UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

ANÁLISIS DE CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD EN SISTEMAS MODELADOS EN BOND GRAPH

TESIS

Para obtener el Titulo de
INGENIERO EN ELECTRONICA

Presenta
JOEL ABRAHAM GONZÁLEZ VIEYRA

Asesor de Tesis
Dr. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

Marzo del 2011

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por ser el pilar de lo que he logrado construir.

Agradezco a mis amigos que han estado ahí sin importar el estado en el que me encontrara, que supieron escuchar y expresarse para que siguiera progresando académicamente, pero más aun, como persona.

Y por último a todos aquellos que han aportado algo de sí mismos, sin importar cuánto, como, en donde, y de qué forma, pero que con ello he seguido creciendo y aprendiendo a seguir adelante.

Dedicatoria

Este trabajo lo dedico primero a mi por mi esfuerzo no solo en este si no en todos los realizados, lo dedico a todos aquellos que como yo, han luchado, dando un paso a la vez pero nunca deteniéndose, y sin olvidar las bases que hemos construido, se lo dedico a todos con los que he creado un lazo independientemente del tipo que sea.

Y a todos aquellos que buscamos llegar a la luna y tomar al mundo en nuestras manos y levantarlo, a todas estas personas les dedico mi esfuerzo.

Resumen

En el presente trabajo se destaca el inicio, desarrollo y avance a través del tiempo, del método de Bond Graph y sus nociones básicas.

Se muestran los conceptos de la descripción de sistemas físicos y como la energía juega un papel importante, aún en la interacción de diferentes dominios, introducir los conceptos y cada uno de los elementos de la teoría del modelado de Bond Graph, así como ejemplos del dominio eléctrico para comprender las diferentes etapas de modelado, y comprender el concepto de causalidad para ello.

Al ser introducidos los conceptos de controlabilidad y observabilidad los cuales son una parte importante para el diseño de los sistemas de control; de hecho, estos conceptos determinan la existencia de una solución para el problema del diseño de un sistema de control ya que no se sabe si el controlador funcionará de manera adecuada sobre el sistema, lo mismo ocurre con un observador.

Utilizando todo lo anterior y tomando en cuenta la forma de cómo se define la observabilidad y controlabilidad, como la conocemos y también se muestran estas mismas características en función del modelo de Bond Graph determinando la controlabilidad y observabilidad.

Se inicia con el uso del análisis estructural del modelo de Bond Graph para así encontrar los parámetros que actúan sobre los elementos del modelo y la determinación de controlabilidad y observabilidad.

Se determina si el análisis hecho en Bond Graph es comparable con el método tradicional de variables de estado, tanto, sus ventajas como desventajas, y por tanto, cuales son las recomendaciones a tomar si se decide utilizar este tipo de análisis y se determinan las futuras aportaciones a esta tesis.

Contenido

Agradecimientos..... iii
Dedicatoria..... iv
Resumen..... v
Contenido..... vi
Lista de Figuras..... viii
Lista de Símbolos y Abreviaciones..... xi

Capítulo 1. Introducción..... 1
1.1. Antecedentes……..... 1
1.1.1. Sistemas Dinámicos..... 1
1.1.2. Bond Graph..... 3
1.2. Objetivo..... 4
1.3. Justificación..... 4
1.4. Metodología..... 4
1.5. Contenido de la tesis……..... 5

Capítulo 2. Antecedentes de Análisis y Modelado de Sistemas…...... 7
2.1 Modelado …….…..... 7
2.2 Breve Descripción de Variables de Estado..... 9
2.3 Principios de Bond Graph..... 10
2.3.1 Introducción a Bond Graph..... 10
2.3.2 Componentes Básicos de Bond Graph..... 12
2.3.2.1 Puertos-1 pasivos……..... 12
2.3.2.2 Puertos-1 activos o fuentes..... 14
2.3.2.3 Elementos ideales de puerto-2..... 15
2.3.2.4 Los elementos de unión, puertos-3..... 15
2.3.3 Causalidad para los Multipuertos básicos..... 16

2.3.4 Procedimiento para el modelado de sistemas..... 19

Capítulo 3. Controlabilidad y Observabilidad…..... 29
3.1 Conceptos de controlabilidad y Observabilidad..... 29
3.1.1. Controlabilidad……..... 30
3.1.2. Observabilidad……..... 31
3.2. Modelo Matemático derivado de Bond Graph..... 33
3.2.1. Vectores Clave…….……..... 33
3.2.2 Relaciones Constitutivas y Ecuación de Estado……..... 34
3.3. Ejemplos de determinación de controlabilidad y observabilidad a partir del modelo de Bond Graph…… 36
3.3.1. Ejemplo de circuito eléctrico…….…… 36
3.3.2. Ejemplo de sistema mecánico…...……. 45
3.3.3. Ejemplo de sistema hidráulico…….…… 48

Capítulo 4. Aplicación en Sistemas de Análisis Estructural……..... 54
4.1. Definición de trayectorias causales..... 54
4.2. Determinación de controlabilidad y observabilidad estructural……..... 56
4.3. Ejemplos del empleo del análisis estructural..... 57
4.3.1. Ejemplo de circuito eléctrico…….…… 58
4.3.2. Ejemplo de sistema mecánico...……. 64
4.3.3. Ejemplo de sistema hidráulico..…….…… 67
4.4. Ejemplo de sistema eléctrico de orden cinco..... 71
4.5. Ejemplo de sistema hidráulico de orden seis..... 74
4.6. Ejemplo de sistema eléctrico de nueve elementos almacenadores de energía..... 77

Capítulo 5. Conclusiones..... 81

Referencias..... 82

Lista de Figuras

Figura 2.1 El Bond…..... 10
Figura 2.2 Valores asociados del Bond…..... 11
Figura 2.3 Representación del elemento R..... 12
Figura 2.4 Representación del elemento C..... 13
Figura 2.5 Representación del elemento I..... 13
Figura 2.6 Elementos pasivos, resistencia, capacitor, inductor..... 13
Figura 2.7 Tetraedro de estados..... 14
Figura 2.8 Elementos activos: fuente de esfuerzo y fuente de flujo..... 14
Figura 2.9 Elementos para la relación entre variables, transformador y girador..... 15
Figura 2.10 Elemento de unión tipo serie..... 16
Figura 2.11 Elemento de unión tipo paralelo..... 16
Figura 2.12 Representación de trazo causal en un Bond..... 17
Figura 2.13 Reglas de simplificación..... 19
Figura 2.14 Circuito eléctrico..... 20
Figura 2.15 Denotando nodos en el circuito eléctrico..... 20
Figura 2.16 Unión cero para cada nodo del circuito..... 20
Figura 2.17 Introducción de elementos en unión-1..... 21
Figura 2.18 Unión de los espacios según la dirección de la potencia..... 21
Figura 2.19 Eliminación de referencia (tierra)..... 22
Figura 2.20 Aplicación de reglas de reducción..... 22
Figura 2.21 Reglas de reducción..... 22
Figura 2.22 Representación final del circuito en Bond-Graph..... 23
Figura 2.23 Bond-Graph con causalidades definidas..... 23
Figura 2.24 Representación de un sistema mecánico en Bond-Graph..... 24
Figura 2.25 Aplicación de los pasos de simplificación..... 25
Figura 2.26 Representación final del sistema mecánico..... 25
Figura 2.27 Bond-Graph de sistema mecánico con causalidad definida..... 25
Figura 2.28 Representación grafica de un sistema hidráulico..... 26

Figura 2.29 Bond Graph del sistema hidráulico identificado para su reducción…… 27
Figura 2.30 Bond Graph de un sistema hidráulico reducido..... 27
Figura 2.31 Bond Graph del sistema hidráulico con causalidad integral..... 28
Figura 3.1 Diagrama de determinación de controlabilidad y observabilidad..... 32
Figura 3.2 Relación de colores de la figura 3.1..... 32
Figura 3.3 Vectores clave…… 33
Figura 3.4 Bond Graph de un sistema eléctrico con cada bond numerado..... 36
Figura 3.5 Bond Graph de un sistema mecánico con bonds numerados..... 45
Figura 3.6 Bond Graph de un sistema hidráulico con numeración de bond..... 48
Figura 4.1 Definición de trayectorias causales..... 56
Figura 4.2 Circuito eléctrico……..... 58
Figura 4.3 BGI del circuito eléctrico……..... 58
Figura 4.4 Bond Graph Derivativo de un sistema eléctrico..... 59
Figura 4.5 Determinación de trazos causales en el BGI de la figura 3.4..... 60
Figura 4.6 Listado de trazos causales……..... 60
Figura 4.7 Comportamiento del voltaje en el capacitor y corriente en el inductor..... 62
Figura 4.8 Variables estabilizadas en un solo valor en un tiempo finito..... 63
Figura 4.9 Cambio en la corriente de L1 solo modificando C1 y R3……. 64
Figura 4.10 Sistema mecánico……..... 65
Figura 4.11 BGI del sistema mecánico……..... 65
Figura 4.12 BGD del sistema mecánico……..... 65
Figura 4.13 Determinación de trazos causales en el sistema mecánico..... 66
Figura 4.14 Listado de trazos causales..... 66
Figura 4.15 Comportamiento de las variables del sistema mecánico..... 67
Figura 4.16 Sistema hidráulico……..... 68
Figura 4.17 BGI del sistema hidráulico……..... 68
Figura 4.18 BGD de un sistema hidráulico……..... 69
Figura 4.19 Grafica y listado de trazos causales de un sistema hidráulico..... 69
Figura 4.20 Grafica de variables del sistema hidráulico..... 70
Figura 4.21 Sistema eléctrico con cinco elementos almacenadores de energía..... 71
Figura 4.22 BGI de un sistema eléctrico de orden cinco……..... 72

Figura 4.23 BGD del sistema eléctrico de orden cinco……..... 72
Figura 4.24 Gráfico de trayectorias causales…….. 73
Figura 4.25 Listado de trazos causales……..... 74
Figura 4.26 Sistema hidráulico de orden seis……. 74
Figura 4.27 BGI del sistema hidráulico…….. 75
Figura 4.28 BGD del sistema hidráulico……..... 75
Figura 4.29 Gráfico y listado de las trayectorias causales del sistema hidráulico……. 76
Figura 4.30 Circuito eléctrico de orden nueve……..... 77
Figura 4.31 BGI de sistema eléctrico de orden nueve…… 78
Figura 4.32 BGD de un sistema robusto……. 79
Figura 4.33 Listado de trayectorias causales…….. 80

Lista de Símbolos y Abreviaturas

K	kilo
M	mega
m	metros
N	Newton
s	segundo
kg	kilogramo
Pa	Pascal
W	watts
p(t)	Esfuerzo acumulado
q(t)	Flujo acumulado
e(t)	Esfuerzo
f(t)	Flujo
t	tiempo
n	orden del sistema
TF	transformador
GY	girador
Ω	ohm
μf	microfaradios
mH	Mili henrios
n	orden del sistema
R	resistencia
Cm	Matriz de controlabilidad
Om	Matriz de observabilidad
BGD	Bond Graph Derivativo
BGI	Bond Graph Integral
LTI	Linealmente invariante en el tiempo
MIMO	Múltiple entrada - Múltiple salida

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

Un Bond Graph es una representación gráfica de un sistema dinámico donde los componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía.

1.1.1 Sistemas dinámicos

Todo comienza cuando el ser humano tuvo la necesidad de entender su entorno y como es que se comportaba.

El uso de las matemáticas para resolver problemas se ha hecho muy común en tiempos recientes, una fase crucial fue la de traducir el problema de manera correcta desde el mundo físico.

La validez de la solución dependerá de la descripción matemática propuesta, que modele el sistema real. A la descripción matemática se le llama “modelo matemático”.

Recientemente la importancia del análisis de sistemas y de modelado ha ido en aumento en varias disciplinas como la economía, la biología, en medicina, lógicamente en las ramas de la ingeniería y en el control y automatización de procesos o sistemas.

El diseño de modelos matemáticos es necesario para entender el comportamiento dinámico de procesos y el modelado pretende entonces el desarrollo metodológico de estos.

A continuación se describe la definición de sistema, éste es un conjunto de elementos que tienen una estructura e interactúan entre ellos para alcanzar un fin común.

En un **sistema físico** la interacción involucra intercambio de materia y/o energía y/o información; mientras tanto en un **sistema físico dinámico** hay almacenamiento de materia y/o energía y/o información. Los sistemas dinámicos sirven para entender como evolucionan los procesos.

Se puede decir que los sistemas dinámicos son un área joven de las matemáticas, aunque se remontan a Newton con sus estudios de Mecánica Celeste, y a Henri Poincare, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, fue hace apenas unos 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha, gracias al trabajo destacado de matemáticos e ingenieros como: S. Smale, V. Arnold, Lyapunov, etc.

Si tratamos de precisar el concepto de sistemas dinámicos, podremos decir burdamente que se trata del estudio de sistemas deterministas, es decir, consideramos situaciones que dependan de algún parámetro dado, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, permite reconstruir el pasado y determinar su comportamiento posterior.

El control de sistemas dinámicos se realiza mediante distintas formas los cuales exigen un modelo del sistema el cual controlan. Por ejemplo, en la actualidad el control de estabilidad de un automóvil no es más que un cierto programa que se ejecuta en un microcontrolador de acuerdo con la información que recibe de una serie de sensores. Para que esto sea posible, el programa debe conocer como es y cómo se comporta el automóvil, para actuar en consecuencia.

Este tipo de modelos existen de muy variadas formas entre los más conocidos en ingeniería son: Los diagramas esquemáticos (Schematic diagrams), ecuaciones de tendencia (Equations of motion), diagrama de bloques (Block diagrams), gráficos de flujo de señales (Signal-Flow graphs), modelos computacionales (Computer models), gráficos de enlace (Bond Graph).

1.1.2 Bond Graph

Bond graph fue creado por, Henry M. Paynter (1923-2002), profesor del MIT y UT Austin, con la introducción de los bonds en 1959, concluyó en alrededor de una década a la mayoría de los conceptos básicos y unirlos en un marco conceptual y la correspondiente notación.

Esta herramienta fue desarrollada más ampliamente por sus estudiantes, en particular, Dean C. Karnopp, profesor de la UC Davis, y Ronald C. Rosenberg, después profesor de la Michigan State University, que también diseño la herramienta del primer equipo (ENPORT) el cual apoyaba la simulación de modelos de Bond Graph.

En los años setenta Jan J. van Dixhoorn, profesor de la Universidad de Twente y Jean U. Thoma, profesor de la Universidad de Waterloo, Ontario, fueron los primeros en introducir los Bond Graph en Europa. Estos pioneros en el campo y sus estudiantes han estado difundiendo estas ideas en todo el mundo [Karnopp et al., 1979].

Jan van Dixhoorn presentó un primer prototipo de diagramas de bloques del software basado en TUTSIM. Esto sentó las bases para el desarrollo del software 20-SIM en la Universidad de Twente. También, inició la investigación en modelos más complejos los sistemas físicos, en particular, los sistemas de termo-fluídos.

En las últimas dos décadas, los Bond graph han sido un tema de investigación o están siendo utilizados en la investigación en muchas universidades de todo el mundo y son parte de los planes de estudio en un número creciente de universidades. En la última década, el uso industrial se ha vuelto más y más importante.

El Prof. H. M. Paynter dio la idea revolucionaria de retratar a los sistemas en términos de los bonds de alimentación, que conectan los elementos del sistema físico a las estructuras de cruce. Este intercambio de poder representar un sistema que se llama Bond Graph.

Mediante este enfoque, un sistema físico puede ser representado por los símbolos y las líneas, la identificación de las rutas de flujo de potencia. Los elementos de parámetro globalizado de la resistencia, la capacitancia, e inductancia están interconectados de una manera, la conservación de energía por los lazos y las uniones resultando en una estructura de red.

1.2 Objetivo

Esta tesis pretende promover y mostrar, que el método de Bond Graph puede ser utilizado para determinar la controlabilidad y observabilidad de un sistema, revolucionando la obtención de estas características, comparadas con el método tradicional de variables de estado, esta técnica puede ser utilizada para el diseño de un control sobre el sistema o definir el funcionamiento del mismo.

1.3 Justificación

La idea de realizar esta investigación en Bond Graph nació en muchas platicas y esta se hizo de un interés para su estudio e investigación ya que se consideró bastante atractiva e interesante y la cual hay que difundir debido a que es un método práctico en el análisis y modelado de sistemas relacionados a nuestra área de trabajo y así poder dar una opción en la determinación de la controlabilidad y observabilidad de un sistema modelado en Bond Graph**.**

1.4 Metodología

Este trabajo inicia con el estudio e investigación de lo que es un sistema dinámico; continuando así, con lo que son los antecedentes de Bond Graph.

Posteriormente, se realizó la investigación pertinente relacionada al análisis y modelado tradicional (variables de estado) para los sistemas determinados a mostrar en esta

tesis los cuales son, sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos, esto con el fin de encontrar su modelo matemático.

Se realizará el análisis y modelado pero utilizando Bond Graph para lo cual ya se ha hecho una investigación y estudio previo para la comprensión de esta técnica; esto para representar los sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos y así obtener la estructura unión la cual nos puede llevar a obtener los parámetros fundamentales para su modelo matemático.

Se continúa con el estudio de los conceptos básicos de controlabilidad y observabilidad, así como la representación de las mismas, tanto, en el modelado tradicional (variables de estado) a utilizar, como en el modelado de Bond Graph y así determinar la confiabilidad del mismo para el análisis y modelado.

Después se conoce lo que se denomina, trayectorias causales y lazo causal, y como estas pueden dar una perspectiva diferente de lo que sería controlabilidad y observabilidad mediante el método tradicional.

Finalmente, se describe como las propiedades de controlabilidad y observabilidad pueden ser aplicadas a problemas reales y así con el conjunto de todos y cada uno de los resultados llegar a las conclusiones y observaciones de acuerdo al trabajo realizado.

1.5 Contenido de la tesis

En el capítulo 1, se observa el nacimiento, desarrollos y avances a través del tiempo del método de Bond Graph y una explicación detallada del método y sus nociones básicas para una comprensión de futuras dudas en esta tesis

En el capítulo 2, se muestran los conceptos de la descripción de sistemas físicos y como la energía juega un papel importante, aún en la interacción de diferentes dominios y se introducen los conceptos y elementos de la teoría de Bond Graph, así como ejemplos e

interpretaciones en el dominio eléctrico para así comprender las diferentes etapas de modelado, y comprender el concepto de causalidad para ello.

En el capítulo 3, se describen los conceptos de controlabilidad y observabilidad los cuales son una parte importante para el diseño de los sistemas de control; de hecho, las condiciones de estos conceptos determinan la existencia de una solución para el problema del diseño de un sistema de control.

Considerando todo lo anterior y tomando en cuenta la definición de observabilidad y controlabilidad se describe cómo en un modelo de Bond Graph se determinan las condiciones de controlabilidad y observabilidad.

En el capítulo 4, se inicia con el uso de diversos elementos en relación con Bond Graph y análisis estructural para así encontrar los parámetros que actúan sobre la observabilidad y controlabilidad y cuál es su relación con el sistema tradicional para el mismo procedimiento.

Finalmente en el capítulo 5, se determina si el análisis y modelado hecho en Bond Graph es comparable con el método tradicional de variables de estado, tanto sus ventajas como desventajas, y por tanto, cuáles son las recomendaciones.

Capítulo 2

Antecedentes de análisis y modelado de sistemas

La ciencia y sus métodos proveen respuestas a las interrogantes humanas sobre los sistemas y sus propiedades. Los métodos científicos se basan en la experimentación, que consiste en la realización de ensayos sobre el sistema, en la observación de las reacciones del mismo, y en la obtención de leyes dado su comportamiento, expresadas por lo general mediante el lenguaje matemático.

El método experimental no siempre es viable ya que en algunos casos existen factores que limitan o impiden su aplicación. Por ejemplo: Costos, riesgos, experimento irrealizable (por inexistencia del sistema o incapacidad humana de experimentar). Cuando no se puede experimentar sobre los sistemas se recurre a su modelado.

2.1.Modelado

El modelo de un sistema es básicamente una herramienta que permite responder interrogantes sobre este último sin tener que recurrir a la experimentación sobre el mismo. Es una representación simplificada de la realidad (si el sistema físico existe) o es un prototipo conceptual (proyecto de sistema físico).

Los modelos matemáticos son expresiones que describen las relaciones existentes entre las magnitudes características del sistema. Pueden ser representadas de diversas maneras.

Todas estas vinculan variables matemáticas representativas de las señales (señal: representación de una información a través de valores de una magnitud física) en el sistema, obtenidas a partir de las relaciones entre las correspondientes magnitudes físicas.

El proceso de modelado analítico se divide en tres grandes etapas. La primera de ellas consiste en la delimitación del modelo en función de los fenómenos que resultan relevantes de acuerdo al problema que se quiere resolver. Esta es una etapa que no puede sistematizarse fácilmente y que requiere por ende de una cierta dosis de intuición y sobre todo de una experiencia en relación con el sistema a modelar.

Una vez delimitados los fenómenos que se consideraron relevantes para la construcción del modelo, se pasa a la siguiente etapa en la que se deben formalizar las relaciones constitutivas y estructurales asociadas respectivamente a los fenómenos considerados y a la forma en que estos se disponen dentro del sistema. En los sistemas físicos, estas relaciones constitutivas y estructurales encuentran su expresión formal (matemática) en las leyes fundamentales de los dominios de la física asociados a los fenómenos mencionados.

Por este motivo, el modelado analítico de un sistema físico no es posible sin un conocimiento de las leyes físicas elementales asociadas a los fenómenos en cuestión.

El conocimiento del comportamiento de los sistemas de físicos es comúnmente limitado, ya sea implícita o explícitamente, los comportamientos deben cumplir los principios básicos de la física, la conservación de la energía, la producción de entropía positiva y la potencia. Cabe mencionar que cada uno de estos dominios hace analogía a comportamientos básicos e ideales con respecto a la energía.

En la actualidad, el modelado es una actividad indispensable cuando nos enfrentamos con el análisis y diseño de sistemas de cierta complejidad o para encontrar o no, un control para estos.

2.2.Breve descripción de variables de estado

En ingeniería de control, la representación de espacios de estados es el modelo matemático de un sistema físico descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan.

La representación de espacios de estado (aproximación en el dominio del tiempo) provee un modo reducido y conveniente para modelar y analizar sistemas LTI MIMO. El espacio de estado se refiere al espacio de 'n' dimensiones que están formados por variables de estados. El estado del sistema puede ser representado como un vector dentro de ese espacio.

Las variables de estado son el conjunto más pequeño de variables que representan al sistema dinámico. Las variables de estado deben ser linealmente independientes; una variable de estado no puede ser una combinación lineal de otras variables de estado.

El número mínimo de variables de estado necesarias para representar un sistema dado es 'n', es normalmente igual al orden de la ecuación diferencial que define al sistema. En circuitos eléctricos, el número de variables de estados es normalmente, igual al número de elementos que almacenan energía en los circuitos, como capacitores e inductores.

En una representación de variables de estados de un sistema, con matrices A, B, C y D, las matrices A y C describen el comportamiento no-forzado del sistema (El comportamiento con entrada cero), mientras que la matriz B caracteriza el efecto de la entrada (ó el control) sobre la dinámica del sistema. La matriz D representa la transmisión directa de la entrada a la salida.

2.3.Principios de Bond Graph

2.3.1. Introducción a Bond Graph

En un sistema físico cualquiera, la energía puede almacenarse, disiparse o intercambiarse. Cuando posteriormente se unen dos sistemas, aparecen distintos flujos de potencia entre ellos.

La metodología de Bond Graph se basa en el análisis y la caracterización de las transferencias de potencia que ocurren en el sistema [Dauphin-Tanguy, 2000], así como del principio de causa y efecto o *causalidad*

Mediante la técnica de Bond-Graph, el flujo de potencia entre los sistemas o incluso entre sus elementos se representa mediante una línea llamada Bond, representada en la figura 2.1. La punta de la flecha del Bond indica el sentido de transmisión de la potencia.

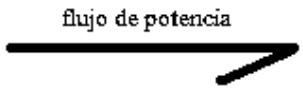


Figura 2.1 El bond

Por otra parte, la potencia instantánea, variable en el tiempo, es transmitida por un Bond particular y puede ser expresada como el producto de dos factores: el esfuerzo (e) y el flujo (f), siendo ambas también variables en función del tiempo.

Dicho de otra forma. El cambio de energía es la integral de la potencia, [Mukherjee, 2006].

$$Potencia = e(t) \cdot f(t) \tag{2.1}$$

(2.2)

En el Bond-Graph a las variables e (t), f (t) se las denomina variables del sistema y sus valores definen el Bond. En definitiva, cada Bond lleva dos valores asociados: esfuerzo y flujo, cuyo producto es la potencia, y su representación esta descrita en la figura 2.2.

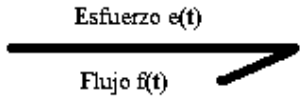


Figura 2.2 Valores asociados del bond

Además de las variables ya mencionadas, es necesario definir variables que representen el estado del sistema, llamadas variables de energía denominadas momento p(t) o esfuerzo acumulado y desplazamiento q(t) o flujo acumulado, que están dadas por:

(2.3)

(2.4)

Como se ha comentado anteriormente, las variables, esfuerzo y flujo tienen un significado diferente en función del dominio físico al que pertenezca el sistema en estudio.

En la tabla 2.1, puede verse el significado de estas variables en diferentes dominios de energía.

SISTEMA FISICO	ESFUERZO (e)	FLUJO (f)	MOMENTO (p)	DESPLAZAMIENTO (q)
MECANICA DE TRASLACION	Fuerza $f(N)$	Velocidad $V(m/s)$	Momento lineal $P(N \cdot s)$	Desplazamiento $X(m)$
MECANICA DE ROTACION	Par $M(N \cdot m)$	Velocidad angular $w(rad \cdot s)$	Momento angular $H(N \cdot m \cdot s)$	Angulo girado $\theta(rad)$
HIDRAULICA	Presión $p(N/m^2)$	Caudal $Q(m^3/s)$	Momento $P(N \cdot s/m^2)$	Volumen (m^3)
ELECTRICIDAD	Voltaje $e(V)$	Intensidad $I(Amp)$	Flujo $F(V \cdot s)$	Carga $Q(c)$
SISTEMAS TERMICOS	Temperatura $T(K)$	Flujo de calor $q(w)$		Calor (Q)

Tabla 2.1. Variables fundamentales en distintos dominios.

2.3.2. Componentes básicos de Bond Graph

2.3.2.1. Puertos 1 pasivos

- Elemento-R.

Este es utilizado para modelar al fenómeno físico que relacione la variable de esfuerzo a la variable de flujo del dominio físico que se está considerando. El elemento R transforma la potencia suministrada a él en energía calorífica disipada y se muestra en la figura 2.3.

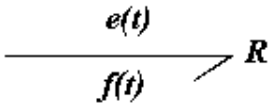


Figura 2.3. Representación del elemento R.

- Elemento-C.

El elemento C se utiliza para modelar al fenómeno físico que relacione la variable de esfuerzo con la variable de desplazamiento del dominio físico que se está considerando. El elemento C transforma la potencia suministrada a él en energía almacenada, el cual se muestra en la figura 2.4.

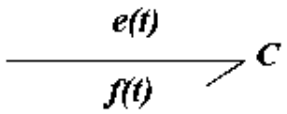


Figura 2.4. Representación del elemento C.

- Elemento-I.

El elemento I se utiliza para modelar al fenómeno físico que relacione la variable de flujo con la variable de momento del dominio físico que se está considerando. El elemento I transforma la potencia suministrada a él en energía almacenada, cuya representación se ilustra en la figura 2.5.

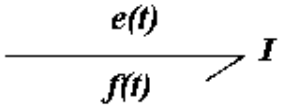


Figura 2.5. Representación del elemento I.

Considerándoles elementos ideales, los cuales representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía; a estos se les denomina elementos pasivos, que se muestran en la figura 2.6.

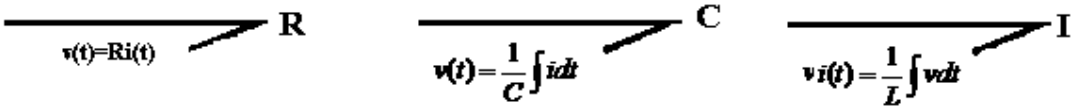


Figura 2.6. Elementos pasivos, resistencia (izquierda), capacitor (centro), inductor (derecha).

En la figura 2.7, se muestra el esquema mnemónico llamado tetraedro de estado, en este se observa la relación entre las variables generalizadas por los puertos anteriores.

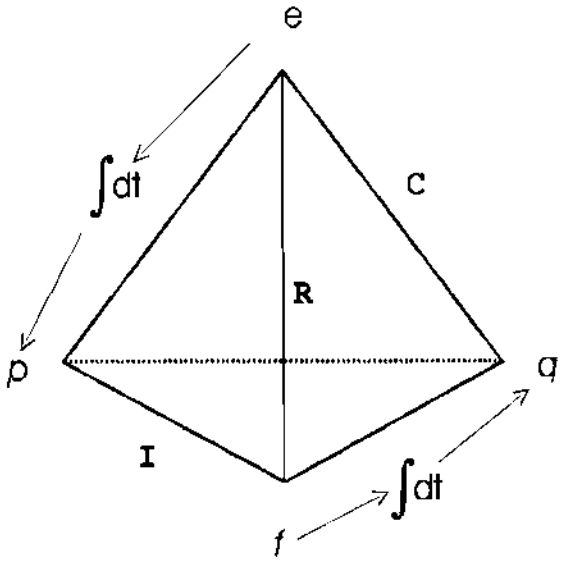


Figura 2.7. Tetraedro de estados.

2.3.2.2. Puertos-1 activos o fuentes

Estos son los elementos que introducen energía, existen dos tipos de fuentes, fuente de esfuerzo y fuentes de flujo, denotadas MSe y MSf respectivamente y su representación se muestra en la figura 2.8.

Figura 2.8. Elementos activos: fuente de esfuerzo (izquierda) y fuente de flujo (derecha).

2.3.2.3. Elementos ideales de puerto-2

Considerando dos elementos ideales puerto-2, denominados transformador (TF) y girador (GY), que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo.
Los bonds que representan a estos elementos se ilustran en la figura 2.9.

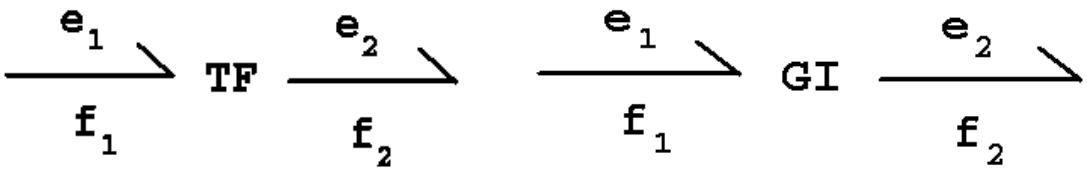


Figura 2.9. Elementos para la relación entre variables, transformador (derecha) y girador (izquierda).

Las relaciones de las variables de bond generalizadas para un transformador son:

$$\begin{aligned} e_1 &= n e_2 \\ f_1 &= \frac{1}{n} f_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

y para un girador, son:

$$\begin{aligned} e_1 &= r f_2 \\ f_1 &= \frac{1}{r} e_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3.2.4. Los elementos de unión, puertos-3

Estos son llamados uniones dado que esa es su función. Estos puertos-3 representan una de las ideas fundamentales del formalismo de Bond Graph, representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones, en serie y en paralelo.

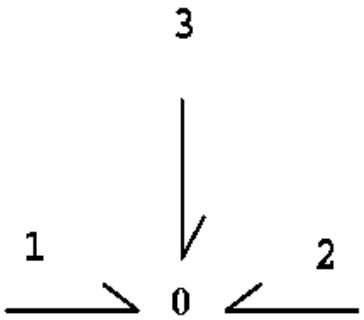


Figura 2.10. Elemento de unión tipo serie.

Considerar la unión de flujo, o unión-0 o unión de esfuerzo común esta para la conexión en paralelo, que se ilustra en la figura 2.10.

Las relaciones de interconexión que describen esta unión están dadas por:

$$e_1 = e_2 = e_3 \qquad (2.7)$$
$$f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

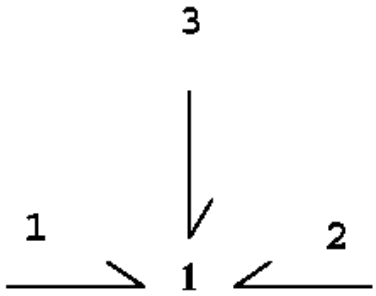


Figura 2.11. Elemento de unión tipo paralelo.

El otro elemento de puerto-3, es la unión de esfuerzo, unión-1 o unión de flujo común para la conexión serie, que se muestran en la figura 2.11.

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$f_1 = f_2 = f_3 \qquad (2.8)$$
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

2.3.3. Causalidad para los multipuertos básicos

El concepto de causalidad se basa en las relaciones de causa y efecto, que organizan las leyes constitutivas de los elementos.

Para organizar las leyes constitutivas de componentes en conjuntos de ecuaciones diferenciales es necesario definir relaciones constitutivas de causa y efecto. Una marca en un bond, llamado **trazo causal**, indica cómo y simultáneamente son determinados causalmente en un bond.

El trazo causal indica un sentido de entrada-salida para y en cada puerto de los componentes. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido que el

trazo causal, tal como se muestra en la figura 2.12.

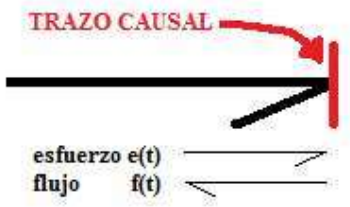


Figura 2.12. Representación de trazo causal en un Bond.

Es posible construir el modelo de Bond Graph asignando la causalidad correspondiente a los elementos almacenadores de energía. Si el modelo se construye con causalidad integral, este recibe el nombre de Bond Graph Integral (BGI).

Si la asignación de la causalidad es derivativa para los almacenadores de energía, el modelo es nombrado Bond Graph Derivativo (BGD).

Es cierto, que no siempre es posible asignar causalidad integral a todos los elementos almacenadores de energía de un BGI, esto ocurre cuando existe una dependencia lineal entre ellos. Estos almacenadores de energía que permanecen con causalidad derivativa son linealmente dependientes de algunos de los elementos con causalidad integral.

A continuación se describe un procedimiento para la asignación de la causalidad a un Bond Graph:

1. Asignar causalidad necesaria a las fuentes.

2. Asignar causalidad integral a todos los elementos almacenadores de energía.

3. Asignar causalidad a los elementos de estructura unión 0,1 a transformadores y giradores, usando las restricciones de los elementos.

4. Asignar causalidad a los elementos resistivos R, dependiendo de las

posibilidades disponibles.

5. Buscar conflictos causales. Si un conflicto aparece, regresar al paso 2 y modificar la causalidad del elemento C ó I que ocasiona dicho conflicto.

Si se desea asignar causalidad al modelo BGD, sólo hay que asignar causalidad derivativa a los elementos dinámicos en lugar de causalidad integral. De manera similar que en el BGI, en un BGD es posible que no todos los elementos dinámicos acepten la causalidad derivativa, sin embargo esto no implica dependencia lineal.

Los pasos mencionados se representan en la tabla 2.2.

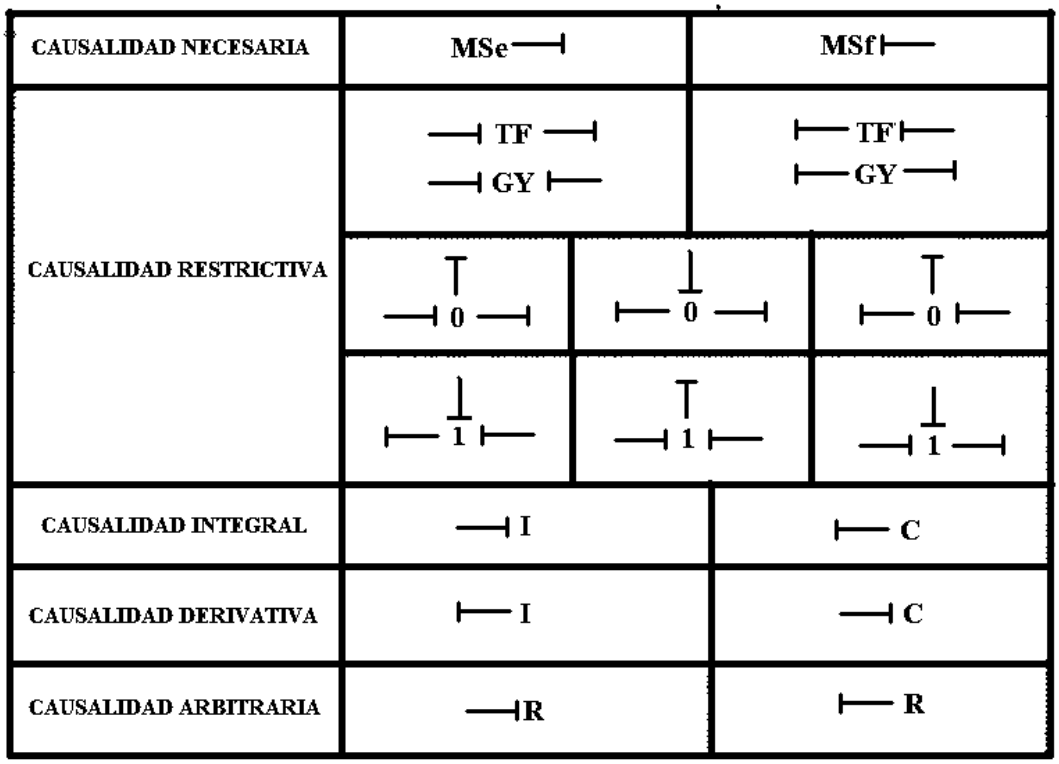


Tabla 2.2 Causalidad de los elementos

2.3.4. Procedimiento para el modelado de sistemas

Se presenta un procedimiento para modelar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos, el cual se puede extender a otro tipo de sistemas físicos, los pasos a seguir son los siguientes

1. Dibujar una unión-0 para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.

2. Dibujar una unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada de bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y disipadores.

3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.

4. Remover la unión-0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a esta unión.

5. Simplificar de acuerdo a las reglas de la figura 2.13

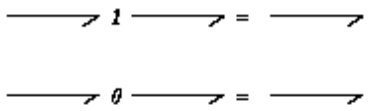


Figura 2.13. Reglas de simplificación.

El procedimiento se aplica al modelado se sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos, etc.

a) Ejemplo de un Sistema Eléctrico

Para sistemas eléctricos al método antes mencionado se le realizan las siguientes observaciones:

- En el paso 1, para cada cambio de voltaje en el circuito le corresponde una unión-0.
- En el paso 4, la referencia es el nodo de tierra, el cual el cual tiene un voltaje de cero.

A continuación se aplica este procedimiento con un ejemplo que se ilustra en la figura 2.14.

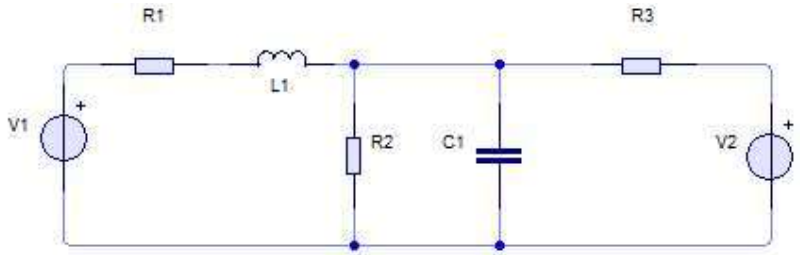


Figura 2.14. Circuito eléctrico.

El paso 1 se muestra en las figuras 2.15 y 2.16.

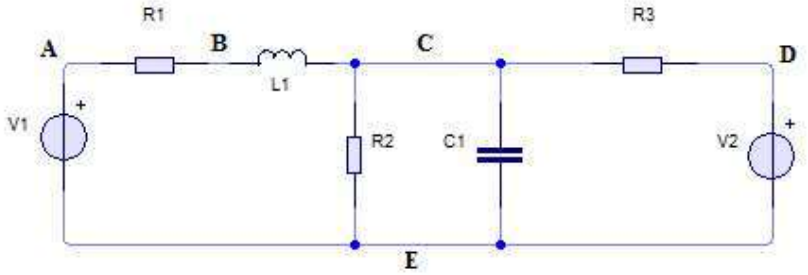


Figura 2.15. Denotando nodos en el circuito eléctrico.

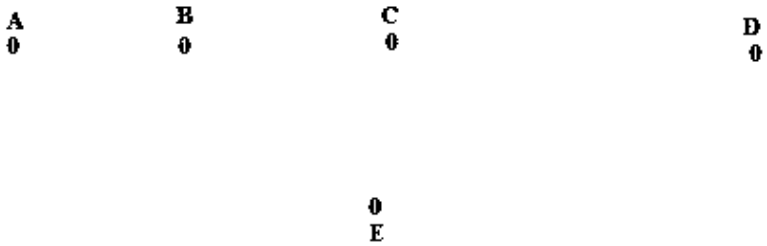


Figura 2.16. Unión cero para cada nodo del circuito.

El paso 2 se muestra en la figura 2.17.

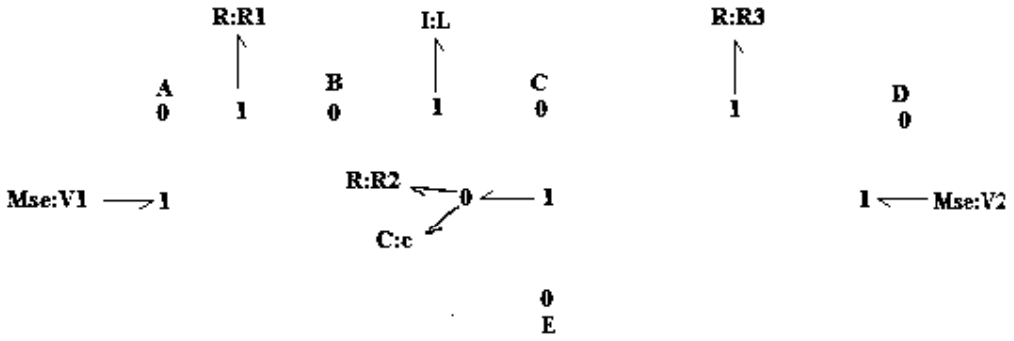


Figura 2.17. Introducción de elementos en unión-1.

El paso 3 es descrito en la figura 2.18.

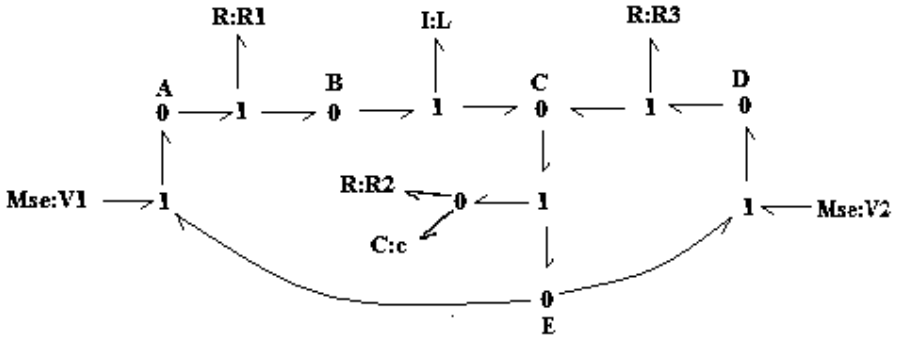


Figura 2.18. Unión de los espacios según la dirección de la potencia.

El paso 4 es dado en la figura 2.19.

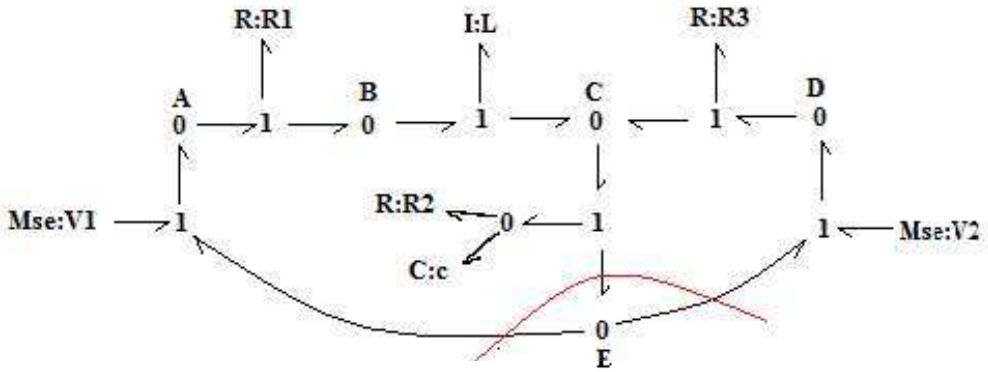


Figura 2.19. Eliminación de referencia (tierra).

Finalmente, el paso 5 se muestra en las figuras 2.20 y 2.21.

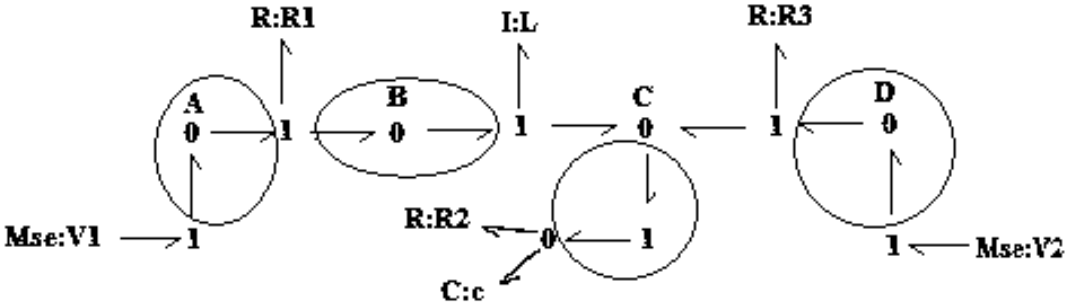


Figura 2.20. Aplicación de reglas de reducción.

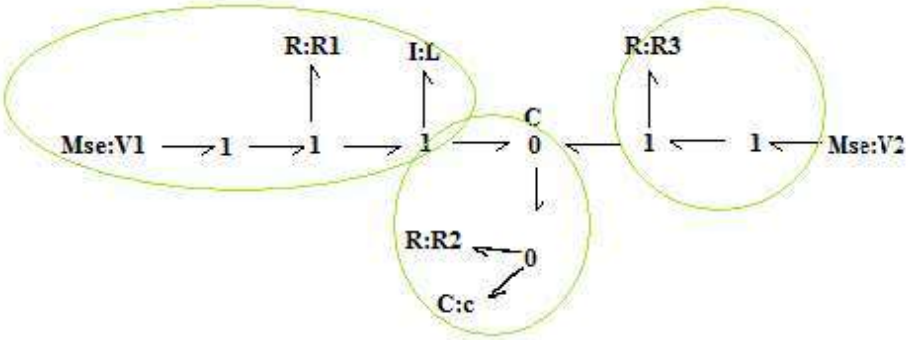


Figura 2.21. Reglas de reducción.

Después de realizar las reducciones correspondientes el Bond Graph acausal queda de la forma que se ilustra en la figura 2.22.

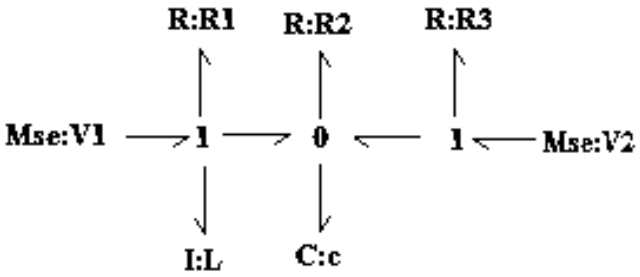


Figura 2.22. Representación final del circuito en Bond-Graph.

A continuación se ilustra en la figura 2.23 la forma de asignar la causalidad.

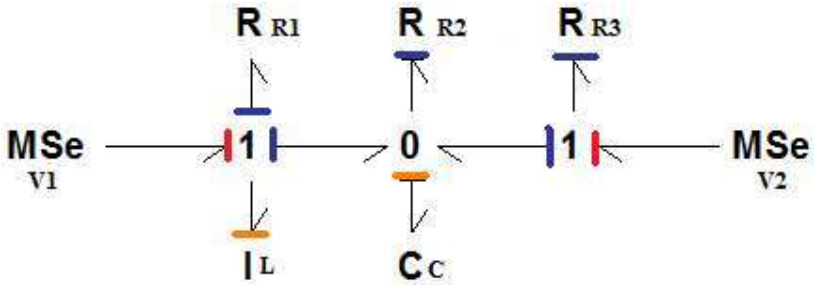


Figura 2.23. Bond-Graph con causalidades definidas.

b) Ejemplo de un Sistema Mecánico (traslación)**.**

El procedimiento de modelado para traslación mecánica sólo se realizan los siguientes cambios:

- En el paso 1, para cada velocidad distinta colocar una unión-1.

- En el paso 2, insertar los elementos de generación de fuerza entre el par apropiado de uniones-1 usando uniones-0. También si existen inercias insertarlas en sus respectivas uniones-1.
- En el paso 4, el nodo de tierra es cualquier velocidad cero.

A continuación se muestra en las figuras 2.24 y 2.25 este procedimiento aplicado a un ejemplo.

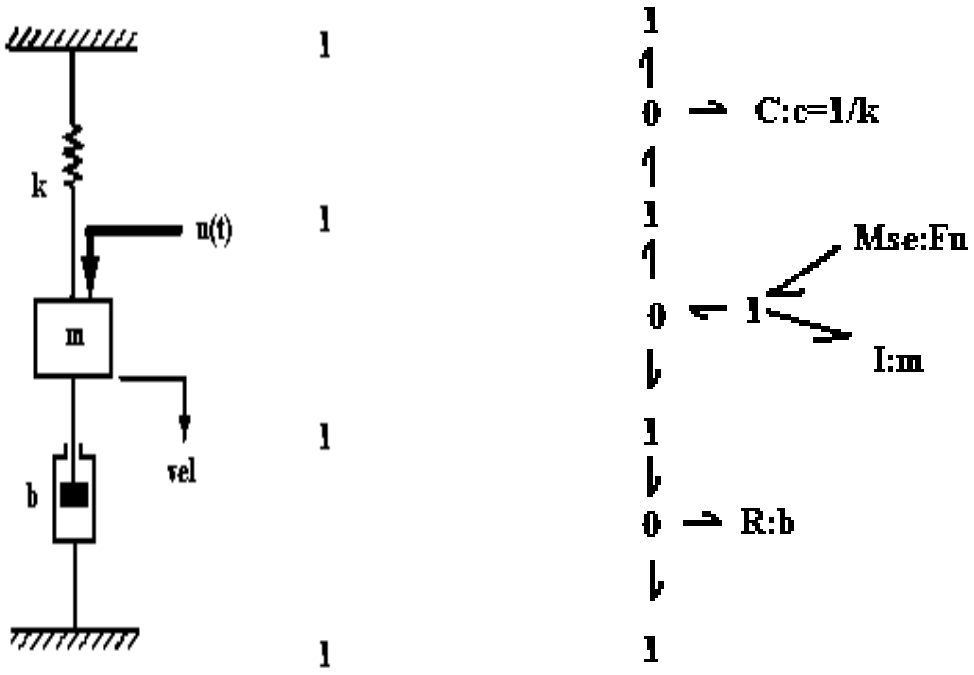


Figura 2.24. Representación de un sistema mecánico en Bond-Graph.

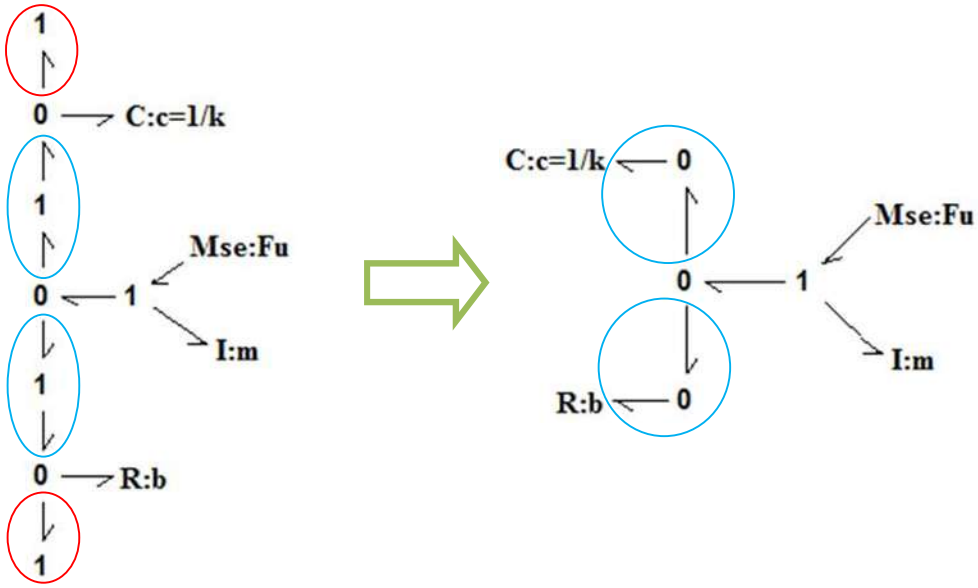


Figura 2.25. Aplicación de los pasos de simplificación.

La representación final se presenta en la figura 2.26 del bond Graph acausal.

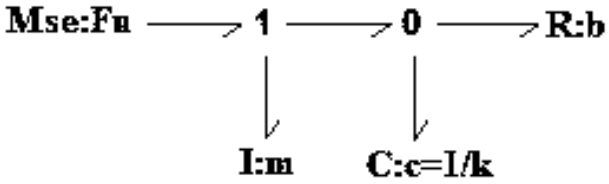


Figura 2.26. Representación final del sistema mecánico.

Finalmente, la adición de la causalidad de los elementos se muestra en la figura 2.27.

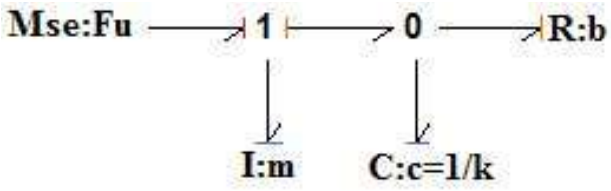


Figura 2.27. Bond-Graph de sistema mecánico con causalidad definida.

c) Ejemplo de un Sistema Hidráulico.

El procedimiento de modelado para un sistema hidráulico sólo se realizan los siguientes cambios:

- En el paso 1, a cada cambio de presión se le asigna una unión-0.
- En el paso 2, insertar los elementos entre el par apropiado de uniones-0 usando uniones-1, añadiendo fuentes de presión y flujo.
- En el paso 4, definir todas las presiones relativas a una presión de referencia (comúnmente la atmosférica), y eliminando la unión-0 de referencia y sus bonds.

A continuación se muestra en la figura 2.28 la aplicación de este procedimiento a un ejemplo.

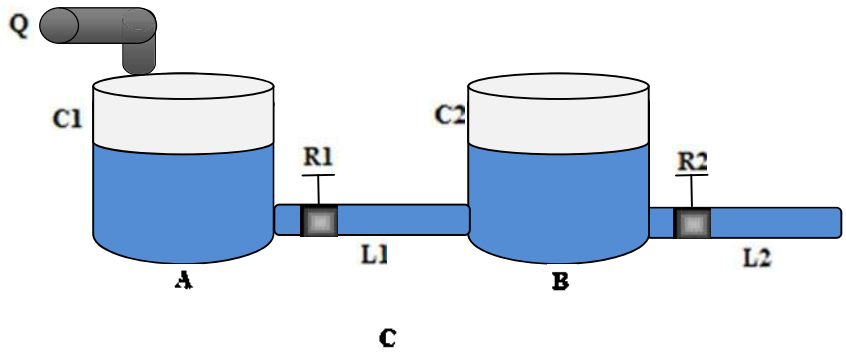


Figura 2.28. Representación grafica de un sistema hidráulico.

Para el paso 1 se denominó que los cambios de presión se realizan en las puntos A y B, y para el paso numero 4 se denominó que la presión de referencia (presión atmosférica) será el punto C.

Cabe mencionar que los elementos L1 y R1, así como, L2 y R2 se encuentran unidos en serie por lo cual se unen en una sola unión-1.

Avanzando hasta el paso 3 obtenemos, la figura 2.29.

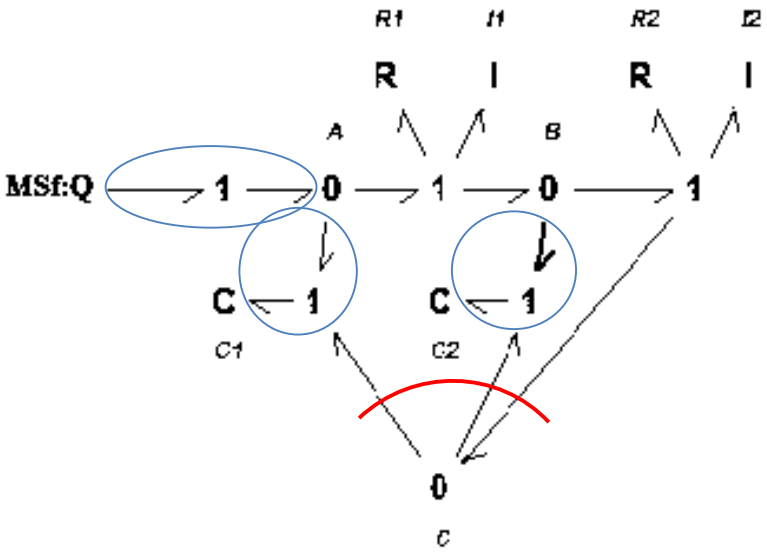


Figura 2.29. Bond Graph del sistema hidráulico identificado para su reducción.

Eliminando la unión-0 de referencia como se hace notar en la figura anterior y simplificando el sistema reducido se ilustra en la figura 2.30.

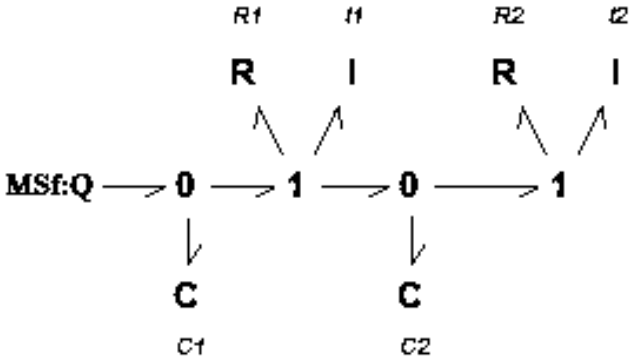


Figura 2.30. Bond Graph de un sistema hidráulico reducido.

y aplicando causalidad integral, se muestra el Bond Graph causal en la figura 2.31.

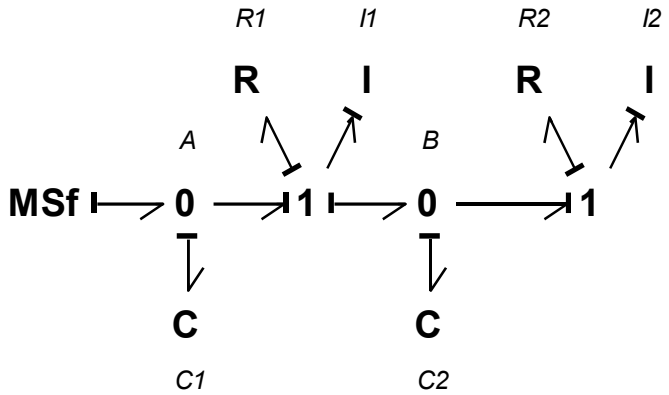


Figura 2.31. Bond Graph del sistema hidráulico con causalidad integral.

Capítulo 3

Controlabilidad y Observabilidad

El pionero R. Kalman en el año de 1960 introdujo los conceptos de controlabilidad y de observabilidad, que juegan un papel fundamental en el diseño de los sistemas de control usando las técnicas de espacio de estados. En efecto, las condiciones de controlabilidad y de observabilidad determinan la existencia de una solución completa para el problema del diseño de un sistema de control. Tal vez no exista una solución a este problema si el sistema estudiado es no controlable.

3.1 Conceptos de Controlabilidad y Observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad afrontan respectivamente la relación que existe entre la entrada y el estado, y entre el estado y la salida.

La determinación de estas características es de importancia ya que el crear un control sin determinar la controlabilidad del sistema no garantiza que este actúe de forma adecuada sobre el sistema, esto es de igual manera para los observadores ya que si no se determina la observabilidad no se garantiza que el observador recreará el sistema correctamente.

Estas características del sistema pueden ser determinadas mediante las propiedades de las matrices A, B, C y D, ya que las matrices A y B tienen que ver con la relación entre entrada y estado, a este par de matrices se las conoce como el par de controlabilidad. En cambio, como las matrices A y C involucran el estado con la salida, a estas dos matrices se las conoce como el par de observabilidad.

3.1.1. Controlabilidad

Un sistema se dice que es completamente controlable si es posible encontrar una entrada que transfiere el sistema de cualquier estado inicial a cualquier estado final en un tiempo finito. Si cualquiera de las variables de estado no puede ser controlada por el control , entonces el sistema es no controlable. Para determinar si un sistema es controlable se puede utilizar el modelo de la planta y la matriz de controlabilidad.

Para estar en la capacidad de determinar la controlabilidad, sin importar la selección de las variables de estado, se puede deducir una matriz que debe tener una propiedad particular si todas las variables se van a controlar por la entrada de la planta, *u*. A continuación se muestran los requisitos para la controlabilidad, que incluye la forma, propiedad y nombre de esta matriz [7].

Tomando en cuenta una planta de *n*-ésimo orden cuya ecuación de estado es

(3.1)

y es completamente controlable si la matriz

(3.2)

es de rango *n*, donde *n* es la dimensión u orden del sistema y se llama *matriz de controlabilidad*.

El rango de es igual al número de filas o columnas linealmente independientes. El rango se puede hallar al encontrar la submatriz cuadrada del orden más alto que sea no singular. Determinado el rango de , y si este es igual al orden del sistema, se dice que el sistema es controlable.

3.1.2. Observabilidad

Un sistema es completamente observable si el estado puede ser determinado a partir del conocimiento de la entrada y la salida sobre un intervalo de tiempo finito. De manera más sencilla, es la capacidad de deducir las variables de estado a partir del conocimiento de la entrada, , y la salida, .

De nuevo, y al igual que la controlabilidad, para los sistemas bajo cualquier selección de variables de estado, se puede deducir una matriz que debe tener una propiedad particular si es que todas las variables de estado se van a observar a la salida. A continuación expresamos los requisitos para la observabilidad.

Una planta de orden *n* cuyas ecuaciones de estado y de salida son, respectivamente,

(3.3)

(3.4)

este es completamente observable si la matriz

(3.5)

es de rango *n*, donde *n* es la dimensión u orden del sistema y se llama *matriz de observabilidad* [7].

Si la matriz es no singular o el rango de es igual a *n* se concluye que el sistema es observable.

A continuación, en la figura 3.1 se presentan las formas de obtener la controlabilidad y observabilidad a partir del modelado de Bond Graph y añadiendo el método tradicional.

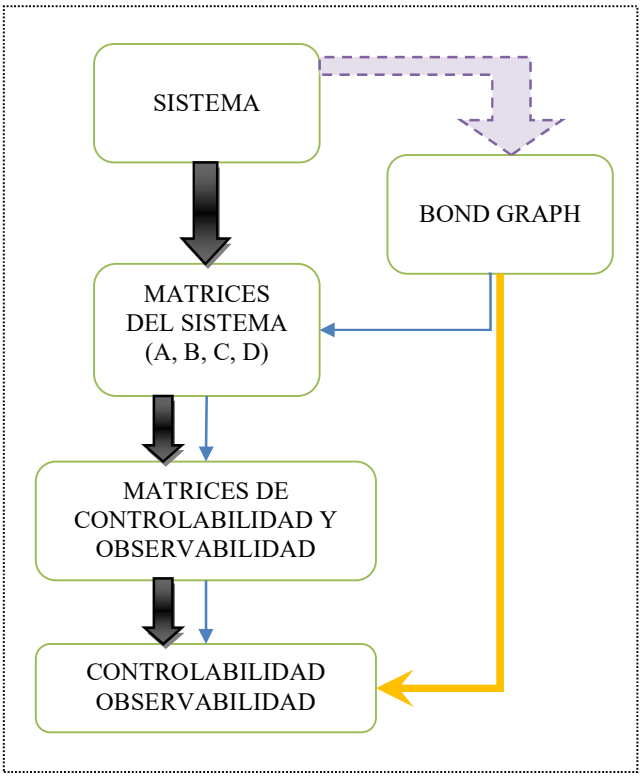


Figura. 3.1. Diagrama de determinación de controlabilidad y observabilidad.

En la figura 3.2, se muestra la relación de colores de la figura 3.1.

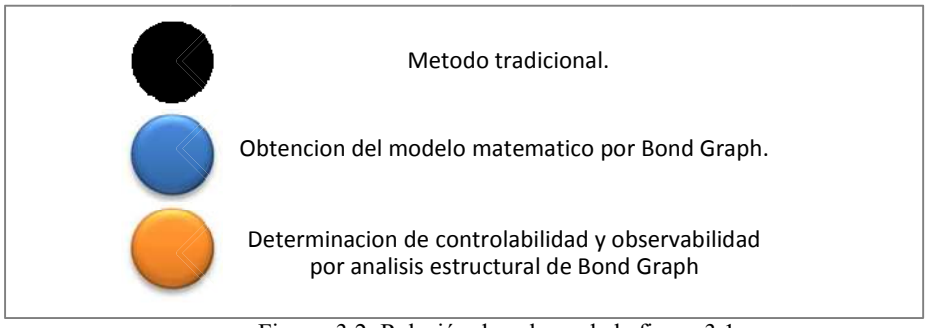


Figura. 3.2. Relación de colores de la figura 3.1.

3.2 Modelo matemático derivado de Bond Graph

El Bond Graph de un sistema dinámico físico se sitúa como un intermediario entre el esquema físico y los modelos matemáticos asociados al sistema. La causalidad del Bond Graph permite escribir de una forma muy estructurada las relaciones que caracterizan la evolución dinámica del sistema y combinar las ecuaciones diferenciales y algebraicas [Dauphin-Tanguy, 2000].

3.2.1. Vectores clave

En un Bond Graph, los bonds pueden ser clasificados como externos e internos. En la Figura 3.3 se muestra un diagrama para la identificación de los vectores clave de las variables en Bond Graph

En la Figura 3.3, los vectores clave están formados de la siguiente manera: S_e, S_f se refiere a las fuentes; C e I es el campo de elementos almacenadores de energía; R es el campo de elementos resistivos o disipadores; el conjunto de elementos de unión está formado por los elementos, 0, 1, TF y GY.

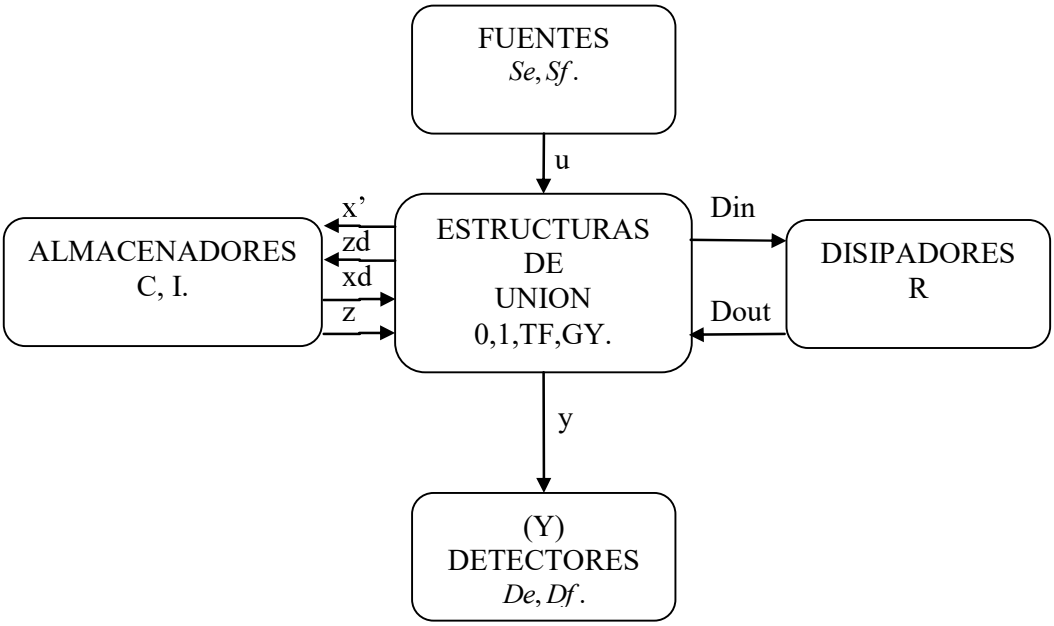


Figura 3.3. Vectores clave

3.2.2. Relaciones Constitutivas y Ecuación de Estado

Las relaciones no lineales de la Figura 3.3 de almacenamiento y de disipación son:

(3.6)

(3.7)

(3.8)

donde,

F es una función que relaciona cada z_i con x_i para i=1,…, n:
Fd es una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para i=1,…, m:
L es una función que relaciona cada D_{outi} con D_{ini} para i=1,…, r:

Cada elemento está descrito por una ley física o relación constitutiva. Generalmente las relaciones constitutivas son lineales y son:

(3.9)

(3.10)

(3.11)

donde L, F, F_d son matrices reales de dimensiones , y respectivamente.
El modelo matemático de un Bond Graph se obtiene a través de la relaciones de la estructura unión, las cuales están dadas por (3.12) y (3.13).

(3.12)

(3.13)

En (3.12), S es la matriz de estructura unión y está definida por (3.14)

(3.14)

La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. En el caso de que el sistema analizado sea un sistema conservativo de energía, las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

1) S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas
2) S_{12} es la transpuesta negativa de S_{21}.

Un sistema LTI MIMO en espacio de estado está dado por (3.15).
Relacionando (3.12) y (3.13) con (3.15) obtenemos (3.16)-(3.19).

(3.15)

(3.16)

(3.17)

(3.18)

(3.19)

donde,

(3.20)

(3.21)

Así las ecuaciones (3.15) a (3.21) permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación de Bond Graph.

3.3. Ejemplos de determinación de controlabilidad y observabilidad a partir del modelo de Bond Graph

3.3.1. Ejemplo de circuito eléctrico

Tomando como punto de partida el Bond Graph del circuito eléctrico de la figura 2.22 ya mencionado, procederemos a encontrar las matrices de estado (A, B, C, D) de este sistema de la siguiente manera:

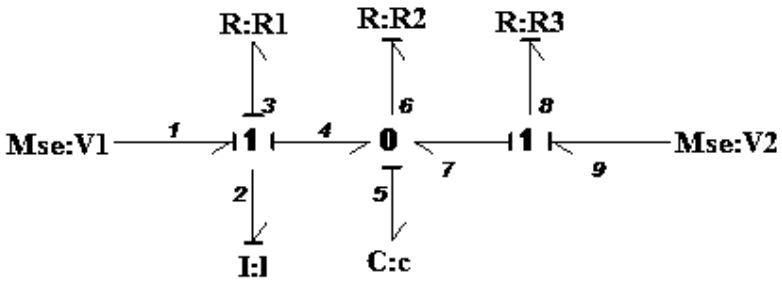


Figura 3.4. Bond Graph de un sistema eléctrico con cada bond numerado.

El siguiente paso es encontrar sus vectores clave y relaciones constitutivas:

Vectores clave

Relaciones Constitutivas

De la ecuación (3.11) la incógnita L tiene que ser definida a partir de Din y Dout las cuales ya han sido obtenidas.

Por lo anterior la ecuación queda:

(3.22)

Siguiendo el paso anterior determinamos F de la ecuación (3.9):

(3.23)

A continuación tomaremos la matriz de estructura unión ecuación (3.12) y procederemos a completarla. La consecuencia de no tener elementos de almacenamiento de energía en causalidad derivativa modifica la ecuación (3.12), la cual queda:

(3.24)

Completando la matriz anterior:

(3.25)

Cada uno de los dígitos descritos dentro de cada matriz son definidos a partir de las siguientes definiciones:

Tenemos

Entonces

Si

Se deduce que:

Como se hace ver en la primera fila de la matriz anterior. Así se procede a llenar la matriz S.

Tenemos

También

y

por último

Haciendo constatar las propiedades de las matrices de este capítulo tenemos:

1) S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas. (antisimétricas si es una matriz cuadrada y para todo)

2) S_{12} es la transpuesta negativa de S_{21}.

A continuación se procede a encontrar las variables de estado a partir de las ecuaciones (3.16) a (3.21) las cuales a consecuencia de no tener elementos en causalidad derivativa quedan de la siguiente forma:

(3.26)

(3.27)

(3.28)

(3.29)

(3.30)

Donde la ec.(3.26) queda:

Ahora la ec.(3.27):

y queda:

(3.31)

Realizando la sustitución de la ecuación 3.28 a la 3.30:

(3.32)

(3.33)

Así, las ecuaciones de estado (ec.3.15) quedan de la siguiente manera:

(3.34)

(3.35)

A partir de lo encontrado anteriormente se deduce la controlabilidad y la observabilidad utilizando la ec.(3.2).

Para la controlabilidad tenemos que n=2 ya que el orden del sistema es 2:

(3.36)

Con esto sólo queda determinar si esta matriz es no singular o que su rango sea igual al orden del sistema, y para esto tenemos varias formar de realizarlo ya sea de manera tradicional o utilizando programas de software como lo es Matlab[8].

(3.37)

Si se encuentra que el determinante de la matriz de controlabilidad es diferente de cero se indica que la matriz es no singular y así el sistema es controlable.

Para determinar la observabilidad se utilizará la ec.(3.5) vista con anterioridad.

n=2;

(3.38)

Con esto al encontrar el determinante de la matriz de observabilidad y a la vez este sea diferente de 0, con esto se define que la matriz es no singular y a su vez el sistema es observable.

(3.39)

3.3.2. Ejemplo de sistema mecánico.

Utilizando el sistema visto en la figura 2.26 se determinan la controlabilidad y observabilidad del mismo.

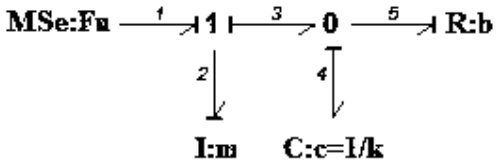


Figura 3.5. Bond Graph de un sistema mecánico con bonds numerados.

Vectores clave

Relaciones constitutivas

(3.40)

(3.41)

Matriz de estructura unión

(3.42)

1) S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

2) S_{12} es la transpuesta negativa de S_{21}.

A continuación encontraremos las variables de estado a partir de las ecuaciones (3.26) a (3.30) lo cual dio como resultado:

(3.43)

(3.44)

(3.45)

(3.46)

(3.47)

y las ecuaciones de estado quedan de la siguiente forma:

(3.48)

(3.49)

A continuación se definen las matrices de controlabilidad y observabilidad.

(3.50)

(3.51)

3.3.3. Ejemplo de sistema hidráulico.

Tomando el ejemplo anterior del capítulo 2 representado en la figura 2.27.

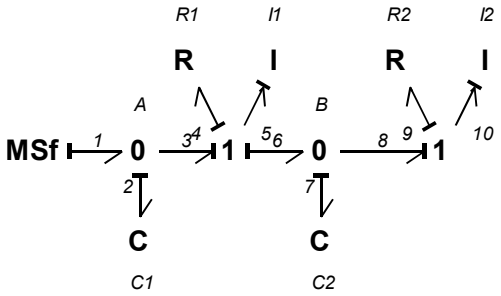


Figura 3.6. Bond Graph de un sistema hidráulico con numeración de bonds.

Vectores clave

Relaciones constitutivas

(3.52)

(3.53)

Matriz de estructura unión

(3.54)

Cabe mencionar que la matriz anterior cumple con las dos condiciones que son:

1) S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
2) S_{12} es la transpuesta negativa de S_{21}.

A continuación se determinan las variables de estado a partir de las ecuaciones ya mencionadas y estas dan como resultado:

(3.55)

(3.56)

(3.57)

(3.58)

y las ecuaciones de estado quedan de la siguiente forma:

(3.59)

(3.60)

A continuación definimos las matrices de controlabilidad y observabilidad haciendo mención de que el grado del sistema es 4 esto quiere decir que n=4.

(3.61)

y el determinante de es:

(3.62)

(3.63)

El determinante resultante de resulta:

(3.64)

Capitulo 4

Aplicación en sistemas de análisis estructural

Las propiedades estructurales de un sistema son propiedades que dependen de la arquitectura del modelo.

El estudio de las propiedades de controlabilidad y observabilidad de sistemas LTI MIMO se hizo anteriormente con un enfoque de variables de estado.

A continuación se presenta un método que utiliza la metodología de Bond Graph para obtener la información sobre la capacidad de controlabilidad y observabilidad estructural de un sistema.

4.1 Definición de trayectorias causales

Un Bond Graph no solamente muestra la estructura topológica de un sistema sino también su organización causal, ya que indica las relaciones de causa y efecto, esta estructura causal da la noción de trayectoria causal que se define a continuación:

Una trayectoria causal de una estructura de unión es una secuencia de nodos y uniones los cuales:

a) Si el gráfico no tiene asignada la causalidad a sus elementos y bonds, esta secuencia debe formar una cadena sencilla.

b) Todos los nodos en la cadena deben tener una completa y correcta asignación de causalidad y cumpliendo con el procedimiento mencionado en el capítulo 2.

c) Dos bonds de una trayectoria causal tienen en el mismo nodo orientaciones causales opuestas

Las trayectorias causales son divididas en dos diferentes tipos:

1) *Trayectoria causal simple*, se tiene si a través de la misma se sigue una sola variable.

2) *Trayectoria causal mezclada*, es llamada así, si un cambio de variable es requerido a través de la secuencia causal. Este tipo de trayectorias se divide en directa e indirecta.

   a) La *trayectoria causal mezclada directa* se lleva a cabo si el cambio en la variable se debe a la presencia de un elemento GY (girador).

   b) La *trayectoria causal mezclada indirecta* se define cuando la trayectoria realiza el cambio de variable pasando a través de algún elemento R,I o C.

Cada una de estas trayectorias son ilustradas en la figura 4.1.

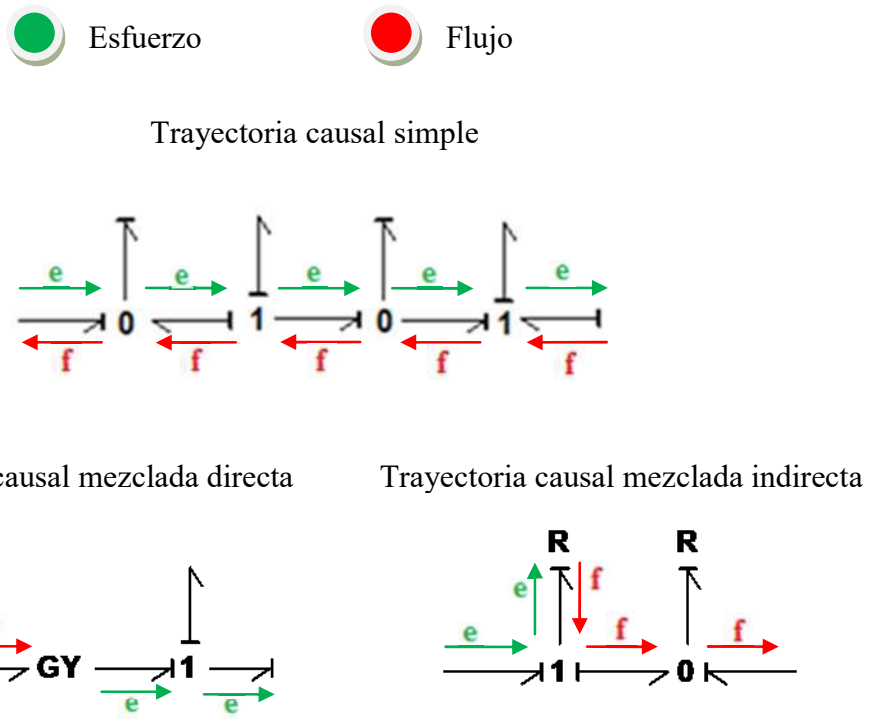


Figura 4.1. Definición de trayectorias causales.

4.2 Determinación de controlabilidad y observabilidad estructural

La determinación de la cantidad, el tipo y la localización de los elementos en un modelo de Bond Graph está directamente relacionada al análisis de las propiedades de controlabilidad y observabilidad.

En capítulos anteriores se mencionó la forma clásica de determinar la controlabilidad y observabilidad de un sistema mediante el modelo matemático, sin importar que este se realice con la asistencia de la metodología de Bond Graph, en ambos casos se requiere calcular el rango numérico de la matriz de controlabilidad y observabilidad .

Cuando se utiliza el rango estructural el rango de estas matrices no depende de los valores numéricos de los parámetros y es consecuentemente robusto.

A partir de un modelo de Bond Graph se definirá si un sistema es estructuralmente controlable u observable con sólo satisfacer las dos condiciones presentadas a continuación:

1. Todos los elementos I y C en causalidad integral en el Bond Graph Integral (BGI), son capaces de adoptar una causalidad derivativa para así construir un Bond Graph Derivativo (BGD). Esta condición corresponde a la determinación del rango estructural de la matriz compuesta de la matriz A concatenada con la matriz B.

2. Existe al menos una trayectoria causal a cada elemento I y C en causalidad integral desde las fuentes y en el BGI. Esta es la condición de posibilidad de realización de la Teoría de Grafos [29]

En la siguiente sección se mostrarán algunos ejemplos de cómo se realiza el procedimiento dado a conocer.

4.3 Ejemplos del empleo del análisis estructural

Comenzamos con los ejemplos utilizados en los anteriores capítulos para posteriormente proseguir con un ejemplo de sistemas más complejos.

4.3.1. Ejemplo de circuito eléctrico

A continuación se utiliza el ejemplo presentado en la fig.2.13 y su representación en el modelado de Bond Graph Integral (fig.3.4), con la finalidad de determinar la observabilidad y controlabilidad del sistema.

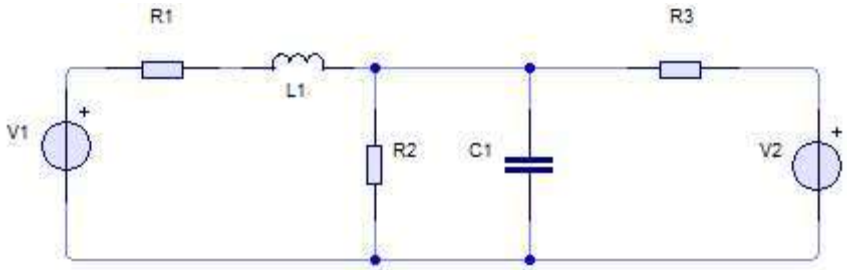


Figura 4.2. Circuito eléctrico.

La representación del BGI del sistema anterior se ilustra en la figura 4.3.

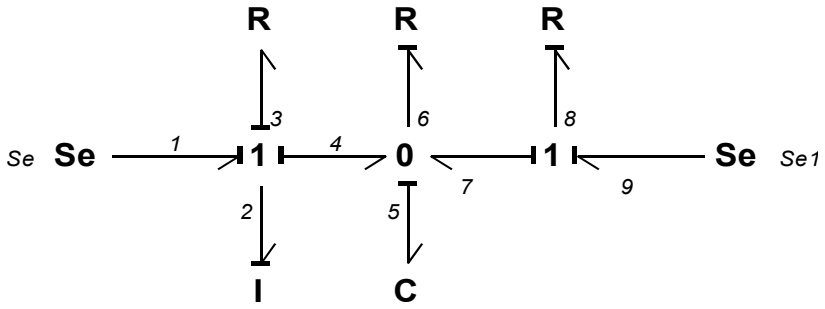


Figura 4.3. BGI del circuito eléctrico.

A continuación, en la figura 4.4 se muestra el BGD del sistema anterior.

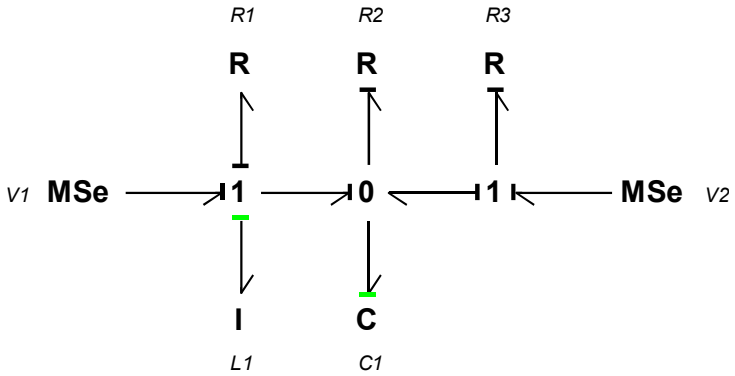


Figura 4.4. Bond Graph Derivativo de un sistema eléctrico.

Se puede observar que los dos elementos de almacenamiento L1 y C1 tienen causalidad derivativa en el BGD, por lo que se ha cumplido la primera condición de determinación de controlabilidad y observabilidad estructural mencionada en la anterior sección.

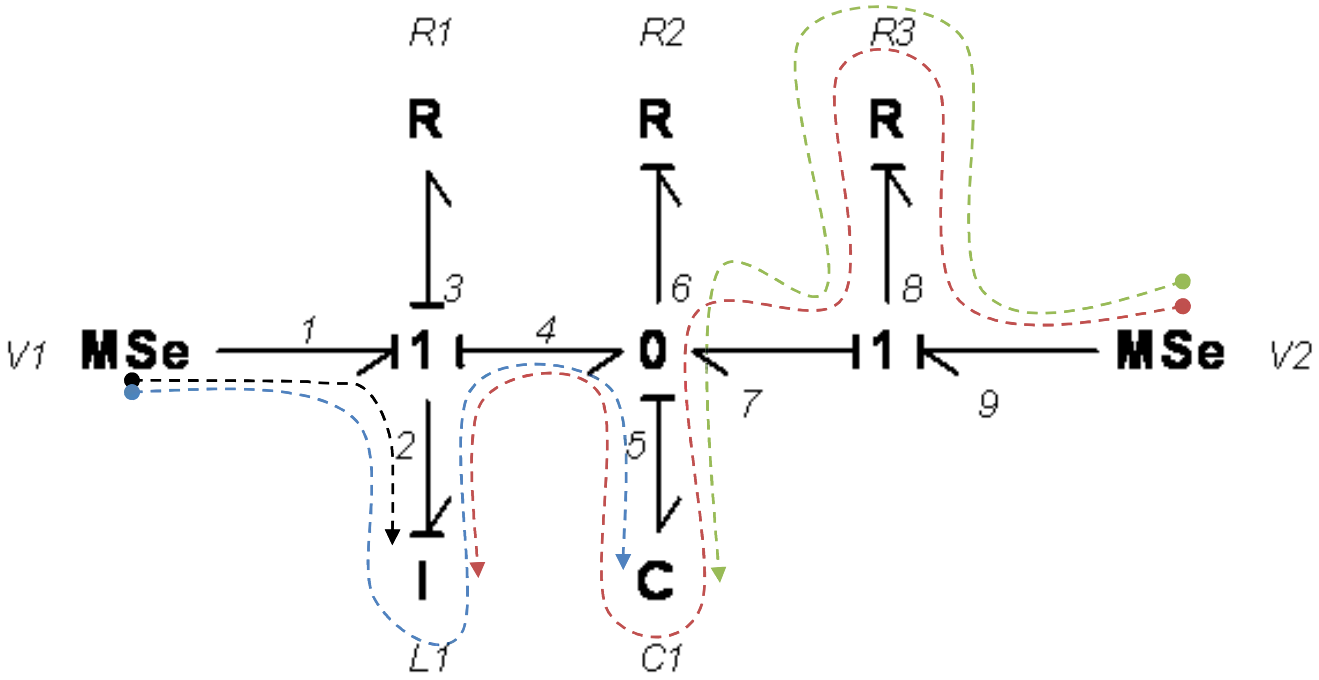


Figura 4.5. Determinación de trazos causales en el BGI de la figura 3.4.

Del gráfico de la figura 4.5 se deriva una forma más sencilla de representar las trayectorias causales que se determinan por la figura 4.6.

Figura 4.6. Listado de trazos causales.

La representación anterior se logra sólo con hacer mención de la fuente a la que se está refiriendo y posteriormente se coloca al elemento que se desea llegar por medio de la trayectoria causal y a partir de los bonds utilizados sólo se menciona el orden correspondiente en el que fueron utilizados.

Al cumplir con la segunda condición para que el sistema sea estructuralmente controlable y observable sólo queda hacer mención de los resultados del capítulo anterior que determinaron que el sistema aquí visto es controlable y observable, como lo son la ec.(3.36) y ec. (3.37) mostradas a continuación.

Además las ec. (3.38) y ec. (3.39)

Es importante mencionar que se cuenta con una herramienta computacional llamada 20-SIM con la cual se puede observar el comportamiento de cada una de las variables, proporcionando valores a cada uno de los elementos, y visualizándolo en forma de gráfico.

Para este primer ejemplo se consideran los valores de los elementos, utilizando valores conocidos, de la siguiente forma:

- V1=10 volts.
- V2=10 volts.
- R1, R2 y R3=1KΩ.
- C1=1μf.
- L1=1mH.

En la figura 4.7 se ilustra el comportamiento de las variables de cada uno de los elementos que almacenan energía y como se estabilizan en un tiempo finito.

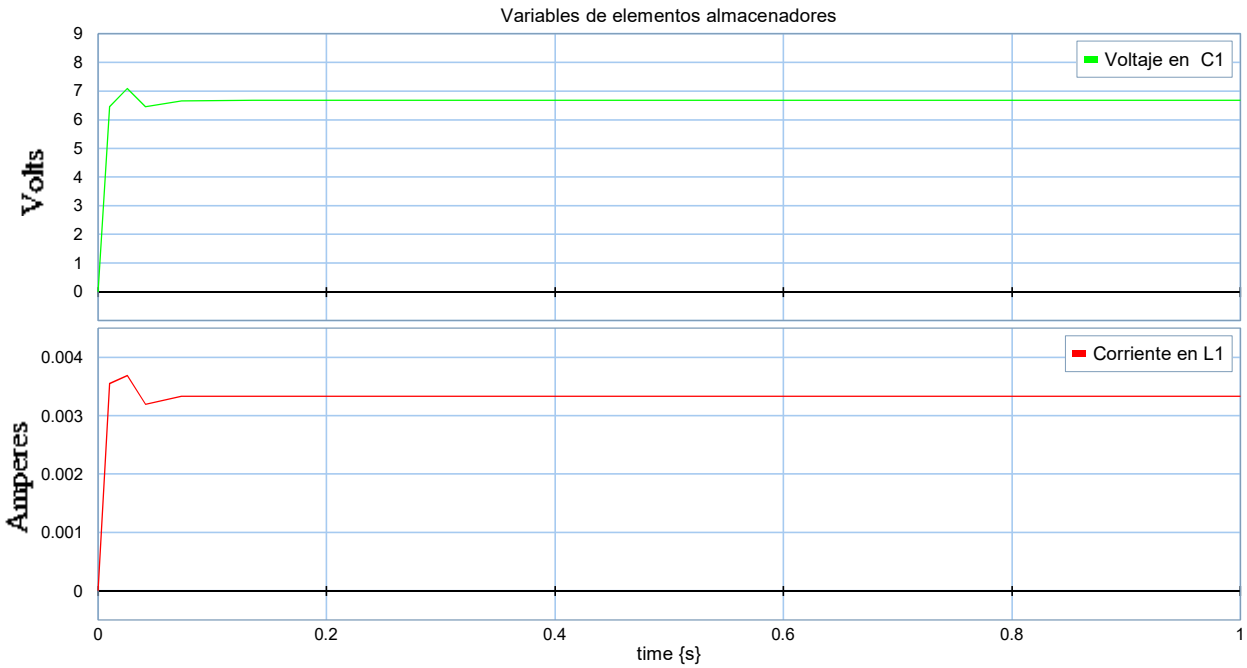


Figura 4.7. Comportamiento del voltaje en el capacitor y corriente en el inductor.

Se dice que el sistema es completamente controlable si cada variable de estado del proceso se puede controlar para llegar a un cierto objetivo en un tiempo finito, a través de algún control no restringido.

En forma intuitiva, es sencillo entender que si una de las variables de estado es independiente del control, no habría forma de dirigir esta variable de estado en particular, al valor deseado en un tiempo finito por medio del control. Por tanto, se dice que el sistema no es controlable.

Así variando las fuentes de entrada ahora a valores diferentes como
y se tiene el resultado de la figura 4.8.

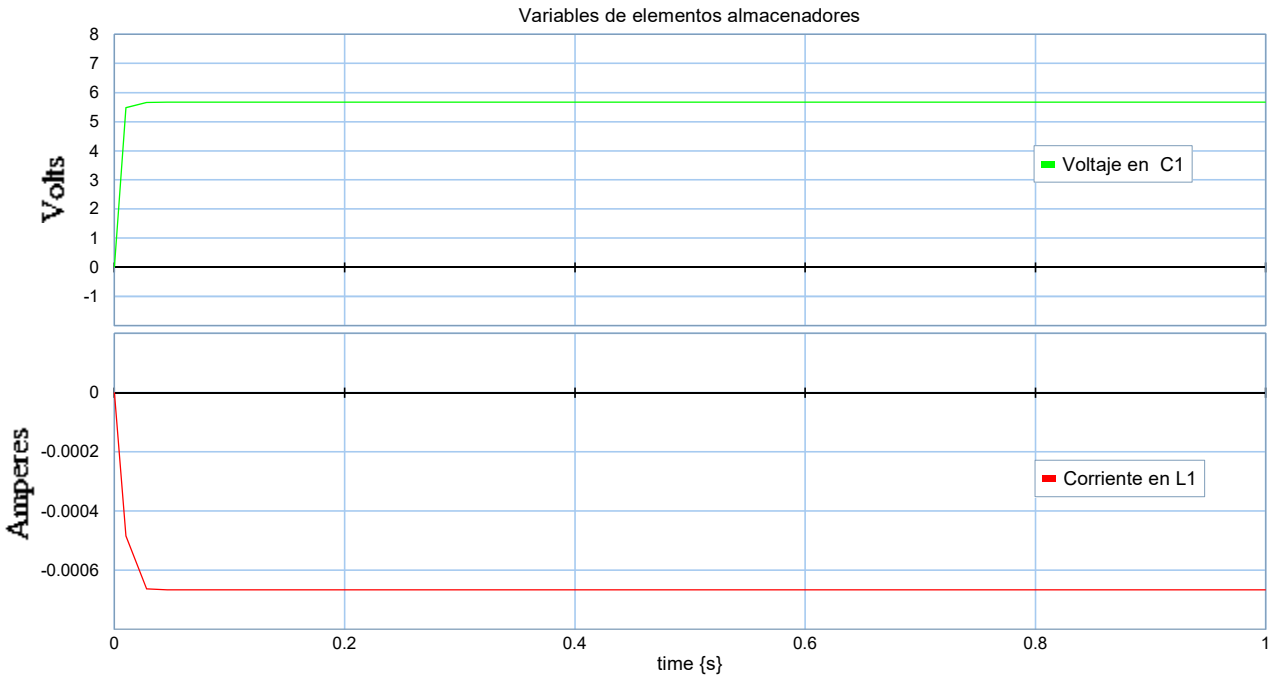


Figura 4.8. Variables estabilizadas en un solo valor en un tiempo finito.

Una de las características que no han sido mencionadas en esta sección es determinar qué elementos repercuten en el comportamiento de las variables.

Como se puede apreciar en la figura 4.5, el comportamiento de L1 es dependiente no sólo de las fuentes de entrada, sino que también está ligado a R3 y C1 a continuación se modifican los valores a estos elementos y se podrá apreciar el cambio en la figura 4.9.

- R3=10KΩ.
- C1=1mf.

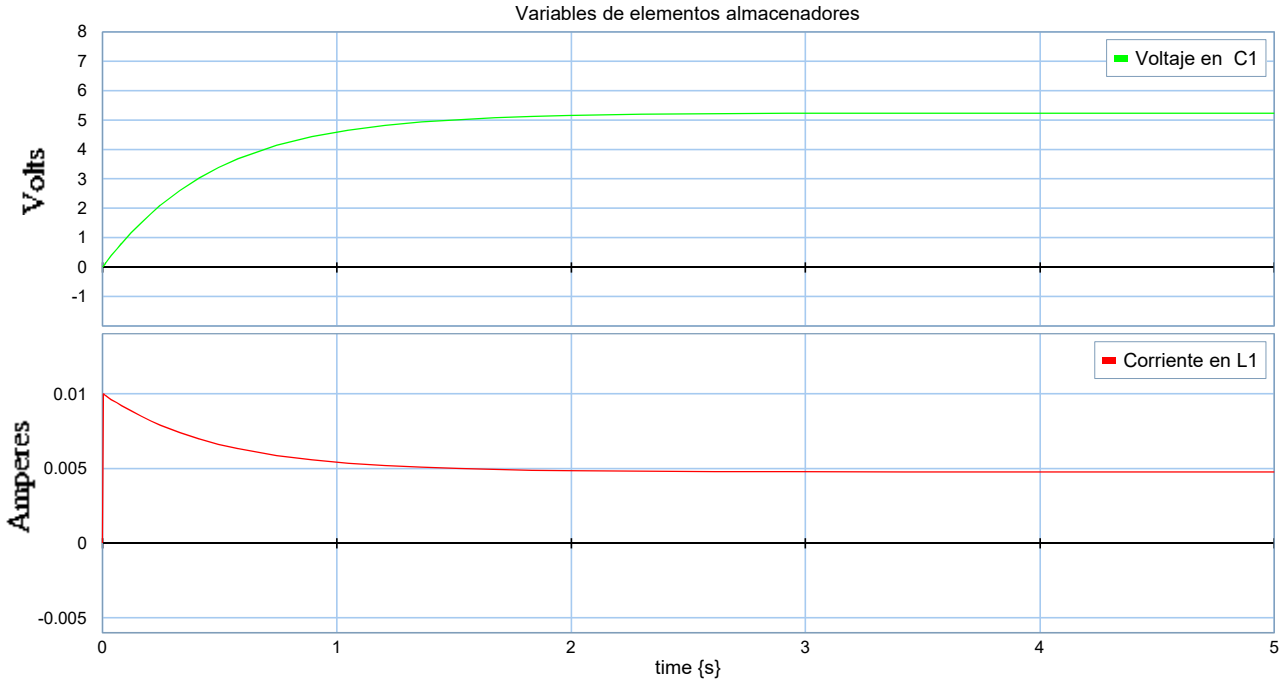


Figura 4.9. Cambio en la corriente de L1 solo modificando C1 y R3.

Ahora se procede a mostrar los mismos resultados para los ejemplos restantes utilizados en el capítulo dos.

4.3.2. Ejemplo de sistema mecánico

Este sistema ilustrado en la figura 2.23, que vemos a continuación en la figura 4.10

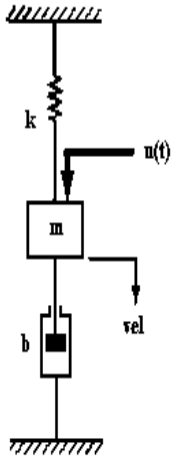


Figura 4.10. Sistema mecánico.

y su representación en Bond Graph definida en la figura 3.5, se muestra nuevamente en la figura 4.11

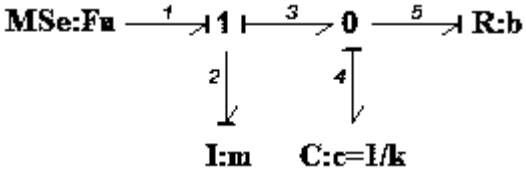


Figura 4.11. BGI del sistema mecánico.

- Condición 1: determinar BGD, este se ilustra en la figura 4.12.

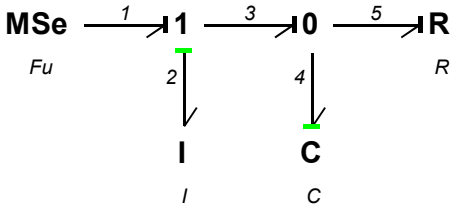


Figura 4.12. BGD del sistema mecánico.

- Condición 2: encontrar cada uno de los trazos causales que se describen en la figura 4.13

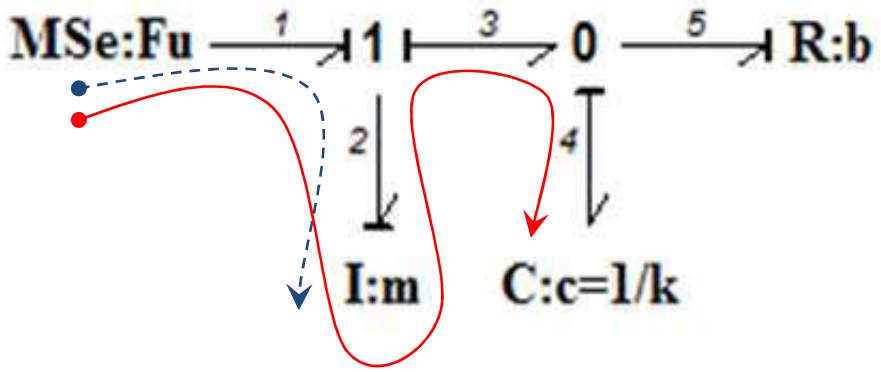


Figura 4.13. Determinación de trazos causales en el sistema mecánico.

El conjunto de trazos causales se muestran en la figura 4.14.

MSe: Fu

I (1, 2).

C (1, 2, 2, 3, 4).

Figura 4.14. Listado de trazos causales.

Al cumplir las dos condiciones se concluye que el sistema es estructuralmente controlable y observable.

La comprobación de este hecho son las matrices y definidas en las ecuaciones (3.50) y (3.51).

A continuación se mostrara el comportamiento de las variables con 20-SIM. Asignando valores a los elementos son:

- Fu=10 .
- R= 10 .
- C= 1 .
- I= 100 .

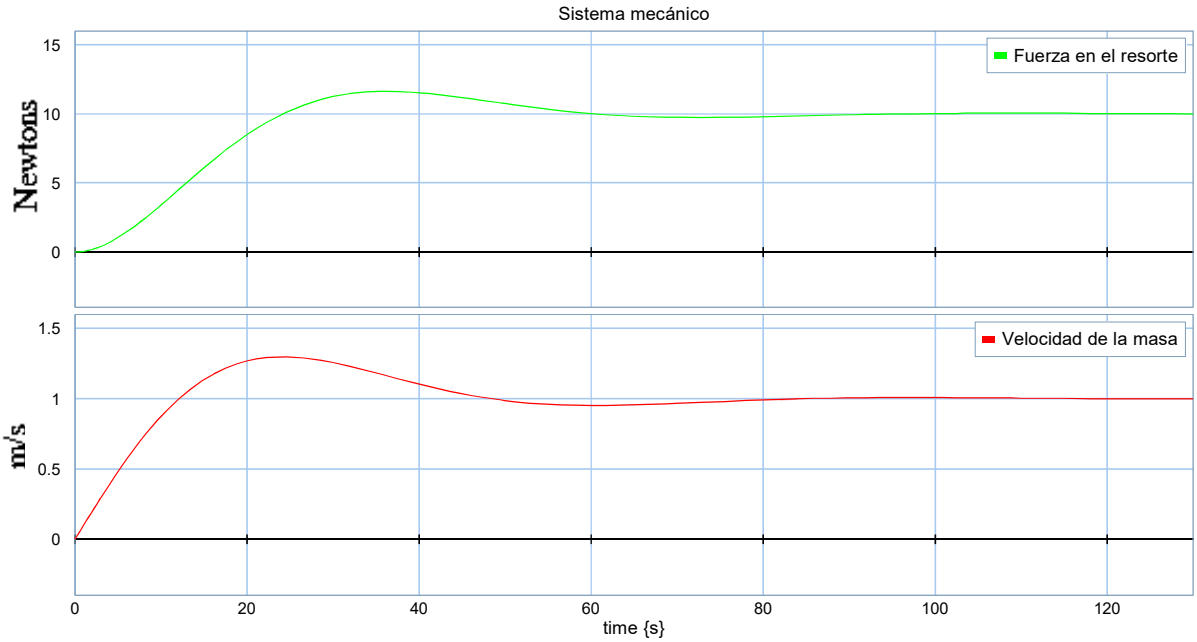


Figura 4.15. Comportamiento de las variables del sistema mecánico.

Como se puede observar en la figura 4.15, el comportamiento del resorte no sólo depende de la fuente de fuerza si no también del la masa.

4.3.3. Ejemplo de sistema hidráulico

El ejemplo a utilizar es el mencionado en la figura 2.27, que se ilustra nuevamente en la figura 4.16.

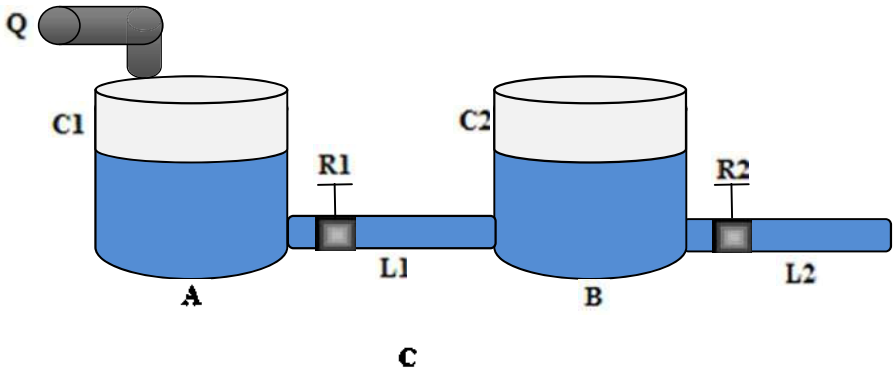


Figura 4.16 Sistema Hidráulico.

El Bond Graph Integral es mostrado en la figura 4.17.

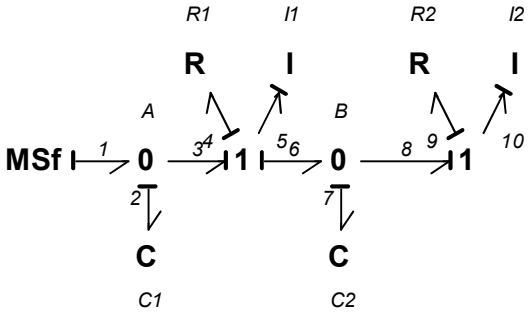


Figura 4.17. BGI del sistema hidráulico.

- Condición 1: determinar si es posible el BGD del sistema, la cual se cumple y se muestra en la figura 4.18.

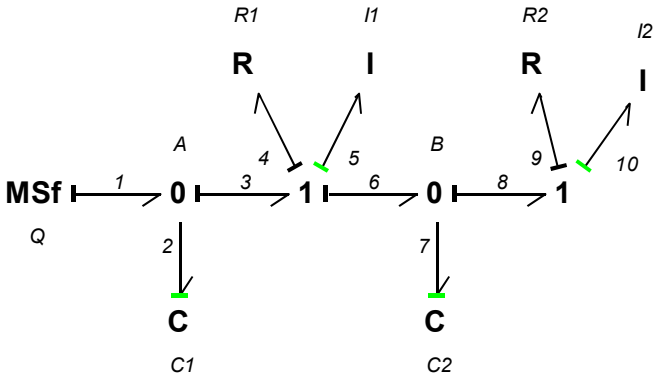
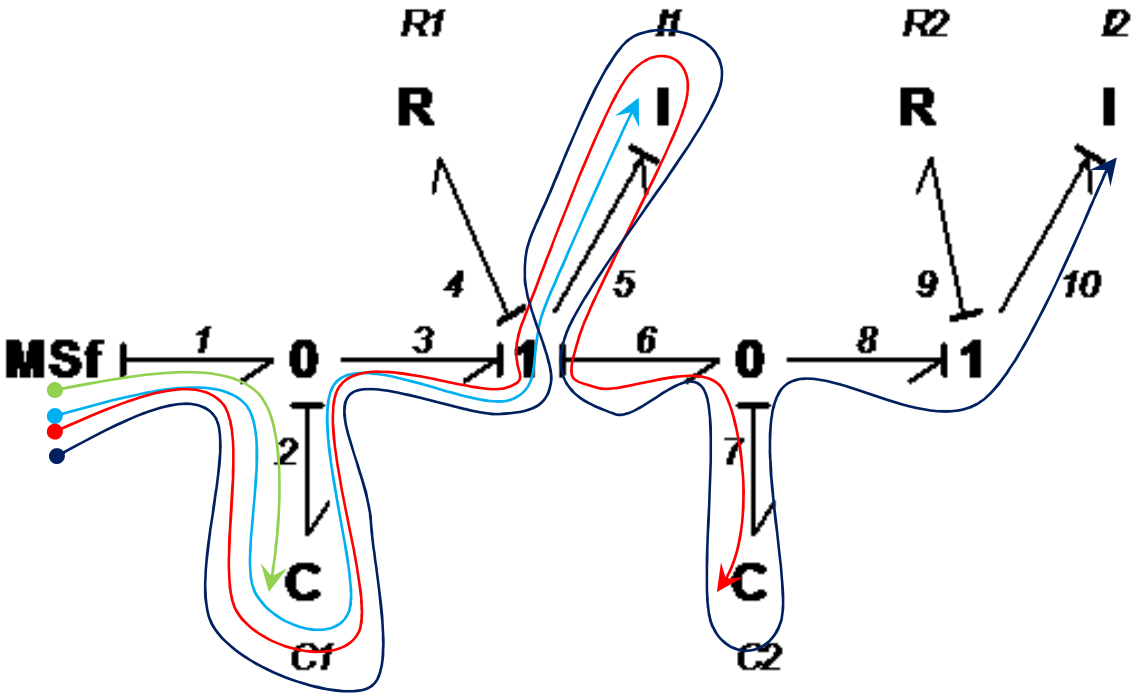


Figura 4.18. BGD de un sistema hidráulico.

- Condición 2: encontrar al menos una trayectoria causal de cada fuente a cada elemento I y C, también se cumple esta condición y se ilustran las trayectorias causales en la figura 4.19.



MSe: Fu

C1 (1, 2).

C2 (1, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 7).

L1 (1, 2, 2, 3, 5).

L2 (1, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 10).

Figura 4.19. Grafica y listado de trazos causales de un sistema hidráulico.

Esto comprueba lo determinado en el capítulo tres en las matrices y definidas para este sistema en las ecuaciones (3.61) y (3.63) y sus determinantes en las ecuaciones (3.62) y (3.64).

Su comportamiento en forma gráfica es ilustrado en la figura 4.20, con elementos que tienen los siguientes valores:

- Q=1 .
- R1= 2 .
- R2= 2 .
- C1= 10 .
- C2= 10 .
- L1= 1 .
- L2= 1 .

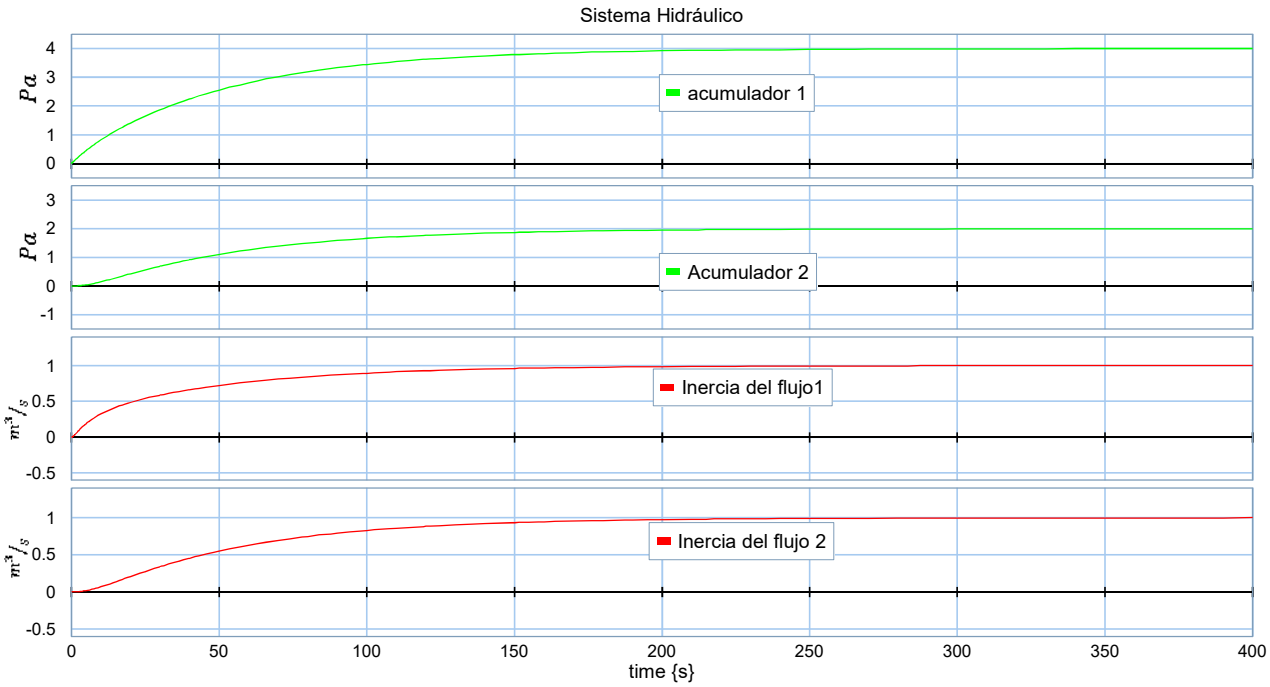


Figura4.20. Grafica de variables del sistema hidráulico.

Ya terminado de realizar su análisis estructural a los ejemplos ya definidos en capítulos anteriores ahora se procederá a presentar algunos ejemplos con un mayor grado de dificultad.

4.4. Ejemplo de sistema eléctrico de orden cinco

En la figura 4.21 se muestra un circuito eléctrico, el cual es de orden cinco y se propone determinar la controlabilidad estructural.

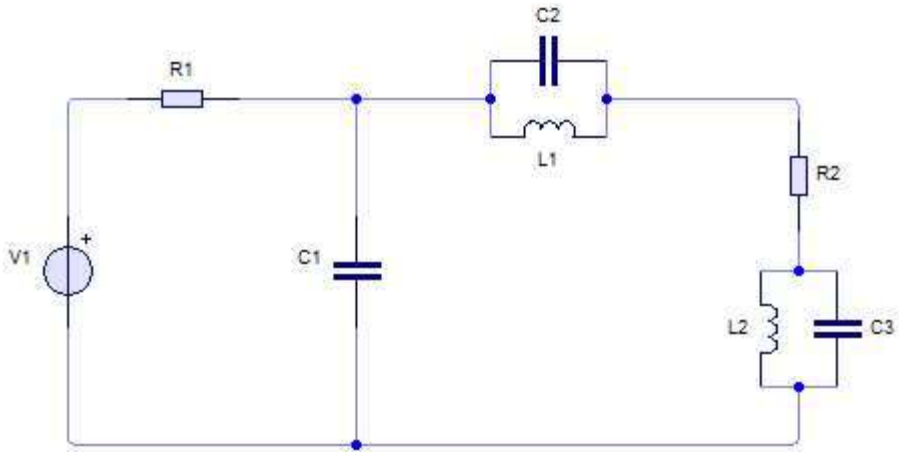


Figura 4.21. Sistema eléctrico con cinco elementos almacenadores de energía.

Su Bond Graph Integral se muestra en la figura 4.22.

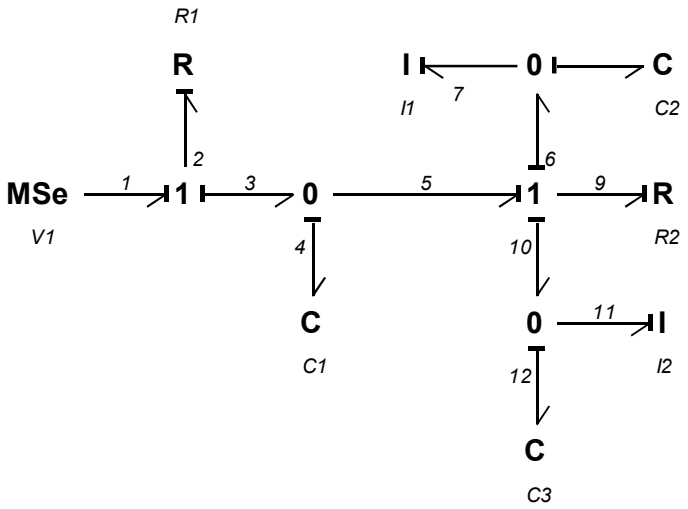


Figura 4.22. BGI de un sistema eléctrico de orden cinco.

- Condición 1: determinar si es posible el BGD del sistema, el cual se cumple y es obtenido el BGD en la figura 4.23.

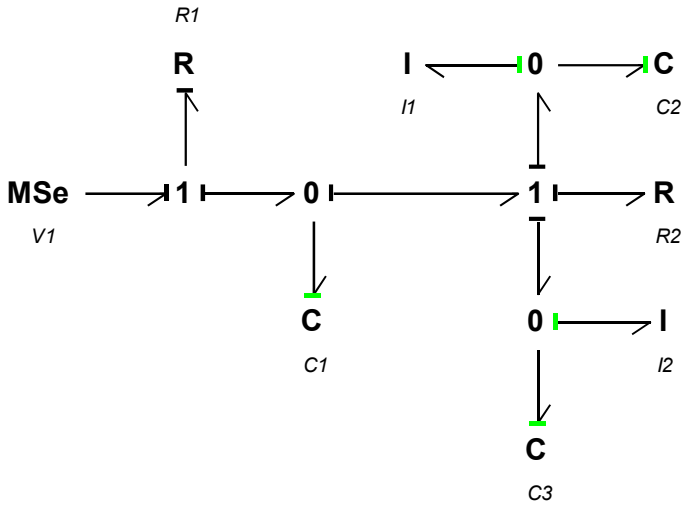


Figura 4.23. BGD del sistema eléctrico de orden cinco.

- Condición 2: encontrar al menos una trayectoria causal de cada fuente a cada elemento I y C, lo cual se cumple como se muestra en la figura 4.24.

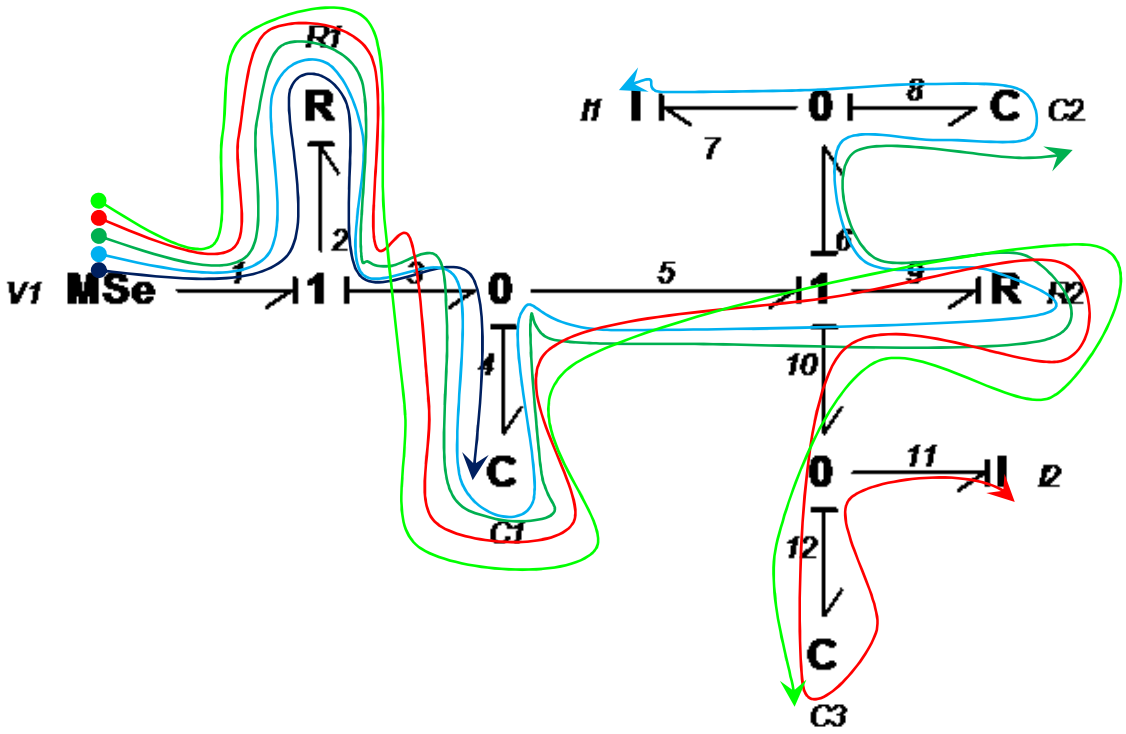


Figura 4.24. Gráfico de Trayectorias causales.

El listado de las trayectorias causales se describe en la figura 4.25

MSe: V1

- C1 (1, 2, 2, 3, 4).
- L1 (1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 9, 9, 6, 8, 8, 7).
- C2 (1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 9, 9, 6, 8).
- L2 (1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 9, 9, 10, 12, 12, 11).
- C3 (1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 9, 9, 10, 12).

Figura 4.25. Listado de trazos causales.

Con lo anterior se determina que el sistema es estructuralmente controlable.

4.5. Ejemplo de sistema hidráulico de orden seis.

En la figura 4.26 se describe un sistema hidráulico de orden seis, el cual se desea obtener la característica de controlabilidad estructural.

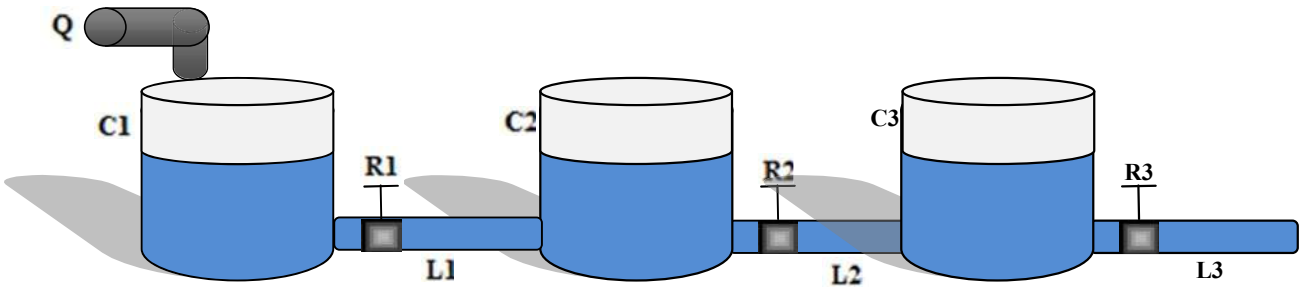


Figura 4.26. Sistema hidráulico de orden seis.

A continuación en la figura 4.27 se presenta el BGI del sistema de la figura 4.26.

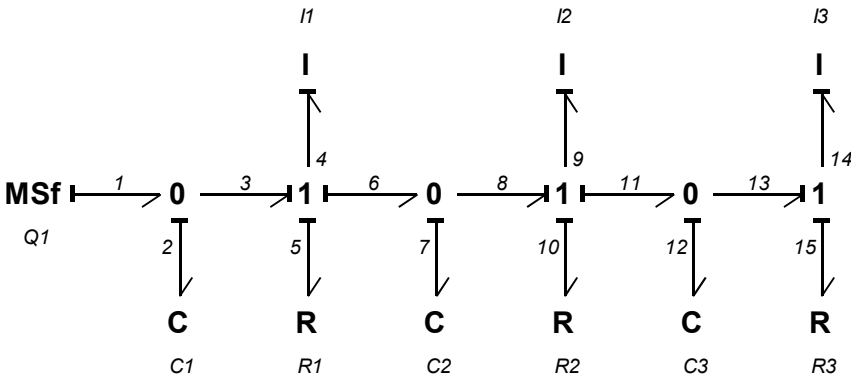


Figura 4.27. BGI del sistema hidráulico.

- Condición 1: determinar si es posible el BGD del sistema, el cual se muestra en la figura 4.28.

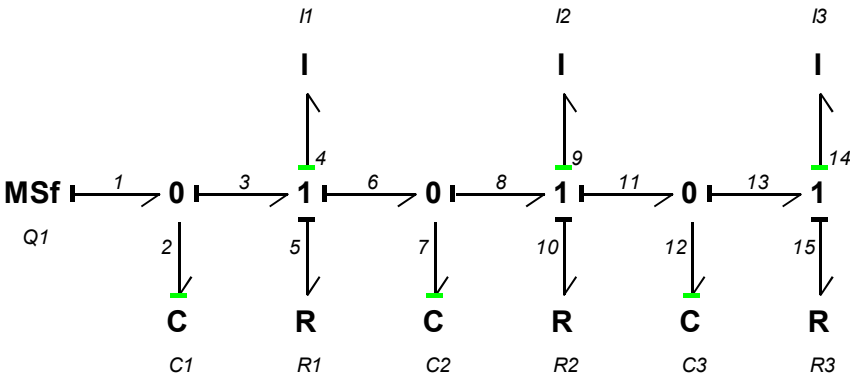
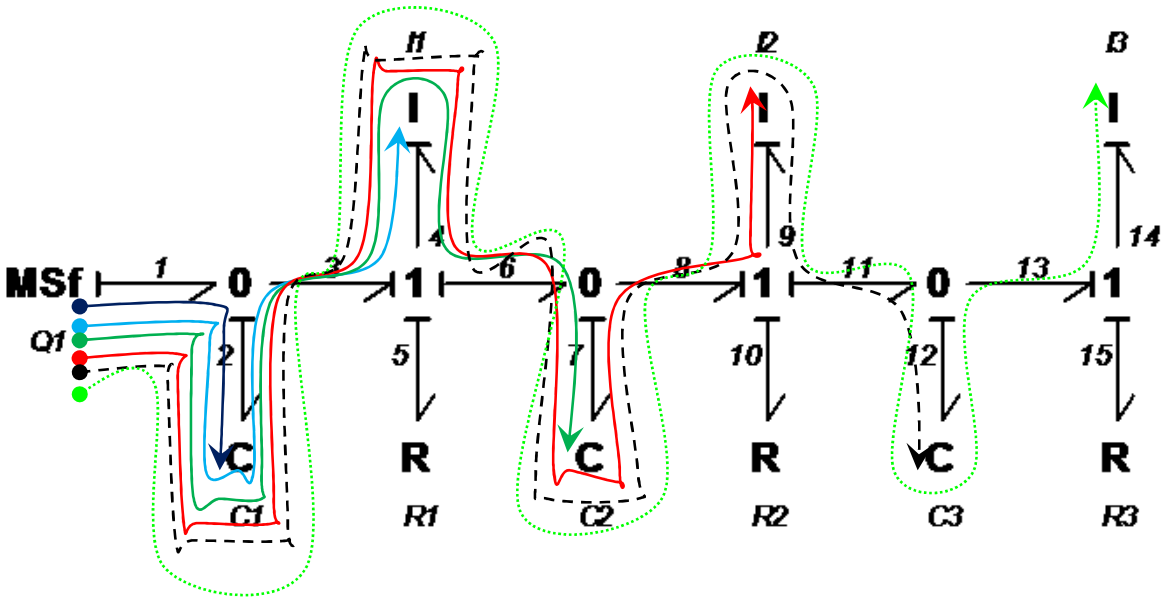


Figura 4.28. BGD del sistema hidráulico.

- Condición 2: encontrar al menos una trayectoria causal de cada fuente a cada elemento I y C, las trayectorias casales se describen en la figura 4.29.



MSf: Q1

C1 (1, 2).

L1 (1, 2, 2, 3, 4).

C2 (1, 2, 2, 3, 4, 4, 6, 7).

L2 (1, 2, 2, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 8, 9).

C3 (1, 2, 2, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 12).

C1 (1, 2, 2, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 14).

Figura 4.29. Grafico y listado de las trayectorias causales del sistema hidráulico.

Con esto se han determinado que el sistema es controlable.

Para finalizar el capítulo se determinara la controlabilidad de un sistema eléctrico el cual tiene nueve elementos almacenadores de energía.

4.6. Ejemplo de sistema eléctrico de nueve elementos almacenadores de energía

En la figura 4.30 se ilustra un circuito eléctrico formado por nueve elementos de almacenamiento de energía.

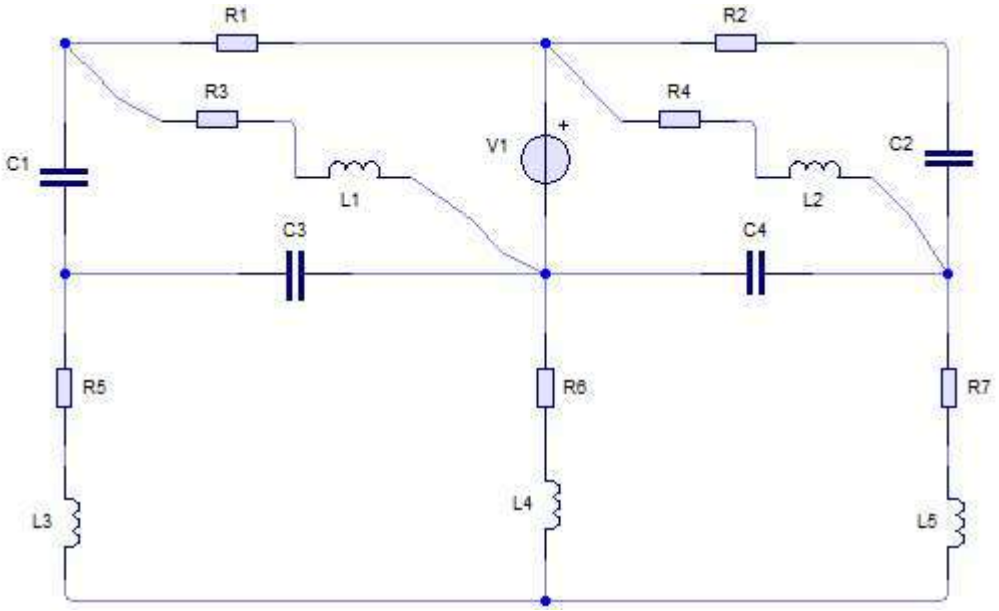


Figura 4.30. Circuito eléctrico de orden nueve.

Su ilustración en Bond Graph integral se muestra en la figura 4.31.

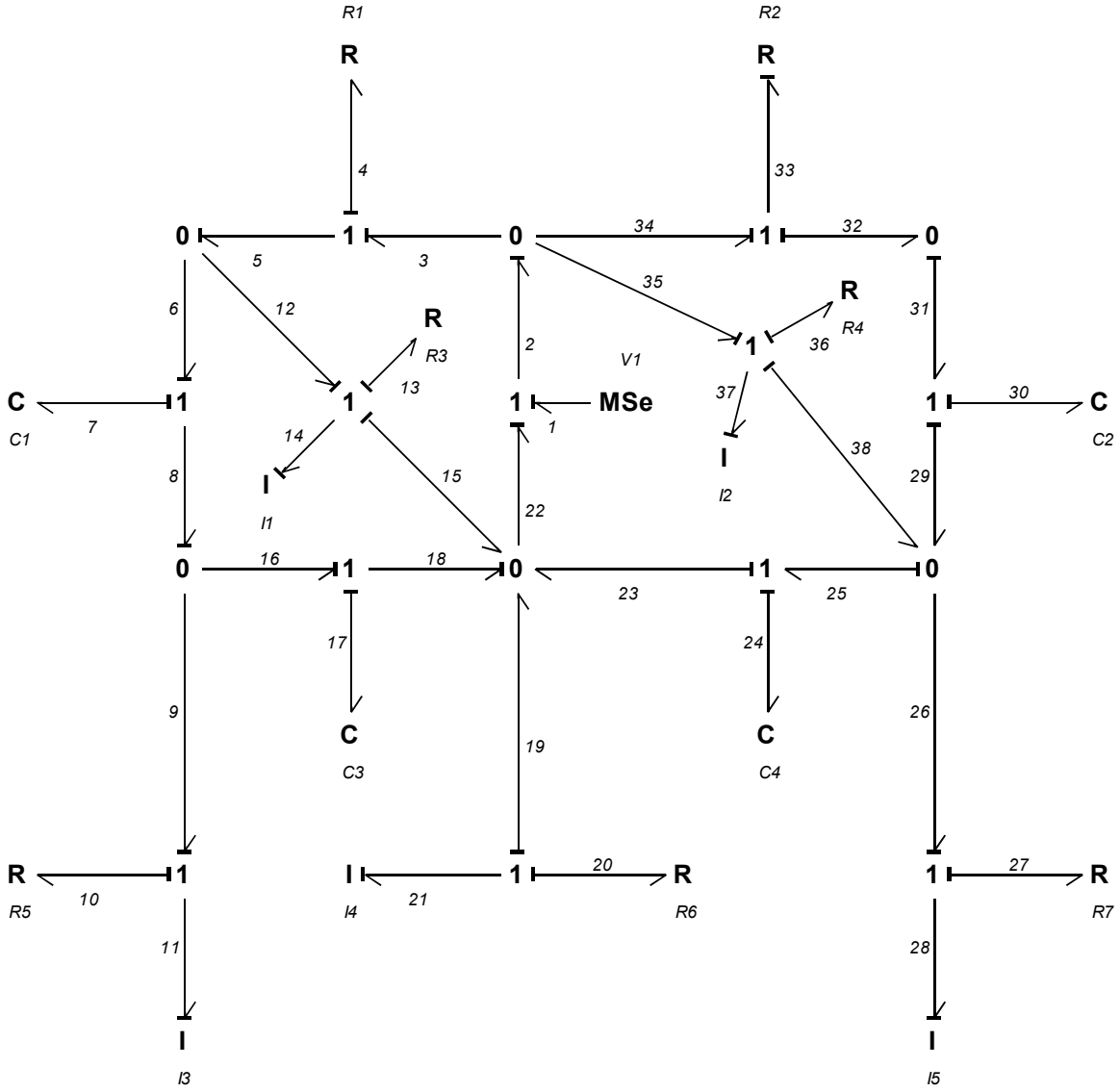


Figura 4.31. BGI de sistema eléctrico de orden nueve.

- Condición 1: determinar si es posible el BGD del sistema, el cual se muestra en la figura 4.32.

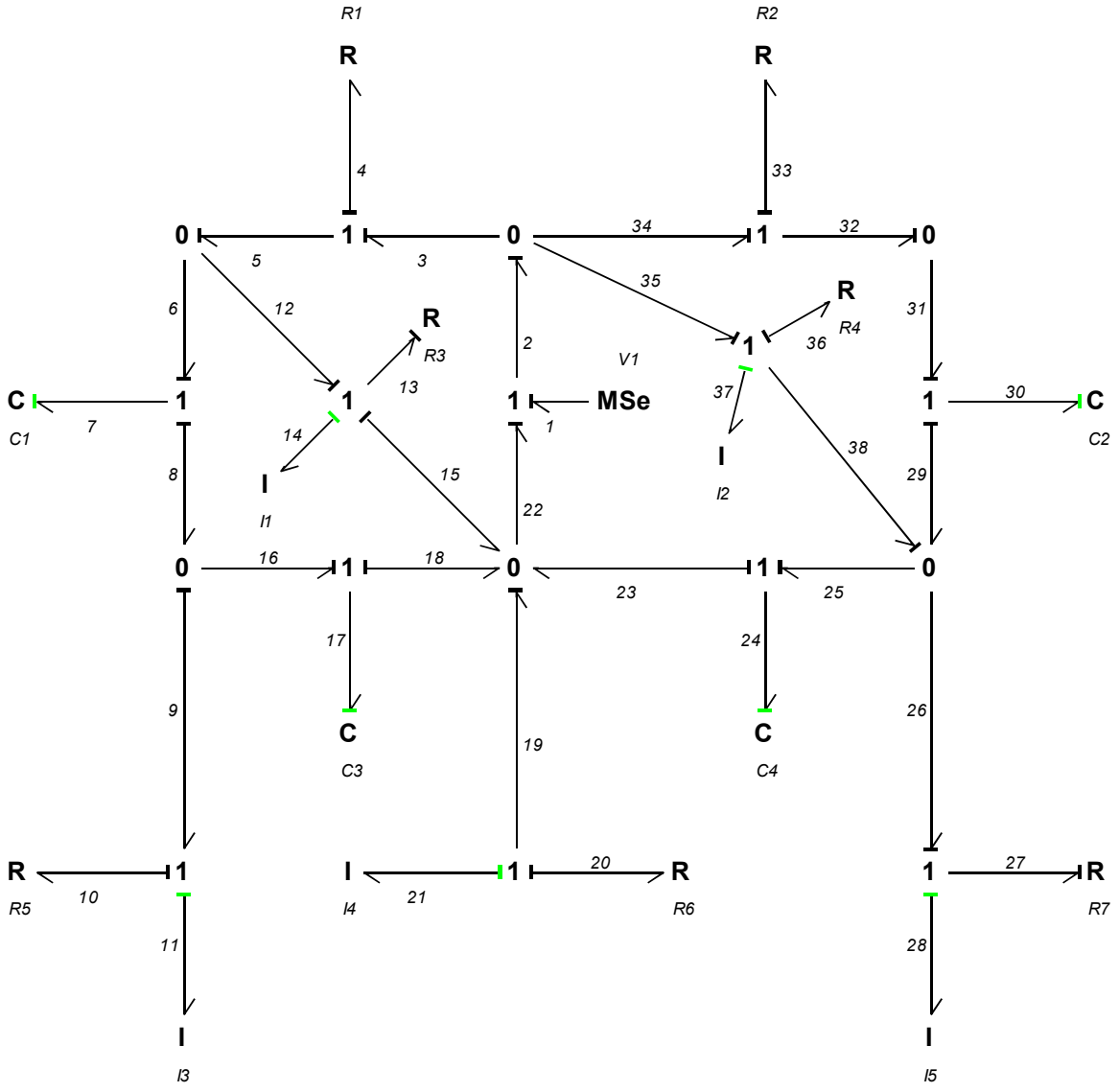


Figura 4.32. BGD de un sistema robusto.

- Condición 2: encontrar al menos una trayectoria causal de cada fuente a cada elemento I y C, las trayectorias causales se indican a continuación en la figura 4.33

MSe: V1

C1: [1, 2, 3, 5, 12, 14, 14, 15, 18, 16, 8, 7].
C2: [1, 2, 34, 33, 33, 32, 31, 30].
C3: [1, 2, 3, 5, 12, 14, 14, 15, 18, 17].
C4: [1, 2, 35, 37, 37, 38, 25, 24].

L1: [1, 2, 3, 5, 12, 14].
L2: [1, 2, 35, 37].
L3: [1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11].
L4: [1, 2, 3, 5, 6, 8, 16, 18, 19, 21].
L5: [1, 2, 3, 5, 6, 8, 16, 18, 23, 25, 26, 28].

Figura 4.33. Listado de trayectorias causales

Con el listado anterior se completa la definición de controlabilidad estructural para este sistema el cual sería bastante extenso y laborioso tratar de definir si el sistema es controlable por el método matemático.

Capítulo 5

Conclusiones

- Se dio a conocer la metodología para el modelado mediante Bond Graph.

- Se presentó una manera alternativa de determinar las ecuaciones de estado, así como sus variables todo esto a través del método de Bond Graph.

- A través del desarrollo de la investigación de este tema se ha concluido, que la forma de obtener los parámetros de controlabilidad y observabilidad por medio del modelado de Bond Graph es comparable, en ciertos casos más factible, que el modelo matemático que claro no se deja de lado y esto se hace notar en el capítulo tres.

- En el avance del trabajo se presentaron ejemplos que fueron llevándose hasta determinar que la metodología de Bond Graph es una excelente herramienta para el análisis de sistemas robustos como se dejo ver en el último ejemplo del capítulo cuatro.

Referencias

1. G.G. Avalos, “Técnicas de Control basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO. Aplicación a la maquina síncrona”. Universidad autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. San Nicolás de los Garza N.L. (2004).
2. W.Borutzky, G.Dauphin-Tanguy y J.U. Toma, “Advances in bond graph modeling: theory, software, aplications”. Mathematics and Computers in Simulation. (1995).
3. J.F. Broenink, “Introduction to Physical System Modelling with Bond Graphs”. University of Twenty, Dept EE. (1999).
4. P.J. Gawthrop and G.P. Bevan, “Bond Graph modeling”. IEEE control systems magazine. (2007).
5. C. Sueur and G.Dauphin-Tanguy, “Bond Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems”. The Franklin Institute, France. (1991).
6. G.G. Avalos, “Modelado y Simulación de un Sistema Hidráulico sujeto a fallas en el dominio físico”, Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH. Mich. Mex. (2008).
7. K. Ogata, “La obra de Ogata” (1990)
8. S.Saucedo, “Controlabilidad y Observabilidad del Estado-Espacio”, ESIME-IPN.
9. G.Dauphin-Tanguy, A.Rahmani, C. Sueur, “Bond Graph aided desing of controlled ayatems”, Simulation Practice and Theory, International Journal of the Federation of European Simulation Societies. (1999).