



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

MODELADO Y SIMULACIÓN DE ROBOTS  
MANIPULADORES PLANARES EN BOND GRAPH

TESIS

Para obtener el Título de  
INGENIERO EN ELECTRÓNICA

Presenta:

WILLIAM RAÚL TÚTUTI CORIA

Asesor de Tesis

Dr. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
JUNIO DE 2011



## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por permitirme llegar a esta etapa de mi vida y lograr cumplir una de mis metas.

A mis padres por darme todo su apoyo en mis decisiones para tener la oportunidad de superarme, les doy las gracias por su sacrificio, ayudándome en lo necesario y poder tener una carrera para mi futuro, a mi hermana por aportar ideas de vez en cuando en mis tareas escolares, entre otras cosas.

A mis maestros por su capacidad, experiencia académica y amistad, ya que con ellos logre ir aprendiendo cada día las bases necesarias para lograr terminar mi carrera.

Agradezco a mi asesor de tesis Dr. Gilberto González Avalos porque gracias a su experiencia sus consejos y enseñanza me fue más fácil la elaboración de mi tesis.

A mis compañeros de clase de la generación 2005-2010, y a mis amigos por su apoyo incondicional, Fernanda, Mayra, René, Diego, Jaime, Carlos, con ellos aprendí muchas cosas ya que entre todos nos hemos ayudado para salir adelante.

Le agradezco a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en especial a la Facultad de Ingeniería Eléctrica por permitirme ser parte de una generación de triunfadores y gente productiva para el país.

## **DEDICATORIA**

Este trabajo de tesis se lo dedico a mis padres por confiar en mí y haber estado conmigo en todo momento, a mi hermana porque siempre he contado con ella para todo, aunque hemos pasado momentos difíciles siempre han estado apoyándome y brindándome todo su amor, por todo esto agradezco de todo corazón el que estén conmigo a mi lado.

A mis profesores por su tiempo, por su apoyo así como por la sabiduría que me transmitieron y tenerme la paciencia necesaria, además de motivarme a seguir adelante

Y a todas aquellas personas que participaron de una manera u otra para mi formación académica.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y en especial a la Facultad de Ingeniería Eléctrica que me dieron la oportunidad de formar parte de ellas.



# ÍNDICE

Página

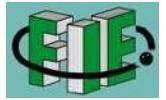
AGRADECIMIENTOS .....	i
DEDICATORIA.....	ii
ÍNDICE .....	iii
LISTA DE FIGURAS .....	vi
LISTA DE TABLAS.....	ix
RESUMEN .....	x
I.- CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 El Modelado de Robots Manipuladores.....	1
1.2 Objetivos .....	5
1.3 Justificación.....	5
1.4 Metodología.....	6
1.5 Estructura de la Tesis.....	8
II.- CAPITULO 2 MODELADO EN BOND GRAPH.....	9
2.1 Introducción.....	9
2.2 La Teoría de bond Graph .....	9
2.2.1 ¿Qué es un Bond Graph? .....	10
2.2.2 Componentes Básicos de un Bond Graph .....	11
2.2.3 Puertos-1 Activos o Fuentes .....	14
2.2.4 Puertos-1 Pasivos .....	15
2.2.4.1 Puertos-1 Resistencia .....	15
2.2.4.2 Puertos-1 Capacitancia.....	16
2.2.4.3 Puertos-1 Inercia.....	15
2.2.5 Los elementos Ideales de Puertos-2.....	19
2.2.6 Elementos de Unión Puertos-3 .....	21
2.2.7 Causalidad para los Multipuertos Básicos .....	23



2.2.7.1 Causalidad necesaria o fija .....	24
2.2.7.2 Causalidad restrictiva o condicionada .....	25
2.2.7.3 Causalidad integral y derivativa .....	27
2.2.7.4 Causalidad Arbitraria.....	29
2.2.8 Bond Activo .....	31
2.2.9 Procedimiento para el Modelado de Sistemas en Bond Graph.....	32
2.2.10 Procedimiento para la Asignación de Causalidad en un Multipuerto .....	33
2.2.11 Modelado Matemático a partir de Bond Graph.....	34
2.2.12 Vectores Clave o Vectores Significativos .....	34
2.2.13 Relaciones de Campo y Ecuaciones de Estado.....	36
2.2.14 Modelado y Solución de Sistemas Físicos utilizando Bond Graph.....	39
III.- CAPITULO 3 MODELADO DE ROBOTS MANIPULADORES PLANARES....	45
3.1 Introducción.....	45
3.2 Bond Graphs de Robots Manipuladores.....	45
3.2.1 Movimiento en dos Dimensiones en Bond Graph .....	46
3.2.2 Un Péndulo Simple en Bond Graph .....	52
3.2.3 Péndulo Simple con Peso .....	55
3.2.4 Péndulo Invertido y Carretón.....	56
3.2.5 Un Péndulo Doble en Bond Graph.....	57
IV.- CAPITULO 4 SIMULACIÓN DE ROBOTS MANIPULADORES PLANARES..	60
4.1 Introducción.....	60
4.2 Simulación Basado en Bonds Graphs.....	60
4.2.1 Simulación en 20-Sim .....	61
4.2.2 Características Clave de 20-Sim.....	61
4.3 Simulación de un Péndulo Simple .....	64
4.4 Modelado Matemático de Robots Manipuladores Planares .....	66
4.5 Modelado Matemático del Péndulo Simple .....	69
4.6 Introducción a Simnon.....	72



4.6.1 Archivos en Simnon .....	72
4.6.2 Estructura de los Programas.....	73
4.7 Simulación del Péndulo Simple en Simnon .....	74
4.8 Modelado Matemático del Péndulo Simple con Resistencia .....	78
4.9 Simulación del Péndulo Simple con Resistencia en Simnon.....	81
4.10 Simulación de un Robot Manipulador Planar con un Eslabón.....	83
4.11 Simulación de un Robot Manipulador Planar de un Eslabón en Simnon .....	85
4.12 Simulación de un Robot Manipulador Planar con dos Eslabones .....	88
V.- CAPITULO 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	93
5.1 Conclusiones.....	93
5.2 Recomendaciones.....	95
VI.- BIBLIOGRAFÍA.....	96



## LISTA DE TABLAS

	Página
Tabla 2.1 Variables generalizadas de sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales .....	14
Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y sistemas hidráulicos. ....	14
Tabla 2.3 Elemento-R. ....	17
Tabla 2.4 Elemento-C. ....	18
Tabla 2.5 Elemento-I .....	18
Tabla 2.6 Formas causales para multipuertos básicos .....	30
Tabla 2.7 Formas causales para puertos-1 básicos.....	31
Tabla 2.8 Relación de vectores clave con los elementos del sistemas físicos .....	41
Tabla 4.1 Comandos básicos .....	72



## RESUMEN

A lo largo de la historia el hombre se ha fascinado por máquinas que imitan el movimiento del hombre, los robots son ideales para realizar trabajos que requieren movimientos repetitivos y precisos. La robótica es un campo relativamente nuevo de la tecnología moderna que cruza las fronteras de las tecnologías tradicionales. Comprendiendo la complejidad de los robots y sus aplicaciones requiere el conocimiento de la ingeniería industrial, ciencias computacionales, economía y matemáticas.

Nuevas disciplinas de ingeniería, tales como ingeniería de manufactura, ingeniería de aplicaciones e ingeniería de conocimiento están empezando a emerger para tratar con la complejidad del campo de la robótica y el área más grande de automatización de industrias. Dentro de pocos años es posible que ingeniería de la robótica llegue a ser una disciplina especializada.

Con la teoría de bond graph la cual se encarga del modelado para tratar diferentes sistemas físicos por medio de enlaces de potencia, se pueden representar y modelar robots manipuladores planares, así como llegar a la obtención de sus ecuaciones a partir del modelo en bond graph, esta técnica permite conectar sistemas a través de puertos de energía utilizando enlaces de potencia para representar y manipular sistemas aun más complejos y llegar a la solución de problemas.

Los simuladores como 20-sim y Simnon son de gran ayuda para analizar y observar el comportamiento de nuestros sistemas, para nuestro caso enfocado a robots manipuladores planares, de esta manera se llega a tener una comprobación y comparación de resultados a imagen y semejanza de la realidad.



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 El Modelado de Robots Manipuladores

El término robótica describe la tecnología de los robots y recientemente ha producido un gran impacto en el desarrollo y uso industrial de estas máquinas, de tal forma que se ha llegado al punto de hablar de “la revolución de los robots” y “la era de los robots”. El término robótica puede ser definido como una rama de la tecnología, la cual se encarga del diseño, manufactura y aplicaciones de los robots, para comprender su complejidad así como sus aplicaciones se requiere el conocimiento de la ingeniería industrial, ciencias computacionales, y áreas importantes como la economía y matemáticas.

La palabra robot proviene de la palabra checa *robota* que significa trabajo, este término fue utilizado por primera vez por el novelista Dramaturgo Karel Capek (1921) en su obra R.U.R. (Robots Universales de Rossum) donde hace referencia a la fabricación de máquinas a imagen y semejanza de los seres humanos.

De manera general un robot se puede definir como un dispositivo manipulador reprogramable, multifuncional, que puede estar en un sitio o moverse y que está diseñado para mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, por medio de movimientos programados para la realización de diversas tareas o trabajos.

Los robots para la década de los 50's eran máquinas grandes, robustas, con poca movilidad, tenían mecanismos de relojería a base de engranes, como los mostrados en la figura 1.1 y figura 1.2.

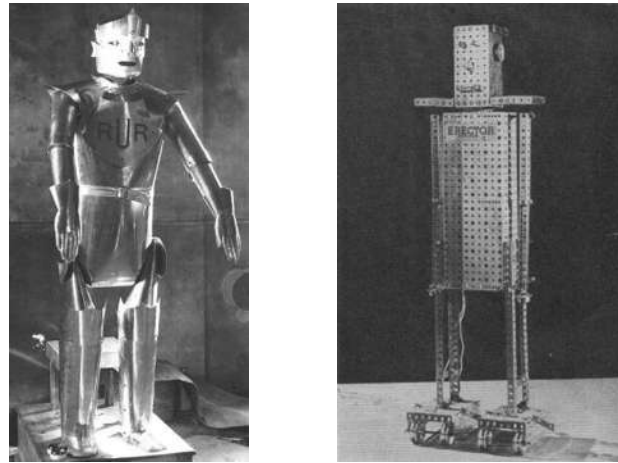


Figura 1.1 Robot de la obra R.U.R.

Robot gigante, el cual fue hecho a través de motores para hacer oscilar las varillas en las piernas.

Este mecanismo funciona a través de engranes, los cuales giran y hacen deslizar las varillas para dar movilidad a las piernas.

Manivelas para accionar el movimiento de las varillas.

Varillas para deslizar los pies alternadamente.

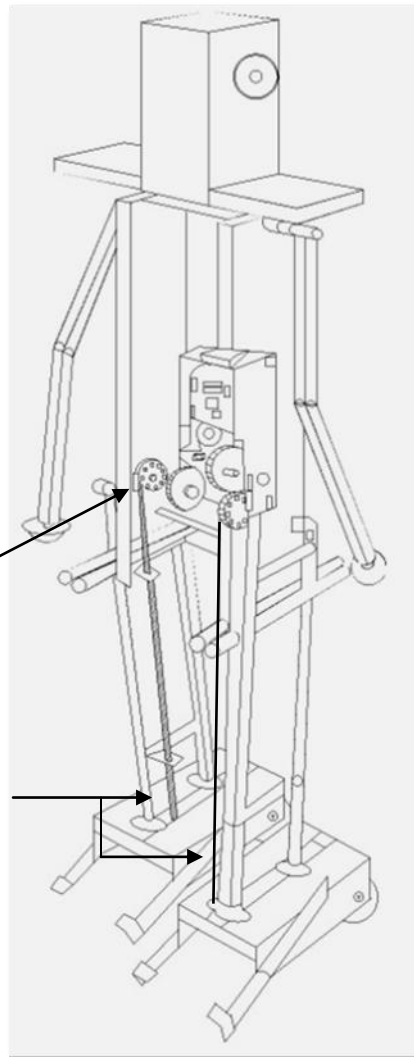
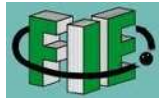


Figura 1.2 Arquitectura interna.



Hacia finales de la década de los 50 y principios de los 60 salen a la luz pública los primeros robots industriales conocidos como Unimates diseñados por George Devol y Joe Engelberger, los cuales utilizan los principios de control numérico para el control de manipulador y eran un robot de transmisión hidráulica, la función que desempeñaba el brazo es recoger y colocar piezas.

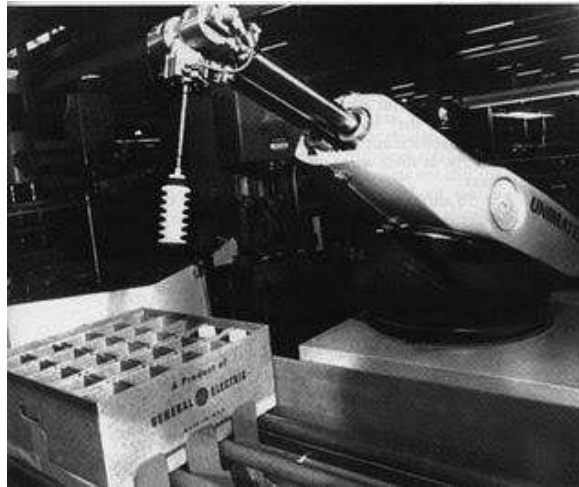


Figura 1.3 Primer robot industrial UNIMATE de solo un brazo.

Ya en la década de los 80 los brazos industriales modernos incrementaron su capacidad y desempeño a través de microcontroladores y lenguajes de programación más avanzados. Estos avances se lograron gracias a las grandes inversiones de las empresas automovilísticas.

Hoy en día dentro del sector industrial los robots manipuladores son de gran importancia, tienen una gran y amplia infinidad de aplicaciones que ayudan al ser humano para la solución de problemas específicos, así como para el desarrollo de nuevas plataformas.

El robot Cincinnati Milacron T3 es un ejemplo de robot de brazo articulado que más se asemeja al brazo humano, se compone de varios órganos rígidos conectados por juntas rotativas. En la figura 1.4 se muestra un robot manipulador industrial.

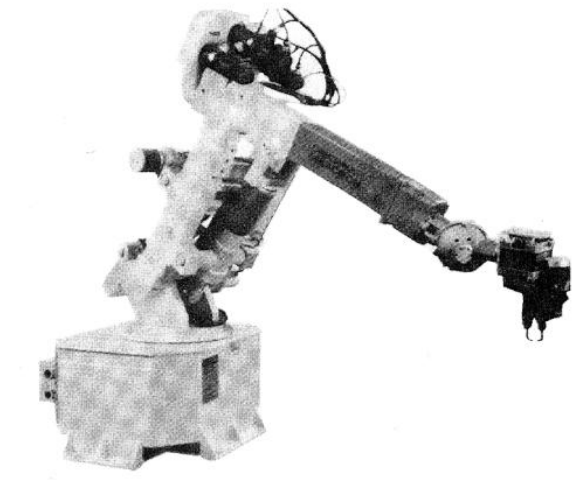
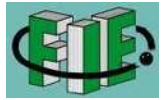


Figura 1.4 Robot manipulador industrial Cincinatti Milacron T3

La figura 1.5 muestra el robot Puma 500, es el más usado en aplicaciones automatizadas de soldadura por puntos y el más común en laboratorios de ensamble.



Figura 1.5 Robot puma 500.

En los últimos años los robots son capaces de realizar de modo automático gran cantidad de actividades como: pintura, soldadura, montaje, manipulación etc. Además de que han sido diseñados y programados para diversas tareas como en el caso de las líneas de producción, donde mantienen una constante comunicación con dispositivos que se encuentran a su alrededor, y permiten llevar



monitoreo constante de lo que realizan las 24 horas del día, lo que los hace seguros y confiables.

Su flexibilidad es mucho mayor que la de cualquier máquina y su productividad superior a la de cualquier ser humano en gran cantidad de trabajos.

## 1.2 Objetivos

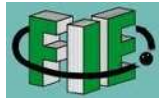
Los objetivos del presente trabajo de tesis son:

- Realizar el modelado y simulación de robots manipuladores planares en Bond Graph.
- Exponer el desarrollo e implementación de nuevas técnicas avanzadas para el modelado y simulación de los robots manipuladores planares.
- Aportar una solución en un nuevo entorno y nuevas plataformas que ayuden a la solución de problemas y diseños específicos.

## 1.3 Justificación

La robótica es una rama de la tecnología y es un instrumento importante en el desarrollo del ser humano. Además esta sustituye al ser humano en tareas casi imposibles de realizar por el mismo o en tareas demasiado monótonas y agotadoras como los procesos industriales, por ello el uso, o la necesidad de la robótica en la vida humana se vuelve cada vez mayor.

Los robots manipuladores planares han sido de gran ayuda para distintas funciones como el posicionamiento de piezas, el uso en bandas transportadoras



colocando etiquetas, ensamble de partes, en la mayoría de las aplicaciones imitan el movimiento de las personas.

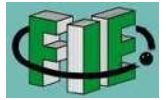
El modelado de sistemas físicos con el uso de la técnica en Bond Graph ha sido de gran utilidad y beneficio por su eficiencia para el diseño y simulación en la construcción de modelos, esta técnica será aplicada para robots manipuladores planares para llegar a la solución de una forma precisa y práctica.

Con el uso de esta técnica se tendrá una nueva opción para la representación de los modelos físicos y con ellos resolver algún problema que se presente.

Aunque un robot no puede sustituir a un ser humano en cualquier ámbito, puesto que la conducta humana tiene un nivel de complejidad muy superior al sistema informático de cualquier robot, como contrapartida un robot puede trabajar ininterrumpidamente y además es capaz de realizar operaciones que un ser humano no puede llevar a cabo. Por ejemplo, aquellos trabajos donde las condiciones laborales son de gran riesgo para los humanos, como pueden ser la manipulación de objetos en hornos industriales, explosivos o cables de alta tensión, reparaciones de satélites en el espacio, perforaciones submarinas o trabajos en ambientes tóxicos o radiactivos.

#### **1.4 Metodología**

Para el desarrollo de esta tesis, se tendrán conocimientos generales sobre los robots y sus aplicaciones, una vez teniendo estas bases se estudiará la teoría de Bond Graph, la cual será de utilidad para representar en forma gráfica sistema físicos como mecánicos, hidráulicos, eléctricos entre otros, esta técnica será aplicada a robots manipuladores planares, que es el tema fundamental de la tesis.



Para observar el comportamiento de nuestros sistemas a estudiar se usará el software de simulación *20-Sim*, el cual es posible de instalar en sistemas operativos como Windows, además de que es muy práctico para usarse, este simulador será de utilidad para ver el comportamiento y comprobación de nuestros resultados.

A continuación se presenta en la figura 1.6 un diagrama de flujo de la metodología a seguir, para el modelado y simulación de robots manipuladores planares.

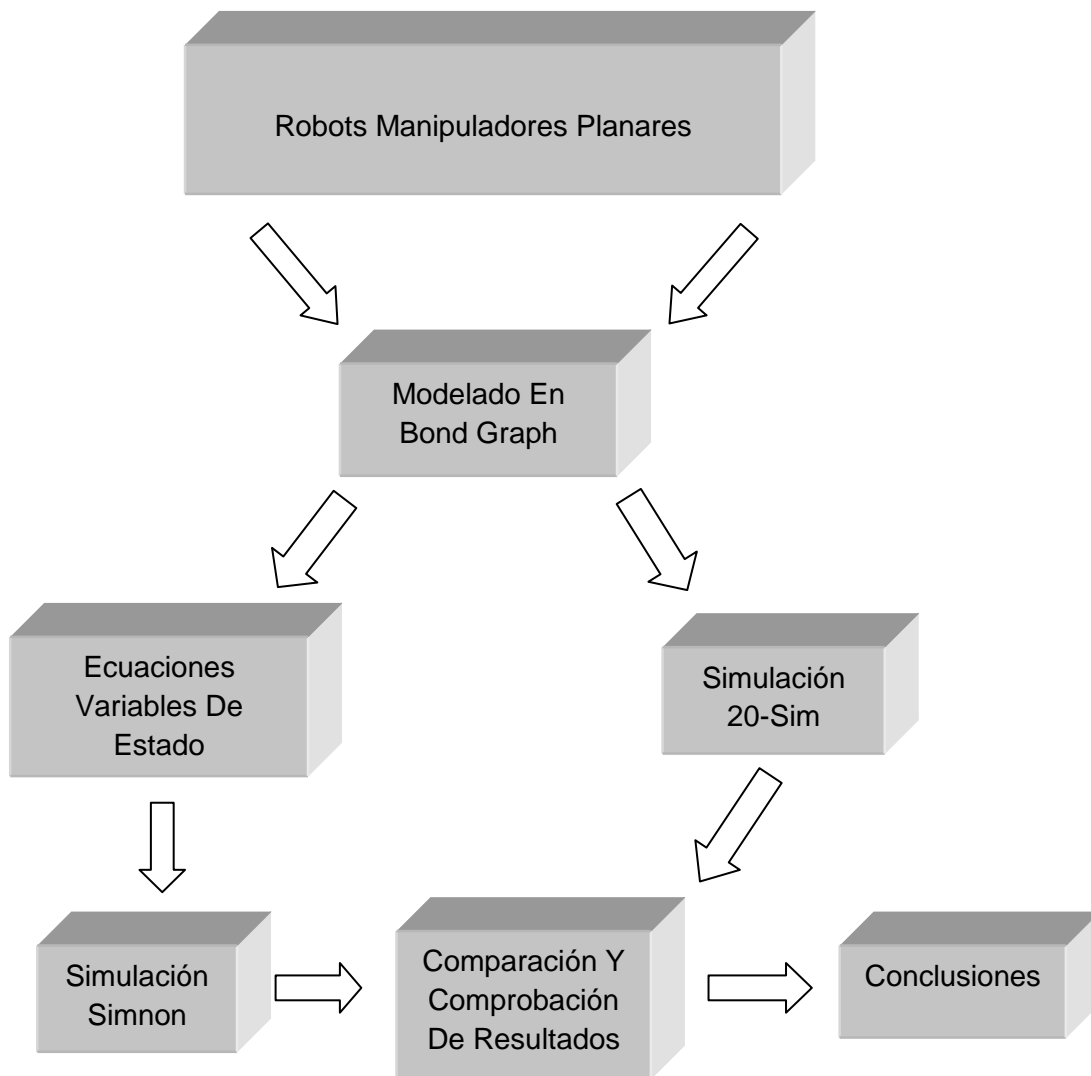
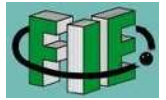


Figura 1.6 Diagrama de flujo para el desarrollo de la metodología.



## 1.5 Estructura De La Tesis

En el capítulo 1 se da una breve introducción y un panorama general de los avances y las utilidades que ha tenido la robótica en el paso del tiempo, se definen los objetivos, se justifica el desarrollo del trabajo de la tesis, se presenta la metodología para la solución de los problemas y se presenta la estructura de la tesis.

El capítulo 2 conforma la introducción al modelado en Bond Graph. Se presentan los principios de la teoría en Bond Graph, la cual describe, representa y se aplica a los sistemas físicos a estudiar.

El modelado de robots manipuladores planares se presenta en el capítulo 3. Se ve una introducción y una descripción de las técnicas básicas para la representación en Bond Graph para los robots manipuladores planares y poder llegar a la solución de problemas.

El capítulo 4 presenta la simulación de robots manipuladores planares con una introducción del simulador 20-Sim el cual será utilizado para la comprobación de resultados de los modelos realizados en Bond Graph.

En el capítulo 5 se exponen las conclusiones más relevantes a las que se han llegado en la realización del proyecto así como las recomendaciones para posibles trabajos a desarrollar.



## CAPÍTULO 2

### MODELADO EN BOND GRAPH

#### 2.1 Introducción

En este capítulo se da una breve descripción de la técnica de bond graph, la cual es utilizada para modelar sistemas físicos, como primer paso es llevar a cabo el análisis de un sistema dinámico.

El modelado en Bond graph permite representar de manera gráfica los sistemas físicos de la ingeniería en diversas áreas como son: la Mecánica, Eléctrica, Hidráulica, termodinámica entre otras. Los modelos son normalmente contruidos para resolver un problema propuesto.

Con la ayuda del modelado podremos manipular los sistemas dinámicos, qué permitirá obtener sus ecuaciones de estado y conocer sus propiedades de observabilidad, controlabilidad y dependencia lineal de sus elementos.

#### 2.2 La Teoría de Bond Graph

En 1959 el Prof. Henry Martyn Paynter desarrolló un método para describir los flujos de energía en los sistemas, al cual denominó método de bond graph, mediante este enfoque, un sistema físico puede ser representado por símbolos y líneas, la identificación de las vías de flujo de potencia. Los elementos de parámetros agrupados como resistencia, capacitancia e inercia están interconectados de manera que cumplen con la conservación de energía, y las uniones de los bonds resulta una estructura de red, lo cual facilita la derivación algorítmica de modelos matemáticos y computacionales directamente de los bond graphs.



Más tarde, la teoría de Bond graph siguió desarrollándose por muchos investigadores como Karnopp, Rosenberg, Thoma, Breedveld, etc; que han trabajado en la ampliación de esta técnica de modelado para sistemas hidráulicos de potencia, mecatrónica, sistemas generales de termodinámica y, recientemente, a la electrónica y sistemas no energéticos como la economía.

El uso de esta técnica, ha mostrado su eficiencia en gran número de aplicaciones, para el diseño de sistemas, simulación y determinación de las leyes de control, y de esta manera puede ser ubicada entre los métodos necesarios para la construcción de modelos.

En la figura 2.1 se muestra un diagrama general para el uso de esta técnica y la relación que tiene con su modelo matemático.

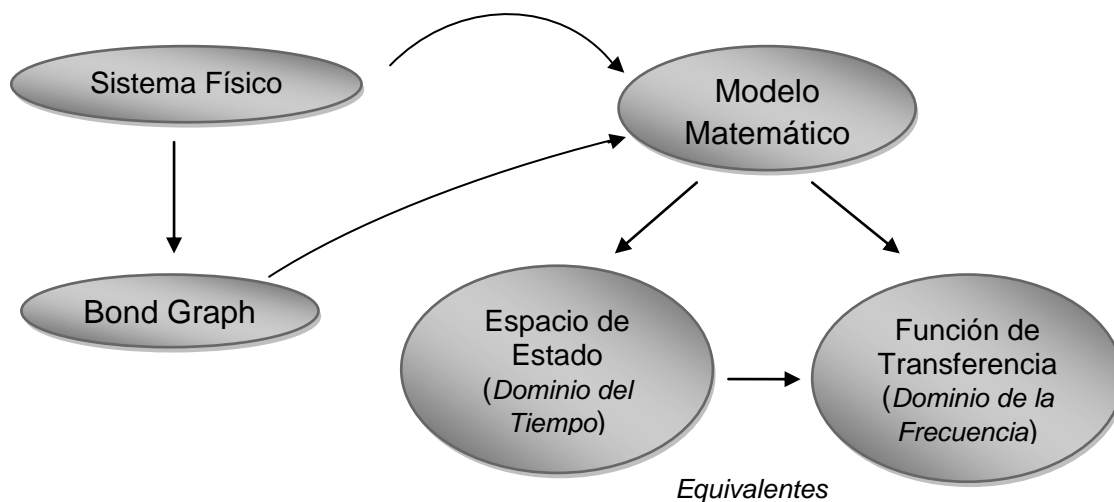


Figura 2.1 Diagrama general.

### 2.2.1 ¿Qué es un Bond Graph?

Un bond graph es una representación gráfica de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes colocados en el sistema describen cómo fluye la potencia a través del sistema.



Bond graph es un enfoque general que permite construir modelos de sistemas eléctricos, magnéticos, hidráulicos, neumáticos y térmicos utilizando solo un pequeño conjunto de elementos ideales. Con la ayuda de técnicas estándares se pueden expresar los modelos en ecuaciones diferenciales o en esquemas de simulación por computadora.

### 2.2.2 Componentes Básicos de un Bond Graph

En un sistema físico cualquiera, la energía puede almacenarse, disiparse o intercambiarse. Cuando posteriormente se unen dos sistemas, aparecen distintos flujos de potencia entre ellos.

Mediante la técnica de Bond Graph, el flujo de potencia entre los sistemas o incluso entre sus elementos se representa mediante una línea llamada Bond, representada en la figura 2.2. Donde la punta de la flecha indica el sentido de transmisión de la potencia.

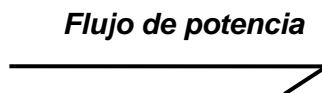


Figura 2.2 Flujo de potencia de un bond.

Para modelar un sistema, es necesario dividir un sistema en partes más pequeñas (subsistemas) que puedan ser modeladas y estudiadas experimentalmente, y después ensambladas al modelo del sistema.

Los lugares en los cuales los sistemas pueden ser interconectados, son lugares en los cuales la energía puede fluir, tales lugares son llamados puertos. Los sistemas con un puerto sencillo es denotado *puerto-1*, un sistema con dos puertos es llamado *puerto-2*, y los sistemas multipuertos son denominados *puertos-n*, donde n es el número de puertos.



Las variables que describen la unión de dos multipuertos que son conectados son llamadas *variables de potencia* a causa de que el producto de las variables consideradas como funciones del tiempo es la potencia instantánea fluyendo entre los dos multipuertos.

A estas variables de potencia se les denomina variables de *esfuerzo*  $e(t)$  y *flujo*  $f(t)$ . Estas variables son llamadas *variables de bond generalizadas* debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía. En la figura 2.3 se muestra la representación de un bond con las variables de potencia asociadas.

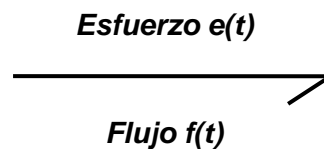


Figura 2.3 Bond con sus variables de potencia.

Como ejemplo de estos dos pares de variables son el voltaje y la corriente para un sistema eléctrico, fuerza y velocidad para un sistema mecánico, presión y caudal en un sistema hidráulico etc. La potencia  $P(t)$  es expresada como el producto de las variables esfuerzo y flujo, la ecuación general está dada por:

$$P(t) = e(t)f(t) \quad (2.1)$$

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representan el estado del sistema llamadas variables de energía denominadas momento  $p(t)$  o esfuerzo acumulado  $e_a(t)$  y desplazamiento  $q(t)$  o flujo acumulado  $f_a(t)$ . El momento es definido por la integral en el tiempo del esfuerzo.

$$p(t) = e_a(t) = \int^t e(t)dt \quad (2.2)$$

De igual forma el desplazamiento es la integral en el tiempo del flujo.

$$q(t) = f_a(t) = \int^t f(t)dt \quad (2.3)$$



Las ecuaciones (2.2) y (2.3) se pueden escribir en su forma diferencial en lugar de la integral.

$$\frac{dp(t)}{dt} = e(t); \quad dp = e(t)dt \quad (2.4)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(t); \quad dq = f(t)dt \quad (2.5)$$

Por otra parte, la energía transmitida por el bond,  $E(t)$  es la integral de la potencia en el tiempo, por lo que:

$$E(t) = \int^t P(t)dt = \int^t e(t) \cdot f(t)dt \quad (2.6)$$

A partir de las ecuaciones (2.4) y (2.5) la energía puede ser definida de la siguiente forma:

$$E(t) = \int^t e(t)dq(t) = \int^t f(t)dp(t) \quad (2.7)$$

La energía no sólo puede ser expresada como función del tiempo, sino también como una función de las variables de energía  $p$  y  $q$ .

$$E(q) = \int^q e(q)dq \quad (2.8)$$

$$E(p) = \int^p e(p)dp \quad (2.9)$$

Las tablas 2.1 y 2.2 muestran las variables generalizadas para distintos sistemas físicos, así como sus unidades métricas.



<b>Variables Generales</b>	<b>Eléctrico</b>	<b>S.I.</b>	<b>Mecánico Traslacional</b>	<b>S.I.</b>
Esfuerzo $e(t)$	Voltaje $v(t)$	$Volt = \frac{Newton \cdot metro}{Coulomb}$	Fuerza $F(t)$	<i>Newtons</i>
Flujo $f(t)$	Corriente $i(t)$	$Ampere = \frac{Coulomb}{seg}$	Velocidad $V(t)$	<i>mts/seg</i>
Momento $p(t) = \int e(t)dt$	Enlace de flujo $\lambda(t)$	$Volt \cdot seg$	Momento rotacional $P_R(t)$	$N \cdot s$
Desplazamiento $q(t) = \int f(t)dt$	Carga $q(t)$	$C = Amp \cdot seg$	Distancia $x(t)$	<i>mts</i>
Potencia $P(t) = e(t) \cdot f(t)$	$v(t) \cdot i(t)$	$V \cdot A = watts$ $watt = N \cdot \frac{m}{s}$	$F(t) \cdot V(t)$	$\frac{N \cdot m}{s}$
Energía $E(q) = \int e(q)dq$ $E(p) = \int f(p)dp$	$\int V(q)dq$ $\int i(\lambda)d\lambda$	$V \cdot A \cdot s = W \cdot s$ $W \cdot s = N \cdot m$	$\int F(x)dx$ $\int V(P_R)dP_R$	$N \cdot m$

Tabla 2.1 Variables generalizadas de sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales.

<b>Variables Generales</b>	<b>Mecánico Rotacional</b>	<b>S.I.</b>	<b>Hidráulico</b>	<b>S.I.</b>
Esfuerzo $e(t)$	Par $\tau(t)$	$newton \cdot metro$ $N \cdot m$	Presión $P_e(t)$	$\frac{newton}{metro^2}$ , $\frac{N}{m^2}$
Flujo $f(t)$	Velocidad angular $\omega(t)$	$\frac{radianes}{seg}$ , $\frac{rad}{s}$	Caudal $Q(t)$	$\frac{metro^3}{seg}$ , $\frac{m^3}{s}$
Momento $p(t) = \int e(t)dt$	Momento angular $H(t)$	$N \cdot m \cdot s$	Momento de presión $P_p(t)$	$\frac{N \cdot s}{m^2}$
Desplazamiento $q(t) = \int f(t)dt$	Angulo $\theta(t)$	$rad$	Volumen $V(t)$	$\frac{m^3}{s}$
Potencia $P(t) = e(t) \cdot f(t)$	$\tau(t) \cdot \omega(t)$	$\frac{N \cdot m}{s}$	$P_e(t) \cdot Q(t)$	$\frac{N \cdot m}{s}$
Energía $E(q) = \int e(q)dq$ $E(p) = \int f(p)dp$	$\int \tau(\theta)d\theta$ $\int \omega(H)dH$	$N \cdot m$	$\int p_e(V)dV$ $\int Q(P_p)dP_p$	$N \cdot m$

Tabla 2.2 Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y sistemas hidráulicos.

### 2.2.3 Puertos-1 Activos o Fuentes

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados fuentes. Existen dos tipos de fuentes, fuente de esfuerzo (voltaje, fuerza, par o presión) y



fuentes de flujo (corriente, velocidad, velocidad angular o caudal), la forma general de representarlas se presenta en la figura 2.4, en donde una fuente es un elemento activo sencillo llamado Puerto-1 Activo.



Figura 2.4 Puertos-1 activos.

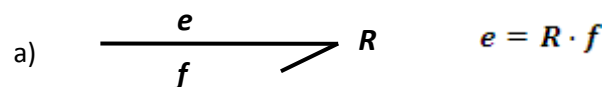
### 2.2.4 Puertos-1 Pasivos

Consideramos elementos ideales, los cuales representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía. A estos elementos se les denomina *elementos pasivos*.

Se denominan Puertos-1 Pasivos a aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo, de esta manera se tendrán elementos de disipación (resistencia), almacenamiento de flujo (capacitancia) y almacenamiento de esfuerzo (inercia) para sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos entre muchos otros.

#### 2.2.4.1 Puertos-1 Resistencia

La resistencia es un elemento en el cual las variables de esfuerzo y flujo son relacionadas por una función constante, y representa aquellas situaciones donde hay una pérdida de energía. En la figura 2.5 se muestran diferentes ejemplos de resistencia en varios sistemas físicos y el Bond general.



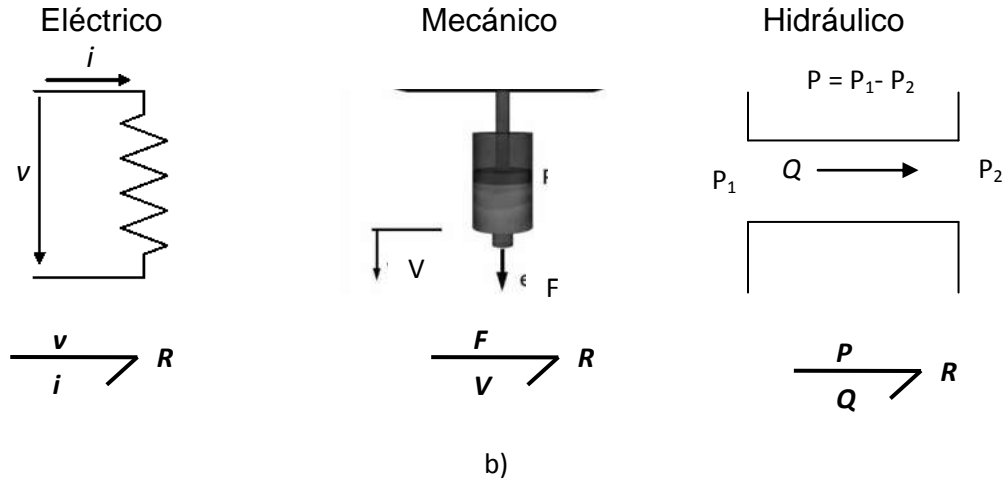


Figura 2.5 a) Puerto-1 resistencia, b) representación en sistemas físicos.

### 2.2.4.2 Puertos-1 Capacitancia

En la capacitancia existe una relación entre el esfuerzo  $e$  y un desplazamiento  $q$ , este elemento almacena y suministra energía sin tener pérdidas, la siguiente figura 2.6 muestra el símbolo en bond graph así como algunas relaciones en sistemas físicos.

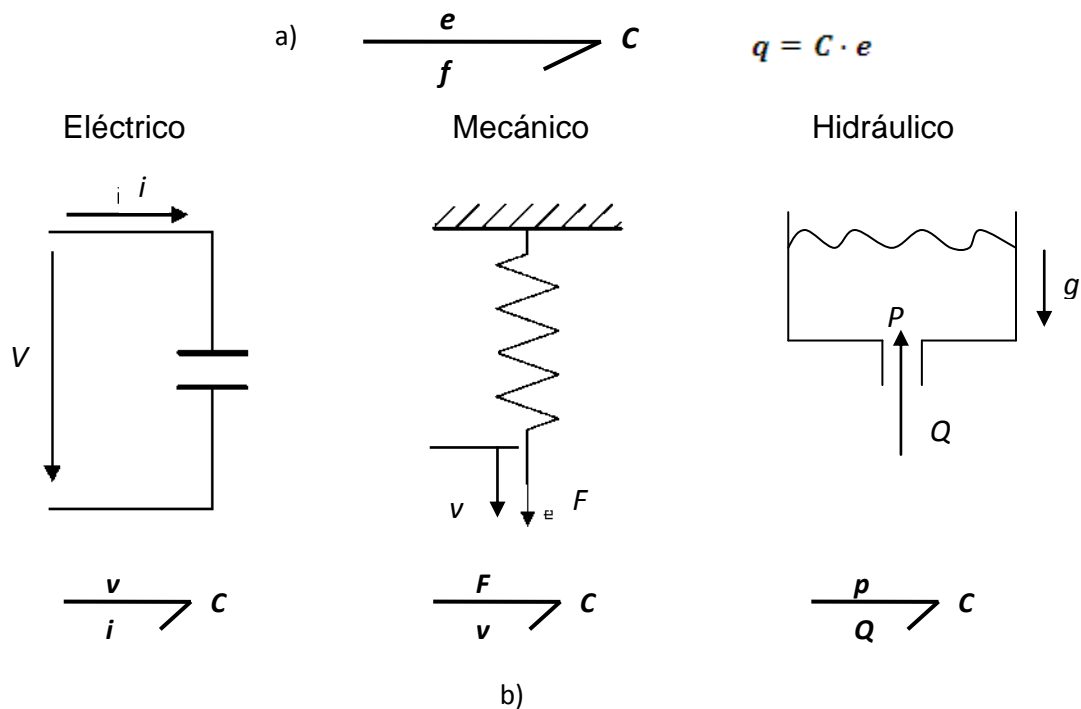




Figura 2.6 a) Forma general del Bond, b) diferentes dominios físicos.  
**2.2.4.3 Puertos-1 Inercia**

La inercia se presenta en todos aquellos elementos o fenómenos en los que existe una relación matemática entre el flujo  $f$  y el momento  $p$ , el cual se había definido como la integral del esfuerzo en el tiempo, El bond general y algunos ejemplos físicos se muestran en la figura 2.7.

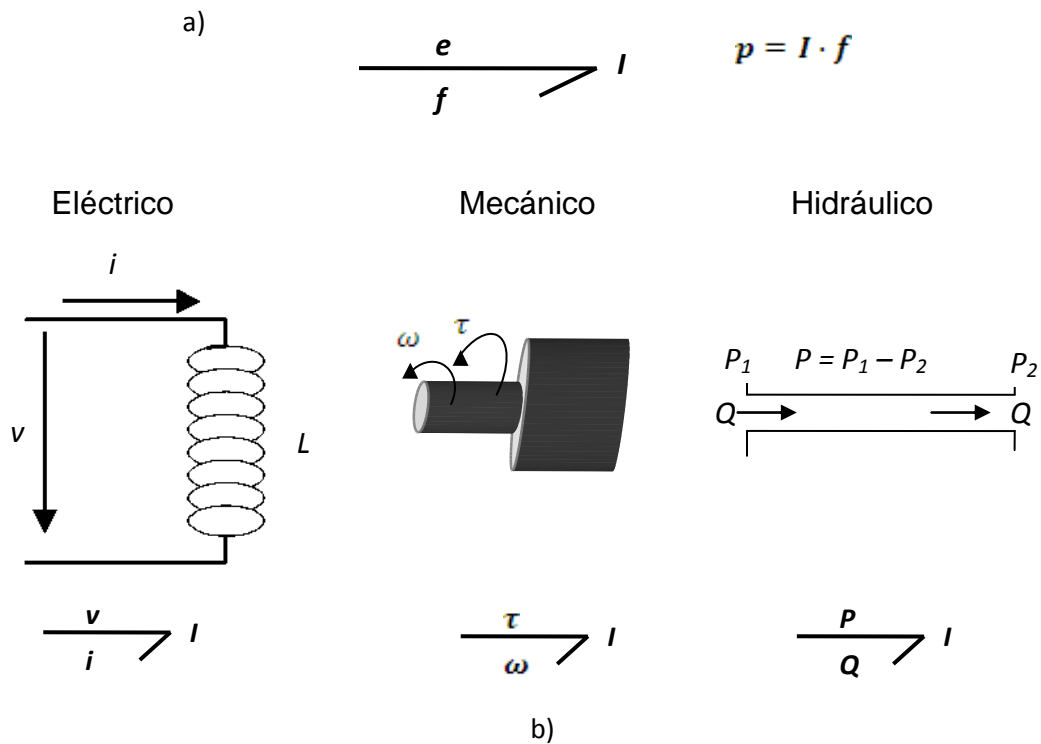


Figura 2.7 a) Bond general b) distintos sistemas de Puertos-1 inercia.

Las tablas 2.3, 2.4 y 2.5 presentan un panorama general de las distintas relaciones que tienen las variables de disipación y almacenamiento de energía para sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

Relación	Eléctrico	Mecánico traslacional	Mecánico rotacional	Hidráulico
Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\tau = B\omega$	$P_s(t) = RQ(t)$
No lineal	$v = \varphi(i)$	$F = \varphi(V)$	$\tau = \varphi(\omega)$	$P_s = \varphi(Q)$



Tabla 2.3 Elemento-R

Relación	Eléctrico	Mecánico traslacional	Mecánico rotacional	Hidráulico
Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$ $q = C \cdot v$	$F(t) = Kx(t)$	$\tau = K\theta$	$Q = C \frac{dP_e}{dt}, \int Q dt = CP_e$ $V = CP_e$
No lineal	$v = \varphi(q)$	$F = \varphi(V)$	$\tau = \varphi(\theta)$	$P_e = \varphi(V)$

Tabla 2.4 Elemento-C

Relación	Eléctrico	Mecánico traslacional	Mecánico rotacional	Hidráulico
Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$ $\lambda = L \cdot i$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F dt$ $P_R = M \cdot V$	$\omega = \frac{1}{J} \int \tau dt$ $P_\tau = J \cdot \omega$	$Q = \frac{1}{L} \int P_e, LQ = \int P_e dt$ $P_p = LQ$
No lineal	$i = \varphi(\lambda)$	$V = \varphi(P)$	$\omega = \varphi(P_\tau)$	$Q = \varphi(P_p)$

Tabla 2.5 Elemento-I

Para observar y comprender de una mejor manera, la relación existente de las variables generalizadas por tres puertos-1 pasivos R, C, e I, el tetraedro de estado se presenta en la figura 2.8

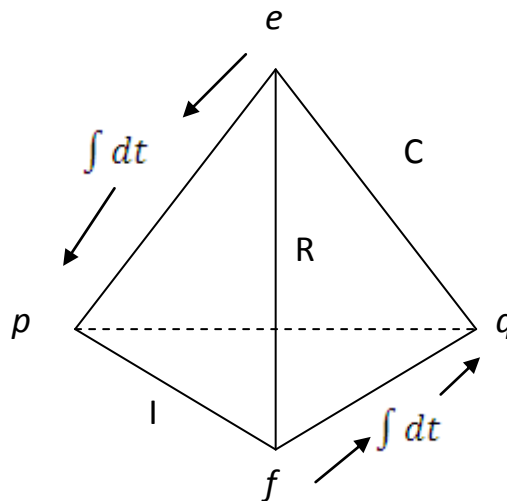


Figura 2.8 Tetraedro de estado



### 2.2.5 Los Elementos Ideales de Puertos-2

Consideramos ahora elementos ideales puerto-2, llamados *transformador* (*TF*) y *girador* (*GY*), que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo. Caracterizándose por tener dos puertos, y una relación lineal entre esfuerzos y flujos.

El transformador no crea, almacena o destruye la energía. Se conserva la energía y transmite la potencia con la escala apropiada según el módulo de transformador. Los bonds que representan a un transformador TF se muestran en la figura 2.9, donde  $n$  representa el módulo de transformador

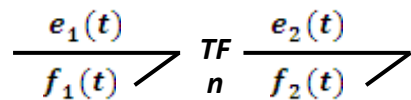


Figura 2.9 Bond graph de un transformador.

La relación de las variables de bond generalizadas para el transformador *TF* están dadas por:

$$e_1(t) = ne_2(t) \quad (2.10)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n}f_2(t) \quad (2.11)$$

Para un girador la componente *GY* es la misma que para el transformador *TF* en la medida en que la potencia se conserva. La diferencia es que el flujo en un puerto depende del esfuerzo en el otro y viceversa.



El nombre de girador surge de la propiedad de un giroscopio, en que la velocidad angular (flujo) se convierte en par (esfuerzo). A continuación en la figura 2.10 se presentan los bonds que lo componen.

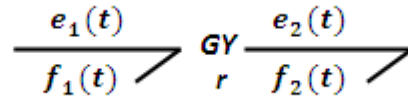


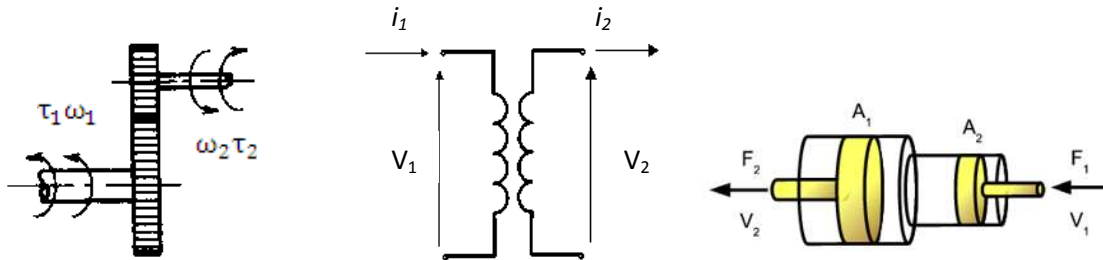
Figura 2.10 Bond graph de un girador.

Los subíndices representan cada uno de los puertos y r es el módulo girador, las ecuaciones que relacionan este elemento son las siguientes:

$$e_1(t) = r f_2(t) \tag{2.12}$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r} e_2(t) \tag{2.13}$$

La figura 2.11 se muestran algunos dispositivos que pueden ser modelados como transformadores y giradores.



Par de engranes

Transformador eléctrico

Cilindro hidráulico

a)

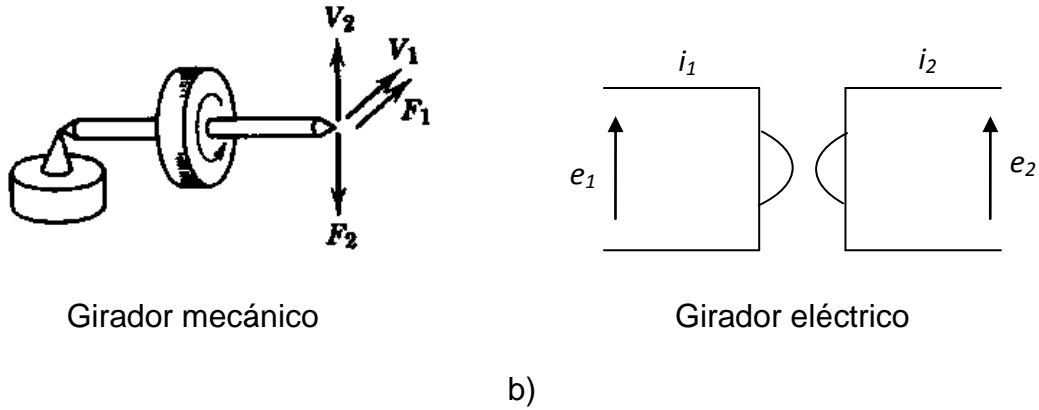


Figura 2.11 Elementos puertos-2 a) transformadores, b) giradores.  
**2.2.6 Elementos de Unión Puertos-3**

Estos puertos-3 son llamados uniones y describen aquellos puntos del sistema donde existen una o varias entradas de energía y una o varias salidas de ésta, de esta forma una unión cuya característica fundamental es que en ella se cumple el principio de conservación de la energía, además sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema, figura 2.12.

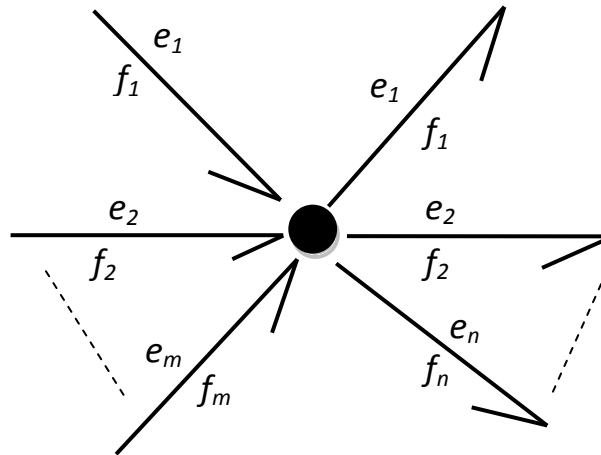


Figura 2.12 Unión puertos-3.

Debido al principio de conservación de la energía, definimos que la suma de productos de  $(e \cdot f)$  asociados a cada bond de entrada; es igual a la suma de los



productos de salida, lo que equivale a decir que no ha habido pérdida de energía en la unión.

Por tanto, en las uniones se cumple que:

$$\sum(e \cdot f)_{\text{entrada}} = \sum(e \cdot f)_{\text{salida}} \quad (2.14)$$

Existen dos tipos de uniones, que se denominan *unión-0* y *unión-1*.

La *unión-0* es de esfuerzo común, o unión de flujo la cual utilizada para la conexión en paralelo, en la figura 2.13 se muestra la representación de esta unión.

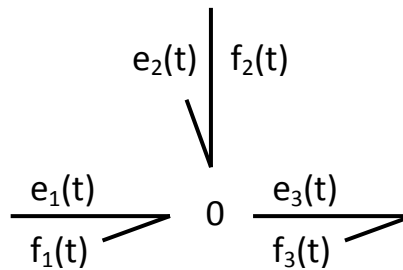


Figura 2.13 Union-0.

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.15)$$

y debido a la conservación de la energía se tiene que:

$$e_1(t) \cdot f_1(t) + e_2(t) \cdot f_2(t) = e_3(t) \cdot f_3(t)$$

$$e_1(t)[f_1(t) + f_2(t)] = e_1(t) \cdot f_3(t)$$

$$f_1(t) + f_2(t) - f_3(t) = 0 \quad (2.16)$$

Estas ecuaciones especifican que en una unión-0, los esfuerzos de todos los bonds son siempre iguales y la suma algebraica de los flujos es cero.



El otro elemento de puertos-3, es la unión de esfuerzo, *unión-1* o de flujo común y se utiliza para la conexión serie, su representación se muestra en la figura 2.14.

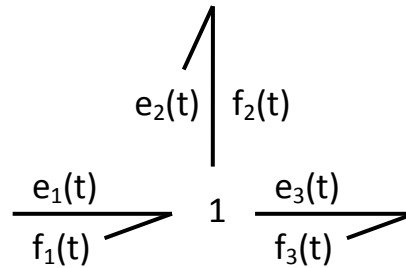


Figura 2.14 Unión-1.

Las relaciones de interconexión que describen la unión de esfuerzo están dadas por:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \tag{2.17}$$

Por conservación de la energía:

$$e_1(t) \cdot f_1(t) = e_2(t) \cdot f_2(t) + e_3(t) \cdot f_3(t)$$

$$e_1(t) \cdot f_1(t) = f_1(t)[e_2(t) + e_3(t)]$$

$$e_1(t) - e_2(t) - e_3(t) = 0 \tag{2.18}$$

Al contrario del caso anterior, en la unión-1 se mantiene constante el flujo de los bonds que entran y salen de la unión; mientras que la suma de las variables de esfuerzo en los bonds es cero.

Los puertos de conexión de esfuerzo y flujo se pueden extender a puertos de tres o más puertos.

### 2.2.7 Causalidad para los Multipuertos Básicos

Para organizar leyes constitutivas de componentes en conjuntos de ecuaciones es necesario definir relaciones de *causa* y *efecto*. Hallar la causalidad de los bonds consiste en determinar cuál de las dos variables que llevan



asociadas todos los bonds tienen una relación de dependencia, una siempre es función de la otra. Las relaciones de *causa* y *efecto* para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas.

Tenemos como ejemplo el móvil de la figura 2.15, que se encuentra inicialmente en reposo. Si se le aplica una fuerza  $F$ , se pone en movimiento y alcanza una velocidad  $V$ .

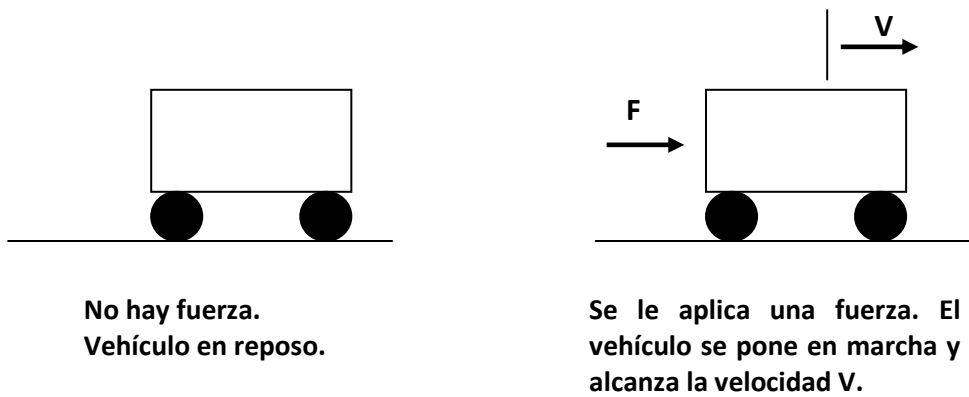


Figura 2.15 Ejemplo de un móvil.

Para este caso la *causa* es la fuerza y al ser aplicada aparece una velocidad, donde podemos decir que es el *efecto* causado por la fuerza, de esta manera *causa-fuerza* y *efecto-velocidad*.

Una marca en un bond, llamada *trazo causal*, indica cómo  $e(t)$  y  $f(t)$  son determinadas causalmente en un bond. A continuación en la figura 2.16 se muestran cuatro ejemplos de causalidad.

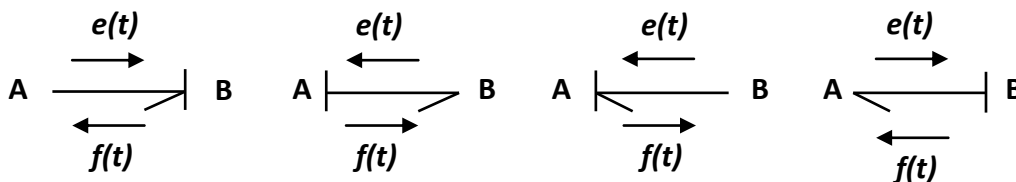




Figura 2.16 Causalidad para un bond.

El trazo causal indica el sentido de entrada-salida para  $e(t)$  y  $f(t)$  en cada puerto de los componentes juntos. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal.

**2.2.7.1 Causalidad necesaria o fija**

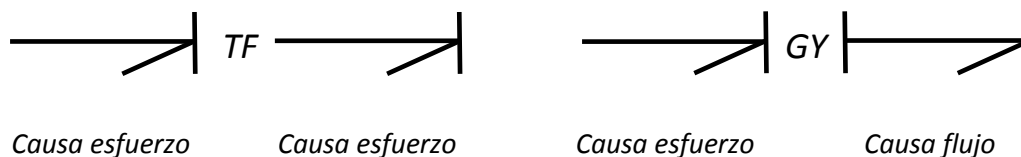
En ocasiones sólo es posible un tipo de causalidad, como por ejemplo en las fuentes de esfuerzo y flujo, cuando una fuente es de flujo, la causa siempre es el flujo y cuando una fuente es de esfuerzo, la causa es el esfuerzo, la figura 2.17 presenta este tipo de causalidad.



Figura 2.17 Causalidad necesaria.

**2.2.7.2 Causalidad restrictiva o condicionada**

Para el caso de los transformadores, este elemento relaciona siempre esfuerzos a la entrada con esfuerzos a la salida, o bien, flujos a la entrada con flujos a la salida, el transformador no modifica la causalidad, si en el bond de entrada la causalidad es flujo, en el de salida también lo es y de la misma forma a la inversa; para el elemento girador relaciona esfuerzos a la entrada con flujos a la salida o a la inversa, lo cual trae como consecuencia cambiar la causa en el bond de salida respecto al de entrada, esta causalidad la podemos observar en la figura 2.18.



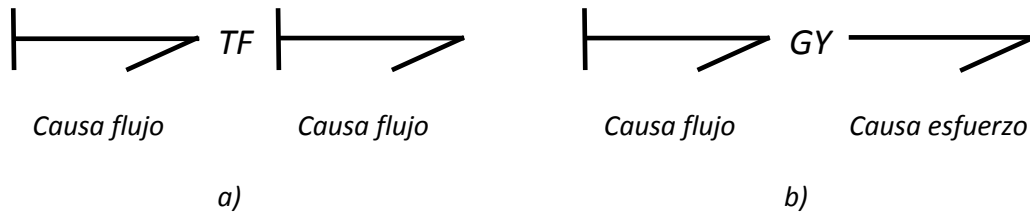


Figura 2.18 Causalidad a) transformador b) girador.

Para definir la causalidad en las uniones, basta con recordar la definición de cada tipo de unión. En la unión-1 todos los flujos son iguales, así de esta forma en la figura 2.19 se puede ver que  $e_1(t)$  sale de la unión y  $e_2(t)$  y  $e_3(t)$  son entradas a la unión.

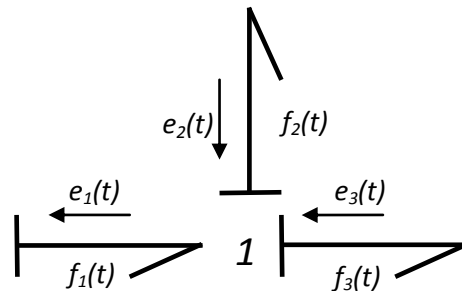


Figura 2.19 Causalidad en una unión-1.

Las ecuaciones de interconexión demuestran este tipo de causalidad:

$$f_2(t) = f_1(t) \tag{2.19}$$

$$f_3(t) = f_1(t) \tag{2.20}$$

$$e_1(t) = e_2(t) + e_3(t) \tag{2.21}$$

Cuando se trata de una unión-0 todos los esfuerzos son iguales, como se muestra en la figura 2.20,  $e_1(t)$  entra en la unión y  $e_2(t)$  y  $e_3(t)$  son salidas de la unión, efectos de  $e_1(t)$ , así  $f_1(t)$  está en sentido opuesto y va fuera de la unión, es una salida, y  $f_2(t)$  y  $f_3(t)$  son entradas a la unión.

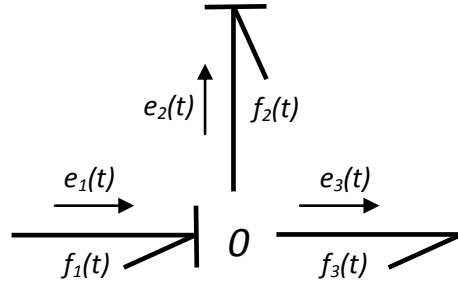
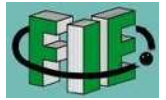


Figura 2.20 Causalidad en una unión-0.

Esto lo podemos representar con las ecuaciones de interconexión:

$$e_2(t) = e_1(t) \quad (2.22)$$

$$e_3(t) = e_1(t) \quad (2.23)$$

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t) \quad (2.24)$$

### 2.2.7.3 Causalidad integral y derivativa

En los elementos de almacenamiento (I o C) cuya relación esfuerzo-flujo puede ser una integral o una derivada, se prefiere la relación de integración, por lo tanto se tiene que:

- Para elementos C (capacitancia) se prefiere la causalidad de salida esfuerzo.
- Para elementos I (inercia) se prefiere la causalidad de salida flujo.

Considerando el elemento C la relación es de  $f(t)$  a  $e(t)$  y almacena flujo, es decir, si partimos de la ecuación (2.5) tenemos lo siguiente:

$$f = \frac{dq}{dt} ; \quad q = \int f dt$$



Debido a que en la capacitancia se tiene una relación entre esfuerzo y desplazamiento:

$$q = e \cdot C \rightarrow e = \frac{1}{C} q$$

$$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t) dt \tag{2.25}$$

Con ello si  $f(t)$  es la entrada a un elemento C como se muestra en la figura 2.21, se integra primero para encontrar  $q(t)$  y entonces  $e(t)$  es una salida relacionada a  $q(t)$ , a esta causalidad se le llama *causalidad integral*, debido a que la integral de la entrada  $f(t)$  se relaciona con la salida  $e(t)$ .

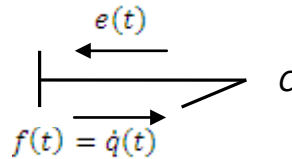


Figura 2.21 Elemento-C en causalidad integral.

También se puede expresar la ecuación (2.25) en derivadas, a esta causalidad se le denomina *causalidad derivativa* de un elemento de almacenamiento como se presenta en la figura 2.22

$$f(t) = \frac{d}{dt} (e \cdot C)$$

$$f(t) = C \frac{de(t)}{dt} \tag{2.26}$$

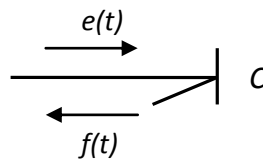


Figura 2.22 Elemento-C en causalidad derivativa.

Ahora consideremos un elemento-I, donde la relación será  $e(t)$  a  $f(t)$  y el almacenamiento será esfuerzo, de la ecuación (2.4) tenemos:



$$e = \frac{dp}{dt} ; p = \int e dt$$

La relación de variables en la inercia es flujo y momento:

$$p = I \cdot f \rightarrow f = \frac{1}{I} p$$

$$f(t) = \frac{1}{I} \int e(t) dt \tag{2.27}$$

En este caso e(t) entra al elemento-I, se integra y se obtiene p(t) y la salida f(t) se relaciona con p(t), para este elemento la causalidad integral es definida como, la integral de la entrada e(t) relacionada con la salida f(t), el bond con trazo causal se presenta en la figura 2.23.

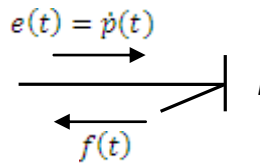


Figura 2.23 Elemento-I con causalidad integral.

Cambiando el trazo causal del bond de la figura 2.24, se obtiene la causalidad derivativa y la ecuación (2.27) se puede escribir con derivadas:

$$e(t) = \frac{d}{dt} (I \cdot f)$$

$$e(t) = I \frac{df(t)}{dt} \tag{2.28}$$

Figura 2.24 Causalidad derivativa del un elemento-I.



### 2.2.7.4 Causalidad Arbitraria

Los elementos resistivos o disipativos no tienen forma integral en el tiempo dentro de sus leyes constitutivas. El flujo y el esfuerzo en este puerto son algebraicamente relacionados y, por tanto puede tener cualquier tipo de estructura causal, en la siguiente figura 2.25 se muestra este tipo de causalidad.

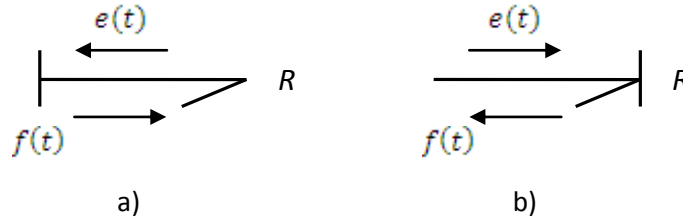


Figura 2.25 Ejemplo de causalidad arbitraria.

Para la figura 2.25 a) la salida  $e(t)$  se relaciona mediante una función constante multiplicada por el flujo.

$$e(t) = R \cdot f(t) \tag{2.29}$$

En la figura b) debido a que se cambió el trazo causal, se tendrá por consecuencia como salida  $f(t)$ .

$$f(t) = \frac{1}{R} e(t) \tag{2.30}$$

Las reglas para asignar la causalidad de los multipuertos básicos son resumidas a continuación en la tabla 2.6.

<b>Causalidad Necesaria</b>	$MS_e$ ————	$MS_f$  ————	
	————  TF ————   ———— TF  ————	————  GY  ————  ———— GY ————	
<b>Causalidad Restrictiva</b>	———  0 ———	——— 0 ———	———  0 ———
	——— 1 ———	———  1 ———	———  1 ———



<b>Causalidad Integral</b>		$I$	
<b>Causalidad Derivativa</b>		$I$	
<b>Causalidad Arbitraria</b>		$R$	

Tabla 2.6 Formas causales para multipuertos básicos.

En la tabla 2.7 se presentan los puertos-1, y la asignación de causalidad correspondiente a cada elemento para diferentes casos.

<b>ELEMENTOS</b>	<b>FORMA CAUSAL</b>	<b>RELACION CAUSAL</b>
<b>Fuente de esfuerzo</b>	$MS_e$	$e(t) = E(t)$
<b>Fuente de flujo</b>	$MS_f$	$f(t) = F(t)$
<b>Resistencia</b>		$e = R \cdot (f)$
		$f = R^{-1} \cdot (e)$
<b>Capacitancia</b>		$e = \frac{1}{C} \int f dt$
		$f = C \frac{de(t)}{dt}$
<b>Inercia</b>		$f = \frac{1}{I} \int e dt$
		$e = I \frac{df(t)}{dt}$

Tabla 2.7 Formas causales para puertos-1 básicos.

### 2.2.8 Bond Activo



Un bond normal tiene dos señales, esfuerzo  $e(t)$  y flujo  $f(t)$ . A diferencia un bond activo comunica una de las dos señales posibles en una sola dirección.

Un bond activo se representa por una flecha completa, como se muestra en la figura 2.26, indicando un flujo de señal de potencia cero.



Figura 2.26 Bond activo.

Un bond activo se utiliza como una señal en un diagrama de bloques, la cual conecta un bloque a otro sin consumir energía como se ilustra en la figura 2.27.

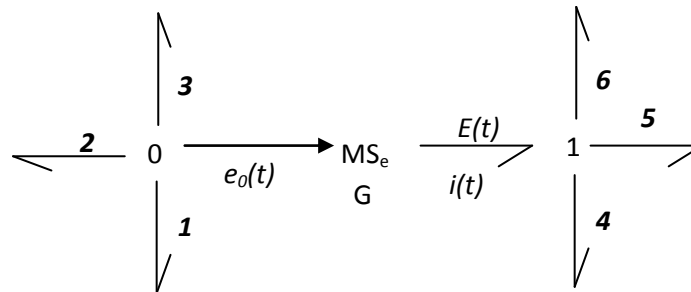


Figura 2.27 Bond graph con un bond activo.

El bond activo que entra a  $MS_e$  indica que  $E(t)$  es modulada por  $e_0(t)$ , así,  $E(t)=Ge_0(t)$ , donde  $G$  es la ganancia de voltaje.

El bond activo viene de una unión-0, el voltaje  $e_0(t)$  es el mismo que  $e_1, e_2$  y  $e_3$ . Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a  $e_0(t)$  es despreciable. La suma de corrientes en la unión-0, se debe únicamente a  $i_1, i_2$ , y  $i_3$ .

Los componentes básicos para llevar a cabo el modelado de sistemas se presentaron en esta sección, a continuación se proporciona un procedimiento para



modelar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos, el cual se puede extender a otro tipo de sistemas físicos.

### 2.2.9 Procedimiento para el Modelado de Sistemas en Bond Graph

En esta sección, se explica cómo representar sistemas físicos en bond graph utilizando un procedimiento de modelado simple y directo.

1. Dibujar una unión-0, para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan o exista una conexión entre dos o más elementos (nodos).
2. Dibujar una unión-1, para cada elemento existente en nuestro sistema en una trayectoria serie, y conectar el componente apropiado de bond graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes hacia elementos de almacenamiento o disipadores.
3. Asignar los demás bonds entre uniones 0 y 1, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover la unión-0, que corresponde al punto de referencia de nuestro sistema y, eliminar los bonds conectados a esa unión.
5. Simplificar la gráfica de acuerdo a las siguientes reglas:

$$\begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} \quad 1 \quad \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} \quad 0 \quad \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \nearrow \end{array}$$

### 2.2.10 Procedimiento para la Asignación de Causalidad en un Multipuerto



Una vez que se tiene la representación gráfica de nuestro sistema físico en bond graph, se procede a describir los pasos necesarios para asignar la causalidad, a cada uno de los elementos que contiene.

1. Considerar cualquier fuente  $MS_e$  y  $MS_f$  y asignar su causalidad requerida y entender las implicaciones causales, usando las restricciones en los elementos (0,1,TF y GY) mostradas en la tabla 2.6.
2. Asignar a los elementos (C y I) causalidad de preferencia integral, respetando las restricciones de la tabla 2.6 en cada uno de los elementos.
3. Escoger cualquier elemento R y darle una causalidad arbitraria, según le corresponda.
4. Una vez que se asignó la causalidad a cada uno de los bonds, se enumeran secuencialmente empezando por 1. Sin embargo, no es necesario seguir una regla fija, en la figura 2.28 se muestra un ejemplo.

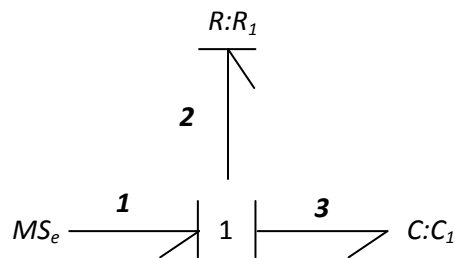


Figura 2.28 Numeración de los bonds

Se dice que un Bond Graph es *Causalmente Correcto*, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones.

### 2.2.11 Modelo Matemático a partir de Bond graph

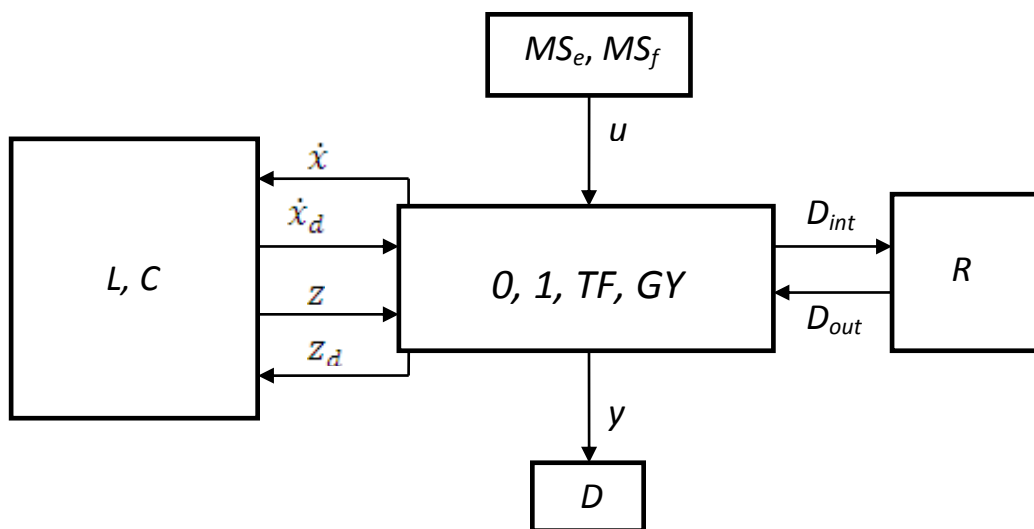


A partir del modelo en Bond Graph de un sistema físico, se pueden conocer las relaciones entre los diferentes elementos que forman el sistema, con ello podemos encontrar las ecuaciones de estado por medio de la Transformada de Laplace (dominio de la frecuencia) o a través de ecuaciones diferenciales (dominio del tiempo).

Para la estructura de unión en sistemas multipuerto, es necesario considerar algunos tipos de sistemas grandes como campos interconectados, lo cual da una estructura dinámica y entonces la generación, manipulación y reducción de muchas ecuaciones es hecha sistemáticamente para una implementación exitosa.

### 2.2.12 Vectores Clave o Vectores significativos

En un Bond Graph en forma convencional, todos los bond pueden ser clasificados en *bonds externos*, que conectan a los elementos o puertos  $R$ ,  $C$ ,  $I$ ,  $MS_e$  y  $MS_f$ , y en *bonds internos* que conectan a  $0$ ,  $1$ ,  $TF$ , y  $GY$ . Así mismo, los bonds externos pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía. En la figura 2.29 se muestra el diagrama de bloques de la *Estructura de Unión* de un Bond Graph.



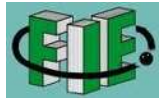


Figura 2.29 Diagrama de bloques de la estructura de Unión de un Bond Graph.

En la figura 2.29, las variables  $(MS_e, MS_f)$ ,  $(L, C)$  y  $(R)$  denotan los campos de fuente, de almacenamiento y de disipación respectivamente,  $(D)$  el detector y  $(0, 1, TF, GY)$  la estructura de unión con transformadores,  $TF$ , giradores,  $GY$ , uniones-0 y uniones-1.

Los vectores que representan el sistema llamados *vectores clave* están representados en la figura 2.29 donde  $u(t)$  contiene las variables de potencia o los esfuerzos y flujos impuestos por los elementos de las fuentes en la Estructura de Unión. Los estados  $x(t)$  y  $x_d(t)$  están compuestos de variables de energía, momento generalizado  $p(t)$  en elementos  $L$  y desplazamiento generalizado  $q(t)$  en elementos  $C$  en causalidad integral y derivativa respectivamente.  $z(t)$  y  $z_d(t)$  son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente  $D_{int}(t)$  y  $D_{out}(t)$  son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la Estructura de Unión.

### 2.2.13 Relaciones de Campo y Ecuaciones de Estado

Cuando en los modelos representados en bond graph se tienen todas las causalidades integrales de los elementos de almacenamiento, se dice que es un Bond Graph Integral (BGI) y sus relaciones de campo no lineales de la figura 2.28 de almacenamiento y disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.31)$$

$$D_{int}(t) = \Phi_L \cdot D_{out}(t) \quad (2.32)$$

donde,

$\Phi_F$  es la función que relaciona y representa cada esfuerzo con  $z_i$  con cada variable de desplazamiento representada por  $x_i$  para  $i=1, \dots, n$ .

$\Phi_L$  denota la función que relaciona la representación de flujo o esfuerzo dada por  $D_{int}$  con  $D_{out}$  según se presenten en el bond, para  $i=1, \dots, m$ .



El comportamiento de un elemento específico está descrito por la ley física la cual es llamada como su relación constitutiva. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$Z(t) = F \cdot x(t) \quad (2.33)$$

$$D_{out}(t) = LD_{int}(t) \quad (2.34)$$

donde L y F son matrices reales de dimensiones  $rxr$  y  $nxn$ , respectivamente. Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{int} \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out} \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Los elementos de la estructura unión (S) toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm r, \pm n\}$  donde  $n$  y  $r$  son los módulos de transformadores y giradores. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices  $S_{ij}$  tienen las siguientes propiedades:

- $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas antisimétricas.
- $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$  y viceversa.

Estas propiedades están basadas en el principio de conservación de la energía.

De la ecuación (3.35) se puede deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} D_{int} &= S_{21}z + S_{22}D_{out} + S_{23}u \\ D_{int} &= S_{21}Fx + S_{22}LD_{int} + S_{23}u \\ D_{int} - S_{22}LD_{int} &= S_{21}Fx + S_{23}u \\ (I - S_{22}L)D_{int} &= S_{21}Fx + S_{23}u \\ D_{int} &= (I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}Fx + S_{23}u) \end{aligned}$$



$$D_{int} = (I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}Fx) + (I - S_{22}L)^{-1}(S_{23}u) \quad (2.36)$$

Donde  $I$  es una matriz identidad, para  $\dot{x}(t)$  se tiene:

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}D_{out} + S_{13}u$$

$$\dot{x} = S_{11}Fx + S_{12}LD_{int} + S_{13}u \quad (2.37)$$

Sustituyendo la ecuación (3.36) en (3.37) obtenemos:

$$\dot{x} = S_{11}Fx + S_{12}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}Fx) + S_{12}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{23}u) + S_{13}u$$

$$\text{Si } M = L(I - S_{22}L)^{-1};$$

$$\dot{x} = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]Fx + [S_{13} + S_{12}MS_{23}]u \quad (2.38)$$

$$A_p = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]F \quad (2.39)$$

$$B_p = [S_{13} + S_{12}MS_{23}] \quad (2.40)$$

Para la salida  $y(t)$ :

$$y = S_{31}z + S_{32}D_{out} + S_{33}u$$

$$y = S_{31}Fx + S_{32}LD_{int} + S_{33}u$$

$$y = S_{31}Fx + S_{32}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}Fx) + S_{32}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{23}u) + S_{33}u$$

$$y = [S_{31} + S_{32}MS_{21}]Fx + [S_{33} + S_{32}MS_{23}]u \quad (2.41)$$

$$C_p = [S_{31} + S_{32}MS_{21}]F \quad (2.42)$$

$$D_p = [S_{33} + S_{32}MS_{23}] \quad (2.43)$$

La dinámica del sistema en variables de estado está dada por:



$$\dot{x}(t) = A_p x + B_p u \quad (2.44)$$

$$y(t) = C_p x + D_p u \quad (2.45)$$

Debido a que también hay sistemas con elementos que presentan causalidad derivativa, se tiene la expresión:

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.46)$$

$\Phi_{Fd}$  denota una función que relaciona cada  $z_{di}$  con  $x_{di}$  para  $i=1, \dots, m$ .

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.47)$$

Agregando los elementos con este tipo de causalidad, las ecuaciones de estado generales quedan definidas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{int} \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out} \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T \cdot z(t) \quad (2.47)$$

La estructura unión está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Relacionando las ecuaciones (2.46) y (2.47) obtenemos:

$$A_p = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.49)$$

$$B_p = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.50)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.51)$$

$$D_p = (S_{33} + S_{32}MS_{23}) \quad (2.52)$$



Siendo,

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \tag{2.53}$$

$$M = (I - S_{22}L)^{-1}L \tag{2.54}$$

Las expresiones anteriores permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación en Bond Graph.

### 2.2.14 Modelado y Solución de Sistemas Físicos utilizando Bond Graph

Considerando el siguiente circuito eléctrico mostrado en la figura 2.30, se aplican los pasos mencionados anteriormente para obtener su modelo gráfico en Bond Graph.

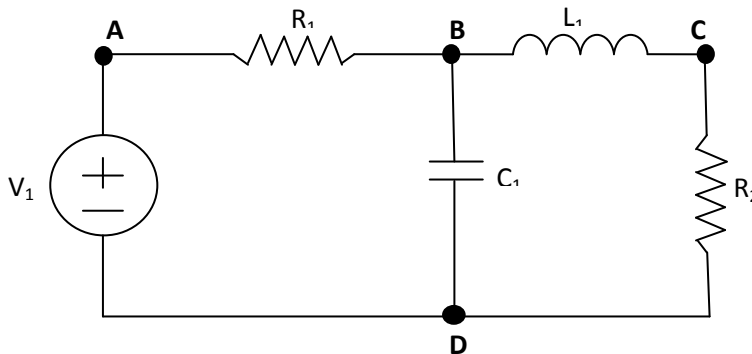


Figura 2.30 Ejemplo de un circuito eléctrico.

En cada nodo del circuito se coloca una unión-0 (A, B, C y D), después una unión-1 en cada elemento En la figura 2.31 se muestra el procedimiento.

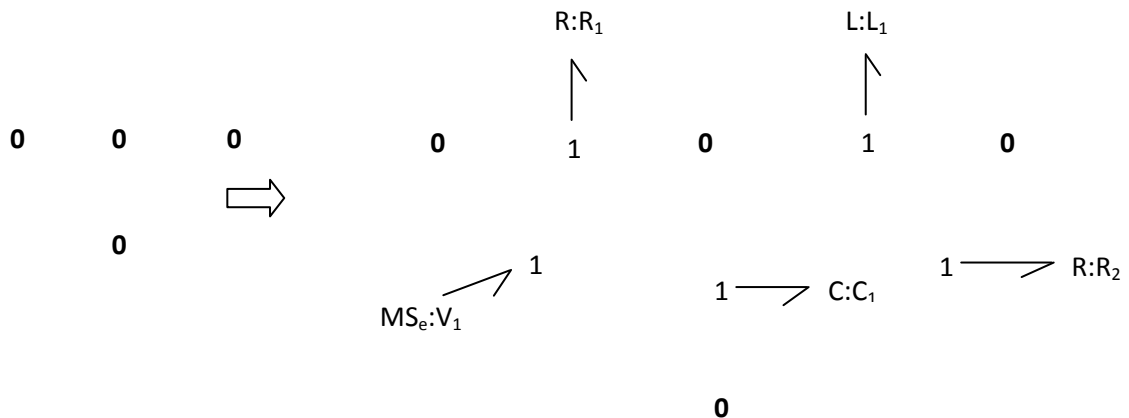




Figura 2.31 Pasos 1 y 2 del procedimiento para obtener el Bond Graph.

Se asignan los demás bonds entre los 0 y 1 para cerrar el lazo, y se elimina el nodo de referencia con la finalidad de simplificar el gráfico, ver figura 2.32.

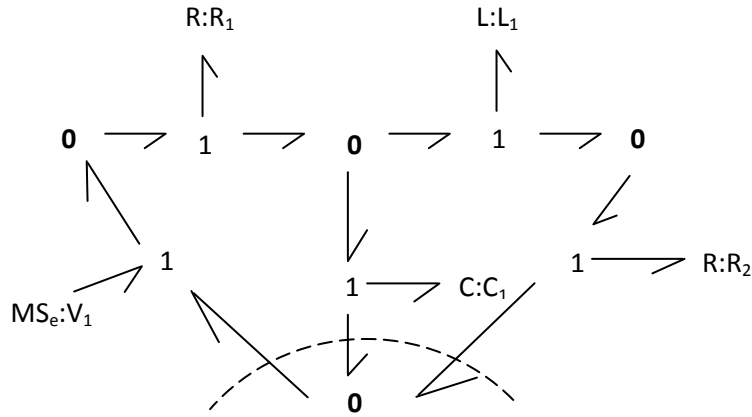


Figura 2.32 Obtención del primer modelo en Bond Graph.

Utilizando el paso 5 para la reducción del gráfico y llevando a cabo la asignación de causalidad en cada uno de los bonds se obtiene el Bond Graph general mostrado en la figura 2.33.

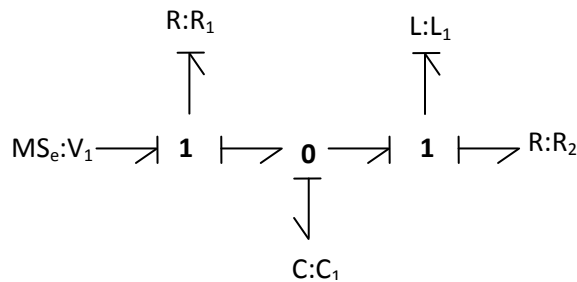


Figura 2.33 Modelo en Bond Graph del un sistema eléctrico.

Una vez teniendo el modelo gráfico obtenemos el modelo matemático a partir de la estructura unión de la figura 2.29, comenzando por enumerar todos los bonds del gráfico, figura 2.34.

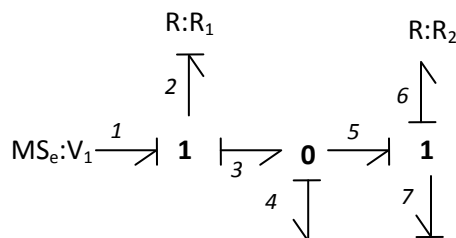




Figura 2.34 Paso 1 para obtener el modelo matemático.

Con ello tenemos la siguiente relación de los vectores clave asociados con las variables en cada uno de los elementos para obtener sus ecuaciones de estado, ver tabla 2.8.

Relación de vectores Clave			
	$x$	$\dot{x}$	$z$
$C$	$q$	$f$	$e$
$I$	$p$	$e$	$f$
$R$			$D_{in} = f$ $D_{out} = e$
			$D_{in} = e$ $D_{out} = f$

Tabla 2.8 Relación de vectores clave con los elementos del sistemas físicos.

Para el circuito eléctrico de la figura 2.30 podemos obtener las ecuaciones de estado usando la relación de vectores de la tabla 2.8 de la siguiente manera:

Asignamos la entrada de nuestro sistema  $u(t) = e_1$  que es el voltaje de entrada y como salida tenemos  $y(t) = f_7$  la corriente que fluye en el inductor, el subíndice indica el bond de enlace de nuestros elementos.

$$x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix}$$



Utilizando las relaciones  $D_{in}$  y  $D_{out}$  para los elementos resistivos tenemos lo siguiente:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

$$D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

Para obtener nuestras demás ecuaciones y poder completar nuestra matriz de estructura unión usamos las reglas básicas en las uniones 0 y uniones 1.

$$f_4 = f_3 - f_5$$

$$f_3 = f_2; \quad f_5 = f_6 = f_7$$

$$f_4 = f_2 - f_7$$

$$e_7 = e_5 - e_6; \quad e_5 = e_4$$

$$e_7 = e_4 - e_6$$

$$e_2 = e_1 - e_3 = e_1 - e_4$$

$$f_6 = f_7$$

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7^{21} \\ f_2 \\ e_6^{S_{21}} \\ e_2^{21} \end{bmatrix}$$

Comprobamos las propiedades de las submatrices para seguir con el procedimiento.

$$S_{11} \text{ y } S_{22} \rightarrow \textit{antisimétricas}$$

$$S_{12} = -S_{21}^T$$



Enseguida para obtener las matrices L y F usamos las ecuaciones (2.33), (2.34).

$$z = Fx ; \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}$$

$$D_{out} = LD_{in} ; \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

Para la matriz M tenemos:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} ; S_{22} = 0 ; M = L$$

Ahora corresponde encontrar los demás coeficientes Ap, Bp, Cp y Dp.

$$S_{12}MS_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} + S_{12}MS_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix}$$

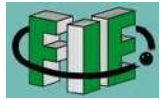
$$A_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$B_p = S_{13} + S_{12}MS_{23} \quad \swarrow 0$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_p = [S_{31} + S_{32}MS_{21}]F = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} = [0 \quad \frac{1}{L_1}]$$

$\swarrow 0 \quad \swarrow 0$



$$D_p = [S_{33} + S_{32}MS_{23}] = 0$$

Una vez teniendo los coeficientes podemos formar el sistema de ecuaciones de estado.

$$\dot{x}(t) = A_p x + B_p u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_4 \\ \dot{e}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1$$

$$y(t) = C_p x + D_p u$$

$$f_7 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix} + 0$$

Al obtener nuestras ecuaciones cumpliendo con los procedimientos antes mencionado podemos darnos cuenta de la ventaja que se tiene al utilizar este método como alternativa para el modelado y se podrá llevar una comparación con respecto a otras técnicas que lleven a la misma finalidad.



## CAPÍTULO 3

### MODELADO DE ROBOTS MANIPULADORES PLANARES

#### 3.1 Introducción

En los robots al igual que sucede con los seres humanos, para ejecutar cualquier tarea se debe analizar cuáles serán los movimientos necesarios y cuál será la fuerza que se le aplicará. Existen un número de caminos para llegar y poder determinar las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos. La técnica de bond graph ofrece flexibilidad en el modelado y la formulación de las ecuaciones del sistema. Muchos sistemas de las diferentes ramas de la ingeniería son modelados de manera unificada mediante un gráfico formado a través de bonds.

En este capítulo se mostrará como representar robots manipuladores planares en bond graph utilizando las técnicas presentadas en el capítulo anterior, y con ello poder llegar a las ecuaciones que representan su comportamiento.

#### 3.2 Bond Graphs de Robots Manipuladores

En los últimos años se ha tenido un creciente interés en la investigación de robots debido a la infinidad de aplicaciones que se pueden desarrollar con ellos, la complejidad que han ido adquiriendo estos sistemas dinámicos, diseñados mediante una variedad de componentes; por ello es frecuente encontrar la necesidad de modelar el comportamiento de robots manipuladores, el cual plantea la necesidad de representar la interacción entre diversos dominios de la física, producto del acoplamiento de diversos componentes.

Comúnmente, los análisis dinámicos de sistemas acoplados se han concentrado esencialmente en sistemas multicuerpos formados por múltiples



parámetros y que configuran el modelo del mismo, por ello la dinámica de sistemas multicuerpos es la teoría que permite el análisis cinemático y dinámico de estos mecanismos, el sugerir la utilización de *bond graphs* será una mejor selección como un mecanismo descriptivo, que las técnicas establecidas alternativas.

El enfoque tradicional es considerar un sistema, mecánico para nuestro caso, como un conjunto de elementos rígidos, móviles unos respecto a otros, unidos entre sí mediante uniones, llamadas pares cinemáticas (pernos, uniones de contacto, pasadores, etc.), cuyo propósito es la transmisión de movimientos y fuerzas.

### 3.2.1 Movimiento en dos Dimensiones en Bond Graph

En la figura 3.1 se muestra un lápiz colocado sobre una hoja de papel en un plano al que se ha asociado un sistema de coordenadas  $xy$ . Si este lápiz permanece en el plano del papel, se requiere un mínimo de tres parámetros para definir completamente su posición respecto a la hoja de papel, dos coordenadas lineales ( $x$ ,  $y$ ) para definir la posición de cualquier punto del lápiz y una coordenada angular ( $\theta$ ) para definir el ángulo que forma este objeto con respecto al eje  $x$ .

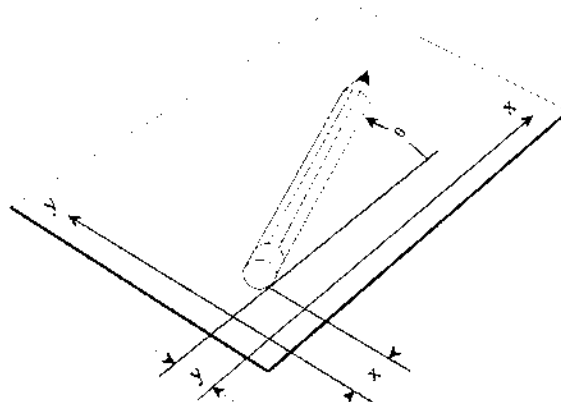


Figura 3.1 Un cuerpo rígido en el plano  $x$ ,  $y$ .



Veamos ahora el caso de una barra en el plano (figura 3.2). El movimiento de la barra puede descomponerse en una traslación de su centro de gravedad más un giro alrededor de este. Por tanto, para obtener su posición transcurrido en el tiempo  $t$ , además de los desplazamientos según  $x$  e  $y$ , de su centro de gravedad, es necesario conocer el ángulo que ha girado la barra.

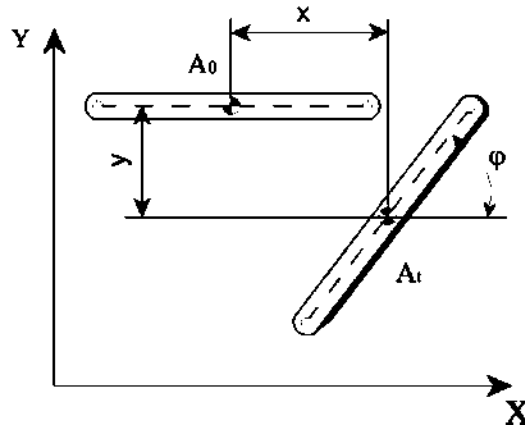


Figura 3.2 Movimiento de una barra en el plano.

La barra rígida de la figura 3.3 es un componente estándar de sistemas mecánicos. Las tres locaciones significantes en la barra son los dos extremos y el centro de masa. Los extremos son significantes debido a que ellos definen las conexiones en la barra; el centro de masa es significativo debido a que las ecuaciones de movimiento son las más convenientes escritas ahí.

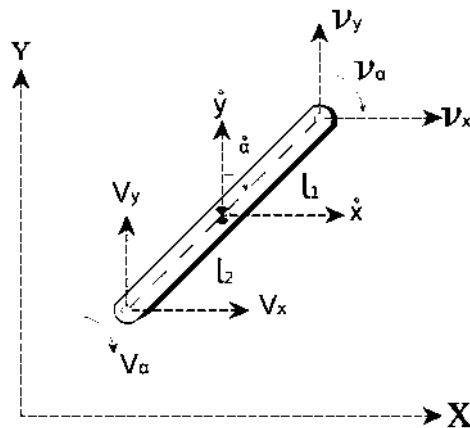
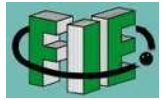


Figura 3.3 Un cuerpo rígido.



El movimiento es considerado con respecto a un sistema de coordenadas absoluto:  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes de velocidad de un extremo con respecto a este sistema de coordenada;  $V_x$  y  $V_y$  son las componentes de velocidad del otro extremo;  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  son las componentes de velocidad del centro de masa. Estas tres velocidades muestran la misma velocidad angular  $\dot{\alpha} = v_{x\alpha} = V_{y\alpha}$ . La distancia a partir del primer extremo al centro de masa es  $l_1$ , y la distancia a partir del segundo extremo al centro de masa es  $l_2$ .

De acuerdo a la cinemática de la barra las ecuaciones son expresadas como:

$$\dot{x} = v_x - v_{x\alpha} \quad (3.1)$$

$$\dot{y} = v_y - v_{y\alpha} \quad (3.2)$$

$$V_x = \dot{x} - V_{x\alpha} \quad (3.3)$$

$$V_y = \dot{y} - V_{y\alpha} \quad (3.4)$$

Donde  $v_{x\alpha}$ ,  $v_{y\alpha}$ ,  $V_{x\alpha}$  y  $V_{y\alpha}$  son las componentes de velocidad debido a la velocidad angular  $\dot{\alpha}$  dada por las ecuaciones de transformación.

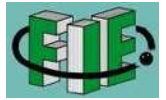
$$v_{x\alpha} = l_1 \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3.5)$$

$$v_{y\alpha} = l_1 \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3.6)$$

$$V_{x\alpha} = l_2 \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3.7)$$

$$V_{y\alpha} = l_2 \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3.8)$$

En la figura 3.3 se muestra la barra rígida la cual es sometida a una fuerza  $F(t)$ , variable con el tiempo, la cual se descompone en fuerzas  $F_x(t)$  y  $F_y(t)$  en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$ , existe también un par  $M(t)$ , variable con el tiempo, que actúa sobre la barra.



Como ya se ha visto la posición de la barra quedara perfectamente determinada en todo instante si se conocen las coordenadas  $x$  e  $y$  de su centro de gravedad, así como el ángulo que forma la barra con el eje  $x$ . Dado que se tienen tres incógnitas, será necesario plantear un sistema de tres ecuaciones (tantas como incógnitas) que, por tratarse de un sistema dinámico, serán diferenciales de segundo orden.

Las ecuaciones diferenciales necesarias para plantear el problema dinámico se obtienen al aplicar la segunda ley de Newton a los giros o desplazamientos.

$$F_x(t) = m\ddot{x}(t), \quad \ddot{x} = \frac{\Delta f_x}{m} \quad (3.9)$$

$$F_y(t) = m\ddot{y}(t), \quad \ddot{y} = \frac{\Delta f_y}{m} \quad (3.10)$$

$$\tau(t) = J\ddot{\alpha}(t), \quad \ddot{\alpha} = \frac{\Delta \tau}{J} \quad (3.11)$$

Siendo  $m$  la masa y  $J$  el momento de inercia de la barra respectivamente y  $\Delta f_x$  y  $\Delta f_y$  son las fuerzas netas actuando en las direcciones  $x$  e  $y$  en el centro de masa y  $\Delta \tau$  es el par neto actuando en el centro de masa.

El área dentro del cuadro punteado representa la barra, los seis bonds externos indican como las conexiones son hechas en la barra.

- Existen tres componentes etiquetados  $mx$ ,  $my$  y  $J$  estos implementan las tres ecuaciones dinámicas.
- Hay una componente  $C$  etiquetada  $c$  esta tiene rigidez cero y por tanto no afecta en el comportamiento del sistema, pero su variable de flujo integrada correspondiente  $q$  es:



$$q = \int_0^{t_0} \alpha(t') dt' = \alpha + q_0 \tag{3.12}$$

Si inicializamos en  $q_0 = 0$ ,  $q = \alpha$  y por lo tanto proporciona una señal modulante para los transformadores.

- Hay tres uniones-1 etiquetadas como  $dx, dy$  y  $d\alpha$ .

Estas tres uniones-1 transportan las tres velocidades asociadas con el centro de masa  $\dot{x}, \dot{y}$  y  $\dot{\alpha}$ .

Estas tres uniones-1 cada una calculan el esfuerzo neto actuando en el elemento  $I$  correspondiente ( $\Delta f_x, \Delta f_y$  y  $\Delta \tau$ ), como se muestra en la figura 3.4.

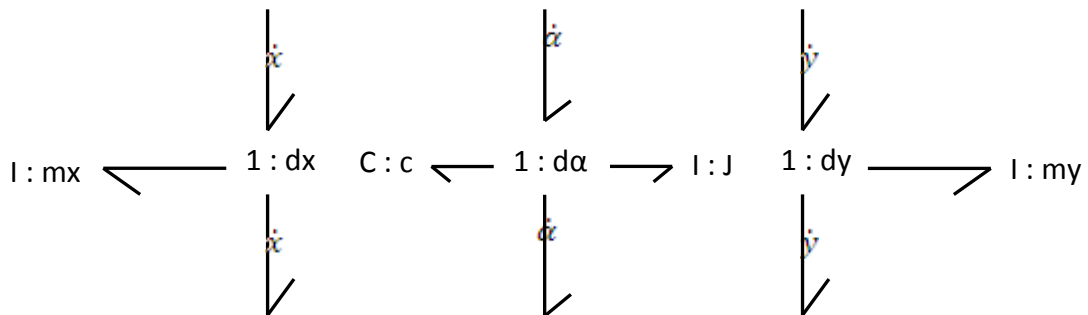


Figura 3.4 Uniones-1 correspondientes a las tres velocidades  $\dot{x}, \dot{y}$  y  $\dot{\alpha}$ .

- Hay cuatro uniones-0 etiquetadas  $f_x, f_y, F_x, F_y$ .

Estas cuatro uniones-0 transportan las componentes  $x$  y  $y$  de la fuerza asociada con las partes superior e inferior de la barra.

Las cuatro uniones-0 corresponden a las cuatro ecuaciones cinemáticas, figura 3.5.

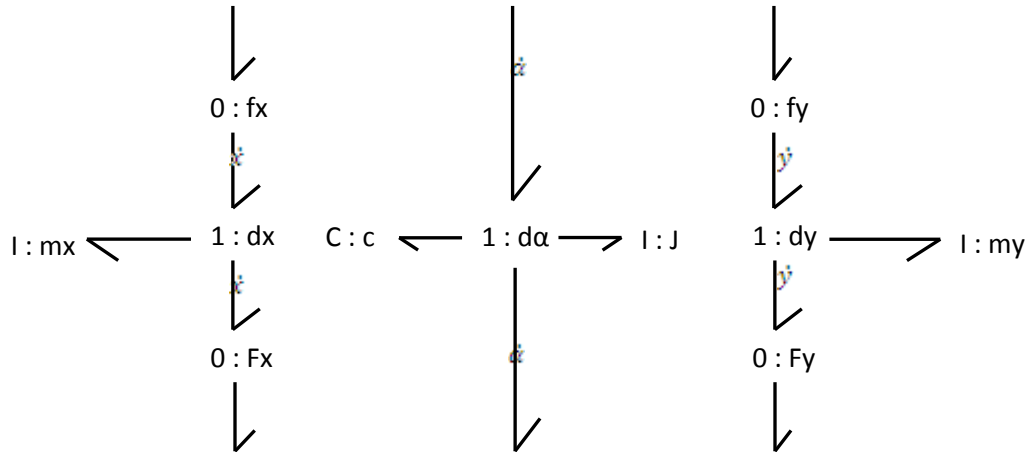
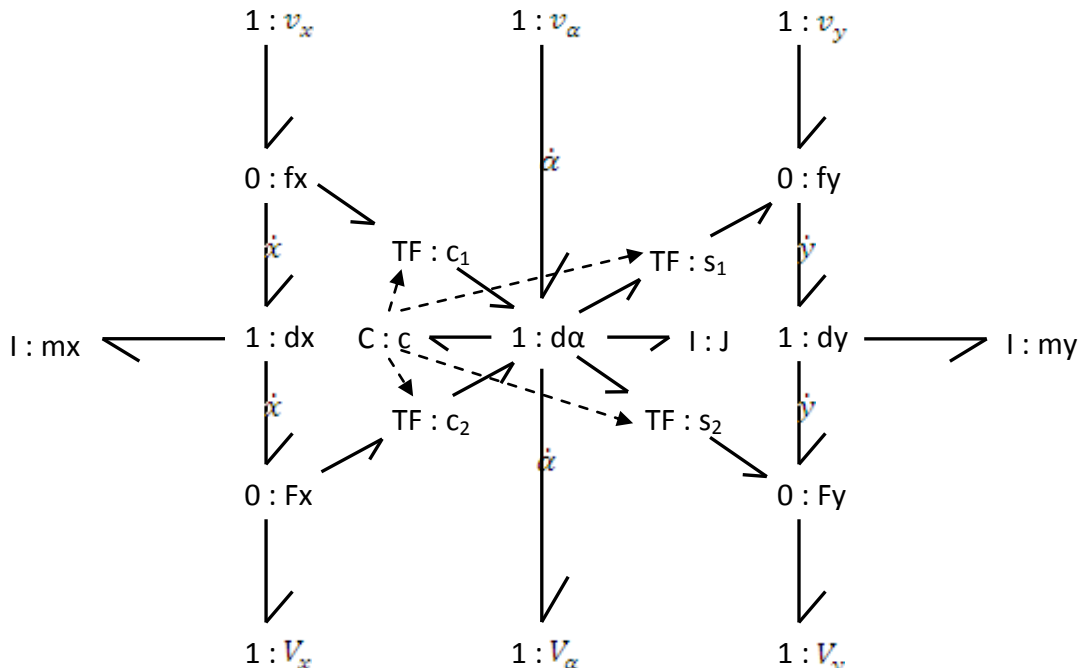


Figura 3.5 Uniones-0 correspondientes a las fuerzas  $f_x, f_y, F_x, F_y$ .

- Hay cuatro transformadores etiquetados  $c_1, s_1, c_2$  y  $s_2$ .

Los cuatro transformadores implican las cuatro ecuaciones de transformación.

Estos cuatro transformadores por conservación de potencia, también implican las transformaciones de fuerza correspondientes y cada uno de ellos son modelados por  $\alpha$  (generados por C), esto lo podemos observar en la figura 3.6.





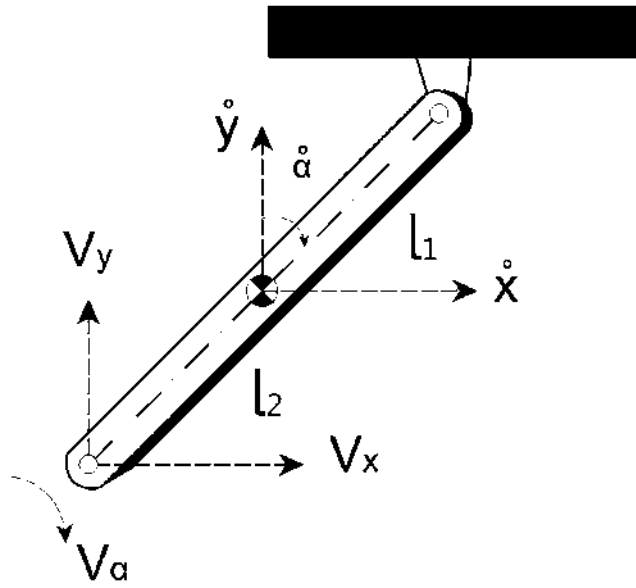


Figura 3.8 Un péndulo simple.

Debido a que el péndulo es un caso especial de la barra, el bond graph es el mismo que el de la barra pero con componentes adicionales, en particular,

- Fuentes de velocidad cero son conectadas a las uniones  $v_x$  y  $v_y$  que indican que la parte superior es arreglada.
- Fuentes de fuerza cero son conectadas a las uniones  $V_x$  y  $V_y$  para indicar que en el extremo inferior de la barra no existen fuerzas actuando.
- Una fuerza es conectada a la unión  $dy$  para indicar que la gravedad está actuando en la dirección negativa del centro de masa.
- Una fuerza de fuerza es conectada a la unión  $v_\alpha$  para indicar el par aplicado.



Solamente uno de los tres elementos  $I$  puede tener causalidad integral, el único que lo tiene es el elemento correspondiente de rotación que se muestra en la figura 3.9.

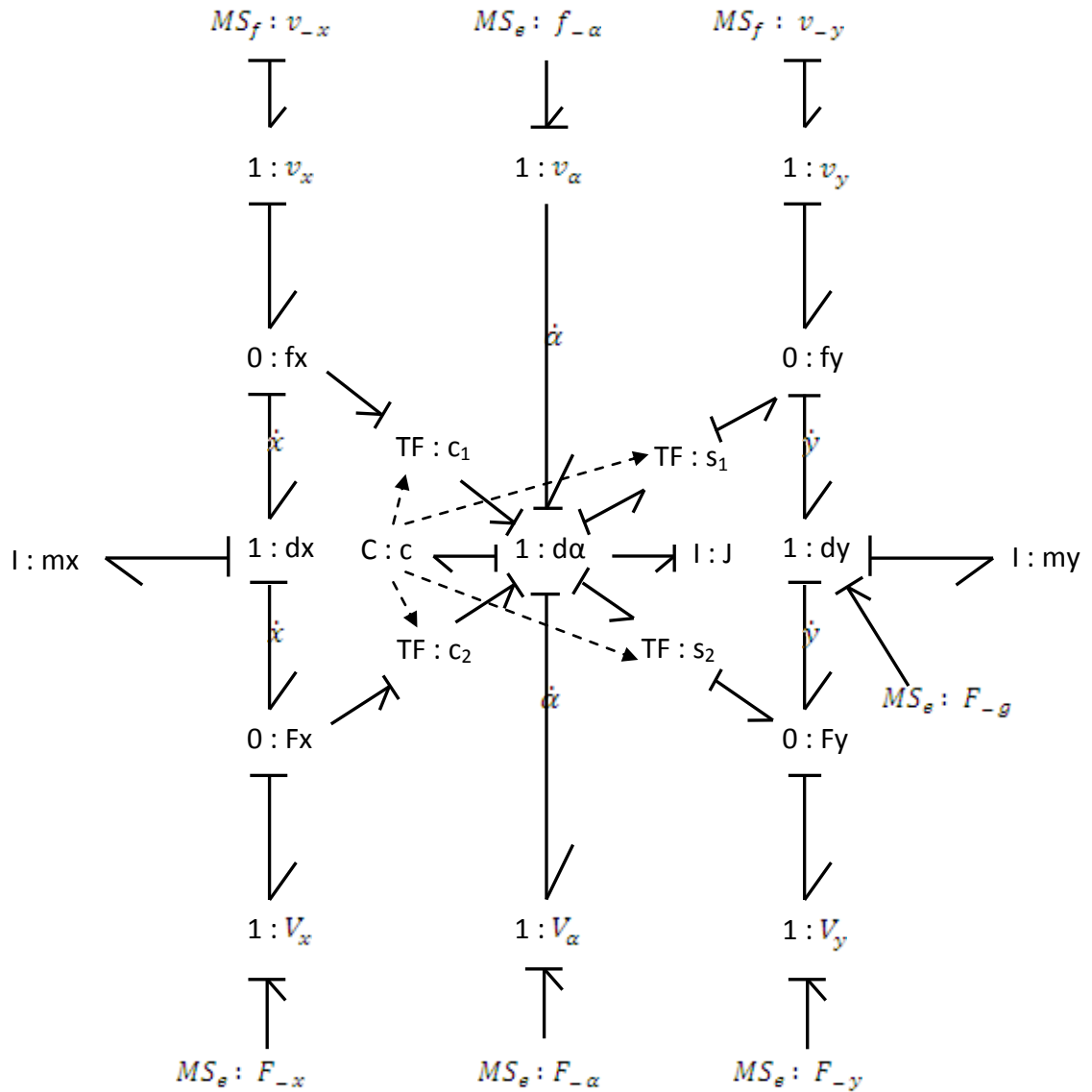


Figura 3.9 Un péndulo simple en bond graph.



### 3.2.3 Péndulo Simple con Peso

Un peso de masa  $m_b$  y de pequeña dimensión podría ser añadida a la parte inferior, el bond graph de la figura 3.10 es igual al anterior excepto que las dos fuentes de fuerza bajas han sido desplazadas por componentes  $I$  correspondientes a las velocidades  $x$  y  $y$  del contrapeso y una tercera entrada  $F_b$  ha sido añadida en la forma de una fuente adicional.

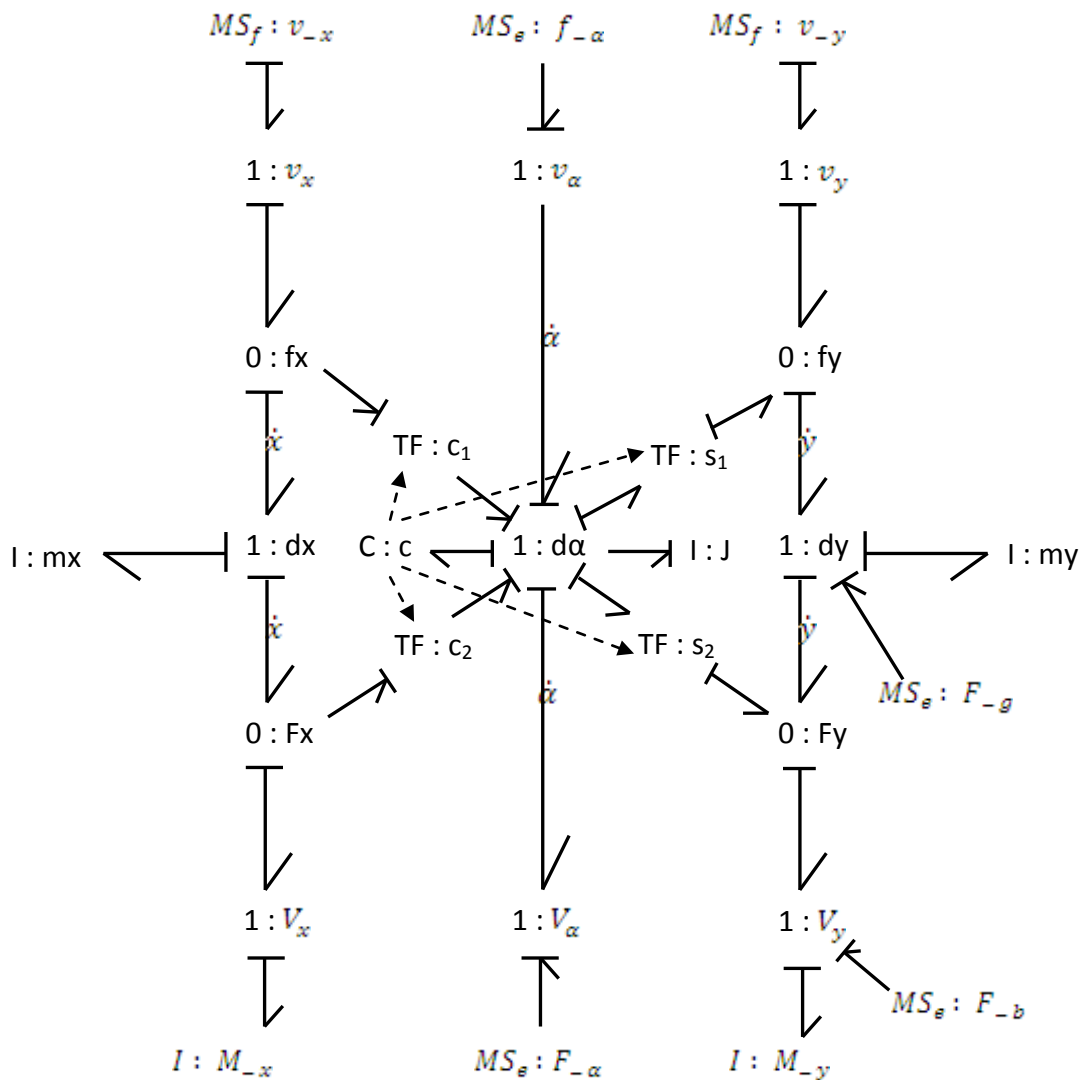


Figura 3.10 Un péndulo simple con peso en bond graph.



### 3.2.4 Péndulo Invertido y Carretón.

La figura 3.11 presenta un péndulo invertido acoplado a un carretón.

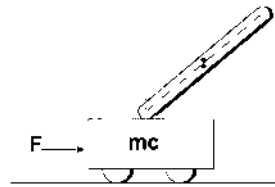


Figura 3.11 Péndulo invertido y carretón.

La anterior figura comprende un péndulo invertido compuesto por una varilla uniforme de masa  $m$  y longitud  $2l$  atada a un carretón de masa  $mc$  a través de un pivote. El bond graph correspondiente a este sistema mecánico se muestra en la figura 3.12.

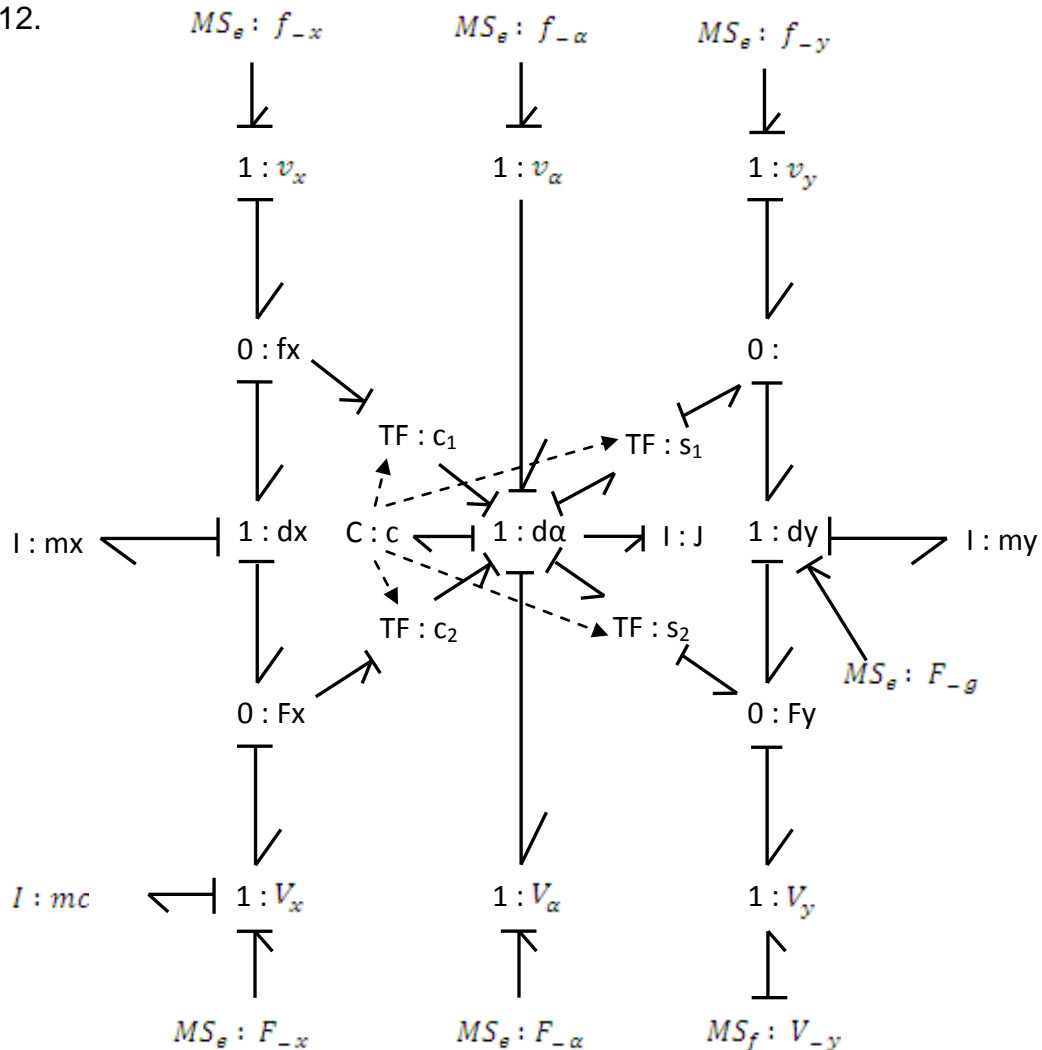




Figura 3.12 Bond graph de un péndulo invertido y carretón.

La velocidad  $x$  de la parte baja del péndulo participa en la velocidad del carretón, así el elemento  $I:mc$  es añadido a la unión correspondiente  $1:V_x$ .

La velocidad  $y$  de la parte baja del péndulo es cero así, una fuente de flujo cero  $1:V_y$  es conectada a la unión correspondiente  $1:V_y$ .

Sin par actuando en la parte baja del péndulo se tiene una fuente de esfuerzo cero  $F_\alpha$  es añadida a la unión correspondiente  $1:V_\alpha$ .

La parte superior de la varilla no tiene fuerzas o pares aplicados. Las fuentes de esfuerzo cero apropiadas son añadidas a las uniones  $v_x, v_\alpha$  y  $v_y$ .

### 3.2.5 Un Péndulo Doble en Bond Graph

La siguiente figura 3.13 muestra un péndulo doble construido por medio de péndulos simples. Por simplicidad, las barras son consideradas a ser uniformes y de longitud  $2l$ . La inercia  $J$  sobre el centro de masa es,  $J = ml^2/3$ . El ángulo relativo  $\theta_2$  de la segunda barra con respecto a la primera es la diferencia de los ángulos absolutos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ ,  $\theta_2 = \alpha_2 - \alpha_1$ .

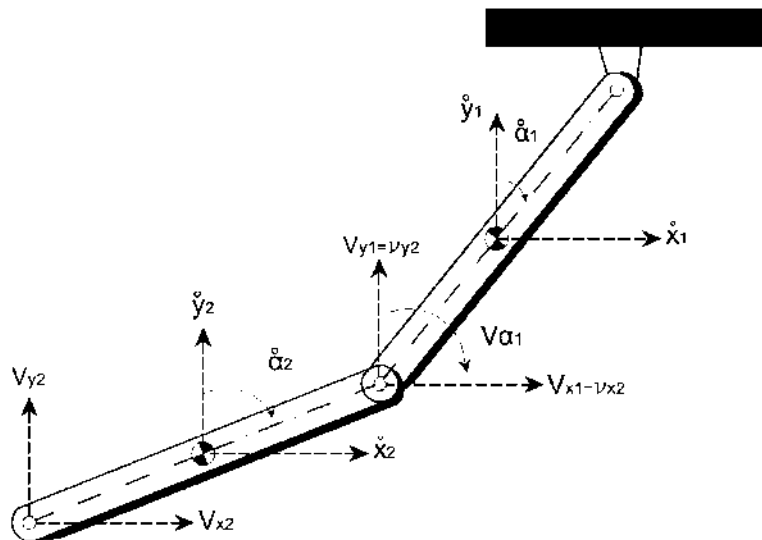
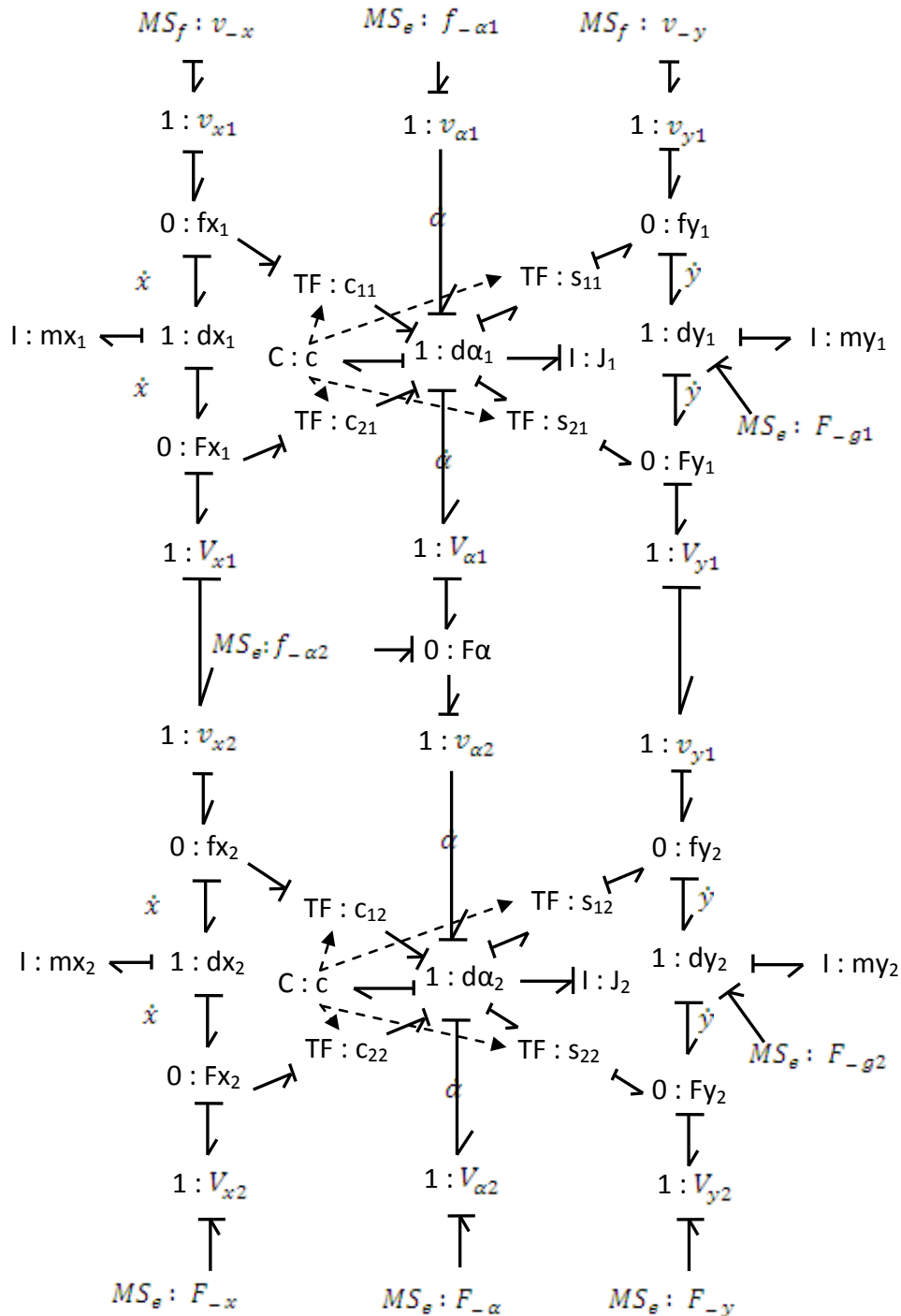




Figura 3.13 Un péndulo doble.

El bond graph correspondiente al péndulo doble se presenta en la figura 3.14. Una copia del bond graph de una simple barra ha sido añadida a otro del péndulo simple y conectada por dos bonds, lo cual asegura que las velocidades de la parte baja de la barra superior y la parte superior de la barra inferior.



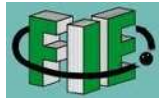
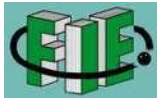


Figura 3.14 Un péndulo doble en bond graph.

En esta sección se hizo evidente la importancia y utilidad que tiene esta técnica de bond graph para modelar robots manipuladores planares, la metodología se mostro flexible y eficiente para representar los diversos componentes donde ocurren intercambios de energía de naturaleza física distinta, todo ello enfocado en nuestros diferentes modelos físicos, en el capítulo posterior se llevará a cabo la simulación para encontrar la respuesta de los sistemas y llevar a cabo el análisis de resultados.





## CAPÍTULO 4

### SIMULACIÓN DE ROBOTS MANIPULADORES PLANARES

#### 4.1 Introducción

El uso de simuladores computarizados se han venido desarrollando desde la segunda mitad del siglo pasado (década de los 40's). En la actualidad la simulación es indispensable cuando nos enfrentamos con el análisis y diseño de sistemas multidisciplinares de cierta complejidad, cuyo propósito es ayudar a dar el soporte necesario para llevar a cabo el análisis y diagnóstico de sistemas en la ingeniería a imagen y semejanza con la realidad.

Con ello se podrá entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales se puede operar el sistema.

En este capítulo se abordará el comportamiento de robots manipuladores planares utilizando el simulador 20-Sim, tomando las representaciones del modelado en bond graph.

#### 4.2 Simulación Basado en Bonds Graphs

El siguiente paso una vez teniendo el modelado en bond graph, es usar un software de apoyo para llevar a cabo la descripción y el análisis de las interacciones entre los subsistemas, donde se admiten combinaciones con diagramas de bloques y es una aplicación independiente que funciona en el entorno de Windows, con la ayuda del software el usuario tendrá una interface totalmente grafica para la edición de dichos diagramas y su almacenamiento en archivos.



### 4.2.1 Simulación en 20-Sim

20-Sim fue desarrollado en 1995 en el laboratorio de control de la Universidad de Twente como soporte de modelado gráfico de bonds graphs, el cual usa varios algoritmos de integración avanzada, permite crear submodelos y combinarlos para formar un modelo complejo.

20-Sim es un programa de modelado y simulación que se ejecuta en Microsoft Windows. Con 20-Sim se puede simular el comportamiento de sistemas dinámicos, tales como los sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos o cualquier combinación de los mismos.

### 4.2.2 Características Clave de 20-Sim

#### *Editor:*

Los modelos se introducen y se compilan en el 20-Sim editor. El editor es una herramienta versátil donde se puede entrar al modelo en una forma gráfica, ofrece modelado, simulación y entorno de análisis para una amplia variedad de sistemas, la ventana de biblioteca está integrada en el editor, en la cual se pueden ver las librerías de los componentes que contiene y pueden ser arrastrados desde el explorador de Windows para dibujar el modelo deseado.

#### *Simulador:*

Después de introducir el modelo en el editor se puede comprobar y compilarlo esto se realiza automáticamente en segundo plano, al abrir el simulador. El simulador se utiliza para la simulación del modelo y análisis. La figura 4.1 muestra el editor y simulador, las cuales son herramientas básicas para el manejo de gráficos en bond graph.

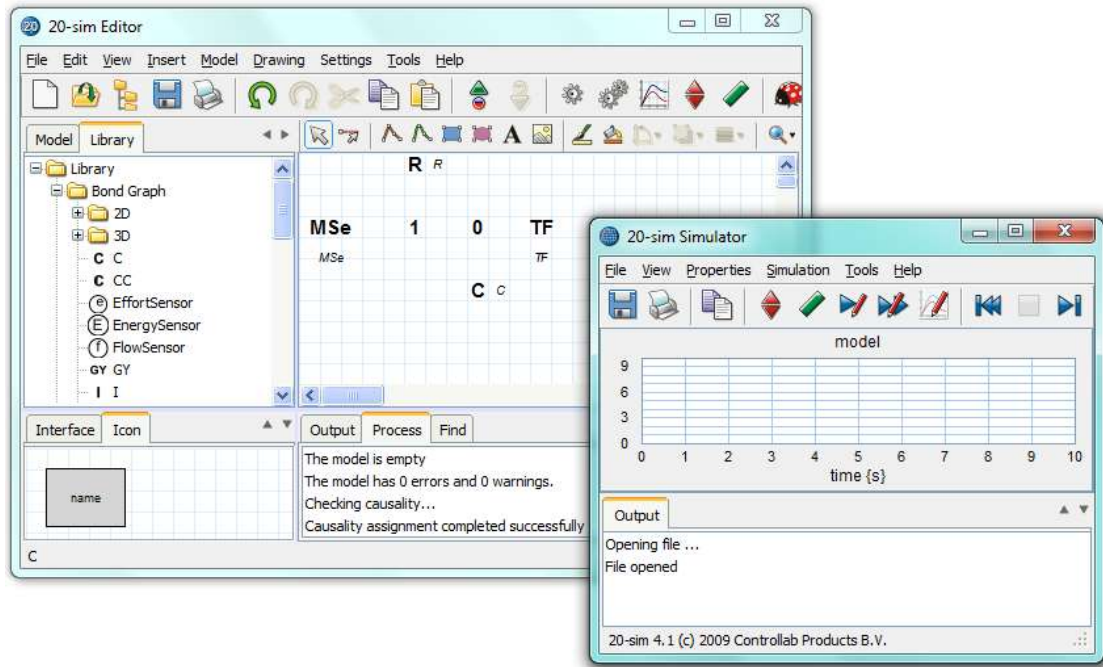


Figura 4.1 Editor y simulador del programa 20-Sim.

El simulador 20-Sim tiene la operación de aplicar a cada uno de los bonds de nuestro modelo su causalidad correspondiente de forma automática, en la figura 4.2 se muestra esta operación.

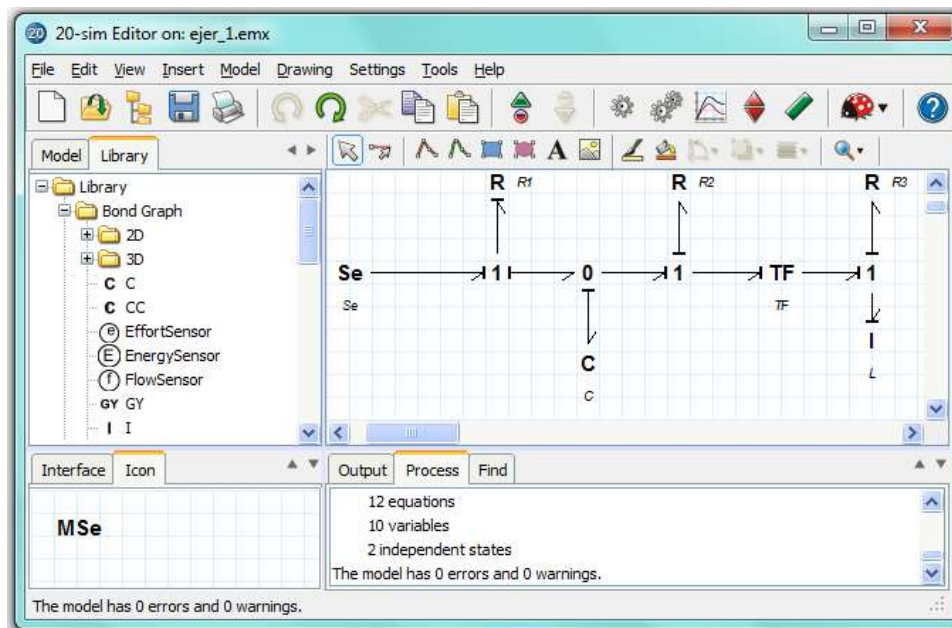


Figura 4.2 Causalidad de los bonds en 20-Sim.



*Parámetros:*

Para la configuración de los parámetros y valores iniciales se selecciona la función *Show Parameters* así podremos entrar al valor del parámetro para cada componente, figura 4.3.

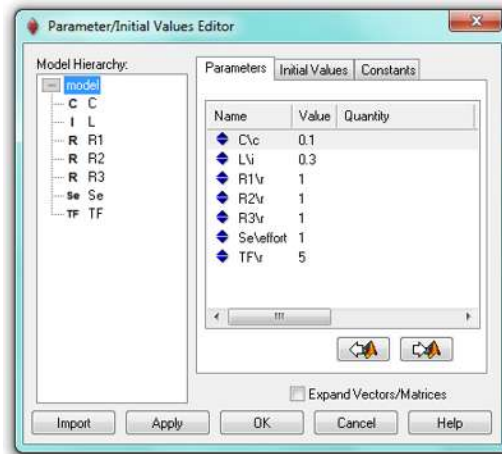


Figura 4.3 Parámetros para cada componente.

La función variable permite observar el valor de los estados, esfuerzos y flujos que se encuentran en cada uno de los componentes de nuestro sistema, la figura 4.4 muestra esta función.

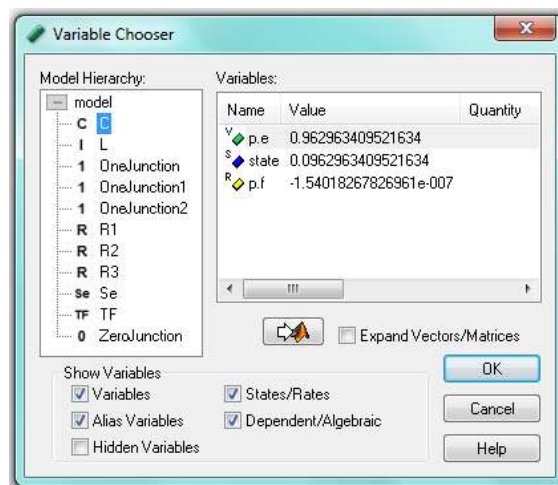


Figura 4.4 Valores de las variables seleccionadas.



Una vez que hemos visto algunas de las características con las que cuenta el programa 20-Sim, pasaremos a la simulación de robots manipuladores planares.

### 4.3 Simulación de un Péndulo Simple

La figura 4.5 muestra el modelo de un péndulo simple, el cual fue construido con la ayuda de nuestro simulador 20-Sim apoyándonos con sus herramientas básicas.

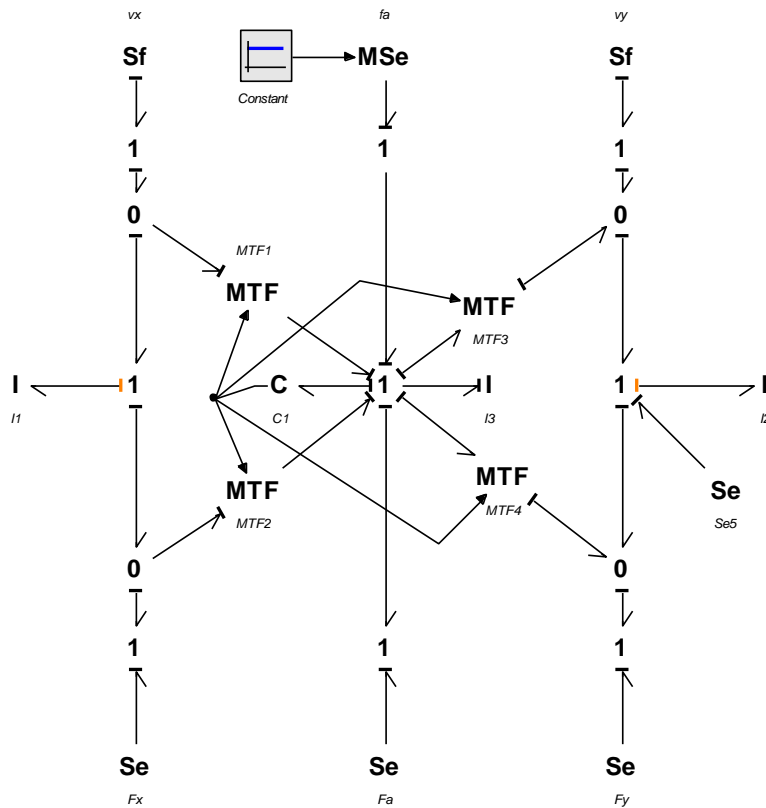


Figura 4.5 Modelo de un péndulo simple en 20-sim.

Al llevar a cabo la simulación, se obtuvo lo siguiente, al momento de ser aplicado un par en la barra, ésta tiende a oscilar y podemos ver que su velocidad y el estado están representados por ondas sinusoidales debido a las oscilaciones infinitas que presenta, figura 4.6.

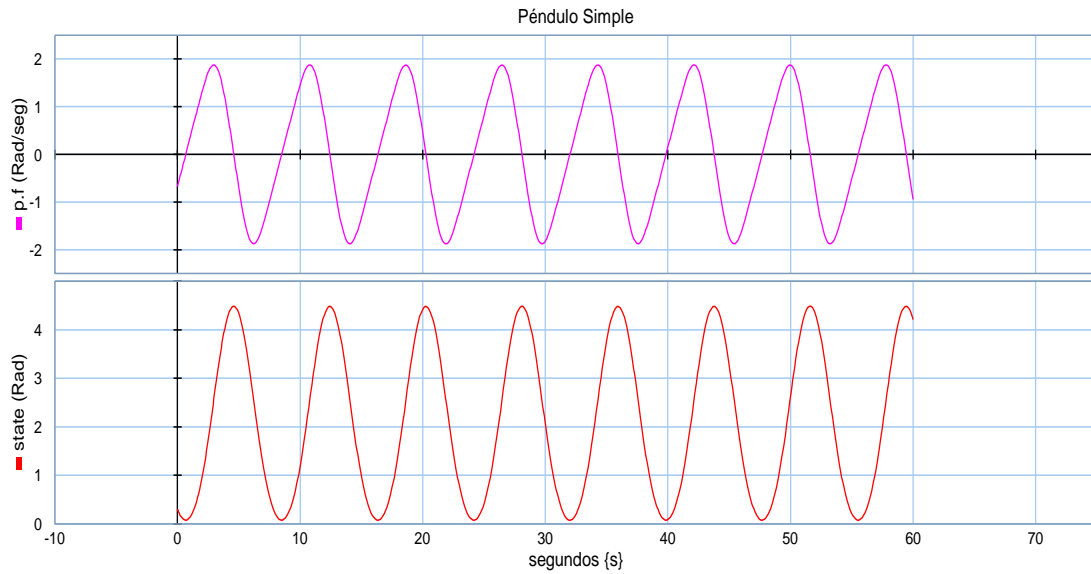


Figura 4.6 Comportamiento del péndulo simple.

Los demás flujos y esfuerzos son cero debido a que no existen fuerzas ni velocidades actuando, solamente el par aplicado en  $\tau\alpha$  en el péndulo, esto lo podemos observar en la figura 4.7.

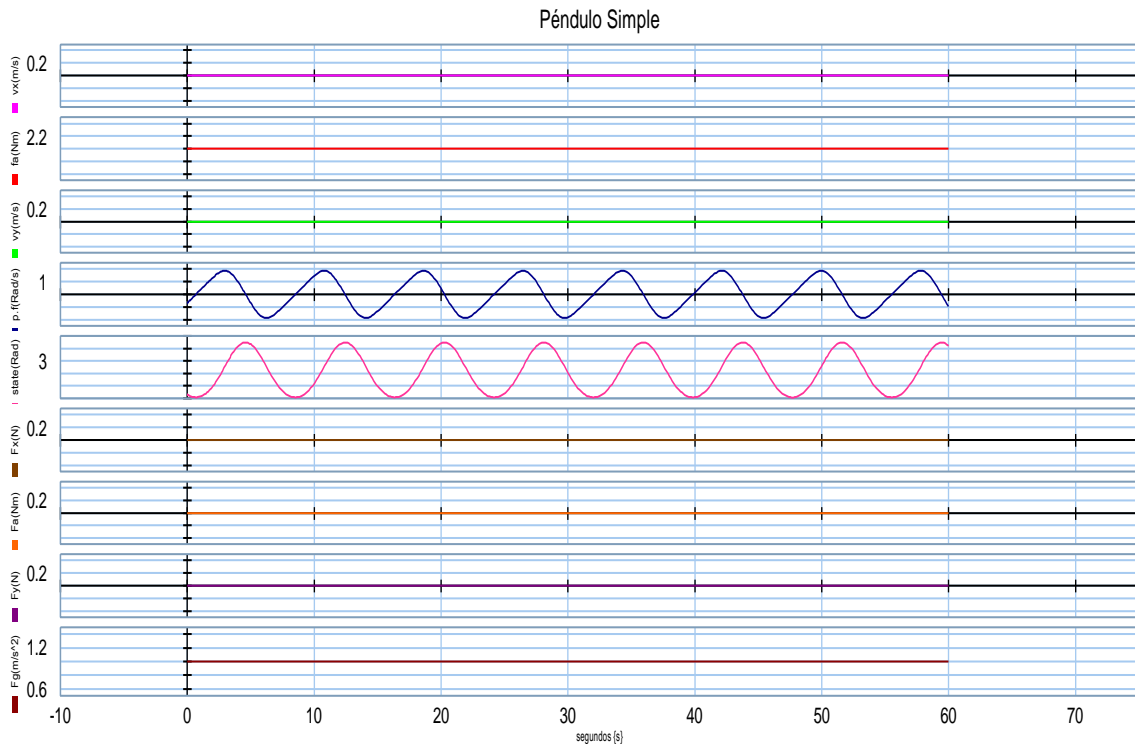


Figura 4.7 Fuerzas y velocidades del péndulo simple.



#### 4.4 Modelado Matemático de Robots Manipuladores Planares

Las relaciones de estructura unión están dadas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{int} \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out} \\ u(t) \\ x_d'(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Las relaciones para elementos de disipación y almacenamiento con causalidad integral y derivativa, de sistemas lineales está dada por:

$$z(t) = F \cdot x(t) \quad (4.2)$$

$$D_{out}(t) = LD_{int}(t) \quad (4.3)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (4.4)$$

De la ecuación (4.1) se puede deducir lo siguiente:

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}D_{out} + S_{13}u + S_{14}\dot{x}_d \quad (4.5)$$

$$z_d = S_{41}z \quad (4.6)$$

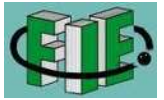
Sustituyendo las ecuaciones (4.2) y (4.4) en (4.6) tenemos:

$$F_d \cdot x_d = S_{41} \cdot Fx$$

$$x_d = F_d^{-1} \cdot S_{41} \cdot Fx \quad (4.7)$$

Obteniendo la derivada para ambos lados de la ecuación (4.7) y así obtener  $\dot{x}_d$  para nuestras ecuaciones de estado se tiene:

$$\dot{x}_d = \frac{d}{dt} (F_d^{-1} S_{41} Fx)$$



$$\dot{x}_d = F_d^{-1} \frac{d}{dt} (S_{41} F x)$$

$$\dot{x}_d = F_d^{-1} [\dot{S}_{41} F x + S_{41} F \dot{x}]$$

$$\dot{x}_d = F_d^{-1} [\dot{S}_{41} F x + S_{41} F \dot{x}]$$

$$\dot{x}_d = F_d^{-1} \dot{S}_{41} F x + F_d^{-1} S_{41} F \dot{x} \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.8) en la ecuación (4.5) obtenemos:

$$\dot{x} = S_{11} z + S_{12} D_{out} + S_{13} u + S_{14} [F_d^{-1} \dot{S}_{41} F x + F_d^{-1} S_{41} F \dot{x}]$$

$$\dot{x} - S_{14} F_d^{-1} S_{41} F \dot{x} = (S_{11} F + S_{14} F_d^{-1} \dot{S}_{41} F) x + S_{12} D_{out} + S_{13} u$$

$$(I - S_{14} F_d^{-1} S_{41} F) \dot{x} = (S_{11} + S_{14} F_d^{-1} \dot{S}_{41}) F x + S_{12} D_{out} + S_{13} u \quad (4.9)$$

A partir de la matriz de estructura unión (4.1) y sustituyendo la ecuación (4.3) se deduce lo siguiente:

$$D_{int} = S_{21} z + S_{22} D_{out} + S_{23} u \quad (4.10)$$

$$D_{int} = S_{21} z + S_{22} L D_{in} + S_{23} u \quad (4.11)$$

$$(I - S_{22} L) D_{int} = S_{21} F x + S_{23} u$$

$$D_{int} = (I - S_{22} L)^{-1} (S_{21} F x + S_{23} u) \quad (4.12)$$

Sustituyendo (4.3) y (4.12) en (4.9):

$$(I - S_{14} F_d^{-1} S_{41} F) \dot{x} = (S_{11} + S_{14} F_d^{-1} \dot{S}_{41}) F x + S_{12} L (I - S_{22} L)^{-1} (S_{21} F x + S_{23} u) + S_{13} u$$



Si  $M(x) = L(I - S_{22}L)^{-1}$  ;

$$E(x) = I - S_{14}F_d^{-1}S_{41}F \quad (4.13)$$

$$A(x) = [S_{11} + S_{14}F_d^{-1}\dot{S}_{41} + S_{12}M(x)S_{21}]F \quad (4.14)$$

$$B(x) = [S_{13} + S_{12}M(x)S_{23}] \quad (4.15)$$

Para la salida  $y(t)$ :

$$y = S_{31}z + S_{32}D_{out} + S_{33}u \quad (4.16)$$

$$y = S_{31}Fx + S_{32}LD_{int} + S_{33}u$$

$$y = S_{31}Fx + S_{32}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}Fx + S_{23}u) + S_{33}u$$

$$y = [S_{31} + S_{32}M(x)S_{21}]F + [S_{33} + S_{32}M(x)S_{23}]u \quad (4.17)$$

Donde:

$$C(x) = [S_{31} + S_{32}M(x)S_{21}]F \quad (4.18)$$

$$D(x) = [S_{33} + S_{32}M(x)S_{23}]u \quad (4.19)$$

Las variables de estado están dadas por:

$$\dot{x}(t) = E^{-1}(x)[(A(x)x + B(x)u)] \quad (4.20)$$

$$\dot{y}(t) = C(x)x + D(x)u \quad (4.21)$$



### 4.5 Modelado Matemático del Péndulo Simple

Para llevar a cabo el modelado matemático del péndulo simple se comienza por numerar cada uno de los bonds para obtener el sistema de ecuaciones, ver figura 4.8.

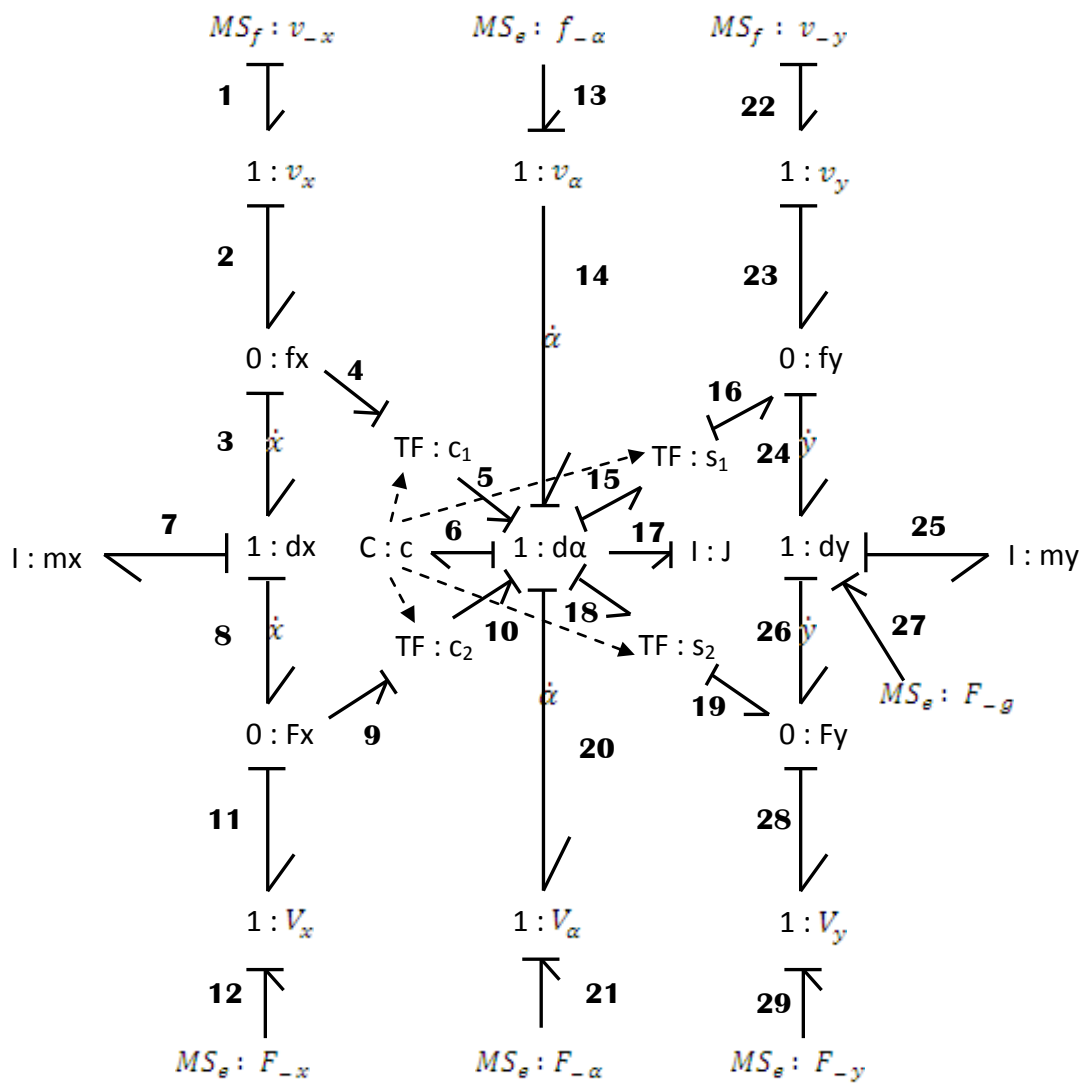


Figura 4.8 Numeración de cada uno de los bonds.



Una vez teniendo el modelo numerado se identifican los elementos con causalidad integral, derivativa y resistiva, con ello se obtiene la matriz de estructura unión.

$$x = \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{17} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_6 \\ e_{17} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{17} \end{bmatrix}$$

$$x_d = \begin{bmatrix} p_7 \\ p_{25} \end{bmatrix}; \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_{25} \end{bmatrix}; z_d = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_{25} \end{bmatrix}$$

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{c}, \frac{1}{J} \right\}; F_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{mx}, \frac{1}{my} \right\}; L = 0; \quad \text{Si } y(t) = f_{17}$$

Aplicando las leyes ideales para los multipuertos en las uniones 0 y 1 se forma la matriz.

$$\begin{bmatrix} f_6 \\ e_{17} \\ 0 \\ f_{17} \\ f_7 \\ f_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & l \text{sen}(\theta) & l \text{cos}(\theta) & -l \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l \text{cos}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l \text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{17} \\ 0 \\ e_{13} \\ e_{27} \\ e_7 \\ e_{25} \end{bmatrix}$$

Resolviendo a partir de la ecuación (4.13) tenemos:

$$E(x) = \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l \text{cos}(\theta) & -l \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx & 0 \\ 0 & my \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -l \text{cos}(\theta) \\ 0 & l \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix} \right]$$

$$E(x) = \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mxl^2 \text{cos}^2(\theta) - myl^2 \text{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix} \right]$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J + (mxl^2 \text{cos}^2(\theta) + myl^2 \text{sen}^2(\theta))}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J + ml^2}{J} \end{bmatrix}$$



$$E^{-1}(x) = \frac{1}{J + ml^2} \begin{bmatrix} J + ml^2 & 0 \\ J & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J + ml^2} \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l \cos(\theta) & -l \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx & 0 \\ 0 & my \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & l \sin(\theta) \dot{\theta} \\ 0 & l \cos(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix} \right] F$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ -1/c & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(x) = [S_{13} + S_{12}M(x)S_{23}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & l \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.18) tenemos:

$$C(x) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix} = [0 \quad 1/J]$$

$$D(x) = [S_{33} + S_{32}M(x)S_{23}]u = 0$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J + ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{1}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{17} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J + ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & l \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{13} \\ e_{27} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J}{c(J + ml^2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{17} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{J}{J + ml^2} & \frac{J l \sin(\theta)}{J + ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{13} \\ e_{27} \end{bmatrix}$$



$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{17} \end{bmatrix}$$

## 4.6 Introducción a Simnon

Simnon es un programa que resuelve ecuaciones diferenciales, el cual es capaz de simular el comportamiento de sistemas continuos representados mediante ecuaciones diferenciales, así como sistemas discretos representados mediante ecuaciones de diferencias. Este simulador ha servido de gran apoyo en la investigación de diversas disciplinas como el control automático, biología, ingeniería química, economía, ingeniería eléctrica entre muchas otras.

### 4.6.1 Descripción del Simulador Simnon

La información del sistema que se desea simular, debe ser descrita mediante archivos de texto. Los cuales pueden ser escritos utilizando cualquier editor de texto como los editores de borland (turbopascal, turboc y turbobasic), o procesadores de palabra como (Word, woroperfect etc.), o el propio editor de *simnon*, todos los archivos deberán tener la extensión "T".

El simulador cuenta con una área de comandos, la cual es de utilidad para graficar y observar el comportamiento de los sistemas a tratar, así como los valores de las variables a utilizar, en la tabla 4.1 vemos algunos de los comandos básicos.

AREA	COMANDO	DESCRIPCIÓN
GRAFICACIÓN	AREA	Selecciona el área activa de graficación.
	ASHOW	Grafica variables grabadas en los archivos, autoescalonandolas en nuevos ejes coordenados.
	AXES	Dibuja los ejes coordenados.
	SHOW	Grafica las variables almacenadas en los



		mismos ejes coordenados.
	SPLIT	Define la distribución del dibujo en la pantalla.
ENTRADAS/SALIDAS	DISP	Despliega los valores actuales (los últimos) de las variables de simulación.
MISCELANEA	HELP	Facilita la ayuda para el usuario.

Tabla 4.1 Comandos básicos.

La figura 4.9 muestra el editor y el área de comandos del simulador.

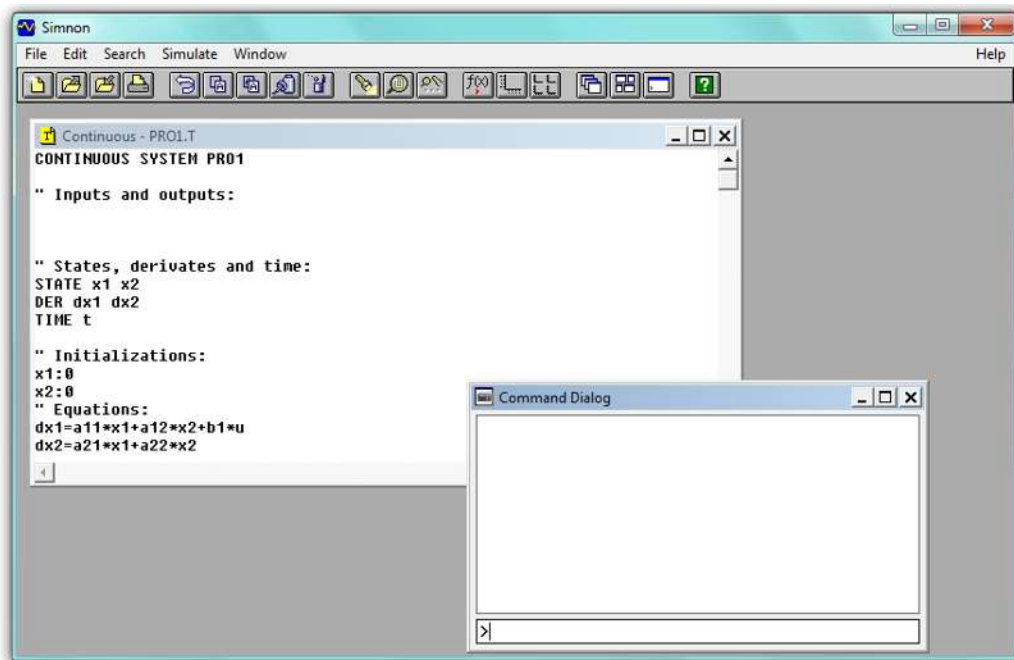


Figura 4.9 Editor del programa simnon y área de comandos.

#### 4.6.2 Estructura de los Programas

Las ecuaciones contenidas en el archivo deberá de ser mediante las ecuaciones de estado con la siguiente estructura.

Encabezado

Declaraciones

Sección inicial (opcional)

    Cálculo de variables auxiliares (VAR)

    Cálculo de los valores iniciales de las variables de estado (STATE)



SORT (opcional)

Cálculo de las variables auxiliares (VAR)

Cálculo de las variables de salida (OUTPUT)

Cálculo de las derivadas (DER)

END

#### 4.7 Simulación del Péndulo Simple en Simnon

El listado del programa es el siguiente:

- Se declaran las variables de estado.
  - STATE q6 p17
  - DER dq6 dp17
  - TIME t
- Inicializamos las variables de estado en cero.
  - q6:0
  - p17:0
- Ecuaciones en espacio de estado.
  - $dq6 = a_{11} \cdot q6 + a_{12} \cdot p17 + b_{11} \cdot e13 + b_{12} \cdot e27$
  - $dp17 = a_{21} \cdot q6 + a_{22} \cdot p17 + b_{21} \cdot e13 + b_{22} \cdot e27$
- Uso de variables auxiliares.
  - $a_{11} = 0$
  - $a_{12} = 1/J$
  - $a_{21} = (-J)/(c \cdot (J + (l \cdot m)))$
  - $a_{22} = 0$
  - $b_{11} = 0$
  - $b_{12} = 0$
  - $b_{21} = J/(J + (l \cdot m))$
  - $b_{22} = (J \cdot l \cdot \sin(q6))/(J + (l \cdot m))$



- Salida del sistema.

$$y=(1/J)*p17$$

- Parámetros.

c:1

J:1

l:1

m:1

e13:2

e27:1

END

La figura 4.10 muestra la simulación del péndulo simple y se puede observar que la respuesta del sistema es igual a la mostrada en la figura 4.6

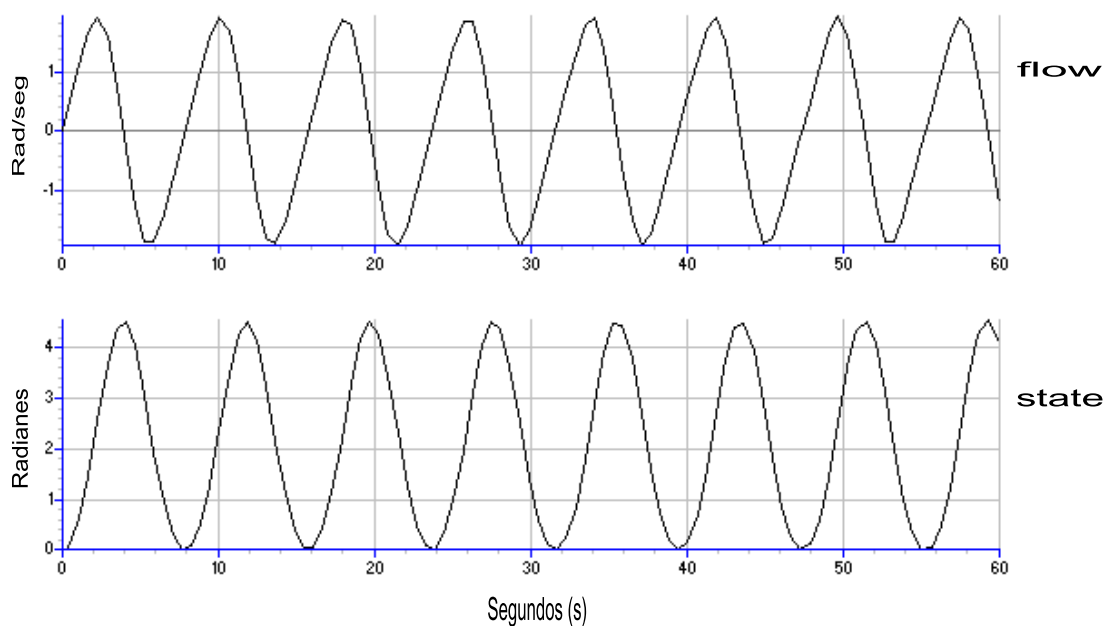




Figura 4.10 Simulación del péndulo simple en Simnon.

Si ahora al péndulo de la figura 4.5 se le agrega una resistencia se obtiene el siguiente modelo, figura 4.11, esta resistencia puede entenderse como la fricción del péndulo con el aire.

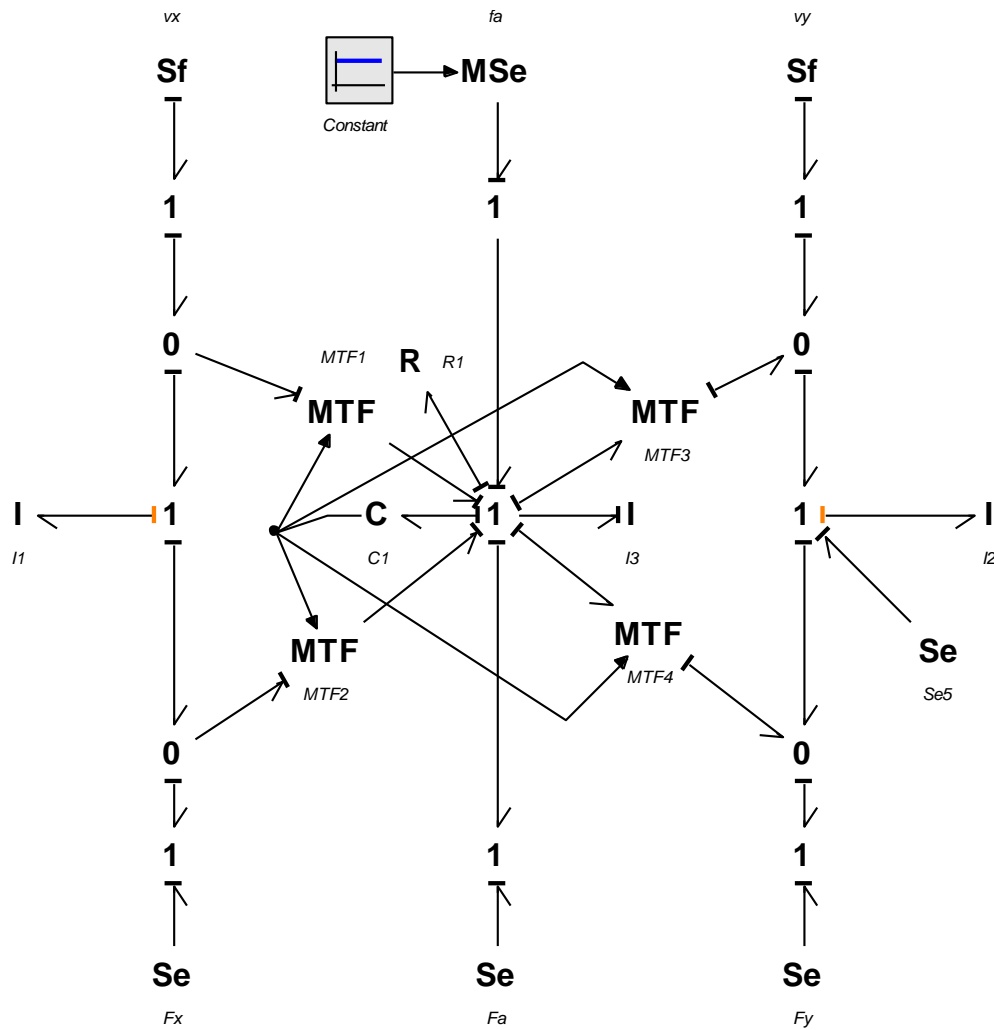


Figura 4.11 Péndulo simple con resistencia en 20-Sim.

Al agregar una resistencia podemos observar como al momento de ser aplicado el par la velocidad del péndulo mantiene un transitorio por el movimiento



de la barra y tiende a cero debido a que la resistencia lo detiene en un determinado tiempo, también se puede apreciar el estado que presenta el sistema.

En la figura 4.12 se muestra la respuesta del péndulo simple aplicándole una resistencia externa.

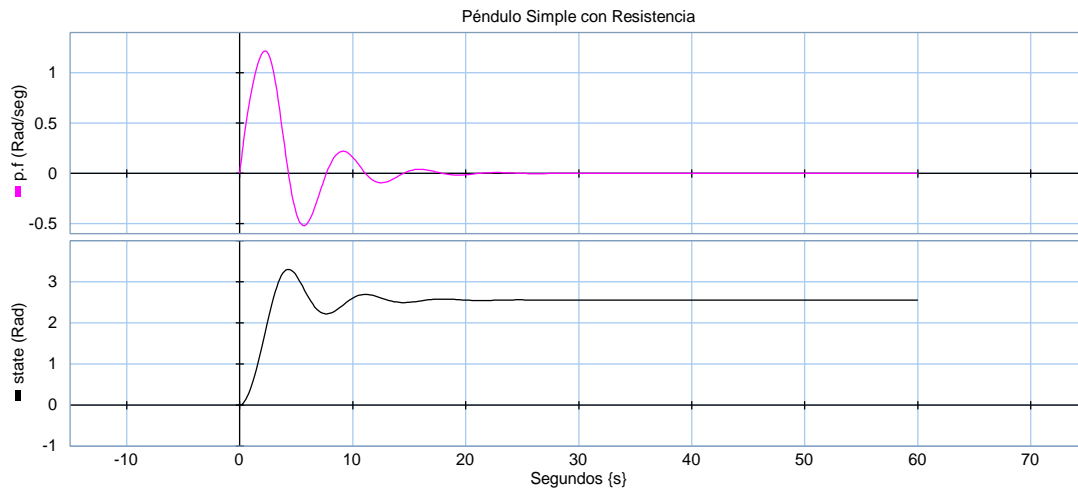


Figura 4.12 Comportamiento del péndulo simple con resistencia

De igual manera que para el caso del péndulo simple en la figura 4.13 vemos las demás fuerzas y flujos aplicándole resistencia.

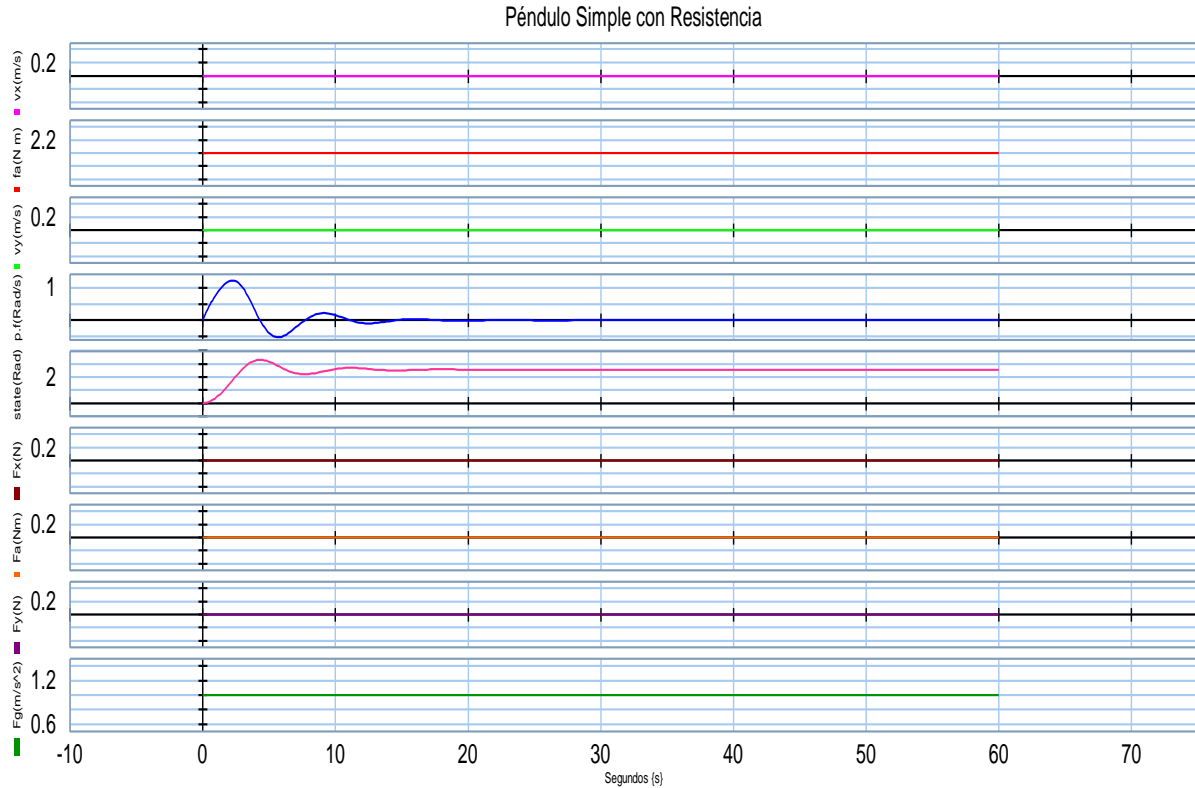
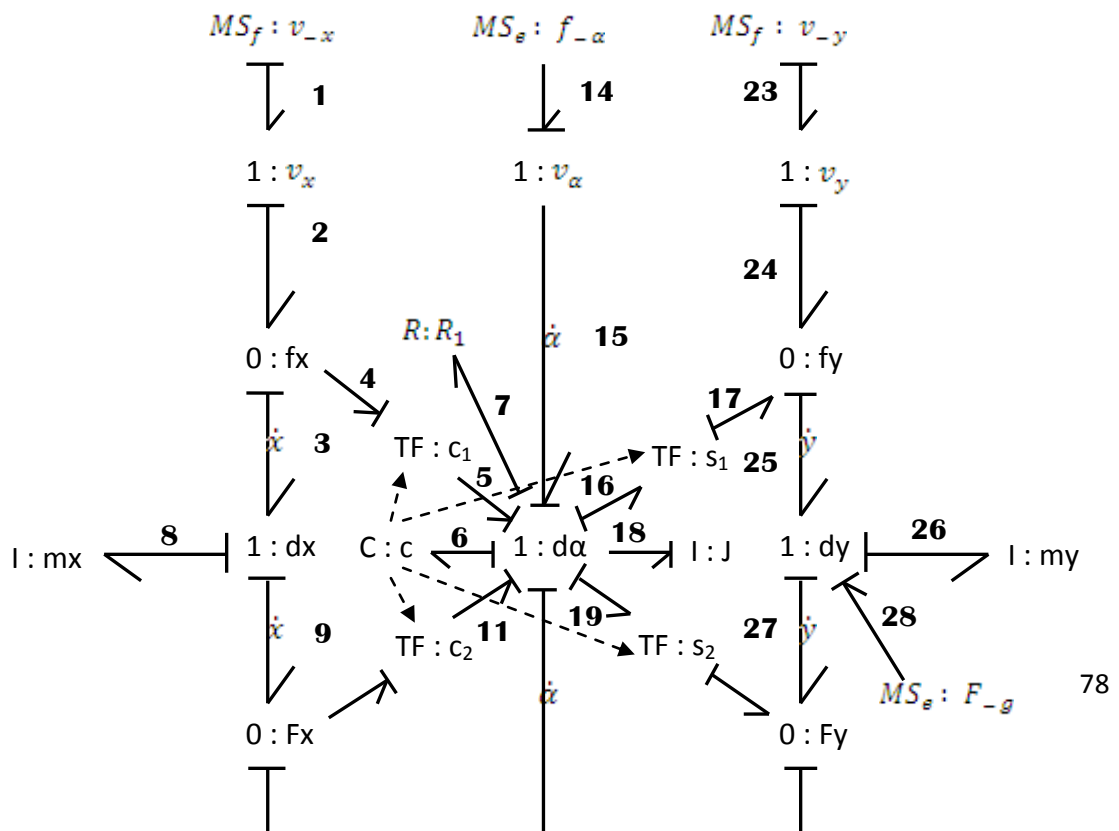


Figura 4.13 Fuerzas y velocidades del péndulo simple con resistencia.

### 4.8 Modelado Matemático del Péndulo Simple con Resistencia

La figura 4.14 muestra la numeración de bonds para obtener el modelo matemático.



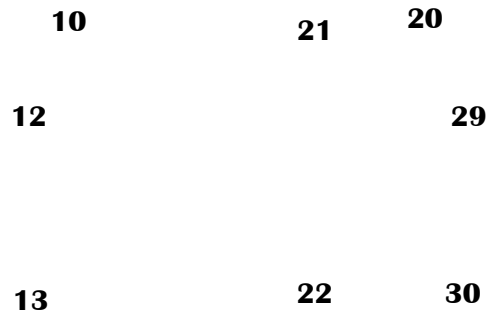


Figura 4.14 Numeración de bonds del péndulo simple con resistencia.

Las relaciones de los vectores clave son las siguientes:

$$x = \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{18} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_6 \\ e_{18} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{18} \end{bmatrix}$$

$$x_d = \begin{bmatrix} p_8 \\ p_{26} \end{bmatrix}; \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_8 \\ e_{26} \end{bmatrix}; z_d = \begin{bmatrix} f_8 \\ f_{26} \end{bmatrix}$$

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{c}, \frac{1}{j} \right\}; F_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{mx}, \frac{1}{my} \right\};$$

De la ecuación (4.3) se tiene:

$$e_7 = R_1 f_7 \quad L = R_1; \quad \text{Si } y(t) = e_6$$

Aplicando las leyes ideales para los multipuertos en las uniones 0 y 1 se forma la matriz.

$$\begin{bmatrix} f_6 \\ e_{18} \\ f_7 \\ e_6 \\ f_8 \\ f_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & l \text{sen}(\theta) & l \text{cos}(\theta) & -l \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l \text{cos}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l \text{sen}(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{18} \\ e_7 \\ e_{14} \\ e_{28} \\ e_8 \\ e_{26} \end{bmatrix}$$



Resolviendo a partir de la ecuación (4.13) tenemos:

$$E(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l \cos(\theta) & -l \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx & 0 \\ 0 & my \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -l \cos(\theta) \\ 0 & l \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix}$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mxl^2 \cos^2(\theta) - myl^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix}$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J + (mxl^2 \cos^2(\theta) + myl^2 \sin^2(\theta))}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J + ml^2}{J} \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{J + ml^2}{J}} \begin{bmatrix} \frac{J + ml^2}{J} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J + ml^2} \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l \cos(\theta) & -l \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx & 0 \\ 0 & my \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & l \sin(\theta) \dot{\theta} \\ 0 & l \cos(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} [R_1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} F$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ -1/c & -R_1/J \end{bmatrix}$$

$$B(x) = [S_{13} + S_{12}M(x)S_{23}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & l \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.18) tenemos:

$$C(x) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix} = [1/c \ 0]$$

$$D(x) = [S_{33} + S_{32}M(x)S_{23}]u = 0$$



$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J+ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{1}{c} & -R_1/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J+ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & l \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{14} \\ e_{28} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones es el siguiente:

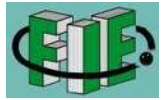
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J}{c(J+ml^2)} & -\frac{R_1}{J+ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{J}{J+ml^2} & \frac{Jl \sin(\theta)}{J+ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{14} \\ e_{28} \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{18} \end{bmatrix}$$

#### 4.9 Simulación del Péndulo Simple con Resistencia en Simnon

Para el caso de un péndulo simple con resistencia el programa es el siguiente:

- Declaración de las variables de estado.  
STATE q6 p18  
DER dq6 dp18  
TIME t
- Inicialización de las variables de estado en cero.  
q6:0  
p18:0
- Ecuaciones en espacio de estado.



$$dq6=a11*q6+a12*p18+b11*e14+b12*e28$$

$$dp18=a21*q6+a22*p18+b21*e14+b22*e28$$

➤ Variables auxiliares.

$$a11=0$$

$$a12=1/J$$

$$a21=(-J)/(c*(J+(m*l*I)))$$

$$a22=(-r1)/(J+(m*l*I))$$

$$b11=0$$

$$b12=0$$

$$b21=J/(J+(m*l*I))$$

$$b22=(J*\sin(q6))/(J+(m*l*I))$$

$$y=(1/c)*q6$$

➤ Parámetros.

$$c:1$$

$$J:1$$

$$l:1$$

$$m:1$$

$$r1:1$$

$$e14:2$$

$$e28:1$$

END

La figura 4.15 muestra la respuesta de nuestro sistema y podemos ver que la grafica corresponde a la mostrada en la figura 4.12 por lo cual podemos determinar que los resultados son los mismos para ambas simulaciones.

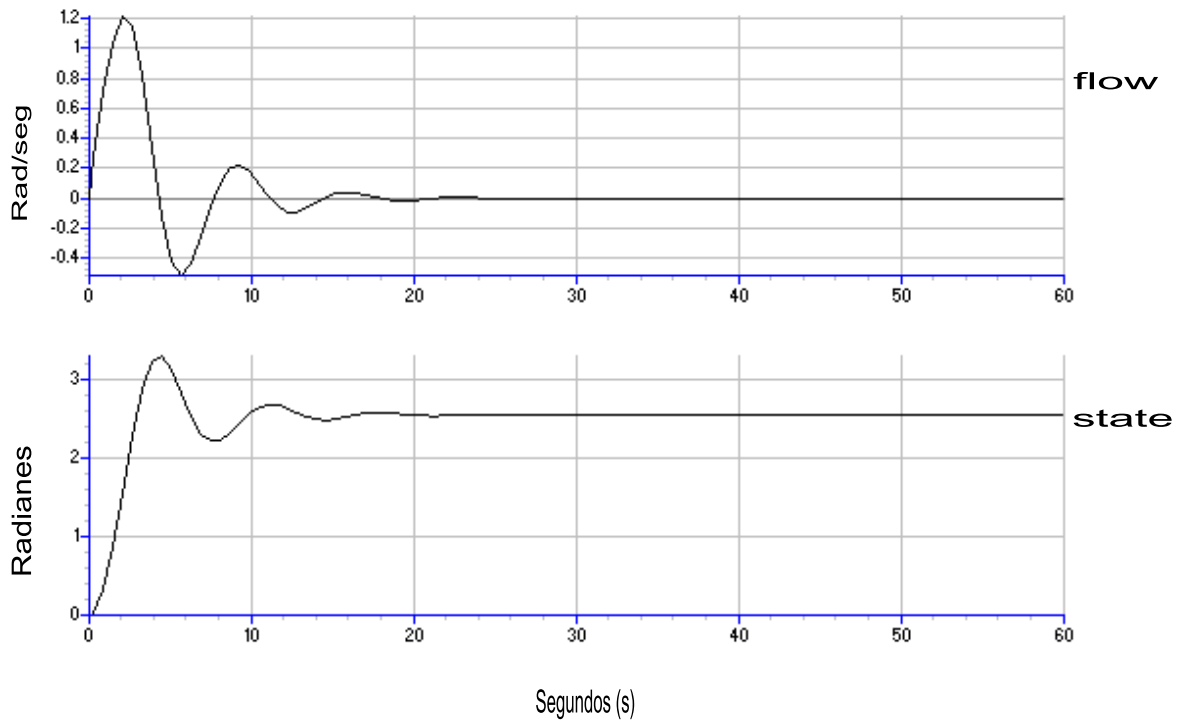


Figura 4.15 Respuesta del péndulo simple con resistencia en Simnon.

#### 4.10 Simulación de un Robot Manipulador Planar con un Eslabón

De manera similar que para el caso anterior se puede representar un robot manipulador planar de un eslabón aplicándole un par en la parte inferior como se muestra en la figura 4.16.

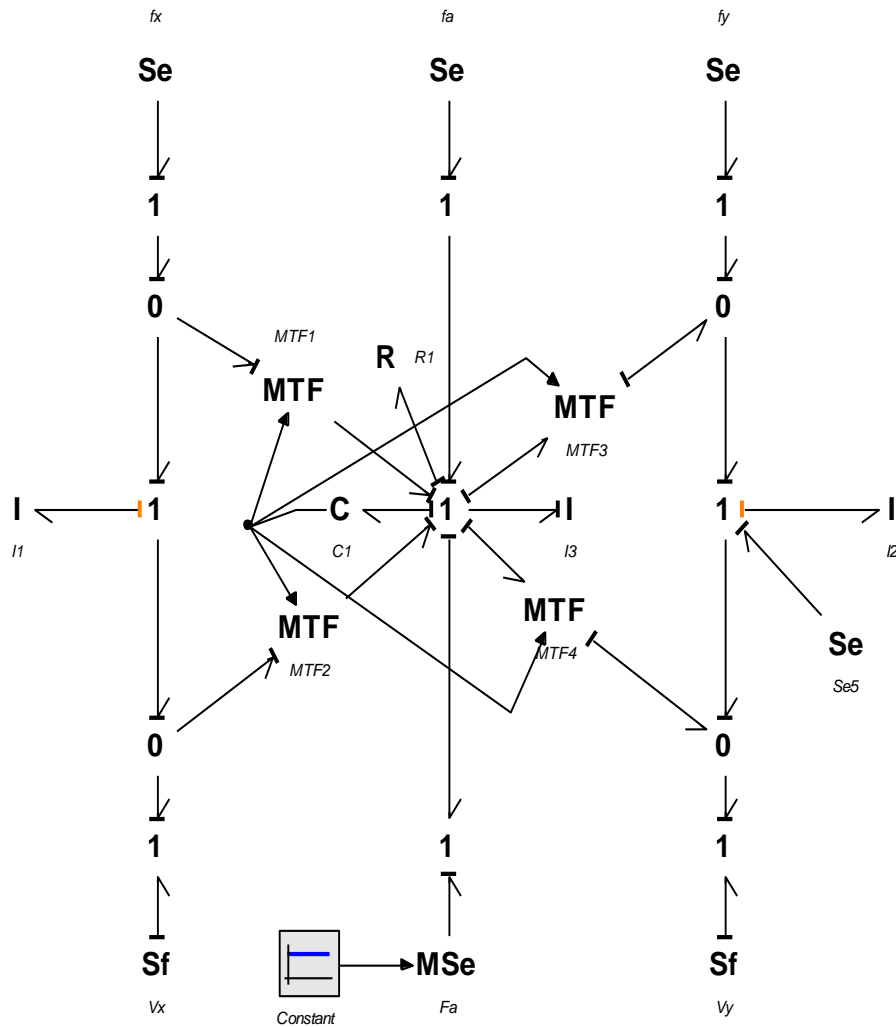


Figura 4.16 Robot manipulador planar en 20-Sim.

Una vez que se aplicó el par podemos observar que la respuesta es muy similar a la del péndulo simple con la diferencia de que ahora se tiene que vencer la fuerza de gravedad, por ello las magnitudes de la velocidad y del estado del sistema son menores, figura 4.17.

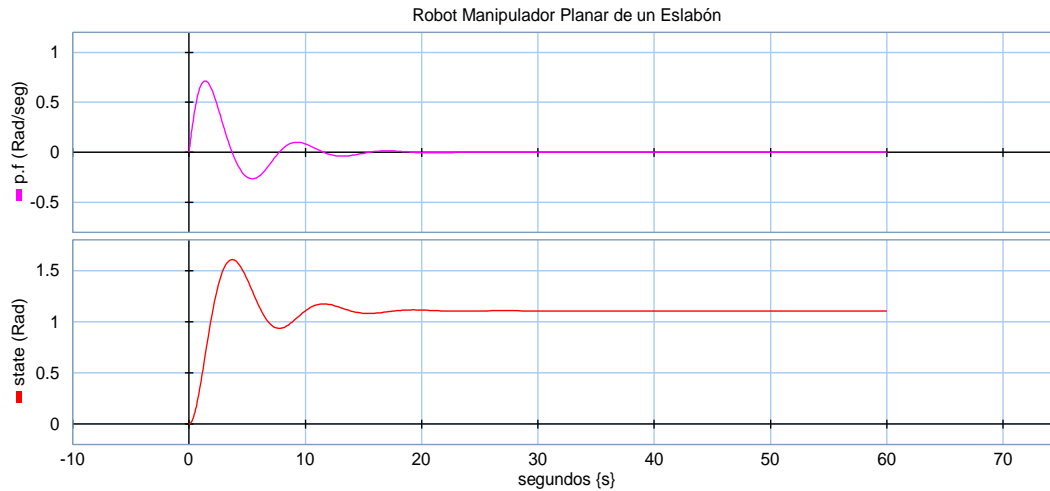


Figura 4.17 Comportamiento del robot manipulador planar de un eslabón.

La figura 4.18 muestra la respuesta de las velocidades y fuerzas del robot manipulador planar de un eslabón. Nuevamente estas velocidades y fuerzas son cero cuando termino el periodo dinámico, es decir, el brazo está en su posición final.

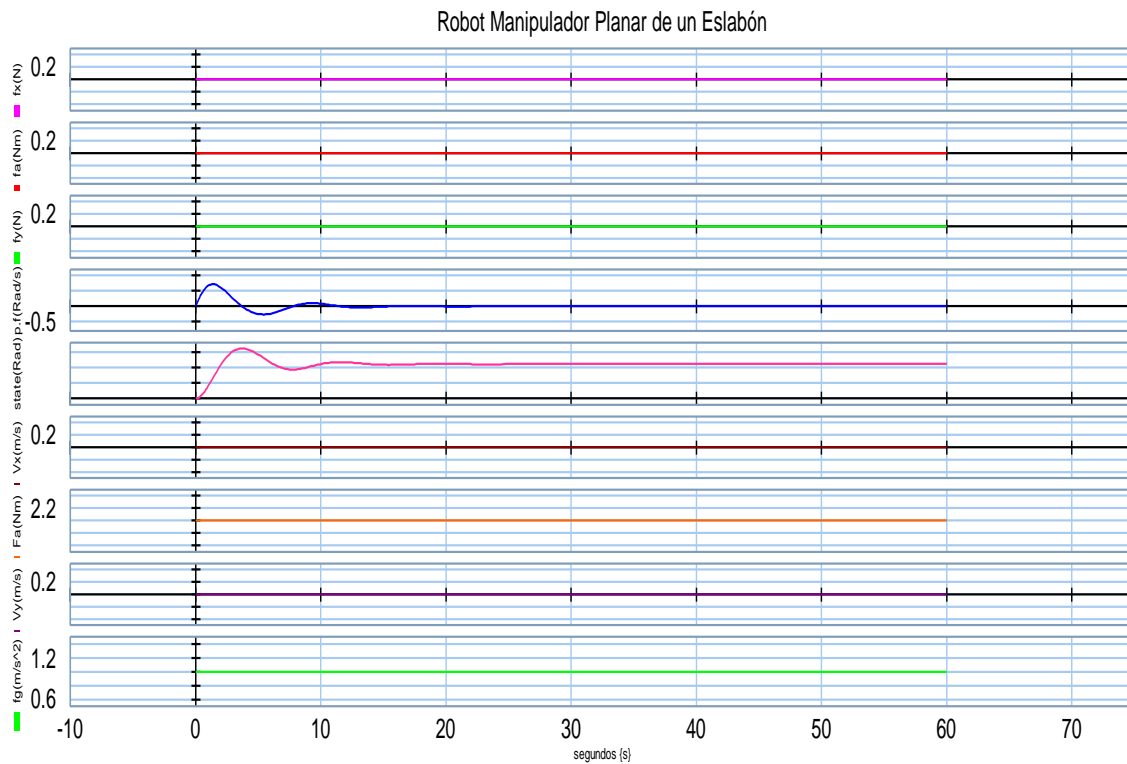


Figura 4.18 Fuerzas y velocidades del robot manipulador planar de un eslabón.



#### 4.11 Simulación de un Robot Manipulador Planar de un Eslabón en Simnon

Pariendo de la figura 4.14 se puede modelar un robot manipulador de un eslabón considerando el par aplicado en el bond número 22 de la parte inferior, así el sistema de ecuaciones para este sistema es el siguiente:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J}{c(J+ml^2)} & -\frac{R_1}{J+ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{J}{J+ml^2} & \frac{Jl \sin(\theta)}{J+ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{22} \\ e_{28} \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{18} \end{bmatrix}$$

El programa es el siguiente.

- Declaración de las variables de estado.  
STATE q6 p18  
DER dq6 dp18  
TIME t
- Inicialización de las variables de estado en cero.  
q6:0  
p18:0
- Ecuaciones en espacio de estado.  
dq6=a11\*q6+a12\*p18+b11\*e22+b12\*e28  
dp18=a21\*q6+a22\*p18+b21\*e22+b22\*e28



- Variables auxiliares.  
a11=0  
a12=1/J  
a21=(-J)/(c\*(J+(m\*I\*I)))  
a22=(-r1)/(J+(m\*I\*I))  
b11=0  
b12=0  
b21=J/(J+(m\*I\*I))  
b22=(J\*sin(q6))/(J+(m\*I\*I))
  
- Salida.  
y=(1/c)\*q6
  
- Parámetros.  
c:1  
J:1  
l:1  
m:1  
r1:1  
e22:2  
e28:-1  
END

En la figura 4.19 podemos ver la respuesta del robot manipulador planar de un eslabón y al comparar el resultado con el comportamiento obtenido en el simulador 20-sim de la figura 4.17, se puede observar que los resultados son equivalentes en ambos casos.

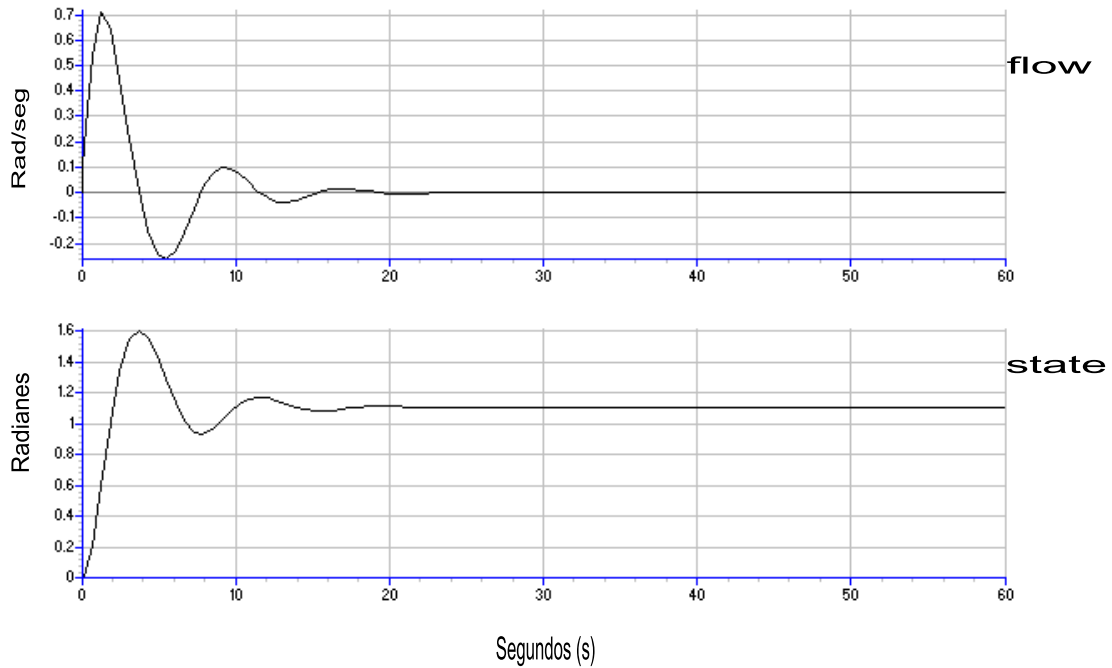


Figura 4.19 Simulación en Simnon de un manipulador planar de un eslabón.

La figura 4.20 muestra el movimiento del robot manipulador planar de un eslabón y el ángulo que forma respecto a la componente x.

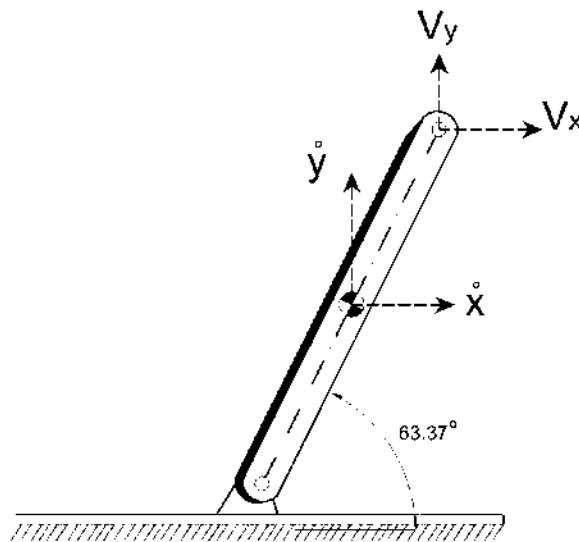


Figura 4.20 Manipulador planar de un eslabón.



### 4.12 Simulación de un Robot Manipulador Planar con dos Eslabones.

La figura 4.21 muestra el diagrama del modelo en bond graph del robot manipulador planar con dos eslabones utilizando el software 20-Sim.

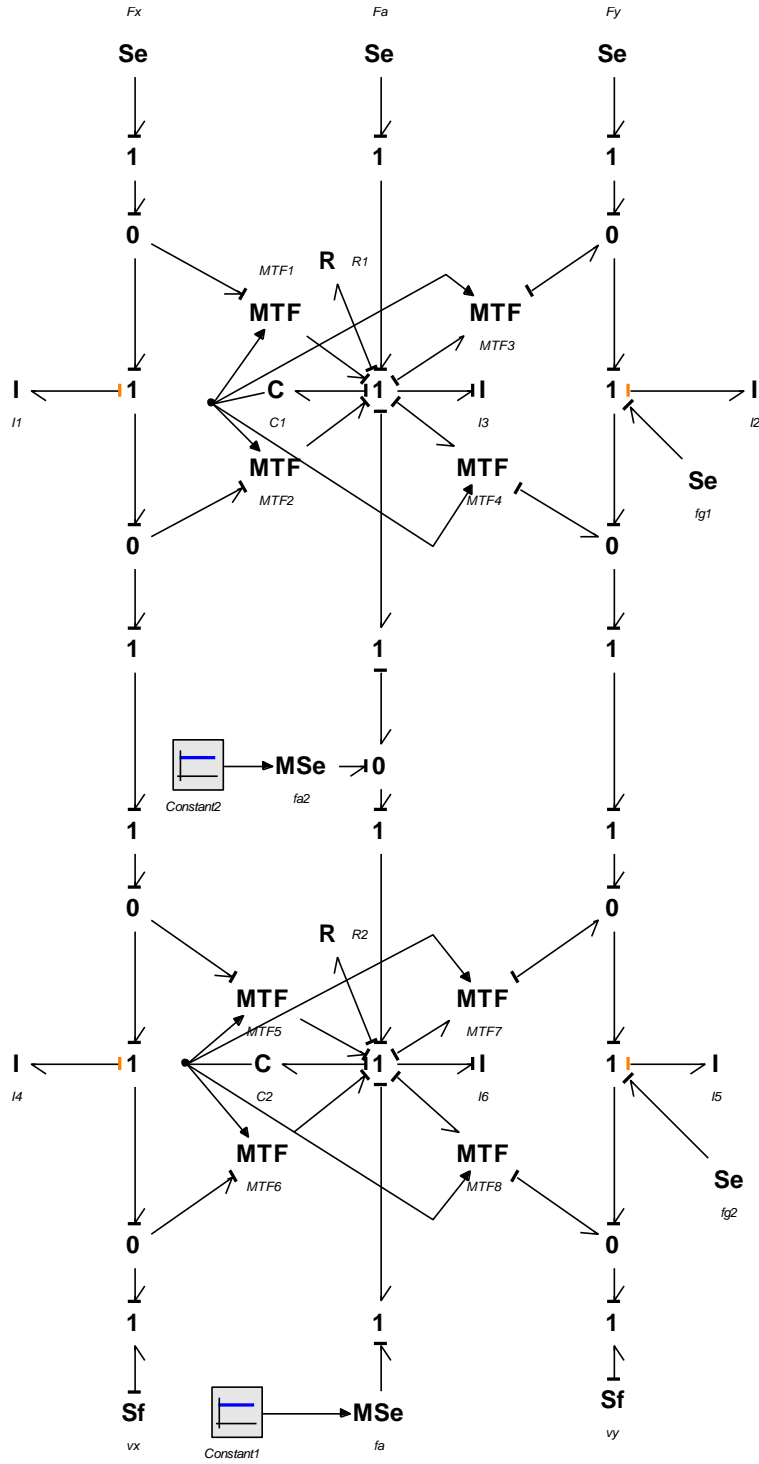


Figura 4.21 Manipulador planar con dos eslabones en 20-Sim.



Ahora podemos observar el movimiento de ambas barras rígidas al momento de aplicar los pares en cada una de las barras, figura 4.22.

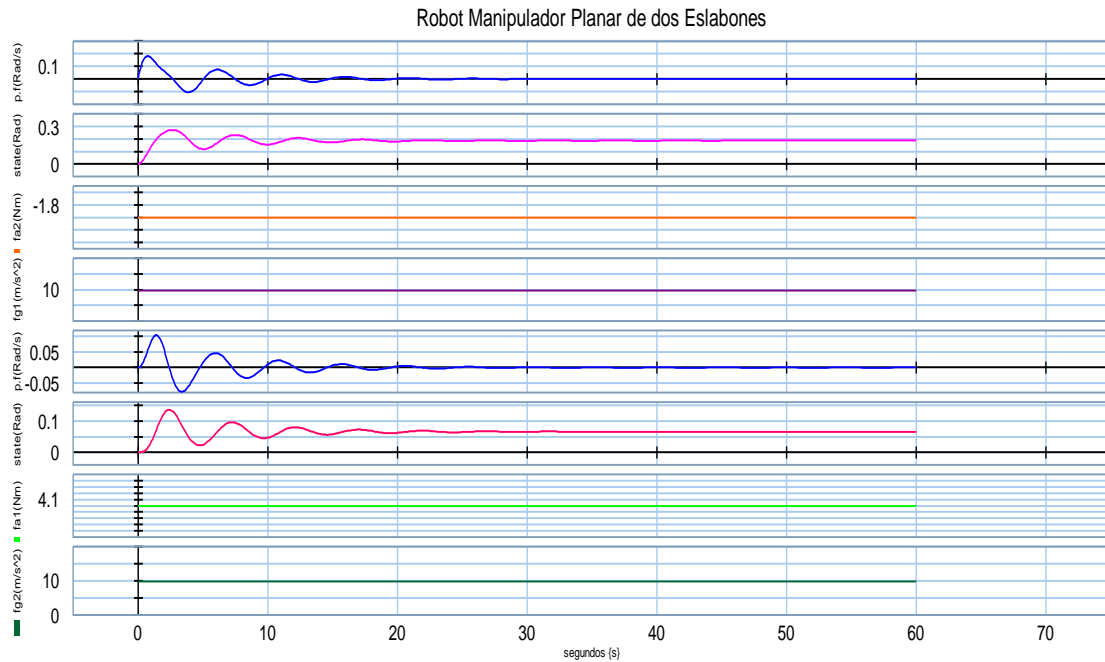


Figura 4.22 Respuesta del robot manipulador con dos eslabones.

En la figura 4.23 se muestra el comportamiento de los demás flujos y esfuerzos del robot manipulador planar con dos eslabones y se puede ver como las fuerzas y velocidades son cero cuando ha llegado a su posición final.

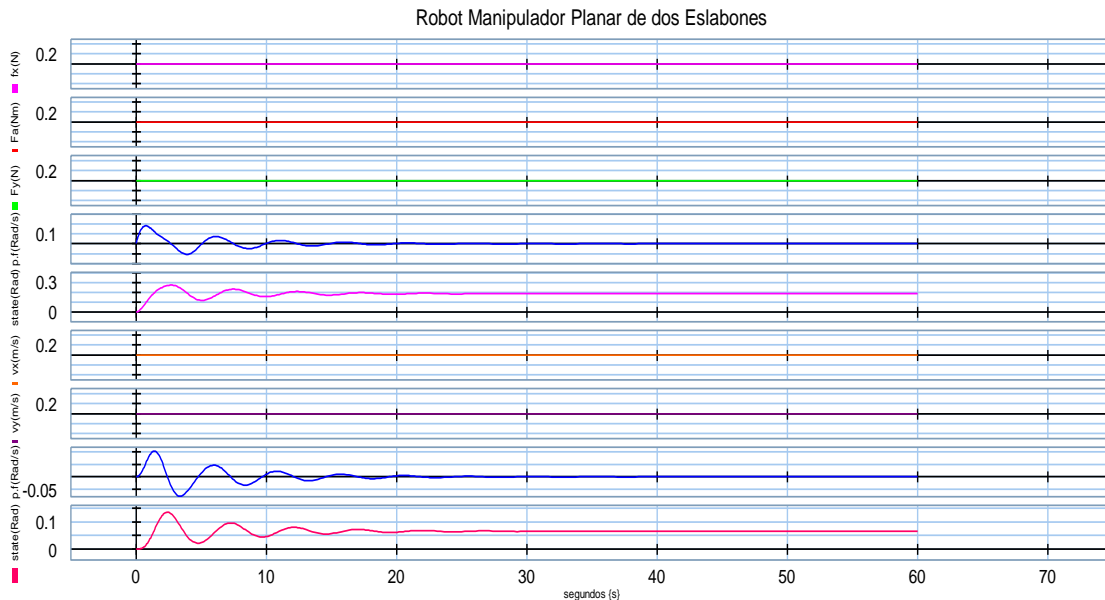


Figura 4.23 Comportamiento de fuerzas y velocidades del robot de dos eslabones.



El comportamiento del manipulador planar de dos eslabones se presenta en la figura 4.24 así como sus ángulos correspondientes de cada una de las barras rígidas que lo forman.

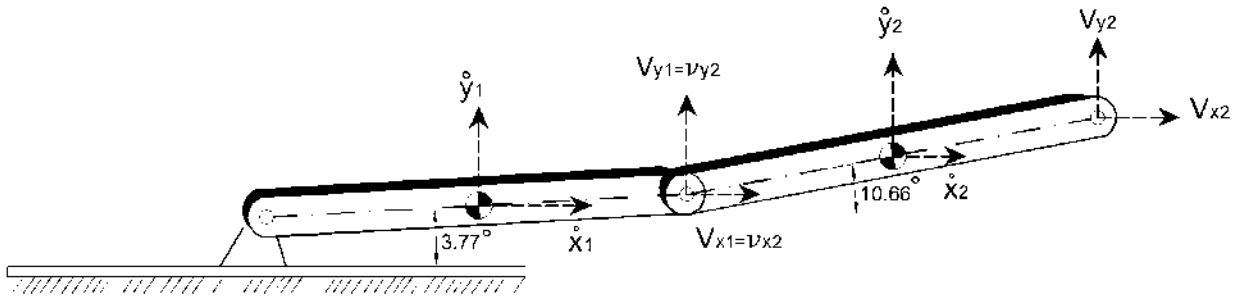


Figura 4.24 Manipulador planar con dos eslabones.

Cambiando algunos de los parámetros se puede tener un mejor comportamiento del robot manipulador, como se muestra en la figura 4.25.

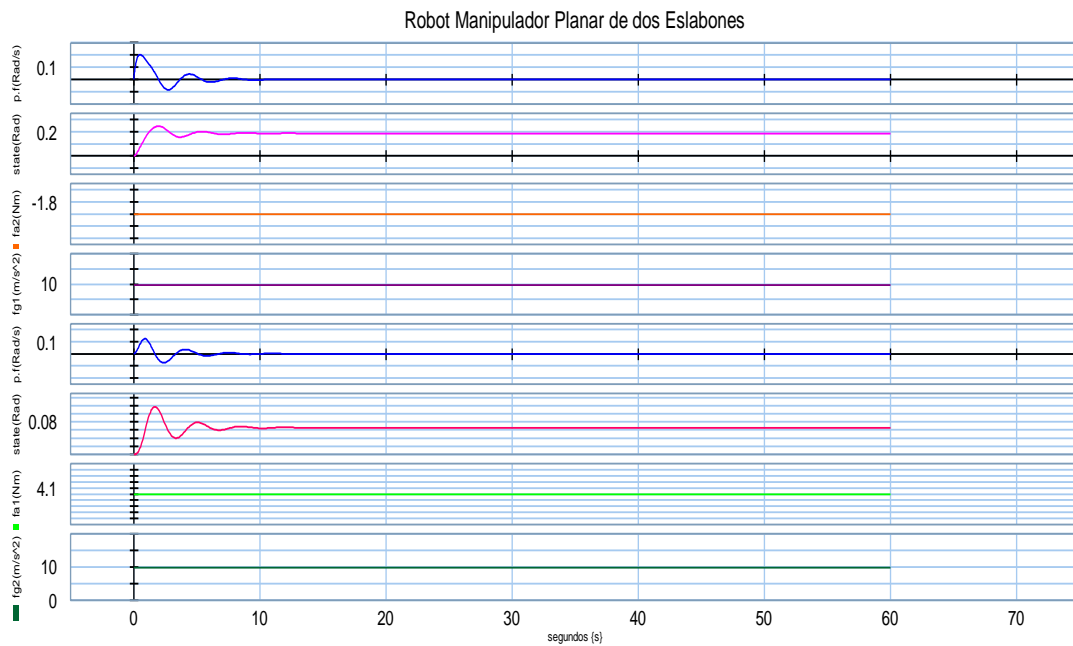


Figura 4.25 Fuerzas y velocidades del robot manipulador planar de dos eslabones.



Aumentando los valores de los pares aplicados en cada una de las barras rígidas, en la figura 4.26 se puede observar mayor magnitud en los estados de nuestro sistema.

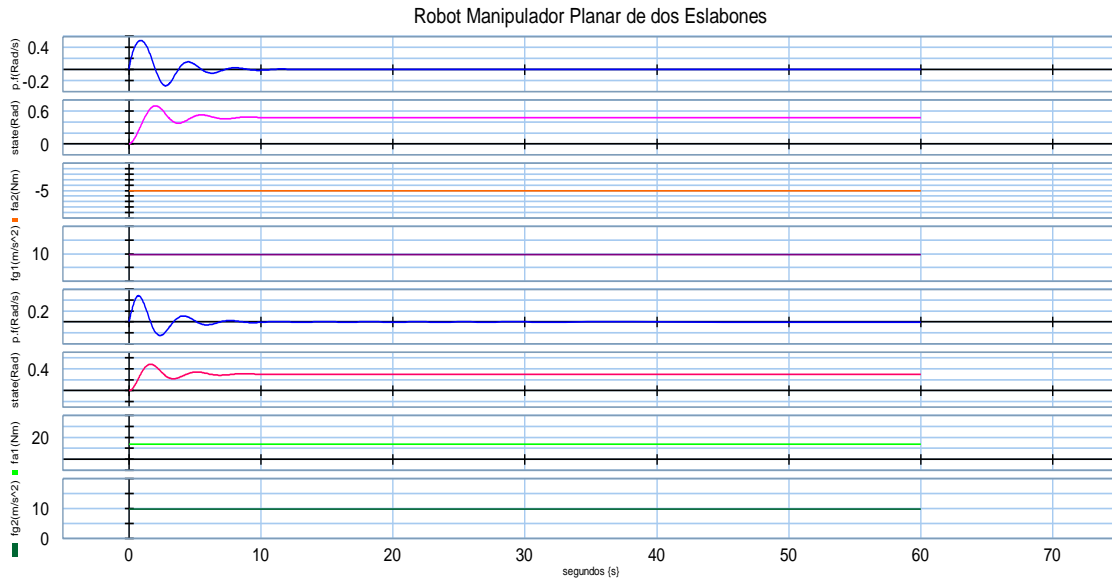


Figura 4.26 Respuesta del manipulador planar con dos eslabones.

La figura 4.27 muestra el comportamiento de ambas barras rígidas y sus ángulos correspondientes.

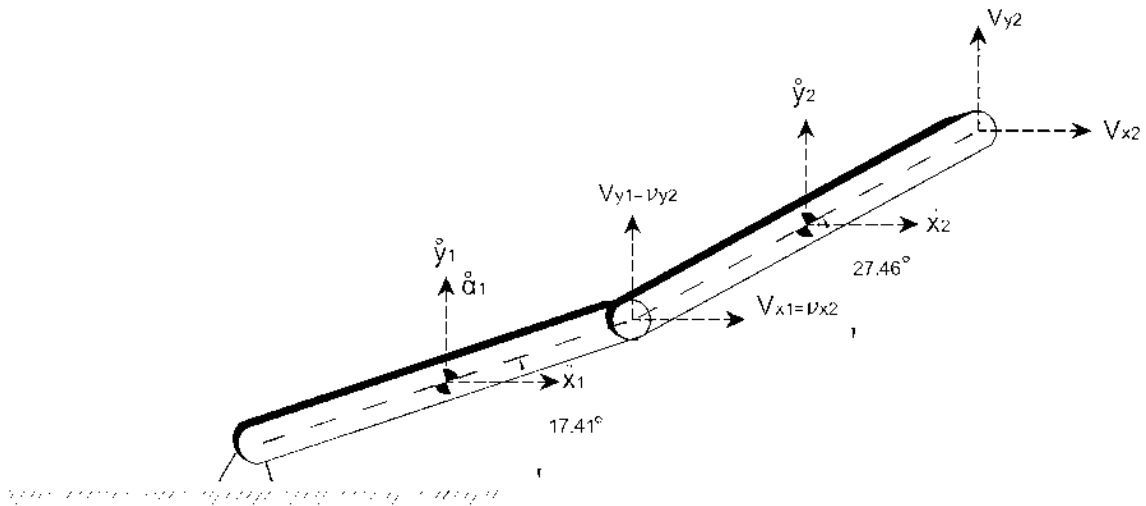


Figura 4.27 Comportamiento del manipulador planar con dos eslabones.



De esta manera finalmente se pudo observar en las simulaciones el comportamiento de nuestros sistemas de una forma satisfactoria, además de poder realizar varias pruebas con cada uno de los modelos físicos, cambiando los valores de los parámetros, así con ello se validó el procedimiento de modelado con la propuesta de esta nueva técnica; llegando a la corroboración de resultados para tener una idea de los movimientos que presentan los manipuladores planares a imagen y semejanza con la realidad.

Con la ayuda de esta nueva técnica se puede llegar también a la obtención de las ecuaciones matemáticas que rigen nuestro sistema, como se presentó para el caso de robots manipuladores planares en el dominio físico.



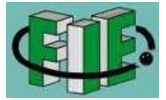
## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 5.1 Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo de tesis en el cual se aplicó bond graph a robots planares son:

- En este trabajo de tesis se cumplió de una manera satisfactoria con los objetivos planteados, partiendo de la teoría de bond graph se modelaron robots manipuladores planares, con la cual podemos tener una representación gráfica de nuestro sistema a tratar, además de que permite encontrar el comportamiento y las ecuaciones de nuestras variables de una forma precisa y práctica sin tener que realizar muchos cálculos matemáticos, también como ya se mencionó anteriormente pueden ser representados diferentes sistemas de diversos dominios físicos.
- Se describieron los diferentes elementos que presenta esta nueva teoría, junto con los conceptos básicos para llevar a cabo el modelado de sistemas físicos de cualquier tipo ya sea eléctrico, mecánico, térmico, hidráulico entre muchos otros.
- Se estudió el simulador 20-Sim de esta manera se logró observar el comportamiento de nuestros sistemas, en el se pueden modificar los parámetros para ver con cuales se logra tener un sistema estable y obtener conclusiones satisfactorias en los tipos de respuesta que presentan



nuestros modelos, de esta manera se está aportando una nueva forma de analizar robots manipuladores planares.

- Una de las ventajas que podemos apreciar al utilizar el software 20-Sim, en comparación con el simulador Simnon es poder dibujar el diagrama a partir del bond graph, ya que cuenta con entorno gráfico, además de que es posible llevar a cabo la simulación de nuestro sistema sin tener que realizar muchos cálculos matemáticos y algunas modificaciones en las ecuaciones obtenidas como lo requiere el simulador Simnon,  
En el software 20-sim se pueden identificar y seleccionar más rápidamente las variables que se pretenden analizar, además de ver el comportamiento de las mismas.
- Es relativamente fácil, modelar, analizar y simular robots planares o péndulos en bond graph.
- También la conexión de una mayor cantidad de eslabones se pueden realizar de una manera sencilla y directa en bond graph.
- Se puede apreciar la utilidad de la metodología de bond graph para la determinación del modelado matemático del sistema, es decir, el modelo no lineal de robots planares a partir de su bond graph.



## 5.2 Recomendaciones

Las recomendaciones pertinentes en este trabajo son:

- Sin embargo es conveniente obtener nuestras ecuaciones de estado a partir del modelo en bond graph y utilizar el software Simnon para corroborar y comparar los resultados en ambos simuladores, otra recomendación es hacer el modelado de robots manipuladores planares con la técnica de Euler-Lagrange, la cual es una técnica tradicional que describe las ecuaciones de movimiento del manipulador y poder llevar a cabo la comprobación de resultados con otro simulador como matlab, octave o algún otro.
- Con el uso del simulador 20-Sim así como del simulador Simnon se plantea una nueva propuesta para implementarla a un futuro en la facultad.
- Debido a que existen numerosas aplicaciones de robots manipuladores sería interesante construir más modelos físicos acoplados a otras disciplinas aprovechando la universalidad de la técnica de bond graph.



## BIBLIOGRAFÍA

1. Introduction to Physical System Modelling, P.E. Wellstead, Academic Press, 1979.
2. Bond Graph in Modeling Simulation and Fault Identification, Muhherjee, Karmakar, Taylor & Francis, 2006.
3. Katsuhiko Ogata, Ingeniería de control moderna, México, Tercera Edición, Prentice-Hall.1998.
4. Robot Dynamics and Control, Mark W. Spong y M. Vidyasagar
5. Fundamental of Robotics, Analysis and Control, Robert J. Shilling, Prentice Hall, 1990.
6. Robots y Sistemas Sensoriales, Fernando Torres, Prentice Hall, 2002.
7. Software 20-Sim version 4.1 the power in modeling.
8. Simulador Simnon version 1.0 Simulation of Nonlinear Systems.