

**Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo**

**Facultad de Ingeniería Eléctrica**

**Modelado y Simulación de un Motor de Inducción  
Trifásico en el Dominio Físico**

**TESIS**

**Que para obtener el Título de  
INGENIERO ELECTRICISTA**

**Presenta  
Darío Macías Alemán**

**Asesor de Tesis  
Dr. Gilberto González Avalos**

**Agosto del 2009**

## Agradecimientos

Primero quiero agradecerle a Dios, por darme la fortaleza y las ganas de seguir adelante en todos los momentos difíciles, también por ponerme a mi lado la gran familia que tengo.

A mis padres Salvador Macías y Hermila Alemán, por darme el apoyo y la confianza sin poner ninguna condición, además de dejar que tomara todas las decisiones solo y siempre apoyándome en todas ellas, los consejos que me dieron en todo el proceso fueron y seguirán siendo de gran ayuda.

A mi abuelo José Macías y a la memoria de mi abuela Eliodora Alejandres, que sin su apoyo no hubiese sido posible este gran paso en mi vida, así como también los buenos consejos y motivación que siempre estuvieron presentes.

A mis hermanos Uribe Macías, Tania Macías y Aarón Macías, por estar conmigo en todos los momentos difíciles y de alguna forma u otra darme el apoyo necesario para seguir adelante, las palabras de aliento y motivación fueron muy útiles en todo este tiempo.

A mi asesor el Dr. Gilberto González Avalos, por darme el apoyo y los conocimientos necesarios para la elaboración de esta tesis, así como también dedicar una gran parte de su tiempo para ayudarme a pesar del gran número de asesorados.

¡¡Gracias a todos!!

## **Dedicatoria**

Esta tesis está dedicada a las personas más importantes en mi vida: mis padres Salvador Macías y Hermila Alemán, mis abuelos José Macías y Eliodora Alejandres, por último y no menos importantes mis hermanos Uribe Macías, Tania Macías y Aarón Macías. Este trabajo es de todos ustedes.

# Resumen

Los motores de inducción trifásicos son muy importantes en la industria, esto se debe a su casi nulo mantenimiento y a su operación continua. Al momento de analizar o modelar este tipo de motores se torna un poco complicado en base al tipo de ecuaciones que se manejan ya que son ecuaciones diferenciales un poco complicadas y también al gran número de fundamentos de máquinas eléctricas que se necesita tener.

El método Bond Graph representa un enfoque para realizar modelos agrupados para diferentes dominios físicos, que manipula y muestra la estructura física de intercambio de potencias en el sistema. Aún conservando esta propiedad, el método permite encontrar el modelo matemático directamente desde los Bond Graph, además de poder observar el desempeño, tener el control del sistema y ver la dependencia lineal de cada elemento, todo basado en una representación gráfica y la generalización de variables de flujo y esfuerzo. Bond graph estriba en que se puede representar una gran variedad de medios de energía (eléctrica, hidráulica, térmica, etc.) con el mismo conjunto de símbolos, y se puede describir como la potencia fluye a través del sistema.

El modelo del motor de inducción trifásico por medio del método de bond graph reduce bastante en cuanto al número de operaciones así como también lo complicado de las mismas, en el modelado se necesitó aplicar la transformación de Park la cual también fue modelada en bond graph sin ninguna complicación, en el modelo del motor se obtuvieron las ecuaciones de estado y las ecuaciones de voltajes que después se compararon con las ecuaciones encuentran en los libros de máquinas eléctricas. Se simuló el modelo del motor de inducción en el software 20-sim el cual permite modelar gráficamente el bond graph, en los resultados obtenidos se puede observar en las gráficas el desempeño del motor al momento del arranque y de estado estacionario.

# Contenido

Agradecimientos .....	ii
Dedicatoria .....	iii
Resumen .....	iv
Contenido .....	v
Lista de Figuras .....	vii
Lista de Tablas .....	ix
Lista de Símbolos y Abreviatura .....	x
<b>Capítulo 1. Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1 Técnicas alternativas de modelado .....	1
1.2 Objetivo .....	2
1.3. Justificación .....	2
1.4 Estructura de la tesis .....	2
<b>Capítulo 2. El motor de inducción y el modelado en bond graph</b> .....	<b>4</b>
2.1 Motor de inducción trifásico .....	4
2.1.1 Conceptos básicos de los motores de corriente alterna .....	4
2.1.2 Constitución física de los motores de inducción trifásicos .....	6
2.1.3 Campo magnético giratorio .....	8
2.1.4 Deslizamiento .....	11
2.1.5 Frecuencia, voltaje y corriente en el rotor .....	11
2.1.6 Curvas par-velocidad .....	13
2.1.7 Pruebas para la determinación de parámetros .....	13
2.1.8 Eficiencia y tipos de pérdidas .....	15
2.2 Bond Graph .....	16
2.2.1 Componentes básicos del Bond Graph .....	17
2.2.1.1 Puertos-1 pasivos .....	19

2.2.1.2 Puertos-1 activos o fuentes .....	22
2.2.1.3 Los elementos ideales de Puerto-2 .....	22
2.2.1.4 Los elementos de unión, Puerto-3 .....	23
2.2.1.5 Causalidad para los multipuertos básicos .....	24
2.2.1.6 Procedimiento para asignar la causalidad en un multipuerto .....	25
2.2.1.7 Bond activo .....	25
2.2.2 Procedimiento para el modelado de sistemas .....	25
2.2.3 Estructura de unión en sistemas multipuerto .....	26
2.2.3.1 Vectores clave o vectores significativos .....	27
2.2.3.2 Relaciones de campo y ecuación de estado .....	27
<b>Capítulo 3. Un modelo del motor de inducción en bond graph</b> .....	<b>30</b>
3.1 Transformación de devanados entre abc y dq0 .....	30
3.2 Modelo matemático de un motor de inducción trifásico .....	32
3.3 Modelo matemático del motor de inducción trifásico por medio del método de bond graph .....	37
3.4 Modelo de la transformación de Park en bond graph .....	44
<b>Capítulo 4. Simulación del motor de inducción en el dominio físico</b> .....	<b>45</b>
4.1 Breve introducción al modelado y simulación del 20-Sim .....	45
4.2 Simulación del motor de inducción en 20-sim .....	48
<b>Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones</b> .....	<b>66</b>
5.1 Conclusiones .....	66
5.2 Recomendaciones .....	67
<b>Referencias</b> .....	<b>68</b>

## Lista de figuras

Figura 2.1 Regla de la mano izquierda .....	5
Figura 2.2 Estator de una máquina de inducción trifásica .....	6
Figura 2.3 Motor de inducción jaula de ardilla .....	7
Figura 2.4 Motor de inducción con rotor devanado .....	8
Figura 2.5 Devanado de estator de dos polos con; a) 1 bobina por fase, b) 3 bobinas por fase .....	9
Figura 2.6 Corrientes trifásicas .....	10
Figura 2.7 Campo giratorio producido por el estator: a) $\omega t=0$ ; b) $\omega t=\pi/t$ ; c) $\omega t=2\pi/t$ .....	10
Figura 2.8 Curvas Par-Velocidad .....	13
Figura 2.9 Bond .....	17
Figura 2.10 Bond con sus variables de potencia .....	17
Figura 2.11 Tetraedro de estado .....	21
Figura 2.12 Puertos-1 activos .....	22
Figura 2.13 Bond graph de un transformador .....	22
Figura 2.14 Bond graph de un girador .....	22
Figura 2.15 Unión-0 .....	23
Figura 2.16 Unión-1 .....	23
Figura 2.17 Causalidad para un bond .....	24
Figura 2.18 Bond activo .....	25
Figura 2.19 Regla para simplificar la gráfica .....	26
Figura 2.20 Diagrama de bloques de la estructura de unión de un bond graph .....	27
Figura 3.1 Máquina de inducción .....	32
Figura 3.2 Máquina primitiva equivalente a la máquina de inducción .....	35
Figura 3.3 Modelo en bond graph de la máquina de inducción .....	37

Figura 3.4. Modelo de bond grap de la transformación de Park .....	44
Figura 4.1 Presentación del 20-sim .....	45
Figura 4.2 Modelado y simulación en 20-sim .....	46
Figura 4.3 Modelo del motor de inducción en 20-sim .....	48
Figura 4.4 Modelo de la trasformada de Park en 20-sim .....	49
Figura 4.5 Modelo completa del motor de inducción trifásico .....	50
Figura 4.6 Voltajes de entrada .....	51
Figura 4.7 Corrientes de entrada .....	52
Figura 4.8 Estado estacionario de las corrientes de entrada .....	53
Figura 4.9 Corrientes del rotor y estator, del motor de inducción .....	54
Figura 4.10 Curvas del par y velocidad .....	55
Figura 4.11 Curva par-velocidad .....	56
Figura 4.12 Transformada de Park de (dq0) a (abc) .....	57
Figura 4.13 Modelo del motor de inducción completo con trasformada de (dq0) a (abc) .....	58
Figura 4.14 Corrientes de salida .....	59
Figura 4.15 Estado estacionario de las corrientes de salida .....	59
Figura 4.16 Corrientes de entrada del segundo motor .....	60
Figura 4.17 Estado estacionario de las corrientes de entrada del segundo motor .....	61
Figura 4.18 Gráficas de corrientes, par y velocidad del segundo motor ....	62
Figura 4.19 Curva par-velocidad del segundo motor .....	63
Figura 4.20 Corrientes de salida del segundo motor .....	64
Figura 4.21 Estado estacionario de las corrientes de salida del segundo motor .....	65

# Lista de tablas

Tabla 2.1 Variables generalizadas para sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales .....	18
Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos .....	19
Tabla 2.3 Elemento-R .....	19
Tabla 2.4 Elemento-I .....	20
Tabla 2.5 Elemento-I .....	21
Tabla 2.6 Consideraciones causales para los multipuertos básicos .....	24
Tabla 2.7 Formas causales para puertos 1 .....	25
Tabla 4.1 Valores de los elementos del motor de inducción .....	51
Tabla 4.2 Valores de los elementos del segundo motor de inducción .....	60

## Lista de Símbolos y Abreviaturas

$S$	Deslizamiento
$N_s$	Velocidad síncrona
$N$	Velocidad efectiva de rotación
$f_R$	Frecuencia del voltaje inducido en el rotor
$f$	Frecuencia en el estator
$E_R$	Voltaje inducido en el rotor
$E$	Voltaje aplicado por fase
$X_R$	Reactancia del rotor
$R_R$	Resistencia por fase en el rotor
$L_R$	Inductancia por fase en el rotor
$T$	Par
$R$	Resistencia
$I$	Elemento inductivo
$e$	Esfuerzo
$f$	Flujo
$P$	Potencia instantánea
$p$	Momento angular
$q$	Desplazamiento
$e_a$	Esfuerzo acumulado
$f_a$	Flujo acumulado
$MS_e$	Fuente de esfuerzo
$MS_f$	Fuente de flujo
TF	Transformador
GY	Girador
$k$	Ganancia del transformador
$r$	Ganancia del girador

$C$	Capacitancia
$\theta_r$	Angulo del rotor
$D_{in}$	Vector de flujos de los elementos disipadores
$D_{out}$	Vector de esfuerzo de los elementos disipadores
$u$	Vector de voltajes
$x$	Vector de momento de los elementos almacenadores
$\dot{x}$	Vector de esfuerzo de los elementos almacenadores
$z$	Vector de flujo de los elementos almacenadores
a, b, c	Tres fases de la fuente
d, q	Devanados ficticios del conmutador
$i$	Corriente
$V$	Voltaje
$L$	Inductancia
$\lambda$	Enlace de flujo
$M$	Inductancia mutua
$w_r$	Velocidad del rotor
$J_r$	Momento de inercia

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Técnicas alternativas de modelado

Actualmente, el modelado de sistemas físicos y en especial, el obtener el modelo de una máquina eléctrica no es un problema versátil de resolver; sobre todo por que generalmente se emplean relaciones algebraicas, dinámicas y de interconexión de los elementos que la forman para encontrar su modelo matemático.

De esta forma, se propone en este trabajo de tesis el modelar y simular un motor de inducción trifásico utilizando la metodología gráfica de modelado en bond graph.

El modelado en bond graph está basado en una representación gráfica, en donde sus componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía, estos componentes describen el flujo de potencia a través del sistema, además se pueden representar una gran variedad de medios de energía (eléctrica, térmica, hidráulica, etc.)

Los motores de inducción trifásicos o también llamados asíncronos, son los motores más ampliamente utilizados en la industria por su bajo costo y por su casi nulo mantenimiento, además son muy exigidos en cuanto a arranques y paradas frecuentes, operación continua, sobrecargas, ambientes corrosivos o explosivos, etc. Algunas de las limitantes tales como variar el par-velocidad, la intensidad de las corrientes en el arranque y la regulación de velocidad han sido resueltas por algunas modificaciones a los motores, como por ejemplo, primero se desarrolló el rotor con anillos deslizantes el cual permite conectar resistencia externa y regular el arranque. Así mismo, un tiempo después se incorporó el rotor de doble jaula de ardilla, que permitieron cambiar los parámetros del rotor de la máquina debido al efecto pelicular sin utilizar contactos deslizantes. Además por las grandes cantidades de potencia que manejan, estos motores consumen la mayor parte de la energía de las industrias.

## 1.2 Objetivo

En este trabajo de tesis se presenta el modelado y simulación del motor de inducción trifásico en el dominio físico, en donde se observará lo atractivo que puede ser el método de bond graph para modelar diferentes sistemas físicos.

## 1.3 Justificación

El modelado del motor de inducción trifásico involucra bastantes aspectos en donde al querer ver como actuaría al momento de una falla o de algún cambio físico en el motor, se tendría que realizar todo el modelo de nuevo tomando en cuenta los diferentes aspectos, en cambio en el modelo realizado por medio del método gráfico de bond graph tan sólo bastaría con cambiar el valor en donde se efectuó el cambio. Este método gráfico permite analizar diferentes sistemas, no nada más el eléctrico si no también sistemas mecánicos, magnéticos, hidráulicos, térmicos, etc. Esto abre un gran panorama para modelar un motor eléctrico, ya que pueden ser tomados en cuenta todos los aspectos del motor, como por ejemplo el sistema eléctrico, campos magnéticos, enlaces de flujo, cuestiones mecánicas como la fricción del aire, la carga, etc. De esta forma poder modelar todo en un mismo sistema gráfico. El software 20-sim permite interactuar con todos los sistemas descritos anteriormente en el mismo sistema gráfico, además de poder cambiar fácilmente un valor y obtener resultados inmediatos en forma de gráficas, sin necesidad de cambiar un grupo de ecuaciones o tener que modelar todo el sistema de nuevo.

## 1.4 Estructura de la tesis

**En el capítulo 2.** Se presenta una breve descripción y antecedentes del motor de inducción trifásico así como también los diferentes tipos que existen. También se mostrará una reseña histórica de bond graph y se describirán los componentes que se utilizarán en el modelado del motor de inducción

**En el capítulo 3.** Se realizará el modelo del motor de inducción por medio método gráfico de bond graph y también por medio de este se determinarán las ecuaciones de estado, las cuales serán compradas con las ecuaciones de estado del motor de inducción obtenidas por medio del método tradicional.

**En el capítulo 4.** Se obtendrán resultados del modelo de bond graph utilizando el software 20-Sim, así como también se hará una breve introducción del software 20-Sim respecto al modelado en bond graph.

**En el capítulo 5.** Se anotarán las conclusiones del trabajo realizado así como también se harán notar las recomendaciones a seguir para trabajos futuros con el método gráfico bond graph.

## Capítulo 2

# El motor de inducción y el modelado en bond graph

### 2.1 Motor de inducción trifásico

#### 2.1.1 Conceptos básicos de los motores de corriente alterna

Los principios básicos del electromagnetismo se comenzaron a desarrollar desde el siglo XIX, con una gran variedad de experimentos realizados por científicos como: Oersted, Henry, Lenz, Barlow. Con todos los trabajos que realizaron los científicos antes mencionados, se puede considerar como punto de partida para el estudio de las máquinas eléctricas. A continuación se describen varios trabajos de científicos muy importantes que pueden hacer comprender más fácilmente el estudio de los motores eléctricos.

En el año de 1831 Michael Faraday descubrió que al momento de pasar un conductor con la forma de circuito cerrado sobre un campo magnético, se produce de alguna forma un voltaje y en base al mismo se produce una circulación de corriente. En base al experimento mencionado también se pudo encontrar que para generar un campo magnético, sólo basta con hacer circular una corriente a través de una bobina, así como también que los polos de un imán se repelen cuando son iguales y se atraen cuando son contrarios.

Basándose en el trabajo de Faraday, Heinrich Lenz, estableció en el año de 1833, una relación que va de acuerdo con la transformación de la energía electromecánica. Lenz estableció que al momento de tener un voltaje inducido en un circuito cerrado, por consecuencia se produce una circulación de corriente y el campo producido por la circulación de la corriente se opondrá al cambio producido por la corriente.

En base a todos estos experimentos se desarrolló una regla que es llamada la regla de la mano izquierda, consiste en ordenar de alguna forma los dedos de la mano izquierda como a continuación se muestra: el dedo pulgar y el dedo índice formando un ángulo recto y el dedo central formando un ángulo recto con los otros dos, como se muestra en la figura 2.1. Esta relación de dedos indica la dirección del campo magnético o flujo, la corriente

resultante y la dirección de fuerza que se le ejerce al conductor, en base al área del conductor y la intensidad del campo magnético.

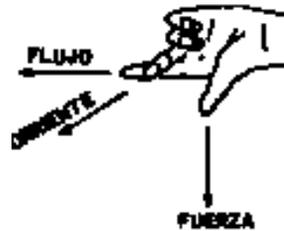


Figura 2.1 Regla de la mano izquierda

En 1879 Walter Baily demostró, que cabía la posibilidad de producir una rotación mediante las corrientes inducidas en un disco de cobre. Ferraris en 1885 descubrió el campo magnético giratorio, utilizando dos corrientes alternas independientes de igual frecuencia pero diferente fase. Este mismo descubrimiento fue hecho casi al mismo tiempo por Nikola Tesla el cual fue el primero en patentar este tipo de motores, es por este caso, que se le conoce como el inventor del mismo.

Aquí cabe destacar que los primeros motores realizados fueron bifásicos y con polos salientes en el estator, alimentados con dos corrientes desfasadas 90 grados en el tiempo y utilizando dos devanados a 90 grados en el espacio.

George Westinghouse compró las patentes de Tesla, esta empresa desarrolló un motor bifásico con devanados distribuidos tanto en el estator como en el rotor, gracias a esto se pudo desarrollar un motor mucho más práctico que los que existían en esa época, esto fue posible en el año de 1892.

En 1891 la Compañía Americana Thomson- Houston comenzó a construir motores de inducción trifásicos. Por otro lado, en Europa el ingeniero Dolivo-Dobrowolsky, sugirió la utilización de circuitos trifásicos pero no independientes entre sí, sino mutuamente conectados.

En EEUU, se unieron las compañías Westinghouse y la Thomson-Houston, para fabricar motores de inducción trifásicos. Un tiempo después se fabricó el motor con rotor jaula de ardilla construido mediante barras de aluminio, este tipo de motor fue presentado en 1916 por la compañía General Electric.

### 2.1.2 Constitución física de los motores de inducción trifásicos

Este tipo de motores son muy utilizados principalmente en la industria, por su gran eficiencia, bajo costo y casi nulo mantenimiento.

El motor de inducción trifásico está constituido por una parte fija llamada estator, como el que se muestra en la figura 2.2, está constituido por tres devanados, los cuales están desfasados entre sí 120 grados en el espacio, cada devanado está conectado a una fase distinta de un sistema trifásico. En la parte interna de los devanados, se encuentra un rotor constituido por un circuito cerrado.

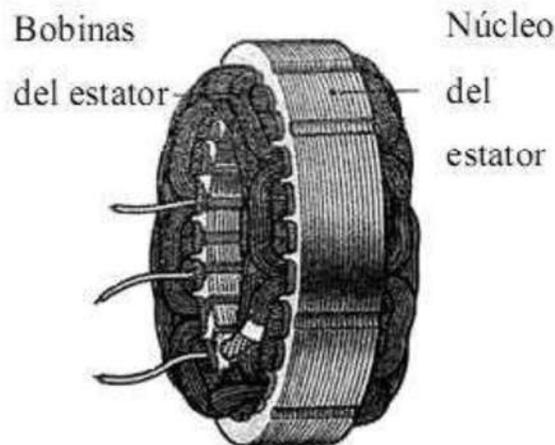


Figura 2.2 Estator de una máquina de inducción trifásica

Una característica operativa de estos motores, es que no requieren una conexión física de los devanados del rotor con una fuente externa, esto se debe que para generar los polos necesarios en el rotor, sólo es necesario el fenómeno de la inducción magnética. Los polos del estator producen un flujo que atraviesa los polos del rotor, estos están cortocircuitados entre sí, de esta forma se produce un voltaje y una circulación de corriente en el rotor, que forma el número de polos necesarios para la interacción con el estator y así poder generar el par mecánico requerido.

Este tipo de máquinas pueden operar tanto como motor así como también de generador, aunque su uso más común es como motor. Este tipo de máquinas se tienen muy pocas aplicaciones cuando su desempeño es como generador, una de ellas es en las turbinas eólicas. Estos motores también son llamados asíncronos ya que el rotor no alcanza la velocidad del campo magnético giratorio.

Los motores de inducción trifásicos se caracterizan por ser de dos tipos diferentes, lo que los hace distinguirse uno de otro, son el tipo de rotor con que operan, están denominados de la siguiente manera:

- Rotor Jaula de ardilla o corto circuito.
- Rotor devanado o con anillos.

La principal diferencia entre este tipo de rotores, consiste en que el rotor jaula de ardilla no es posible modificar la características del devanado, en cambio, el de rotor devanado se pueden modificar estas características, un ejemplo de ello, es cuando se insertan resistencias externas para de esta forma poder controlar la velocidad.

En la figura 2.3 se muestra como está formado un motor con rotor jaula de ardilla. Este tipo de rotor está constituido por un conjunto de láminas apiladas y todas unidas forman un cilindro. En el tipo de rotor jaula de ardilla se tienen varios conductores de cobre o aluminio, cortocircuitados por anillos laterales. Se le conoce como jaula de ardilla, por el aspecto que toma cuando se encuentra sin el apilamiento de láminas. Normalmente las barras se colocan en una posición en la cual se consiga que exista un deslizamiento con el eje del rotor, esto puede reducir en gran número las vibraciones.

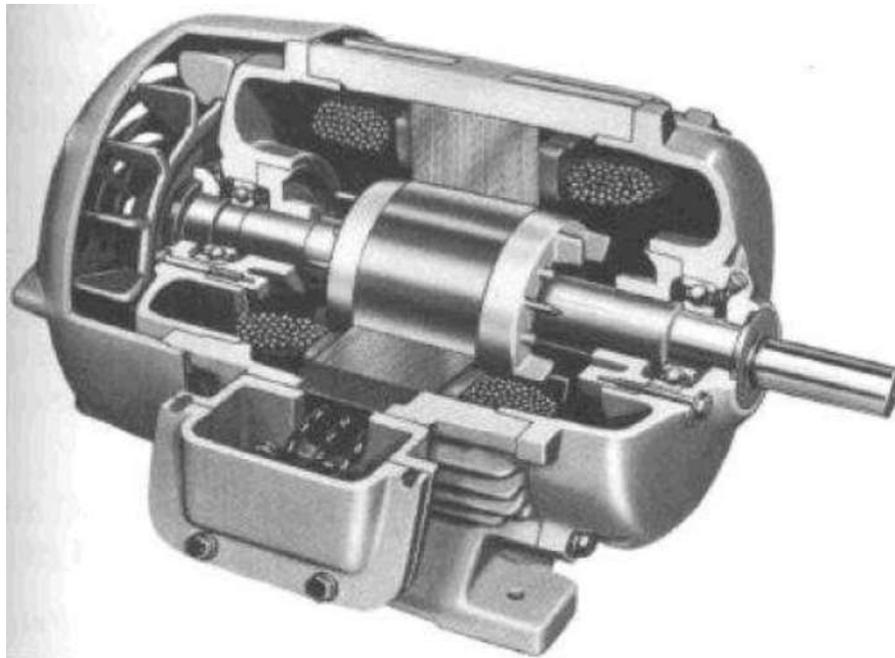


Figura 2.3 Motor de inducción jaula de ardilla

En la figura 2.4 se muestra el motor con rotor devanado o con anillos, el rotor está constituido por devanados situados de forma similar al estator, los devanados se conectan en estrella en un lado y en el otro lado se conducen a unos anillos deslizantes, los cuales pueden ser cortocircuitados o conectados a resistencias externas, con la finalidad de reducir las grandes corrientes de arranque o también para poder tener el control de la velocidad.

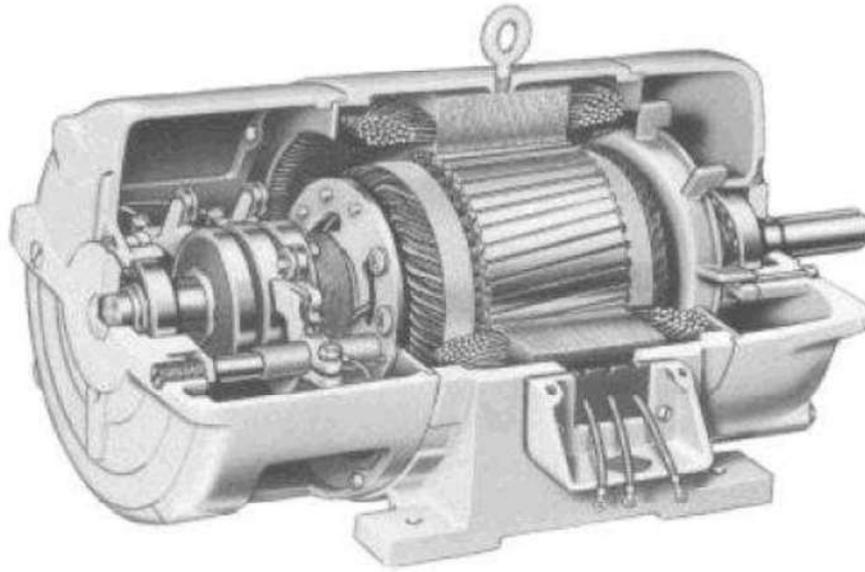


Figura 2.4 Motor de inducción con rotor devanado

### 2.1.3 Campo magnético giratorio

El estator está constituido por dos polos y tres arrollamientos desfasados  $120^\circ$  en el espacio, en la figura 2.5 se muestra el esquema de dos estatores diferentes entre sí, uno de ellos con una bobina por fase y el otro con tres bobinas por fase. El estator produce una onda rotativa distribuida en la periferia del entrehierro, la cual produce un flujo giratorio.

Si el campo se produce de manera análoga para los otros instantes, se puede constatar como el campo gira progresivamente y al término de un periodo (por ejemplo el correspondiente a la fase A), el campo regresa a su posición de partida. <sup>[1]</sup>

De acuerdo al párrafo anterior se puede llegar a la conclusión de que: “La velocidad con que gira el campo magnético es igual a la frecuencia de la corriente”. A esta velocidad se le conoce como velocidad síncrona o velocidad de sincronismo.

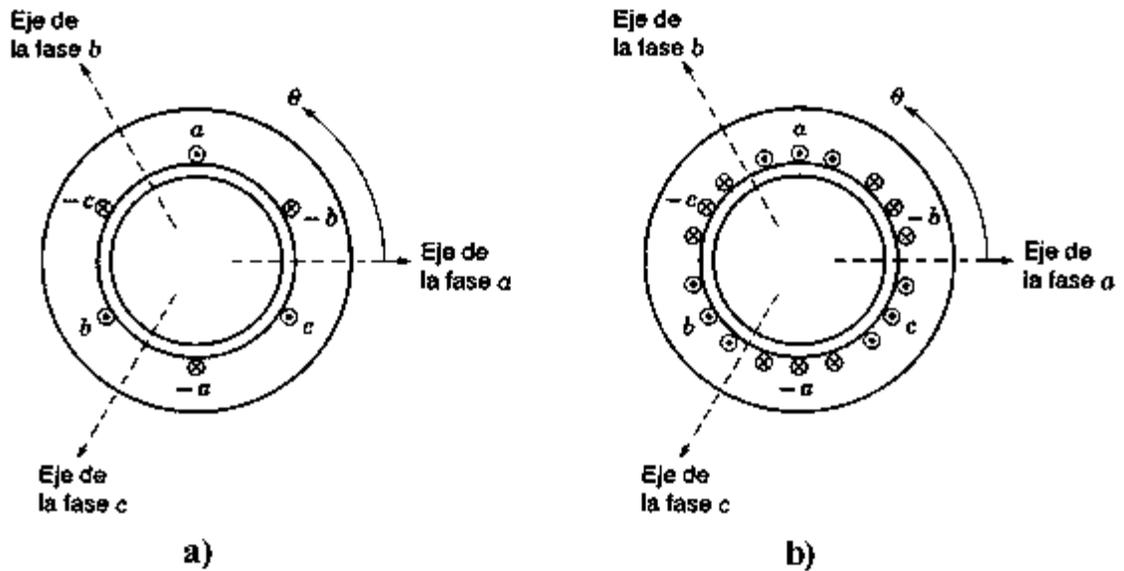


Figura 2.5 Devanado de estator de dos polos con; a) 1 bobina por fase, b) 3 bobinas por fase

El rotor es la parte giratoria de los motores de inducción, como ya se había mencionado está constituido por un circuito cerrado. El campo magnético giratorio que produce el estator le induce a los conductores del rotor una fuerza electromotriz, de acuerdo a las leyes de inducción electromagnética.

La fuerza electromotriz que le ejerce el estator al rotor origina a una circulación de corriente, estas corrientes ejercidas por el rotor dan origen a interactuar con el campo giratorio producido por el estator y da lugar a fuerzas que hacen girar al rotor en el mismo sentido del campo magnético giratorio del estator.

Esta acción pondrá en movimiento a los conductores del rotor y por consecuencia pondrá a todo el rotor en movimiento en forma rotacional. Esta rotación sólo se llevará a cabo si el campo del estator y la corriente del rotor son tan fuertes para superar la carga que se le aplique a la flecha del motor.

En la figura 2.6 se muestra una onda de tres corrientes senoidales marcada en diferentes intervalos de tiempo, los cuales se complementan en la figura 2.7, cuando estos intervalos se muestran en los devanados en el estator y así observar como se produce un campo giratorio en un devanado trifásico.

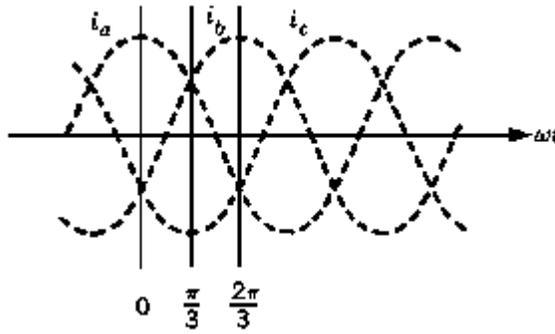


Figura 2.6 Corrientes trifásicas

En la figura 2.7 tenemos un estator con dos polos y una bobina por fase, se puede observar con claridad como se produce el campo magnético giratorio y también las fuerzas que se le ejercen al rotor.

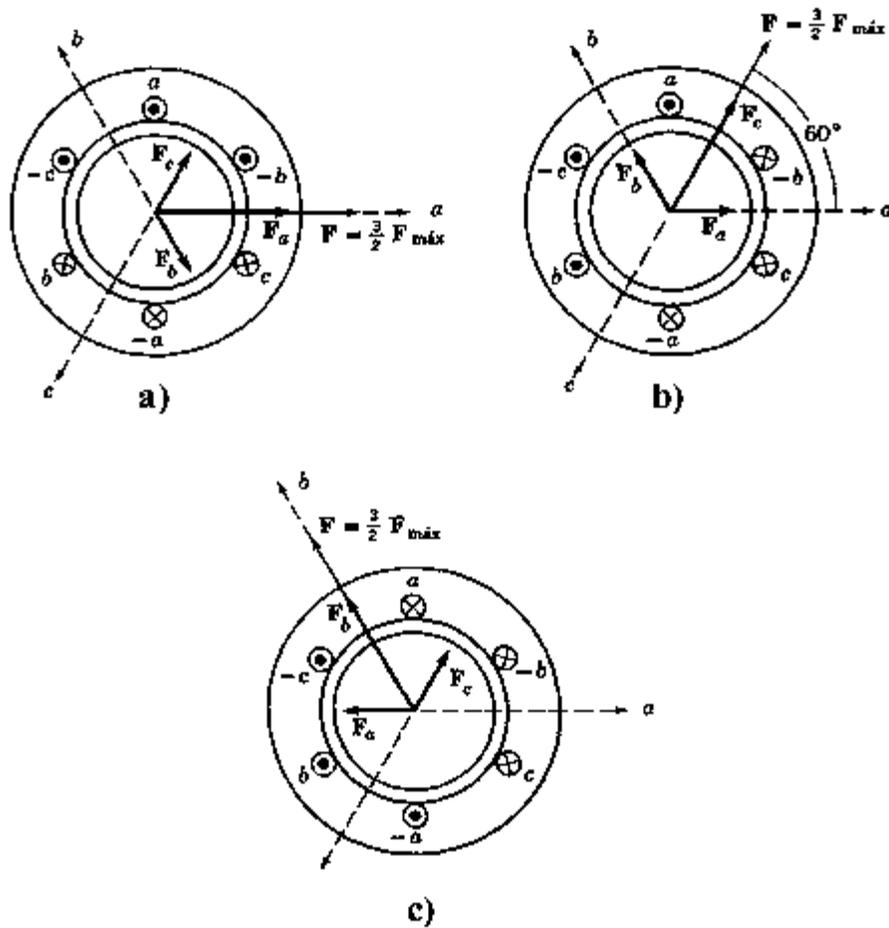


Figura 2.7 Campo giratorio producido por el estator: a)  $\omega t=0$ ; b)  $\omega t=\pi/t$ ; c)  $\omega t=2\pi/t$

### 2.1.4 Deslizamiento

Como estamos hablando de un motor de inducción, entonces la velocidad del rotor nunca va a ser la misma a la del campo magnético giratorio del estator. Es decir, el rotor nunca va a llegar a la velocidad síncrona, siempre va próximo a esta velocidad pero jamás podrá llegar a ella.

La diferencia entre velocidad síncrona  $N_s$  y la velocidad efectiva de rotación del rotor  $N$  se define como “EL DESLIZAMIENTO”, a este deslizamiento  $S$ , se puede expresar como un porcentaje de la velocidad síncrona o también como una fracción de esta.

El deslizamiento porcentual es expresado por la ecuación:

$$S\% = \frac{N_s - N}{N_s} \times 100 \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) demuestra que al momento de aumentar la carga, el deslizamiento aumentará, cuando no tiene carga el motor el deslizamiento es casi nulo en ocasiones es despreciable, en cuanto a la velocidad del rotor no siempre es constante con la carga, es por eso que también se le llaman motores asíncronos. Debido a la poca variación de la velocidad, en ciertas aplicaciones prácticas, se puede decir que es constante.

### 2.1.5 Frecuencia, voltaje y corriente en el rotor

Al momento de conectar la fuente al estator, el rotor se encuentra sin movimiento, en este momento la frecuencia que se encuentra en el rotor, es la misma que se tiene en el estator. Es decir, el motor está funcionando como si fuera un transformador, el estator se estaría comportando como el devanado primario y el rotor se comportaría como el devanado secundario.

En el momento que comienza a girar el rotor y a tomar velocidad, la frecuencia del voltaje inducido comienza a disminuir. Se debe que al aumentar las revoluciones del rotor el flujo que corta los conductores del estator comienza a disminuir hasta que queda de un valor muy pequeño.

Por lo tanto, la frecuencia del voltaje inducido en el rotor  $f_R$ , es igual a la frecuencia con la que se alimenta al estator  $f$ , multiplicada por el deslizamiento  $S$ . En la ecuación (2.2) se muestra esta relación.

$$f_R = Sf \quad (2.2)$$

En el caso de un transformador se menciona que la fuerza electromotriz inducida, es proporcional a la frecuencia y al número de espiras. En el caso del rotor, si  $f_R$  es la frecuencia del rotor y  $N_R$  el número de espiras del rotor, entonces la tensión inducida del rotor  $E_R$ , se obtiene en la ecuación (2.3):

$$E_R = 4.44f_R N_R \Phi \quad (2.3)$$

Cuando el rotor está parado, el motor de inducción se puede tomar como un transformador trifásico y toma el devanado secundario como si estuviera en corto circuito, entonces cuando está parado al instante del arranque, tenemos el siguiente voltaje:

$$E_{RO} = E x \frac{N_R}{N} \quad (2.4)$$

donde:

$E$  es el voltaje aplicado por fase en el devanado del estator

$N_R$  es el número de espiras por fase en el devanado del rotor

$N$  es el número de espiras por fase en el devanado del estator

Se le asigna  $R_R$  a la resistencia por fase del rotor y  $L_R$  a la inductancia del mismo, y como ya se mencionó  $E_{RO}$  es el voltaje inducido en el rotor cuando está parado al instante de conectar el estator. Entonces la reactancia del rotor es:

$$X_R = 2\pi f L_R \quad (2.5)$$

La impedancia por fase es:

$$Z_R = \sqrt{R_R^2 + X_R^2} \quad (2.6)$$

Por lo tanto la corriente por fase del rotor es:

$$I_R = \frac{E_{RO}}{Z_R} = \frac{E_{RO}}{\sqrt{R_R^2 + X_R^2}} \quad (2.7)$$

## 2.1.6 Curvas par-velocidad

La ecuación del par está dada por la relación que se demuestra a continuación:

$$T = \frac{KSR_R E_{RO}}{R_R^2 + S^2 X_R^2} \quad (2.8)$$

De acuerdo con la ecuación (2.8), que proporciona el par que realiza el motor de inducción trifásico, se puede llegar a varias conclusiones. Cuando la velocidad es cercana a la del sincronismo el deslizamiento tiende a ser cero, de acuerdo a la ecuación (2.8) el par también tiende a ser cero, esto quiere decir que el par es proporcional al deslizamiento. Entonces a medida que el deslizamiento aumenta la velocidad disminuye en base al incremento en la carga y por lo tanto el par aumenta hasta alcanzar su máximo en  $S=R_R/X_R$ , esto se muestra en la figura 2.8.

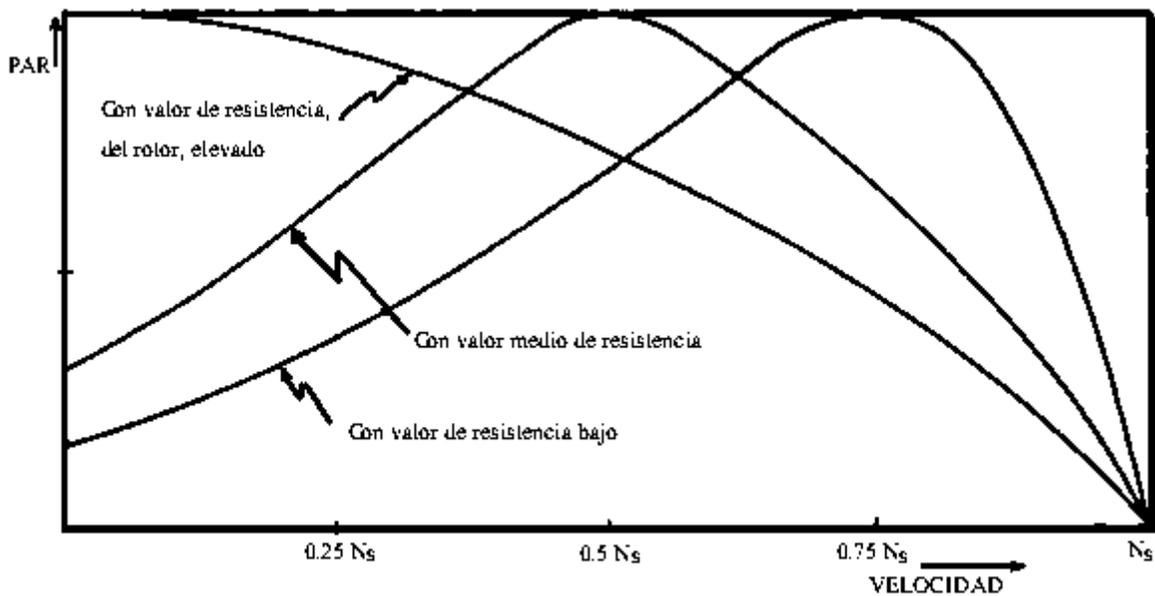


Figura 2.8 Curvas Par-Velocidad

## 2.1.7 Pruebas para la determinación de parámetros

Para estudiar algunos de los problemas relacionados con el motor de inducción como son el arranque, aceleración, operación y eficiencia, tanto como los motores de rotor devanado como los tipo jaula de ardilla, se deben conocer algunos términos y encontrar los medios necesarios para conocer sus valores, es por eso que existen diferentes tipos de pruebas para la determinación de parámetros, las cuales se indican a continuación:

#### **a) Prueba en vacío**

Sirve para encontrar las pérdidas mecánicas y magnéticas. Esta prueba es el equivalente a la prueba de circuito abierto en un transformador. En el momento que el motor está operando en vacío, la corriente en el estator es de 0.3 a 0.5 la corriente que circularía a plena carga. Esta corriente prácticamente es para la magnetización, la cual sirve para crear el flujo giratorio, también se tiene que alimentar las pérdidas, como son la fricción y ventilación del motor, así como también las pérdidas en el hierro del estator.

#### **b) Prueba de corriente directa**

Esta prueba se realiza para determinar la resistencia de los devanados del estator y se realiza después de que la máquina de inducción haya funcionado un tiempo como motor. Para realizar esta prueba es necesario tener en cuenta que la corriente directa máxima que puede circular por el devanado, tiene que ser menor a la corriente nominal que soporta la máquina. Para poder manipular la corriente que pasa por el devanado de la máquina, se tiene que colocar una resistencia en serie de valor conocido y teniendo el valor del voltaje que se le aplica, se puede obtener la resistencia del devanado por medio de la ley de ohm.

#### **c) Prueba de rotor bloqueado**

Esta prueba permite calcular el valor de la resistencia total efectiva, la resistencia del rotor y las pérdidas en los devanados. Primero se bloquea el rotor, después se conecta la máquina con voltaje reducido, se va elevando paulatinamente el voltaje hasta llegar a la corriente nominal en el estator del motor. Una vez realizado lo anterior se toman las mediciones necesarias. Estando bloqueado el rotor, el deslizamiento es igual a uno, por lo tanto, el motor desarrolla un par elevado. Como la corriente de rotor bloqueado va ser la nominal de la máquina, las pérdidas por efecto Joule son muy grandes, es por eso que se recomienda tener energizada la máquina un periodo de tiempo muy pequeño.

### 2.1.8 Eficiencia y tipos de pérdidas

Desde los inicios de la civilización, se ha perseguido el aumento del rendimiento de todo tipo de máquinas y equipos; incluso, en determinadas circunstancias, un bajo rendimiento de una máquina o sistema, podía originar no sólo la paralización de su fabricación, sino también detener el desarrollo tecnológico. Un caso típico fue la sustitución del uso de la corriente continua por la alterna, debido al bajo rendimiento del transporte en corriente continua.

#### a) Pérdidas en los motores eléctricos

Los motores eléctricos son un dispositivo que convierte energía eléctrica a mecánica, siempre que una máquina transforma alguna forma de energía a otra, existen pérdidas. Las pérdidas producen en la máquina principalmente:

- i. Un incremento en la temperatura
- ii. Una reducción en la eficiencia

Las pérdidas se pueden agrupar en dos tipos:

- I. **Pérdidas mecánicas.** Las pérdidas mecánicas en los motores de inducción son debidas a la fricción de los baleros, fricción en los anillos colectores (en el caso del rotor devanado) y a la acción del aire en la ventilación, por eso se dice, que las pérdidas son por fricción y ventilación. Las pérdidas de ventilación dependen principalmente de la velocidad con que se encuentre girando la máquina y al diseño de la ventilación.
- II. **Pérdidas eléctricas.** Las pérdidas eléctricas en los motores de inducción se componen principalmente de 2 componentes:
  - Pérdidas en los conductores ( $RI^2$ ), también conocidas como pérdidas en el cobre
  - Pérdidas en el fierro

En los motores de inducción este tipo de pérdidas se presentan tanto en los conductores del estator como del rotor, se manifiestan en forma de calor, produciendo una elevación de temperatura en el ambiente que se puede percibir. En algunas ocasiones en lugar de expresar las pérdidas por medio del efecto Joule ( $RI^2$ ), es mejor expresarlas en términos de watts por kilogramo, del material usado como conductor para los devanados.

## **b) Eficiencia del motor de inducción**

La eficiencia de un motor de inducción puede ser determinada aplicándole una carga y midiendo las potencias de entrada y de salida directamente. Este método no siempre es recomendable, ya que se tienen varias imprecisiones, además para motores grandes no se le puede aplicar una carga que se pueda medir, en el caso de que se pueda medir seguiría siendo impreciso el método.

Si se considera que el circuito equivalente del motor de inducción es prácticamente igual al del transformador, se pueden calcular las pérdidas de manera similar, como por ejemplo: las pérdidas en vacío sería igual a tener al motor sin carga y la prueba de corto circuito sería lo mismo que tener al motor con el rotor bloqueado, teniendo cuidado y tomando las mediciones correctas, se puede obtener las pérdidas con más exactitud. De esta forma se puede llegar a obtener la eficiencia de un motor de inducción.

## **2.2 Bond Graph**

En el análisis de un sistema dinámico lo primero que se tiene que hacer es obtener su modelo. Todos los modelos casi siempre son construidos para resolver algún problema propuesto. En bastantes ocasiones los modelos requieren de un gran número de operaciones matemáticas que por lo regular son bastante complejas.

El método Bond Graph (BG) representa un enfoque para realizar modelos agrupados para diferentes dominios físicos, que manipula y muestra la estructura física de intercambio de potencias en el sistema. Aún conservando esta propiedad, el método permite encontrar el modelo matemático directamente desde los Bond Graph, además de poder observar el desempeño, tener el control del sistema y ver la dependencia lineal de cada elemento, todo basado en una representación gráfica y la generalización de variables de flujo y esfuerzo.

La teoría sobre el lenguaje de modelado BG es original de Paynter desde 1961 y profundamente desarrollada por Karnopp y Rosenberg posteriormente. Es un lenguaje de modelado basado en el principio físico de la conservación de la energía y la aproximación al desacoplo de fenómenos de un proceso global físico. <sup>[2]</sup>

Bond Graph es un enfoque general que permite construir modelos de sistemas eléctricos, magnéticos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos, térmicos y otro tipo de

sistemas, utilizando únicamente un pequeño conjunto de elementos ideales. Técnicas estándares expresan los modelos en ecuaciones diferenciales o en esquemas de simulación por computadoras. [3]

Un Bond Graph está formado por un conjunto de elementos que interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Todos estos elementos indican como fluye la potencia en el sistema.

### 2.2.1 Componentes básicos del Bond Graph

El componente principal de un Bond Graph es el bond representado en la figura 2.9, es el que se utiliza para acoplar los puertos de energía en un sistema, la punta de la semiflecha del Bond indica el sentido de transmisión de la potencia.

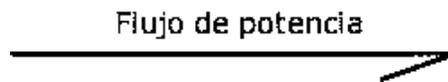


Figura 2.9 Bond

Para poder modelar un sistema es conveniente dividir el sistema en partes más pequeñas que puedan ser modeladas y estudiadas experimentalmente, y después ensamblarlas al sistema. Entonces las partes principales de un sistema son llamadas subsistemas y todas la demás partes que no se pueden reducir se les llama componentes, un subsistema es una parte del sistema pero es modelado como un sistema en sí mismo, y los componentes son modelados como una entidad.

Los lugares en los que se pueden conectar los subsistemas son llamados puertos, en los cuales puede fluir la energía. Los sistemas con un puerto sencillo son llamados puerto-1, un sistema con dos puertos es llamado puerto-2. Los sistemas multipuertos son llamados puertos-n, en donde n es el número de puertos.

Las variables de potencia son llamadas esfuerzo  $e(t)$  y flujo  $f(t)$ . estas variables juntas son llamadas variables de bond generalizadas. En la figura 2.10 se muestra un bond con estas variables.

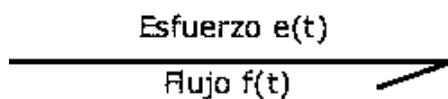


Figura 2.10 Bond con sus variables de potencia.

La potencia instantánea, es transmitida por un bond en particular y puede ser expresada por el producto de esfuerzo  $e(t)$  y flujo  $f(t)$  como se muestra en la ecuación (2.9). Un ejemplo de estas dos variables, sería como voltaje y corriente para un sistema eléctrico o fuerza y velocidad para un sistema mecánico.

$$P(t) \triangleq e(t)f(t) \quad (2.9)$$

Las variables que representan el estado del sistema, son llamadas variables de energía denominadas momento  $p(t)$  o esfuerzo acumulado  $e_a(t)$ , y desplazamiento  $q(t)$  o flujo acumulado  $f_a(t)$ , estas ecuaciones se muestran a continuación:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int^t e(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int^t f(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

En la tabla 2.1 se muestran las variables generalizadas para sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales y en la tabla 2.2 para sistemas mecánicos rotacionales y sistemas hidráulicos.

Tabla 2.1 Variables generalizadas para sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales

Variables	General	Eléctrico	Mecánico Traslacional
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad
Momento	$p(t) = \int e(t) dt$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_R(t)$ Momento Rotacional
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t) dt$	$q(t)$ Carga	$x(t)$ Distancia
Potencia	$P(t) = e(t) f(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p) dp$ $E(q) = \int e(q) dq$	$\int i(\lambda) d\lambda$ $\int e dq$	$\int V(P_R) dP_R$ $\int F(x) dx$

Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos

Variables	Mecánico Rotacional	Hidráulico
Esfuerzo	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$\omega(t)$ Velocidad angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$H(t)$ Momento angular	$P_p(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$\theta(t)$ Angulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$\int \omega(H) dH$ $\int \tau(\theta) d\theta$	$\int Q(P_p) dP_p$ $\int P_e(V) dV$

### 2.2.1.1 Puertos-1 pasivos

Los elementos pasivos son llamados así por que representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía. Se les dice puertos-1 aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo. La tabla 2.3 muestra el elemento de disipación R, para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos rotacionales, mecánicos traslacionales y sistemas hidráulicos.

Tabla 2.3 Elemento-R

Resistencia (1-puerto)		
Variables	General	Lineal
Esfuerzo $e$	$e = \Phi(f)$	$e = Rf$
Flujo $f$	$f = \Phi^{-1}(e)$	$f = Ge = e/R$
MECÁNICA (TRANS)		
fuerza $F$	$F = \Phi(V)$	$F = bV$
velocidad $V$	$V = \Phi^{-1}(F)$	
MECÁNICA (ROT)		
torque $\tau$	$\tau = \Phi(\omega)$	$\tau = c\omega$
rotación $\omega$	$\omega = \Phi^{-1}(\tau)$	
ELÉCTRICA		
tensión $e$	$e = \Phi(i)$	$e = Ri$
corriente $i$	$i = \Phi^{-1}(e)$	$i = Ge$
HIDRÁULICA		
presión $P$	$P = \Phi(Q)$	$P = RQ$
caudal $Q$	$Q = \Phi^{-1}(P)$	

En la tabla 2.4 se muestra el elemento de almacenamiento tipo C, para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos rotacionales, mecánicos traslacionales y sistemas hidráulicos.

Tabla 2.4 Elemento-C

<b>Capacitancia (1-puerto)</b>		
<b>Variables</b>	<b>General</b>	<b>Lineal</b>
Desplazamiento $q$ Esfuerzo $e$	$q = \Phi(e)$ $e = \Phi^{-1}(q)$	$q = Ce$ $e = q/C$
	MECÁNICA (TRANS)	
desplazamiento $X$ fuerza $F$	$X = \Phi(F)$ $F = \Phi^{-1}(X)$	$X = CF$ $F = kX$
	MECÁNICA (ROT)	
ángulo $\theta$ torque $\tau$	$\theta = \Phi(\tau)$ $\tau = \Phi^{-1}(\omega)$	$\theta = C\tau$ $\tau = k\theta$
	ELÉCTRICA	
carga $q$ tensión $e$	$q = \Phi(e)$ $e = \Phi^{-1}(q)$	$q = Ce$ $e = q/C$
	HIDRÁULICA	
volumen $V$ presión $P$	$V = \Phi(P)$ $P = \Phi^{-1}(V)$	$V = CP$ $P = P/V$

En la tabla 2.5 se muestra el elemento de almacenamiento tipo I, para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos rotacionales, mecánicos traslacionales y sistemas hidráulicos.

Tabla 2.5 Elemento-I

Inductancia (1-puerto)		
Variables	General	Lineal
Momento $p$	$p = \Phi(f)$	$p = If$
Flujo $f$	$f = \Phi^{-1}(p)$	$f = p/I$
	MECÁNICA (TRANS)	
momento lin. $p$	$p = \Phi(V)$	$p = mV$
velocidad $V$	$V = \Phi^{-1}(p)$	$V = p/m$
	MECÁNICA (ROT)	
momento ang. $p$	$p = \Phi(\omega)$	$p = J\omega$
torque $\tau$	$\omega = \Phi^{-1}(p)$	$\omega = p/J$
	ELECTRICA	
flujo conc. $\lambda$	$\lambda = \Phi(i)$	$\lambda = Li$
tensión $e$	$i = \Phi^{-1}(\lambda)$	$i = \lambda/L$
	HIDRÁULICA	
momentum $p$	$p = \Phi(Q)$	$p = IQ$
caudal $Q$	$Q = \Phi^{-1}(p)$	$Q = p/I$

En la figura 2.11 se muestra el esquema tetraedro, en el que se observa como se relacionan las variables por tres puertos-1 pasivos R, C e I.

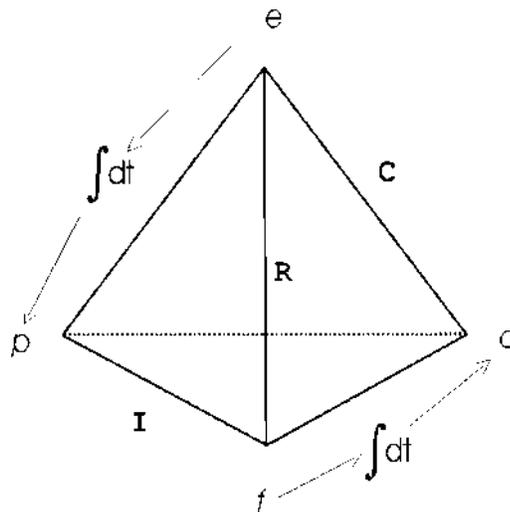


Figura 2.11 Tetraedro de estado

### 2.2.1.2 Puertos-1 activos o fuentes

Los elementos considerados como elementos fuente son modelos de dispositivos que imprimen potencia, ya sea en esfuerzo constante, que son llamadas fuentes de esfuerzo  $MS_e$  (voltaje, fuerza o presión), o a flujo constante, que son llamadas fuentes de flujo  $MS_f$  (corriente, velocidad o causal), en la figura 2.12 se muestra la representación gráfica de las fuentes.



Figura 2.12 Puertos-1 activos

### 2.2.1.3 Los elementos ideales de Puerto-2

Los elementos ideales puerto-2, llamados transformador (TF) y girador (GY), son sistemas que cambian las variables de flujo y esfuerzo.

En la figura 2.13 se muestra la representación en un bond graph de un transformador TF, se caracteriza por poseer las relaciones constitutivas que siguen,

$$e_1(t) = ke_2(t) \quad (2.12)$$

$$kf_1(t) = f_2(t) \quad (2.13)$$

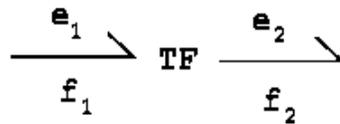


Figura 2.13 Bond graph de un transformador

El girador que se muestra su representación en bon graph en la figura 2.14, se caracteriza por poseer las relaciones constitutivas que siguen:

$$e_1(t) = rf_2(t) \quad (2.14)$$

$$rf_1(t) = e_2(t) \quad (2.15)$$

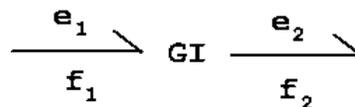


Figura 2.14 Bond graph de un girador

### 2.2.1.4 Los elementos de unión, Puerto-3

Los puertos-3 también son llamados uniones ya que interconectan 3 o más puertos de energía en un subsistema. Estos puertos-3 representan las uniones serie o paralelo.

Considerar la unión de flujo, unión-0 o unión de esfuerzo común para la conexión en paralelo. En la figura 2.15 se muestra la representación en bond graph.

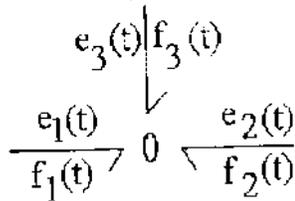


Figura 2.15 Unión-0

Las relaciones están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.16)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.17)$$

En la unión de esfuerzo, unión-1 o de flujo común, es la conexión en serie, en la figura 2.16 se muestra la representación en bond graph.

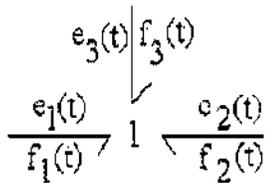


Figura 2.16 Unión-1

Las relaciones son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.18)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.19)$$

Este tipo de puertos, ya sean los de flujo o de esfuerzo pueden extenderse a puertos de 3 o más.

### 2.2.1.5 Causalidad para los multipuertos básicos

Las relaciones causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. La marca de causalidad se sitúa en la extremidad del puerto que recibe el esfuerzo como se muestra en la figura 2.17, esa marca es llamada trazo causal.

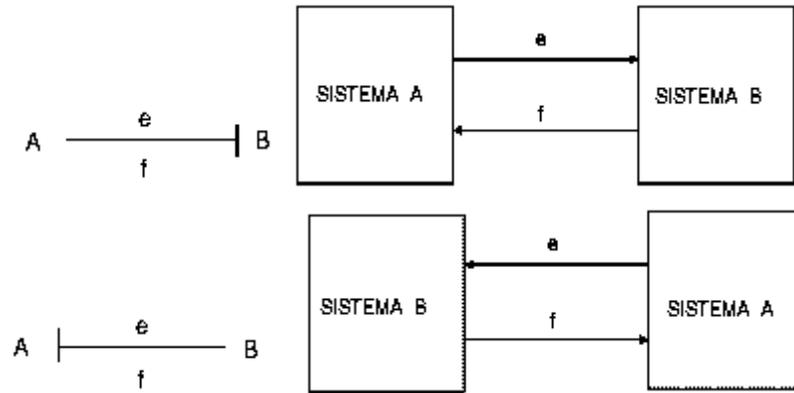


Figura 2.17 Causalidad para un bond

Se deben seguir un conjunto de reglas para poder aplicar la causalidad de un bond, existe la causalidad necesaria, en donde la causalidad siempre debe de ir en el mismo lugar, en la causalidad restrictiva varían las marcas de causalidad pero siempre siguiendo las reglas que se muestran en la tabla 2.6, la causalidad integral se recomienda seguir en la representación gráfica de la solución de un sistema físico.

Tabla 2.6 Consideraciones causales para los multipuertos básicos

Causalidad Necesaria	$Mse \longrightarrow 0$	$MSf \longleftarrow 1$	
	$\longleftarrow  GY  \longrightarrow$ $\longrightarrow  TF  \longleftarrow$	$\longleftarrow TF \longrightarrow$ $\longrightarrow GY \longleftarrow$	
Causalidad Restrictiva	$\longleftarrow 0 \longrightarrow$	$\longleftarrow 0 \longrightarrow$	$\longleftarrow 0 \longrightarrow$
	$\longrightarrow 1 \longleftarrow$	$\longrightarrow 1 \longleftarrow$	$\longrightarrow 1 \longleftarrow$
Causalidad Integral	$\longrightarrow  I$	$\longleftarrow C$	
Causalidad Derivativa	$\longleftarrow  $	$\longrightarrow  C$	
Causalidad Arbitraria	$\longrightarrow  R$	$\longleftarrow R$	

En la tabla 2.7 se muestran los puertos-1 con la causalidad correspondiente a cada elemento considerado.

Tabla 2.7 Formas causales para puertos-1

Elemento	Forma Causal	Relación Causal
Fuente de Esfuerzo	$MS_e \text{ --- } \nearrow$	$e(t) = E(t)$
Fuente de Flujo	$MS_f \text{ --- } \searrow$	$f(t) = F(t)$
Resistencia	$\text{---} \nearrow R$	$e(t) = \Phi_R[f(t)]$
	$\text{---} \searrow R$	$f(t) = \Phi_R^{-1}[e(t)]$
Capacitancia	$\text{---} \nearrow C$	$e(t) = \Phi_C^{-1}[\int f(\tau) d\tau]$
	$\text{---} \searrow C$	$f(t) = \frac{d}{dt} [\Phi_C e(t)]$
Inductancia	$\text{---} \nearrow l$	$f(t) = \Phi_l^{-1}[\int e(\tau) d\tau]$
	$\text{---} \searrow l$	$e(t) = \frac{d}{dt} [\Phi_l f(t)]$

### 2.2.1.6 Procedimiento para asignar la causalidad en un multipuerto

Para poder obtener las ecuaciones diferenciales cumpliendo con las reglas de causalidad de la tabla 2.6 se debe seguir en orden el siguiente procedimiento.

1. Considerar cualquier  $MS_e$  o  $MS_f$  y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1, TF, y GY. (ver tabla 2.6)
2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la tabla 2.6.
3. Escoger cualquier R que no este asignado y dar una causalidad arbitraria a R. Extender las implicaciones usando 0, 1, TF y GY. (Ver Tabla 2.6)

### 2.2.1.7 Bond activo

El bond activo comunica en una sola dirección y tan solo una de las señales de un bond normal, ya sea esfuerzo  $e(t)$  o flujo  $f(t)$ , además el flujo de potencia en este bond es cero. El bond activo se muestra en la figura 2.18, es representado por una flecha completa.



Figura 2.18 Bond activo.

Ya fueron estudiados los componentes básicos para modelar sistemas físicos, ahora, se proporcionara un procedimiento para modelar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos, el cual se puede aplicar4 a otro tipo de sistemas físicos.

### 2.2.2 Procedimiento para el modelado de sistemas

En esta sección, se explica como representar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos en bond graph utilizando un procedimiento de modelado simple y directo.

1. Dibujar la unión-0 para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
2. Dibujar una unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de bond graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y elementos disipadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indica la dirección del flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a esta unión.
5. Simplificar la gráfica de acuerdo a las reglas mostradas en la figura 2.19.

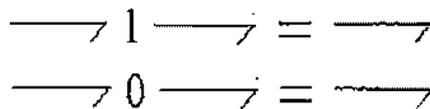


Figura 2.19 Regla para simplificar la gráfica

### 2.2.3 Estructura de unión en sistemas multipuerto

Cuando se considera algunos tipos de sistemas grandes como campos interconectados, da una estructura dinámica y entonces la generación, manipulación y reducción de muchas ecuaciones es hecha sistemáticamente para una implementación exitosa.

### 2.2.3.1 Vectores clave o vectores significativos

En un bond graph se pueden clasificar los bonds según los elementos o puertos que conecten, como por ejemplo, a los que conectan los elementos R, C, I,  $MS_e$  y  $MS_f$  se les conoce como bonds externos, y bonds internos a los que conectan a 0, 1, TF y GY. En la figura 2.20 se muestra un diagrama de bloques de la estructura de unión de un bond graph.

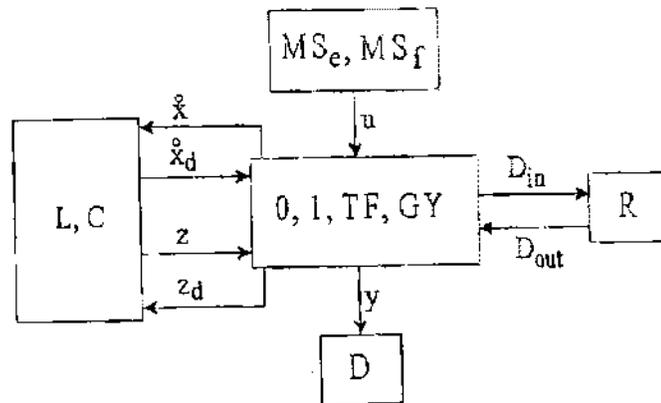


Figura 2.20 Diagrama de bloques de la estructura de unión de un bond graph

En la figura 2.20 las variables  $MS_e$  y  $MS_f$  denotan los campos de fuente, C y L los de almacenamiento y R los de disipación, D el detector y la estructura de unión con transformadores, giradores, uniones-0 y uniones-1 son denotadas por (0, 1, TF, GY).

A los vectores que representan al sistema son llamados vectores clave, todos están representados en la figura 2.20, donde  $u$  contiene las variables de potencia o los esfuerzos y flujos impuestos por los elementos de las fuentes en la Estructura de Unión. Los estados  $x$  y  $x_d$  están compuestos de variables de energía, momento generalizado  $p$  en elementos I y desplazamiento en generalizado  $q$  en elementos C en causalidad integral y derivativa respectivamente;  $z$  y  $z_d$  son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa respectivamente,  $D_{in}$  y  $D_{out}$  son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los cambios energéticos entre el campo de disipación y la Estructura de Unión.

### 2.2.3.2 Relaciones de campo y ecuación de estado

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual es llamada como su relación constitutiva. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = F_x(t) \quad (2.20)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.21)$$

$$D_{out}(t) = L D_{in}(t) \quad (2.22)$$

donde L, F y F<sub>d</sub> son matrices reales de dimensiones r x r, n x n y m x m, respectivamente.

Las relaciones de estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.24)$$

donde la estructura de unión está dada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

La matriz S está particionada de acuerdo a sus vectores clave. Las submatrices S<sub>ij</sub> tienen las siguientes propiedades:

- S<sub>11</sub> y S<sub>22</sub> son matrices cuadradas antisimétricas.
- S<sub>12</sub> es la matriz transpuesta negativa de S<sub>21</sub> y viceversa.

Un sistema LTI MIMO está representado en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.26)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.27)$$

Relacionando (2.23) y (2.24) con (2.26) obtenemos:

$$A_p = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.28)$$

$$B_p = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.29)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{23})F \quad (2.30)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.31)$$

donde:

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.32)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (2.33)$$

Las expresiones (2.26) a (2.33) permiten obtener el modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación en bond graph.

## Capítulo 3

# Un modelo del motor de inducción en bond graph

### 3.1 Transformación de devanados entre abc y dq0

Una gran simplificación en la descripción matemática de la máquina de inducción es obtenida si una transformación de variables es utilizada. La transformación utilizada es usualmente llamada Transformación de Park. Define un nuevo conjunto de variables del estator tales como corrientes, voltajes o enlaces de flujo en términos de variables del actual devanado.

Las nuevas cantidades son obtenidas a partir de la proyección de las variables actuales en tres ejes; uno a lo largo del eje directo del devanado de campo del rotor, llamado eje directo; uno segundo a lo largo del eje neutral del devanado de campo, llamado eje de cuadratura y el tercero en el eje estacionario.

Esta transformación es estática en dos ejes, es decir sus inductancias se mantienen constantes y se elimina la dependencia con el tiempo.

A este tipo de transformación se le conoce con el nombre de transformación de Park, que se muestra en la ecuación (3.1) y (3.4).

$$[C] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Con la ecuación (3.1) se puede obtener voltajes y corrientes de (abc) a (dq0) como se muestra en las ecuaciones (3.2) y (3.3).

$$[i_{dq0}] = [C][i_{abc}] \quad (3.2)$$

$$[V_{dq0}] = [C][V_{abc}] \quad (3.3)$$

Otra transformación que se tiene, es la que se muestra en la ecuación (3.4).

$$[D] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos(\theta_r + 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Con la ecuación (3.4) se puede obtener voltajes y corrientes de (dq0) a (abc) como se muestra en las ecuaciones (3.5) y (3.6).

$$[i_{abc}] = [D][i_{dq0}] \quad (3.5)$$

$$[V_{abc}] = [D][V_{dq0}] \quad (3.6)$$

Observando que:

$$D = C^{-1} \quad (3.7)$$

y que también:

$$D^T = C \quad (3.8)$$

esta transformación no debe de haber pérdidas de potencia, entonces la potencia es,

$$P_{a,b,c} = [i_a \quad i_b \quad i_c] * \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = [i_d \quad i_q \quad i_0] * [D^T] * [D] * \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

como la matrices C y D ambas son matrices ortogonales y la relación  $D^T \times D = 1$  entonces se obtiene la ecuación (3.10).

$$P_{a,b,c} = P_{d,q,0} \quad (3.10)$$

### 3.2 Modelo matemático del motor de inducción trifásico

El principio de operación de la máquina de inducción es descrito en el capítulo 2. Para el modelado del motor de inducción es necesario considerar que en el rotor se tiene un devanado trifásico normalmente conectado en estrella, traídos afuera y conectados a tres anillos deslizantes, o también puede tener un devanado tipo jaula de ardilla. En la corriente inducida en los conductores, se deben ignorar los efectos en las ranuras, saturación etc., esta corriente debe ser similar a la corriente del estator y consecutivamente, con el propósito de análisis, el rotor puede estar considerado con un devanado trifásico simétricamente distribuido. El modelo de la máquina de inducción trifásica es mostrado en la figura 3.1. En donde la velocidad del rotor es  $(1 - s)\omega \text{ rad/seg}$ , en donde  $\omega$  es la velocidad del campo magnético giratorio y  $s$  es el deslizamiento. <sup>[5]</sup>

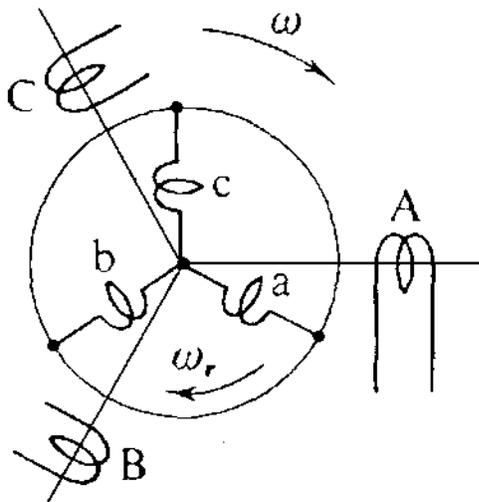


Figura 3.1 Máquina de inducción

Las inductancias de la máquina son:

- Propias

$$L_{aa} = L_l + L_1 + L_2 \cos 2\theta_r \quad (3.11)$$

$$L_{bb} = L_l + L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r - 120^\circ) \quad (3.12)$$

$$L_{cc} = L_l + L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r + 120^\circ) \quad (3.13)$$

- Mutuas

$$L_{ab} = L_{ba} = -\frac{L_1}{2} + L_2 \cos 2(\theta_r - 60^\circ) \quad (3.14)$$

$$L_{ac} = L_{ca} = -\frac{L_1}{2} + L_2 \cos 2(\theta_r + 60^\circ) \quad (3.15)$$

$$L_{bc} = L_{cb} = -\frac{L_1}{2} + L_2 \cos 2\theta_r \quad (3.16)$$

- Estator rotor

$$L_{aD} = L_{Da} = M_{rD} \cos \theta_r \quad (3.17)$$

$$L_{bD} = L_{Db} = M_{rD} \cos(\theta_r - 120^\circ) \quad (3.18)$$

$$L_{cD} = L_{Dc} = M_{rD} \cos(\theta_r + 120^\circ) \quad (3.19)$$

$$L_{aQ} = L_{Qa} = M_{rQ} \cos \theta_r \quad (3.20)$$

$$L_{bQ} = L_{Qb} = M_{rQ} \cos(\theta_r - 120^\circ) \quad (3.21)$$

$$L_{cQ} = L_{Qc} = M_{rQ} \cos(\theta_r + 120^\circ) \quad (3.22)$$

la matriz de enlaces de flujo es:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DD} & 0 \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

dividiendo la matriz de enlaces de flujo queda:

$$[\lambda_{abcDQ}] = \begin{bmatrix} [\lambda_{abc}] \\ [\lambda_{DQ}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_w] & [L_x] \\ [L_{x_t}] & [L_z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{abc}] \\ [i_{DQ}] \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

eliminando y reduciendo:

$$\begin{bmatrix} [C_t] & [\lambda_{dq0}] \\ & [\lambda_{DQ}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_w] & [L_x] \\ [L_{x_t}] & [L_z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C_t] & [i_{dq0}] \\ & [i_{DQ}] \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} [\lambda_{dq0}] \\ [\lambda_{DQ}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_w] [C_t] & [L_x] \\ [L_{x_t}] [C_t] & [L_z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{dq0}] \\ [i_{DQ}] \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

pero

$$\begin{bmatrix} [\lambda_{dq0}] \\ [\lambda_{DQ}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C_t] & [\lambda_{dq0}] \\ & [\lambda_{DQ}] \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

entonces

$$[\lambda_{dq0DQ}] = \begin{bmatrix} [\lambda_{dq0}] \\ [\lambda_{DQ}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C][L_w][C_t] & [C][L_x] \\ [L_x][C]_t & [L_z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{dq0}] \\ [i_{DQ}] \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$[\lambda_{dq0DQ}] = [L_{dq0DQ}][i_{dq0DQ}] \quad (3.29)$$

expandiendo las submatrices de  $[L_{dq0DQ}]$

$$[C][L_w][C_t] = \begin{bmatrix} L_l + \frac{3}{2}(L_1 + L_2) & 0 & 0 \\ 0 & L_l + \frac{3}{2}(L_1 - L_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_l \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$[L_x][C] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}}M_{rD} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}M_{rD} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

la inductancia síncrona del eje directo es:

$$L_d = L_l + \frac{3}{2}(L_1 + L_2) \quad (3.32)$$

la inductancia síncrona del eje de cuadratura es:

$$L_q = L_l + \frac{3}{2}(L_1 - L_2) \quad (3.33)$$

definiendo los coeficientes de inductancias mutuas:

$$M_{dD} = M_{Dd} = \sqrt{\frac{3}{2}}M_{rD} \quad (3.34)$$

$$M_{dQ} = M_{Qd} = \sqrt{\frac{3}{2}}M_{rQ} \quad (3.35)$$

entonces la matriz de inductancia después de la transformación y con las consideraciones indicadas queda:

$$[L_{dq0DQ}] = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{dD} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & M_{qQ} \\ 0 & 0 & L_l & 0 & 0 \\ M_{dD} & 0 & 0 & L_D & 0 \\ 0 & M_{qQ} & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

la máquina primitiva de cuatro bobinas equivalente a un motor de inducción es mostrada en la figura 3.2.

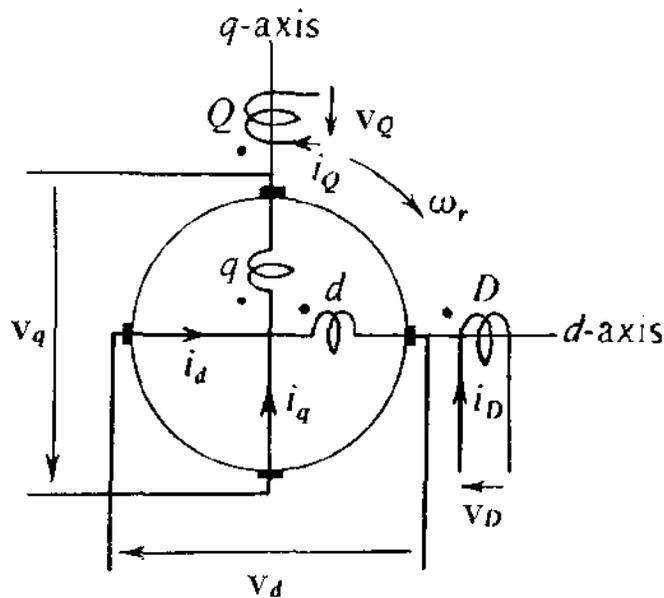


Figura 3.2 Máquina primitiva equivalente a la máquina de inducción

Aplicando las reglas para obtener [G] a partir de la máquina primitiva tenemos:

$$[G_{dq0DQ}] = \begin{bmatrix} 0 & G_{dq} & 0 & 0 & G_{dQ} \\ G_{qd} & 0 & 0 & G_{qD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

entonces la ecuación de voltajes es:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_0 \\ V_D \\ V_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_d + L_d p) & w_r G_{dq} & 0 & M_{dD} p & w_r G_{dQ} \\ w_r G_{qd} & (R_q + L_q p) & 0 & w_r G_{qD} & M_{qQ} p \\ 0 & 0 & (R + L_l p) & 0 & 0 \\ M_{Dd} p & 0 & 0 & (R_D + L_D p) & 0 \\ 0 & M_{Qq} p & 0 & 0 & (R_Q + L_Q p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

si se tiene que:

- Resistencia del rotor  $R_1 = R_D = R_Q$
- Resistencia del estator  $R_2 = R_d = R_q$
- Inductancia del rotor  $L_D = L_Q$
- Inductancia del estator  $L_d = L_q$
- Inductancias mutuas  $M_{Dd} = M_{dD} = M_{Qq} = M_{qQ} = M$

además  $p = \frac{d}{dt}$

también:

- $G_{qD} = -G_{dQ} = M$
- $G_{qd} = -G_{dq} = L_d$

sustituyendo en la ecuación (3.38) la matriz de voltajes queda:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_0 \\ V_D \\ V_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_2 + L_d p) & -w_r L_d & 0 & M p & -w_r M \\ w_r L_d & (R_2 + L_d p) & 0 & w_r M & M p \\ 0 & 0 & (R + L_l p) & 0 & 0 \\ M p & 0 & 0 & (R_1 + L_D p) & 0 \\ 0 & M p & 0 & 0 & (R_1 + L_D p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

expandiendo:

$$V_d = R_2 i_d + p(L_d i_d + M i_D) - w_r (L_d i_q + M i_Q) \quad (3.40)$$

$$V_q = R_2 i_q + p(L_d i_q + M i_Q) + w_r (L_d i_d + M i_D) \quad (3.41)$$

$$V_0 = R i_0 + p(L_l i_0) \quad (3.42)$$

$$V_D = R_1 i_D + p(L_D i_D + M i_d) \quad (3.43)$$

$$V_Q = R_1 i_Q + p(L_D i_Q + M i_q) \quad (3.44)$$

tomando en cuenta que los enlaces de flujo son:

$$\lambda_d = L_d i_d + M i_D \quad (3.45)$$

$$\lambda_q = L_d i_q + M i_Q \quad (3.46)$$

$$\lambda_0 = L_l i_0 \quad (3.47)$$

$$\lambda_D = L_D i_D + M i_d \quad (3.48)$$

$$\lambda_Q = L_D i_Q + M i_q \quad (3.49)$$

por lo tanto podemos reducir a:

$$V_d = R_2 i_d + p \lambda_d - w_r \lambda_q \quad (3.50)$$

$$V_q = R_2 i_q + p \lambda_q + w_r \lambda_d \quad (3.51)$$

$$V_0 = R_l i_0 + p \lambda_0 \quad (3.52)$$

$$V_D = R_1 i_D + p \lambda_D \quad (3.53)$$

$$V_Q = R_1 i_Q + p \lambda_Q \quad (3.54)$$

### 3.3 Modelo matemático del motor de inducción trifásico por medio del método de bond graph

El modelo d-q-0 de la máquina de inducción es similar al de la máquina síncrona, con la diferencia que este no tiene devanado de campo. El modelo en bond graph de la máquina de inducción trifásica es representado en la figura 3.3.

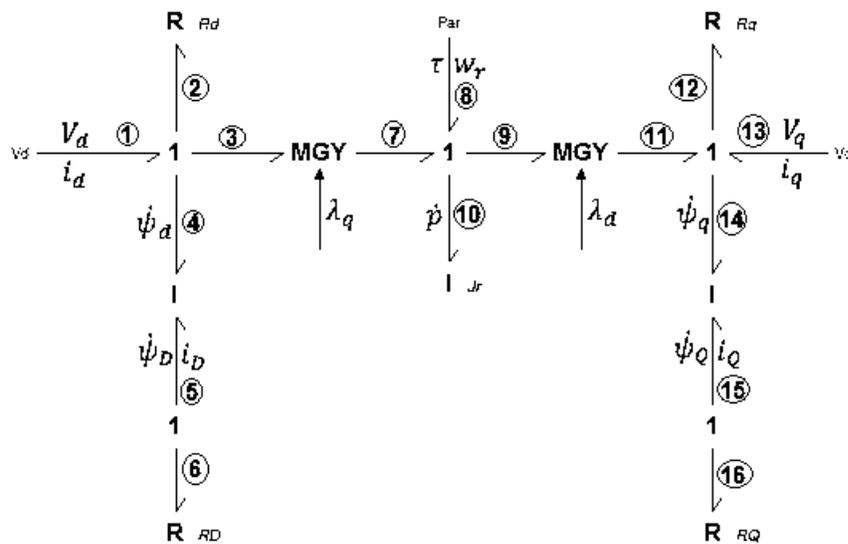


Figura 3.3 Modelo en bond graph de la máquina de inducción.

Vectores clave:

- En la ecuación (3.55) y (3.56) se toman todos los elementos pasivos disipadores de potencia para formar los vectores  $D_{in}$  con los flujos y  $D_{out}$  con los esfuerzos, respectivamente.

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{12} \\ f_{16} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

- La ecuación (3.57) se forma de las fuentes que existen en el modelo.

$$u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_8 \\ e_{13} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

- Ahora en la ecuación (3.58) se toman los elementos almacenadores de energía para formar el vector  $x$  con el momento y en donde la ecuación (3.59) es la derivada del vector  $x$ . También la ecuación (3.60) es formada por este tipo de elementos, tomando en cuenta los flujos.

$$x = \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_{10} \\ p_{14} \\ p_{15} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_{10} \\ e_{14} \\ e_{15} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$z = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_{10} \\ f_{14} \\ f_{15} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

La relación de estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

en donde S es:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

sustituyendo las ecuaciones de la (3.55) a la (3.60) y formando la matriz S obtenemos:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_{10} \\ e_{14} \\ e_{15} \\ f_2 \\ f_6 \\ f_{12} \\ f_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & -n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_{10} \\ f_{14} \\ f_{15} \\ e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \\ e_1 \\ e_8 \\ e_{13} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

se tienen las siguientes consideraciones de acuerdo al bond graph:

$$\begin{array}{lll} e_1 = V_d & e_{10} = \dot{p} & e_{16} = R_Q i_Q \\ e_2 = R_d i_d & e_{12} = R_q i_q & f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = i_d \\ e_4 = \dot{\lambda}_d & e_{13} = V_q & f_7 = f_8 = f_9 = f_{10} = w_r \\ e_5 = \dot{\lambda}_D & e_{14} = \dot{\lambda}_q & f_{11} = f_{12} = f_{13} = f_{14} = i_q \\ e_6 = R_D i_D & e_{15} = \dot{\lambda}_Q & n_1 = \lambda_q \\ e_8 = \tau & & n_2 = \lambda_d \end{array}$$

entonces de la ecuación (3.63) podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$V_d = \dot{\lambda}_d + R_d i_d - \lambda_q w_r \quad (3.64)$$

$$\dot{\lambda}_D = -R_D i_D \quad (3.65)$$

$$\dot{p} = -\lambda_q i_d + \lambda_d i_q + \tau \quad (3.66)$$

$$V_q = \dot{\lambda}_q + \lambda_d w_r + R_q i_q \quad (3.67)$$

$$\dot{\lambda}_Q = -R_Q i_Q \quad (3.68)$$

de acuerdo a la ecuación (3.23) tenemos la ecuación (3.69).

$$x = F^{-1}z \quad (3.69)$$

Para formar la matriz  $F^{-1}$  son necesarias las inductancias propias y mutuas, y así obtenemos la ecuación (3.70).

$$\begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_{10} \\ p_{14} \\ p_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_4 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ M_2 & L_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{14} & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 & L_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_{10} \\ f_{14} \\ f_{15} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

se tienen las siguientes consideraciones de acuerdo al bond graph:

$$\begin{array}{lll} M_1 = M_2 = M_{dD} & L_{14} = L_q & p_5 = \lambda_D \\ M_3 = M_4 = M_{qQ} & L_{15} = L_Q & p_{10} = w_r \\ L_4 = L_d & L_{10} = j_r & p_{14} = \lambda_q \\ L_5 = L_D & p_4 = \lambda_d & p_{15} = \lambda_Q \end{array}$$

de la ecuación (3.70) y siguiendo las consideraciones anteriores podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_d = L_d i_d + M_{dD} i_D \quad (3.71)$$

$$\lambda_D = M_{dD} i_d + L_D i_D \quad (3.72)$$

$$w_r = j_r p \quad (3.73)$$

$$\lambda_q = L_q i_q + M_{qQ} i_Q \quad (3.74)$$

$$\lambda_Q = M_{qQ} i_q + L_Q i_Q \quad (3.75)$$

despejando  $z$  de la ecuación (3.69) y tomando todas las consideraciones antes vistas, obtenemos la siguiente matriz:

$$z = Fx \quad (3.76)$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_D \\ w_r \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_D}{L_d L_D - M_{dD}^2} & \frac{-M_{dD}}{L_d L_D - M_{dD}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-M_{dD}}{L_d L_D - M_{dD}^2} & \frac{L_d}{L_d L_D - M_{dD}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_Q}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} & \frac{-M_{qQ}}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-M_{qQ}}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} & \frac{L_q}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_D \\ p \\ \lambda_q \\ \lambda_Q \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Se tiene que formar la matriz L con los elementos disipadores de energía del sistema, de esta forma podemos obtener la siguiente relación:

$$D_{out} = L D_{in} \quad (3.78)$$

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

para obtener las ecuaciones de estado se debe seguir el siguiente procedimiento:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.80)$$

$$A = [S_{11} + S_{12}\mu S_{21}]F \quad (3.81)$$

$$B = [S_{13} + S_{12}\mu S_{23}] \quad (3.82)$$

$$\mu = L(1 - LS_{22}) \quad (3.83)$$

en este caso tenemos que  $S_{22} = 0$  por lo tanto tenemos que  $\mu = L$ , además  $S_{23} = 0$  entonces B queda como sigue:

$$B = S_{13} \quad (3.84)$$

haciendo las operaciones y tomando las consideraciones anteriores, la ecuación de estado queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_d \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{p} \\ \dot{\lambda}_q \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-L_D R_d}{L_d L_D - M_{dD}^2} & \frac{M_{dD} R_d}{L_d L_D - M_{dD}^2} & \frac{\lambda_q}{j_r} & 0 & 0 \\ \frac{M_{dD} R_D}{L_d L_D - M_{dD}^2} & \frac{-L_d R_D}{L_d L_D - M_{dD}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-L_D \lambda_q}{L_d L_D - M_{dD}^2} & \frac{M_{dD} \lambda_q}{L_d L_D - M_{dD}^2} & 0 & \frac{L_Q \lambda_d}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} & \frac{M_{qQ} \lambda_d}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_d}{j_r} & \frac{-L_Q R_q}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} & \frac{M_{qQ} R_q}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M_{qQ} R_Q}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} & \frac{-L_q R_Q}{L_q L_Q - M_{qQ}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_D \\ p \\ \lambda_q \\ \lambda_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d \\ \tau \\ V_q \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Para poder llegar a las ecuaciones de voltaje mostradas en la sección 3.2, se necesitan hacer varias operaciones.

De la ecuación (3.80) despejamos Bu y obtenemos:

$$Bu = \dot{x} - Ax \quad (3.86)$$

sustituyendo A y además que  $\mu = L$  tenemos:

$$Bu = \dot{x} - (S_{11}F + S_{12}LS_{21}F)x \quad (3.87)$$

$$Bu = \dot{x} - S_{11}Fx + S_{12}LS_{21}Fx \quad (3.88)$$

de acuerdo a la ecuación (3.76) obtenemos la siguiente ecuación:

$$Bu = \dot{x} - S_{11}z + S_{12}LS_{21}z \quad (3.89)$$

sustituyendo las matrices y haciendo algunas multiplicaciones:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ 0 \\ \tau \\ V_q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_d \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{p} \\ \dot{\lambda}_q \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_q & 0 & 0 & \lambda_d & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_D \\ w_r \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_D \\ w_r \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\begin{bmatrix} V_d \\ 0 \\ \tau \\ V_q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_d \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{p} \\ \dot{\lambda}_q \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_q w_r \\ 0 \\ i_q \lambda_d - i_d \lambda_q \\ -\lambda_d w_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -R_d i_d \\ -R_D i_D \\ 0 \\ -R_q i_q \\ -R_d i_Q \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

haciendo las operaciones necesarias quedan las siguientes ecuaciones:

$$V_d = \dot{\lambda}_d - \lambda_q w_r + R_d i_d \quad (3.92)$$

$$0 = \dot{\lambda}_D + R_D i_D \quad (3.93)$$

$$\tau = \dot{p} - i_q \lambda_d + i_d \lambda_q \quad (3.94)$$

$$V_q = \dot{\lambda}_q + \lambda_d w_r + R_q i_q \quad (3.95)$$

$$0 = \dot{\lambda}_Q + R_d i_Q \quad (3.96)$$

Como ya sabemos que  $\dot{\lambda} = p\lambda$  las ecuaciones quedan como sigue:

$$V_d = p\lambda_d - \lambda_q w_r + R_d i_d \quad (3.97)$$

$$V_D = p\lambda_D + R_D i_D \quad (3.98)$$

$$V_q = p\lambda_q + \lambda_d w_r + R_q i_q \quad (3.99)$$

$$V_Q = p\lambda_Q + R_d i_Q \quad (3.100)$$

sustituyendo la ecuación (3.66) en la ecuación (3.94) tenemos lo siguiente:

$$\tau = -\lambda_q i_d + \lambda_d i_q + \tau - i_q \lambda_d + i_d \lambda_q \quad (3.101)$$

$$\tau = \tau \quad (3.102)$$

Las ecuaciones finales desarrolladas por el método de bond graph que son de la (3.97) a la (3.100), se puede observar que son las mismas ecuaciones que las desarrolladas por el método tradicional las cuales son (3.50), (3.51), (3.53) y (3.54). Esto indica que el modelo en bond graph de la máquina de inducción trifásica es correcto, así como también todo el desarrollo para llegar a las ecuaciones finales, de esta forma queda demostrado que por medio del método de bond graph se puede desarrollar el modelo de una máquina inducción trifásica.

### 3.4 Modelo de la transformación de Park en bond graph

En la figura 3.4 se muestra el modelo de bond graph de la transformación de Park para la ecuación 3.1.

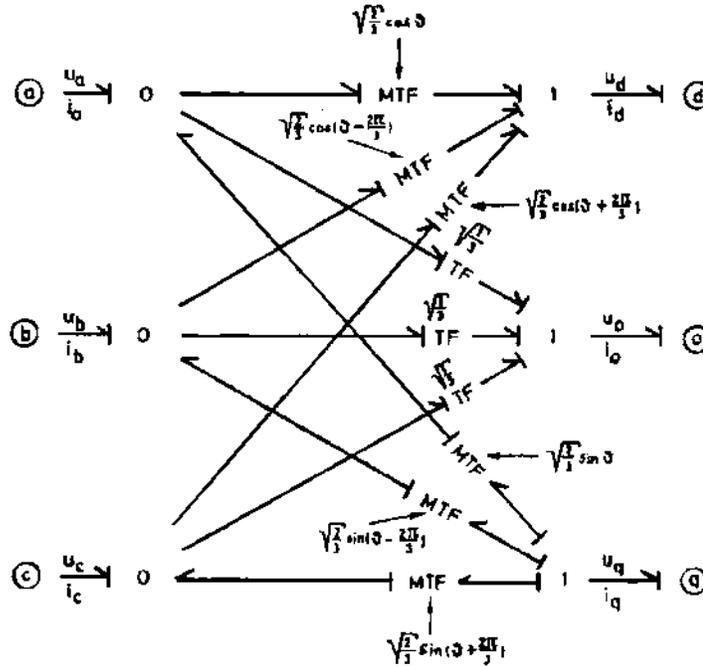


Figura 3.4. Modelo de bond graph de la transformación de Park

Los puertos a, b, c son las terminales del sistema real trifásico conectados a las bobinas de la armadura, los puertos d y q son las terminales del bobinado del conmutador ficticio del modelo de la máquina y el puerto 0 es conectado al sistema de la fase de secuencia cero. Una de las llamadas corrientes de secuencia cero  $i_0$  sólo puede ocurrir si el devanado de la armadura está conectado en estrella con un punto de la estrella conectado al neutro, o con el devanado de la armadura conectado en maya.

Si el voltaje de secuencia cero  $V_0$  es dado, y una de las llamadas conexiones está presente, entonces  $i_0$  es determinado por una resistencia  $R_0$  y una llamada inductancia de secuencia cero  $L_0$ . El valor de estos parámetros puede ser encontrado. Con todo esto el bond graph de la máquina de inducción está completo.

## Capítulo 4

# Simulación del motor de inducción en el dominio físico

### 4.1 Breve introducción al modelado y simulación del 20-Sim

El 20-sim es un avanzado programa para modelado y simulación, debe de ser instalado bajo el dominio de Microsoft Windows. Con 20-sim se puede simular el comportamiento de sistemas dinámicos, eléctricos, mecánicos y sistemas hidráulicos o una combinación de estos. El 20-sim fue desarrollado en el laboratorio de control de la universidad de Twente, tiene como sucesor el famoso paquete de TUTSIM.

En la figura 4.1 se muestra la pantalla de presentación del software 20-sim.

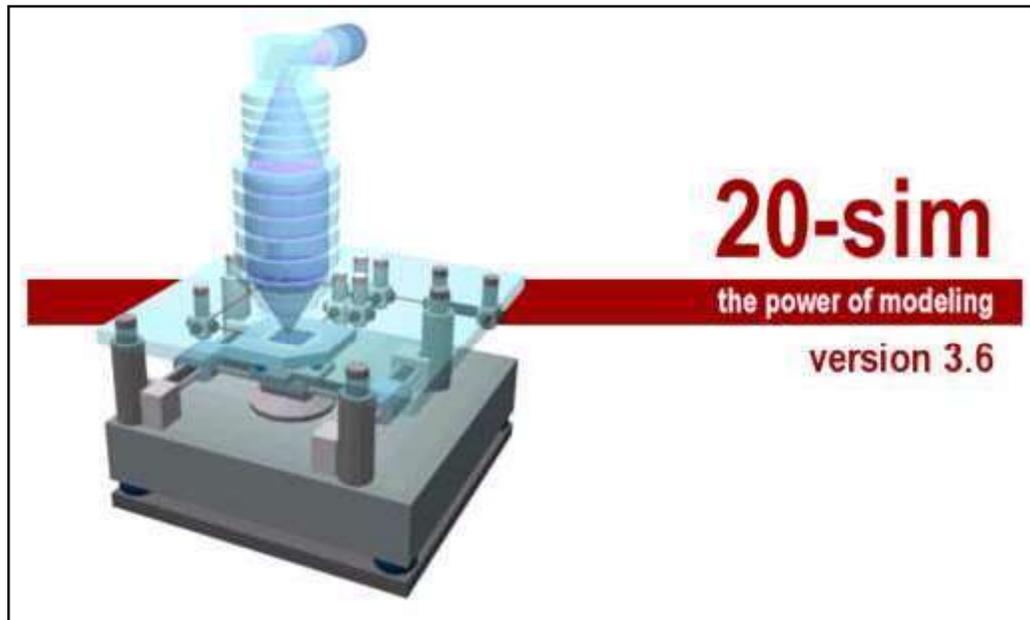


Figura 4.1 Presentación del 20-sim

El 20-sim soporta completamente el modelado gráfico, permitiendo diseñar y analizar sistemas dinámicos. En un periodo muy corto se puede confiar que 20-sim puede aumentar la productividad de un análisis, el cual puede ser hecho cuando se desee.

El 20-sim consiste en dos ventanas principales y muchas herramientas. En donde la primera ventana es el editor y la segunda el simulador. El editor es utilizado para introducir y editar modelos. El simulador es utilizado para simular y analizar los modelos. La sección de modelado y simulación en 20-sim es mostrado en la figura 4.2.

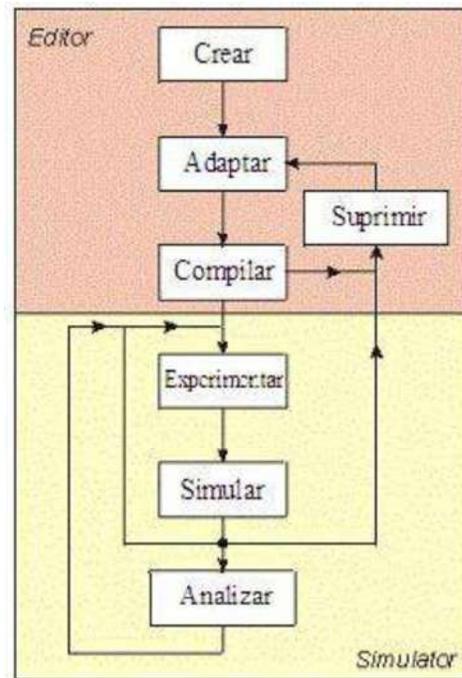


Figura 4.2 Modelado y simulación en 20-sim

Las funciones del editor y simulador del 20-sim se explican a continuación:

**a) Crear**

La sección de modelado comienza creando un modelo. El modelado en 20-sim puede ser hecho utilizando ecuaciones, diagramas de bloques, en bond graph, iconos de diagramas o una combinación de todas estas representaciones. Se puede comenzar por definir un modelo a construir, fuera del modelo existen partes que son almacenadas en diferentes librerías que vienen con el paquete.

**b) Compilando**

Después que el modelo entra exitosamente, es analizado y compilado para generar un código de simulación. Esto se hace automáticamente en 20-sim al momento de abrir el simulador o cuando se analiza el modelo. En algunos casos el modelo contará con errores que tienen que resolverse corrigiendo el modelo. Los errores en 20-sim son mostrados en

una ventana especial y propiamente un documento de ayuda que sirve para solución de estos.

### c) **Experimentar**

Después de una exitosa compilación, si hasta este paso no se tienen errores y el simulador abre con el modelo cargado y compilado, tiene que entrar a un escenario específico parecido con el que comienza el tiempo, finaliza el tiempo, método de integración, etc. La acumulación de estos escenarios es llamada experimento en 20-sim y puede ser almacenado en un fichero con el nombre de experimento.

### d) **Simulación**

Con el escenario del simulador abierto, se puede probar para correr una simulación. Ahora cuando una iteración vuelve a comenzar, es cuando esta corriendo la simulación y cargando el escenario de la simulación hasta que los resultados son satisfactorios. Si la simulación falla (genera errores) comienza una sección de suprimir errores. En ese momento puede ser cambiado o modificado el modelo, compilado y correr una simulación hasta que el error es resuelto.

### e) **Analizar**

Después de una exitosa simulación se puede analizar el modelo utilizando varias herramientas semejantes, como por ejemplo FTT-análisis, optimización, simulación tolerante y muchos más.

### f) **Modos**

El 20-sim puede operar en dos modos: en el modo de error y en el modo rápido. Es indicado por el botón **Mode** en la barra de tareas puede ser mostrado  para el modo de error o  para el modo rápido. Se puede dar clic para elegir cualquiera de los dos modos.

En el modo de error una vez ejecutado es posible analizar todo y encontrar todos los peligros generados o también si el modelo tiene errores. Este modo debe ser utilizado durante la construcción del modelo y en la primera simulación. En la ejecución del modo rápido hay un mínimo de análisis, es generado un mínimo de peligros y la simulación es ejecutada con un máximo de velocidad. Este modo debe de ser utilizado cuando el modelo ya fue validado y cuando se requiera que la simulación tenga un máximo de velocidad.

## 4.2 Simulación del motor de inducción en 20-sim

En el capítulo 3 ya se mostró el modelo del motor de inducción en bond graph, en este capítulo se hará la simulación de ese motor en 20-sim, en donde ayuda a comprender el comportamiento de dos motores con diferentes parámetros.

Se comienza haciendo el modelo del motor en 20-sim, en este caso se realizó un submodelo en el que se tienen tres entradas de potencia las cuales van a servir para conectar  $V_d$ ,  $V_q$  y el par mecánico. En la figura 4.3 se muestra como quedó el modelo del motor de inducción en el 20-sim.

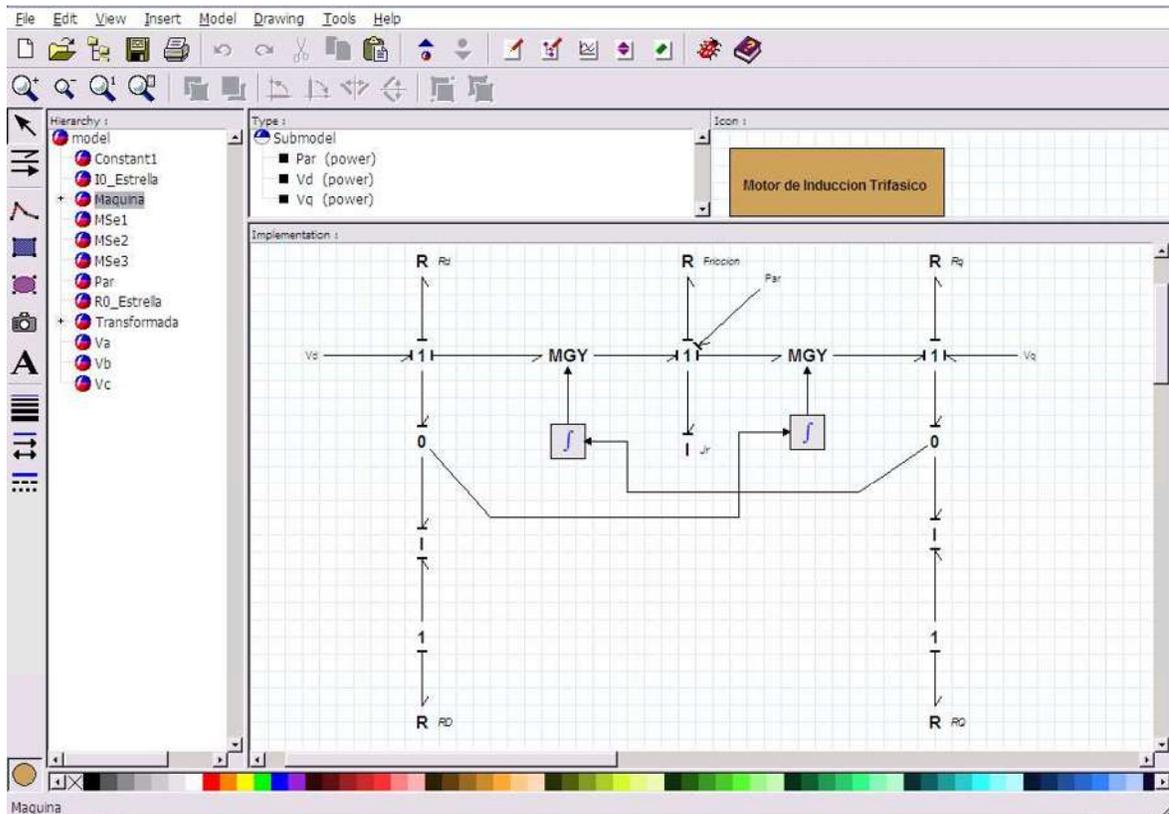


Figura 4.3 Modelo del motor de inducción en 20-sim

La diferencia del modelo mostrado en el capítulo 3 con el de la figura 4.3, son los dos integradores que están conectados a los giradores los cuales proporcionan el enlace de flujo, este integrador se debe en base a que con la unión de cero podemos obtener la derivada del enlace de flujo ya sea  $q$  o  $d$ , al momento de colocar el integrador se elimina el efecto de la derivada y así podemos obtener el enlace de flujo. La resistencia que se encuentra colocada a un lado del par mecánico, es la fricción del rotor con el aire y el

inductor  $J_r$  es la inercia del rotor. Para terminar cabe resaltar las tres entradas que quedan disponibles afuera del submodelo para hacer las conexiones necesarias.

El siguiente paso fue hacer la transformada de Park en 20-sim, en este paso también se realizó otro submodelo obteniendo tres salidas que serían  $V_d$ ,  $V_q$ , y  $V_0$ , así como también tres entradas  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$ . En la figura 4.4 se muestra como quedó el modelo de la transformada de Park en el 20-sim.

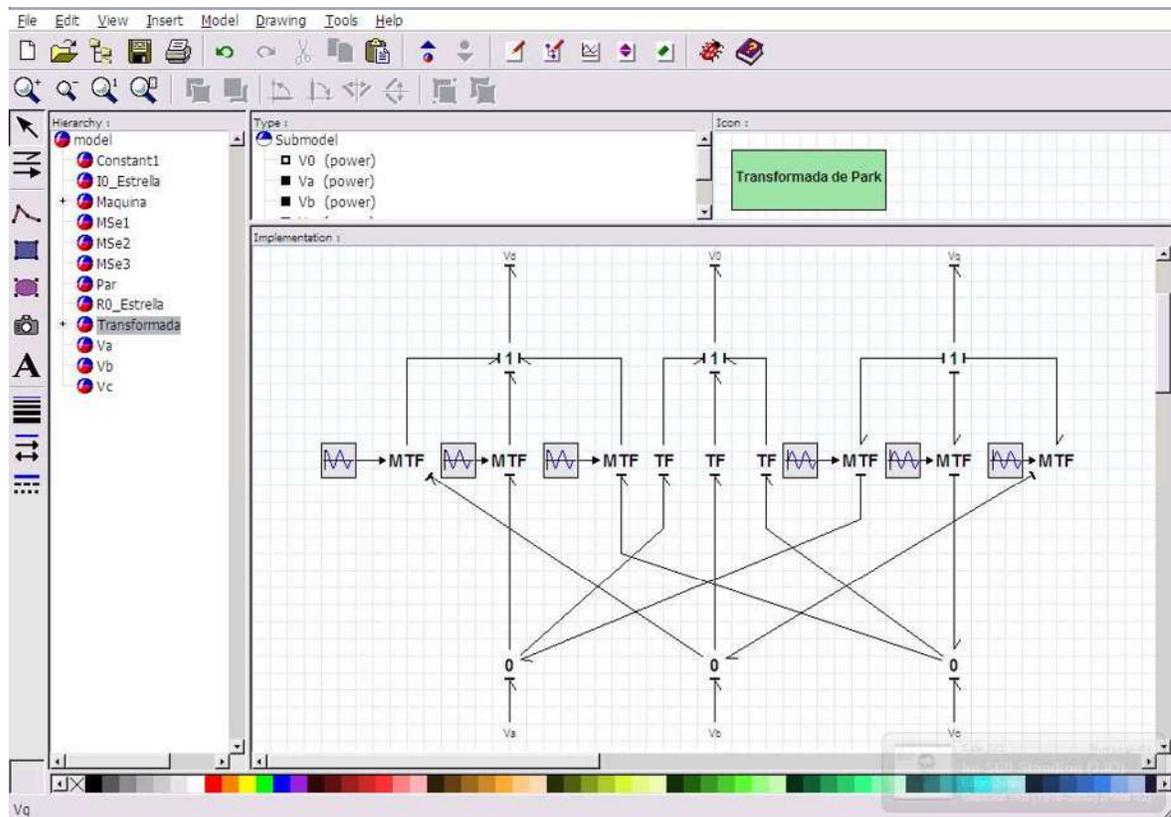


Figura 4.4 Modelo de la transformada de Park en 20-sim

En este modelo cabe recalcar que los transformadores TF ya tienen la ganancia integrada de  $1/\sqrt{3}$ , en donde a los demás transformadores se da una señal ya sea coseno o seno en donde la magnitud de la señal es de  $\sqrt{2/3}$ , además de su defasamiento correspondiente a cada caso. En este submodelo se dejan tres entradas y tres salidas para la conexión correspondiente entre los submodelos.

Las salidas  $V_q$  y  $V_d$  van conectadas al submodelo del motor de inducción, estas dos salidas van conectadas con las dos entradas del motor respectivamente cada una. La salida  $V_0$  va conectada a una resistencia con un inductor en serie, como ya sabemos el  $V_0$  va

tener una diferencia de potencial al momento que las tres fuentes  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$  estén desbalanceadas entre ellas, la resistencia y el inductor funcionan como si estuvieran conectadas a tierra.

Las entradas  $V_a$ ,  $V_b$ , y  $V_c$  son conectadas a tres fuentes de esfuerzo con una función seno defasadas 120 grados entre sí, esto da un sistema balanceado y similar al que entrega el sistema eléctrico.

Para terminar, la entrada de par del motor de inducción es conectada a una fuente de esfuerzo, esta hace simular que el motor tiene un par constante después de un determinado tiempo. En la figura 4.5 se muestra el modelo completo del motor de inducción trifásico en 20-sim.

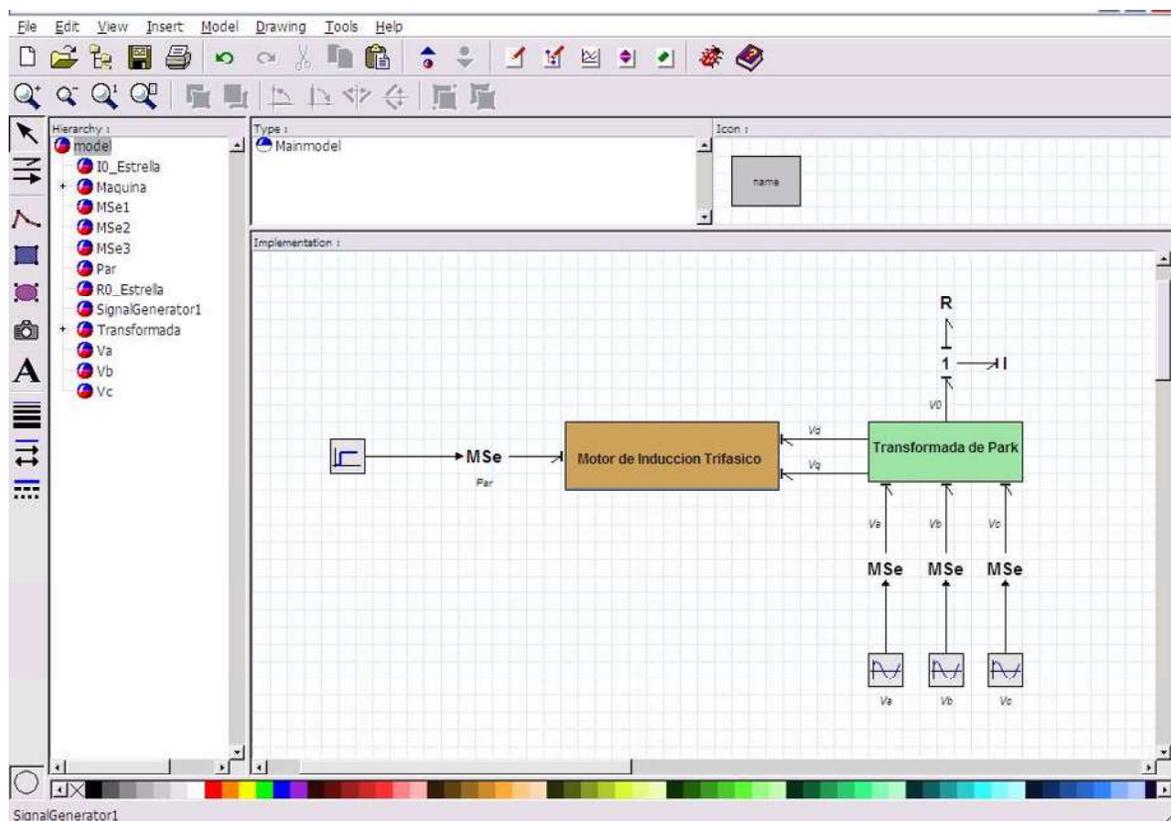


Figura 4.5 Modelo completa del motor de inducción trifásico

En la tabla 4.1 se muestran los valores que se tomaron para la simulación de un motor de 3hp, tanto de las resistencias como también de las inductancias mutuas y propias. Así como también la fricción y la inercia del rotor.

Los voltaje de la fuente que son  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$  tienen una magnitud de 120 volts y están defasados 120 grados entre sí, además de tener una frecuencia de 60 Hz. En la figura 4.6 se muestran los tres voltajes inyectados al submodelo de la transformada de Park.

Tabla 4.1 Valores de los elementos del motor de inducción

Elemento	Valor
$R_d$	$0.5 \Omega$
$R_q$	$0.5 \Omega$
$R_D$	$3 \Omega$
$R_Q$	$3 \Omega$
$L_d$	1.605 h
$L_D$	1.605 h
$M_{dD}$	1.55 h
$L_q$	1.526 h
$L_Q$	1.526 h
$M_{qQ}$	1.49 h
$J_r$	$2.5 \text{ kg} * \text{m}^2$
$R_J$	0.35

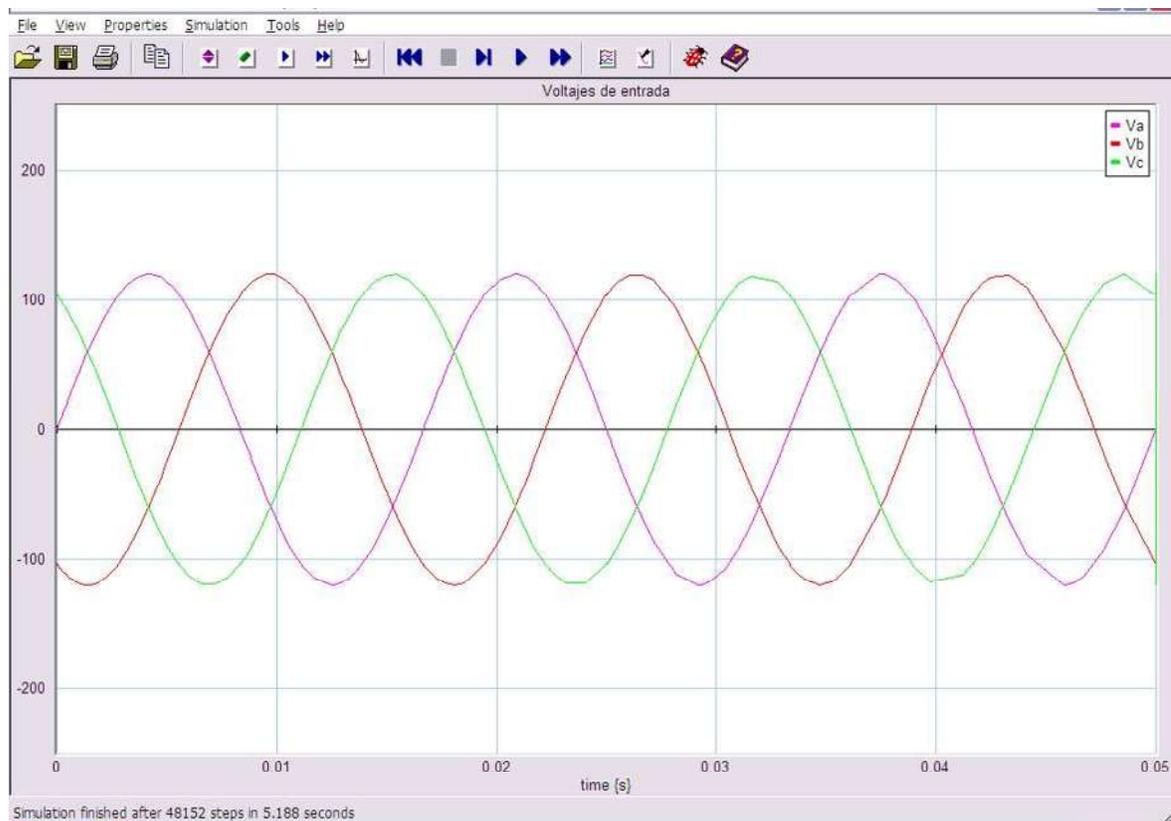


Figura 4.6 Voltajes de entrada

Las corrientes que entrega la fuente al momento de arrancar el motor son mostradas en la figura 4.7 y un acercamiento para ver el estado estacionario es mostrado en la figura 4.8 es en donde se observa que las corrientes no rebasan los 0.6 amperes.

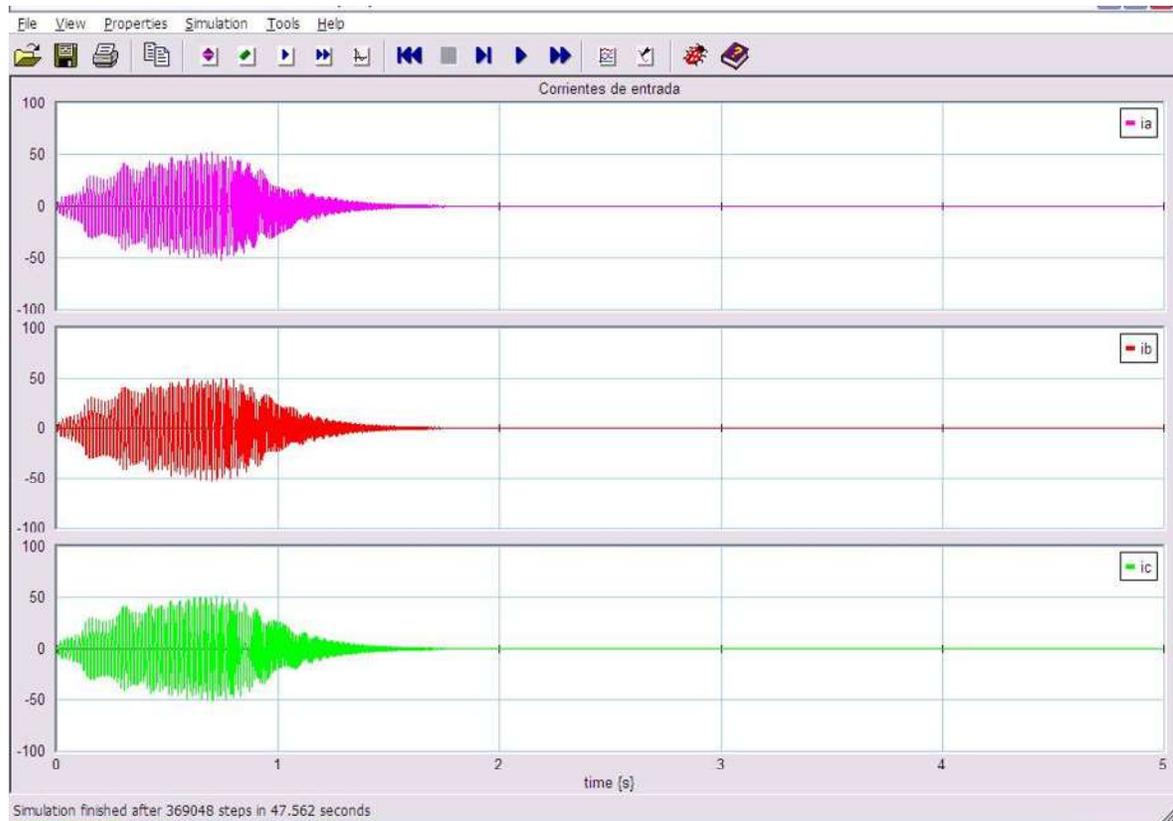


Figura 4.7 Corrientes de entrada



Figura 4.8 Estado estacionario de las corrientes de entrada.

En la figura 4.9 podemos ver las corrientes  $I_d$  e  $I_q$  del estator así como también las del rotor. En la primer y tercer gráfica podemos observar las corrientes del estator en donde quedan en un valor muy pequeño, el cual nada más es necesario para romper la fricción del rotor con el aire. En la segunda y cuarta son las corrientes del rotor en donde estas si llegan a cero o se aproximan bastante, ya que el rotor se acerca a la velocidad del campo magnético giratorio, y las dos últimas son la de velocidad y par aplicado. Se puede apreciar que las corrientes en los devanados de amortiguamiento  $I_D$  e  $I_Q$  en estado estacionario son cero en la figura 4.9.

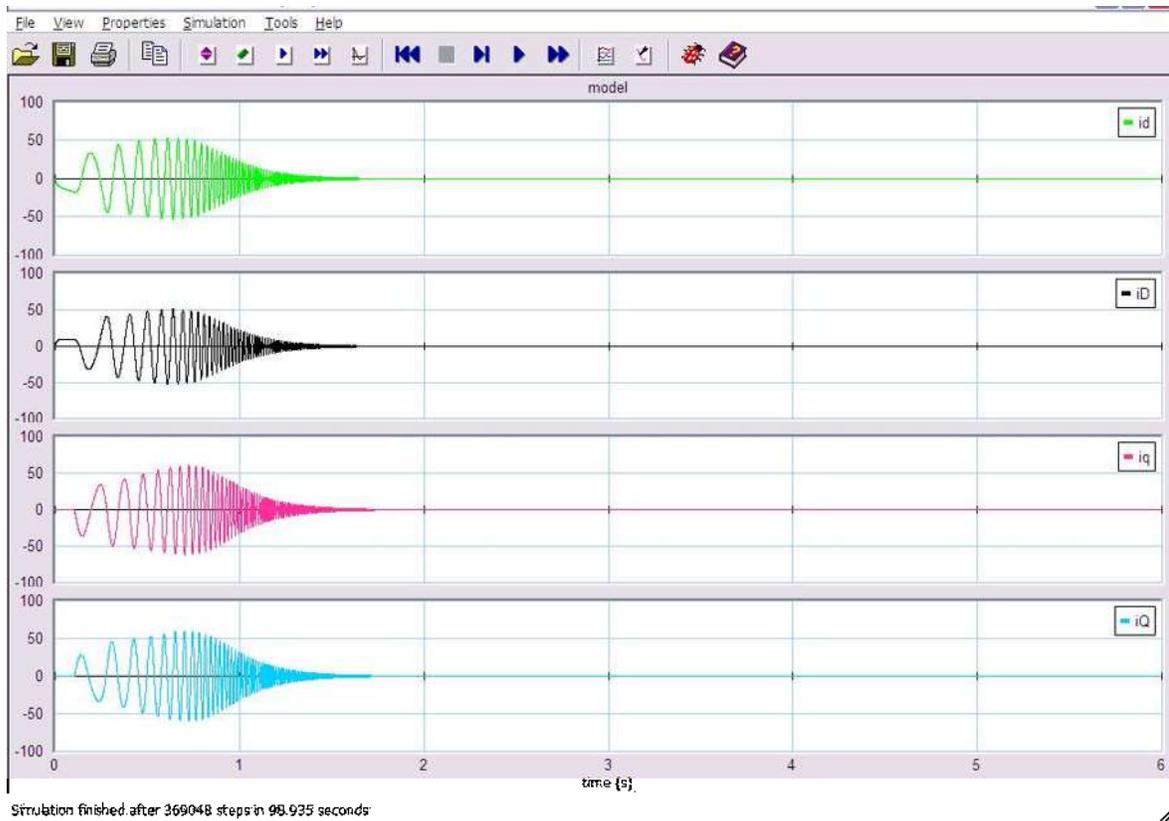


Figura 4.9 Corrientes del rotor y estator, del motor de inducción

En la figura 4.10 se puede observar la corriente y el par, los dos graficados respecto al tiempo, se puede notar que el par tiende a ser cero cuando la velocidad es muy cercana a la síncrona. La velocidad del motor nunca llega a la síncrona como se puede observar en la figura 4.10 en donde la velocidad se estabiliza en 1799 revoluciones por minuto (RPM), el par tampoco llega a ser cero, está en un valor muy pequeño el cual nada más es necesario para romper las fricciones que puedan existir, por este mismo motivo la velocidad es muy cercana a la síncrona.

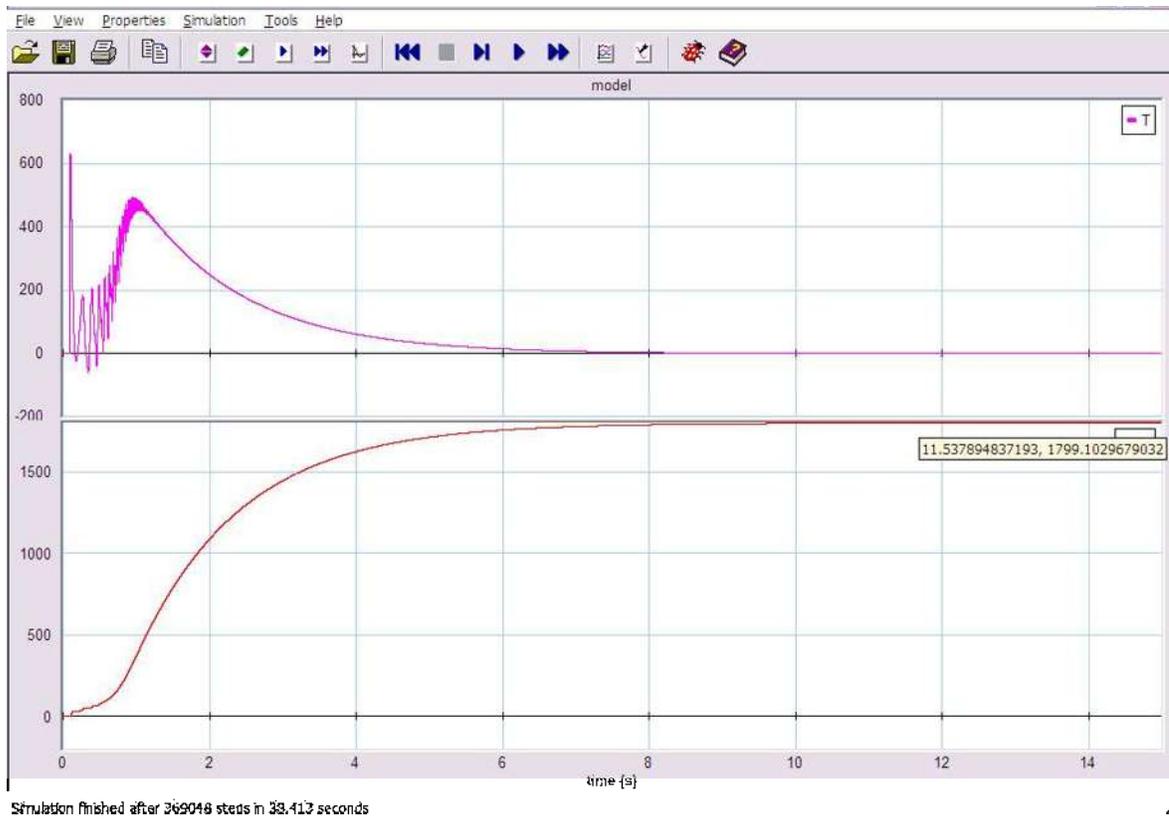


Figura 4.10 Curvas del par y velocidad

En la figura 4.11 se muestra la curva par-velocidad del motor de inducción en donde se puede observar que el par llega a cero cuando el motor alcanza la velocidad de 1800 rpm, por esta razón el motor de inducción nunca puede llegar a la velocidad del campo magnético giratorio.

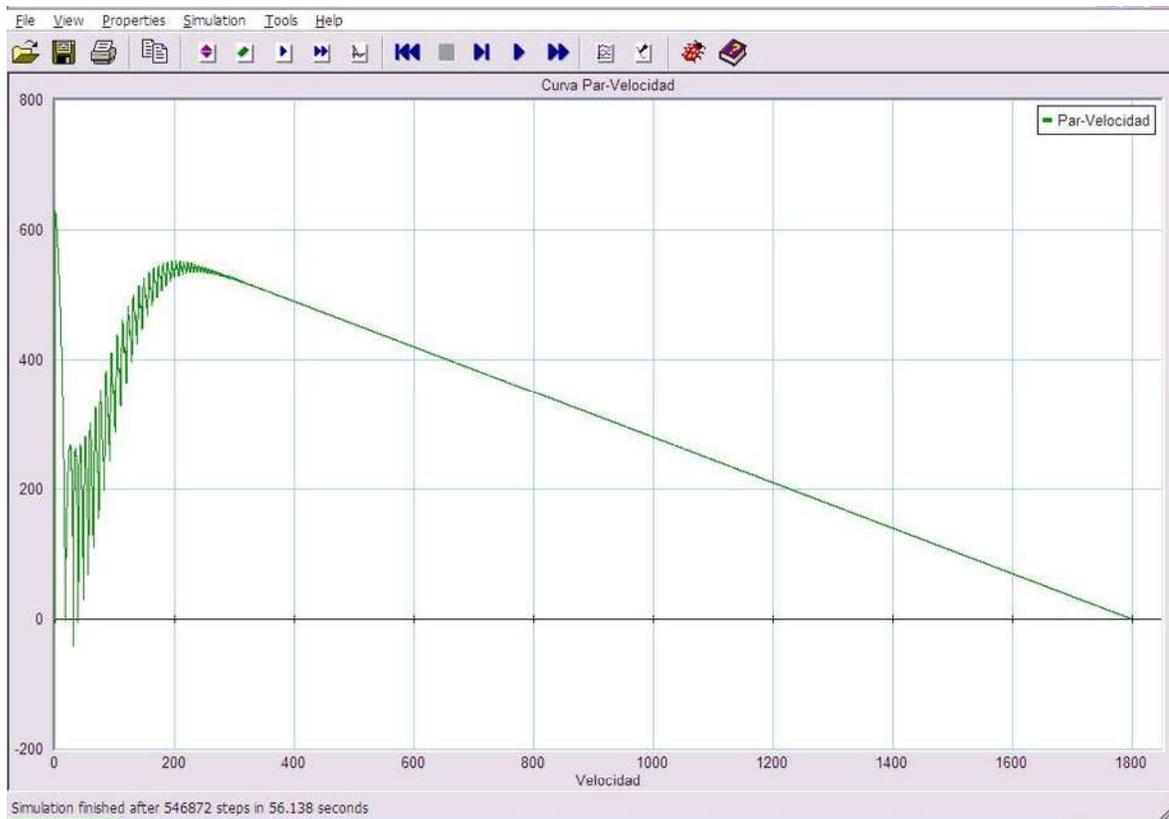


Figura 4.11 Curva par-velocidad

Otra forma de demostrar que todos los resultados están bien, aparte de la demostración del modelado que se realizó en el capítulo tres, es haciendo la transformada inversa de Park en bond graph, que en este caso es la ecuación (3.4) o también nombrada la matriz D. Anteriormente se utilizó la transformación de (abc) a (dq0), la transformación que se va utilizar es (dq0) a (abc). Al momento de conectar esta transformación al motor, se pueden tomar las corrientes d y q del motor, en donde 0 se toma de la salida 0 de la otra transformada de (abc) a (dq0). De esta forma se pueden obtener las corrientes abc que está tomando el motor, que comparadas con las corrientes de la entrada deben de ser prácticamente las mismas.

En la figura 4.12 se puede observar la transformada de Park de (dq0) a (abc) implementada en 20-sim.

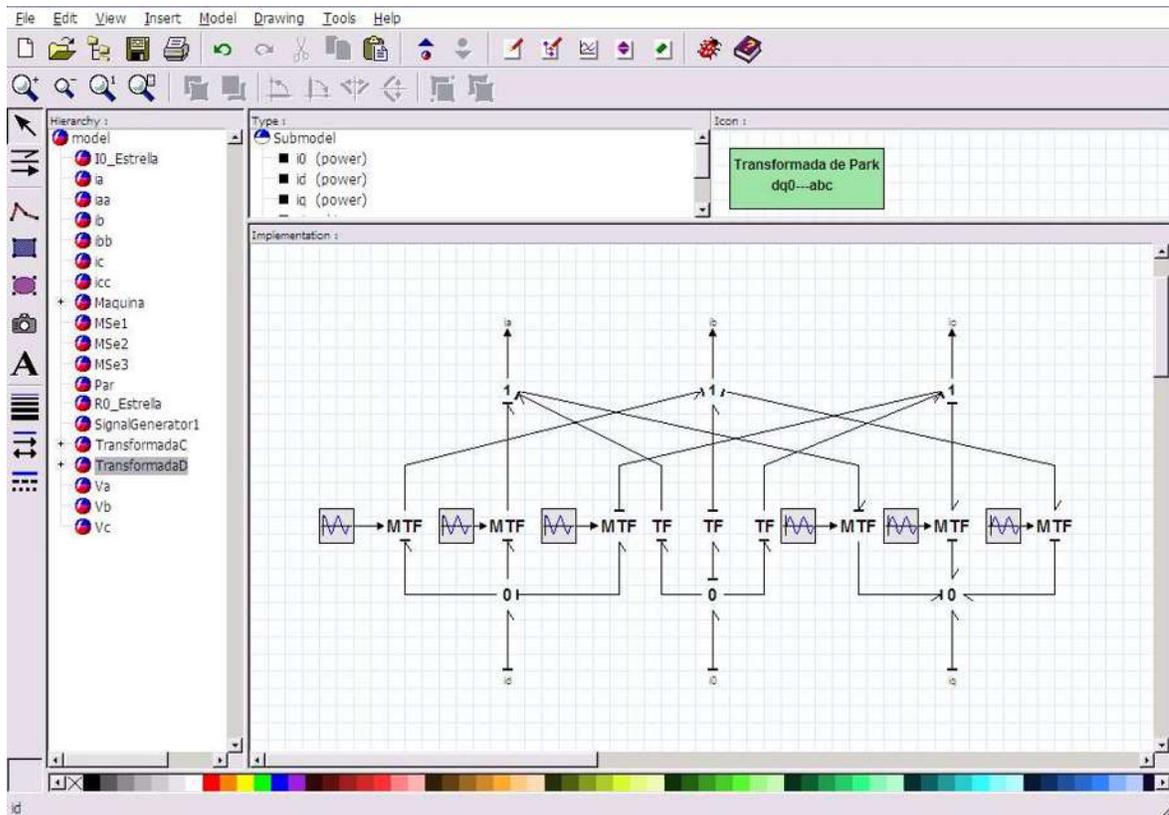


Figura 4.12 Transformada de Park de (dq0) a (abc)

En la figura 4.13 se observa el modelo completo del motor de inducción, en donde la transformada inversa de Park se introdujo en un submodelo, las K que se observan en el modelo son ganancias con un valor unitario, esto se hace con el fin de poder gráficar las corrientes de salida de la transformada. Las ganancias van conectadas en los elementos de flujo común como se observa en la figura 4.12, al momento de conectar las ganancias a estos elementos, por default se esta tomando el valor del flujo que en este caso vendría siendo la corriente. Los dos bond que salen del motor de inducción trifásico y son conectados en la transformada de (dq0) a (abc), son tomados de los elementos de flujo común en el motor de inducción en donde se encuentran conectados los voltajes de la transformada de (abc) a (dq0) y son conectados respectivamente en d y q de la otra transformada.

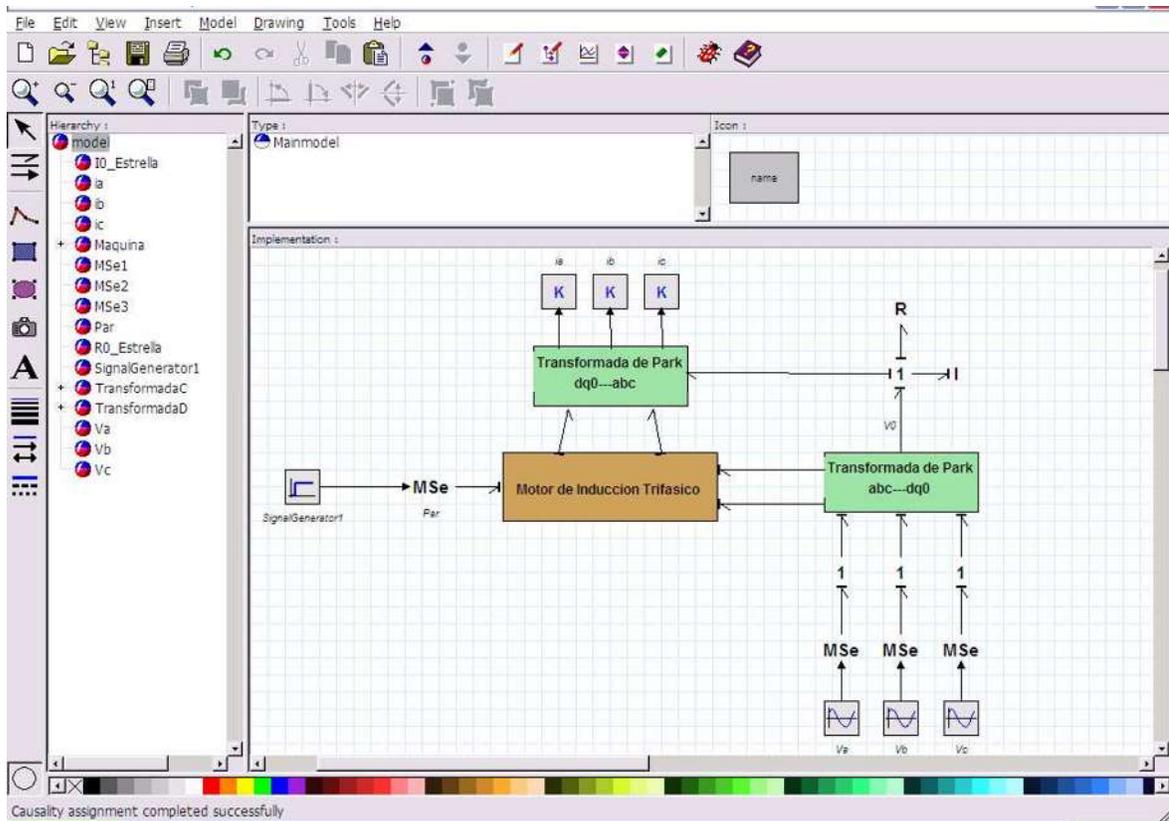


Figura 4.13 Modelo completo con trasformada de (dq0) a (abc)

En la figura 4.14 se muestra las gráficas de las tres corrientes de salida de la transformada, las corrientes de salida son prácticamente las mismas corrientes que se muestran en la figura 4.7, realizado una vez esto se demuestra que el modelo de la transformada de Park es la correcta, además en la figura 4.15 es mostrado el estado estacionario de estas corrientes.

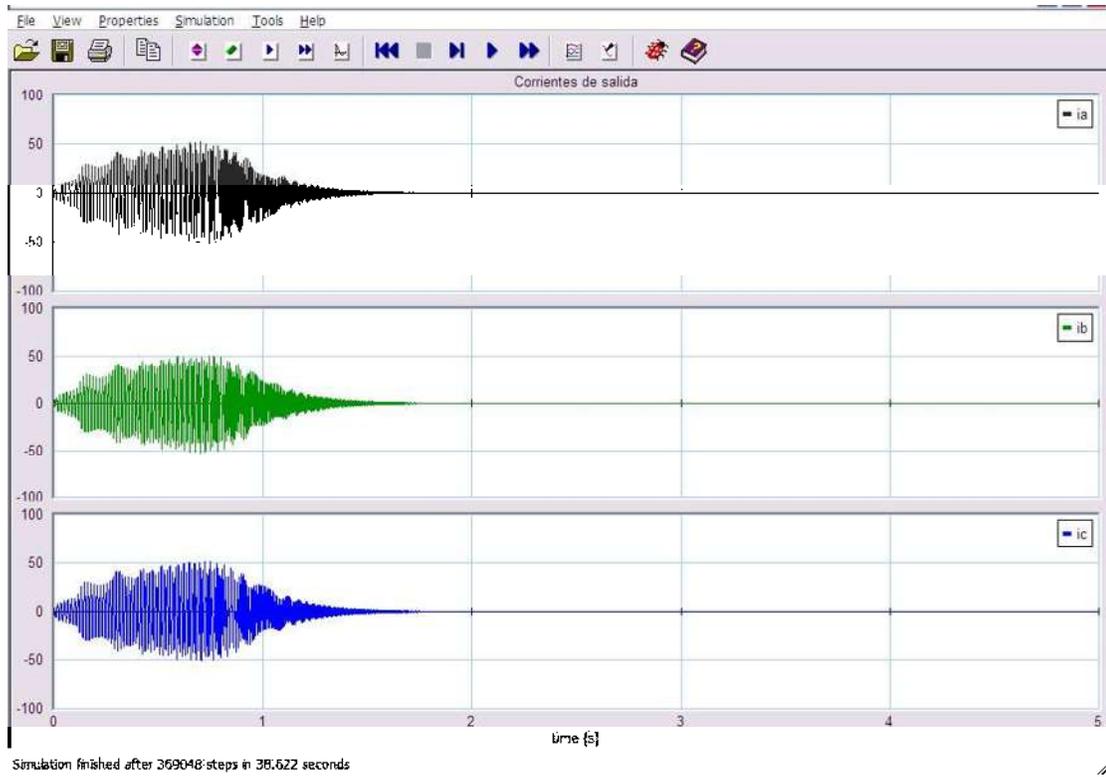


Figura 4.14 Corrientes de salida

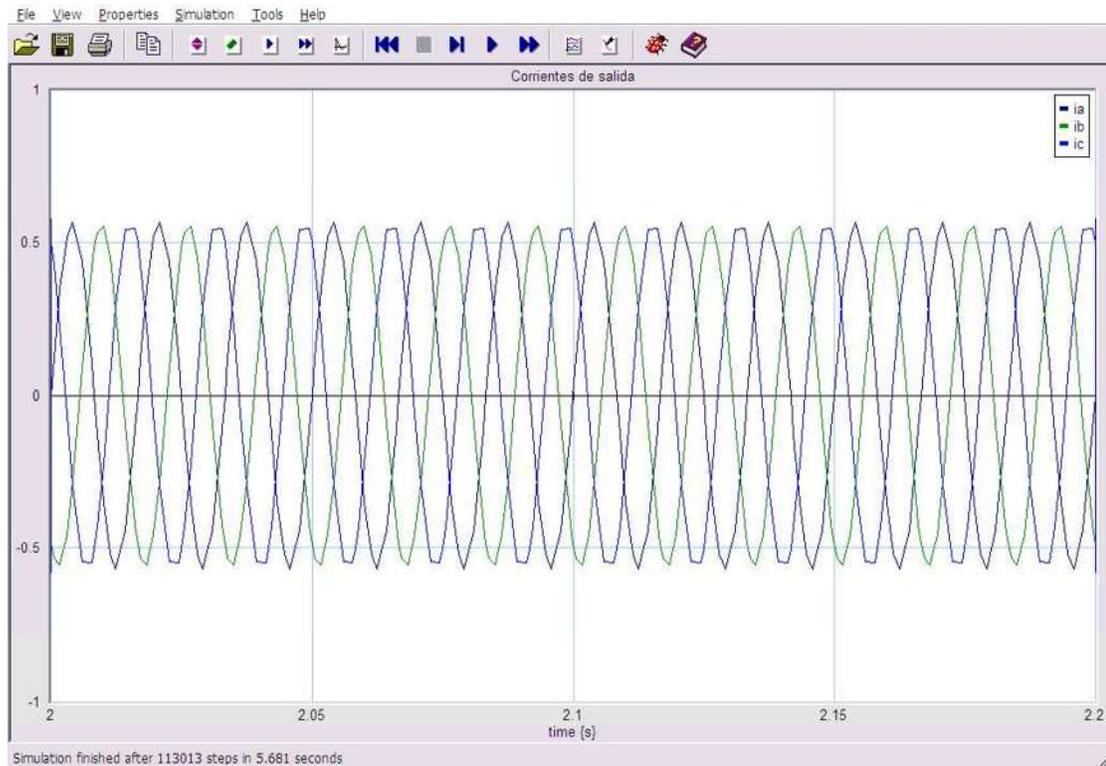


Figura 4.15 Estado estacionario de las corrientes de salida.

Los valores de inductancias y resistencia así como también de inercia, de un motor con una potencia de 1100 Watts son mostrados en la tabla 4.2. En la cual se toman las consideraciones que se señalan en el capítulo 3, en donde las resistencias del rotor son igual, así como también las inductancias y la resistencia del estator.

Tabla 4.2 Valores de los elementos del segundo motor de inducción

Elemento	Valor
$R_d = R_q$	$3.8\Omega$
$R_D = R_Q$	$3\Omega$
$L_d = L_D = L_q = L_Q$	$0.1787\Omega$
$M_{dD} = M_{qQ}$	$0.161\text{ h}$
$J_r$	$0.01\text{ kg} * \text{m}^2$
$R_J$	$0.25$

Con este motor se utilizan los mismos voltajes que se utilizaron para el motor anterior, los cuales se pueden observar en la figura 4.6. Las corrientes que proporciona la fuente son las mostradas en la figura 4.16 en donde se puede observar que las oscilaciones son menos prolongadas comparadas con el motor anterior.

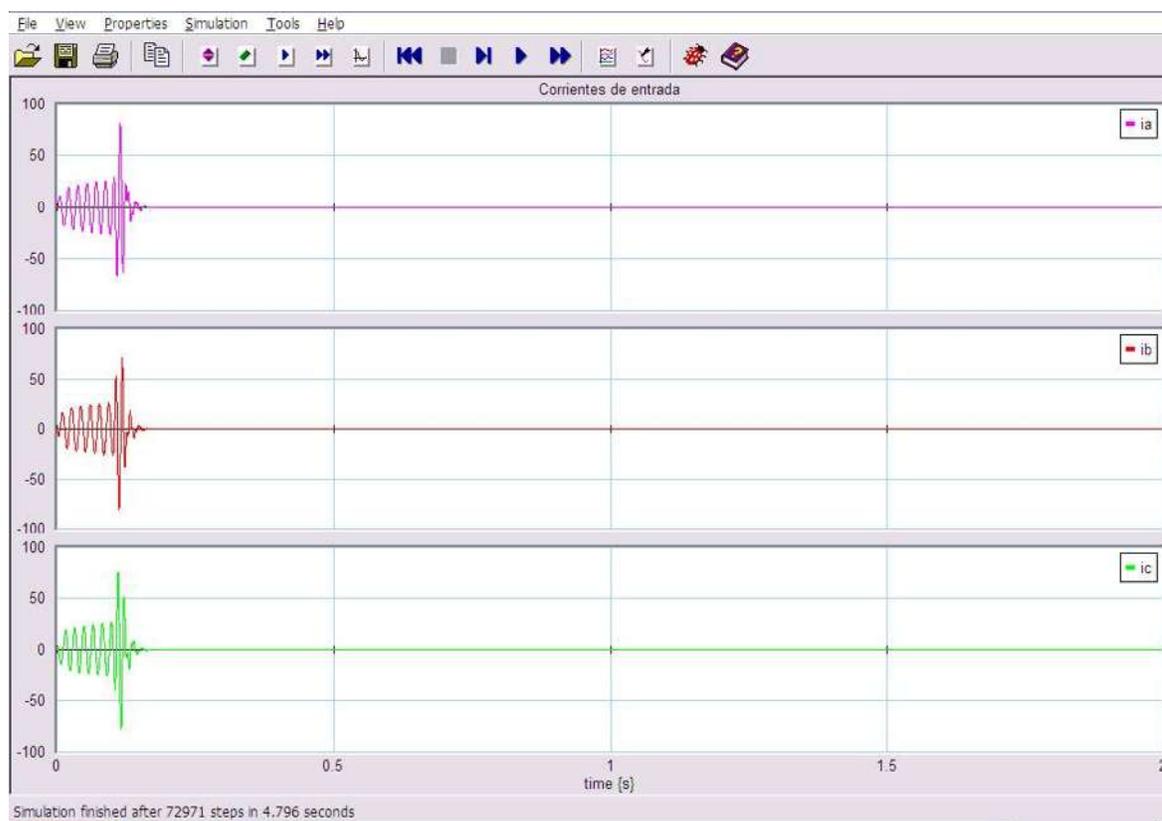


Figura 4.16 Corrientes de entrada del segundo motor

Las corrientes de entrada en estado estacionario del segundo motor son mostradas en la figura 4.17 en donde se puede observar que las corrientes son muy cercanas a los 0.5 amperes.

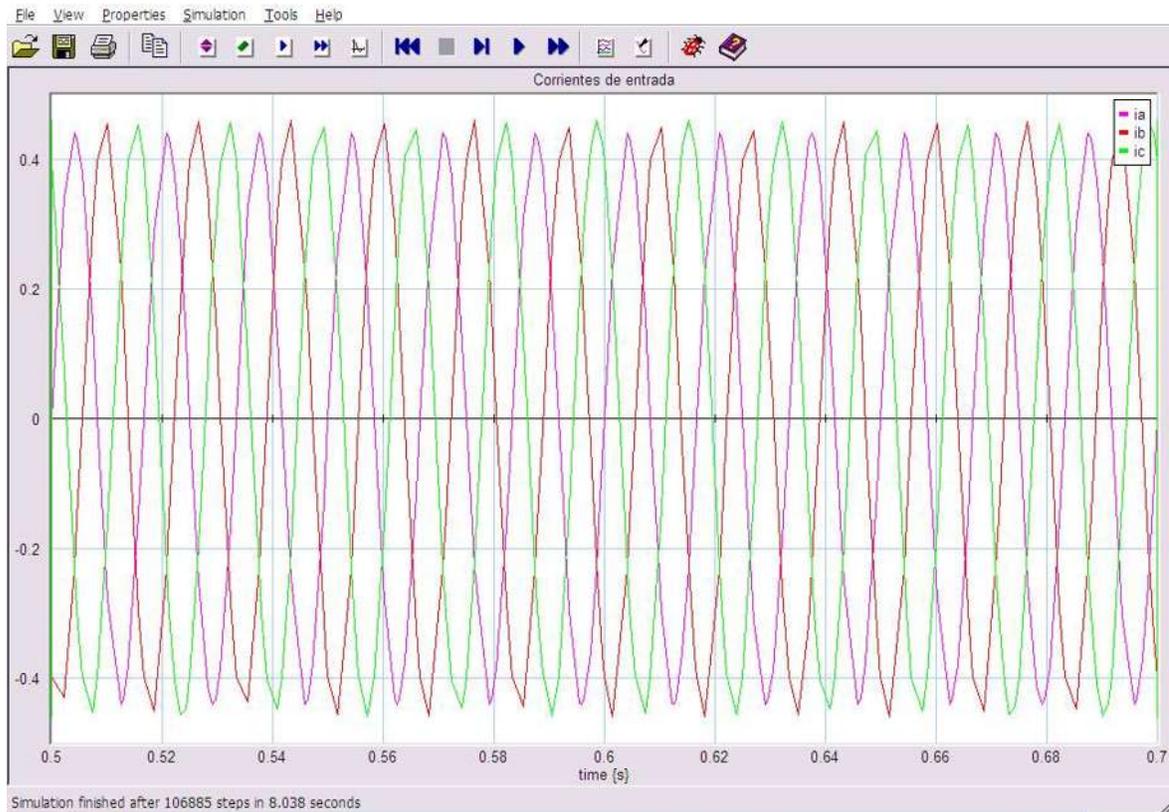


Figura 4.17 Estado estacionario de las corrientes de entrada del segundo motor

Las corrientes del motor así como también el par y la velocidad son mostradas en la figura 4.18 en donde se puede observar que las oscilaciones también son muy pequeñas, esto se debe a que la inercia del rotor es mucho más pequeña comparada con la del motor anterior. También es conveniente señalar que las corrientes del rotor son cero y las corrientes que corresponden al estator son de un valor muy pequeño 0.5 Amperes aproximadamente. En este caso la velocidad del motor también se queda un poco arriba de las 1799 rpm y el par también queda en un valor muy pequeño. Pero el tiempo tan corto de las oscilaciones se debe a que el motor arranco prácticamente sin ninguna carga nada más la de la fricción y la inercia que son muy pequeñas.

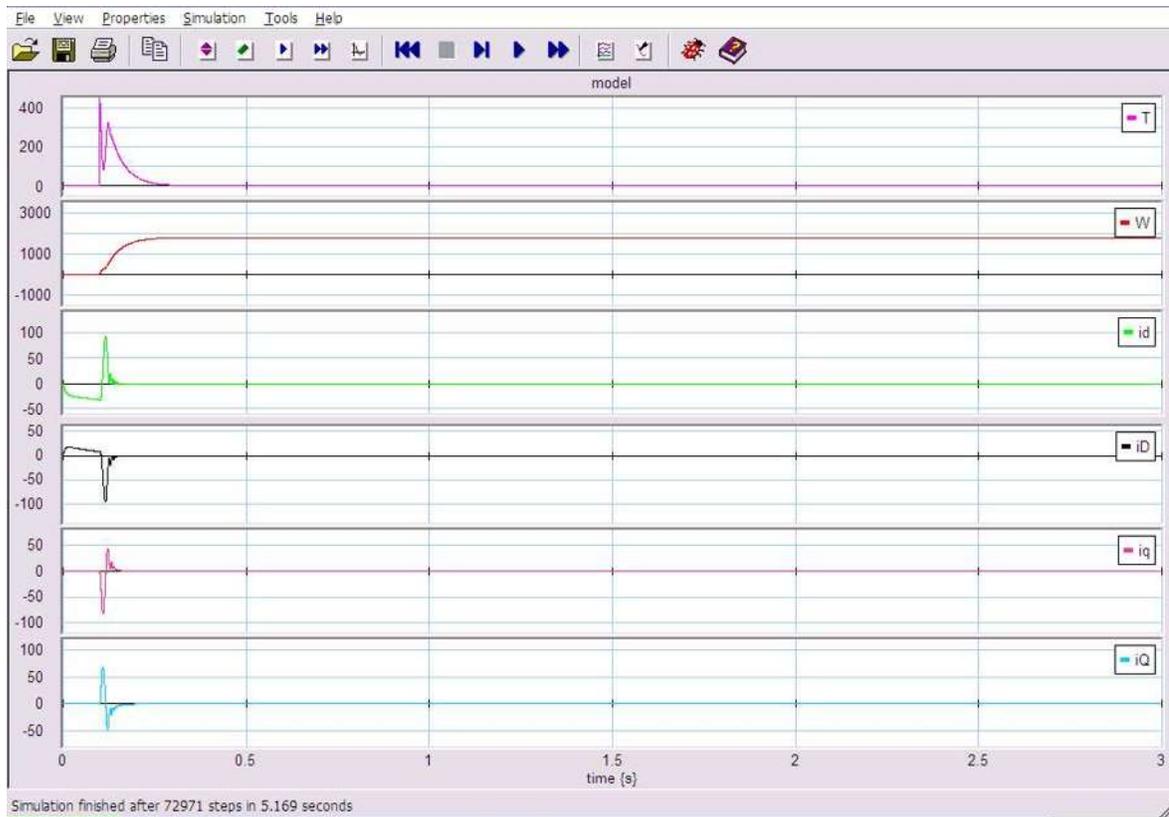


Figura 4.18 Gráficas de corrientes, par y velocidad del segundo motor

La curva de par-velocidad es mostrada en la figura 4.19 en donde también se puede ver el efecto de la pequeña carga que tiene el motor al momento de arrancar, se puede ver en las pocas oscilaciones que tiene la curva.

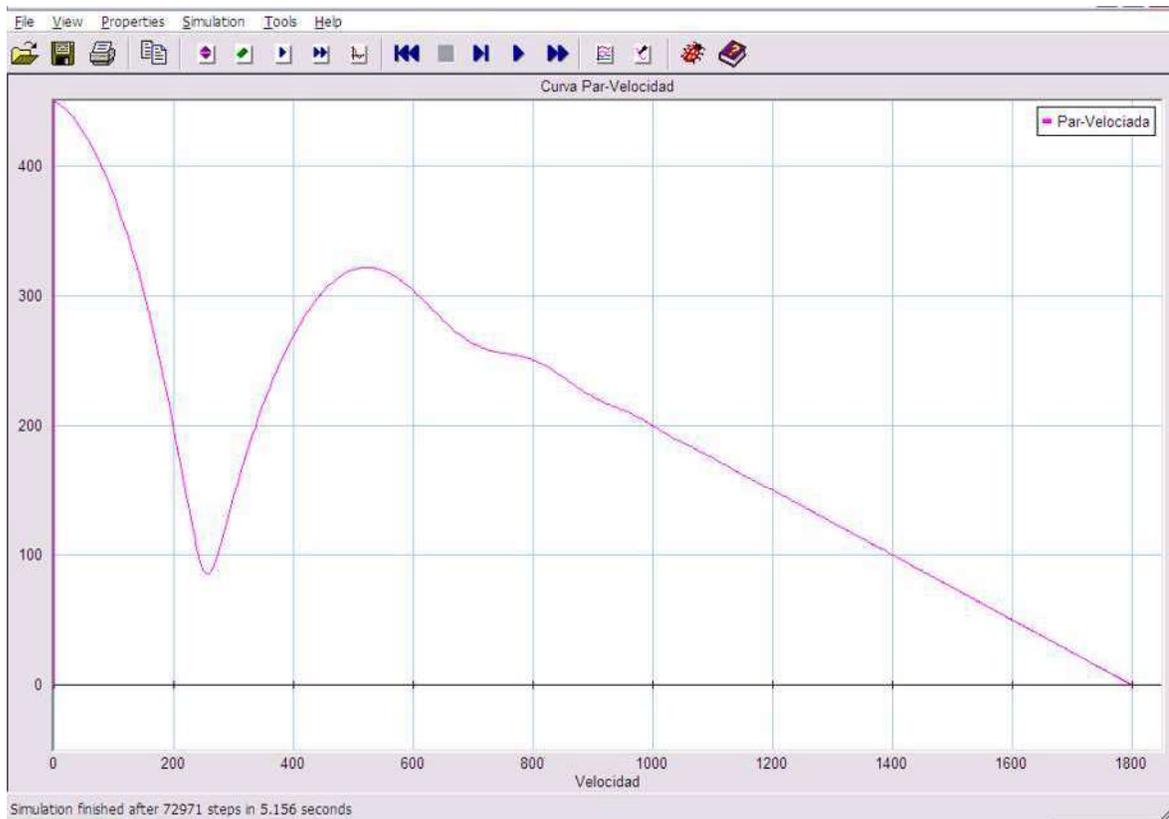


Figura 4.19 Curva par-velocidad del segundo motor

En este motor también se hace la comprobación de las corrientes abc tomadas del motor por medio de una transformada inversa, estas corrientes se pueden observar en la figura 4.20 en donde una vez más se comprueba que son las mismas corrientes que las de la figura 4.16 que son las corrientes que proporciona la fuente. También cabe recalcar que estas corrientes no llegan a cero, se puede apreciar que llegan a cero por la gran magnitud de los picos de al momento de arrancar el motor, pero no es así tienen un valor pequeño por la casi nula carga que está soportando.

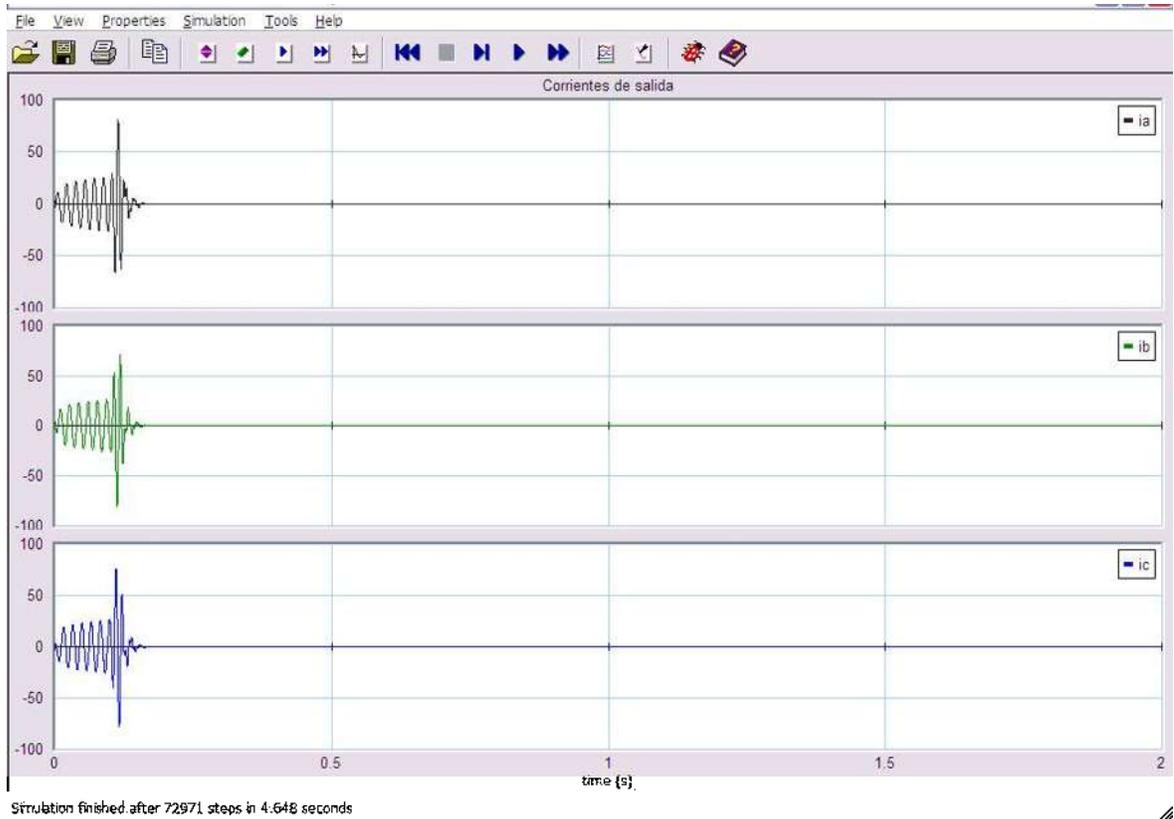


Figura 4.20 Corrientes de salida del segundo motor

En la figura 4.21 son mostradas las gráficas de las corrientes de salida en estado estacionario del segundo motor, estas corrientes nada más son para alimentar las pérdidas y el poco trabajo mecánico que está realizando el motor.

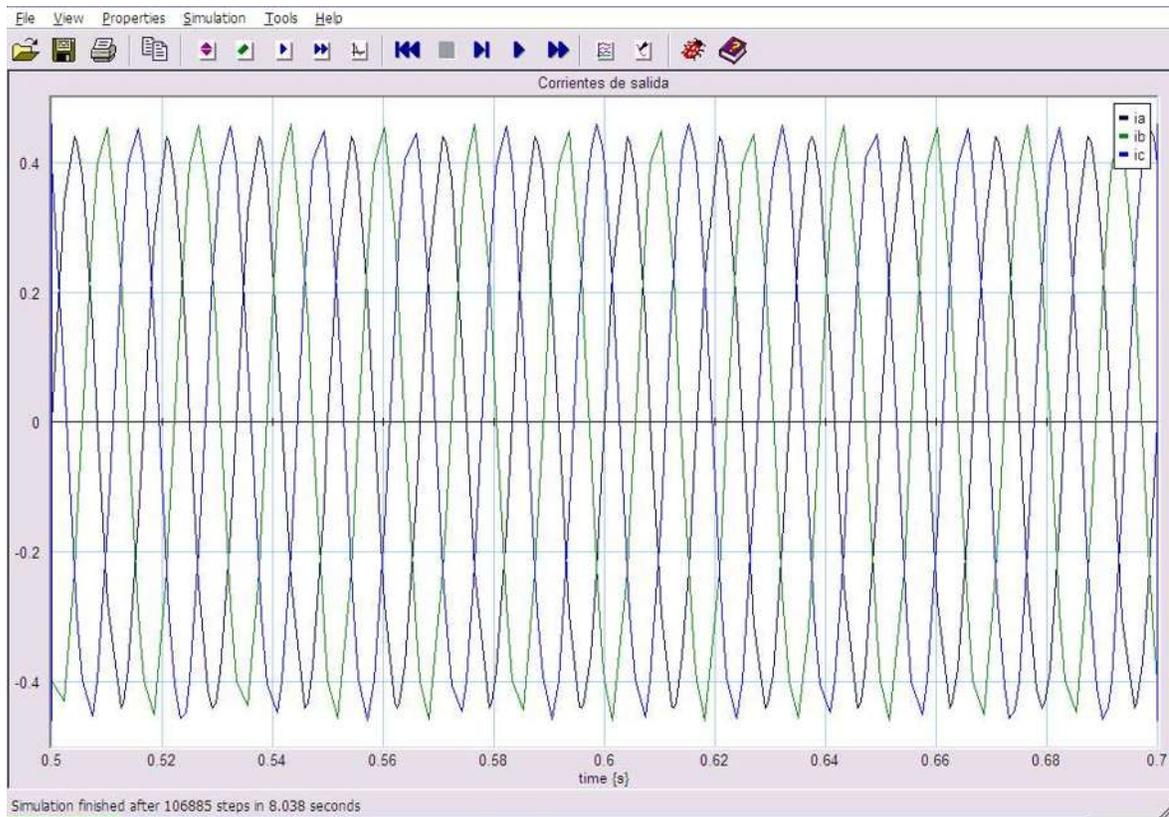


Figura 4.21 Estado estacionario de las corrientes de salida del segundo motor

Con estas dos simulaciones se termina el capítulo 4, las cuales son más que suficientes para demostrar la efectividad del modelado en bond graph, son mostradas las gráficas más comunes que se utilizan en las simulaciones de los motores eléctricos y también son mostrados los parámetros que se utilizaron para la simulación de cada motor.

## Capítulo 5

# Conclusiones y recomendaciones

### 5.1 Conclusiones

Se cumplió el objetivo de este trabajo de tesis ya que se realizó exitosamente el modelado y simulación del motor de inducción trifásico en el dominio físico, en donde se observó lo atractivo del método de bond graph para modelar.

Bond Graph permite a partir de circuitos eléctricos, obtener un modelo adecuado para realizar simulaciones que ayuden a los análisis de resultados que con otras herramientas son de mayor nivel de dificultad. Este método permite introducir diferentes subsistemas de circuitos al motor de inducción aunque estos sean de diferente origen. Además sus diagramas permiten obtener rápidamente sus ecuaciones que pueden ser utilizadas en otras herramientas computacionales.

El 20-sim es una herramienta que permite ir probando cada componente del modelo del motor de inducción y todo esto favorece gracias a como están orientados los objetos en bond graph. 20-sim es muy versátil ya que podemos combinar diferentes elementos gráficos tales como diagramas de bloques, ecuaciones ya definidas, y diagramas de bond graph.

El bond graph es un método totalmente gráfico que ayuda a obtener las ecuaciones de estado de sistemas eléctricos o en el caso del motor de inducción trifásico una combinación de sistemas eléctricos y mecánicos, para llegar a estas ecuaciones no es necesario utilizar ecuaciones diferenciales o de mayor nivel de dificultad, son operaciones matriciales y otras operaciones simples.

## 5.2 Recomendaciones

Una de las recomendaciones que se debe de seguir, es no ver a bond graph como un método sumamente fácil, es un método que para poderlo aplicar eficientemente se requiere de cierto dominio para poder desarrollar los modelos, además de un aprendizaje previo para conocer todo tipo de errores y complicaciones que se puedan tener al momento de hacer el diseño de un modelo.

Otra recomendación es tratar de llevar el método de bond graph a la licenciatura de ingeniería eléctrica, ya que es un método en el que se pueden apoyar los alumnos para la solución de circuitos eléctricos por su simplicidad para llegar a las ecuaciones de estado de cualquier sistema eléctrico y así poder simular en cualquier herramienta computacional la respuesta del sistema eléctrico. El alumno tendría otra perspectiva para la solución de circuitos eléctricos y de alguna forma comparar sus resultados con los obtenidos por los métodos tradicionales.

# Referencias

[1] [Harper 2006]

Gilberto Enríquez Harper, El ABC de las máquinas eléctricas: Motores de corriente alterna, Limusa, 2006.

[2] [Broenink, J.F.,(1999)]

Broenink, J.F. Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs. 4 de marzo del 2009. <http://www.rt.el.utwente.nl/bnk/papers/default.htm>

[3] [Karnopp 1975]

Dean Karnopp and Ronald Rosenberg, System dynamics: a unified approach, New York, John Wilwy, 1975.

[4] [González 2004]

Tesis de doctorado, Dr. Gilberto González Avalos, U.M.S.N.H. 2004.

[5] [O'Kelly & Simmons 1968]

D. O'Kelly and S. Simmons, Introduction to Generalized Electrical Machine Theory, New York, McDRAW-HILL, 1968.

[6] [Krause 1960]

Paul C. Krause, Oleg Wasynczuk and Scott D. Sudhoff, Analysis of electric machinery and drive systems, Wiley-Interscience.

[7] [Sahm 1979]

Dietrich Sahm, A Two-Axis, Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machines, Stuttgart Germany, Journal of the Franklin institute, 1979.

[8] [Krause & Thomas 1965]

Paul C. Krause and C. H. Thomas, Simulation of Symmetrical Induction Machinery, IEEE, November 1965.

[9] [Bu-lai & Zhe-song 2008]

Wang Bu.lai and Gong Zhe-song, Modeling for Dual Three-Phase Induction Motor Based On A Winding Transformation, Shanghai china, IEEE, 2008