

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Tesis

**MODELADO Y SIMULACION DE SISTEMAS ELECTRICOS
UTILIZANDO LA TRANSFORMACION DE PARK
REDUCIDA**

**Que para obtener el Titulo de
INGENIERO ELECTRICISTA**

Presenta

Agustín de Jesús García Mijangos

Asesor de Tesis

Dr. Gilberto González Avalos

Abril del 2011

Agradecimientos

Este trabajo, si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación de parte del autor y asesor de tesis, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que a continuación citaré y muchas de las cuales han sido un soporte muy fuerte en momentos de angustia y desesperación.

Primero que nada, dar gracias a Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que nunca dudaron de mi durante el periodo de estudio.

Debo agradecer de manera especial y sincera al Dr. Gilberto González Avalos por aceptarme para realizar la tesis, por su paciencia, apoyo, confianza y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable, no solo en el desarrollo en este trabajo, sino también en la formación académica para terminar la licenciatura; también agradezco a todos los maestros que pudieron compartir sus conocimientos y la paciencia que me tuvieron ya que han sido de gran ayuda para poder concluir la licenciatura. De igual manera me siento agradecido por haber cursado la licenciatura en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en la que tuve la fortuna de haber vivido muchas experiencias y de haber conocido mucha gente.

Son tantas personas a las cuales debo parte de este triunfo, de lograr alcanzar mi culminación académica, la cual es el anhelo de todos los que así lo deseamos.

Agradezco a mi madre Matilde Mijangos Aguilar por la fe que ha tenido siempre en mí y el apoyo infinito que siempre me ha dado, también agradezco a mis hermanas Araceli García Mijangos, Iris García Mijangos y Adelita García Mijangos quienes me han dado el apoyo la fortaleza de seguir adelante, y no puedo dejar de agradecer al Sr. Gustavo Ruiz Cabrera, quien me ha sabido enseñar muchas cosas de la vida y han sido de gran ayuda en mi vida profesional. Así también agradezco a mi padre José Patricio García Camaras.

Dedicatoria

Este trabajo lo dedico primero que nada a Dios, por haberme dado fuerzas para seguir adelante, por darme la vida y una maravillosa familia.

También se lo dedico con mucho cariño especialmente a mi madre, quien con todo su esfuerzo, apoyo y dedicación ha logrado llevarme a un gran paso más de mi vida, a mis hermanas quienes me han dado el gran apoyo moral, por que me han dado sus buenos consejos para seguir adelante, a mis sobrinitos que al verlos me han dado el reto de dejarles un buen ejemplo. Gracias familia por no haberme dejado solo y por todo el apoyo que me han brindado todo este tiempo.

De forma especial también es dedicada a la Facultad de Ingeniería Eléctrica, donde los maestros que lo conforman me han guiado a un gran paso muy importante en mi vida.

A mis amigos que de alguna forma me apoyaron, que pasamos momentos difíciles e inolvidables y que quedan marcados como buenas experiencias.

Resumen

En ingeniería eléctrica el análisis de circuitos eléctricos es la parte primordial, y para eso se llevan a cabo distintos métodos para obtener sus expresiones matemáticas que describen su comportamiento.

En los sistemas eléctricos trifásicos se aplica un método para la simplificación matemática que describe a un sistema eléctrico que se obtiene mediante la transformación de sus variables, dicho método es la llamada transformación de Park o $dq0$. Esta transformación expresa las variables tales como corrientes, voltajes o enlaces de flujo en términos de un nuevo conjunto de variables. Las nuevas cantidades obtenidas con dicha transformación, a partir de la proyección de las variables actuales en los tres ejes; una a lo largo del eje d , una segunda a lo largo del eje q , y una tercera en un eje estacionario.

El efecto de la transformación de Park es simplemente transformar todas las cantidades a partir de las fases abc de un sistema eléctrico en otras variables de referencia, este método es detallado en el desarrollo de esta tesis, haciendo la conversión en voltajes y corrientes, se aplica de la misma forma en el análisis de un sistema eléctrico. También se lleva a cabo el procedimiento detallado para sistemas balanceados, se hace la demostración que se puede trabajar solamente con la transformación dq , sin tomar en cuenta el eje 0 , a esto se le llama transformación de Park reducida, la cual lleva a la reducción de ecuaciones, que para fines didácticos son mas fáciles de dar solución a problemas, se hacen simulaciones de las ecuaciones finales para obtener la respuesta gráfica y demostrar que los resultados son los mismos en ambos casos.

La transformación de Park reducida también es aplicada a un generador síncrono en el que en su análisis se llega a un sistema de ecuaciones que describen su comportamiento, y también se lleva a cabo la simulación para apreciar sus respuestas gráficamente.

Contenido

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Agradecimientos | ii |
| Dedicatoria | iii |
| Resumen | iv |
| Lista de Figuras | vii |
| | |
| Capítulo 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Las transformaciones en sistemas eléctricos | 2 |
| 1.2. Objetivo | 3 |
| 1.3. Justificación | 4 |
| 1.4. Estructura de la tesis | 4 |
| | |
| Capítulo 2. Antecedentes de sistemas eléctricos y transformaciones | 5 |
| 2.1. Introducción | 5 |
| 2.2. Un sistema eléctrico..... | 6 |
| 2.3. Transformaciones | 16 |
| | |
| Capítulo 3. La transformación de Park reducida | 22 |
| 3.1. Introducción | 22 |
| 3.2. Transformación en voltajes y corrientes..... | 23 |
| 3.3. Transformación en enlaces de flujo | 29 |
| 3.4. Simulación de la transformación de Park | 33 |
| 3.5. Simulación de la transformación de Park reducida..... | 41 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| Capítulo 4. Aplicación de la transformación de Park reducida | 44 |
| 4.1 Introducción..... | 44 |
| 4.2 Un sistema eléctrico básico transformado..... | 45 |
| 4.3 Otro caso de estudio de un sistema trifásico | 55 |
| 4.4 La máquina síncrona transformada | 66 |
| | |
| Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones | 84 |
| | |
| Bibliografía | 86 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. | Sistema de referencia dq y trifásico de secuencia directa | 2 |
| 2.1 | Diagrama unifilar de un sistema trifásico..... | 6 |
| 2.2 | Tensión con ruido eléctrico | 8 |
| 2.3 | Tensión con impulso eléctrico | 8 |
| 2.4 | Tensión con perturbaciones de microcorte | 9 |
| 2.5 | Distorsión armónica en la forma de onda de tensión | 10 |
| 2.6 | Señal sinusoidal con variaciones de frecuencia | 10 |
| 2.7 | Representación fasorial de una onda sinusoidal | 11 |
| 2.8 | Representación de una señal trifásica | 12 |
| 2.9 | Vector espacial $S(t)$ en el sistema de ejes (a, b, c) | 13 |
| 2.10 | Descomposición vectorial del vector $S(t)$ | 14 |
| 2.11 | Representación de la trayectoria del vector $V(t)$ en el plano Π | 16 |
| 2.12 | Cambio de base entre los ejes $\alpha\beta\gamma$ a los nuevos ejes $dq0$ | 17 |
| 2.13 | Representación del vector espacial v en la nueva base $dq0$ | 19 |
| 2.14 | Sistemas de referencia trifásicos y D-Q | 20 |
| 3.1 | Pantalla de inicio del <i>Simnon</i> | 33 |
| 3.2 | Algunas descripciones del <i>Simnon</i> | 34 |
| 3.3 | Inicio de la programación en <i>Simnon</i> | 34 |
| 3.4 | Señal de tensión trifásica | 35 |
| 3.5 | Diagrama de bloque de la transformación de Park | 36 |
| 3.6 | Señal de voltajes con transformación de Park | 37 |
| 3.7 | Voltajes transformados, V_q y V_0 | 38 |
| 3.8 | Diagrama de bloque de la transformación inversa de Park | 39 |
| 3.9 | Señal de la transformación inversa de Park | 40 |

| | | |
|------|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.10 | Representación grafica de la transformación de Park reducida | 41 |
| 3.11 | Respuesta de la transformación de Park reducida | 42 |
| 3.12 | Transformación inversa de Park reducida | 42 |
| | | |
| 4.1 | Sistema básico trifásico | 45 |
| 4.2 | Sistema monofásico | 45 |
| 4.3 | Representación de corriente en $dq0$ para un sistema trifásico | 51 |
| 4.4 | Representación de corriente en abc para un sistema trifásico | 52 |
| 4.5 | Representación dq para un sistema trifásico balanceado | 53 |
| 4.6 | Representación de corrientes en abc | 54 |
| 4.7 | Sistema trifásico | 55 |
| 4.8 | Corrientes i_1, i_2 e i_3 en el sistema de referencia $dq0$ | 60 |
| 4.9 | Representación de las corrientes i_1, i_2 e i_3 en abc | 61 |
| 4.10 | Corrientes i_1, i_2 e i_3 en el sistema de referencia dq | 64 |
| 4.11 | Corrientes i_1, i_2 e i_3 en abc | 65 |
| 4.12 | Diagrama esquemático de una máquina síncrona | 66 |
| 4.13 | Modelo abstracto de la máquina síncrona | 67 |
| 4.14 | Pares aplicados al rotor de la máquina síncrona | 78 |
| 4.15 | Corrientes i_d, i_q e i_F de la máquina síncrona | 81 |
| 4.16 | Representación de la velocidad angular | 81 |
| 4.17 | Representación de las corrientes i_a, i_b e i_c de la máquina síncrona | 82 |
| 4.18 | Tiempo de establecimiento de la corriente en abc | 83 |

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas de potencia han sido tradicionalmente analizados usando matrices de transformación (Clark, Fortescue, Park, etc.). Los métodos de representación modal desacoplan las ecuaciones simétricas de los sistemas de potencia. Estas técnicas han sido ampliamente usadas para modelar sistemas eléctricos en régimen permanente bajo operaciones balanceadas y desbalanceadas y analizar transitorios, la dinámica y los armónicos.

En ingeniería eléctrica, la transformación $dq0$ es un método matemático que se utiliza para simplificar el análisis de circuitos trifásicos. La idea que subyace a este procedimiento procede del trabajo del físico francés André Blondel (Chaumont, 1863 Paris, 1938), en Francia; a veces se le llama a la técnica el *método de blondel de dos reacciones*. Gran parte del desarrollo en la forma usada en lo sucesivo fue llevado a cabo por R. E. Doherty, C. A. Nickle, R. H. Park en Estados Unidos.

En el año de 1929 R. H. Park presentó un artículo en el *American Institute of Electrical Engineers* (AIEE) titulado “*two reactions theory of synchronous machines*” (teoría de dos reacciones de las máquinas síncronas). En este se presentó una generalización del trabajo de Blondel, Doherty, Nickle, y establece métodos generales para calcular corriente, potencia, y par en máquinas síncronas de polos salientes y de rotor liso tanto en condiciones de estado estacionario como transitorio.

1.1 Las transformaciones en sistemas eléctricos

En el estudio de sistemas eléctricos, las transformaciones matemáticas a menudo se utilizan para desacoplar las variables, para facilitar la solución de las ecuaciones difíciles con coeficientes variables en el tiempo, o para referirse a todas las variables del marco de referencia común.

La transformación de Park, permite expresar las magnitudes trifásicas en un sistema de referencia ortogonal y giratorio (móvil). También es conocida como transformada dq o síncrona. Park permite además, ver magnitudes trifásicas que varían sinusoidalmente en el tiempo, como constantes, siempre y cuando la frecuencia de la señal coincida con la frecuencia de giro de los ejes de frecuencia dq . Naturalmente, es más fácil trabajar con valores de magnitudes constantes que con variaciones sinusoidales. No obstante, si las magnitudes contienen armónicos, las magnitudes transformadas se verán variables en el tiempo, ya que contienen frecuencias distintas y en general superiores a la fundamental. En concreto habrá oscilaciones respecto el promedio correspondiente a la componente fundamental. Aún así, es interesante expresar las magnitudes en dicha referencia ya que en ellas quedará perfectamente perceptible el contenido armónico de las señales en cuestión: todo lo que difiera del valor promedio corresponderá a componentes armónicas indeseadas.

La figura 1.1 muestra una de las posibles relaciones gráficas existentes entre un sistema de referencia abc y un sistema de referencia dq .

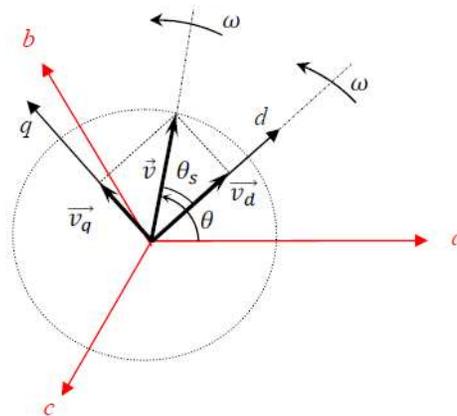


Figura 1.1 Sistema de referencia dq y trifásico de secuencia directa

En la figura 1.1, el vector \vec{v} gira a la misma velocidad angular que el sistema de referencia dq . De esta forma será invariante en el tiempo, ya que gira solidariamente con el sistema nuevo de referencia.

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela el comportamiento de una máquina eléctrica no es lineal. La dependencia en el ángulo (θ) de este modelo dificulta notablemente la solución de cualquier problema. La transformación de las ecuaciones diferenciales a nuevos sistemas de coordenadas simplifica en muchos casos este modelo.

Una de las dificultades inherentes en el estudio del comportamiento de las máquinas eléctricas de rotación es que las inductancias están en función tanto del ángulo eléctrico como mecánico de las máquinas. Para simplificar este proceso, R. H. Park desplegó una transformación que hizo el análisis más sencillo en el estudio de las máquinas, mediante la transformación de las ecuaciones del motor en un marco de referencia que gira de forma sincrónica con los campos de la máquina.

1.2 Objetivo

El objetivo de este trabajo de tesis radica en encontrar por medio del método de transformación de Park reducida, una solución más sencilla para el análisis de sistemas eléctricos trifásicos balanceados, haciendo una comprobación mediante simulaciones y comparando los resultados con la transformación de Park y la de Park reducida, y a la vez demostrando que se obtienen los mismos resultados, así también, poder entender mejor el comportamiento y dar solución a problemas en dichos sistemas.

1.3 Justificación

En el estudio de los sistemas eléctricos se abarca una infinidad de técnicas para el análisis de diferentes dispositivos de potencia, y para ello se desarrollan distintas ecuaciones las cuales proporcionan la información adecuada de su comportamiento; uno de los métodos que se estudiará; para hacer un análisis más sencillo es el método de transformación de Park, este método tiene aplicaciones para el análisis del comportamiento en los sistemas trifásicos; por ejemplo, las máquinas rotatorias ocupan una amplia gama de aplicaciones y son muy utilizadas en el campo industrial y para ello se necesita saber el comportamiento para cada una de ellas. Para eso, la transformación de Park es muy aplicada para el estudio de las máquinas, este método simplifica su análisis, como se analiza en el desarrollo de esta tesis.

1.4 Estructura de la tesis

Esta tesis se divide en cinco capítulos

- Capítulo 1: Donde se da una idea general sobre las transformaciones en los sistemas eléctricos trifásicos, el objetivo y justificación del trabajo a realizar.
- Capítulo 2: Se introduce los antecedentes de los sistemas eléctricos, como está formado un sistema eléctrico y sus transformaciones matemáticas.
- Capítulo 3: En esta parte de la tesis se realiza un procedimiento matemático para obtener la transformación de Park reducida, se aplica a un sistema de voltajes y corrientes, se hace la simulación para comprobar los resultados obtenidos.
- Capítulo 4: Se aplica la transformación de Park reducida a un sistema trifásico, se hacen las simulaciones para comprobar resultados, de igual forma se aplica también a una máquina síncrona.
- Capítulo 5: Se describen las conclusiones del trabajo de tesis.

Capítulo 2

Antecedentes de sistemas eléctricos y transformaciones

2.1 Introducción

En ingeniería eléctrica, la generalización en el uso de la corriente alterna en la que el descubrimiento del transformador fue el elemento clave, ha propiciado la producción a gran escala de la energía eléctrica ligada a su transporte y distribución. A partir de que la potencia eléctrica puede ser producida en lugares alejados de los centros de mayor consumo y transportada a los puntos donde la requieran los usuarios, se hace necesaria la eficiencia del sistema. Esto es, que los distintos perfiles de consumo afecte lo menos posible a la calidad de la explotación del sistema

El nacimiento de redes eléctricas en el mundo comprende el lapso de 1860 a 1885, época en que se logró conjuntar los distintos componentes de un sistema eléctrico ya existentes o inventar los que se requirieron en ese periodo a fin de poder armar una red de distribución que pudiera alimentar la carga comprendida por: el alumbrado, la calefacción y los motores eléctricos de las ciudades más importantes del mundo de aquellos años.

2.2 Un sistema eléctrico

Un sistema eléctrico es un conjunto de dispositivos cuya función es proveer la energía necesaria a diferentes puntos para el arranque y correcto funcionamiento de los accesorios eléctricos tales como luces, electrodomésticos y diversos instrumentos. Es el medio que se utiliza para la distribución de la energía generada hacia distintos usuarios.

Un sistema eléctrico está compuesto, en términos generales, por los siguientes subsistemas:

- Generación de energía
- Transmisión
- Subestaciones
- Distribución
- Consumo

Cada subsistema contiene, a su vez, diferentes componentes físicos. Una de las representaciones gráficas de sistemas eléctricos es como se muestra en la figura 2.1.

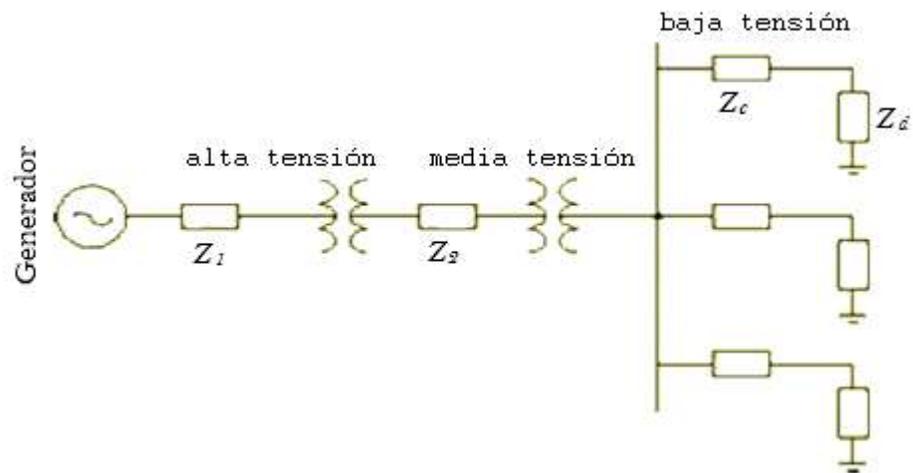


Figura 2.1 Diagrama unifilar de un sistema eléctrico

El diagrama unifilar mostrado en la figura 2.1 representa la generación, subestaciones de alta tensión, subestaciones de media tensión y la distribución en baja tensión para los usuarios; las impedancias (Z_1 y Z_2) representan las pérdidas en los conductores, y las Z_c y Z_d son las impedancias de carga para el sistema de baja tensión.

Un sistema eléctrico ideal debe proporcionar un voltaje con las siguientes características:

- Amplitud constante
- Forma de onda sinusoidal
- Frecuencia constante
- Simetría en el caso de red constante

Bajo estas condiciones, las máquinas y equipos eléctricos conectados a este sistema no deberían presentar un comportamiento anormal y deberían funcionar tal como se espera en su diseño.

Sin embargo, un sistema eléctrico real no cumple con las características ideales mencionadas anteriormente. En la práctica, las redes eléctricas presentan una serie de alteraciones o perturbaciones que alteran la calidad del servicio, dentro de las cuales destacan:

- Variaciones de frecuencia
- Variaciones de la amplitud de voltaje
- Sobretensiones
- Asimetría sobre las fases
- Deformaciones en voltajes y corrientes (armónicas)

Dichas perturbaciones en una red eléctrica, ocasionan una menor calidad en la señal de alimentación suministrada a los equipos; a esto se le conoce como calidad de la red

eléctrica. Mismas perturbaciones pueden ocasionar un mal funcionamiento de un equipo eléctrico o electrónico y en ocasiones pueden llegar a dañarlos permanentemente, trayendo como consecuencia principalmente pérdidas económicas importantes. Algunas señales con distintos tipos de perturbaciones son presentadas en seguida.

La figura 2.2 muestra una forma de tensión con perturbaciones frecuentes y de escaso valor (decenas de volts más o menos), llamado ruidos.

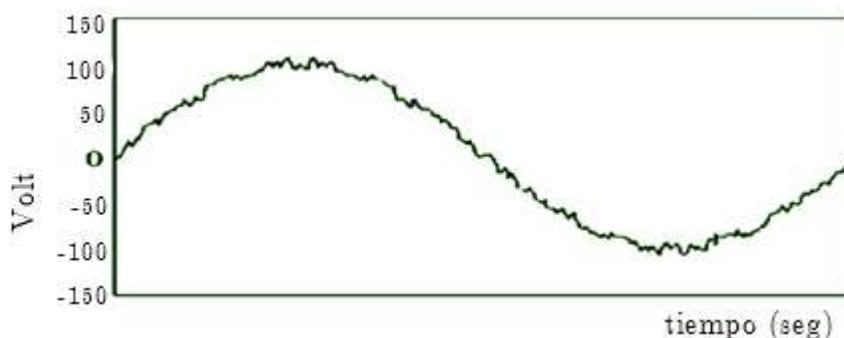


Figura 2.2 Tensión con ruido eléctrico.

Los ruidos eléctricos se producen debido al funcionamiento de máquinas eléctricas con escobillas, soldadoras de arco, timbres, interruptores, etc., los cuales se encuentran conectados en algún punto cercano a la carga utilizada. No producen daños en los equipos, pero si pueden causar un mal funcionamiento.

La figura 2.3 muestra otro tipo de perturbaciones, estos son esporádicos y de valor elevado (cientos de volts), se denominan impulsos, es decir, cuando su duración es inferior a 2 ms.

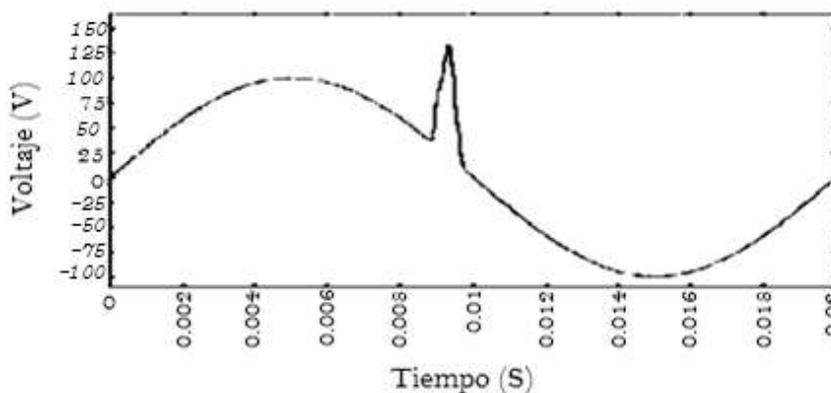


Figura 2.3 Tensión con impulso eléctrico.

Los impulsos eléctricos suelen producirse por conexión y desconexión de bancos de condensadores, funcionamiento de hornos de arco, máquinas con escobillas, interruptores, termostatos y por descargas eléctricas, son las más aleatorias y menos predecibles. Este tipo de perturbaciones puede producir daños muy serios en los equipos.

La figura 2.4 muestra una tensión con perturbaciones de microcortes; son anulaciones en la tensión de la red eléctrica (o reducciones por debajo del 60% de su valor nominal) con una duración menor a un ciclo.

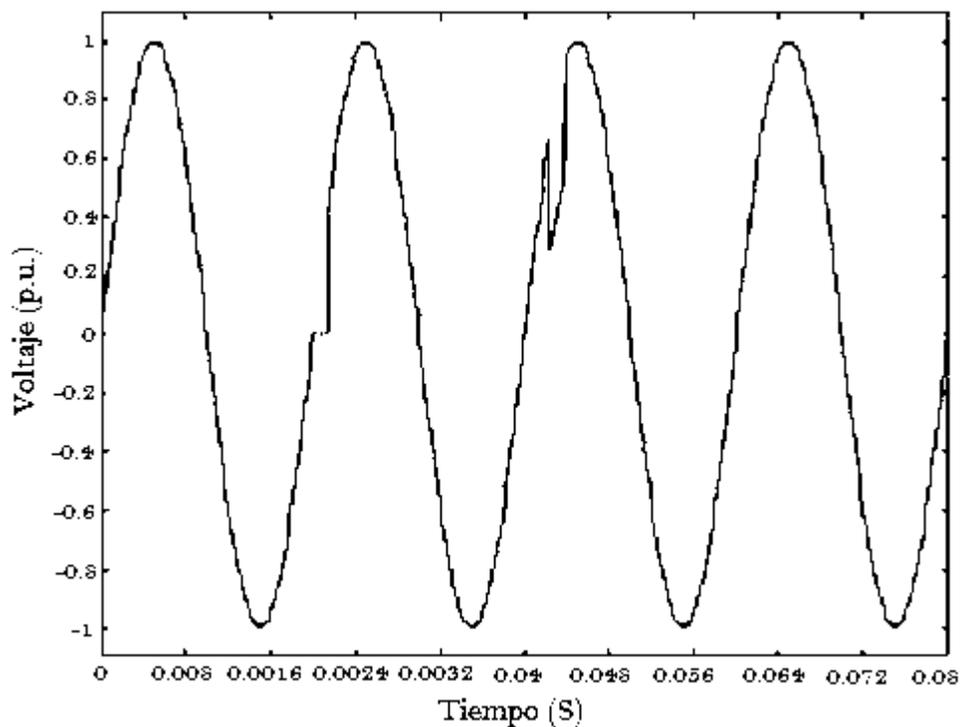


Figura 2.4 Tensión con perturbaciones de microcorte.

Este tipo de perturbaciones se debe principalmente a defectos en la red eléctrica o en la propia instalación del usuario. Pueden producir mal funcionamiento en cargas muy sensibles y errores en las computadoras.

La figura 2.5 muestra una distorsión en la forma de onda de tensión, debida a la presencia de armónicos, su nombre técnico es distorsión armónica total.

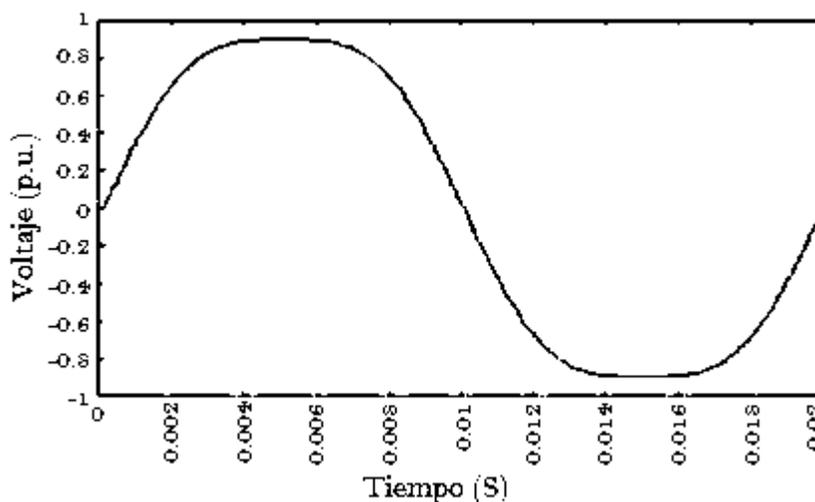


Figura 2.5 Distorsión armónica en la forma de onda de tensión.

La distorsión armónica se debe principalmente a la conexión a la red eléctrica de máquinas con núcleo magnético saturado, convertidores estáticos (rectificadores controlados y no controlados, sistemas de alimentación interrumpida, fuentes conmutadas) y otras cargas no lineales.

La figura 2.6 muestra una señal con cambios en la frecuencia de señal sinusoidal proporcionada por la red.

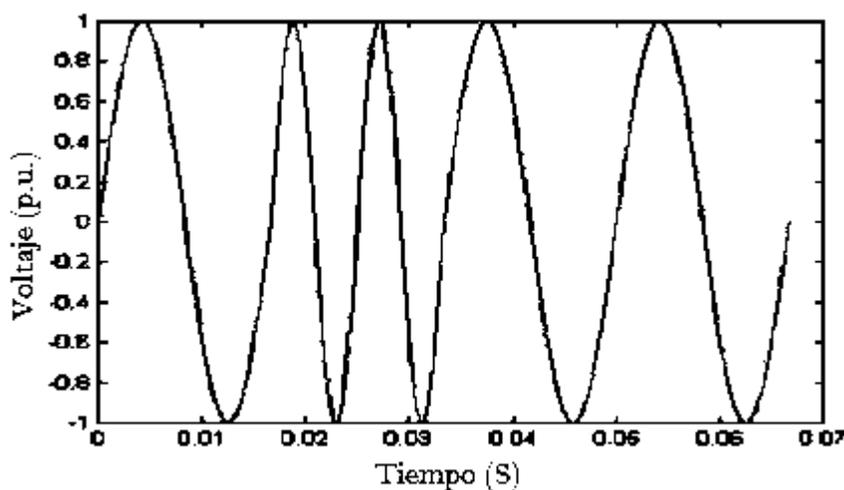


Figura 2.6 Señal sinusoidal con variaciones de frecuencia.

Normalmente resulta muy raro que se presente este problema en la red eléctrica en condiciones normales y puede llegar a ocurrir debido a la interconexión de los centros de generación de energía eléctrica. Generalmente sólo se producen en centros con generación aislada de tensión, como lo pueden ser redes eléctricas rurales aisladas que obtienen energía eléctrica a partir de generadores de combustión interna, paneles fotovoltaicos, generadores eólicos o en plataformas de explotación petrolera.

En el estudio de sistemas eléctricos es fundamental disponer de técnicas de representación de las variables eléctricas que permitan el análisis y diseño de dispositivos, circuitos y equipamiento eléctrico. También las transformaciones matemáticas de sistemas de referencia facilitan el estudio de sistemas complejos, al desacoplar variables en máquinas eléctricas o en la resolución de sistemas de ecuaciones con coeficientes variables en el tiempo. Teniendo en cuenta las representaciones y transformaciones de variables eléctricas que es preciso conocer para el análisis de sistemas eléctricos de potencia, se introducen en este apartado la representación espacial de las señales trifásicas y las transformaciones de Park reducida.

Una función sinusoidal puede ser representada por un vector giratorio como se representa en la Figura 2.7, al que se le denomina fasor, que tendrá las siguientes características.

- Gira con una velocidad angular ω .
- Su módulo será el valor máximo o el eficaz, según convenga.

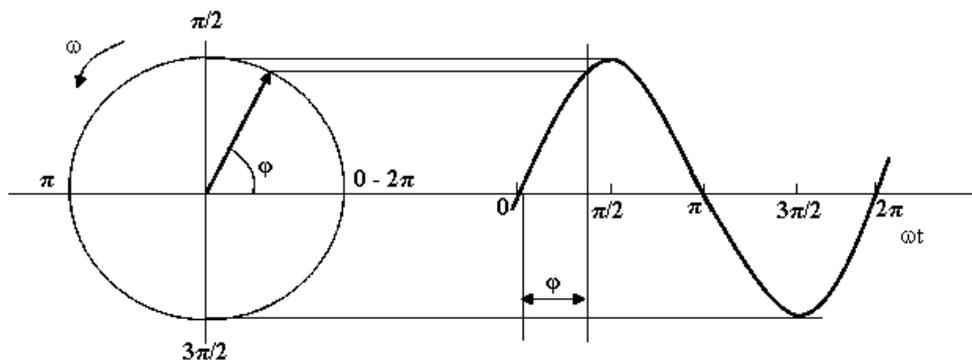


Figura 2.7 Representación fasorial de una onda sinusoidal.

La razón de utilizar una representación fasorial está en la simplificación que ello supone. Matemáticamente, un fasor puede ser definido fácilmente por un número complejo, por lo que puede emplearse la teoría de cálculo de estos números para el análisis de corriente alterna.

La generación trifásica de energía eléctrica es la forma más común y la que provee un uso más eficiente de los conductores. La utilización de electricidad en forma trifásica es común mayoritariamente para uso en industrias donde muchas de las máquinas funcionan con motores para esta tensión.

La corriente trifásica está formada por un conjunto de tres formas de onda, desfasadas una respecto a la otra 120 grados, según el diagrama que se muestra en la figura 2.8.

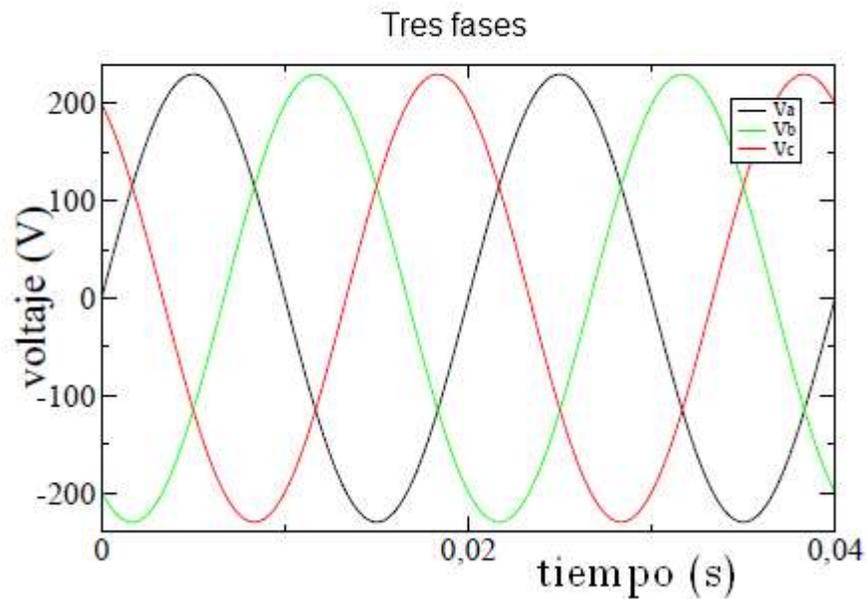


Figura 2.8 Representación de una señal trifásica.

El espacio temporal se puede representar mediante tres ejes ortogonales a , b , c . Cualquier magnitud trifásica se puede definir a través de sus coordenadas $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$ sobre estos ejes, de modo que a cada valor de la variable t le corresponde un punto concreto,

definiendo así un vector espacial $S(t)$ que tiene como origen el origen de coordenadas como se muestra en la Figura 2.9.

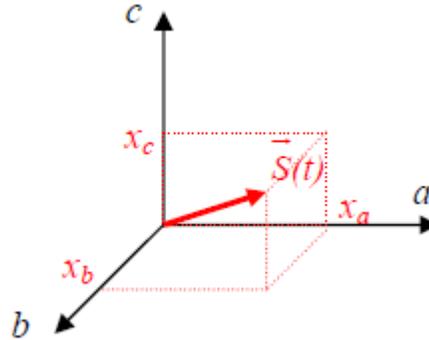


Figura 2.9 Vector espacial $S(t)$ en el sistema de ejes (a, b, c) .

Todo vector se puede descomponer como suma de vectores. Resulta útil descomponer el vector espacial $S(t)$ como suma de dos vectores perpendiculares, $S'(t)$ y $H(t)$, donde $H(t)$ es un vector formado por componentes homopolares $h(t)$ iguales. Entonces

$$S(t) = S'(t) + H(t) \quad (2.1)$$

donde:

$$S'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}, \quad H(t) = \begin{bmatrix} h(t) \\ h(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$$

La componente homopolar $h(t)$ se define como:

$$h(t) = \frac{x(t)+y(t)+z(t)}{3} \quad (2.2)$$

Estos dos vectores permiten definir una nueva base de coordenadas: la dirección $[1, 1, 1]^T$ en coordenadas a, b, c del vector $H(t)$ define el eje γ del nuevo sistema, mientras que el vector $S'(t)$, puesto que es perpendicular a $H(t)$, estará contenido un plano denominado Π ,

perpendicular al eje γ y definido por los ejes α, β , siendo α la proyección del eje a en el plano Π y queda representada como se ilustra en la Figura 2.10.

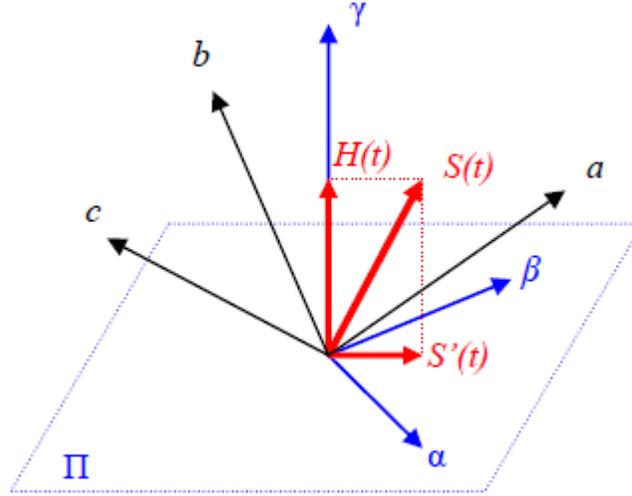


Figura 2.10 Descomposición vectorial del vector $S(t)$.

Si se considera un sistema trifásico y equilibrado, se puede demostrar que las corrientes y tensiones trifásicas del sistema se pueden representar mediante un vector espacial de módulo constante que gira a velocidad constante en el plano Π . En primer lugar, se define una tensión trifásica $v(t)$ cuyas componentes a, b, c son tensiones sinusoidales simétricas y equilibradas, es decir, de igual módulo V_{max} y desfasadas 120° , tal y como se muestra en la ecuación (2.3),

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{max} \cdot \cos(\omega t) \\ V_{max} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ V_{max} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde:

$$v_a + v_b + v_c = 0$$

Dado que el sistema es simétrico y equilibrado, la componente homopolar $h(t)$ es nula, lo cual implica que $H(t) = 0$ y $S(t) = S'(t)$, es decir, que el vector espacial está contenido en el plano Π . Para deducir la trayectoria que describe el vector $v(t)$ en el plano es útil realizar un cambio de bases de los ejes a, b, c a los ejes α, β, γ mediante la aplicación de la matriz de cambio de base $[T]_{abc/\alpha\beta\gamma}$ definida en la ecuación (2.4)

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = [T]_{abc/\alpha\beta\gamma} \cdot \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde:

$$[T]_{abc/\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix};$$

$$\left\| [T]_{abc/\alpha\beta\gamma} \right\| = 1; \quad [T]_{abc/\alpha\beta\gamma}^{-1} = [T]_{abc/\alpha\beta\gamma}^T$$

Sustituyendo en el sistema anterior las componentes de $v(t)$ por las expresiones dadas en (2.3) se puede determinar $v(t)$ en el nuevo sistema de coordenadas, ecuación (2.5).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} &= [T]_{abc/\alpha\beta\gamma} \cdot \begin{bmatrix} V_{max} \cdot \cos(\omega t) \\ V_{max} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ V_{max} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot V_{max} \cdot \begin{bmatrix} V_{max} \cdot \left(\cos(\omega t) - \frac{1}{2} \cos(\omega t - 2\pi/3) - \frac{1}{2} \cos(\omega t + 2\pi/3) \right) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot V_{max} \cdot \left(\cos(\omega t - 2\pi/3) - \cos(\omega t + 2\pi/3) \right) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot V_{max} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

A partir de este resultado se puede deducir que la tensión trifásica $v(t)$ sigue una trayectoria circular de radio $\rho = V_{max} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ y velocidad angular ω sobre el plano Π , tal y como se muestra en la Figura 2.11.

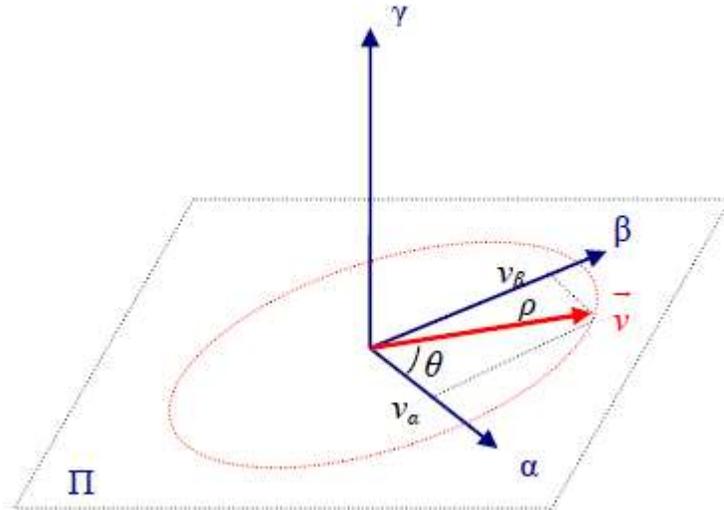


Figura 2.11 Representación de la trayectoria del vector $v(t)$ en el plano Π .

En un sistema simétrico y equilibrado, este razonamiento es cierto tanto para tensiones simples y compuestas, como para corrientes. No obstante, si el sistema no es equilibrado, no se cumple la relación de desfase de 120° entre las componentes de las tensiones fase-neutro y las corrientes, por lo que las deducciones anteriores sólo serán válidas para tensiones compuestas.

2.3 Transformaciones

Una vez hecho el cambio de base, las tensiones y corrientes del sistema girarán con velocidad angular ω sobre el plano Π , definido por los ejes α, β . No obstante, lo que realmente interesa es que los vectores espaciales de tensión y corrientes permanezcan fijos en una determinada posición, de modo que en régimen permanente sea un vector constante. Esto se consigue definiendo un sistema de referencia que gire sobre el plano Π a la misma

velocidad ω que el vector espacial, de modo que el vector permanezca fijo en este nuevo sistema.

La nueva base se define mediante dos ejes, d, q , que giran en el plano Π en torno a un tercer eje, 0 , coincidente con el eje γ . La Figura 2.12 muestra como se realiza el cambio de ejes sobre el plano Π .

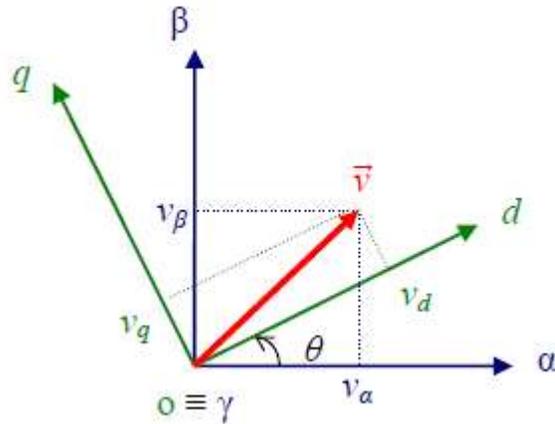


Figura 2.12 Cambio de base entre los ejes α, β, γ a los nuevos ejes $d, q, 0$.

A partir del ángulo θ de rotación de los ejes d, q , se puede definir la matriz $[T]_{\alpha\beta\gamma/dq0}$ que permite el cambio de base de α, β, γ a $d, q, 0$, definido en la ecuación (2.6).

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = [T]_{\alpha\beta\gamma/dq0} \cdot \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ b_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde:

$$[T]_{\alpha\beta\gamma/dq0} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\left\| [T]_{\alpha\beta\gamma/dq0} \right\| = 1;$$

$$[T]_{\alpha\beta\gamma/dq0}^{-1} = [T]_{\alpha\beta\gamma/dq0}^T$$

Finalmente, se ha conseguido cambiar el sistema de referencia del vector espacial desde el dominio temporal desde el dominio temporal abc , hasta el dominio de ejes giratorios dq . Este cambio de ejes se conoce con el nombre de *transformación de Park*.

La transformada de Park es la matriz ortonormal que combina las dos transformaciones anteriores (2.4) y (2.6) para permitir el cambio de base directo desde abc a $dq0$. La matriz P resultante, definida en la ecuación (2.7) es la matriz de transformación de Park.

$$\begin{aligned}
 P &= [T]_{\substack{\alpha\beta\gamma \\ dq0}} \cdot [T]_{\substack{abc \\ \alpha\beta\gamma}} = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

donde,

$\theta = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \theta_0$: es el ángulo de rotación de los ejes dq .

$\theta_0 = \theta(0)$: es el ángulo inicial entre los ejes dq y el vector espacial de referencia.

$\omega = 2\pi f$: es la velocidad angular de los ejes dq .

En la nueva base los ejes dq giran sobre el plano Π a la misma velocidad angular ω que el vector espacial v , tal y como se muestra en la Figura 2.13. Este vector espacial aparecía como rotante en la base abc , pero al girar ahora a igual velocidad que los nuevos ejes, se transforma en un vector fijo en la base $dq0$.

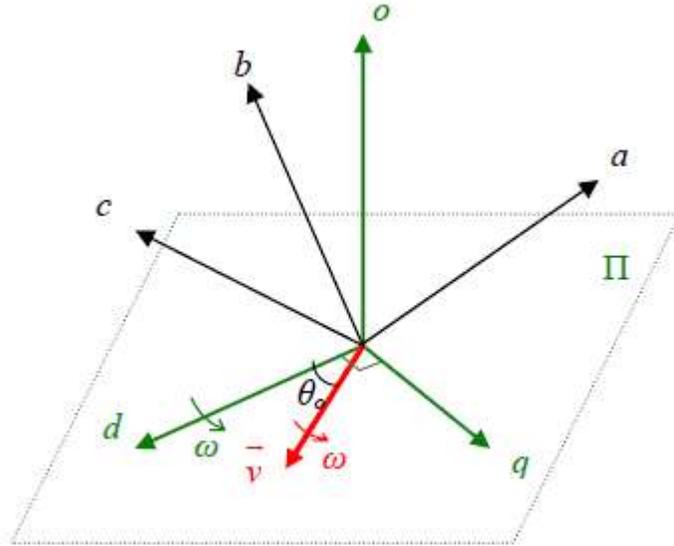


Figura 2.13 Representación del vector espacial v en la nueva base $dq0$.

La transformación de Park convierte las componentes 'abc' del sistema trifásico a otro sistema de referencia 'dq0'. El objetivo de la transformación consiste en convertir los valores trifásicos 'abc', variables sinusoidalmente en el tiempo, a valores constantes 'dq0', en régimen permanente. El vector con las componentes del nuevo sistema de referencia $[x_r]$ se obtiene multiplicando el vector de coordenadas trifásicas $[x]$ por la matriz de transformación $[P]$, según la expresión (2.8).

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{bmatrix} = [x_r] = [P] \cdot [x] = [P] \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A partir de $\theta = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \theta_0$, cuando la velocidad angular ω es constante, la transformación se puede expresar según la expresión (2.9).

$$[P] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega \cdot t + \theta_0) & \cos\left(\omega \cdot t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\omega \cdot t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\omega \cdot t + \theta_0) & -\sin\left(\omega \cdot t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\omega \cdot t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

De tal forma que en el espacio vectorial queda representada como se ilustra en la Figura 2.14

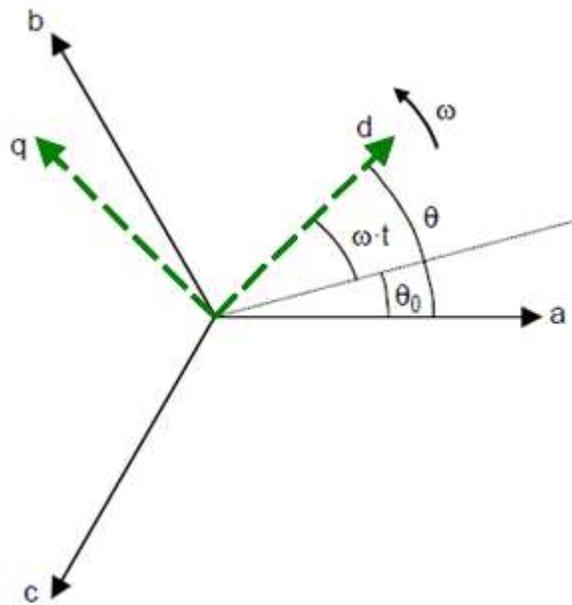


Figura 2.14 Sistemas de referencia trifásicos y D-Q

Si se considera el modelo de un sistema trifásico en el espacio de estado (2.10), que se desea transformar al dominio 'dq0'.

$$\frac{d}{dt}[x] = [A] \cdot [x] + [B] \cdot [u] \quad (2.10)$$

Si se consideran las variables transformadas (2.11), se obtiene la expresión en el espacio de estado (2.12) en el dominio de Park.

$$[x_r] = [P] \cdot [x] \rightarrow [x] = [P]^T \cdot [x_r] ; [u_r] = [P] \cdot [u] \rightarrow [u] = [P]^T \cdot [u_r] \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt}[x_r] = [A_r] \cdot [x_r] + [B_r] \cdot [u_r] \quad (2.12)$$

Se puede demostrar que las matrices transformadas $[A_r]$ y $[B_r]$ se expresan según (2.13).

$$[A_r] = [P] \cdot [A] \cdot [P]^T - [P] \cdot \frac{d}{dt} [P]^T = [P] \cdot [A] \cdot [P]^T - \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$[B_r] = [P] \cdot [B] \cdot [P]^T$$

Suele ser común que en el análisis de un sistema trifásico de tensiones sea simétrico y equilibrado, y que la carga trifásica esté equilibrada. También es habitual encontrar aplicaciones o cargas donde el neutro está aislado. En estas condiciones, las componentes homopolares son nulas y la aplicación de la transformación de Park o 'dq' reduce el número de variables del sistema, al pasar de tres variables trifásicas 'abc' a dos variables 'dq' (de valor constante en régimen permanente).

En el capítulo 3 se describe como la matriz de transformación de Park puede ser reducida a una matriz de rango 2 para sistemas eléctricos balanceados.

Capítulo 3

La transformación de Park reducida

3.1 Introducción

Debido al gran número de operaciones que se realizan con las magnitudes propias de un sistema eléctrico, tensiones, intensidades, reactancias, etc., se realizará un cambio de variable para facilitar las operaciones y poder realizar a su vez un cálculo más rápido y directo.

En este capítulo se trabajará con dos ejes, retardado uno 90° respecto al otro, con un tercer eje (ó secuencia) homopolar para posibles desequilibrios, como se comentará en el desarrollo de este, en lugar de trabajar con los tres ejes solidarios a las tres fases, es decir, separados 120° .

La finalidad de realizar un cambio de variables, es sustituir un sistema recorrido por tres intensidades i_a, i_b, i_c por otro recorrido por dos, i_d, i_q , y eventualmente una tercera i_0 . Un sistema de referencia con una velocidad angular ω ó $\omega = 0$, i_α, i_β, i_0 , si se trabaja con un sistema de referencia estacionario, i_α, i_β, i_0 , es decir, un caso particular del sistema anterior 'dq' pero con velocidad angular nula.

3.2 Transformación en voltajes y corrientes

La herramienta esencial para el estudio de sistemas eléctricos trifásicos es la transformación de Park. Esta transformación consiste en reemplazar las componentes trifásicas abc por tres componentes ficticios como $dq0$. La transformación de Park, como ya se ha visto, esta expresada como se muestra en la ecuación (3.1)

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

En el análisis de sistemas eléctricos trifásicos es muy común trabajar con corrientes eléctricas y voltajes, ya que de esto se parte para el cálculo de cualquier otro parámetro eléctrico, los voltajes para un sistema eléctrico de tres fases a, b, c , con magnitudes iguales, se pueden expresar como se muestra en la ecuación (3.2).

$$v_a = v_b = v_c \quad (3.2)$$

Los voltajes v_a, v_b, v_c , están desfasados 120° uno respecto del otro. La ecuación (3.2) también se puede expresar de forma vectorial como se muestra en la ecuación (3.3).

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{max} \cos(\omega t) \\ V_{max} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ V_{max} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

De la ecuación (3.3) se puede aplicar la transformación de Park para hacer la transformación de voltajes de abc a $dq0$, dicha transformación se expresa como la ecuación (3.4)

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \theta & -\sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La expresión de las ecuaciones de voltaje dq0 quedan expresados como se muestra en la ecuación (3.5) para un sistema trifásico.

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} v_a \cdot \cos(\theta) + v_b \cdot \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + v_c \cdot \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -v_a \cdot \sin(\theta) - v_b \cdot \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) - v_c \cdot \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{v_a}{\sqrt{2}} + \frac{v_b}{\sqrt{2}} + \frac{v_c}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

donde la v_0 es la representación para posibles desequilibrios del sistema.

Tratándose de un sistema trifásico en equilibrio ó balanceado donde la suma de voltajes es cero, es decir, $v_a + v_b + v_c = 0$ se tiene entonces la expresión (3.6)

$$v_c = -v_a - v_b \quad (3.6)$$

Sustituyendo la expresión (3.6) en la ecuación de voltajes (3.4), la transformación de Park queda como se expresa en la ecuación (3.7).

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \theta & -\sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ -v_a - v_b \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Tomando en cuenta que para un sistema equilibrado, el voltaje $v_0 = 0$, por tanto, la ecuación (3.7) queda expresada como se muestra en la ecuación (3.8).

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} v_a \cdot \cos(\theta) + v_b \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + (-v_a - v_b) \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -v_a \cdot \sin(\theta) - v_b \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + (v_a + v_b) \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{v_a}{\sqrt{2}} + \frac{v_b}{\sqrt{2}} + \frac{-v_a - v_b}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

donde $\frac{v_a}{\sqrt{2}} + \frac{v_b}{\sqrt{2}} + \frac{-v_a - v_b}{\sqrt{2}} = 0$, por lo tanto, se tiene

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} v_a \cdot \cos(\theta) + v_b \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + (-v_a - v_b) \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -v_a \cdot \sin(\theta) - v_b \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + (v_a + v_b) \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Aplicando reducciones algebraicas y algunas identidades trigonométricas, la ecuación (3.8) puede quedar representada en su expresión reducida tal y como se muestra en la ecuación (3.9).

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \sin(\theta) \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) es la transformación de Park reducida de voltajes, con la que se trabajará en sistemas trifásicos balanceados, como se nota, esta transformación no toma en cuenta el término v_0 , ya que se supone un sistema ideal que no demuestra desequilibrio alguno, por tanto la expresión (3.9) también puede representarse como se muestra en seguida.

$$[P_r] = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \sin(\theta) \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De la expresión (3.8), se toman las ecuaciones para v_d y v_q , las cuales están expresadas en la ecuación (3.10)

$$v_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ v_a \left[\cos(\theta) - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] + v_b \left[\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \right\} \quad (3.11)$$

$$v_q = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ v_a \left[-\sin(\theta) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] + v_b \left[-\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \right\}$$

De las expresiones mostradas en (3.11) se lleva a cabo la comprobación para los resultados de la transformación de Park reducida, iniciando con v_d y reduciendo para v_a y v_b .

Para v_a se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\cos \theta - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\cos \theta - \cos \theta \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\cos \theta \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) + \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{3}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right] = \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\cos \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene para v_b

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\cos \theta \cdot \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \sin \theta \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \cos \theta \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[-\cos \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[2 \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sin \theta \right] \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

De las demostraciones anteriores se puede expresar la ecuación para v_d , (3.12).

$$v_d = v_a \cdot \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + v_b \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \theta \quad (3.12)$$

Ahora resolviendo de la expresión (3.11) para v_q , y reduciendo de la misma forma para v_a y v_b se tiene la siguiente demostración.

Para v_a se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[-\sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[-\sin \theta + \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[-\sin \theta - \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[-\sin \theta \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{3}{2} \sin \theta \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right] = \sqrt{2} \left[\cos \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt{2} \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene para v_b

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[-\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[-\sin \theta \cdot \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \cos \theta \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sin \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos \theta \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[2 \cos \theta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cos \theta \right] = \sqrt{2} \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

De las demostraciones de v_a y v_b se tiene la expresión para v_q (3.13)

$$v_q = v_a \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + v_b \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \theta \quad (3.13)$$

Es claro observar de las ecuaciones (3.11) y (3.12) que son los mismos resultados que se expresaron en la ecuación de la transformación de Park reducida de voltajes (3.10). De la misma forma para la corriente se realiza el mismo procedimiento para la aplicación de la transformación de Park, sabiendo que para un sistema trifásico balanceado las corrientes están dadas como se expresan en (3.14).

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (3.14)$$

De la misma forma como en el análisis de voltajes, las corrientes también se pueden expresar de forma vectorial, como se muestra en (3.15).

$$i(t) = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{max} \cos(\omega t + \delta) \\ I_{max} \cos\left(\omega t + \delta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ I_{max} \cos\left(\omega t + \delta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Como se observa, el desfase entre ellas es, al igual que en los voltajes, de $\frac{2\pi}{3}$, sin embargo el desfase entre las tensiones y corriente (δ) depende de la impedancia de línea y de la carga. Por tanto, la transformación de Park para la corriente se expresa como en la ecuación (3.16)

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Tomando en cuenta que se esta tratando un sistema trifásico balanceado, donde se tiene que $i_c = -i_a - i_b$, se lleva a cabo en mismo procedimiento que se llevo con los voltajes y, por lo tanto, el resultado esta expresado en la ecuación (3.17)

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ -i_a - i_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} i_a \cdot \cos(\theta) + i_b \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + (-i_a - i_b) \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -i_a \cdot \sin(\theta) - i_b \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + (i_a + i_b) \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \sin(\theta) \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Como se esperaba, el resultado es semejante al que se obtuvo en la expresión (3.9), con la diferencia que ahora está dado en corrientes eléctricas del sistema, y por lo tanto, es el resultado para la transformación de Park reducida de corrientes. Donde la comprobación para llegar a estos resultados es el mismo procedimiento que se llevo anteriormente con los voltajes.

3.3 Transformación en enlaces de flujo

Los modelos empleados para la representación de los elementos del sistema son un aspecto importante que debe tenerse en cuenta cuando se estudia la dinámica de los sistemas eléctricos de potencia. Debe darse un trato especial al modelo de los elementos rotativos, ya que la dinámica se verá afectada por el comportamiento de sus masas rotativas. Entre más completo sea el modelo dinámico empleado, más confiables serán los resultados obtenidos en la simulación. El principal elemento del sistema de potencia, dado su comportamiento dinámico, es la máquina síncrona, de ahí la importancia de utilizar modelos detallados que representen la forma más exacta sus características dinámicas.

Cuando se presenta una perturbación en el sistema, existen interacciones dinámicas dentro de las máquinas síncronas debido a los cambios producidos en la armadura y en los enlaces de flujo.

Es común al estudiar la máquina síncrona, realizar algunas suposiciones que facilitan la obtención del modelo matemático que describe la misma. Estas suposiciones pueden resumirse en:

- El estator de la máquina está compuesto por un devanado trifásico simétrico, y en el cual cada devanado puede representarse como un devanado concentrado.
- La capacitancia de todos los devanados puede despreciarse, así como las pérdidas magnéticas debidas al ciclo de histéresis.
- Se considera que los circuitos magnéticos de la máquina son lineales y que las inductancias no dependen de la corriente. Adicionalmente, se supone que el cambio en la inductancia mutua entre estator y rotor es de forma senoidal pura, es decir, no contiene componentes de frecuencias múltiplos de la fundamental.
- La velocidad del rotor de la máquina es aproximadamente igual a la velocidad síncrona del campo magnético del entrehierro, en los estados transitorio y subtransitorio.

Puesto que la máquina síncrona puede verse como un conjunto de circuitos que se encuentran acoplados mutuamente, los enlaces de flujo de cada devanado de cada circuito (estator y rotor) dependen de las corrientes que circulan por los otros devanados. Existe acoplamiento entre los devanados de estator y rotor, así como entre los devanados de cada circuito, es decir, entre los devanados del estator y los devanados del rotor. Una característica fundamental de las inductancias propias y mutuas del estator, así como de las inductancias del estator y rotor es que dependen de la posición del rotor y por consiguiente son función del tiempo. Por el contrario, las inductancias propias y mutuas de los devanados del rotor no dependen de la posición que tenga el rotor de la máquina. Esta característica de las inductancias del estator hace que las ecuaciones de enlaces de flujo para cada una de las fases sea difícil de resolver, puesto que los coeficientes que relacionan a estos flujos con las corrientes no son constantes. Una forma de resolver este inconveniente es encontrar una transformación que convierta los coeficientes de las ecuaciones de enlace en cantidades constantes, es decir, que no dependan de la posición del rotor. Esto se logra empleando la transformación de Park, cuyo fundamento matemático está basado en expresar las magnitudes eléctricas del estator (enlaces, tensiones y corrientes) que se encuentran en el marco de referencia *abc* (tres fases) en el marco de

referencia que tienen las magnitudes del rotor: ejes dq . Si esto se logra, las nuevas cantidades referenciadas en este marco no dependerán de la posición del rotor, ya que estarían rotando a la misma velocidad de este.

La transformación que se emplee para convertir las cantidades del estator al marco de referencia del rotor debe permitir el proceso inverso: convertir cualquier cantidad del rotor al marco de referencia del estator. Para que exista una transformación única que realice esta conversión inversa, debe adicionarse las coordenadas d y q , otra coordenada llamada de secuencia cero, la cual se define de igual forma que en el método de las componentes simétricas. De esta forma el sistema coordenado del rotor estará compuesto por tres coordenadas $dq0$.

La transformación de Park, la cual presenta las características anteriores mostradas en la ecuación (3.1); una de sus características importantes de esta transformada es su ortogonalidad, ya que la inversa de esta matriz es igual a su traspuesta, haciendo que se cumpla $[P] \cdot [P]^T = 1$. La ecuación matricial de los enlaces de flujo en función de corrientes se obtiene expresando las corrientes de fase de estator (i_a, i_b, i_c) en coordenadas $dq0$ del rotor, obteniendo así:

$$\begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & kM_f & kM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ 0 & kM_f & 0 & L_f & L_{fD} & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & L_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

donde:

$\psi_0, \psi_d, \psi_q, i_0, i_d, i_0$: son las componentes en eje 0, d y q de los flujos y corrientes del estator.

$\psi_f, \psi_D, \psi_Q, i_f, i_D, i_Q$: son los enlaces de flujo y corrientes del devanado de campo y de los devanados amortiguadores del eje d y q respectivamente.

L_0, L_d, L_q : inductancia de los devanados 0, d y q . Dependen de las inductancias propias y mutuas entre devanados del estator y rotor de la siguiente manera:

- ✓ $L_0 = L_s - 2M_s$ (L_s : valor mínimo de la inductancia propia de un devanado de fase del estator. M_s : inductancia mutua entre devanados del estator).
- ✓ $L_d = L_s + M_s + 3\Delta L_s/2$ (ΔL_s : amplitud de la parte variable de la inductancia propia de un devanado de fase del estator).
- ✓ $L_d = L_s + M_s - \frac{3\Delta L_s}{2}$

L_f, L_D, L_Q : son las inductancias propias de los devanados de campo y de los devanados amortiguadores de los ejes d y q , respectivamente.

L_{fD} : es la inductancia mutua entre el devanado de campo y el devanado amortiguador del eje d .

M_f, M_D, M_Q : es la inductancia mutua entre un devanado de fase del estator y el devanado de campo, el devanado amortiguador del eje d y q , respectivamente.

k : es la constante escogida como $\sqrt{3/2}$. Este valor garantiza lo mencionado anteriormente sobre la ortogonalidad de la transformación, lo cual hace también que la potencia calculada sea idéntica en los dos marcos de referencia (abc y $dq0$).

Todas las inductancias que acompañan a las corrientes constantes y demás, las cantidades en un eje determinado forman un conjunto independiente de ecuaciones. Para el eje d se tienen tres devanados: devanado de campo (“ f ”), devanado amortiguador del rotor en el eje d (“ D ”) y devanado ficticio que representa el efecto del devanado del estator sobre el eje d del rotor (“ d ”). Para el eje q existen dos devanados: el devanado amortiguador del rotor en el eje q (“ Q ”) y un devanado ficticio, análogo al devanado d , para representar el efecto del estator sobre el eje q del rotor (“ q ”). El eje 0 se encuentra perpendicular a los ejes d y q a lo largo del eje de rotación del rotor. Sobre este eje se encuentra el devanado 0 , que únicamente lleva corriente cuando por el estator de la máquina circulan corrientes desbalanceadas, de forma que $i_a + i_b + i_c \neq 0$. En este caso se analiza la operación balanceada de la máquina, por lo que el devanado 0 es omitido.

3.4 Simulación de la transformación de Park

Una de las formas de comprobar las respuestas que se obtienen de la transformación de Park, es mediante la simulación de sus ecuaciones, las cuales se llevaran a cabo con un software que lleva por nombre *Simnon*. A continuación se da un breve resumen del software.

Simnon es un paquete de simulación para sistemas dinámicos prácticamente de cualquier tipo, ya que es capaz de resolver ecuaciones diferenciales y en diferencias lineales y no lineales con coeficientes variables o constantes. Es necesario mencionar que directamente no resuelve ecuaciones en derivadas parciales.

En este paquete se pueden llevar a cabo la simulación de sistemas en tiempo continuo, tiempo discreto y de sistemas combinados (tiempo continuo y discreto a la vez).

- La pantalla de *Simnon* es como se muestra en la figura 3.1 y 3.2, con su respectiva información.

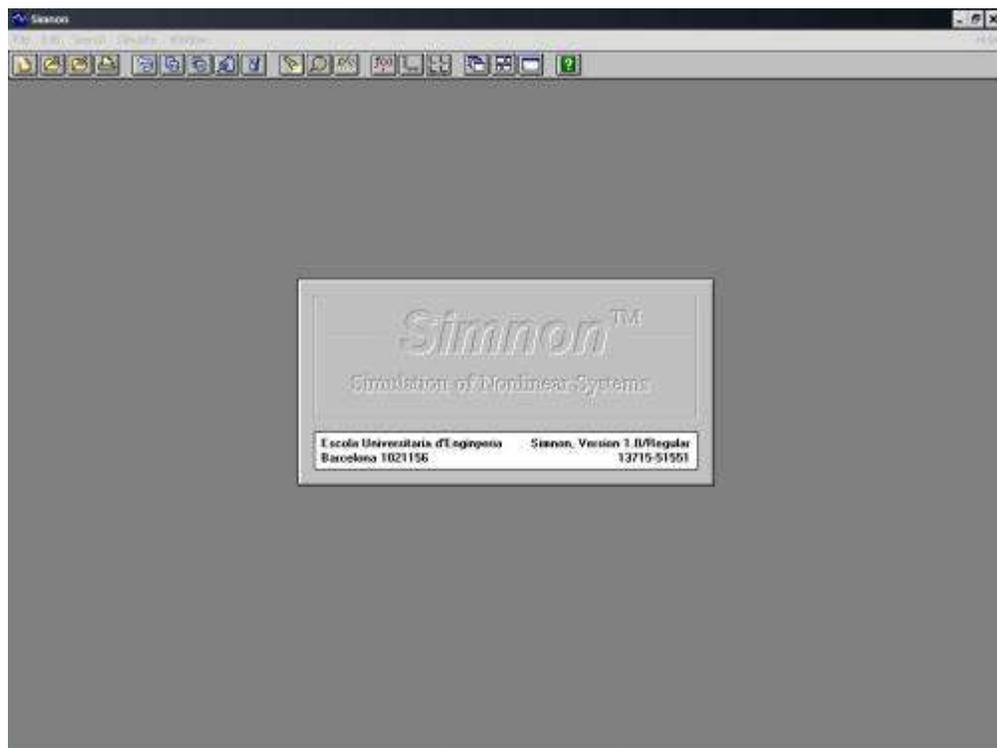


Figura 3.1 Pantalla de inicio del *Simnon*.

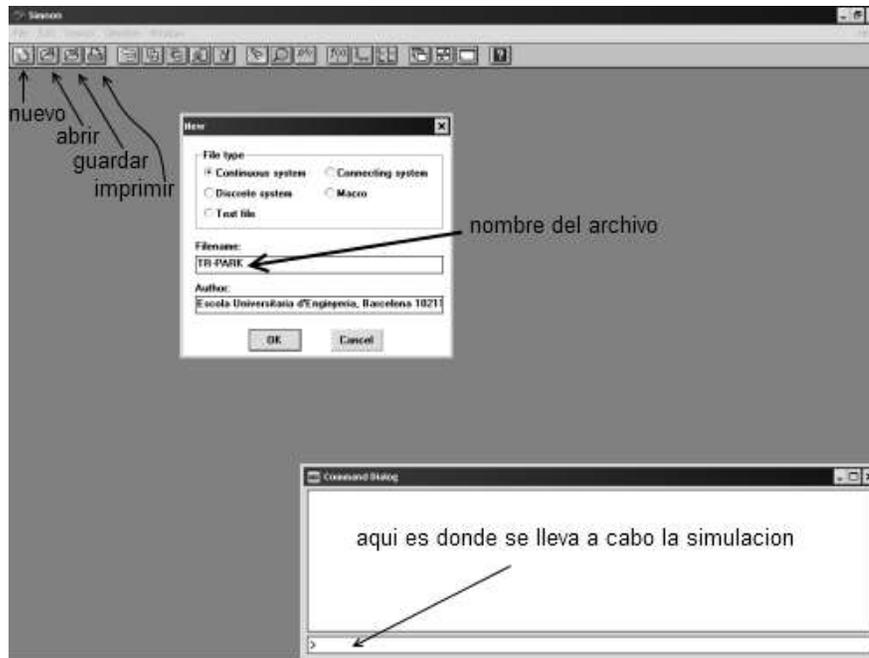


Figura 3.2 Algunas descripciones del *Simnon*

En la figura 3.2 se muestra algunas descripciones del *Simnon*, donde después de darle el nombre al programa que se va a crear, aparece una ventana como se muestra en la figura 3.3.

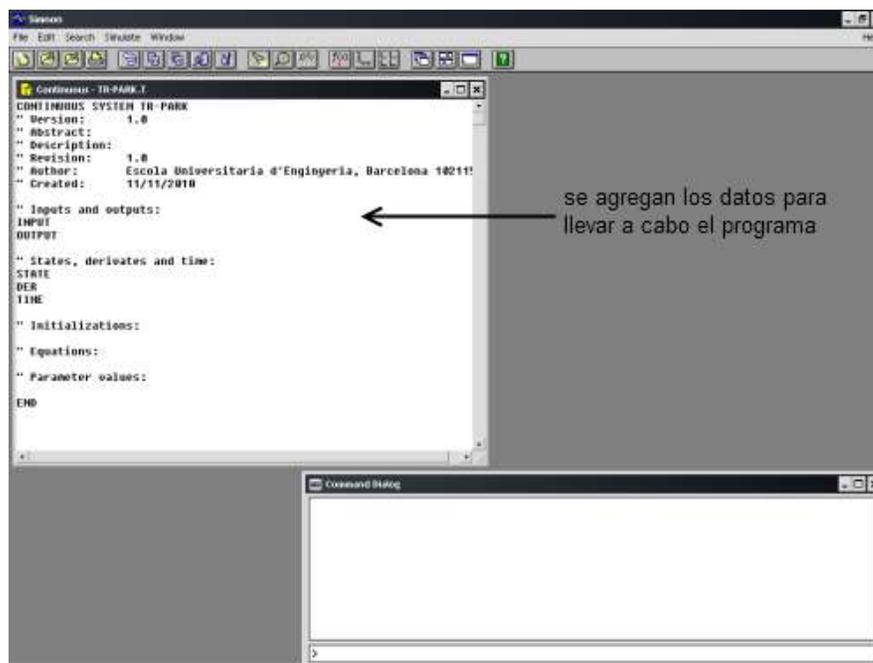


Figura 3.3 Inicio de la programación en *Simnon*.

La Figura 3.3 muestra una ventana con un código en el cual pide datos para que se pueda ejecutar la programación ó simulación.

Después de haber dado una breve explicación del software a utilizar para la simulación, se procede a la comprobación de la transformación de Park. Como inicio, se parte observando la señal de un sistema trifásico; ecuación de voltajes (3.3), donde el código para el software mencionado queda como se muestra en seguida.

```
TIME t

" Equations:
Ua=Um*cos(w*t)
Ub=Um*cos(w*t - (2*3.1416)/3)
Uc=Um*cos(w*t+(2*3.1416)/3)
" Parameter values:
Um:240
w:377

END
```

El resultado de las señales del código anterior esta representado en la figura 3.4

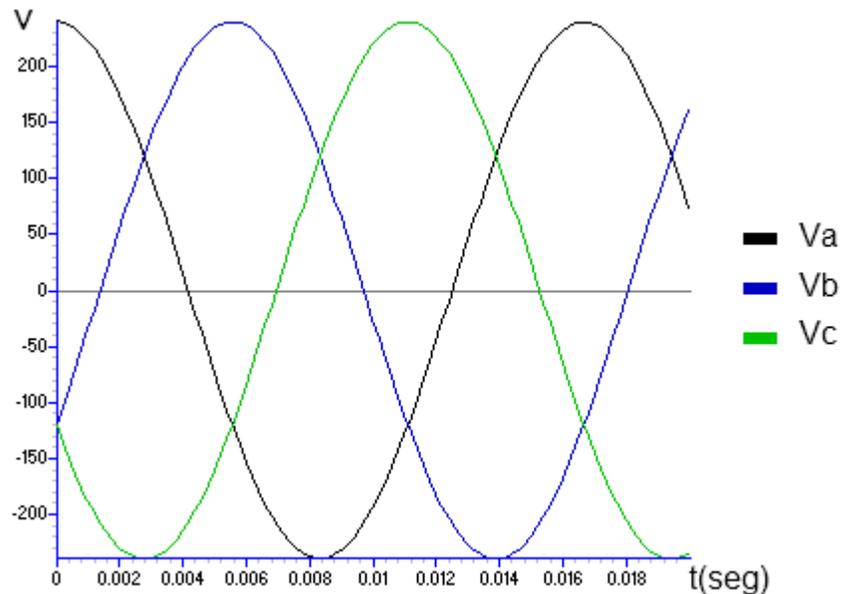


Figura 3.4 Señal de tensión trifásica.

En la figura 3.4 se muestra una señal trifásica senoidal pura, la transformación de esta señal se lleva a cabo como se muestra en la figura 3.5.



3.5 Diagrama de bloque de la transformación de Park

Como se observa en la Figura 3.5, es el procedimiento que se lleva a cabo para la representación de la transformación de Park; ahora observaremos introduciendo las ecuaciones obtenidas en el simulador; ecuación (3.5), el código queda como se muestra en seguida.

CONTINUOUS SYSTEM PARK

TIME t

" Equations:

```
Ua=Um*cos(w*t)
Ub=Um*cos(w*t-(2*3.1416)/3)
Uc=Um*cos(w*t+(2*3.1416)/3)
```

"Aplicando la transformacion de Park

```
Ud=k*(Ua*cos(w*t)+Ub*cos(w*t-2.09439)+Uc*cos(w*t+2.09439))
Uq=k*(-Ua*sin(w*t)-Ub*sin(w*t-2.09439)-Uc*sin(w*t+2.09439))
U0=k*((Ua/x)+(Ub/x)+(Uc/x))
```

```
k=sqrt(2/3)
x=sqrt(2)
```

" Parameter values:

```
Um:240
w:377
```

END

Del código anterior se tienen los siguientes resultados de la transformación de Park representados en la Figura 3.6 y Figura 3.7.

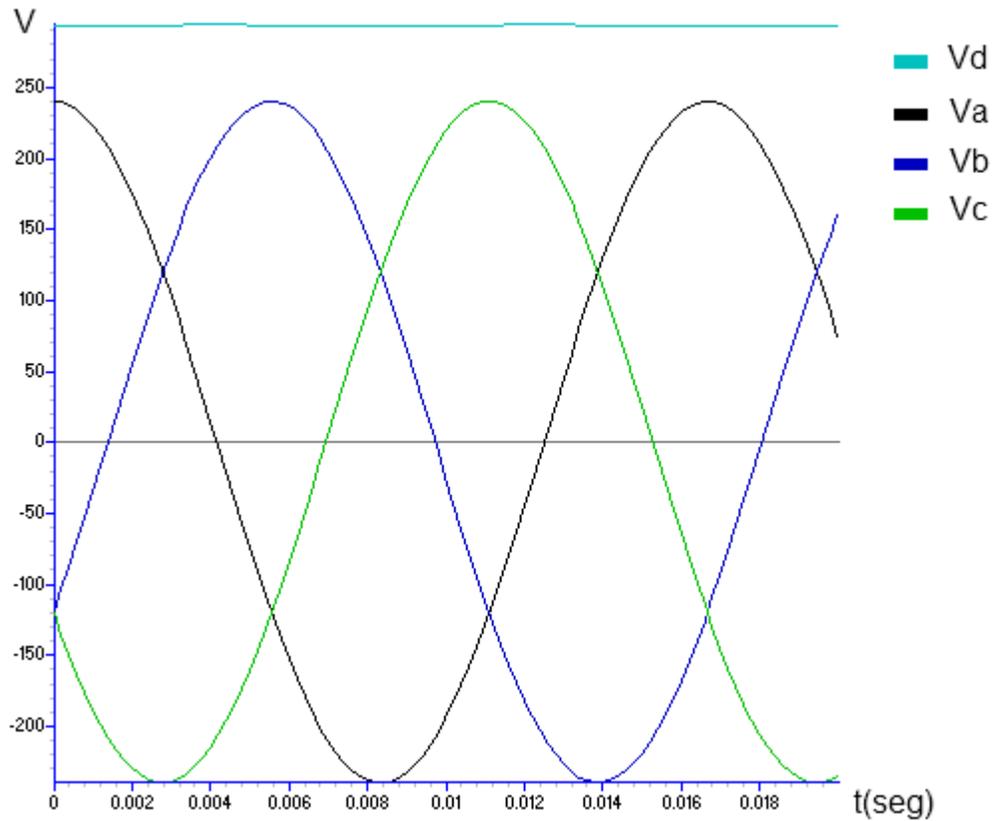


Figura 3.6 Señal de voltajes con transformación de Park.

Como se observa en la Figura 3.6, tomando como referencia la señal trifásica de entrada, al aplicar la transformación de Park se puede notar que el voltaje V_d es constante. En seguida se muestran los resultados para los voltajes V_q y V_0 .

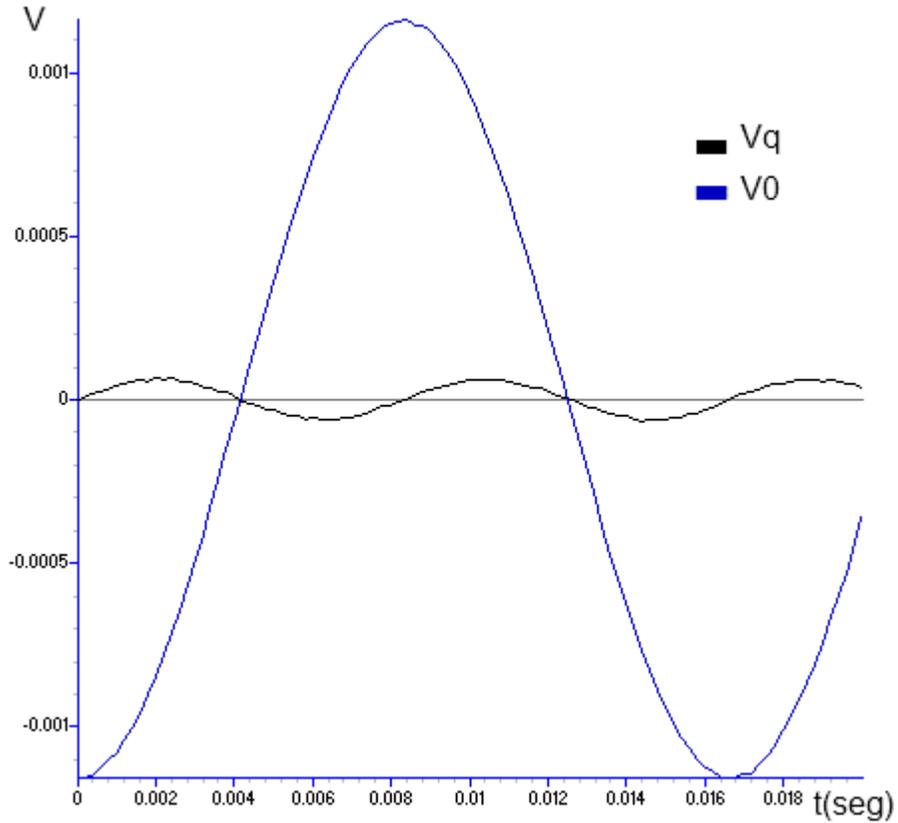


Figura 3.7 Voltajes transformados, V_q y V_0 .

Donde se observa que los valores de la Figura 3.7 son prácticamente cero. De la misma forma se puede aplicar también la transformación inversa de Park, para regresar a las ecuaciones originales de nuestro sistema, dicha transformación está representada en (3.19).

$$[P]^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Al aplicar la transformación (3.19) a los voltajes V_d , V_q , V_0 para regresar a los valores originales (V_a , V_b y V_c), la expresión queda representada en (3.20)

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Donde de forma gráfica la transformación se puede representar como se muestra en la Figura 3.8.



Figura 3.8 diagrama de bloque de la transformación inversa de Park.

La Figura 3.8 es una representación gráfica de cómo se aplica dicha transformación para regresar a los valores originales. El código para la expresión (3.20) queda de la siguiente forma.

```
CONTINUOUS SYSTEM INUPARK
```

```
TIME t
```

```
" Equations:
```

```
Ua=Um*cos(w*t)
```

```
Ub=Um*cos(w*t-(2*3.1416)/3)
```

```
Uc=Um*cos(w*t+(2*3.1416)/3)
```

```
"Aplicando la transformacion de Park
```

```
Ud=k*(Ua*cos(w*t)+Ub*cos(w*t-2.09439)+Uc*cos(w*t+2.09439))
```

```
Uq=k*(-Ua*sin(w*t)-Ub*sin(w*t-2.09439)-Uc*sin(w*t+2.09439))
```

```
U0=k*((Ua/x)+(Ub/x)+(Uc/x))
```

```

"Aplicando la Transformacion inversa de Park

U1=k*(Ud*cos(w*t)-Uq*sin(w*t)+U0/x)
U2=k*(Ud*cos(w*t-2.09439)-Uq*sin(w*t-2.09439)+U0/x)
U3=k*(Ud*cos(w*t+2.09439)-Uq*sin(w*t+2.09439)+U0/x)

k=sqrt(2/3)
x=sqrt(2)

" Parameter values:
Um:240
w:377

END

```

Donde del código anterior para la transformación inversa de Park se tiene el resultado mostrado en la Figura 3.8.

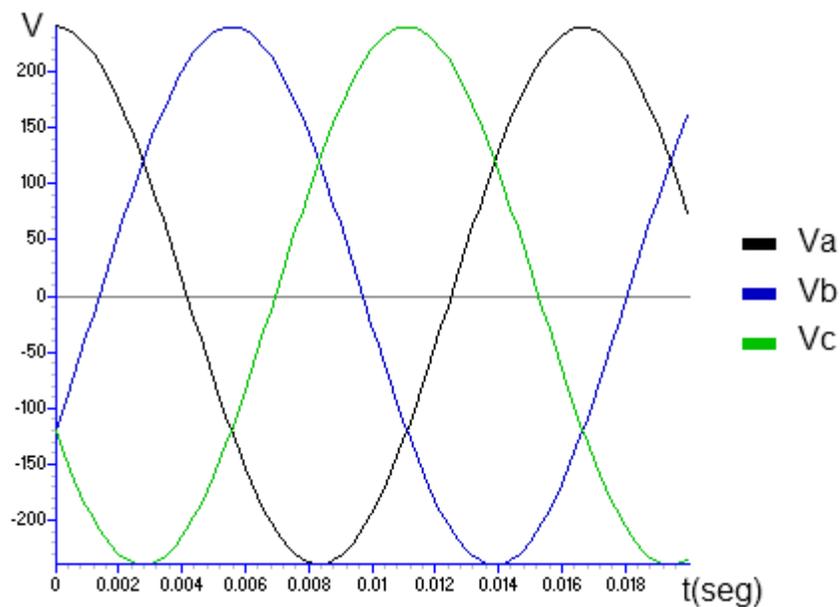


Figura 3.9 Señal de la transformación inversa de Park.

Como se esperaba de la Figura 3.9 se observa que son las mismas señales (V_a , V_b y V_c) que se habían introducido al inicio para la transformación de Park, ya que de esta forma es como regresamos a los valores originales de nuestro sistema.

En el siguiente apartado se analiza la simulación para la transformación de Park reducida y se comprobarán los valores obtenidos anteriormente.

3.5 Simulación de la transformación de Park reducida.

De la misma forma como se realizó anteriormente con la transformación de Park, ahora se hará una simulación para la transformación de Park reducida, ecuación (3.9), donde su representación grafica se muestra en la Figura 3.10.



Figura 3.10 Representación grafica de la transformación de Park reducida.

Como se puede ver en la Figura 3.10 sólo se trabajarán con dos señales de entrada y su respuesta será de la misma forma, dos señales de salida. El código para dicha transformación queda como se muestra en seguida.

```
CONTINUOUS SYSTEM REDPARK

TIME t

" Initializations:

" Equations:
Va=Um*cos(w*t)
Ub=Um*cos(w*t-(2*3.1416)/3)

"Transformacion reducida de Park

Ud=K*(Va*sin(w*t+1.04719)+Ub*sin(w*t))
Uq=K*(Va*cos(w*t+1.04719)+Ub*cos(w*t))

K=sqrt(2)

" Parameter values:
Um:240
w:377

END
```

Donde la respuesta del código anterior se representa en la Figura 3.11

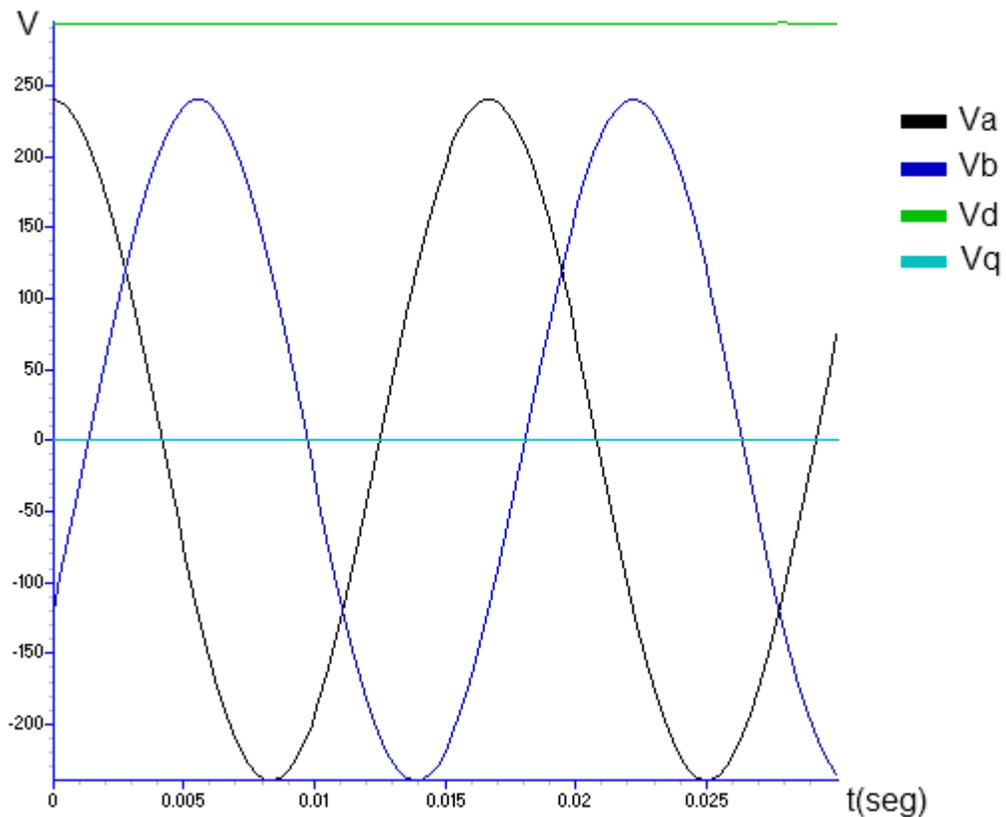


Figura 3.11 Respuesta de la transformación de Park reducida.

Como se puede ver en la Figura 3.11 las señales de voltaje de entrada ahora sólo se refiere a dos (V_a y V_b), también se puede observar que se tiene el mismo resultado que en la simulación anterior (transformación de Park) ya que V_d se hace constante y V_q se hace cero, señalando que se trata de un sistema balanceado. De la misma forma, aplicando la transformación inversa de Park reducida se vuelve a los valores originales, tal y como se muestra en la Figura 3.12.



Figura 3.12 Transformación inversa de Park reducida

Como se ha visto hasta ahora sólo se ha hecho la comprobación de los resultados de la transformación de Park y Park reducida mediante simulaciones. Después de haber comprobado que en ambos se llega al mismo resultado para sistemas balanceados, en el capítulo 4 se hace el desarrollo para la aplicación de la transformación de Park reducida.

Capítulo 4

Aplicación de la transformación de Park reducida

4.1 Introducción

Como se ha venido estudiando, anteriormente se ha dicho que la transformación de Park reducida facilita el estudio del comportamiento de un sistema de potencia. En esta sección se realiza la aplicación de dicho método.

El modelo de los sistemas de potencia trifásicos, donde las máquinas rotatorias son sin duda el elemento más importante. Así, el modelo matemático de una máquina rotativa está formado por un sistema de ecuaciones diferenciales que ligan entre si las diversas tensiones e intensidades de los devanados del rotor y estator de la máquina con el ángulo de giro y la excitación mecánica. Comenzando con el trabajo clásico de Park, tradicionalmente se simplifican estas ecuaciones mediante una transformación ortogonal de variables que reduce el sistema a otro estacionario; como se ha venido diciendo anteriormente; recogiendo en la transformación la dependencia de las variables eléctricas respecto al ángulo de giro.

La presentación de la transformación de Park suele hacerse con consideraciones de índole geométrica, derivadas del comportamiento equilibrado de las variables ligadas al estator cuando la máquina funciona en régimen de sincronismo.

4.2 Un sistema eléctrico básico transformado

Como se ha visto anteriormente se ha hablado de un sistema trifásico del cual se hace el análisis, en este capítulo se realiza un análisis más detallado en el que se trabajara con voltajes y corrientes. Un sistema básico trifásico, se puede representar de forma gráfica como se muestra en la Figura 4.1.

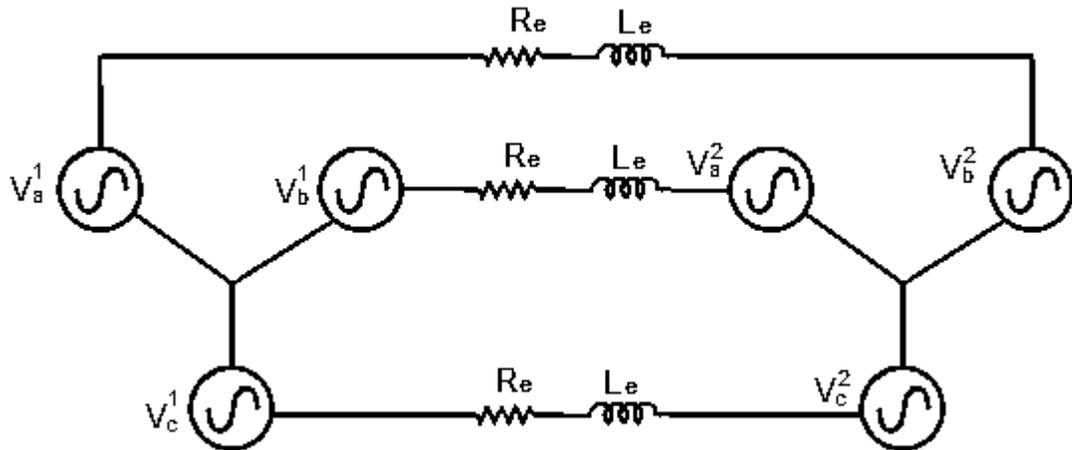


Figura 4.1 Sistema básico trifásico.

Suponiendo que el sistema de la Figura 4.1 es un sistema trifásico balanceado, su análisis se puede realizar por fases, es decir, de forma monofásica, en donde, de forma gráfica puede quedar representado como en la figura 4.2.

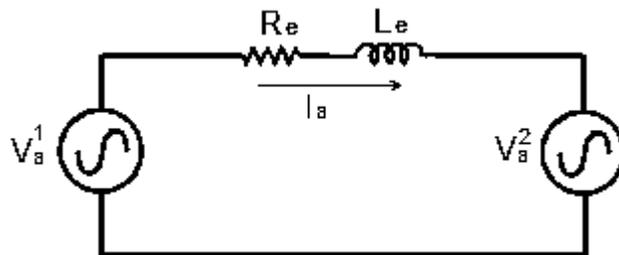


Figura 4.2 sistema monofásico.

Del circuito de la figura 4.2 se aplica las leyes de voltajes de kirchhoff donde su expresión queda como se muestra en la ecuación (4.1).

$$V_a^1 = V_a^2 + R_e \cdot i_a + L_e \cdot \frac{di}{dt} \quad (4.1)$$

Partiendo de la expresión (4.1) para un sistema trifásico las ecuaciones de voltaje quedan expresadas en la ecuación (4.2).

$$\begin{bmatrix} V_a^1 \\ V_b^1 \\ V_c^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a^2 \\ V_b^2 \\ V_c^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_e & 0 & 0 \\ 0 & R_e & 0 \\ 0 & 0 & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & 0 & 0 \\ 0 & L_e & 0 \\ 0 & 0 & L_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_a \\ \hat{i}_b \\ \hat{i}_c \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Aplicando la transformación de Park al sistema de ecuaciones (4.2) ó cambiando a un sistema de referencia dq0, se tiene a continuación la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} [V^1]_{dq0} &= [P] \cdot [V^1]_{abc} = [P] \cdot \left\{ [V^2]_{abc} + R_e \cdot I_3 \cdot [i]_{abc} + L_e \cdot I_3 \cdot \frac{d}{dt} [i]_{abc} \right\} \\ [V^1]_{dq0} &= [P] \cdot [V^2]_{abc} + [P] \cdot R_e \cdot I_3 \cdot [i]_{abc} + [P] \cdot L_e \cdot I_3 \cdot \frac{d}{dt} [i]_{abc} \\ [V^1]_{dq0} &= [V^2]_{dq0} + R_e \cdot I_3 \cdot [P] \cdot [i]_{abc} + L_e \cdot I_3 \cdot [P] \cdot \frac{d}{dt} [i]_{abc} \\ [V^1]_{dq0} &= [V^2]_{dq0} + R_e \cdot I_3 \cdot [i]_{dq0} + L_e \cdot I_3 \cdot [P] \cdot \frac{d}{dt} [i]_{abc} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde, para $[P] \cdot [\hat{i}]_{abc}$ de la ecuación (4.3) se tiene,

$$\frac{d}{dt} [i]_{dq0} = \frac{d}{dt} [P] \cdot [i]_{abc} = [P] \frac{d}{dt} [i]_{abc} + \frac{d[P]}{dt} \cdot [i]_{abc}$$

por lo que

$$[P] \frac{d}{dt} [i]_{abc} = \frac{d}{dt} [i]_{dq0} - \frac{d[P]}{dt} \cdot [i]_{abc}$$

o bien

$$\begin{aligned} [i]_{abc} &= [P]^{-1} [i]_{dq0} \quad ; \quad [P] \cdot \frac{d}{dt} [i]_{abc} = \frac{d}{dt} [i]_{dq0} - \frac{d[P]}{dt} \cdot [i]_{abc} \\ [P] \cdot \frac{d}{dt} [i]_{abc} &= \frac{d}{dt} [i]_{dq0} - \frac{d[P]}{dt} \cdot [P]^{-1} [i]_{dq0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

entonces sustituyendo la ecuación (4.4) en la ecuación (4.3) se tiene lo siguiente

$$[V^1]_{dq0} = [V^2]_{dq0} + R_e \cdot I_3 \cdot [i]_{dq0} + L_e \cdot I_3 \left\{ \frac{d}{dt} [i]_{dq0} - \frac{d[P]}{dt} \cdot [P]^{-1} \cdot [i]_{dq0} \right\}$$

$$\begin{aligned}
[V^1]_{dq0} &= [V^2]_{dq0} + R_e I_3 [i]_{dq0} + L_e I_3 \frac{d}{dt} [i]_{dq0} - L_e I_3 \frac{d[P]}{dt} [P]^{-1} [i]_{dq0} \\
L_e I_3 \frac{d}{dt} [i]_{dq0} &= \left\{ L_e I_3 \frac{d[P]}{dt} [P]^{-1} - R_e I_3 \right\} [i]_{dq0} + \{ [V^1]_{dq0} - [V^2]_{dq0} \} \\
\frac{d}{dt} [i]_{dq0} &= \{ L_e I_3 \}^{-1} \left\{ \left(L_e I_3 \frac{d[P]}{dt} [P]^{-1} - R_e I_3 \right) [i]_{dq0} + ([V^1]_{dq0} - [V^2]_{dq0}) \right\} \\
\frac{d}{dt} [i]_{dq0} &= \left(\frac{d[P]}{dt} [P]^{-1} - R_e I_3 \right) [i]_{dq0} + \frac{1}{L_e} I_3 ([V^1]_{dq0} - [V^2]_{dq0}) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Por otro lado, puesto que

$$\begin{aligned}
\frac{d[P]}{dt} [P]^{-1} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \omega \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
\frac{d[P]}{dt} \cdot [P]^{-1} &= \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (4.6) en (4.5) el sistema de ecuaciones para $[\hat{i}]_{dq0}$ queda

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_e}{L_e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_e}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d^1 - V_d^2 \\ V_q^1 - V_q^2 \\ V_0^1 - V_0^2 \end{bmatrix} \\
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L_e} & -\omega & 0 \\ \omega & -\frac{R_e}{L_e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_e}{L_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_d^1 - V_d^2 \\ V_q^1 - V_q^2 \\ V_0^1 - V_0^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

En la expresión (4.7) se puede observar las corrientes de un sistema trifásico transformado en $dq0$, donde dicha expresión puede dar valores aún si el sistema está desbalanceado, mostrando los resultados en la componente 0. De igual forma, analizándose de forma ideal y suponiendo que el sistema en ningún momento presentaría desbalance alguno, aplicamos la transformación de Park reducida donde dicha expresión está dada en (3.10).

$$[P_r] = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \sin(\theta) \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Entonces aplicando la transformación de Park reducida a la expresión (4.2) se tiene

$$\begin{aligned} [V^1]_{dq} &= [P_r] \cdot [V^1]_{ab} = [P_r] \cdot \left\{ [V^2]_{ab} + R_e \cdot I_2 \cdot [i]_{ab} + L_e \cdot I_2 \cdot \frac{d}{dt} [i]_{ab} \right\} \\ \begin{bmatrix} V_d^1 \\ V_q^1 \end{bmatrix} &= [P_r] \cdot \begin{bmatrix} V_a^2 \\ V_b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \cdot I_2 \cdot [P_r] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix} \cdot I_2 \cdot [P_r] \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_d^1 \\ V_q^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_d^2 \\ V_q^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \cdot I_2 \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix} \cdot I_2 \cdot [P_r] \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Analizando $[P_r] \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$ de la ecuación (4.8)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} [P_r] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = [P_r] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} + \frac{d[P_r]}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

resolviendo para $[P_r] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$

$$[P_r] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} - \frac{d[P_r]}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

tomando en cuenta que $\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = [P_r]^{-1} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$ entonces se tiene

$$[P_r] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} - \frac{d[P_r]}{dt} [P_r]^{-1} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

entonces sustituyendo la ecuación (4.9) en (4.8) la expresión queda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_d^1 \\ V_q^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_d^2 \\ V_q^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \cdot I_2 \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix} \cdot I_2 \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} - \frac{d[P_r]}{dt} \cdot [P_r]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} V_d^1 \\ V_q^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_d^2 \\ V_q^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} I_2 \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix} I_2 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix} I_2 \frac{d[P_r]}{dt} [P_r]^{-1} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

resolviendo para $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix} I_2 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix} I_2 \frac{d[P_r]}{dt} [P_r]^{-1} - \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} I_2 \right\} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_d^1 - V_d^2 \\ V_q^1 - V_q^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix}^{-1} I_2 \left\{ \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix} I_2 [\hat{P}_r][P_r]^{-1} - \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} I_2 \right\} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix}^{-1} I_2 \begin{bmatrix} V_d^1 - V_d^2 \\ V_q^1 - V_q^2 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} &= \left\{ \frac{d[P_r]}{dt} [P_r]^{-1} - \begin{bmatrix} \frac{R_e}{L_e} & 0 \\ 0 & \frac{R_e}{L_e} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d^1 - V_d^2 \\ V_q^1 - V_q^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

por otro lado analizando $[\hat{P}_r][P_r]^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{d[P_r]}{dt} [P_r]^{-1} &= \sqrt{2}\omega \begin{bmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \cos(\theta) \\ -\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \\ \frac{d[P_r]}{dt} [P_r]^{-1} &= \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces la ecuación (4.10) queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{R_e}{L_e} & 0 \\ 0 & \frac{R_e}{L_e} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d^1 - V_d^2 \\ V_q^1 - V_q^2 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L_e} & -\omega \\ \omega & -\frac{R_e}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d^1 - V_d^2 \\ V_q^1 - V_q^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Comprobando los resultados mediante una simulación para la transformación de Park, donde el código para la representación grafica en el SIMNON, con las ecuaciones desarrolladas, queda como se muestra en seguida.

CONTINUOUS SYSTEM PST

" States, derivates and time:

```
STATE id iq i0
DER did diq di0
TIME t
```

" Initializations:

```
id:0
iq:0
i0:0
```

" Equations:

```
did=(-R/L)*id-w*iq+(1/L)*(U1d-U2d)
diq=w*id-(R/L)*iq+(1/L)*(U1q-U2q)
di0=(-R/L)*i0+(1/L)*(U10-U20)
```

```

U1a=U1m*cos(w*t)
U1b=U1m*cos(w*t-D)
U1c=U1m*cos(w*t+D)

U1d=k*(U1a*cos(w*t)+U1b*cos(w*t-D)+U1c*cos(w*t+D))
U1q=k*(-U1a*sin(w*t)-U1b*sin(w*t-D)-U1c*sin(w*t+D))
U1θ=k*((U1a/x)+(U1b/x)+(U1c/x))

U2a=U2m*cos(w*t)
U2b=U2m*cos(w*t-D)
U2c=U2m*cos(w*t+D)

U2d=k*(U2a*cos(w*t)+U2b*cos(w*t-D)+U2c*cos(w*t+D))
U2q=k*(-U2a*sin(w*t)-U2b*sin(w*t-D)-U2c*sin(w*t+D))
U2θ=k*((U2a/x)+(U2b/x)+(U2c/x))

"Transformacion inversa
ia=k*(cos(w*t)*did-sin(w*t)*diq+diθ/sqrt(2))
ib=k*(cos(w*t-D)*did-sin(w*t-D)*diq+diθ/sqrt(2))
ic=k*(cos(w*t+D)*did-sin(w*t+D)*diq+diθ/sqrt(2))

w=2*pi*f
pi=3.141592
D=2*pi/3

k=sqrt(2/3)
x=sqrt(2)

" Parameter values:
R=5
L=0.1
U1m:200
U2m:100
f=60

END

```

Con esto obtenemos la respuesta de la corriente en $dq0$ representada en la Figura 4.3

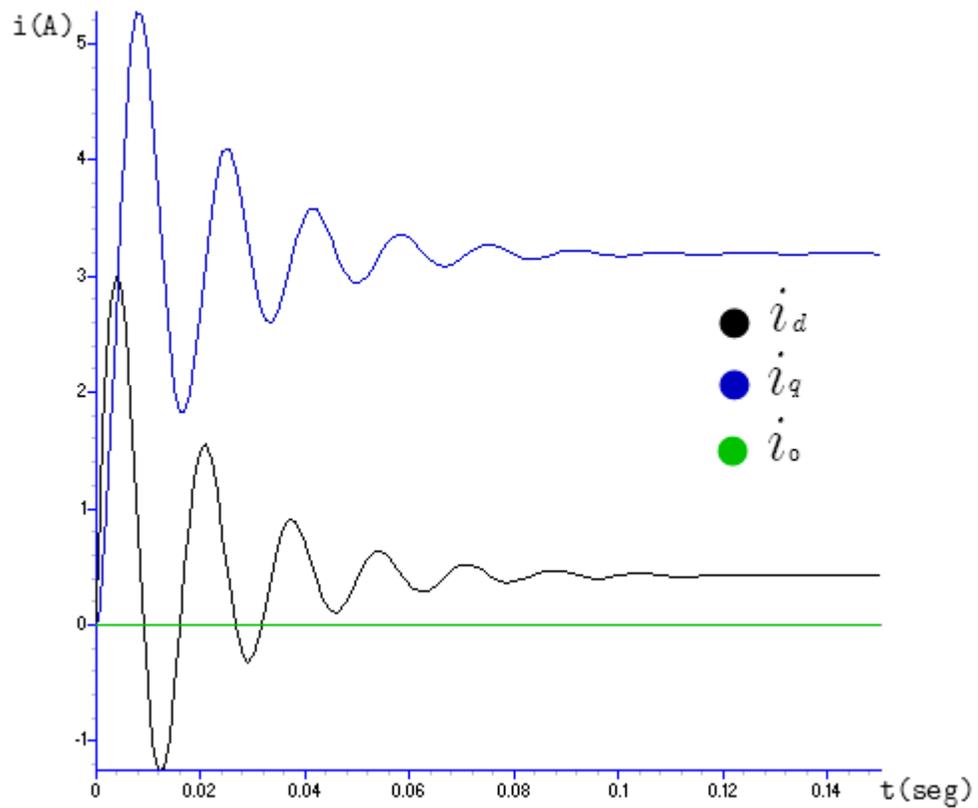


Figura 4.3 Representación de corriente en dq0 para un sistema trifásico.

De la misma forma, aplicando la transformación inversa de Park a la corriente obtenida en $dq0$ obtenemos la corriente representada en abc , donde la respuesta gráfica se tiene de la siguiente forma, como se ilustra en la Figura 4.4

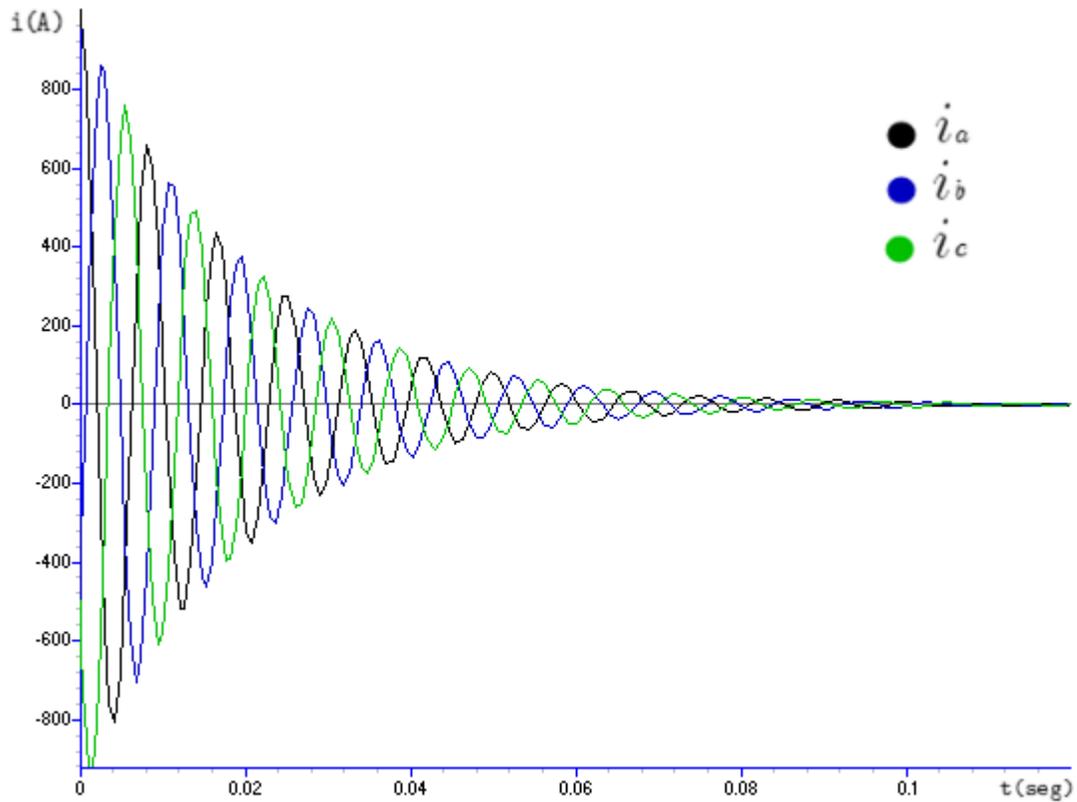


Figura 4.4 Representación de corriente en *abc* para un sistema trifásico.

Ahora se hace una comprobación al sistema trifásico aplicando la transformación de Park reducida, donde el código para dicha comprobación queda de la siguiente forma, con las ecuaciones desarrolladas

```

" States, derivates and time:
STATE id iq
DER did diq
TIME t

" Initializations:
id:0
iq:0

" Equations:
did=(-R/L)*id-w*iq+(1/L)*(U1d-U2d)
diq=w*id-(R/L)*iq+(1/L)*(U2d-U2q)

U1a=U1m*cos(w*t)
U1b=U1m*cos(w*t-D)
U1c=-U1a-U1b

U1d=k*(U1a*sin(w*t+(pi/3))+U1b*sin(w*t))
U1q=k*(U1a*cos(w*t+(pi/3))+U1b*cos(w*t))

```

```

U2a=U2m*cos(w*t)
U2b=U2m*cos(w*t-D)
U2c=-U2a-U2b

U2d=k*(U2a*sin(w*t+(pi/3))+U2b*sin(w*t))
U2q=k*(U2a*cos(w*t+(pi/3))+U2b*cos(w*t))

w=2*pi*f
pi=3.141592
D=2*pi/3
k=sqrt(2)

" Parameter values:
R=5
L=0.1
U1m:200
U2m:100
f=60

END

```

donde la respuesta en dq de dicha ecuación queda representada en la Figura 4.5

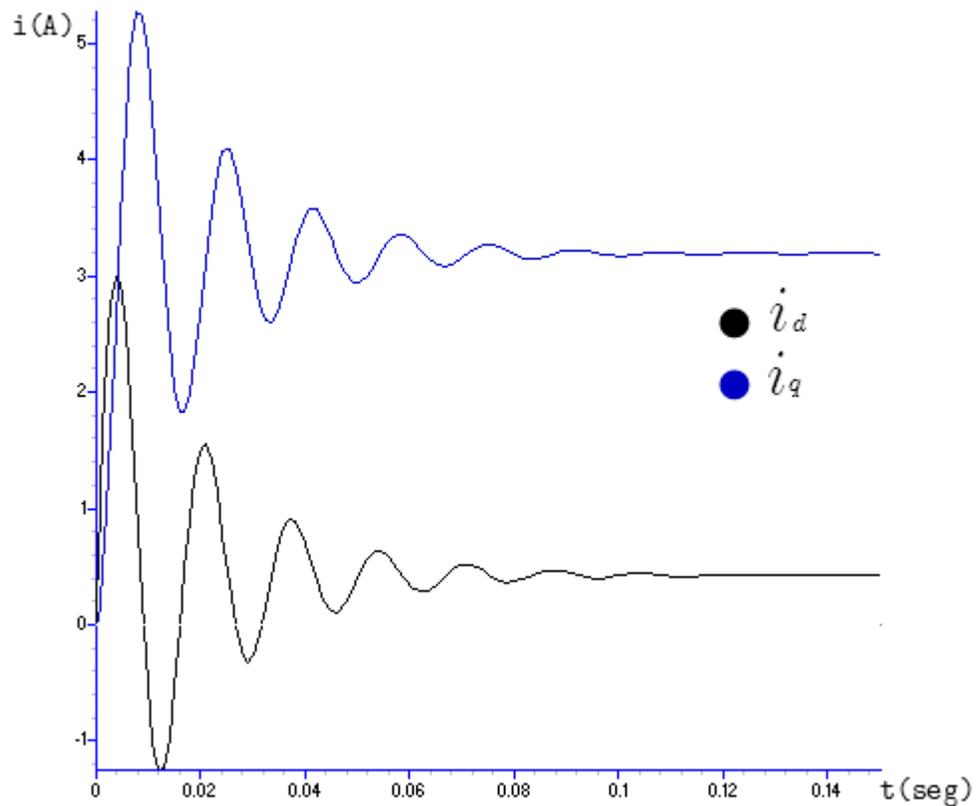


Figura 4.5 Representación dq para un sistema trifásico balanceado

Ahora aplicando la transformación inversa de Park reducida obtenemos los valores de las corrientes en abc , donde el código que se agrega para dicha transformación queda como se muestra en seguida.

```

ia=P1*did+P2*diq
ib=P3*did+P4*diq
ic=-ia-ib

P1=sqrt(2/3)*(cos(w*t))
P2=-sqrt(2/3)*(sin(w*t))
P3=-sqrt(2/3)*(cos(w*t+pi/3))
P4=sqrt(2/3)*(sin(w*t+pi/3))

```

La representación grafica para las corrientes en abc se muestra en la Figura 4.6

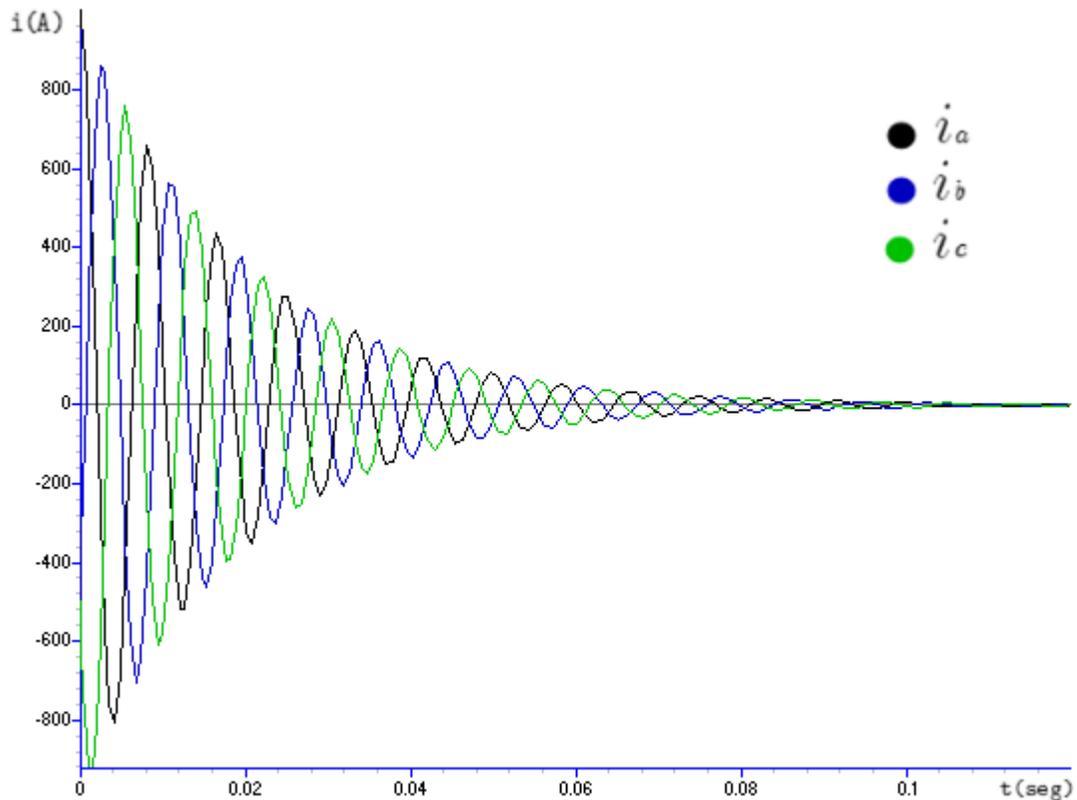


Figura 4.6 Representación de corrientes en abc .

Como se puede observar se obtienen los valores abc del sistema, tomando en cuenta que para un sistema balanceado se cumple que $i_c = -i_a - i_b$. Se observa que esta es igual a la Figura 4.4.

4.3 Otro caso de estudio de un sistema trifásico

Otro ejemplo para el análisis de un sistema trifásico es como el que se muestra en la Figura 4.7.

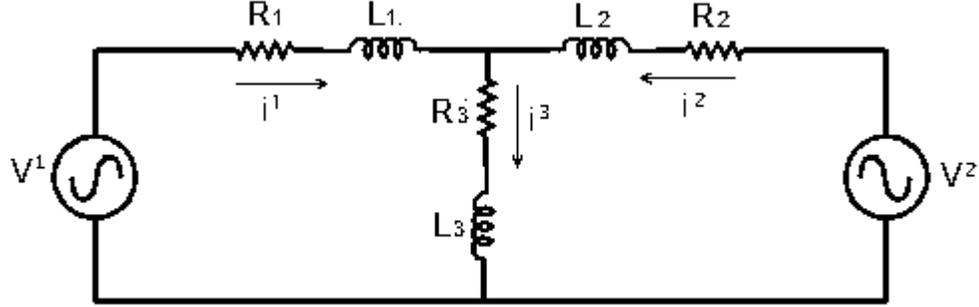


Figura 4.7 Sistema trifásico.

Donde las ecuaciones que describen al sistema de la Figura 4.7 están expresadas en (4.12), (4.13) y (4.14).

$$\begin{bmatrix} V_a^1 \\ V_b^1 \\ V_c^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^1 \\ i_b^1 \\ i_c^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a^1 \\ i_b^1 \\ i_c^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_3 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^3 \\ i_b^3 \\ i_c^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a^3 \\ i_b^3 \\ i_c^3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} V_a^2 \\ V_b^2 \\ V_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^2 \\ i_b^2 \\ i_c^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a^2 \\ i_b^2 \\ i_c^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_3 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^3 \\ i_b^3 \\ i_c^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a^3 \\ i_b^3 \\ i_c^3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$i_3 = i_1 + i_2 \quad (4.14)$$

Mediante un desarrollo algebraico, las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) pueden quedar expresadas como ecuaciones diferenciales de la forma como se expresan en (4.15), (4.16) y (4.17).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [i^1]_{abc} & \quad (4.15) \\ & = \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_1 L_3) [i^1]_{abc} + (R_2 L_3 - R_3 L_2) [i^2]_{abc} + (L_2 + L_3) [V^1]_{abc} - (L_3) [V^2]_{abc}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [i^2]_{abc} & \quad (4.16) \\ & = \frac{(R_1 L_3 - R_3 L_1) [i^1]_{abc} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_2 L_3) [i^2]_{abc} - (L_3) [V^1]_{abc} + (L_1 + L_3) [V^2]_{abc}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [i^3]_{abc} & \quad (4.17) \\ & = \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_3 L_1) [i^1]_{abc} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_3 L_2) [i^2]_{abc} + (L_2) [V^1]_{abc} + (L_1) [V^2]_{abc}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} \end{aligned}$$

Aplicando la transformación de Park a las ecuaciones (4.15), (4.16) y (4.17), estas quedan expresadas como se muestran en (4.18), (4.19) y (4.20).

$$[P] \frac{d}{dt} [i^1]_{abc} \quad (4.18)$$

$$= \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_1 L_3) I_3 [i^1]_{dq0} + (R_2 L_3 - R_3 L_2) I_3 [i^2]_{dq0} + (L_2 + L_3) I_3 [V^1]_{dq0} - (L_3) I_3 [V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) I_3}$$

$$[P] \frac{d}{dt} [i^2]_{abc} \quad (4.19)$$

$$= \frac{(R_1 L_3 - R_3 L_1) I_3 [i^1]_{dq0} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_2 L_3) I_3 [i^2]_{dq0} - (L_3) I_3 [V^1]_{dq0} + (L_1 + L_3) I_3 [V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) I_3}$$

$$[P] \frac{d}{dt} [i^3]_{abc} \quad (4.20)$$

$$= \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_3 L_1) I_3 [i^1]_{dq0} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_3 L_2) I_3 [i^2]_{dq0} + (L_2) I_3 [V^1]_{dq0} + (L_1) I_3 [V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) I_3}$$

donde:

$[i^1]_{abc}$, $[i^2]_{abc}$ y $[i^3]_{abc}$: Son las corrientes en abc en las ramas 1, 2 y 3 respectivamente.

I_3 : Es la matriz identidad.

Tomando en cuenta la propiedad demostrada en la ecuación (4.4):

$$[P] \cdot \frac{d}{dt} [i]_{abc} = \frac{d}{dt} [i]_{dq0} - \frac{d[P]}{dt} \cdot [P]^{-1} [i]_{dq0}$$

Entonces las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20), con la transformación de Park quedan expresadas en (4.21), (4.22) y (4.23)

$$\frac{d}{dt} [i^1]_{dq0} \quad (4.21)$$

$$= \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_1 L_3) [i^1]_{dq0} + (R_2 L_3 - R_3 L_2) [i^2]_{dq0} + (L_2 + L_3) [V^1]_{dq0} - (L_3) [V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)}$$

$$+ \frac{d[P]}{dt} \cdot [P]^{-1} [i^1]_{dq0}$$

$$\frac{d}{dt} [i^2]_{dq0} \quad (4.22)$$

$$= \frac{(R_1 L_3 - R_3 L_1) [i^1]_{dq0} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_2 L_3) [i^2]_{dq0} - (L_3) [V^1]_{dq0} + (L_1 + L_3) [V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)}$$

$$+ \frac{d[P]}{dt} \cdot [P]^{-1} [i^2]_{dq0}$$

$$\frac{d}{dt} [i^3]_{dq0} \quad (4.23)$$

$$= \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_3 L_1) [i^1]_{dq0} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_3 L_2) [i^2]_{dq0} + (L_2) [V^1]_{dq0} + (L_1) [V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)}$$

$$+ \frac{d[P]}{dt} \cdot [P]^{-1} [i^3]_{dq0}$$

puesto que

$$\frac{d[P]}{dt} \cdot [P]^{-1} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto las ecuaciones (4.21), (4.22) y (4.23) quedan de la forma siguiente

$$\frac{d}{dt} [i^1]_{dq0} \quad (4.24)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_1 L_3)}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} \right) [i^1]_{dq0} + \left(\frac{R_2 L_3 - R_3 L_2}{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3} \right) [i^2]_{dq0} \\ + \frac{(L_2 + L_3)[V^1]_{dq0} - (L_3)[V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)}$$

$$\frac{d}{dt} [i^2]_{dq0} \quad (4.25)$$

$$= \frac{(R_1 L_3 - R_3 L_1)}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} [i^1]_{dq0} + \left(\begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{(R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_2 L_3)}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} \right) [i^2]_{dq0} \\ - \frac{(L_3)[V^1]_{dq0} + (L_1 + L_3)[V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)}$$

$$\frac{d}{dt} [i^3]_{dq0} \quad (4.26)$$

$$= \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_3 L_1)[i^1]_{dq0} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_3 L_2)[i^2]_{dq0} + (L_2)[V^1]_{dq0} + (L_1)[V^2]_{dq0}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} \\ + \left(\begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) [i^3]_{dq0}$$

De la misma forma como se ha llevado a cabo el procedimiento con la aplicación de Park, también se aplica la transformación de Park reducida llevando a cabo el mismo procedimiento anterior. Tomando como base las ecuaciones descritas en (4.15), (4.16) y (4.17), entonces con la transformación de Park reducida se tienen las expresiones (4.27), (4.28) y (4.29).

$$[P_r] \frac{d}{dt} [i^1]_{ab} \quad (4.27)$$

$$= \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_1 L_3)I_2 [i^1]_{dq} + (R_2 L_3 - R_3 L_2)I_2 [i^2]_{dq} + (L_2 + L_3)I_2 [V^1]_{dq} - (L_3)I_2 [V^2]_{dq}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)I_2}$$

$$[P_r] \frac{d}{dt} [i^2]_{ab} \quad (4.28)$$

$$= \frac{(R_1 L_3 - R_3 L_1)I_2 [i^1]_{dq} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_2 L_3)I_2 [i^2]_{dq} - (L_3)I_2 [V^1]_{dq} + (L_1 + L_3)I_2 [V^2]_{dq}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)I_2}$$

$$[P_r] \frac{d}{dt} [i^3]_{ab} \quad (4.29)$$

$$= \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_3 L_1)I_2 [i^1]_{dq} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_3 L_2)I_2 [i^2]_{dq} + (L_2)I_2 [V^1]_{dq} + (L_1)I_2 [V^2]_{dq}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)I_2}$$

Tomando en cuenta la propiedad demostrada en la ecuación (4.9):

$$[P_r] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} - \frac{d[P_r]}{dt} [P_r]^{-1} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

y sabiendo que

$$\frac{d[P_r]}{dt} [P_r]^{-1} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces las ecuaciones (4.27), (4.28) y (4.29) se convierten en las expresiones (4.30), (4.31) y (4.32).

$$\frac{d}{dt} [i^1]_{dq0} \tag{4.30}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} - \frac{(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_1 L_3)}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} \right) [i^1]_{dq} + \left(\frac{R_2 L_3 - R_3 L_2}{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3} \right) [i^2]_{dq} + \frac{(L_2 + L_3)[V^1]_{dq} - (L_3)[V^2]_{dq}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)}$$

$$\frac{d}{dt} [i^2]_{dq} \tag{4.31}$$

$$= \frac{(R_1 L_3 - R_3 L_1)}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} [i^1]_{dq} + \left(\begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} - \frac{(R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_2 L_3)}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} \right) [i^2]_{dq} - \frac{(L_3)[V^1]_{dq} + (L_1 + L_3)[V^2]_{dq}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)}$$

$$\frac{d}{dt} [i^3]_{dq} \tag{4.32}$$

$$= \frac{-(R_1 L_2 + R_3 L_2 + R_3 L_1)[i^1]_{dq} - (R_3 L_1 + R_2 L_1 + R_3 L_2)[i^2]_{dq} + (L_2)[V^1]_{dq} + (L_1)[V^2]_{dq}}{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3)} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} [i^3]_{dq}$$

Comprobando estos resultados obtenidos de la transformación de Park y la de Park reducida respectivamente, mediante una simulación con el Simnon, se obtienen los siguientes resultados.

Para la transformación de Park, después de haber desarrollado las ecuaciones, estas quedan en el código para sus respuestas graficas como se muestra a continuación.

CONTINUOUS SYSTEM TRP

```

" States, derivates and time:
STATE i1d i1q i10 i2d i2q i20 i3d i3q i30
DER di1d di1q di10 di2d di2q di20 di3d di3q di30
TIME t

```

```

" Initializations:
i1d:0
i1q:0
i10:0

i2d:0
i2q:0
i20:0

i3d:0
i3q:0
i30:0

" Equations:
di1d=- (A1/D)*i1d-w*i1q+(A2/D)*i2d+(A3*U1d-L3*U2d)/D
di1q=w*i1d- (A1/D)*i1q+(A2/D)*i2q+(A3*U1q-L3*U2q)/D
di10=- (A1/D)*i10+(A2/D)*i20+(A3*U10-L3*U20)/D

D=(L1*L2)+(L2*L3)+(L1*L3)
A1=(L2*R1)+(L2*R3)+(L3*R1)
A2=(L3*R2)-(L2*R3)
A3=(L2+L3)

di2d=(B1/D)*i1d- (B2/D)*i2d-w*i2q+(-L3*U1d+B3*U2d)/D
di2q=(B1/D)*i1q+w*i2d- (B2/D)*i2q+(-L3*U1q+B3*U2q)/D
di20=(B1/D)*i10- (B2/D)*i20+(-L3*U10+B3*U20)/D

B1=(L3*R1)-(L1*R3)
B2=(L1*R3)+(L1*R2)+(L3*R2)
B3=(L1+L3)

di3d=(-C1*i1d-C2*i2d+L2*U1d+L1*U2d)/D-w*i3q
di3q=(-C1*i1q-C2*i2q+L2*U1q+L1*U2q)/D+w*i3d
di30=(-C1*i10-C2*i20+L2*U10+L1*U20)/D

C1=(L2*R1)+(L2*R3)+(L1*R3)
C2=(L1*R3)+(L1*R2)+(L2*R3)

teta=w*t
w=2*pi*f
pi=3.141592

U1a=U1m*cos(teta)
U1b=U1m*cos(teta-(2*pi)/3)
U1c=U1m*cos(teta+(2*pi)/3)

U1d=k*(U1a*cos(w*t)+U1b*cos(w*t-X)+U1c*cos(w*t+X))
U1q=k*(-U1a*sin(w*t)-U1b*sin(w*t-X)-U1c*sin(w*t+X))
U10=k*(U1a/sqrt(2)+U1b/sqrt(2)+U1c/sqrt(2))

k=sqrt(2/3)
X=(2*pi)/3

U2a=U2m*cos(teta)
U2b=U2m*cos(teta-(2*pi)/3)
U2c=U2m*cos(teta+(2*pi)/3)

```

```

U2d=k*(U2a*cos(w*t)+U2b*cos(w*t-X)+U2c*cos(w*t+X))
U2q=k*(-U2a*sin(w*t)-U2b*sin(w*t-X)-U2c*sin(w*t+X))
U2θ=k*(U2a/sqrt(2)+U2b/sqrt(2)+U2c/sqrt(2))

" Parameter values:
R1=10
R2=15
R3=5

L1=0.1
L2=0.15
L3=0.5

f=60
U1m=200
U2m=100

END

```

Donde la respuesta para la corriente i_1 , i_2 , i_3 en $dq0$ se presenta en la Figura 4.8, respectivamente.

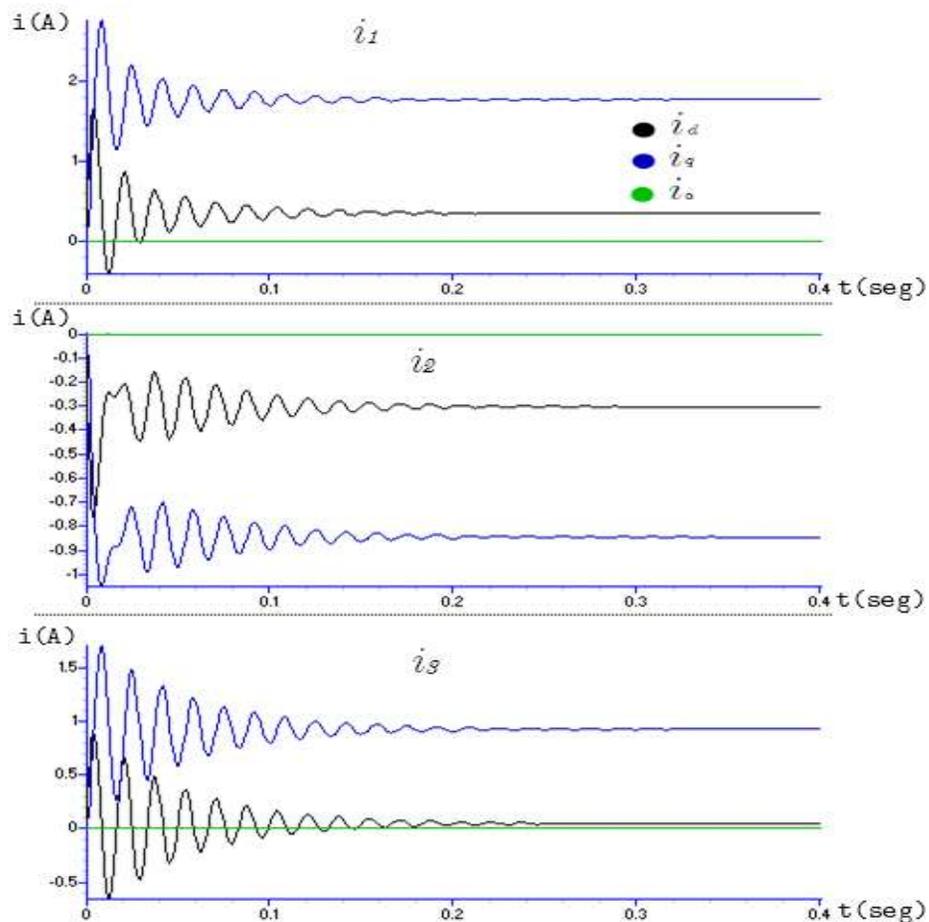


Figura 4.8 Corrientes i_1 , i_2 e i_3 en el sistema de referencia $dq0$.

Así, de la misma forma se aplica la transformación inversa de Park a las corrientes mencionadas para pasar del sistema de referencia de $dq0$ a abc . Se agrega el siguiente código para dicha transformación.

```

"Transformacion inversa:
i1a=k*(di1d*cos(w*t)-di1q*sin(w*t)+di10/sqrt(2))
i1b=k*(di1d*cos(w*t-X)-di1q*sin(w*t-X)+di10/sqrt(2))
i1c=k*(di1d*cos(w*t+X)-di1q*sin(w*t+X)+di10/sqrt(2))

i2a=k*(di2d*cos(w*t)-di2q*sin(w*t)+di20/sqrt(2))
i2b=k*(di2d*cos(w*t-X)-di2q*sin(w*t-X)+di20/sqrt(2))
i2c=k*(di2d*cos(w*t+X)-di2q*sin(w*t+X)+di20/sqrt(2))

i3a=k*(di3d*cos(w*t)-di3q*sin(w*t)+di30/sqrt(2))
i3b=k*(di3d*cos(w*t-X)-di3q*sin(w*t-X)+di30/sqrt(2))
i3c=k*(di3d*cos(w*t+X)-di3q*sin(w*t+X)+di30/sqrt(2))

```

Por lo tanto, la representación gráfica para las corrientes i_1 , i_2 e i_3 en abc están mostradas en la Figura 4.9, respectivamente.

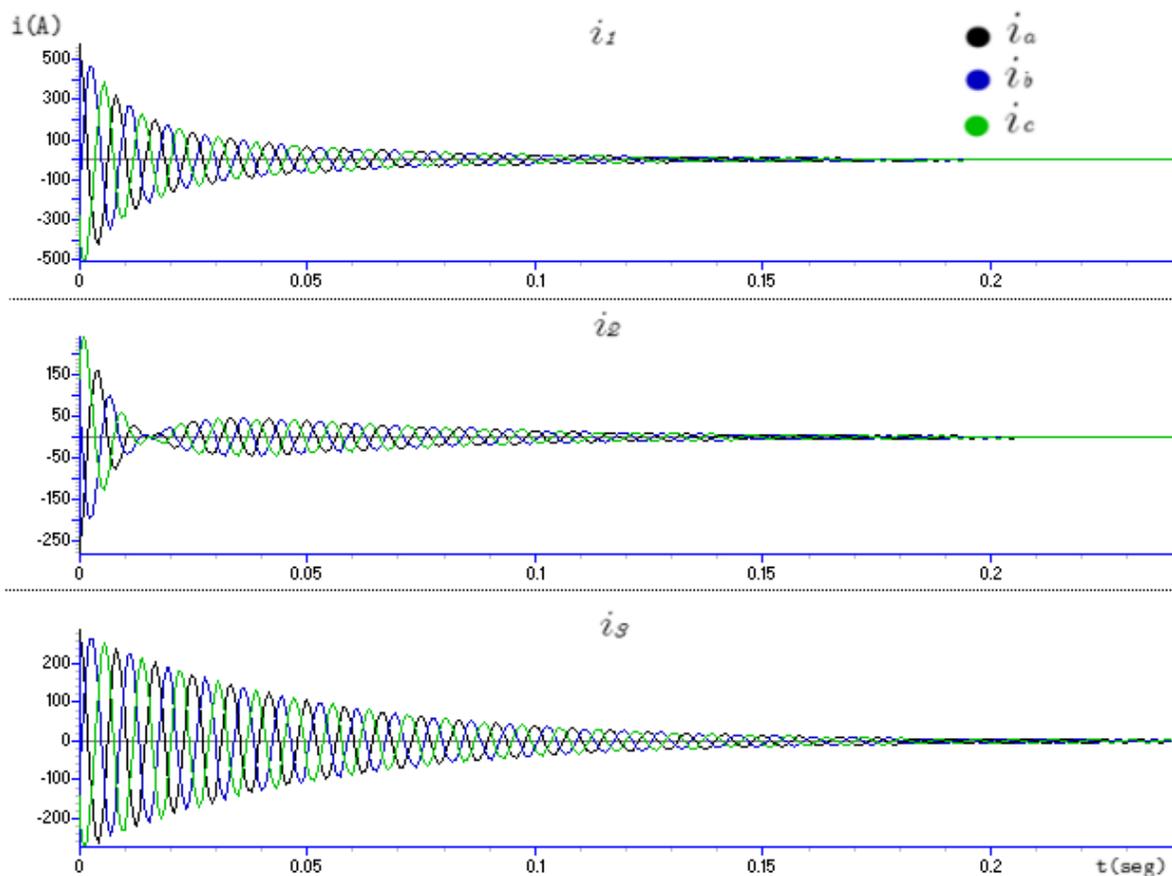


Figura 4.9 Representación de las corrientes i_1 , i_2 e i_3 en abc .

En la Figura 4.9 se pueden observar las corrientes dadas del sistema en *abc*, este mismo procedimiento se lleva a cabo para la comprobación con la transformación de Park reducida, donde el código para la representación gráfica está dada a continuación.

CONTINUOUS SYSTEM TRPR

```

" States, derivates and time:
STATE i1d i1q i2d i2q i3d i3q
DER di1d di1q di2d di2q di3d di3q
TIME t

" Initializations:
i1d:0
i1q:0

i2d:0
i2q:0

i3d:0
i3q:0

" Equations:
di1d=- (A1/D)*i1d-w*i1q+(A2/D)*i2d+(A3*U1d-L3*U2d)/D
di1q=w*i1d- (A1/D)*i1q+(A2/D)*i2q+(A3*U1q-L3*U2q)/D

D=(L1*L2)+(L2*L3)+(L1*L3)
A1=(L2*R1)+(L2*R3)+(L3*R1)
A2=(L3*R2)-(L2*R3)
A3=(L2+L3)

di2d=(B1/D)*i1d- (B2/D)*i2d-w*i2q+ (-L3*U1d+B3*U2d)/D
di2q=(B1/D)*i1q+w*i2d- (B2/D)*i2q+ (-L3*U1q+B3*U2q)/D

B1=(L3*R1)-(L1*R3)
B2=(L1*R3)+(L1*R2)+(L3*R2)
B3=(L1+L3)

di3d=(-C1*i1d-C2*i2d+L2*U1d+L1*U2d)/D-w*i3q
di3q=(-C1*i1q-C2*i2q+L2*U1q+L1*U2q)/D+w*i3d

C1=(L2*R1)+(L2*R3)+(L1*R3)
C2=(L1*R3)+(L1*R2)+(L2*R3)

teta=w*t
w=2*pi*f
pi=3.141592

U1a=U1m*cos(teta)
U1b=U1m*cos(teta- (2*pi)/3)
U1c=-U1a-U1b

```

```

U1d=k*(U1a*sin(w*t+X)+U1b*sin(w*t))
U1q=k*(U1a*cos(w*t+X)+U1b*cos(w*t))

k=sqrt(2)
X=pi/3

U2a=U2m*cos(teta)
U2b=U2m*cos(teta-(2*pi)/3)
U2c=-U2a-U2b

U2d=k*(U2a*sin(w*t+X)+U2b*sin(w*t))
U2q=k*(U2a*cos(w*t+X)+U2b*cos(w*t))

"Transformacion inversa:
i1a=Y*(di1d*cos(w*t)-di1q*sin(w*t))
i1b=Y*(-di1d*cos(w*t+X)+di1q*sin(w*t+X))
i1c=-i1a-i1b

i2a=Y*(di2d*cos(w*t)-di2q*sin(w*t))
i2b=Y*(-di2d*cos(w*t+X)+di2q*sin(w*t+X))
i2c=-i2a-i2b

i3a=Y*(di3d*cos(w*t)-di3q*sin(w*t))
i3b=Y*(-di3d*cos(w*t+X)+di3q*sin(w*t+X))
i3c=-i3a-i3b

Y=sqrt(2/3)

" Parameter values:
R1=10
R2=15
R3=5

L1=0.1
L2=0.15
L3=0.5

f=60
U1m=200
U2m=100

END

```

Donde la respuesta de las corrientes i_1 , i_2 e i_3 en el sistema de referencia dq , se presentan en la Figura 4.10, respectivamente.

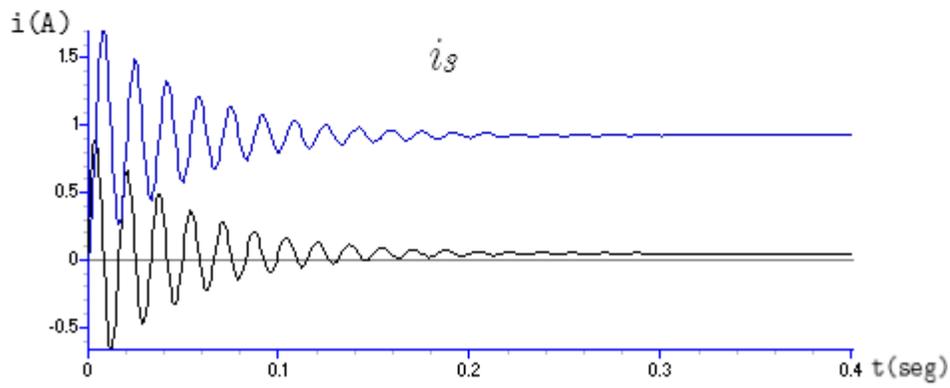
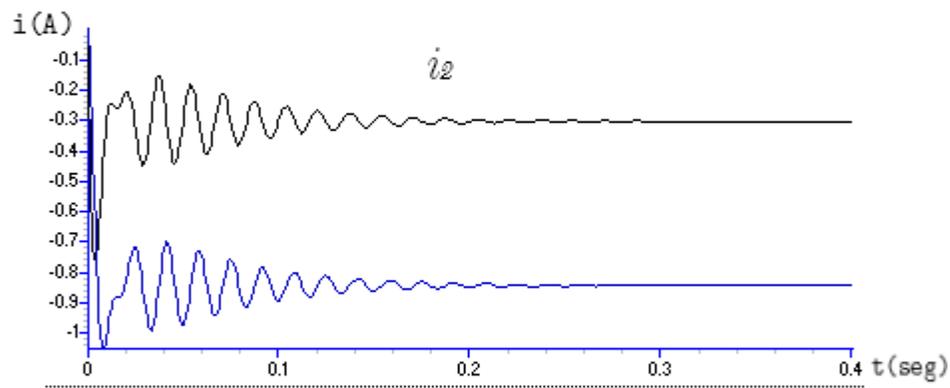
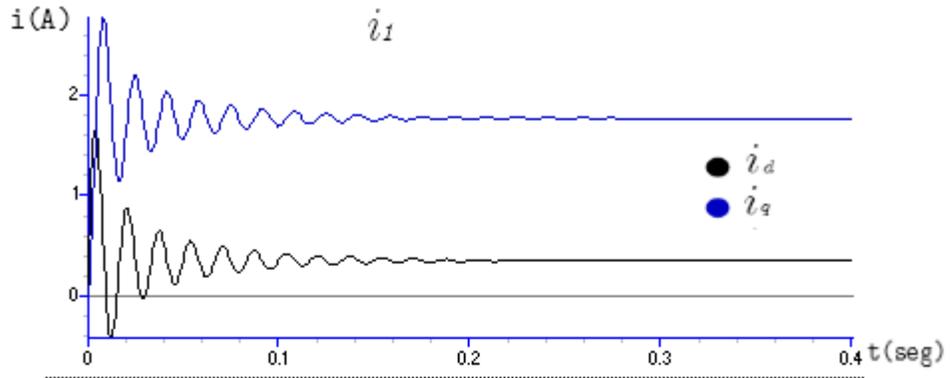


Figura 4.10 Corrientes i_1 , i_2 e i_3 en el sistema de referencia dq .

Así mismo, se aplica la transformación inversa de Park reducida para obtener los valores de las corrientes en abc . Entonces las corrientes i_1 , i_2 e i_3 en abc están representadas en la Figura 4.11 respectivamente.

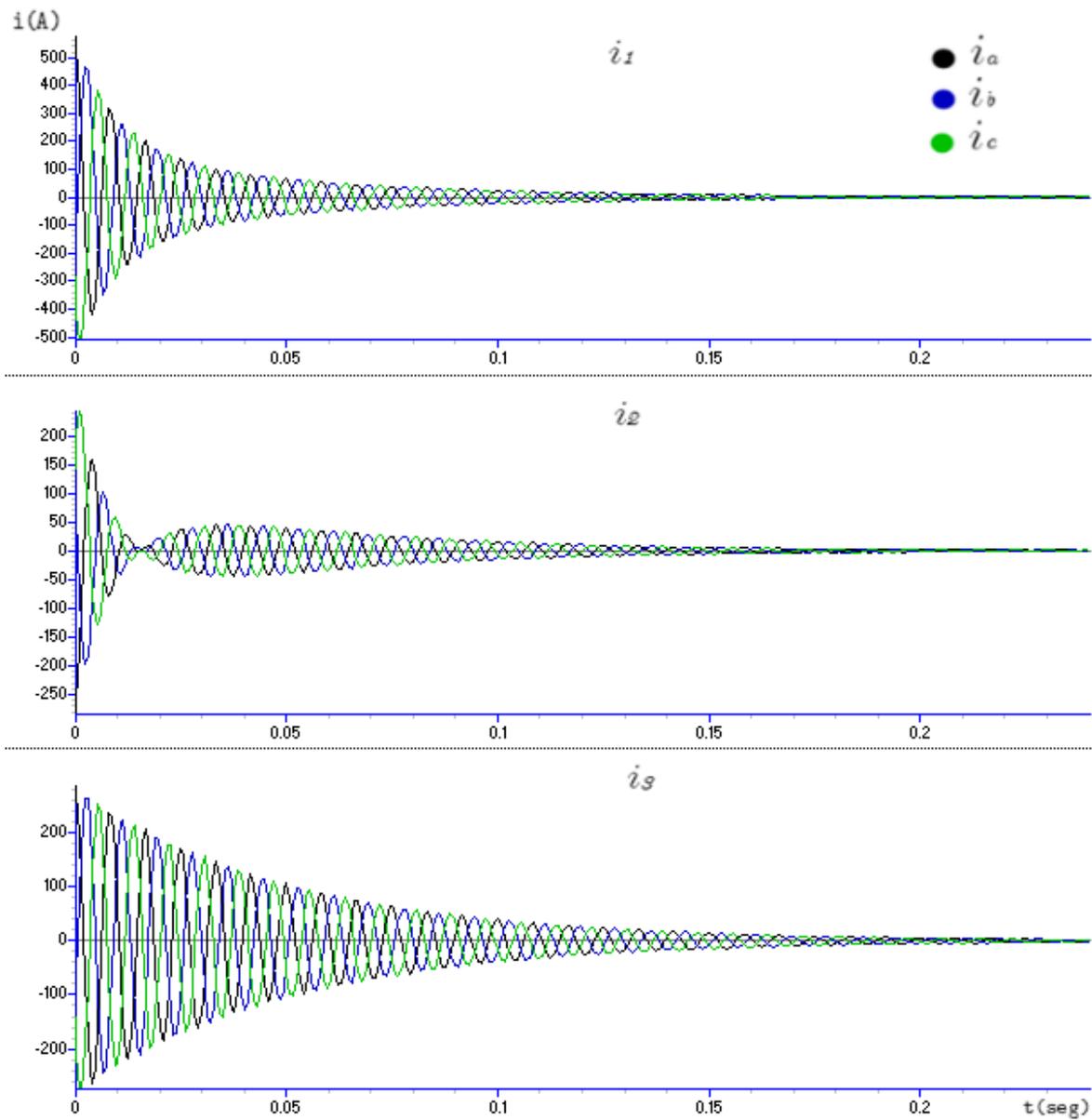


Figura 4.11 corrientes i_1 , i_2 e i_3 en abc .

Como se esperaba, los resultados obtenidos con la transformación de Park reducida son los mismos con los obtenidos con la transformación de Park.

existir o no. Aún en los casos que no existen, la circulación de corrientes inducidas en los rotores macizos de polos lisos genera efectos equivalentes a los devanados de amortiguación.

El eje del devanado de campo es el denominado eje directo (eje d) de la máquina, en tanto que el eje ortogonal al eje directo es el eje en cuadratura (eje q).

Se hace notar que, incluso en las máquinas de rotor liso, la geometría de permeancias entre el rotor y estator no es exactamente cilíndrica, debido al efecto de las ranuras en donde se aloja el devanado de campo.

En la Figura 4.13 se observa que los devanados amortiguadores se representan convencionalmente por dos devanados concentrados (uno en el eje d, otro en el eje q).

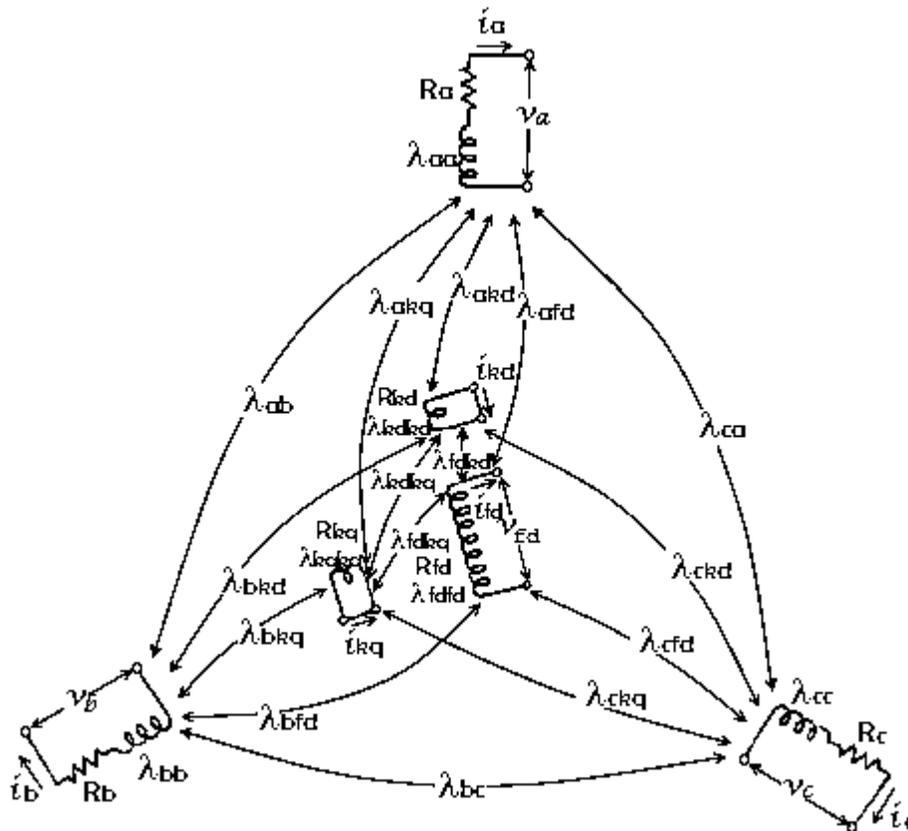


Figura 4.13 Modelo abstracto de la máquina síncrona.

Se observa asimismo que las corrientes en los devanados del rotor se orientan convencionalmente hacia adentro y en los devanados del estator hacia afuera.

La máquina se supone totalmente lineal, y es de esperar que algunos de los coeficientes de inducción varíen con el tiempo (dado que varias de las bobinas ven una geometría de entrehierros que va variando a medida que el rotor gira).

Los coeficientes de inducción del estator de la máquina síncrona están expresadas en las ecuaciones mostradas a continuación.

$$\lambda_{aa} = L_{aa0} + L_{aa2} \cdot \cos(2\theta) \quad (4.33)$$

$$\lambda_{bb} = L_{aa0} + L_{aa2} \cdot \cos 2(\theta - 120) \quad (4.34)$$

$$\lambda_{cc} = L_{aa0} + L_{aa2} \cdot \cos 2(\theta + 120) \quad (4.35)$$

$$\lambda_{ab} = -(L_{ab0} + L_{ab2} \cdot \cos 2(\theta + 30)) \quad (4.36)$$

$$\lambda_{ac} = -(L_{ab0} + L_{ab2} \cdot \cos 2(\theta + 150)) \quad (4.37)$$

$$\lambda_{bc} = -(L_{ab0} + L_{ab2} \cdot \cos 2(\theta - 90)) \quad (4.38)$$

Es intuitivo que estos coeficientes tengan una variación periódica con el tiempo, y de periodo de 180° , dado que la geometría de entrehierros se repite con este periodo. Es razonable también imponer que los coeficientes nunca se anulen. Las expresiones explícitas indicadas anteriormente pueden verse como los dos primeros términos de los desarrollos de Fourier de estas funciones periódicas. Los coeficientes de inducción para el rotor se expresan en seguida.

$$\lambda_{fdfd} = L_{fdfd} \quad (4.39)$$

$$\lambda_{kdkd} = L_{kdkd} \quad (4.40)$$

$$\lambda_{kqkq} = L_{kqkq} \quad (4.41)$$

$$\lambda_{fdkq} = \lambda_{kdqk} = 0 \quad (4.42)$$

$$\lambda_{fdkd} = L_{fdkd} \quad (4.43)$$

Si consideramos los flujos por una de las bobinas del rotor y enlazados por otra, las permeancias involuntarias no cambian con el tiempo, debido a la geometría cilíndrica del estator, de ahí que los coeficientes de inducción resulten constantes. Los coeficientes de inducción mutua entre los devanados de eje d y eje q son obviamente nulos, por ser bobinas a 90° . Mientras que los coeficientes de inducción entre rotor y estator son expresadas como se muestra en las siguientes ecuaciones.

$$\lambda_{afd} = L_{afd} \cdot \cos \theta \quad (4.44)$$

$$\lambda_{bfd} = L_{afd} \cdot \cos(\theta - 120^\circ) \quad (4.45)$$

$$\lambda_{cfd} = L_{afd} \cdot \cos(\theta + 120^\circ) \quad (4.46)$$

$$\lambda_{akd} = L_{akd} \cdot \cos \theta \quad (4.47)$$

$$\lambda_{bkd} = L_{akd} \cdot \cos(\theta - 120^\circ) \quad (4.48)$$

$$\lambda_{ckd} = L_{akd} \cdot \cos(\theta + 120^\circ) \quad (4.49)$$

$$\lambda_{akq} = -L_{akq} \cdot \sin \theta \quad (4.50)$$

$$\lambda_{bkq} = -L_{akq} \cdot \sin(\theta - 120^\circ) \quad (4.51)$$

$$\lambda_{ckq} = -L_{akq} \cdot \sin(\theta + 120^\circ) \quad (4.52)$$

Las expresiones obtenidas obedecen en este caso al clásico ejemplo de un imán girando en el centro de una bobina fija (la geometría de entrehierros vista por los flujos es constante, pero el campo magnético va cambiando su ángulo respecto a la bobina fija del estator; de ahí que se obtengan funciones periódicas de 360°).

Para el caso de una máquina de P pares de polos, las situaciones descritas se repiten cada vez que un nuevo par de polos ocupa en el espacio la posición del par de polos anterior. Bastará, por lo tanto, con cambiar θ por $P\theta$ en las expresiones anteriores. Esta situación se suele identificar de la siguiente forma: si θ_m es el ángulo mecánico de la máquina, las relaciones tensión-corriente se expresan en función del ángulo eléctrico θ cuya relación con el anterior es $\theta = P\theta_m$.

Las ecuaciones de estado instantáneo en coordenadas de fase para cada uno de los seis devanados de la máquina síncrona son los siguientes.

$$V = r \cdot i + \frac{d\psi_i}{dt} \quad (4.53)$$

donde:

$$\psi_i = -\lambda_{ja}i_a - \lambda_{jb}i_b - \lambda_{jc}i_c + \lambda_{jfd}i_{fd} + \lambda_{jkd}i_{kd} + \lambda_{jkq}i_{kq},$$

con $j = a, b, c, fd, kd, kq$

Los signos (-) se deben a la orientación adoptada para las corrientes de estator

$[a \ b \ c]^t$: identifica al vector columna de coordenadas a,b,c

$V^s = [V_a \ V_b \ V_c]^t$: tensiones del estator

$V^r = [V_{fd} \ V_{kd} \ V_{kq}]^t$ (con $V_{kd} = V_{kq} = 0$): tensiones del rotor

$V = [V^{st} \ V^{rt}]^t$: tensiones de toda la máquina

$i^s = [i_a \ i_b \ i_c]^t$: corrientes del estator

$i^r = [-i_{fd} \ -i_{kd} \ -i_{kq}]^t$: corrientes de rotor

$i = [i^{st} \quad i^{rt}]^t$: corrientes de toda la máquina

$\psi^s = [\psi_a \quad \psi_b \quad \psi_c]^t$: flujos de corrientes del estator

$\psi^r = [\psi_{fd} \quad \psi_{kd} \quad \psi_{kq}]^t$: flujos de corrientes de rotor

$\psi = [\psi^{st} \quad \psi^{rt}]^t$: flujos de corrientes de toda la máquina

Si se supone $r_s = r_a = r_b = r_c$ y $R^s = r_s I_3$; donde I_3 : es la matriz identidad

Por tanto, la resistencia del rotor puede quedar expresada de forma matricial como se muestra en la ecuación (4.54)

$$R^r = \begin{bmatrix} r_{fd} & 0 & 0 \\ 0 & r_{kd} & 0 \\ 0 & 0 & r_{kq} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

De igual forma para las resistencias estator-rotor, se expresan en la ecuación (4.55)

$$R = \begin{bmatrix} R^s & 0 \\ 0 & R^r \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Las inductancias de la máquina síncrona se expresan como queda en la ecuación (4.56)

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_{aa} & \lambda_{ab} & \lambda_{ac} & \lambda_{afd} & \lambda_{akd} & \lambda_{akq} \\ \lambda_{ba} & \lambda_{bb} & \lambda_{bc} & \lambda_{bfd} & \lambda_{bkd} & \lambda_{bkq} \\ \lambda_{ca} & \lambda_{cb} & \lambda_{cc} & \lambda_{cfd} & \lambda_{ckd} & \lambda_{ckq} \\ \lambda_{fda} & \lambda_{fdb} & \lambda_{fdc} & \lambda_{fdfd} & \lambda_{fdkd} & 0 \\ \lambda_{kda} & \lambda_{kdb} & \lambda_{kdc} & \lambda_{kdfd} & \lambda_{kdkd} & 0 \\ \lambda_{kqa} & \lambda_{kqb} & \lambda_{kqc} & 0 & 0 & \lambda_{kqkq} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

donde las inductancias de forma simplificada puede representarse como se muestra en la ecuación (4.57)

$$L = \begin{bmatrix} L^{ss} & L^{sr} \\ L^{rs} & L^{rr} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Con esta notación las ecuaciones de estado en coordenadas de fase resultan:

$$V = \frac{d\psi}{dt} - R \cdot i \quad (4.58)$$

donde:

$$\psi = -L \cdot i$$

Las ecuaciones diferenciales así planteadas son difíciles de resolver debido a:

- Que 27 de los coeficientes de la matriz L son dependientes del tiempo (no todos distintos debido a la simetría de los coeficientes de inducción mutua)

b) El sistema es fuertemente acoplado (solo 4 coeficientes de L son nulos)

Estas dificultades motivan la introducción de una transformación matemática que permita simplificar las ecuaciones. La transformación de Park (P) permite resolver completamente a) y simultáneamente b), ya que esta transformación deja invariantes las variables del rotor y diagonaliza la matriz L^{ss} .

Entonces aplicando la transformación P a las ecuaciones de voltaje, corriente y flujos de corriente de la máquina síncrona, estas quedan expresadas como se muestran en las ecuaciones (4.59), (4.60) y (4.61) respectivamente.

$$P \cdot V^s = V_{dq0}^s = \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$P \cdot i^s = i_{dq0}^s = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$P \cdot \psi^s = \psi_{dq0}^s = \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

De la misma forma aplicando la transformación P para las ecuaciones de voltaje, corriente y flujos de corriente de toda la máquina quedan dadas en las ecuaciones (4.62), (4.63) y (4.64).

$$P \cdot V = V_{dq0} = \begin{bmatrix} V_d^{st} \\ V_q^{st} \\ V_0^{st} \\ V^{rt} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$P \cdot i = i_{dq0} = \begin{bmatrix} i_d^{st} \\ i_q^{st} \\ i_0^{st} \\ i^{rt} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$P \cdot \psi = \psi_{dq0} = \begin{bmatrix} \psi_d^{st} \\ \psi_q^{st} \\ \psi_0^{st} \\ \psi^{rt} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Si T es una matriz de forma $T = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix}$, donde, I_3 es la matriz identidad, y la multiplicamos por las ecuaciones en coordenadas de fase se tienen las ecuaciones (4.65) y (4.66).

$$V_{dq0} = T \cdot \frac{d}{dt} (T^{-1} \psi_{dq0}) - (T \cdot R \cdot T^{-1}) i_{dq0} \quad (4.65)$$

$$\psi_{dq0} = -(T \cdot L \cdot T^{-1}) i_{dq0} \quad (4.66)$$

donde:

$$L_{dq0} = T \cdot L \cdot T^{-1}, \quad R_{dq0} = T \cdot R \cdot T^{-1} = R$$

Desarrollando del primer término de la ecuación (4.65)

$$T \cdot \frac{d}{dt} (T^{-1} \psi_{dq0}) = T \cdot \frac{d}{d\theta} (T^{-1}) \psi_{dq0} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi_{dq0}}{dt} \quad (4.67)$$

donde:

$$G = T \cdot \frac{d}{d\theta} (T^{-1}), \quad w = \frac{d\theta}{dt}, \quad g_{dq0} = P \cdot \frac{d}{d\theta} P^{-1}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{dq0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g_{dq0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces las ecuaciones de estado en las coordenadas de Park quedan

$$V_{dq0} = \frac{d}{dt} \psi_{dq0} + w \cdot G \psi_{dq0} - R \cdot i_{dq0} \quad (4.68)$$

$$\psi_{dq0} = -L_{dq0} \cdot i_{dq0} \quad (4.69)$$

En lo que $G \psi_{dq0} = \begin{bmatrix} -\psi_q \\ \psi_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

La formulación a través de los flujos en la forma que se indica es más útil para introducir la saturación en la teoría. Entonces, la matriz de inductancias en coordenadas de Park se expresa en la ecuación (4.70).

$$L_{dq0} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{afd} & L_{akd} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & L_{akq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3/2} \cdot L_{afd} & 0 & 0 & L_{fdfd} & L_{fdkd} & 0 \\ \sqrt{3/2} \cdot L_{akd} & 0 & 0 & L_{fdkd} & L_{kdkd} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} \cdot L_{akq} & 0 & 0 & 0 & L_{kqkq} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

De la expresión (4.70), se observa que ninguno de sus elementos dependen del tiempo, por tanto, si uno supone $\omega = cte$, las ecuaciones de Park son coeficientes constantes; es mucho más dispersa que la matriz original y a diferencia de la matriz original, no es simétrica.

Los devanados del estator de la máquina síncrona se sustituyen por 3 devanados ficticios $dq0$ con las siguientes características:

- a) La relación flujo-corriente para el devanado d esta dada por:

$\psi_d = -L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd}$, lo cual nos dice que el devanado d está montado sobre el rotor (dado que los coeficientes de inducción propia y mutua no dependen del tiempo), y con su eje sobre el eje directo (dado que interactúa con 2 devanados restantes del eje directo, y con ninguno del eje de cuadratura).

- b) En forma análoga: el devanado q esta montado sobre el eje en cuadratura del rotor.

- c) La relación flujo-corriente para el devanado 0 esta dada por $\psi_0 = -L_0 \cdot i_0$, por lo que el devanado 0 debe verse como un devanado ficticio ortogonal al devanado dq . Si se realiza el cálculo riguroso de los coeficientes de inducción, se puede verificar que L_0 no es más que la inductancia de dispersión L_1 de los devanados del estator, resultado que es intuitivamente compatible con la idea de que el devanado 0 no interactúa con ninguno de los devanados del rotor.

La idea de sustituir los devanados del estator por devanados del rotor es análoga a la que se usa en el análisis de transformadores, cuando las reactancias de cortocircuito del primario se refieren al lado secundario. En nuestro caso hay que tener en cuenta adicionalmente que estamos sustituyendo devanados fijos por devanados giratorios, y el precio de esta sustitución es introducir en las ecuaciones tensión-flujo el término $\omega \cdot G\psi_{dq0}$.

Por tanto, las ecuaciones en coordenadas de Park desarrolladas quedan expresadas en las siguientes ecuaciones

$$V_d = \frac{d\psi_d}{dt} - \omega \cdot \psi_q - r_s \cdot i_d \quad (4.71)$$

$$V_q = \frac{d\psi_q}{dt} + \omega \cdot \psi_d - r_s \cdot i_q \quad (4.72)$$

$$V_0 = \frac{d\psi_0}{dt} - r_s \cdot i_0 \quad (4.73)$$

$$V_{fd} = \frac{d\psi_{fd}}{dt} + r_{fd} \cdot i_{fd} \quad (4.74)$$

$$0 = \frac{d\psi_{kd}}{dt} + r_{kd} \cdot i_{kd} \quad (4.75)$$

$$0 = \frac{d\psi_{kq}}{dt} + r_{kq} \cdot i_{kq} \quad (4.76)$$

$$\psi_d = -L_d \cdot i_d + L_{afd} \cdot i_{fd} + L_{akd} \cdot i_{kd} \quad (4.77)$$

$$\psi_q = -L_q \cdot i_q + L_{akq} \cdot i_{kq} \quad (4.78)$$

$$\psi_0 = -L_0 \cdot i_0 \quad (4.79)$$

$$\psi_{fd} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot L_{afd} \cdot i_d + L_{fdfd} \cdot i_{fd} + L_{fdkd} \cdot i_{kd} \quad (4.80)$$

$$\psi_{kd} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot L_{akd} \cdot i_d + L_{fdkd} \cdot i_{fd} + L_{kdkd} \cdot i_{kd} \quad (4.81)$$

$$\psi_{kq} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot L_{akq} \cdot i_q + L_{kqkq} \cdot i_{kq} \quad (4.82)$$

Alternativamente, eliminando los flujos se tiene:

$$V_d = -L_d \frac{di_d}{dt} + L_{afd} \frac{di_{fd}}{dt} + L_{akd} \frac{di_{kd}}{dt} - r_s i_d + \omega L_q i_q - \omega L_{akq} i_{kq} \quad (4.83)$$

$$V_q = -L_q \frac{di_q}{dt} + L_{akq} \frac{di_{kq}}{dt} - r_s i_q - \omega L_d i_d + \omega L_{afd} i_{fd} + \omega L_{akd} i_{kd} \quad (4.84)$$

$$V_0 = -L_0 \frac{di_0}{dt} - r_s i_s \quad (4.85)$$

$$V_{fd} = -\sqrt{\frac{3}{2}} L_{afd} \frac{di_d}{dt} + L_{fdfd} \frac{di_{fd}}{dt} + L_{fdkd} \frac{di_{kd}}{dt} + r_{fd} i_{fd} \quad (4.86)$$

$$0 = -\sqrt{\frac{3}{2}} L_{akd} \frac{di_d}{dt} + L_{fdkd} \frac{di_{fd}}{dt} + L_{kdkd} \frac{di_{kd}}{dt} + r_{kd} i_{kd} \quad (4.87)$$

$$0 = -\sqrt{\frac{3}{2}} L_{akq} \frac{di_q}{dt} + L_{kqkq} \frac{di_{kq}}{dt} + r_{kq} i_{kq} \quad (4.88)$$

A partir de estas ecuaciones se analizan diversos casos de funcionamiento de la máquina síncrona mediante el siguiente procedimiento standard:

- a) Las condiciones de borde del problema se transforman al dominio de Park.

- b) Se resuelven las ecuaciones de Park.
- c) Mediante la transformación inversa de Park se obtiene la solución en coordenadas de fase.

De la misma forma como se ha hecho, ahora se analiza un generador síncrono sin devanados de amortiguamiento y aplicando la transformación de Park reducida, donde sus ecuaciones de voltajes y corrientes en los devanados del estator están por fase expresadas en (4.89) y (4.90).

$$[V]_{abc} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$[i]_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Si se considera un generador en el que se tiene 4 bobinas acopladas mutuamente. La ecuación de enlace de flujo puede quedar como en la expresión (4.91)

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

donde:

a, b, c : se refiere a los devanados de estator

F : se refiere al devanado de campo

Las inductancias propias de cada devanado del estator están dadas por:

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos 2(\theta)$$

$$L_{bb} = L_s + L_m \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L_{cc} = L_s + L_m \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

donde $L_s > L_m$ y ambos son constantes.

Las inductancias propias del rotor son:

$$L_{FF} = L_F$$

Ya que en este caso no se están tomando en cuenta los devanados de amortiguamiento y L_F es constante.

Las inductancias mutuas entre fases del estator son:

$$L_{ab} = L_{ba} = -M_s - L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$L_{bc} = L_{cb} = -M_s - L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$L_{ca} = L_{ac} = -M_s - L_m \cos 2 \left(\theta + \frac{5\pi}{6} \right)$$

donde $|M_s| > L_m$.

Las inductancias mutuas entre estator y rotor son:

$$L_{aF} = M_f \cos(\theta)$$

$$L_{bb} = M_f \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$L_{aa} = M_f \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Utilizando una notación simplificada, la expresión (4.91) puede escribirse en el modelo compacto

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aR} \\ L_{Ra} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_F \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

donde:

L_{aa} : denota las inductancias estator-estator.

L_{aR} y L_{Ra} : son las inductancias estator-rotor.

L_{RR} : son las inductancias de rotor-rotor.

Aplicando la transformación de Park reducida a la expresión (4.91) esta queda como se muestra en (4.93).

$$\begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & M_{dF} \\ 0 & L_q & 0 \\ M_{dF} & 0 & L_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_F \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

De igual forma analizando sus voltajes en cada uno de los devanados de estator y de campo se tiene la expresión (4.94).

$$\begin{bmatrix} V_{abc} \\ V_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abc} \\ i_F \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_F \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Aplicando la transformación de Park reducida a la ecuación de voltajes tenemos:

$$\begin{bmatrix} V_{dq} \\ V_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{dq} & 0 \\ 0 & R_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{dq} \\ i_F \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{dq} \\ \lambda_F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

donde $s(t) = \omega[\lambda_d \quad -\lambda_q]^T$

Haciendo un análisis para las corrientes de la máquina como variables de estado, se tiene la ventaja de ofrecer relaciones simples entre los voltajes y las variables de estado. Podemos reemplazar los términos $\lambda(t)$ y $\frac{d\lambda(t)}{dt}$ por términos en $i(t)$ y $\frac{di(t)}{dt}$ utilizando las siguientes ecuaciones.

$$\lambda_{dF} = (M_{dF})[i_{dF}] \quad (4.96)$$

$$\lambda_q = (M_q)[i_q] \quad (4.97)$$

donde:

$$M_{dF} = \begin{bmatrix} L_d & M_{dF} \\ M_{dF} & L_F \end{bmatrix}$$

$$M_q = L_q$$

Reescribiendo (4.95), para sustituir (4.96) y (4.97) en (4.95), seleccionando las cantidades base para voltaje, corriente y tiempo en el sistema por unidad (*pu*) e incorporando todas las ecuaciones normalizadas en una expresión matricial y conservando la misma notación para las variables en *pu* que para las variables en la base original, dado que todos los valores son en *pu*, escribimos:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_F \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d & 0 & \omega L_q \\ 0 & r_F & 0 \\ -\omega L_d & -\omega M_{dF} & r_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & M_{dF} & 0 \\ M_{dF} & L_F & 0 \\ 0 & 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \end{bmatrix}, \text{ en pu} \quad (4.98)$$

donde:

$$R_{dF} = \begin{bmatrix} r_d & 0 \\ 0 & r_F \end{bmatrix}$$

$$R_q = r_q$$

$$T_1 = \omega[-L_d \quad -M_{dF}]$$

$$T_2 = \omega L_q$$

Hay muchas formas de escribir la ecuación de onda en la dinámica de un sistema de potencia, mientras que el par esta dado casi siempre en *pu*, frecuentemente no es claro para $w(t)$ y t .

Empezando con $w(t)$ en rad/seg, t en seg y T_a en *pu* tenemos:

$$\frac{2H}{\omega_B} \frac{d\omega}{dt} = 2H \frac{d\omega}{dt_u} = T_a \quad (4.99)$$

donde: H denota la constante de inercia en pu , ω_B la velocidad angular base y T_a el par acelerante en pu . Siendo $t_u = \omega_B t$; si t y ω están en pu , entonces,

$$T_j \frac{d\omega}{dt} = T_a \quad (4.100)$$

donde

$$T_j = 2H\omega_B$$

Los pares aplicados a un rotor de una máquina síncrona se muestran en la Figura 4.14

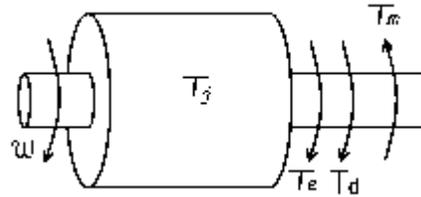


Figura 4.14 Pares aplicados al rotor de la máquina síncrona.

donde T_e denota el par electromagnético y T_m es el par mecánico de la máquina síncrona.

De la figura 4.14, se tiene en pu :

$$T_a = T_m - T_e - T_d \quad (4.101)$$

donde:

$$T_e = i_d \lambda_d - i_q \lambda_q$$

$$T_d = \omega D$$

siendo D la constante de amortiguamiento.

Sustituyendo (4.96), (4.97), (4.101) en (4.100), tenemos:

$$T_j \frac{d}{dt} \omega = T_m + \begin{bmatrix} -L_d i_q & -M_{dF} i_q & L_q i_d & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Finalmente, podemos obtener la formulación completa de corriente de la máquina síncrona incluyendo la ecuación angular de potencia la cual es:

$$\frac{d}{dt} \delta = \omega \quad (4.103)$$

Entonces el modelo completo está dado por:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_F \\ V_q \\ T_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d & 0 & \omega L_q & 0 & 0 \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ -\omega L_d & -\omega M_{dF} & r_q & 0 & 0 \\ L_d i_q & M_{dF} i_q & -L_d i_q & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & M_{dF} & 0 & 0 & 0 \\ M_{dF} & L_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Con esta ecuación matricial es claro observar que el sistema no es lineal, donde la no

linealidad se debe al producto de variables de estado. Resolviendo para $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix}$ se tiene la

expresión (4.105).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_d & M_{dF} & 0 & 0 & 0 \\ M_{dF} & L_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} V_d \\ V_F \\ V_q \\ T_m \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_d & 0 & \omega L_q & 0 & 0 \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ -\omega L_d & -\omega M_{dF} & r_q & 0 & 0 \\ L_d i_q & M_{dF} i_q & -L_d i_q & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} \right\} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{L_F}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & \frac{-M_{dF}}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-M_{dF}}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & \frac{L_d}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} V_d \\ V_F \\ V_q \\ T_m \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_d & 0 & \omega L_q & 0 & 0 \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ -\omega L_d & -\omega M_{dF} & r_q & 0 & 0 \\ L_d i_q & M_{dF} i_q & -L_d i_q & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} \right\} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{V_d L_F - V_F M_{dF}}{L_d L_F - (M_{dF})^2} \\ \frac{V_F L_d - V_d M_{dF}}{L_d L_F - (M_{dF})^2} \\ \frac{V_q}{L_q} \\ \frac{T_m}{T_j} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{L_F r_d}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & \frac{-M_{dF} r_F}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & \frac{\omega L_F L_q}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & 0 & 0 \\ \frac{-M_{dF} r_d}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & \frac{L_d r_F}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & \frac{-\omega M_{dF} L_q}{L_d L_F - (M_{dF})^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\omega L_d}{L_q} & -\frac{\omega M_{dF}}{L_q} & \frac{r_q}{L_q} & 0 & 0 \\ \frac{L_d i_q}{T_j} & \frac{i_q M_{dF}}{T_j} & -\frac{L_d i_q}{T_j} & \frac{D}{T_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_q \\ \omega \\ \delta \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

De la ecuación (4.105) se hace la simulación para ver la respuesta gráfica del generador síncrono, donde el código para dicha simulación queda como se muestra en seguida:

CONTINUOUS SYSTEM MS

```
" States, derivates and time:
STATE id i iq w
DER did di diq dw
TIME t
```

```

" Initializations:
id=0
i=0
iq=0
w=0

" Equations:
did=(Vd*LF-VF*MdF+A)/x
di=(VF*Ld-Vd*MdF+B)/x
diq=(Vq+C)/Lq
dw=(Tm+E)/Tj

x=Ld*LF-MdF*MdF
A=-LF*rd*id+rF*MdF*i-w*LF*Lq*iq
B=rd*MdF*id-Ld*rF*i+w*MdF*Lq*iq
C=w*Ld*id+w*MdF*i-rq*iq
E=-Ld*iq*id-iq*i*MdF+Ld*iq*iq-D*w

Ua=Um*cos(Ws*t)
Ub=Um*cos(Ws*t-y)
Uc=-Ua-Ub
y=(2*pi)/3

Vd=sqrt(2)*(Ua*sin(Ws*t+z)+Ub*sin(Ws*t))
Vq=sqrt(2)*(Ua*cos(Ws*t+z)+Ub*cos(Ws*t))
z=pi/3

pi=3.141592
Ws=2*pi*f

"Transformacion inversa de corriente
ia=sqrt(2/3)*(id*cos(Ws*t)-iq*sin(Ws*t))
ib=sqrt(2/3)*(-id*cos(Ws*t+z)+iq*sin(Ws*t+z))
ic=-ia-ib

" Parameter values:
rd=0.1
rq=1
rF=1
Ld=1.7
Lq=1.64
LF=1.65
MdF=1.55
Tj=2.37
Tm=100
D=1
VF=30
Um=200
f=60

END

```

La respuesta grafica obtenida de este código se muestra en la Figura 4.15, donde se representan las corrientes i_d , i_q e i_F .

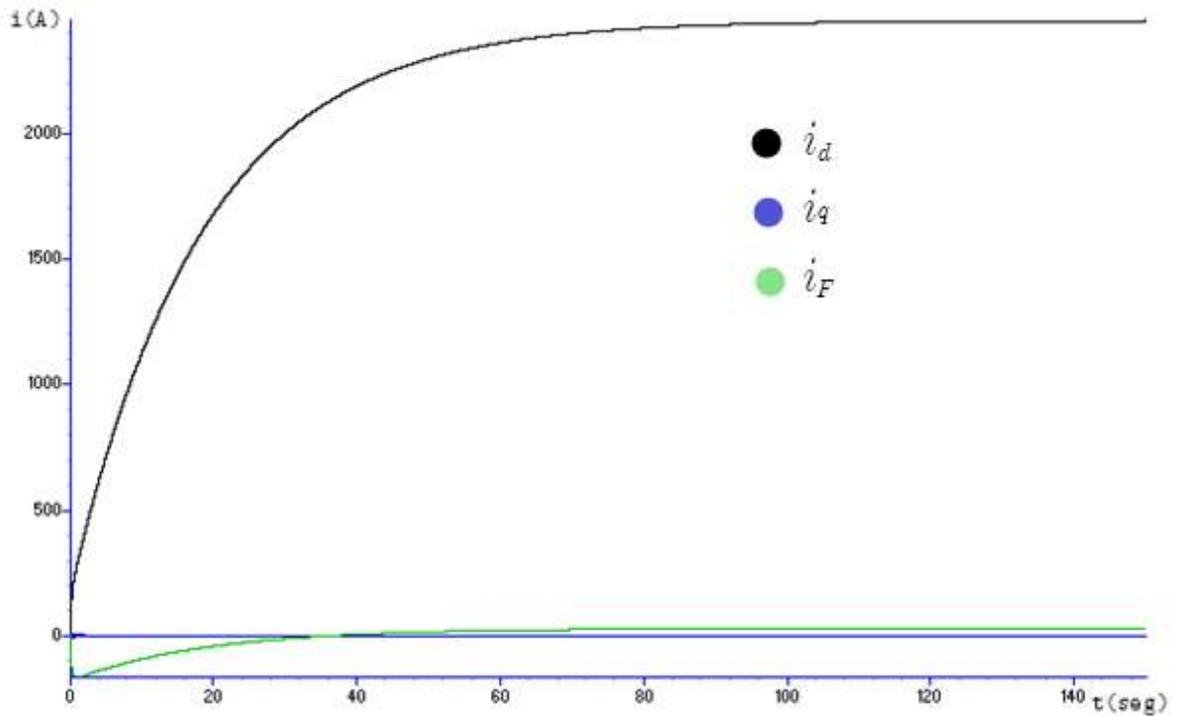


Figura 4.15 Corrientes i_d , i_q e i_F de la máquina síncrona.

En la Figura 4.16 se muestra la representación gráfica de la velocidad angular de la máquina síncrona.

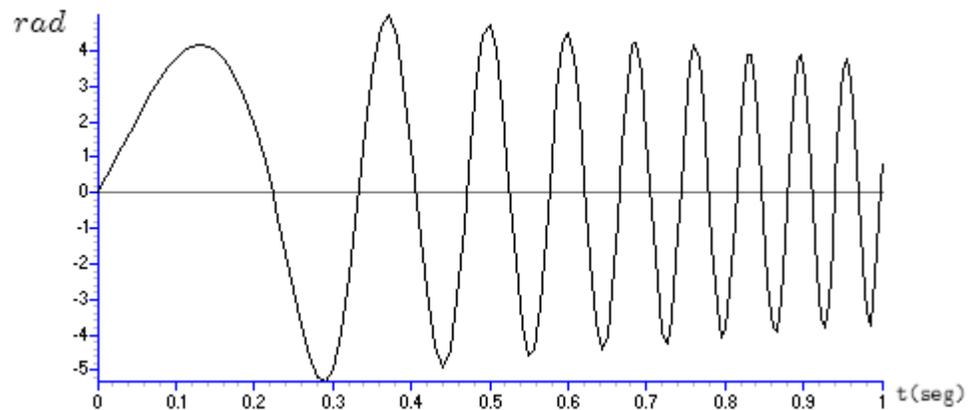


Figura 4.16 Representación de la velocidad angular ω .

Aplicando la transformación inversa a las corrientes i_d e i_q se tienen las corrientes en el sistema de referencia abc , como se ilustra en la Figura 4.17.

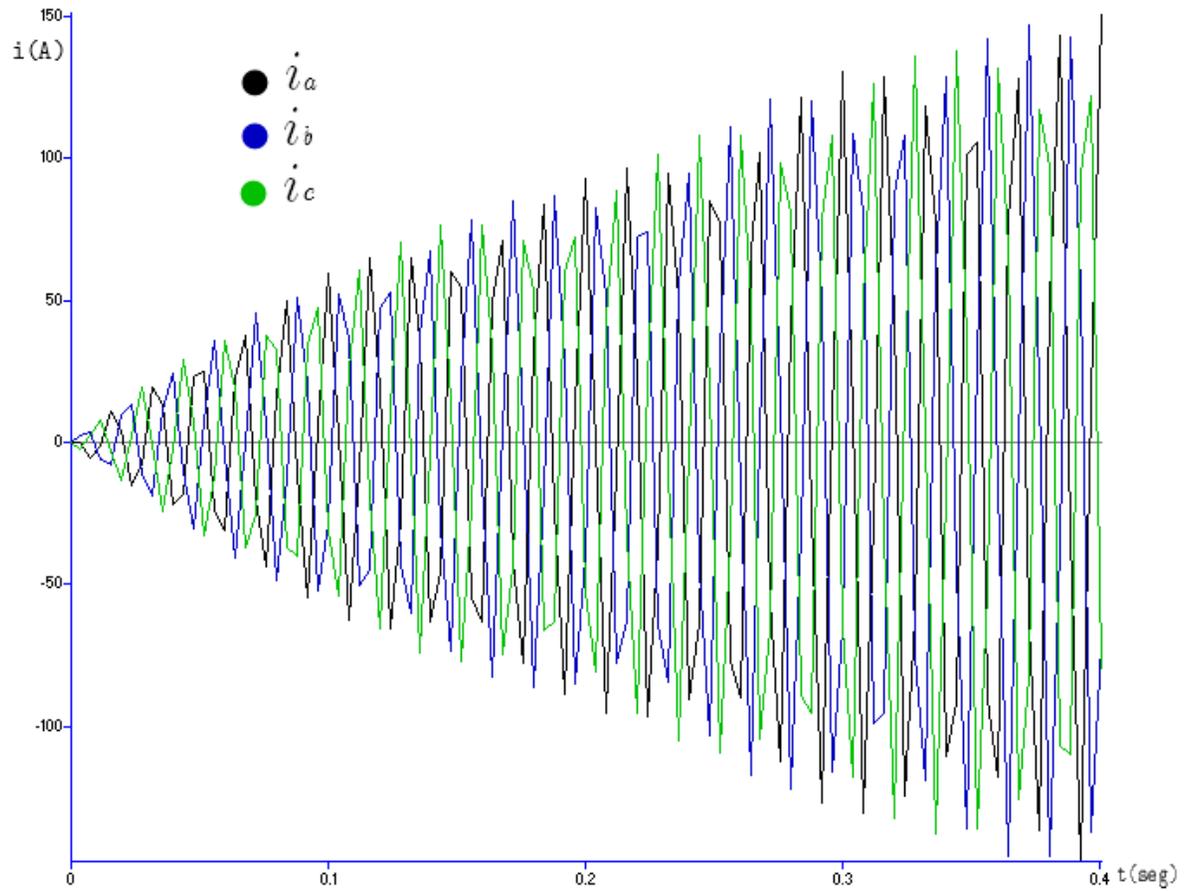


Figura 4.17 Representación de las corrientes i_a , i_b e i_c de la máquina síncrona.

En la Figura 4.18 se muestra el tiempo de establecimiento de las corrientes i_a , i_b e i_c ,

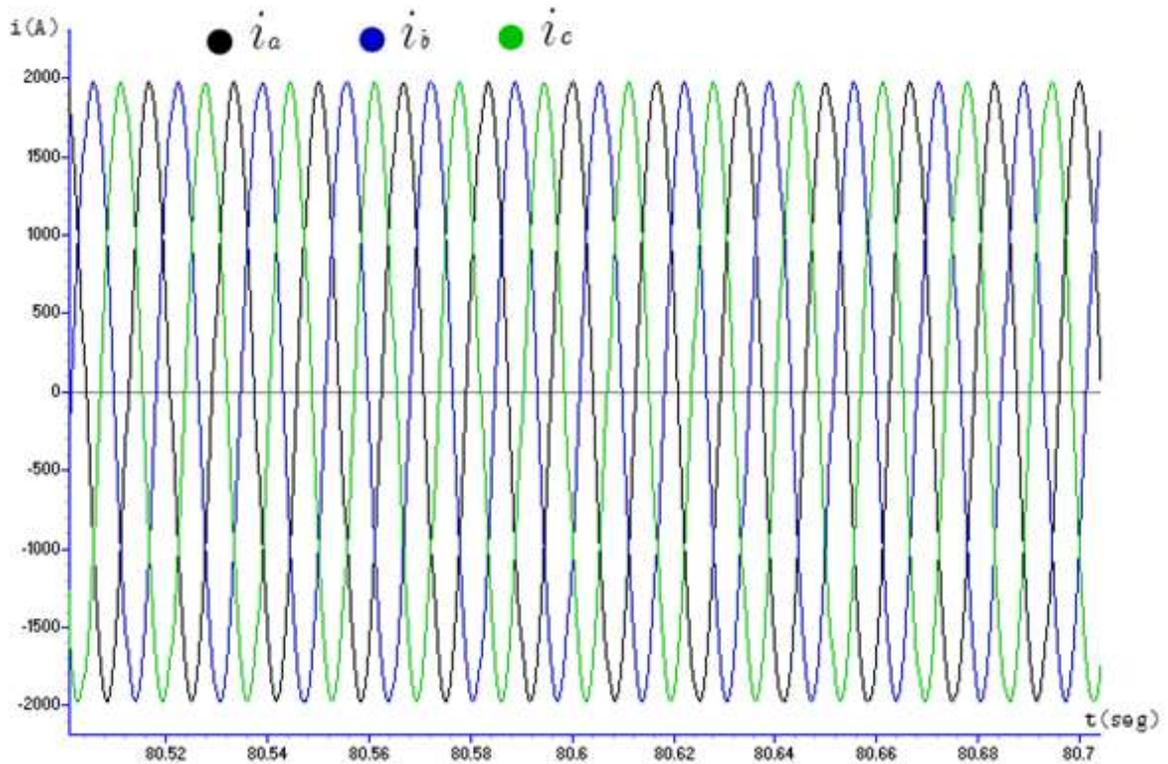


Figura 4.18 Tiempo de establecimiento de la corriente en abc .

Con esto se puede observar que aplicando la transformación de Park reducida, trabajando con los valores dq se puede regresar al sistema de referencia abc , esto solo se cumple si el generador trabaja de forma ideal (de forma balanceada).

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones:

El presente trabajo, después de analizar la transformación de Park y ser aplicado a sistemas trifásicos, donde se cambia de un sistema de referencia a otro, y después de haber cumplido el objetivo mencionado, me permite llegar a las siguientes conclusiones.

Se demostró que para un sistema trifásico, es necesario trabajar con la transformación de Park para simplificar su análisis. Es muy común que al trabajar con dichos sistemas estos se traten de forma balanceada, donde se cumple que la suma de sus tensiones $V_a + V_b + V_c = 0$ ó bien de sus corrientes $i_a + i_b + i_c = 0$, para este caso, el sistema de ecuaciones que describen a la transformación de Park (sistema de referencias $dq0$) se puede reducir a un sistema de ecuaciones, donde, en vez de tomar los valores iniciales abc del sistema en estudio, solo se tomarían los valores de ab y el sistema nuevo de referencia sería solamente dq , ya que esto, para fines didácticos facilitaría su solución, ya que es mas fácil resolver un sistema de ecuaciones de menor tamaño.

Los resultados han sido comprobados mediante simulaciones, las cuales entregan una respuesta gráfica en la que se aprecia la similitud de los resultados en ambas técnicas de conversión de sistemas de referencia ($dq0$ y dq). En la transformación de Park reducida es necesario mencionar que al regresar de los valores dq a los de abc , esto solo es posible siempre y cuando se cumpla que $i_a + i_b + i_c = 0$, ya que al aplicar la transformación inversa de Park reducida es necesario tener en cuenta que $i_c = -i_a - i_b$.

La transformación de Park reducida también se aplicó a un generador síncrono, donde, mediante simulaciones también se muestra los resultados de forma gráfica que se puede llevar a cabo siempre y cuando el generador trabaje de forma balanceada, y también se obtienen las corrientes en *abc* aplicando la transformación inversa de Park reducida.

Como recomendaciones, la transformación de Park reducida también puede ser aplicada en las ecuaciones que describen al comportamiento de una máquina de inducción, siempre y cuando no se deje de tomar en cuenta que este debe trabajar de forma balanceada, ya que en casos contrarios, para el análisis tanto para las máquinas como para los sistemas trifásicos, este método no sería aplicable ya que no cumpliría con las condiciones mencionadas anteriormente, por lo tanto, se trabajaría con la tradicional transformación de Park (*dq0*).

Las ventajas del método de la transformación de Park reducida es que al analizar un sistema trifásico el número de ecuaciones a resolver es reducido, lo que genera que la solución sea más fácil y rápida, como desventaja es que si el sistema muestra algún desbalance, la transformación de Park reducida ya no sería aplicada, ya que es una de las condiciones para que este método pueda ser aplicado.

Bibliografía

1. P. M. Anderson Power System Control and Stability. Editorial: John Wiley & Sons In
2. Chapman Stephen J. Máquinas Eléctricas. Editorial: MC Graw Hill
3. Fitzgerald A. E., Kigsley Charles Jr. Máquinas Eléctricas. Editorial: MC Graw Hill
4. <http://www.maquinariapro.com/sistemas/sistema-electrico.html>
5. <http://www.tuveras.com/lineas/sistemaelectrico.htm>
6. <http://www.afinidadelectrica.com.ar/articulo.php?IdArticulo=165>
7. <http://bieec.epn.edu.ec:8180/dspace/bitstream/123456789/1118/5/T10974CAP2.pdf>
8. <http://www.bdigital.unal.edu.co/2070/1/Oscaremiliodiazvanegas.2006.pdf>
9. <http://dctrl.fi-b.unam.mx/tutoriales/digital/>