = -FA^{-1}B \quad (3.25)$$

Sustituyendo \dot{x} en (3.14)

$$y_d = C^* \dot{x} + D^* u \quad (3.14)$$

$$y_d = C^* (A^*)^{-1} Fx - C^* (A^*)^{-1} B^* u + D^* u$$

$$y_d = C^* (A^*)^{-1} Fx + [D^* - C^* (A^*)^{-1} B^*] u$$

$$y = Cx + Du \quad ; \quad \text{Si } y = y_d$$

$$C = C^* (A^*)^{-1} F; C^* (A^*)^{-1} = CF^{-1}$$

$$C^* = CF^{-1} A^* \quad (3.26)$$

$$C^* = CF^{-1} FA^{-1} = CA^{-1}$$

$$D = D^* - C^* (A^*)^{-1} B^*$$

$$D^* = D + C^* (A^*)^{-1} B^*$$

$$D^* = D + CA^{-1} AF^{-1} - FA^{-1} B$$

$$D^* = D - CA^{-1} B \quad (3.27)$$

3.5.2 Obtención directa simbólica del Estado Estacionario de un Sistema modelado en un Bond Graph con Causalidad Derivativa

La obtención directa simbólica del estado estable se obtiene utilizando las ecuaciones (3.25), (3.8) y (3.9) se obtiene el estado estable en Causalidad Derivativa.

Pasando F que es la matriz de almacenamiento a la izquierda de la ecuación (3.25),

$$B^* = -FA^{-1}B \quad (3.25)$$

Se obtiene,

$$F^{-1}B^* = -A^{-1}B$$

El resultado de la igualación anterior permite sustituir en la ecuación (3.8) para de esta manera poder obtener el estado estacionario en causalidad derivativa.

$$x_{ss} = -A^{-1}Bu \quad (3.8)$$

Por lo tanto, el *estado estacionario de un sistema modelado en Bond Graph es,*

$$x_{ss} = F^{-1}B^*u_{ss} \quad (3.28)$$

Donde B^* se determina por la ecuación (3.20) $B^* = J_{13} + J_{12}NJ_{23}$

El Estado Estacionario de la salida se obtiene a partir de la ecuación (3.10) que es la ecuación de salida, se sustituye la expresión equivalente en causalidad derivativa que es la ecuación (3.27) y de esta manera se obtiene el estado estacionario de la salida en causalidad derivativa.

$$y_{ss} = (D - CA^{-1}B)u \quad (3.10)$$

$$D^* = D - CA^{-1}B \quad (3.27)$$

$$y_{ss} = D^* u \quad (3.29)$$

La ecuación de estado estable de las variables de estado y la ecuación de salida en causalidad derivativa queda de la siguiente manera:

$$x_{ss} = F^{-1} B^* u \quad (3.28)$$

$$y_{ss} = D^* u \quad (3.29)$$

3.6 Ejemplo 1 Sistema Eléctrico

Considerando el sistema eléctrico de la figura 3.4 obtener los valores de las variables de estado en estado estable.

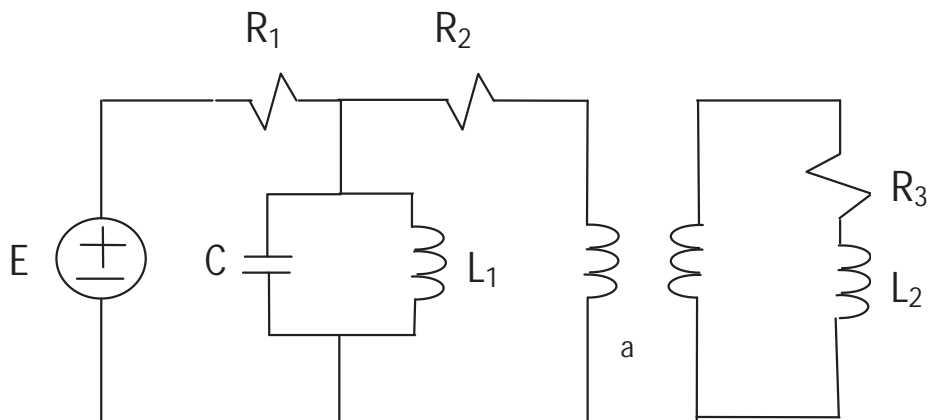


Figura 3.4. Sistema Eléctrico del ejemplo 1.

Obteniendo el modelo en Bond Graph del sistema eléctrico, el cual se muestra en la figura 3.5.

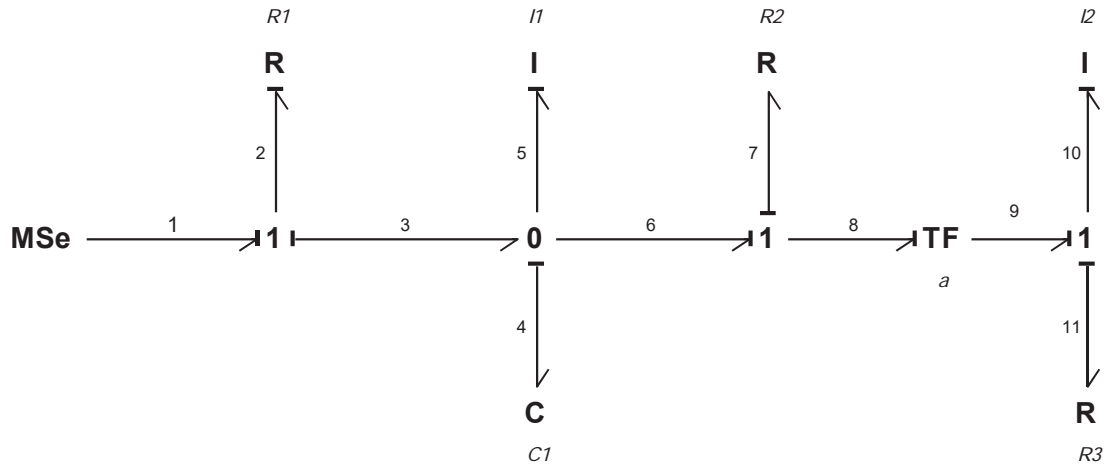


Figura 3.5 Bond Graph en causalidad integral del ejemplo 1.

A continuación en base al diagrama en Bond Graph, se obtienen los vectores clave para obtener la representación en espacio de estado del modelo.

3.6.1 Modelado matemático del sistema eléctrico

La obtención de los vectores clave es necesaria para el modelo matemático del sistema. Por lo que, los vectores clave del Bond Graph de la figura 3.5 son,

$$X = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_5 \\ p_{10} \end{bmatrix}; \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_5 \\ e_{10} \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_5 \\ f_{10} \end{bmatrix}; \quad D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ f_{11} \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \\ e_{11} \end{bmatrix}; \quad u = e_1$$

A continuación se da una breve descripción de las variables involucradas en la obtención de la representación de espacio de estados.

e_1 : Fuente de voltaje

e_2 : Voltaje en la resistencia R_1

f_2 : Flujo de corriente en R_1

e_4 : Voltaje en el Capacitor C_1

f_4 : Flujo de corriente en C_1

e_5 : Voltaje en el Inductor I_1

f_5 : Flujo de corriente en el Inductor I_1

e_7 : Voltaje en la Resistencia R_2

f_7 : Flujo de corriente en la Resistencia R_2

e_{10} : Voltaje en el Inductor I_2

f_{10} : Flujo de corriente en el Inductor I_2

e_{11} : Voltaje en la Resistencia R_3

f_{11} : Flujo de corriente en la Resistencia R_3

Obtención de la matriz de almacenamiento y disipación

Se considera que el sistema eléctrico es un sistema lineal e invariante en el tiempo por lo que las relaciones constitutivas de los elementos de almacenamiento y de disipación para el Bond Graph de la figura 3.5 son,

$$Z = F X$$

$$D_{out} = L * D_{in}$$

F: Matriz de almacenamiento

L: Matriz de disipación

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_5 \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_5 \\ p_{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \\ e_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ f_{11} \end{bmatrix}$$

3.6.2 Obtención de la matriz de estructura unión (Causalidad Integral)

La estructura unión del sistema completo para el Bond Graph con una asignación en causalidad integral se obtiene a partir de la ecuación (2.20)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Siendo la representación de la matriz de estructura de unión descrita por,

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_5 \\ e_{10} \\ e_2 \\ f_7 \\ f_{11} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & -1 & \frac{-1}{a} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a} & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_4 \\ f_5 \\ f_{10} \\ f_2 \\ e_7 \\ e_{11} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz de estructura de unión S , en submatrices, para representar de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave,

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{-1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a} & -1 \end{bmatrix} \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.6.3 Obtención de la representación de espacio de estado

Una vez obtenida la partición de la matriz S, se encuentra la representación de espacio de estados descrita por la ecuación (2.21).

Para obtener la representación de espacio de estados, se tienen que encontrar las matrices que involucra esta respuesta del sistema.

En este caso $S_{22} = 0$ entonces:

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad M = (I)^{-1}L \quad M = I * L \quad M = L$$

de esta manera

$$A_p = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F$$

$$B_p = (S_{13} + S_{12}MS_{23})$$

Realizando las operaciones para obtener el resultado de A_p :

$$A_p = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{-1}{a} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{a L_2} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a C} & 0 & \frac{-R_2}{a^2 L_2} - \frac{R_3}{L_2} \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones para obtener el resultado de B_p :

Como, $S_{13} = 0$

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo, la ecuación de estado del sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_5 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{a L_2} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a C} & 0 & \frac{-R_2}{a^2 L_2} - \frac{R_3}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_5 \\ p_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_1$$

3.6.4 Bond Graph en Causalidad Derivativa del Sistema Eléctrico

El Bond Graph con una asignación de causalidad derivativa en los elementos de almacenamiento para el sistema eléctrico de la figura 3.4 se muestra en la figura 3.6.

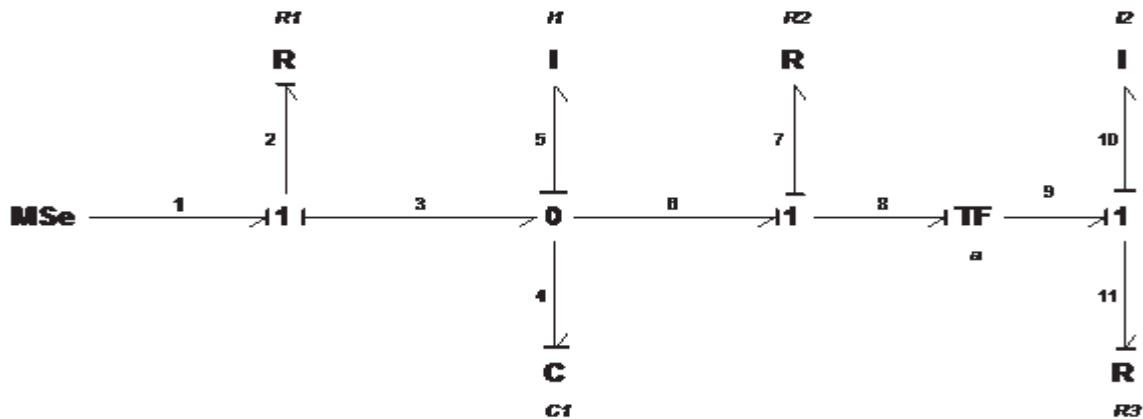


Figura 3.6 Bond Graph en causalidad derivativa del ejemplo 1.

Los nuevos vectores clave para el campo de disipación son los nuevos vectores D_{ind} , D_{outd} y L_d

$$D_{outd} = L_d D_{ind}$$

$$D_{ind} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad D_{outd} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \\ f_{11} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \\ f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

3.6.5 Obtención de la matriz de estructura unión (Causalidad Derivativa)

La estructura unión del Bond Graph en causalidad derivativa del sistema completo, haciendo referencia a la ecuación (3.11)

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

la representación de la matriz estructura unión de la figura 3.6 se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_5 \\ f_{10} \\ e_2 \\ f_7 \\ e_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -1 & 0 & \frac{-1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ e_5 \\ e_{10} \\ f_2 \\ e_7 \\ f_{11} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz de estructura de unión J , en submatrices ij , para representar de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave se tienen,

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -1 \end{bmatrix} \quad J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{-1}{a} & 0 \end{bmatrix} \quad J_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{J}_{13} + \mathbf{J}_{12}\mathbf{N}\mathbf{J}_{23} \quad \text{como } \mathbf{J}_{13} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{J}_{12}\mathbf{N}\mathbf{J}_{23}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}_d(\mathbf{I} - \mathbf{J}_{22}\mathbf{L}_d)^{-1}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^2 R_2 \frac{R_3}{R_2 + a^2 R_3} & a \frac{R_2}{R_2 + a^2 R_3} \\ 0 & -a \frac{R_2}{R_2 + a^2 R_3} & \frac{a^2}{R_2 + a^2 R_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & a^2 R_2 \frac{R_3}{R_2 + a^2 R_3} & a \frac{R_2}{R_2 + a^2 R_3} \\ 0 & -a \frac{R_2}{R_2 + a^2 R_3} & \frac{a^2}{R_2 + a^2 R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} B^* = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L_1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.6.6 Estado Estacionario del Sistema Eléctrico

Finalmente, a partir de la ecuación (3.28) el estado estacionario de las variables de estado queda de la siguiente manera,

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L_1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1$$

3.7 Ejemplo 2 Sistema Mecánico

Considerando el sistema mecánico de la figura 3.7 obtener el estado estacionario de las variables de estado.

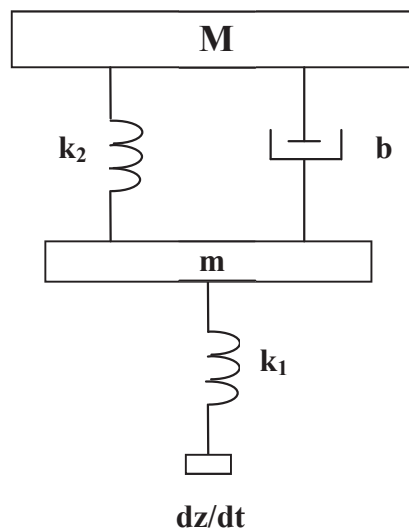
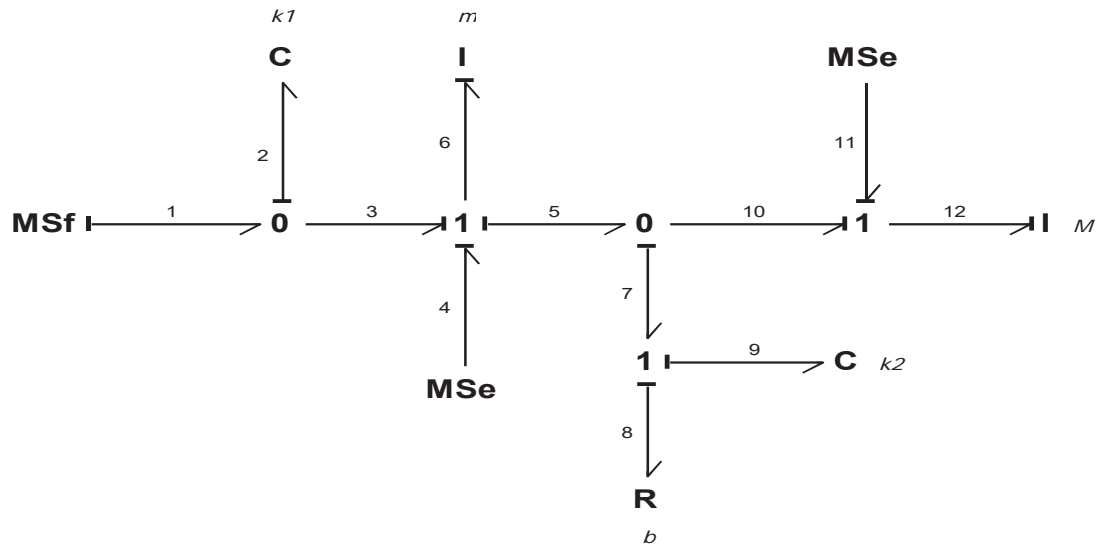


Figura 3.7 Sistema Mecánico del ejemplo 2.

El modelo en Bond Graph en causalidad integral se muestra en la figura 3.8 para el sistema mecánico de la figura 3.7.



20-sim 4.0 Viewer (c) CLP 2008

Figura 3.8 Bond Graph en causalidad Integral del ejemplo 2.

A continuación en base al diagrama en Bond Graph, se obtienen los vectores clave para obtener la representación en espacio de estado del modelo.

3.7.1 Modelado matemático del sistema mecánico

La obtención de los vectores clave es necesaria para el modelo matemático del sistema, por lo que a partir del Bond Graph de la figura 3.8, los vectores clave son:

$$X = \begin{bmatrix} q_2 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{12} \end{bmatrix} ; \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \end{bmatrix} ; \quad Z = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} ; \quad u = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad y = f_8 ; \quad D_{in} = f_8 ;$$

$$D_{out} = e_8$$

A continuación se da una breve descripción de las variables involucradas en la obtención de la representación de espacio de estados.

Obtención de la matriz de almacenamiento y disipación

Las relaciones constitutivas del campo de almacenamiento y de disipación son:

$$Z = F X$$

$$D_{out} = L * D_{in}$$

F: Matriz de almacenamiento

L: Matriz de disipación

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{12} \end{bmatrix}$$

$$e_8 = bf_8$$

3.7.2 Obtención de la matriz de estructura unión (Causalidad Integral)

La estructura unión del sistema completo, haciendo referencia a la ecuación (2.20) está dada por,

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \\ f_8 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \\ e_8 \\ f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz de estructura de unión S, en submatrices ij, para representar de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave,

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1$$

$$S_{22} = 0$$

$$S_{23} = 0 \quad 0 \quad 0$$

$$S_{31} = 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1$$

$$S_{32} = 0$$

$$S_{33} = 0 \quad 0 \quad 0$$

3.7.3 Obtención de la representación de espacio de estado

Una vez obtenida la división de la matriz S, se encuentra la representación de espacio de estados.

Para obtener la representación de espacio de estados, se tienen que encontrar las matrices que involucra la obtención del espacio de estados.

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & -k_2 & \frac{b}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la *ecuación de estado* queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & -k_2 & \frac{b}{M} \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & -\frac{1}{M} \\ 0 & \frac{b}{m} & k_2 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_6 \\ q_9 \\ p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

3.7.4 Bond Graph en Causalidad Derivativa del Sistema Mecánico

El Bond Graph en causalidad derivativa del sistema mecánico de la figura 3.7 ase muestra en la figura 3.9.

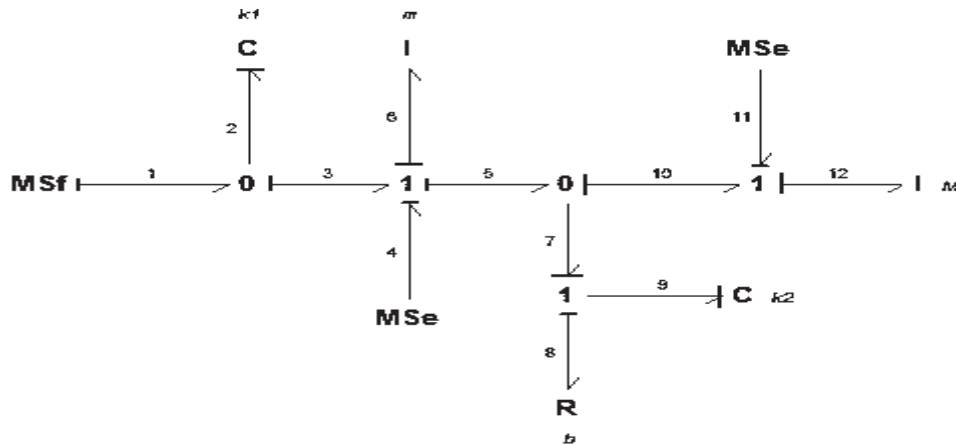


Figura 3.9 Bond Graph en causalidad derivativa del ejemplo 2.

3.7.5 Obtención de la matriz de estructura unión (Causalidad Derivativa)

La estructura unión del sistema completo, haciendo referencia a la ecuación (3.11)

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_9 \\ f_{12} \\ f_8 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_9 \\ e_{12} \\ e_8 \\ f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz de estructura de unión J, en submatrices ij, para representar de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave,

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & J_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & J_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J_{21} &= 0 & 0 & 1 & 0 & J_{22} &= 0 \\
 J_{23} &= 0 & 0 & 0 & J_{31} &= 0 & 0 & 1 & 0 & J_{32} &= 0 & J_{33} &= 0 & 0 & 0
 \end{aligned}$$

$$B^* = J_{13} + J_{12}NJ_{23}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.7.6 Estado Estacionario del Sistema Mecánico

Finalmente el valor de estado estacionario de las variables de estado queda de la siguiente manera:

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{k_1} & -\frac{1}{k_1} \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k_2} \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_4 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

Capítulo 4

Estado Estacionario en Bond Graph

4.1 Introducción

En este capítulo se propone la determinación de la respuesta de estado estacionario de sistemas físicos utilizando la metodología de Bond Graph. Se modela una central hidroeléctrica básica en Bond Graph, así como, un sistema de un generador síncrono en coordenadas $dq0$, su transformación en coordenadas abc y su conexión a un bus infinito modelado todo el sistema completo en Bond Graph, de tal manera que ambos sistemas se utilizan para obtener la respuesta de estado estacionario de cada uno de los sistemas modeladas en Bond Graph.

4.2 Obtención del estado estacionario de una central hidroeléctrica básica

La función de una central hidroeléctrica es utilizar la energía potencial del agua almacenada. El proceso de conversión de energía comienza en la transformación de la energía potencial a energía hidráulica, de energía hidráulica a mecánica, y la energía mecánica a energía eléctrica. En la figura 4.1 se muestra el diagrama de una central hidroeléctrica.[2]

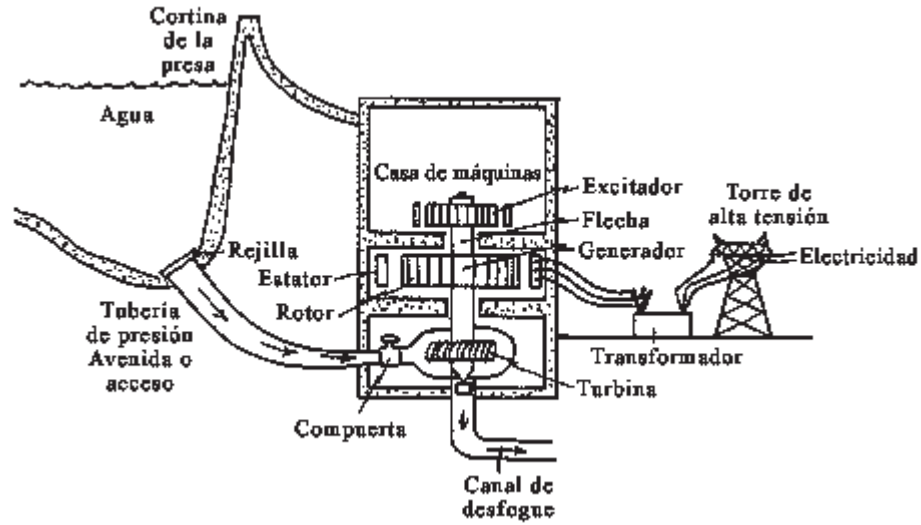


Figura 4.1 Diagrama de una central hidroeléctrica.

4.2.1 Central Hidroeléctrica en Bond Graph

En la figura 4.2 a) se muestra el modelo físico de la central hidroeléctrica básica y en la figura 4.2 b) su representación en el dominio de Bond Graph.

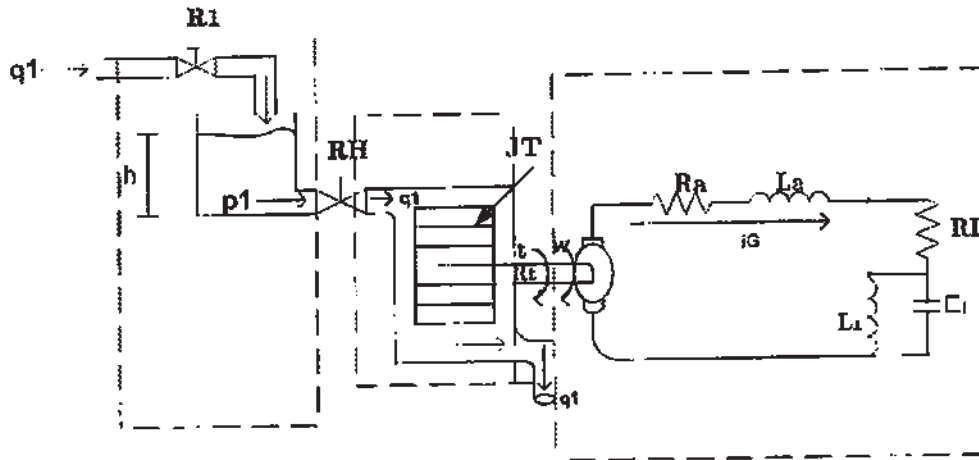


Figura 4.2 a) Modelo físico de una central hidroeléctrica.

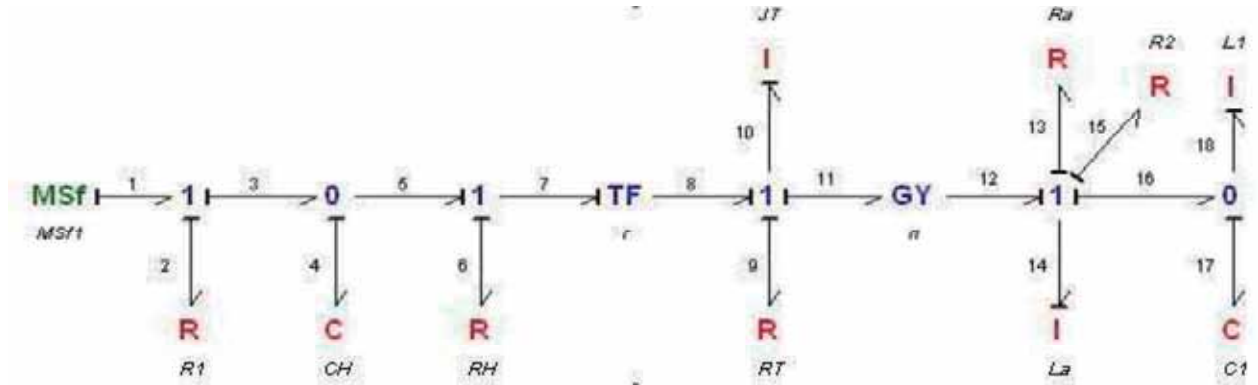


Figura 4.2 b) Bond Graph completo de central hidroeléctrica con causalidad integral.

En base al diagrama en Bond Graph, se obtienen los vectores clave para obtener la representación en espacio de estados del modelo de la central hidroeléctrica básica.

4.2.2 Vectores clave de la central hidroeléctrica

La obtención de los vectores clave es necesaria para el modelado matemático del sistema físico a partir de su modelo en Bond Graph en causalidad integral, los cuales son,

$$X = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_{10} \\ p_{14} \\ q_{17} \\ p_{18} \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_{10} \\ e_{14} \\ f_{17} \\ e_{18} \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_{10} \\ f_{14} \\ e_{17} \\ f_{18} \end{bmatrix} \quad D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_9 \\ f_{13} \\ f_{15} \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_9 \\ e_{13} \\ e_{15} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_{10} \\ f_{13} \\ f_{17} \\ f_{18} \end{bmatrix} \quad u = f_1$$

A continuación se da una breve descripción de las variables involucradas en la obtención de la representación de espacio de estados, se explican de acuerdo al orden de los subsistemas hidráulico, subsistema hidráulico – mecánico y subsistema eléctrico acoplados al sistema físico de la central hidráulica básica, que son:

a) Sistema hidráulico de la central hidroeléctrica.

e_2 : Presión de flujo en la válvula R:R1

f_2 : Flujo de volumen a la entrada de la válvula R:R1

e_4 : Presión del fluido en la presa C:CH

f_4 : Representa el volumen del fluido a la entrada de la presa C:CH.

q_4 : Flujo de volumen en la presa C:CH.

e_6 : Presión del fluido en la válvula R:RH.

f_6 : Flujo de volumen a la entrada de la válvula R:RH.

b) Sistema hidráulico – mecánico de la central hidroeléctrica.

e_7 : Presión en la entrada de la turbina hidráulica.

f_7 : Flujo de volumen a la entrada de la turbina hidráulica.

e_8 : Torque la salida de la turbina hidráulica.

f_8 : Velocidad en la salida de la turbina hidráulica.

e_9 : Torque t en R:RT

f_9 : Velocidad en la flecha

e_{10} : Torque t en I:LJ

f_{10} : Velocidad en la flecha

f_{11} : Es la velocidad angular w en I:LJ

f_{12} : Corriente eléctrica en la armadura

c) Sistema eléctrico de la central hidroeléctrica

e_{13} : Voltaje en la resistencia de Armadura R:Ra

f_{13} : Flujo de corriente en R:Ra la resistencia de Armadura

f_{14} : Flujo de corriente en I:La es la inductancia de Armadura

e_{15} : Voltaje en la resistencia de carga R:RL

e_{17} : Voltaje en el capacitor de carga C:C1

f_{17} : Corriente en el capacitor de carga C:C1

e_{18} : Voltaje en el inductor de carga I:L1

f_{18} : Corriente en el inductor de carga I:L1

4.2.3 Relaciones constitutivas de los elementos de almacenamiento y disipación

Las relaciones constitutivas que representan a los elementos de almacenamiento y de disipación que forman parte del modelo en Bond Graph de la central hidroeléctrica son,

$$Z = F X$$

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_{10} \\ f_{14} \\ e_{17} \\ f_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{CH} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{JT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{La} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_{10} \\ p_{14} \\ q_{17} \\ p_{18} \end{bmatrix}$$

$$Dout = L Din$$

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_9 \\ e_{13} \\ e_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_9 \\ f_{13} \\ f_{15} \end{bmatrix}$$

4.2.4 Obtención de la matriz de estructura unión de la central hidroeléctrica

La estructura unión del sistema completo, se da a continuación, haciendo referencia a la ecuación (2.19), siendo la matriz de unión,

$$\begin{bmatrix} f_{14} \\ e_{10} \\ e_{14} \\ f_{17} \\ e_{18} \\ f_2 \\ f_6 \\ f_9 \\ f_{13} \\ f_{15} \\ f_7 \\ f_{10} \\ f_{13} \\ f_{17} \\ f_{18} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_4 \\ f_{10} \\ f_{14} \\ e_{17} \\ f_{18} \\ e_2 \\ e_6 \\ e_9 \\ e_{13} \\ e_{15} \\ f_1 \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz de estructura de unión S , en submatrices ij , para representar de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave.

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 S_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & S_{22} &= 0 & S_{23} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 S_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & S_{32} &= 0 & S_{33} &= 0
 \end{aligned}$$

4.2.5 Obtención de la representación de espacio de estado

Una vez que se tiene la partición de la matriz S , se encuentra la representación de espacio de estados. Haciendo referencia a las ecuaciones en el capítulo 2.

Para obtener la representación de espacio de estados, se debe encontrar las matrices que involucran la obtención del espacio de estados.

Para este caso $S_{22} = 0$ entonces, considerando la ecuación (2.27), tenemos que el valor de la matriz M está definida por,

$$M = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_L \end{bmatrix}$$

Considerando la ecuación (2.23), tenemos que el valor de la matriz A_p está definida por:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{rJT} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{rCH} & \frac{1}{JT} \left(-R_T - \frac{1}{r^2} R_H \right) & \frac{-r}{La} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{JT} & \frac{1}{La} - R_L - Ra & -\frac{1}{C1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{La} & 0 & -\frac{1}{L1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C1} & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación (2.24), tenemos que el valor de la matriz B_p está definida por,

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando la ecuación (2.25), tenemos que el valor de la matriz C_p está definida por,

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{rJT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{JT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{La} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{La} & 0 & -\frac{1}{L1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L1} \end{bmatrix}$$

Finalmente, a partir de la ecuación (2.26), tenemos que el valor de la matriz D_p está definida por,

Pero $S_{33} = 0$ y $S_{32} = 0$, se tiene que $D_p = 0$.

4.2.6 El sistema de la central hidroeléctrica en representación de espacio de estado

Considerando las ecuaciones del capítulo 2, (2.21) y la ecuación (2.22) la representación de espacio de estado está definida por,

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_{10} \\ e_{14} \\ f_{17} \\ e_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{rJT} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{rCH} & \frac{1}{JT} \left(-R_r - \frac{1}{r^2} R_H \right) & \frac{-r}{La} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{JT} & \frac{1}{La} & -R_L - Ra & -\frac{1}{C1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{La} & 0 & -\frac{1}{L1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_{10} \\ p_{14} \\ q_{17} \\ p_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_1$$

Las salidas del sistema son,

$$\begin{bmatrix} f_7 \\ f_{10} \\ f_{13} \\ f_{17} \\ f_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{rJT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{JT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{La} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{La} & 0 & -\frac{1}{L1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_{10} \\ p_{14} \\ q_{17} \\ p_{18} \end{bmatrix}$$

4.2.7 Bond Graph de Central Hidroeléctrica con asignación en Causalidad Derivativa

En la figura 4.3 se muestra el Bond Graph de la Central Hidroeléctrica básica con una causalidad derivativa asignada a los elementos de almacenamiento.

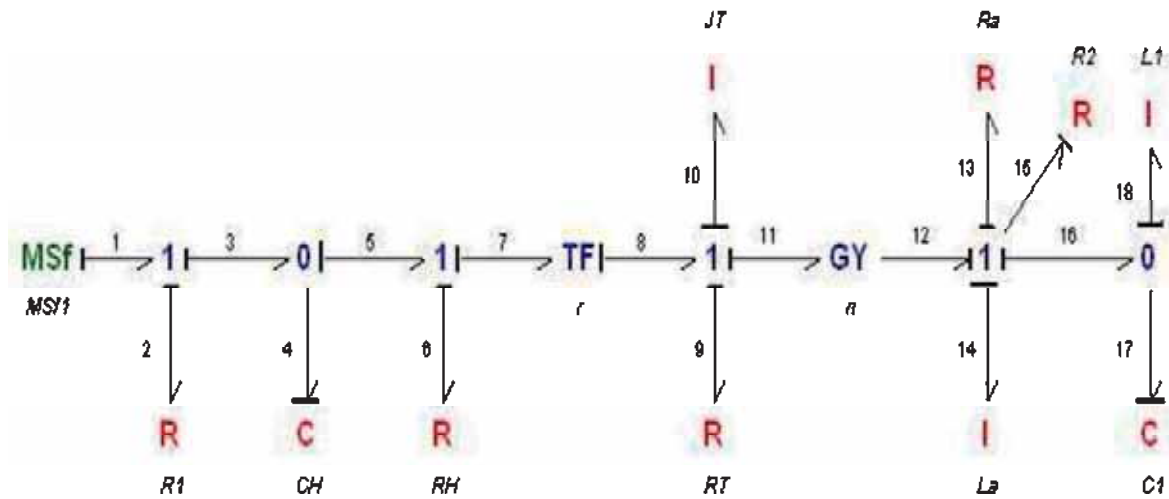


Figura 4.3 Bond Graph completo de central hidroeléctrica con causalidad derivativa.

En este caso se redefinen los vectores D_{in} y D_{out} que quedan definidos de la siguiente manera:

$$D_{out} = L_d D_{ind}$$

$$D_{ind} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_9 \\ f_{13} \\ e_{15} \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_9 \\ e_{13} \\ f_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_9 \\ e_{13} \\ f_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_9 \\ f_{13} \\ e_{15} \end{bmatrix}$$

4.2.7.1 Obtención de la matriz de estructura de unión (Causalidad Derivativa)

La estructura unión del sistema completo, haciendo referencia a la ecuación (3.11) se muestra a continuación,

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_{10} \\ f_{14} \\ e_{17} \\ f_{18} \\ f_2 \\ f_6 \\ f_9 \\ f_{13} \\ e_{15} \\ f_7 \\ f_{10} \\ f_{13} \\ f_{17} \\ f_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & rn & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -rn & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & rn \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ e_{10} \\ e_{14} \\ f_{17} \\ e_{18} \\ e_2 \\ e_6 \\ e_9 \\ e_{13} \\ f_{15} \\ f_1 \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz de unión J , en submatrices ij , para representar de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave,

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & r & 0 & rn \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -rn & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J_{22} = 0 \quad J_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ r \\ 0 \\ rn \end{bmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_{33} = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerando la ecuación (3.18) se tiene,

$$N = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_L \frac{Ra}{R_L + Ra} & \frac{Ra}{R_L + Ra} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{Ra}{R_L + Ra} & \frac{1}{R_L + Ra} \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación (3.20) se tiene,

$$B^* = \begin{bmatrix} R_{ii} + r^2 R_T + n^2 \frac{r^2}{R_L + Ra} \\ r \\ n \frac{r}{R_L + Ra} \\ 0 \\ n \frac{r}{R_L + Ra} \end{bmatrix}$$

4.2.8 Estado estacionario de la central hidroeléctrica

El estado estacionario la central hidroeléctrica básica se obtiene a partir de la ecuación (3.28) que es la expresión del estado estacionario en causalidad derivativa, lo cual queda de la siguiente manera,

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} CH(R_H + r^2 R_T + n^2 \frac{r^2}{R_L + Ra}) \\ rJT \\ nr \frac{La}{R_L + Ra} \\ 0 \\ nr \frac{L1}{R_L + Ra} \end{bmatrix} f_1$$

Se le asignan valores a la expresión de estado estacionario de la central hidroeléctrica básica para verificar los valores de estado estacionario numéricos de acuerdo a la simulación que se lleva a cabo del sistema.

Los valores asignados a los elementos de la central hidroeléctrica son los siguientes

$f_1 = 20$	Es el caudal
$R_1 = 0.45$	Resistencia de la válvula de entrada
$CH = 0.8$	Capacitancia Hidráulica
$R_H = 0.15$	Resistencia Hidráulica
$r = 0.8$	Relación de transformación del transformador
$R_T = 0.5$	Resistencia mecánica en la salida de la turbina
$n = 1$	Relación de transformación del girador
$La = 0.05$	Inductancia de la armadura
$Ra = 0.3$	Resistencia de la armadura
$R_L = 3$	Resistencia de la carga
$L1 = 0.05$	Inductancia de la carga
$C1 = 0.001$	Capacitor de la carga
$JT = 0.9$	Velocidad de la turbina

Sustituyendo los valores numéricos en la expresión del Estado Estacionario,

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} 0.8(0.15 + 0.8^2 * 0.5 + 1^2 \frac{0.8^2}{3 + 0.3}) \\ 0.8 * 0.9 \\ 1 * 0.8 \frac{0.05}{3 + 0.3} \\ 0 \\ 1 * 0.8 \frac{0.05}{3 + 0.3} \end{bmatrix} \quad 20$$

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} 10.623 \\ 14.4 \\ 0.2424 \\ 0 \\ 0.2424 \end{bmatrix}$$

Valores obtenidos en estado estacionario de las variables de estado con la técnica de Bond Graph son $(q4)_{ss}=10.623$, $(p10)_{ss}=14.4$, $(p14)_{ss}=0.2424$, $(q17)_{ss}=0$ y $(p18)_{ss}=0.2424$.

4.2.9 Graficas de los valores de las variables de estado con el programa 20-SIM:

La grafica que se muestra en la figura 4.4 muestra el flujo de volumen en la turbina, en donde se puede apreciar el tiempo que requiere para lograr obtener el estado estacionario de esta variable de estado.

Esta variable de estado $q4$ obtiene un valor de estado estacionario de 10.633 en 9 segundos.

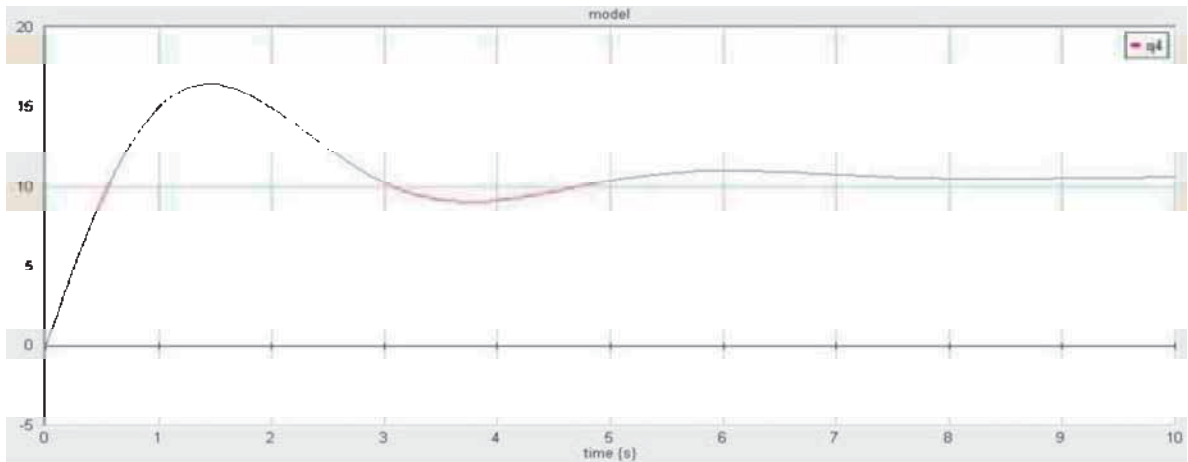


Figura 4.4 Entrada de caudal en la turbina.

La figura 4.5 muestra el momento rotacional en la turbina, esto debido a la presión en la entrada de la turbina. La variable de estado $p10$ tiene un valor en estado estacionario de 14.3630 de acuerdo a la gráfica de la simulación.

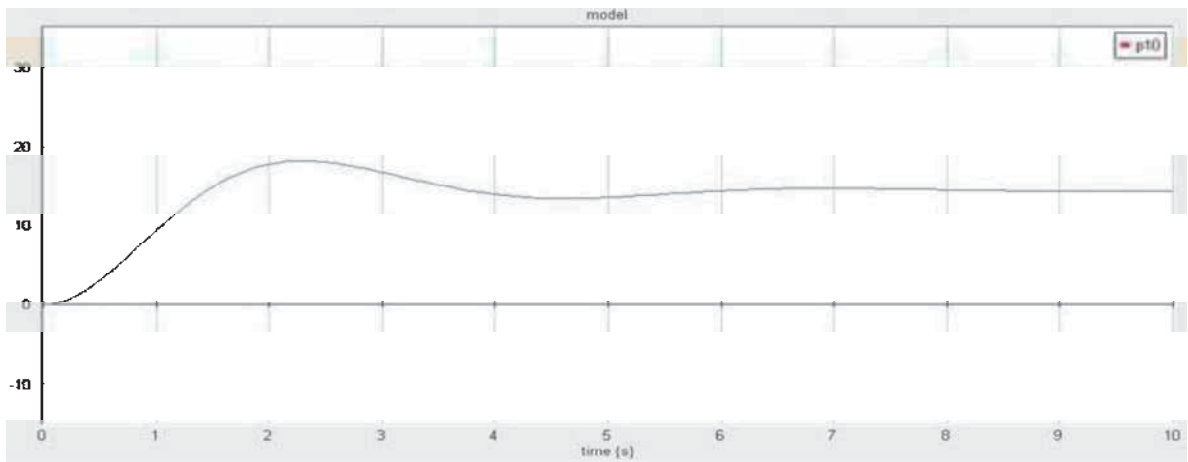


Figura 4.5 Momento rotacional en la turbina.

En la figura 4.6 se muestra el enlace de flujo en la inductancia de armadura del generador, siendo la variable de estado $p14$.

La variable de estado **p14** tiene un valor de estado estacionario de 0.2417.

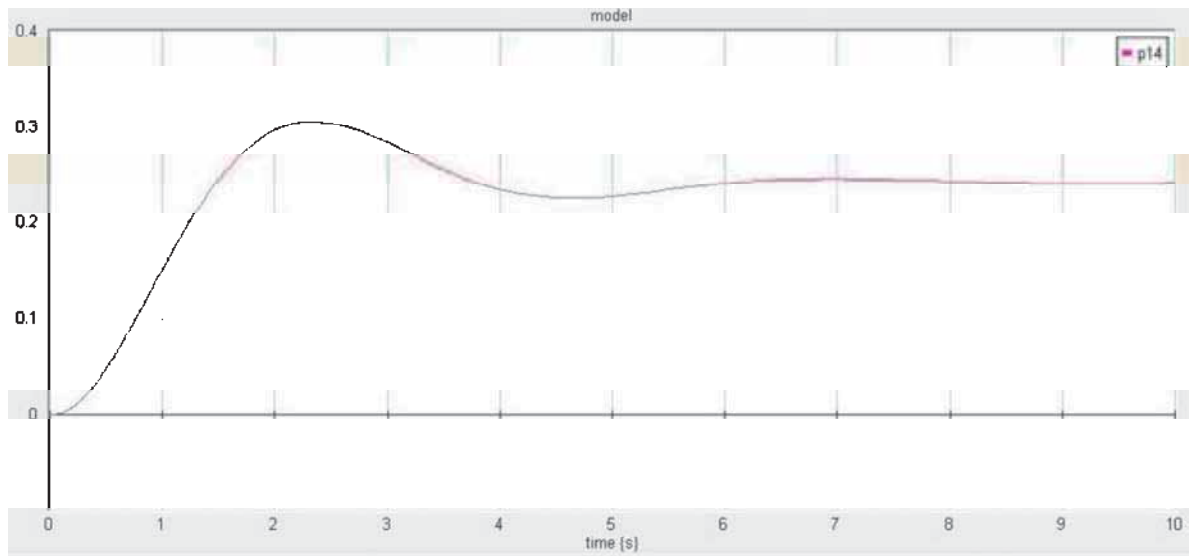


Figura 4.6 Respuesta del enlace de flujo en la inductancia del generador.

La carga de capacitor del sistema como variable de estado es q17 cuyo valor en estado estacionario es de 0 de acuerdo a la gráfica que se muestra en la figura 4.7.

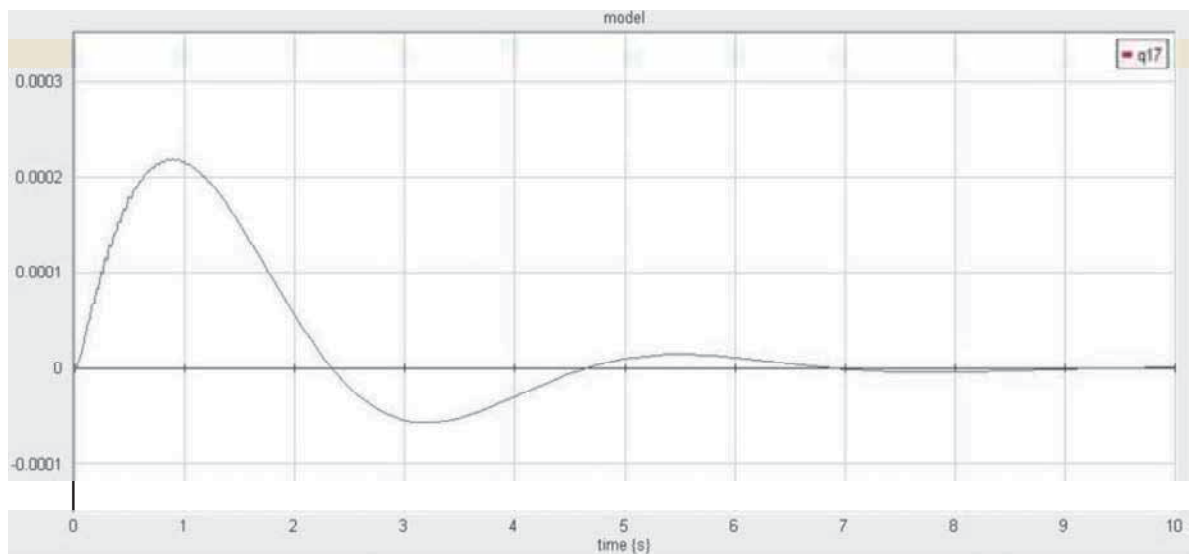


Figura 4.7 Flujo acumulado en el capacitor de la carga.

La figura 4.8 muestra la gráfica del enlace de flujo de la inductancia de carga, cuya variable de estado es p18 y su valor en estado estacionario es de 0.2417.

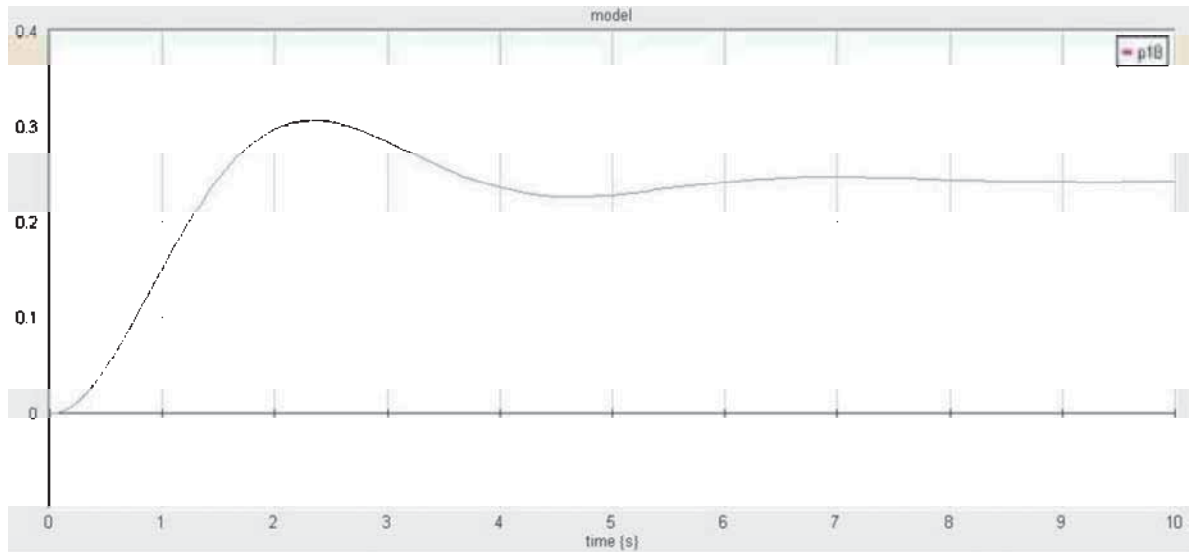


Figura 4.8 Enlace de flujo en inductancia de carga.

Realizando la simulación del sistema con el Programa 20-Sim las variables de estado tienen como valores de estado estacionario los siguientes: $(q4)_{ss}=10.633$, $(p10)_{ss}=14.3630$, $(p14)_{ss}=9.928e-007$ y $(q17)_{ss}=0.2417$.

Finalmente, la Tabla 4.1 muestra la comparación de los resultados obtenidos por medio de la simulación en 20-Sim y por medio de la metodología de Bond Graph, donde se puede apreciar que prácticamente los resultados son casi iguales. Por lo tanto, se demuestra que la metodología de Bond Graph puede ser utilizada para la determinación de la respuesta en estado estacionario de un sistema modelado en Bond Graph.

Tabla 4.1.- Comparando valores.

Bond Graph	20-sim
10.623	10.633
14.4	14.3630
0.2424	0.2417
0	9.928e-007
0.2424	0.2417

4.3 Estado Estacionario de un Generador Síncrono

En casi todo el mundo donde se involucran sistemas de potencia son utilizadas las máquinas síncronas empleadas en turbinas hidráulicas o de vapor o en maquinaria de combustión.

El principal objetivo de la máquina síncrona es el de convertir energía mecánica a energía eléctrica. El comportamiento eléctrico y electromecánico de la mayoría de las máquinas síncronas puede ser determinado por las ecuaciones que describen las tres fases de la máquina síncrona de polos salientes. En particular estas ecuaciones pueden emplearse para predecir el desempeño directamente en generadores síncronos, y con pequeñas modificaciones las inductancias del motor.

El rotor de la máquina síncrona está equipado con un devanado de campo y uno o más devanados de amortiguamiento y por lo general, todos los devanados del rotor tienen diferentes características eléctricas. Por otro lado, el rotor de la máquina síncrona de polos salientes es magnéticamente asimétrico. Como resultado de esta asimetría, un cambio de variables del rotor no ofrece ninguna ventaja. Sin embargo un cambio en las variables del estator es beneficioso. En la mayoría de los casos, las variables del estator son cambiadas a un marco de referencia fijo con el rotor (Transformada de Park), como sea las variables del estator también pueden ser expresadas en cualquier marco de referencia, lo cual es conveniente para algunas simulaciones en computadora.

4.3.1 Descripción física de la máquina síncrona

La figura 4.9 muestra una máquina síncrona de tres fases con un par de polos y un devanado de campo. La máquina consiste de dos elementos básicos que son el campo y la armadura.

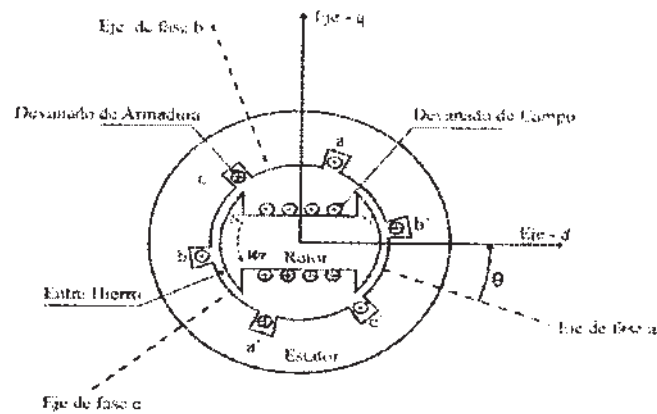


Figura 4.9 Esquema de una máquina síncrona.

Además de los elementos más importantes en la máquina, la figura 4.9 muestra la ubicación de los devanados del inducido, así como la distribución de las fases en la máquina del entre hierro a-a', b-b' y c-c' la ω_r que es la frecuencia angular del rotor, θ que es el ángulo que proporciona la posición del motor.

Los voltajes que se encuentran en los devanados de la armadura son más altos que los que se tienen en el devanado de campo. Las tres fases en la máquina se encuentran distribuidos 120° entre ellos. Con una rotación uniforme del devanado de campo en el generador, el desplazamiento producido será de 120° en tiempo de fase. Debido a que la armadura está sujeta a variaciones del flujo magnético, el acero del estator es construido con láminas delgadas para reducir las pérdidas por las corrientes de Eddy.

Cuando se tienen corrientes balanceadas en las tres fases, la armadura producirá a la velocidad síncrona un campo magnético rotatorio en el entre hierro. Para crear un par estable, los campos del estator y del rotor deben rotar a la misma velocidad.

Existen dos estructuras básicas empleadas para el rotor las cuales dependen de su velocidad. Las turbinas hidráulicas operan a bajas velocidades por lo tanto esto lleva a que estén formadas por un número mayor de polos para generar la frecuencia requerida. Las turbinas de vapor y gas por otro lado operan a altas velocidades, y sus generadores están contruidos de forma cilíndrica y con acero sólido. Formados por dos o cuatro pares de polos, es común que no tengan devanados de campo pero debido al acero con que está

construido el rotor está ofrece camino para las corrientes de Eddy equivalentes a que si se tuvieran amortiguadores.

Bajo condiciones de estado estable, la única corriente que existe en el rotor es de corriente directa en el devanado de campo. Por otro lado bajo condiciones dinámicas las corrientes de Eddy son inducidas en la superficie del rotor, en las paredes de las ranuras y en los devanados de amortiguamiento.

4.3.2 Eje de cuadratura q y eje directo d

Para propósitos de identificar las características de la máquina síncrona es conveniente definir dos ejes:

- Eje directo d , posicionado en el eje del polo norte magnético.
- Eje de cuadratura q , este se encuentra a 90° del eje de cuadratura d .

La posición relativa del rotor al estator es medida por el ángulo θ entre el eje d y el eje magnético del devanado de la fase a .

4.3.3 Modelo en Bond Graph de un Generador Síncrono en ejes dq0

El modelo que se describe a continuación es la representación del generador síncrono en Bond Graph integral empleando el modelo dq0.

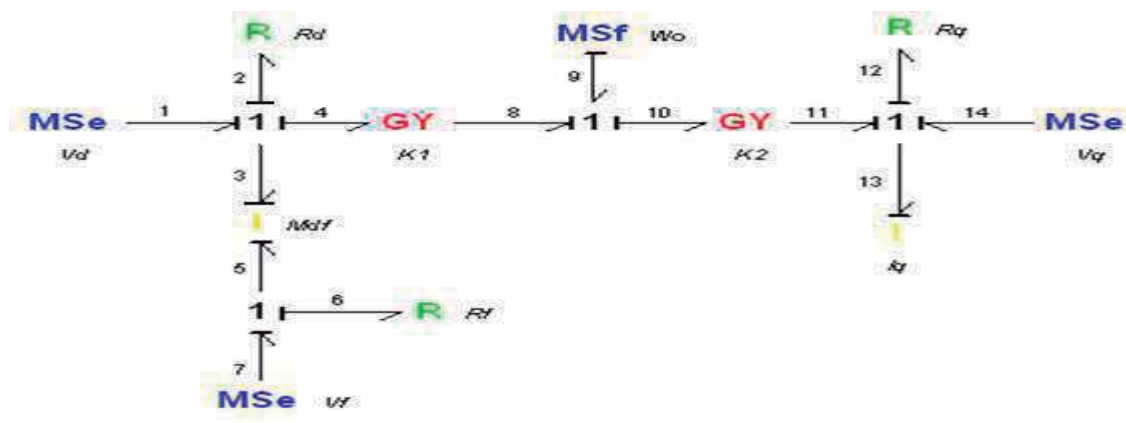


Figura 4.10.- Modelo en Bond Graph de un Generador Síncrono en ejes d-q operando a velocidad constante.

En base al diagrama de Bond Graph, se obtienen los vectores clave para obtener la representación en espacio de estados del modelo del Generador Síncrono.

4.3.3.1 Vectores clave del Generador Síncrono

Los vectores clave que corresponden al sistema físico de la máquina síncrona se muestran a continuación,

$$X = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{13} \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{13} \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{13} \end{bmatrix} \quad D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_7 \\ f_9 \\ e_{14} \end{bmatrix}$$

4.3.3.2 Relaciones constitutivas de los elementos de almacenamiento y disipación

Las relaciones constitutivas del Bond Graph de la figura 4.10 son,

$$Z = FX \qquad D_{out} = L D_{in}$$

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & \frac{1}{M_{df}} & 0 \\ \frac{1}{M_{df}} & \frac{1}{L_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{13} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d & 0 & 0 \\ 0 & R_f & 0 \\ 0 & 0 & R_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{12} \end{bmatrix}$$

4.3.3.3 Obtención de la matriz estructura unión del Generador Síncrono

La estructura unión del sistema completo, se da a continuación, haciendo referencia a la ecuación (2.19). Así la representación de la matriz de estructura de unión es,

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{13} \\ f_2 \\ f_6 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & k_2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{13} \\ e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_1 \\ e_7 \\ f_9 \\ e_{14} \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz unión S , en submatrices ij , para representar de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3.3.4 Obtención de la representación de espacio de estados del Generador Síncrono en ejes dq0

Una vez que se tiene la partición de la matriz S , se encuentra la representación de espacio de estados. Haciendo referencia a las ecuaciones (2.21) y (2.22).

Para la obtención de la representación de espacio de estados, se debe encontrar las matrices que involucran la obtención del espacio de estados.

Para este caso $S_{22} = 0$ entonces, considerando la ecuación (2.27), tenemos que el valor de la matriz M esta definida por:

$$M = \begin{bmatrix} R_d & 0 & 0 \\ 0 & R_f & 0 \\ 0 & 0 & R_q \end{bmatrix}$$

Considerando la ecuación (2.23), tenemos que el valor de la matriz A_p está definida por,

$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{L_f R_d}{\Delta} & \frac{R_d M_{df}}{\Delta} & 0 \\ \frac{R_f M_{df}}{\Delta} & -\frac{L_d R_f}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_q}{L_q} \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación (2.24), tenemos que el valor de la matriz B_p está definida por,

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3.3.5 El sistema del Generador Síncrono en representación de espacio de estado

Considerando la ecuación (2.21) que representa la ecuación de estado para cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo, para nuestro caso se tiene:

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L_f R_d}{\Delta} & \frac{R_d M_{df}}{\Delta} & 0 \\ \frac{R_f M_{df}}{\Delta} & -\frac{L_d R_f}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_q}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_7 \\ f_9 \\ e_{14} \end{bmatrix}$$

4.3.4 Bond Graph del Generador Síncrono en ejes dq0 con una asignación en Causalidad Derivativa

El modelo que se describe en la figura 4.11, es la representación de la máquina síncrona en Bond Graph asignando causalidad derivativa a los elementos de almacenamiento empleando el modelo dq0.

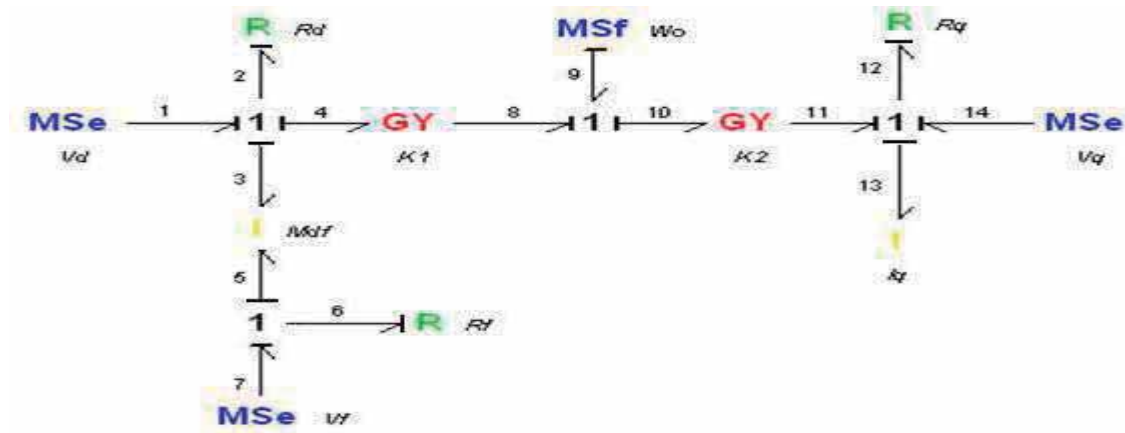


Figura 4.11.- Bond Graph del Generador Síncrono en ejes d-q con causalidad derivativa.

En este caso se redefinen los vectores D_{in} y D_{out} , y quedan definidos de la siguiente manera:

$$D_{out} = L_d D_{ind}$$

$$D_{ind} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad D_{outd} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

4.3.4.1 Obtención de la matriz estructura unión (Causalidad Derivativa)

La estructura unión del sistema completo, haciendo referencia a la ecuación (3.11) está descrita por,

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{13} \\ e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{13} \\ f_2 \\ f_6 \\ f_{12} \\ e_1 \\ e_7 \\ f_9 \\ e_{14} \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz estructura unión J , en submatrices ij , para representar de acuerdo a sus vectores clave:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo el resultado de la ecuación (3.18) se tiene,

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_q} \end{bmatrix}$$

Obteniendo el resultado de la ecuación (3.20) se tiene:

$$B^* = J_{13} + J_{12}NJ_{23} \quad (3.20)$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_d} & 0 & \frac{-k_1}{R_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{R_q} & \frac{1}{R_q} \end{bmatrix}$$

4.3.4.2 Estado Estacionario de la Máquina Síncrona en ejes de dq0

Considerando la ecuación (3.28) que es la expresión del estado estacionario en causalidad derivativa queda de la siguiente manera:

$$X_{SS} = F^{-1} B^* u \quad (3.28)$$

Como $Z_{SS} = F X_{SS}$

$$Z_{ss} = FX_{ss} = FF^{-1}B^*u_{ss} = B^*u_{ss}$$

Entonces $Z_{ss} = B^*u_{ss}$

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_d} & 0 & -\frac{k_1}{R_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{R_q} & \frac{1}{R_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_7 \\ f_9 \\ e_{14} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación del estado estacionario

$$R_d = 0.011$$

$$e_1 = 2.2$$

$$R_f = 0.00742$$

$$e_7 = 1.8$$

$$R_q = 0.011$$

$$f_9 = 2$$

$$K_1 = 0.3124$$

$$e_{14} = 1.245$$

$$K_2 = 0.0034$$

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.011} & 0 & -\frac{0.3124}{0.011} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.00742} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0.0034}{0.011} & \frac{1}{0.011} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.8 \\ 2 \\ 1.245 \end{bmatrix}$$

El estado estacionario de las variables de estado del sistema en forma numérica queda de la siguiente forma,

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} 143.2 \\ 242.58 \\ 113.799 \end{bmatrix}$$

Las variables de estado obtuvieron los valores siguientes: $(p_3)_{ss}=143.2$, $(p_5)_{ss}=242.58$ y $(p_{13})_{ss}=113.799$.

4.3.5 Gráficas de los valores de las variables de estado en estado estacionario obtenidas con el programa 20-sim

A fin de verificar el valor numérico del estado estacionario de las variables de estado del generador síncrono modelado en Bond Graph, se presenta la simulación de este sistema utilizando el Programa de 20-Sim. En la figura 4.12 se muestra el comportamiento de la variable de estado p_5 notando que el valor en estado estacionario es de 242.60 lo cual demuestra que se obtuvo previamente con la metodología de Bond Graph un resultado casi idéntico al obtenido en simulación numérica.

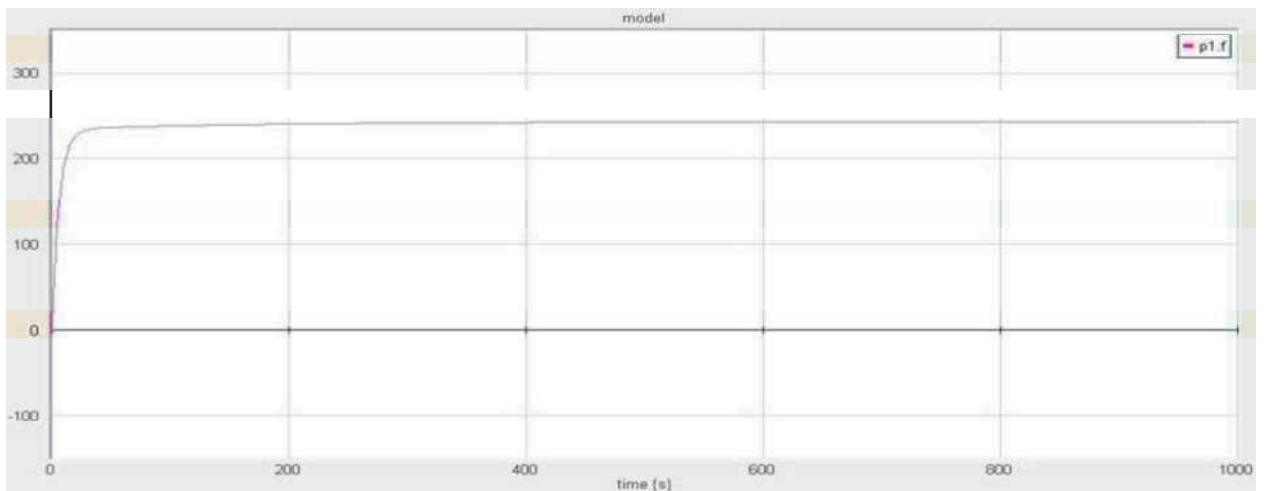


Figura. 4.12 Comportamiento de la variable de estado p_5 .

En la figura 4.13 y 4.14 se muestran el comportamiento de las variables de estado p_3 y p_{13} , respectivamente, en las cuales se nota que el valor de estado estacionario son, 143.1 y 113.8, respectivamente, lo cual indica que los resultados son correctos, de acuerdo al análisis realizado previamente.

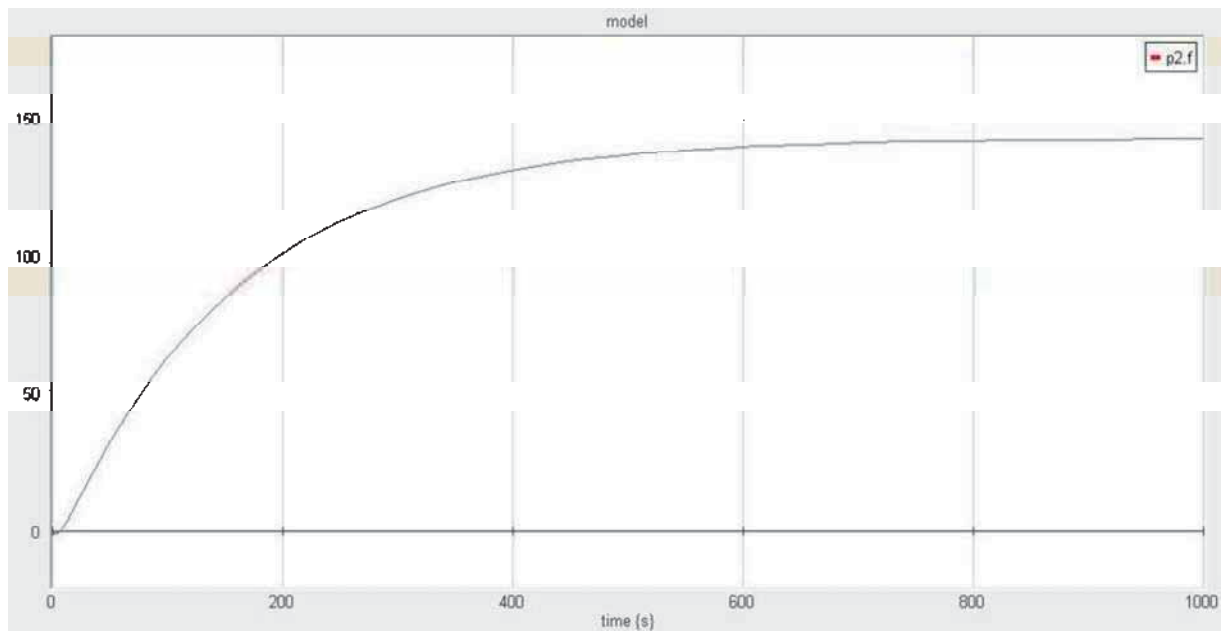


Figura 4.13. Comportamiento de la variable de estado p_3 .

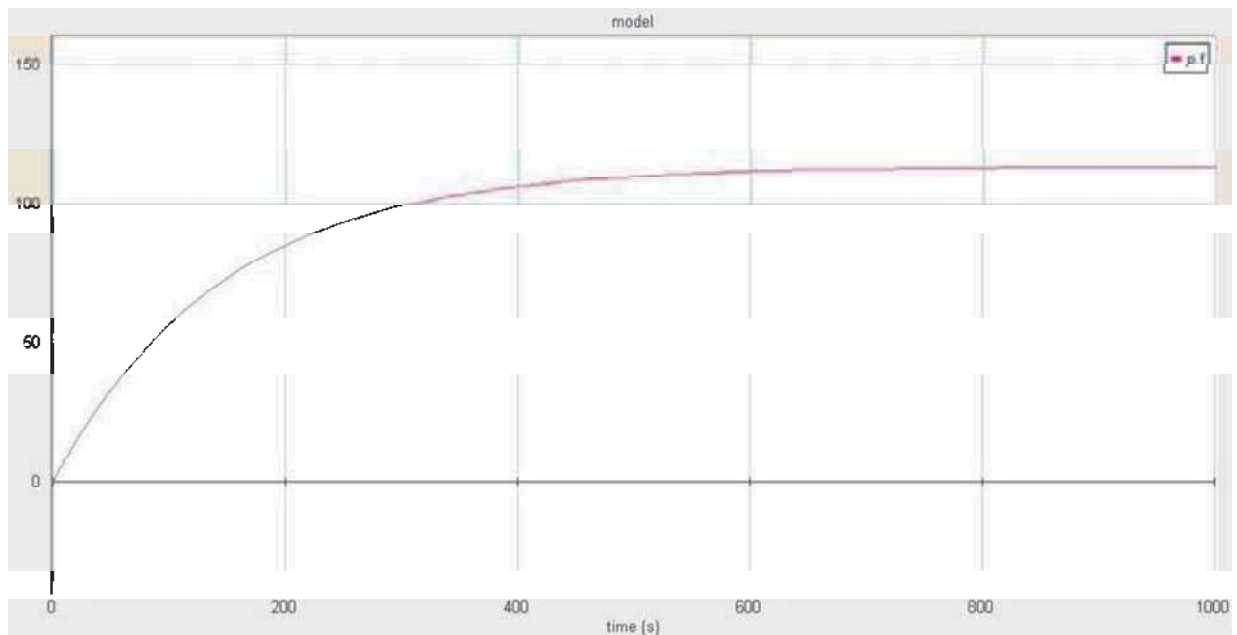


Figura 4.13. Comportamiento de la variable de estado p_{13} .

4.4 Estado Estacionario de un Generador Síncrono conectado a un bus infinito

Una vez que en la sección previa se obtuvo el modelado, simulación y la determinación de la respuesta en estado estacionario de un generador síncrono en coordenadas dq0, en esta sección se propone el modelado de este generador síncrono pero conectado a un bus infinito, para lo cual se requiere entre el bus infinito y el generador la transformación de Park de dq0 a abc.

La figura 4.14 muestra el modelo en Bond Graph del generador síncrono la transformación de Park y su conexión a un bus infinito.

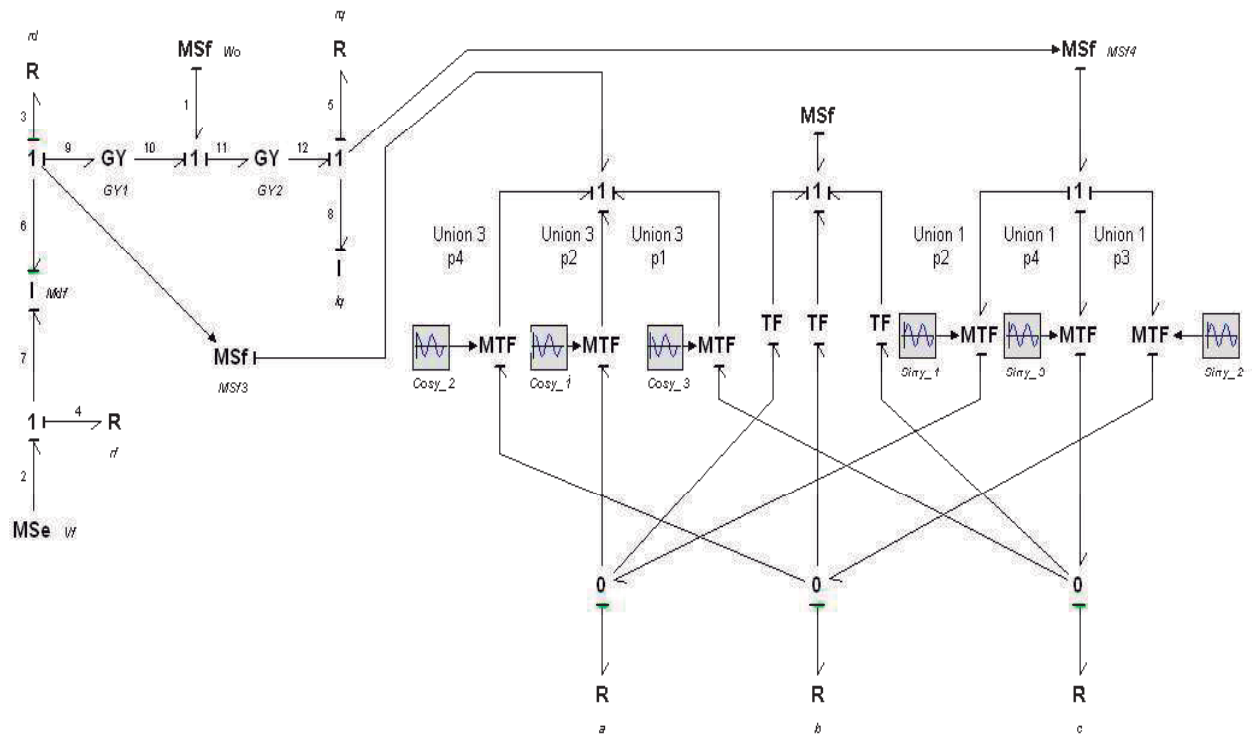


Figura 4.14.- Modelo en Bond Graph de un Generador Síncrono conectado a un bus infinito.

4.4.1 Bond Graph del sistema generador síncrono-bus infinito en causalidad derivativa

En la figura 4.15 se muestra el modelo en Bond Graph del sistema generador síncrono, transformación de Park y su conexión a un bus infinito en una asignación de causalidad derivativa para a partir de este modelo determinar de manera directa y simbólica el estado estacionario de las variables de estado del sistema.

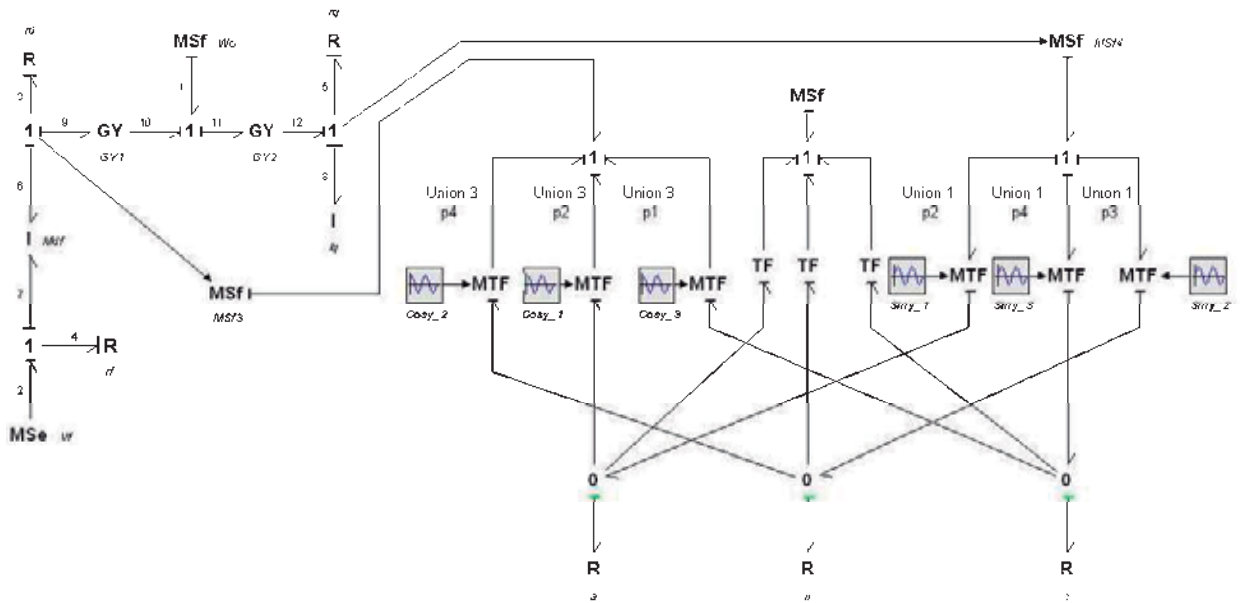


Figura 4.15 .- Modelo en Bond Graph Derivativo de un Generador Síncrono en coordenadas abc operando a velocidad constante.

En este caso se redefinen los vectores D_{in} y D_{out} , y quedan definidos de la siguiente

manera:
$$D_{outd} = L_d D_{ind}$$

$$D_{ind} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad D_{outd} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix}$$

La estructura unión del sistema completo, haciendo referencia a la ecuación (3.11) es,

$$\begin{bmatrix} f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Particionada la matriz estructura de unión J , en submatrices ij , para representar de acuerdo a sus vectores clave:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{23} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Obteniendo el resultado de la ecuación (3.18) se tiene:

Como $J_{22} = 0$ $N = L_d$

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_g} \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación (3.20) se tiene,

$$B^* = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{R_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_f} \\ \frac{k_2}{R_g} & 0 \end{bmatrix}$$

4.4.2 Estado Estacionario del sistema a partir de su Bond Graph

Considerando la ecuación (3.28) que es la expresión del estado estacionario en causalidad derivativa queda de la siguiente manera,

$$\text{Como } Z_{SS} = F X_{SS}$$

$$Z_{SS} = F X_{SS} = F F^{-1} B^* u_{SS} = B^* u_{SS}$$

$$\text{Entonces } Z_{SS} = B^* u_{SS}$$

$$Z_{SS} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{R_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_f} \\ \frac{k_2}{R_q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

4.4.3 Simulación del sistema a partir de su Bond Graph

El objetivo de la presente sección es realizar la simulación numérica del sistema a fin de verificar los resultados de la respuesta en estado estacionario del sistema modelado en Bond Graph,

Sustituyendo los siguientes valores numéricos en la ecuación del estado estacionario

$K_1 = 0.3124$, $K_2 = 0.0034$, $R_q = 0.011$, $R_f = 0.00742$, $R_d = 0.011$, $f_1 = 2$ y $e_2 = 1.8$ en la ecuación de la anterior sección, se tiene

$$Z_{SS} = \begin{bmatrix} -\frac{0.3124}{0.011} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.00742} \\ \frac{0.0034}{0.011} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

$$Z_{SS} = \begin{bmatrix} -56.8 \\ 242.58 \\ 0.618 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el estado estacionario de las variables de estado son $(p_6)_{ss}=-56.8$, $(p_7)_{ss}=242.58$ y $(p_8)_{ss}=0.618$. En las figuras 4.16, 4.17 y 4.18 se muestran el comportamiento dinámico y de estado estacionario de las variables de estado p_7 , p_6 y p_8 , respectivamente.

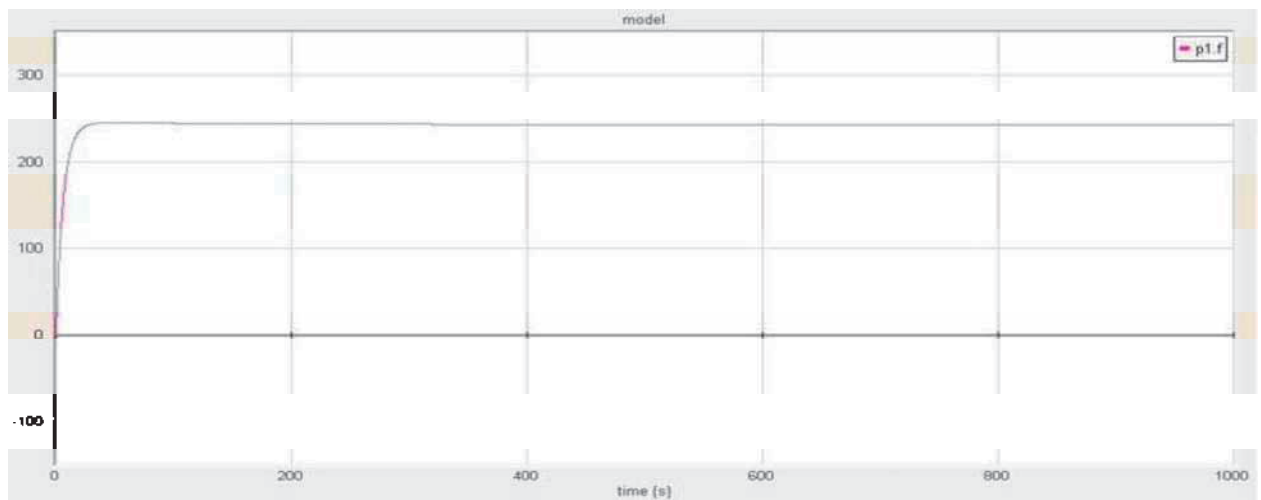


Figura 4.16. Comportamiento de la variable de estado p_7 .

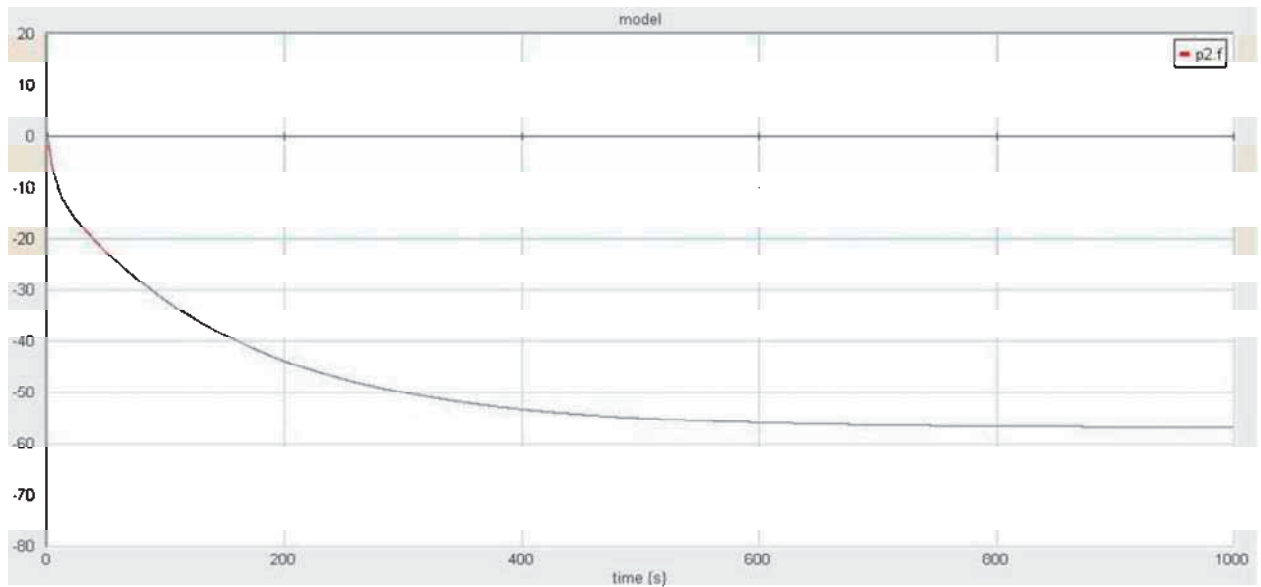


Figura 4.17. Comportamiento de la variable de estado p_6 .

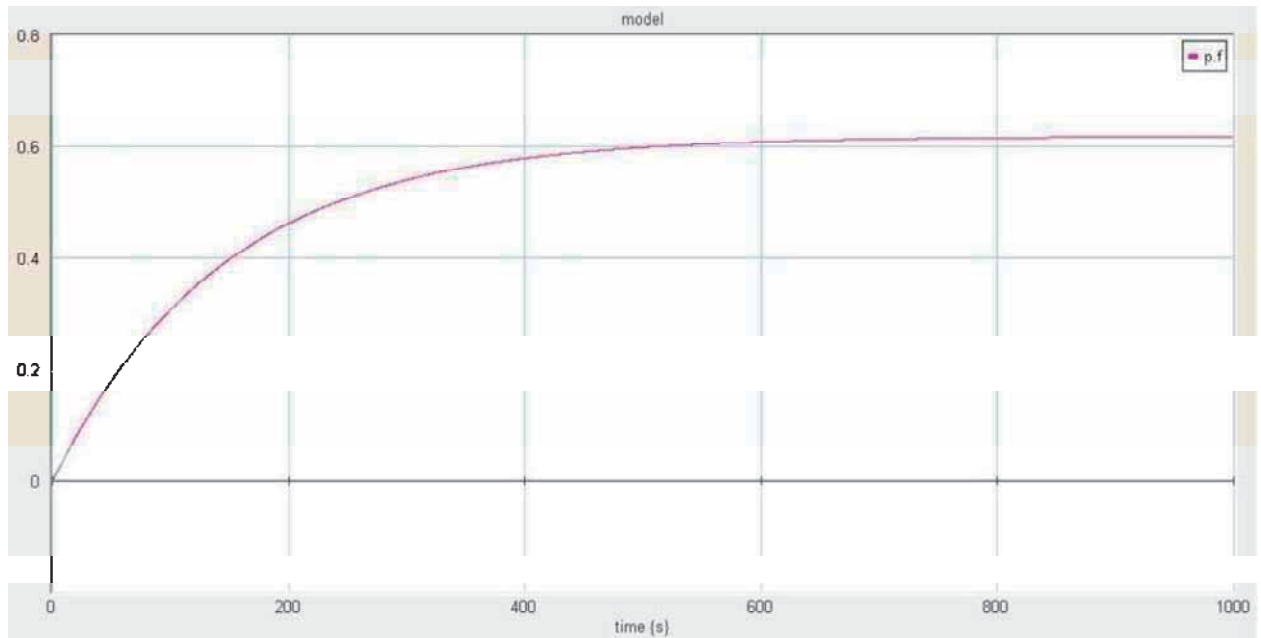


Figura 4.18. Comportamiento de la variable de estado p_{13} .

Finalmente, se presenta en la figura 4.19 el comportamiento de las variables de estado y de las corrientes abc de salida del generador síncrono.

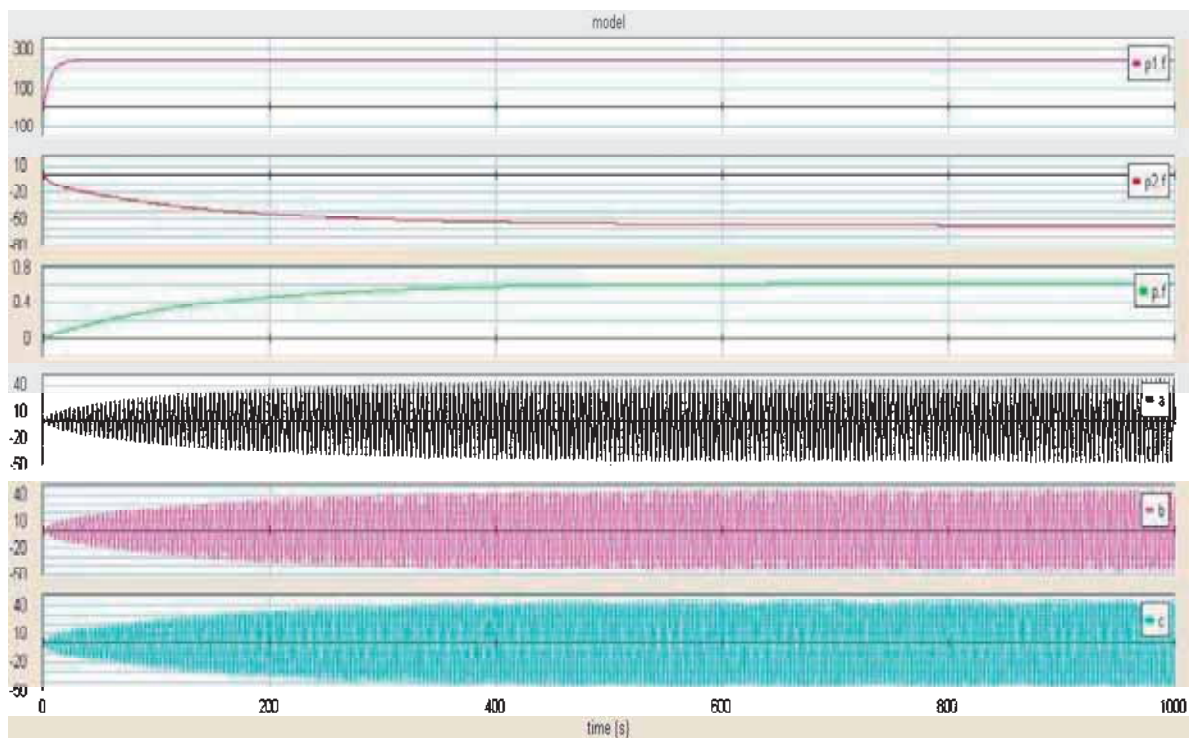


Figura 4.19. Comportamiento del sistema.

Capítulo 5

Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo se presenta la determinación directa y simbólica de la respuesta de estado estacionario de un sistema lineal e invariante en el tiempo modelado en Bond Graph. El enfoque utilizado permite modelar sistemas que pueden estar formados por diferentes dominios de energía, es decir, sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

Tomando en cuenta las ventajas que se tiene al hacer una representación gráfica de cualquier sistema, se puede representar modelos, dividiendo cada uno en subsistemas y aplicar la técnica de Bond Graph.

En este trabajo de titulación se aplicó la técnica de Bond Graph para encontrar la expresión en espacio de estados así como el estado estable de las variables de estado del modelo de una central hidroeléctrica básica, de un generador síncrono y de un sistema formado por la conexión de un generador síncrono y un bus infinito utilizando la transformación de Park.

Se obtuvo expresiones de la respuesta de estado estacionario de un sistema modelado en Bond graph, sin la necesidad de tener que invertir la matriz de estados A^{-1} , que para sistemas de orden superior sería un gran trabajo. Así mismo, el estado estacionario se obtiene a partir del modelo en Bond Graph del sistema con una asignación de causalidad derivativa a los elementos de almacenamiento del sistema.

Los resultados obtenidos se compararon en base a las simulaciones y se pudo observar que los resultados fueron los correctos. En las simulaciones se pudieron observar el tiempo que necesitaba cada variable de estado en estabilizarse.

Una de las ventajas más importantes de modelar en Bond Graph es que se pueden modelar varios tipos de energía en un sólo Bond Graph. El ejemplo del modelo con varios tipos de energía es el de la central hidroeléctrica en ella se tienen energía hidráulica, mecánica y eléctrica.

Este trabajo puede ser tomado como referencia para encontrar el estado estacionario de modelos físicos con varios tipos de energía interactuando por medio de la asignación en causalidad derivativa al modelo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Notas de curso de titulación y actualización

Dr. Gilberto González Ávalos

[2] Centrales Hidroeléctricas I

Zoppetti

Editorial Gustavo Gili, S.A. 1979

[3] Dinámica de Sistemas

Fco. J. Rodríguez Ramírez

Editorial Trillas, México 1994

[4] Ingeniería de Control Moderna

OGATA K

Prentice Hall, México

[5] Energía Hidroeléctrica

Turbinas y plantas generadoras

Viejo Zubicaray y Alonso

Editorial Limusa 1977