



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA**



MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS EN BOND GRAPH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO ELECTRÓNICO

PRESENTA:

RODY OSWALDO MÉNDEZ VILLARREAL

ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica: GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

MORELIA MICHOACÁN, ABRIL DE 2014

Agradecimientos

Antes que nada quisiera agradecer y dedicar esta tesis a mi madre quien me ha apoyado en todo momento e incondicionalmente durante toda mi vida con su cariño y comprensión y con la cual aun tengo la dicha de compartir los mejores momentos de mi vida.

A mis hermanos, pues sin ellos mi vida hubiera sido difícil y aburrida, ya que estuvieron conmigo en todo momento para ayudarme incondicionalmente.

También agradezco enormemente a la Facultad de Ingeniería Eléctrica y a todos mis profesores por compartir un poco de sus conocimientos, por brindarme su ayuda y apoyo durante mi formación como profesionista, en toda la carrera.

Deseo agradecer también a mi asesor, Dr. Gilberto González Avalos, por brindarme su apoyo en las asesorías, las cuales me permitieron desarrollar el presente proyecto de tesis.

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que deseo agradecerles su amistad, consejos, ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Algunas de ellas aun siguen aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar en donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí, y por todo lo que me han brindado.

Gracias a todos.

Dedicatoria:

A mi madre, porque creyó en mí y porque me saco adelante, dándome ánimos de superación y entrega, porque en gran parte gracias a ella, hoy puedo ver alcanzada mi meta, ya que siempre estuvo impulsándome en los momentos más difíciles de mi carrera, y porque el orgullo que siente por mí, fue lo que me hizo ir hasta el final.

A mis hermanos, primos y amigos, gracias por haber fomentado en mí el deseo de superación y anhelo de triunfo en la vida. Mil palabras no bastaran para agradecerles su apoyo, comprensión y consejos en los momentos más difíciles.

A todos los que directa e indirectamente ayudaron a la realización de este proyecto.

A todos, espero no defraudarlos y contar siempre con su valioso apoyo sincero e incondicional.

Contenido

Agradecimientos	i
Dedicatoria:	ii
Índice de figuras	v
Índice de tablas	vi
Lista de Símbolos y Abreviaturas	vii
Resumen:.....	viii
Abstract:	ix
Capítulo 1	1
1. Introducción	1
1.1. Modelado de sistemas dinámicos	1
1.2. Objetivo.	2
1.3. Justificación	2
1.4. Metodología	3
1.5. Contenido de la tesis	3
Capítulo 2	4
2. Modelado de Sistemas en Bond Graph.....	4
2.1. Introducción	4
2.2. Bond Graph	4
2.3. Elementos básicos del Bond Graph.....	5
2.3.1. Puertos -1 Pasivos	7
2.3.2. Puertos -1 Activos.....	8
2.3.3. Elementos ideales puertos-2.....	8
2.3.3.1. Transformador TF.....	9
2.3.3.2. Girador GY	9
2.3.4. Elementos de unión Puertos-3.....	10
2.4. Causalidad	11
2.5. Obtención de ecuaciones diferenciales por asignación de causalidad en un multipuerto.	14

2.6.	Causalidad derivativa en un Bond Graph.....	14
2.7.	Procedimiento para el modelado de sistemas en Bond Graph.....	15
2.8.	Estructura de unión en sistemas multipuerto.....	16
2.8.1.	Vectores clave o vectores significativos.....	16
2.8.2.	Ecuaciones de estado y relacion de campo	17
2.8.3.	Propiedades de la matriz S.....	19
Capítulo 3		21
3.	Bond Graph en causalidad derivativa	21
3.1.	Introducción	21
3.2.	Bond Graph en causalidad derivativa.....	21
3.3.	Relaciones de un BGI y de un BGD	26
Capítulo 4		30
4.	Casos de estudio de sistemas equivalentes	30
4.1.	Introducción	30
4.2.	El estado estable en Bond Graph	30
4.3.	Un caso básico de estudio.....	37
4.4.	Un caso de una red eléctrica	58
4.5.	Un caso electromecánico	74
4.6.	Un caso general de estudio	83
Capítulo 5		97
5.	Conclusiones y recomendaciones	97
5.1.	Conclusiones.....	97
5.2.	Recomendaciones	99
Bibliografía		100

Índice de figuras

Figura 2.1. Representación de un Bond	5
Figura 2.2. Variables de potencia de un Bond.	6
Figura 2.3. Tetraedro de estado.....	8
Figura 2.4. Puertos-1 Activos	8
Figura 2.5. Bond Graph del Transformador	9
Figura 2.6. Bond Graph del Girador	10
Figura 2.7. Unión-0.....	10
Figura 2.8. Unión-1.....	11
Figura 2.9. Causalidad para un Bond.....	12
Figura 2.10. Tipos de causalidad	12
Figura 2.11. Circuito eléctrico en causalidad derivativa	14
Figura 2.12. Elemento C2 en causalidad derivativa	15
Figura 2.13. Reduccion de Bonds en las uniones	16
Figura 2.14. Diagramas de bloques de la estructura unión de un Bond Graph	16
Figura 3.1. Diagrama de bloques de la estructura unión de un Bond Graph en causalidad derivativa	22
Figura 3.2. Expresiones que se utilizan para el caso de estudio en BGI y BGD	29
Figura 4.1. Representacion grafica del estado estable	30
Figura 4.2. Representacion grafica del estado estacionario para una señal de entrada	31
Figura 4.3. Tipos de causalidades que se tienen en un BGI	33
Figura 4.4. Elementos que involucran la causalidad derivativa en Bond Graph.....	34
Figura 4.5. Ejemplo de un sistema eléctrico simple.....	37
Figura 4.6. Bond Graph en causalidad integral del sistema eléctrico	37
Figura 4.7. Asignación de variables para formar los vectores clave	38
Figura 4.8. Unión de flujo o unión 0.....	42
Figura 4.9. Unión de esfuerzo o unión 1	43
Figura 4.10. Bond Graph en causalidad derivativa del sistema	49
Figura 4.11. Diagrama de bloques para el análisis en Bond Graph.....	57
Figura 4.12. Circuito de una red eléctrica	58
Figura 4.13. Bond Graph de la red eléctrica.....	59
Figura 4.14. BGD de la red eléctrica	65
Figura 4.15. Representación de un sistema electromecánico	74
Figura 4.16. BGI del sistema electromecánico	74
Figura 4.17. BGD del sistema electromecánico.....	78
Figura 4.18. Circuito electromecánico formado por un girador y un transformador	83
Figura 4.19. Representación en Bond Graph del sistema electromecánico	84
Figura 4.20. Representación BGD para el sistema electromecánico	89

Índice de tablas

Tabla 2.1. Variables generalizadas para distintos sistemas físicos.	6
Tabla 2.2. Puertos pasivos.....	7
Tabla 2.3. Condiciones para el trazo causal.	13

Lista de símbolos y Abreviaturas

$e(t)$	Esfuerzo
$f(t)$	Flujo
$p(t)$	Momento
$q(t)$	Desplazamiento
MSe	Fuentes de Esfuerzo
MSf	Fuentes de Flujo
R	Elemento Resistivo
C	Elemento Capacitivo
I	Elemento Inductivo
x	Vector de estado
$\dot{x}$	Derivada del vector de estado
y	Vector de Salida
u	Vector de Entrada o de Control
A	Matriz del Sistema
B	Matriz de la Entrada
TF	Transformador
GY	Girador
BGI	Bond Graph Integral
BGD	Bond Graph Derivativo
LTI	Linealmente Invariante en el Tiempo
$MIMO$	Múltiple Entrada – Múltiple Salida

Resumen:

Los sistemas físicos tienen una representación matemática que modela su comportamiento del sistema, a esto se le llama teoría clásica de modelado la cual utiliza leyes, propiedades matemáticas, teoremas, igualdades, teoremas matemáticos, entre otras propiedades con el objetivo de determinar el conjunto de ecuaciones que reflejan el comportamiento del sistema. Desarrollar el modelado de cualquier sistema es complejo, y solo basta un error para que el modelo matemático sea incorrecto.

Una de las técnicas que simplifica el desarrollo y la obtención de modelos matemáticos es la técnica de modelado llamada Bond Graph, esta técnica reduce el tiempo de espera para obtener las ecuaciones del modelo matemático del sistema, es más sencilla de comprender y de aplicar ya que se utiliza un sistema físico y se representa gráficamente.

En este trabajo de tesis, la aplicación de la técnica de Bond Graph permitirá modelar sistemas dinámicos, a través del enfoque en Bond Graph en causalidad integral (BGI) y del Bond Graph en causalidad derivativa (BGD), demostrando a la vez las relaciones de equivalencia para los sistemas propuestos.

Al utilizar la técnica de modelado de sistemas dinámicos con Bond Graph, se podrá observar que con un mínimo número de símbolos se hace posible la representación de dichos elementos para los sistemas propuestos, además de las interacciones energéticas y las relaciones de causa y efecto que existen, debido a que Bond Graph permite representar una gran variedad de medios de energía (eléctrica, hidráulica, térmica, etc).

Posteriormente, se plantea un procedimiento para obtener la respuesta en estado estacionario de los sistemas dinámicos propuestos, basados en un modelo de Bond Graph en causalidad derivativa y en causalidad integral, para con ello demostrar que es posible llegar a un mismo resultado para ambos enfoques de estudio.

Palabras Clave: Bond Graph, Bond Graph en Causalidad Derivativa (BGD), sistemas dinámicos, estado estable.

Abstract:

Physical systems have a mathematical representation that models the behavior of the system, this is called classical theory of modeling which uses laws, mathematical properties, theorems, equalities, mathematical theorems, among other properties in order to determine the set of equations reflecting the behavior of the system. Develop the modeling in any system is complex, and it is enough for an error that the mathematical model is inaccurate.

One technique that simplifies the development and obtainment of mathematical models is the modeling technique called Bond Graph, this technique reduces the waiting time to obtain the equations of the mathematical model of the system, it is easier to understand and to apply since a physical system is used and is plotted.

In this thesis, the application of the technique allow Bond Graph model dynamic systems by focusing on Bond Graph integral causality (BGI) and Bond Graph in derivative causality (BGD), demonstrating both relations equivalence for the proposed systems.

By using the art of modeling dynamic systems with Bond Graph, it will be seen that a minimum number of symbols representing these elements for the proposed systems is made possible, in addition to the energy interactions and relationships of cause and effect relationships because Bond Graph can represent a variety of media power (electric, hydraulic, thermal, etc.).

Subsequently, a method is proposed to obtain the steady-state response of the proposed dynamical systems, based on a model of Bond Graph in derivative and integral causality, to thereby demonstrate that it is possible to achieve the same result for both approaches study.

Keywords: Bond Graph, Bond Graph Causality in Derivative (BGD), dynamical systems, steady state.

Capítulo 1

1. Introducción

1.1. Modelado de sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos [1] son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistema debido a que están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo. De manera que el conocimiento de la situación en un momento dado, permite reconstruir el pasado y predecir el futuro.

Los sistemas dinámicos son un área joven de las matemáticas, aunque se remontan a Newton con sus estudios de mecánica celeste y a Henri Poincaré, quien inicio el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, fue hace apenas 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha debido al trabajo destacado de ingenieros y matemáticos como S. Smale, V. Arnold, Lyapunov.

El modelado de sistemas dinámicos se trata de la obtención de un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento de un sistema físico.

El modelado de un sistema dinámico consta de tres fases:

- A partir de la utilidad que vaya a tener el modelo decídase que señales son las de entrada o excitación, las de respuesta o salida, que variables internas, y cuáles son los parámetros (constantes) a tener en cuenta. Pueden dibujarse inicialmente bloques (sin ecuaciones matemáticas) para ayudar a describir la interacción de las variables.
- Escribir las relaciones matemáticas que relacionan las variables de entrada y salida de cada elemento del conjunto.
- Anadir las ecuaciones que ligan unos elementos con otros. Obtener un modelo en espacio de estado o mediante funciones de transferencia del conjunto.

Las ecuaciones que resultan del modelado de distintos sistemas tienen, a menudo la misma forma, lo que hace posible el establecimiento de analogías. El estudio de sistemas dinámicos es de gran importancia ya que estos están relacionados con el mundo real.

1.2. Objetivo.

El presente trabajo de tesis tiene como finalidad representar un sistema dinámico, y posteriormente pasar a un sistema equivalente en la técnica de modelado llamada Bond Graph [2] y a partir de dicha técnica obtener el modelo matemático que permitirá analizar y obtener el comportamiento del sistema mediante la obtención de sus ecuaciones de estado.

1.3. Justificación

La utilización del método desarrollado por el profesor Henry Martyn Paynter es una herramienta nueva y útil en la implementación de sistemas eléctricos como lo es también para el modelado de un sistema dinámico, ya que aun no se ha explotado al máximo este método en el área de la ingeniería eléctrica y en particular para dichos sistemas dinámicos de tal forma que se pueda obtener el modelo matemático a partir del modelo en Bond Graph, demostrando las facilidades de este método para encontrar importantes características como causalidad, vectores clave, estructura de unión y ecuaciones de estado.

1.4. Metodología

La metodología [3] a seguir para el presente trabajo de tesis consiste en una investigación acerca de modelado de sistemas dinámicos utilizando Bond Graph aplicar este método y establecer las equivalencias de sistemas de Bond Graph en causalidad integrativa y en causalidad derivativa y posteriormente proponer algunos casos de estudio. Una vez obtenidos los resultados se analizarán para establecer dichas equivalencias.

1.5. Contenido de la tesis

El presente trabajo de investigación de tesis consta de 5 capítulos y está organizado de la siguiente:

Capítulo 1.- Introducción del contenido global de la tesis, visión general de lo que se pretende con la realización del presente proyecto de investigación.

Capítulo 2.- Modelado de sistemas en Bond Graph, explicación a detalle de esta técnica, se da un procedimiento general para el modelado de sistemas físicos y se describe la estructura de unión para determinar el modelado matemático en espacio de estado del sistema.

Capítulo 3.- Se estudiará el caso cuando se tiene la existencia de causalidad derivativa en Bond Graph (BGD), y sus ecuaciones de variables de estado características, además se establecerá la relación que se tiene con un Bond Graph en causalidad integral (BGI), mediante el análisis detallado de sus expresiones matemáticas con el fin de demostrar que son expresiones equivalentes y que se puede obtener el mismo resultado ya sea realizando un análisis en BGI o en BGD.

Capítulo 4.- Se presentan algunos casos de estudio que se analizarán utilizando el BGI y el BGD y además se estudiará el caso de estado estacionario, que se presentan en los sistemas dinámicos mediante la técnica de Bond Graph.

Capítulo 5.- Finalmente en este capítulo se tiene una serie de conclusiones, recomendaciones y comentarios finales acerca de los resultados que se obtuvieron durante el desarrollo de este trabajo de tesis.

Capítulo 2

2. Modelado de Sistemas en Bond Graph

2.1. Introducción

Al tener un sistema físico es primordial modelar este sistema a través de ecuaciones matemáticas que representen su comportamiento dinámico. Existen diversas formas de obtener el modelo matemático y distintas metodologías para obtener su solución; los métodos más empleados comúnmente son el método de la función de transferencia y el método de las variables de estado. El método de la función de transferencia es válido únicamente para sistemas lineales, en tanto que el método de las variables de estado es válido tanto para sistemas lineales como para sistemas no lineales. Para el presente trabajo de tesis, en el modelado de sistemas dinámicos se implementará la técnica llamada Bond Graph que funciona tanto para sistemas lineales como para los sistemas no lineales y que además representa un enfoque para modelar y manipular sistemas dinámicos de ingeniería.

2.2. Bond Graph

La herramienta de Bond Graph permite capturar la estructura de los sistemas físicos que se desean modelar con flujos de energía entre los elementos del sistema. Bond Graph ofrece una descripción rápida y eficiente de sistemas muy complejos. Es posible observar cómo se comporta la energía de los sistemas modelados en Bond Graph debido a la notación llamada causalidad en el esquema del sistema.

En el año 1959, el profesor Henry M. Paynter dio una idea revolucionaria de la interpretación de los sistemas en términos de Bonds de potencia, mediante la conexión de elementos de un sistema físico limitadas por uniones. El intercambio de potencia en un

sistema es descrito mediante los distintos componentes que interactúan con puertos de energía formando de esta manera una representación gráfico llamada modelo en Bond Graph. Posteriormente, la teoría de Bond Graph siguió siendo desarrollada por muchos investigadores como Karnopp (1983), Breedveld (1984), Rosenberg (1990) y Thoma (1991), etc. Quienes trabajaron en esta técnica lo hicieron modelando sistemas hidráulicos, mecatrónicos, sistemas termodinámicos en general y actualmente en sistemas electrónicos.

2.3. Elementos básicos del Bond Graph

En la técnica de Bond Graph el flujo de potencia entre los sistemas y los elementos del sistema se representa mediante por una línea llamada Bond, mostrada en la Figura 2.1. La punta de la semiflecha del Bond indica el sentido de transmisión de la potencia.

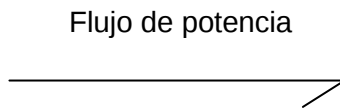


Figura 2.1. Representación de un Bond.

Por otra parte la potencia instantánea variante en el tiempo es transmitida por un Bond en particular y puede ser expresada por el producto de dos variables: El esfuerzo $e(t)$ y el flujo $f(t)$ siendo estas dos variables en función del tiempo, dando como resultado la ecuación siguiente:

$$\text{Potencia} = e(t) * f(t) \quad (2.1)$$

Posteriormente se analizara el significado de las variables de esfuerzo y flujo las cuales dependen del sistema físico de estudio.

En los sistemas que almacenan energía se definen variables que representen el estado del sistema llamadas variables de energía, estas reciben el nombre de momento $p(t)$ o esfuerzo acumulado $e_a(t)$ y desplazamiento $q(t)$ o flujo acumulado $f_a(t)$. Donde $q(t)$ y $p(t)$ se denominan como variables energéticas o dinámicas.

A continuación se muestra el comportamiento de la energía con respecto al flujo de potencia y esfuerzo.

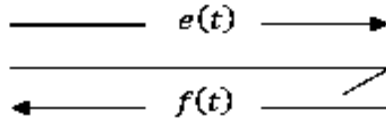


Figura 2.2. Variables de potencia de un Bond.

En la Tabla 2.1 se muestran las variables generalizadas utilizadas por Bond Graph en las ecuaciones matemáticas que representan el modelado de diversos sistemas.

Tabla 2.1. Variables generalizadas para distintos sistemas físicos.

Variable	General	Eléctrico	Mecánico Traslacional	Mecánico rotacional	Hidráulico
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad	$\omega(t)$ Velocidad angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$p(t) = \int e(t)dt$	$\lambda(t)$ Enlace de flujo	$P_r(t)$ Momento rotacional	$H(t)$ Momento angular	$P_p(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t)dt$	$q(t)$ Carga	$X(t)$ Distancia	$\theta(t)$ Angulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$P(t) = e(t)f(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p)dp$ $E(q) = \int e(q)dq$	$\int i(\lambda)d\lambda$ $\int e dq$	$\int V(P_r)dP_r$ $\int F(x)dx$	$\int \omega(H)dH$ $\int \tau(\theta)d\theta$	$\int Q(P_p)dP_p$ $\int P_e(V)dV$

Para poder realizar el análisis de modelado usando Bond Graph se debe conocer diferentes elementos que ayudarán al sistema en diagramas de Bond, cuya descripción se tiene a continuación.

2.3.1. Puertos -1 Pasivos

Los puertos pasivos representan elementos ideales de disipación de potencia y dos formas de almacenar energía. La resistencia, inductancia y capacitancia son considerados como elementos pasivos.

La siguiente Tabla 2.2 muestra los elementos de disipación **R**, de almacenamiento de flujo **C** y de almacenamiento de esfuerzo **I** para sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

Tabla 2.2. Puertos pasivos.

Elemento	Relación	Sistemas		
		Eléctricos	Mecánicos	Hidráulicos
R	Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
	No lineal	$v = \varphi(i)$	$F = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$
C	Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int idt$	$F(t) = k \int Vdt$	$P_r(t) = C \int \Delta Qdt$
	No lineal	$v(t) = \varphi(q)$	$F(t) = \varphi(x)$	$P_r(t) = \varphi(V)$
I	Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int vdt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int Fdt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
	No lineal	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_p)$

Los elementos variantes en el tiempo, indican que la energía que se almacena o dispersa según sea el caso, cambia constantemente, por lo que es necesario analizar todos los elementos del sistema en el mismo rango de tiempo.

La Figura 2.3 muestra el tetraedro de estado, este esquema facilitara el determinar la determinación existente entre las variables generalizadas por tres puertos-1 pasivos.

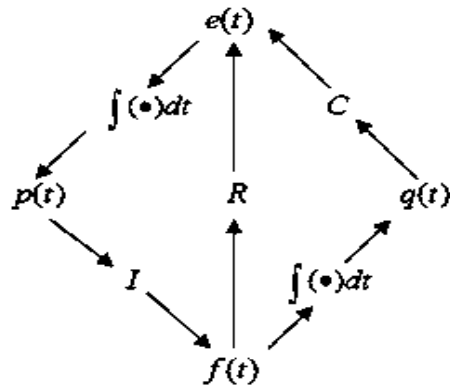
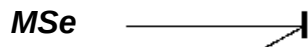


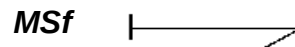
Figura 2.3 Tetraedro de estado.

2.3.2. Puertos -1 Activos

Los elementos activos en Bond Graph son aquellos que proporcionan energía al sistema, existen dos tipos de fuentes, fuentes de esfuerzo ***MSe*** (voltaje, fuerza o presión) y fuentes de flujo ***MSf*** (corriente, velocidad o caudal) representados en la Figura 2.4.



a) Fuente de esfuerzo.



b) Fuente de flujo.

Figura 2.4 Puertos-1 Activos.

2.3.3. Elementos ideales puertos-2

Únicamente existen dos tipos de elementos ideales puerto-2 estos dos elementos son llamados transformador ***TF*** y girador ***GY*** que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo respectivamente. Ambos se caracterizan por tener dos puertos y una relación lineal entre esfuerzos y flujos.

2.3.3.1. Transformador TF

El transformador representa un transformador eléctrico ideal, su función es la de convertir la energía entre dos puertos. En el transformador no se crea ni se conserva energía, solo se transforma para ser transferida con ciertas características.

En la figura 2.5 se tiene el esquema de Bonds que representan al transformador.

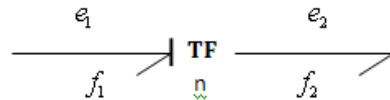


Figura 2.5 Bond Graph del Transformador.

Las relaciones de las variables de Bond generalizadas para el transformador están dadas por:

$$e_1 = ne_2(t) \quad (2.2)$$

$$f_1 = \frac{1}{n} f_2(t) \quad (2.3)$$

Para el modelo del transformador en Bond Graph, se tiene el mismo concepto de relación de transformación que el de un transformador eléctrico real, la relación de transformación para ambos casos indica cómo se ve afectada la transformación de la energía.

2.3.3.2. Girador GY

El girador establece la relación que hay entre flujo-esfuerzo y el esfuerzo-flujo, en el caso del transformador que establece la relación entre flujo-flujo y el esfuerzo-esfuerzo, para representar el elemento girador se hace mediante dos Bonds, donde r es el módulo del girador, que se muestra en la Figura 2.6.

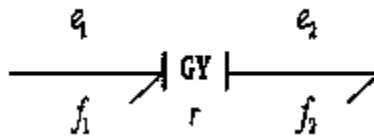


Figura 2.6 Bond Graph del Girador.

Las relaciones entre las variables de Bond generalizadas para el girador vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$e_1(t) = r f_2(t) \quad (2.4)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r} e_2(t) \quad (2.5)$$

2.3.4. Elementos de unión Puertos-3

Los elementos de puerto-3 se utilizan para unir dos o más Bonds, existen únicamente dos tipos de uniones, la unión 0 y la unión 1. Estos conservan la potencia y representan las ideas fundamentales de Bond Graph, es decir, los dos tipos de conexiones (en referencia a la analogía de los circuitos eléctricos) serie y paralelo.

La unión 0, unión de flujo o esfuerzo común representa a la conexión en paralelo de los elementos de un sistema, en la Figura 2.7 se representa el esquema de la unión 0.

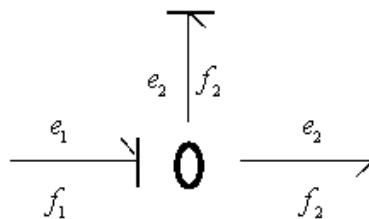


Figura 2.7 Unión-0.

Las relaciones de interconexión están representadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.6)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.7)$$

La unión 1, unión de esfuerzo o flujo común representa la conexión serie, mostrada en la Figura 2.8.

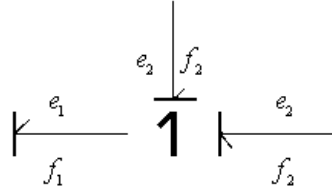


Figura 2.8 Unión-1.

Las relaciones de interconexión se representan por:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.8)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.9)$$

2.4.Causalidad

La causalidad establece la relación de causa y efecto entre los distintos factores de potencia. En Bond Graph, las entradas y salidas están caracterizadas por un trazo causal. El trazo causal indica la dirección en que el esfuerzo es dirigido, en tal caso, la dirección del flujo serán en sentido contrario de este ultimo como se ve en la Figura 2.9.

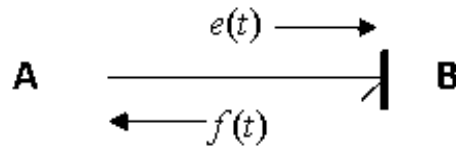


Figura 2.9 Causalidad para un Bond.

En la Figura 2.10 se puede observar los 4 distintos tipos de casos de causalidad para el esfuerzo y el flujo.

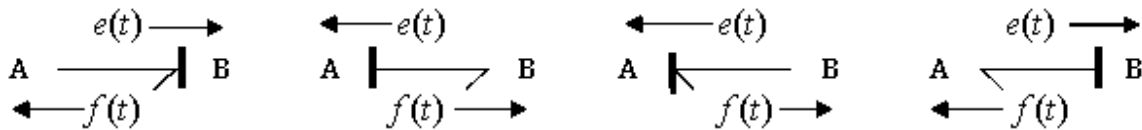


Figura 2.10 Tipos de causalidad.

En la figura 2.10 se observa que el flujo viaja en sentido contrario que la dirección del esfuerzo, cuando tiene lugar la transferencia de potencia que se da de un elemento a otro el recorrido de esta indicará que elementos demandan o entregan potencia. En un sistema existen distintos elementos de diferentes tipos, se debe considerar en donde el ubica el causal ya que no se tiene la misma ubicación siempre. Para el caso de los diferentes elementos que existen en Bond Graph, el trazo causal se muestra en la Tabla 2.3

Tabla 2.3 Condiciones para el trazo causal.

Causalidad necesaria	Mse	MSf
Causalidad restrictiva		
Causalidad integral		
Causalidad derivativa		
Causalidad arbitraria		

2.5. Obtención de ecuaciones diferenciales por asignación de causalidad en un multipuerto

1.- Asignar la causalidad requerida a todas las MSe y MSf , e inmediatamente aplicar causalidad utilizando las restricciones de unión **0,1**, y de TF y GY .

2.- Asignar causalidad integrativa a elementos C e I en base a las restricciones mencionadas en la Tabla 2.3.

3.- Asignar a los elementos R causalidad arbitraria, respetando las restricciones al encontrarse uniones **0** y **1** y respetando también las restricciones cuando se tienen TF y GY .

2.6. Causalidad derivativa en un Bond Graph

Se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes. Esto se presenta por ejemplo, cuando en un sistema eléctrico, se encuentran dos capacitores en paralelo como se muestra en la Figura 2.11.

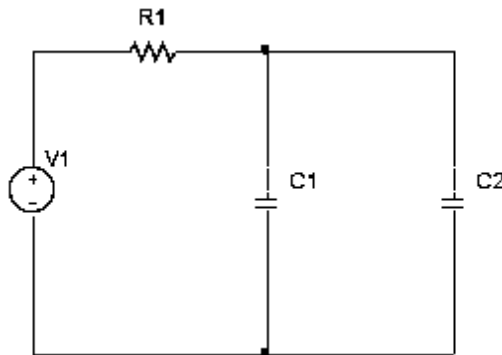


Figura 2.11 Circuito eléctrico en causalidad derivativa.

En el circuito se puede apreciar que el capacitor 1 y 2 se encuentran en conexión paralelo, típicamente los capacitores tienen causalidad integral sin embargo cuando se

presenta un caso como este, a uno de los capacitores se le asigna causalidad integrativa y a otro causalidad derivativa, como se ve a continuación en la Figura 2.12.

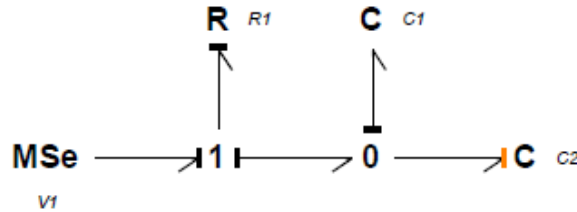


Figura 2.12 Elemento C2 en causalidad derivativa.

El número de elementos que almacenan energía en la causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes.

2.7 Procedimiento para el modelado de sistemas en Bond Graph

Existen diversos métodos para el modelado de sistemas y así mismo obtener sus ecuaciones matemáticas, sin embargo para el modelado de sistemas en Bond Graph es necesario seguir secuencias o procedimientos muy específicos, esta metodología se menciona a continuación:

- 1.- Dibujar una unión 0 para cada nodo donde coincidan las trayectorias paralelas.
- 2.- Colocar una unión 1 para cada uno de los elementos que se encuentren en serie y conectar a este mismo el bond o los bonds apropiados a dicho componente.
- 3.- Dibujar bonds entre las uniones adyacentes respetando la dirección del flujo de potencia.
- 4.- Remover la unión 0 que representa el punto de referencia y todos los bonds que se encuentren conectados a esta unión.
- 5.- Se reduce el sistema realizando algunas simplificaciones en las uniones, siguiendo las condiciones de la Figura 2.13.

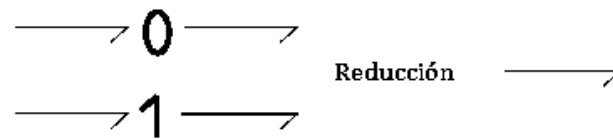


Figura 2.13 Reducción de Bonds en las uniones.

2.8 Estructuras de unión en sistemas multipuerto

Algunos sistemas de mayor complejidad como campos interconectados da como resultado una estructura dinámica, la manipulación, generación y reducción de diversas ecuaciones, se realiza sistemáticamente para una implementación exitosa.

2.8.1 Vectores clave o vectores significativos

En Bond Graph se clasifican todos los bonds, estos pueden ser internos o externos. Los bonds externos conectan elementos como **R**, **C**, **I**, **MSe** y **MSf** y los bonds internos los que conectan elementos como **0**, **1**, **GY** y **TF**. Los bonds externos se clasifican de acuerdo a su uso y manifestación de energía, la figura 2.14 muestra el diagrama a bloques de una estructura unión de un Bond Graph.

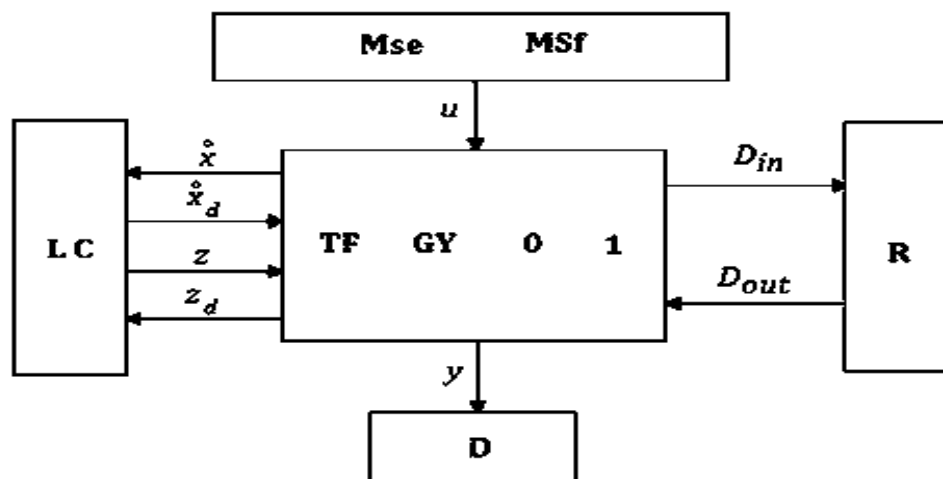


Figura 2.14 Diagrama de bloques de la estructura de unión de un Bond Graph.

Las variables Mse , Msf , L , C , y R denominados bonds externos denotan los campos fuente, de almacenamiento y de disipación respectivamente, D el detector, 0 , 1 , TF y GY llamados bonds internos representan la estructura de unión con transformadores TF , giradores GY , uniones 0 y 1 .

Los vectores que representan al sistema son llamados vectores clave, los cuales están representados en la Figura 2.14 donde $u(t)$ es una matriz que tiene una dimensión de p y esta contiene las variables de potencia o esfuerzos y flujos impuestos por los elementos de las fuentes en la estructura de unión. Los estados del sistema $x(t)$ tienen una dimensión de n y $x_d(t)$ tiene una dimensión de m están compuestos o representados por variables de energía momento generalizado $p(t)$ en elementos I y desplazamiento generalizado $q(t)$ en C en causalidad integral y derivativa respectivamente, $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$ son matrices y tienen una dimensión r cada una, estas variables muestran los intercambios energéticos de flujos que se presentan entre la estructura de unión y el campo de disipación, también son variables que surgen de una mezcla de flujos y esfuerzo.

2.8.2 Ecuaciones de estado y relación de campo

Las relaciones de campo no lineales de la figura 2.14 son de almacenamiento y de disipación representadas por:

$$Z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.10)$$

$$Z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.11)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.12)$$

Donde:

Φ_F .- Función que relaciona a cada Z_i con cada X_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{Fd} .- Función que relaciona a cada Z_{di} con cada X_{di} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L .- Función que relaciona a cada D_{out} con cada D_{in} para $i = 1, \dots, r$.

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual se le denomina relación constitutiva. Si las relaciones constitutivas son lineales se tiene:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{Z}_d(t) = \mathbf{F}_d\mathbf{x}_d(t) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{D}_{out}(t) = \mathbf{L}\mathbf{D}_{in}(t) \quad (2.15)$$

Donde:

$\mathbf{L}$.- Es una matriz real de dimensión $r \times r$.

$\mathbf{F}$.- Es una matriz real de dimensión $n \times n$.

$\mathbf{F}_d$.- Es una matriz real de dimensión $m \times m$.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{D}_{in}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{D}_{out}(t) \\ \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Z}_d(t) = -\mathbf{S}_{14}^T \mathbf{Z}(t) \quad (2.17)$$

Los elementos de $\mathbf{S}$ toman valores dentro del conjunto $(0, \pm 1, \pm n \pm r)$, donde $\mathbf{n}$ y $\mathbf{r}$ son módulos del transformador y girador respectivamente.

Donde la matriz de estructura unión $\mathbf{S}$, está formada por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.8.3 Propiedades de la matriz S

A continuación se listan las propiedades de la matriz estructura de unión S de un sistema modelado en Bond Graph:

- P1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas y anti simetricas.
- P2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades P1 y P2 están basadas en el principio de conservación de la energía.

Un sistema continuo invariante en el tiempo con múltiples entradas y múltiples salidas (LTI MIMO) está representado en variables de estado [4], por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.19)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.20)$$

Relacionando todas las ecuaciones y matrices se tiene:

$$A_p = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.21)$$

$$B_p = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.22)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.23)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.24)$$

Donde:

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.25)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (2.26)$$

Las expresiones anteriormente presentadas son indispensables para la representación de sistemas en variables de estado utilizando Bond Graph y son necesarias también para su representación matemática, además para el modelo obtenido en Bond Graph el sistema tiene relaciones causales que sirven para determinar las propiedades estructurales como observabilidad y controlabilidad.

Capítulo 3

Bond Graph en causalidad derivativa

3.1 Introducción

La causalidad es un concepto fundamental en el modelado, ya que muestra la dependencia entre elementos. Esta queda determinada por las fuentes y por las uniones entre elementos que conforman el sistema de estudio.

La causalidad derivativa [5] se presenta en sistemas donde los elementos de almacenamiento no son dinámicamente independientes. El problema matemático debido a la causalidad derivativa es que involucra la solución de un conjunto implícito de ecuaciones diferenciales. Los bucles algebraicos para un BGD, se originan en sistemas donde el uso de ecuaciones algebraicas adicionales es necesario para obtener un explícito conjunto de ecuaciones diferenciales independientes.

En un Bond Graph en causalidad derivativa no existen acoplamientos entre capacitores e inductores. Se tiene entonces que el número de elementos almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes.

3.2 Bond Graph en causalidad derivativa

Una de las propiedades fundamentales en el modelado de sistemas físicos es la causalidad. La causalidad en un bond permite establecer de manera precisa la dirección del flujo y esfuerzo en cada bond.

Así, la causalidad permite determinar las ecuaciones tanto algebraicas como dinámicas de cada elemento del sistema. Las ecuaciones algebraicas son definidas por las uniones, elementos disipativos, transformadores, giradores y fuentes. Las ecuaciones dinámicas son descritas por los elementos de almacenamiento.

Por lo tanto, un sistema físico que se modela en Bond Graph con una asignación de causalidad integral predefinida en los elementos de almacenamiento, permite definir las variables linealmente independientes y para este caso de estudio se tienen elementos de almacenamiento en causalidad derivativa, estas variables serán estados linealmente dependientes.

Cuando a un sistema en Bond Graph se le asigna en forma predefinida causalidad derivativa, al momento de realizar el modelado se pueden determinar las propiedades estructurales de observabilidad, controlabilidad, y estado estacionario.

Entonces como se dijo anteriormente, la asignación de la causalidad para los elementos de almacenamiento es una de las características importantes de la metodología de Bond Graph. Ya que al conocer la observabilidad, y controlabilidad, propiedades de un sistema de Bond Graph, sus aproximaciones pueden ser obtenidas.

La representación de un sistema con asignación en causalidad derivativa se muestra en la Figura 3.1.

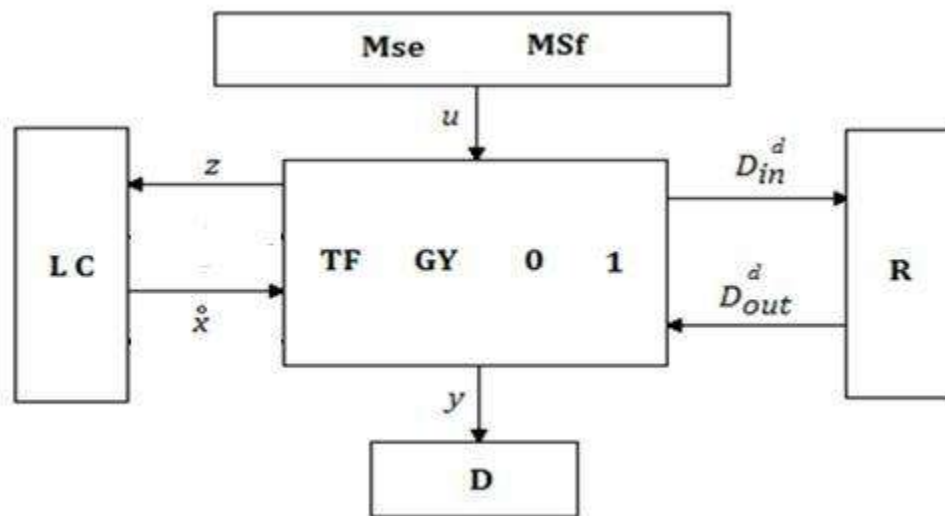


Figura 3.1 Diagrama de bloques de la estructura de unión de un Bond Graph en causalidad derivativa.

En la figura 3.1 las variables (Mse , Msf), (L, C) y (R) denotan los campos de fuente, de almacenamiento y de disipación respectivamente, (D) el detector y ($0, 1, TF$ y GY) la estructura de unión con transformadores, TF , giradores, GY , uniones-0 y uniones-1. La entrada y salida de los vectores clave hacia los elementos de almacenamiento L y C ha cambiado su orden para el análisis con causalidad derivativa ahora el vector clave Z se coloca en posición de entrada mientras que el vector clave $\dot{x}$ queda en la posición de salida.

Considerando el esquema de la Figura 3.1 la estructura unión de un Bond Graph con causalidad derivativa (BGD) está dado por:

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ D_{in}^d(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{out}^d(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$D_{out}^d = L^d D_{in}^d \quad (3.2)$$

Se puede observar en la estructura de la matriz $J_{[6]}$, la ubicación de cada una de las expresiones necesarias para este análisis, así mismo la posición de los vectores clave $z(t)$ y $\dot{x}(t)$ que cambian de lugar en relación a la matriz S , para el caso de un BGI y la expresión de salida; también se puede observar el vector $y(t)$ el cual representa la salida para cualquiera de los elementos que conforman el sistema de análisis en Bond Graph.

Los elementos de la matriz J para un BGD, tienen las mismas propiedades que los elementos de la matriz S para el caso de un BGI. Los elementos que se encuentran contenidos en la expresión (3.2) tienen causalidad derivativa, por lo tanto D_{in}^d y D_{out}^d se definen del mismo modo que D_{in} y D_{out} para un análisis de un BGI, pero ambas expresiones son dependientes de la causalidad que le sea asignada a los elementos que almacenan energía, dichas uniones deben de tener una adecuada asignación de causalidad en base al análisis que se deseé realizar.

Para el análisis de un BGD se tienen las siguientes expresiones:

$$z = A^* \dot{x} + B^* u \quad (3.3)$$

$$y^d = C^* \dot{x} + D^* u \quad (3.4)$$

Donde:

$$A^* = J_{11} + J_{12} M^d J_{21} \quad (3.5)$$

$$B^* = J_{13} + J_{12} M^d J_{23} \quad (3.6)$$

$$C^* = J_{31} + J_{32} M^d J_{21} \quad (3.7)$$

$$D^* = J_{33} + J_{32} M^d J_{23} \quad (3.8)$$

Siendo:

$$M^d = L^d (I - J_{22} L^d)^{-1} \quad (3.9)$$

Es posible llegar a estas expresiones, si se realiza un análisis, al multiplicar la matriz J , tomando como punto de inicio el orden del lugar que le corresponde al vector clave de salida $y(t)$ por los sucesivos vectores clave $\dot{x}(t)$, $D_{out}^d(t)$, $u(t)$ de la siguiente manera:

$$y = J_{31} \dot{x} + J_{32} D_{out}^d + J_{33} u \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2) en la expresión se tiene que:

$$y = J_{31} \dot{x} + J_{32} L^d D_{in}^d + J_{33} u \quad (3.11)$$

Al sustituir la ecuación D_{in}^d en la expresión anterior se tiene lo siguiente:

Siendo:

$$D_{in}^d = (I - J_{22} L^d)^{-1} (J_{21} \dot{x} + J_{23} u) \quad (3.12)$$

Sustituyendo el valor de D_{in}^d en la expresión (3.11) se llega al resultado siguiente:

$$y = J_{31} \dot{x} + J_{32} L^d (I - J_{22} L^d)^{-1} (J_{21} \dot{x} + J_{23} u) + J_{33} u \quad (3.13)$$

Reacomodando términos la expresión resultante es:

$$y = J_{31} \dot{x} + J_{32} L^d (I - J_{22} L^d)^{-1} J_{21} \dot{x} + J_{32} L^d (I - J_{22} L^d)^{-1} J_{23} u + J_{33} u \quad (3.14)$$

Posteriormente se factorizan términos y la expresión queda reducida a lo siguiente:

$$y = (J_{31} + J_{32} M^d J_{21}) \dot{x} + (J_{33} + J_{32} M^d J_{23}) u \quad (3.15)$$

Para lo siguiente se tiene que tomar en cuenta la expresión (3.3) y mediante el despeje de la variable $\dot{x}$ se llega al resultado que se muestra a continuación:

$$\dot{x} = (A^*)^{-1} z - (A^*)^{-1} B^* u \quad (3.16)$$

Posteriormente, el valor de esta variable de estado, da como resultado la siguiente expresión mediante la sustitución de valores de la ecuación (3.4) se tiene que:

Tomando en cuenta que:

$$Z^d = F X \quad (3.17)$$

Al realizar la sustitución de valores se tiene:

$$y = C^* (A^*)^{-1} F x - C^* (A^*)^{-1} B^* u + D^* u \quad (3.18)$$

Ordenando términos:

$$y = C^* (A^*)^{-1} F x + \{D^* - C^* (A^*)^{-1} B^*\} u \quad (3.19)$$

Sustituyendo el valor de A^* en la siguiente expresión el resultado obtenido es:

$$y = C^*(FA^{-1})^{-1}Fx + \{D^* - C^*(FA^{-1})^{-1} (-FA^{-1}B)\} u \quad (3.20)$$

Eliminando términos semejantes, a fin de reducir la expresión:

$$y = \cancel{C^*A F^{-1}F}x + \{D^* + \cancel{C^*A F^{-1}F}A^{-1}B\} u \quad (3.21)$$

El resultado que se tiene es:

$$y = C^*Ax + \{D^* + \cancel{AA^{-1}}B\} u \quad (3.22)$$

El cual también es posible reducir y finalmente se llega al resultado que se muestra a continuación:

$$y = C^*Ax + \{D^* + C^*B\} u \quad (3.23)$$

3.3 Relaciones de un BGI y de un BGD

Existen dos estructuras de unión generales en Bond Graph, una unión con causalidad integral (BGI) y una derivativa (BGD), como ya se mencionó anteriormente; con el fin de determinar la equivalencia de sistemas, las relaciones entre un BGI y un BGD se establecerán a continuación. Dicha equivalencia entre ambos tipos de sistemas permitirá considerar una matriz singular de estado, de un sistema representado por un BGI.

La técnica de Bond Graph utiliza una aproximación grafica de acuerdo al sistema que se modela, la característica esencial de la aproximación por medio de Bond Graph reside en la representación de interacciones de energía entre los sistemas y/o los componentes del sistema. Los principales puntos clave de la metodología de Bond Graph son los siguientes: un modelo que contiene la estructura de unión energética, la arquitectura del sistema, los distintos dominios energéticos que han sido mencionados y el acoplamiento de los subsistemas que está permitido; las relaciones de causa y efecto de cada elemento se obtienen gráficamente, y las variables de estado tienen un significado físico.

Para este caso de estudio se propone un procedimiento general para analizar un sistema usando la metodología de Bond Graph. Es un procedimiento general debido a que Bond Graph puede contener elementos de almacenamiento en cualquier asignación de causalidad.

Por lo tanto, la estructura de unión de un Bond Graph en causalidad integral (BGI) puede almacenar elementos en causalidad integral y/o derivativa con la cual se puede producir una matriz de estado singular.

Una estructura unión general de un Bond Graph en causalidad derivativa es propuesta para este caso de estudio y de esta manera establecer las relaciones entre un BGI y un BGD, su equivalencia de sistemas dependiendo del tipo de unión de estructura que se pueda obtener de un BGI o de un BGD.

Un sistema equivalente se define como un sistema que cuenta con una matriz de estado no singular donde las variables de estado son linealmente independientes. Debido a la dependencia de la causalidad ya sea que se trate de un BGI o de un BGD se puede conocer la independencia o dependencia de las variables de estado. También dos sistemas son llamados equivalentes si el conjunto de sus soluciones para las variables externas es el mismo en ambos sistemas.

A continuación se muestran las expresiones matemáticas que relacionan un BGI y un BGD.

$$A^* = F A^{-1} \quad (3.24)$$

$$B^* = -F A^{-1} B \quad (3.25)$$

$$C^* = C A^{-1} \quad (3.26)$$

$$D^* = D - C A^{-1} B \quad (3.27)$$

Para un BGI se tiene que existe cierta relación entre el valor de C correspondiente a la variable de estado de salida $y(t)$ de la ecuación (2.19) y el valor de C^* definido para un BGD, esta relación que existe se muestra enseguida:

Siendo:

$$C = C^* A \quad (3.28)$$

Al despejar C^* se tiene que:

$$C^* = C A^{-1} \quad (3.29)$$

Entonces al llegar a estos resultados es claro observar la relación que existe entre las expresiones (3.23) y (2.19).

El mismo caso se presenta con las con las expresiones de las ecuaciones de estado D y D^* , cuya relación se establece enseguida.

Se tiene que:

$$D = D^* + C^* B \quad (3.30)$$

Pero D^* a su vez, equivale a:

$$D^* = D - C^* B \quad (3.31)$$

Para finalmente llegar a la expresión que se muestra enseguida, se puede observar que el valor de C^* es sustituido en esta nueva ecuación.

$$D^* = D - C A^{-1} B \quad (3.32)$$

Es posible también encontrar una relación para la ecuación de estado A^* la cual se desarrolla enseguida:

$$A^* = F A^{-1} \quad (3.33)$$

A su vez se tiene que existe la siguiente relación:

$$A^{-1} = F^{-1} A^* \quad (3.34)$$

Entonces se puede establecer que existe una cierta relación que entre un BGI y un BGD, para el valor de A ; para ello se realiza el siguiente procedimiento:

$$A = (F^{-1} A^*)^{-1} \quad (3.35)$$

Finalmente se tiene que:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{F} \quad (3.36)$$

Ahora para el siguiente vector clave $\mathbf{B}$ la relación que existe se describe enseguida:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B}^* \quad (3.37)$$

Al sustituir el valor de $\mathbf{A}$ en la siguiente expresión, se eliminan los términos siguientes:

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{A}^*)^{-1} \cancel{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B}^* \quad (3.38)$$

El resultado final es:

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{B}^* \quad (3.39)$$

Como se puede observar entonces conociendo las expresiones $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ de un BGI, es posible llegar a un sistema equivalente en BGD, mediante las relaciones mostradas anteriormente y viceversa si se tienen $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{C}^*$ y $\mathbf{D}^*$ para un BGD es posible determinar un sistema equivalente para llegar a un BGI mediante $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.

La siguiente ilustración describe las variables utilizadas para el análisis en BGI y en BGD al momento de realizar el modelado para un sistema físico dado:

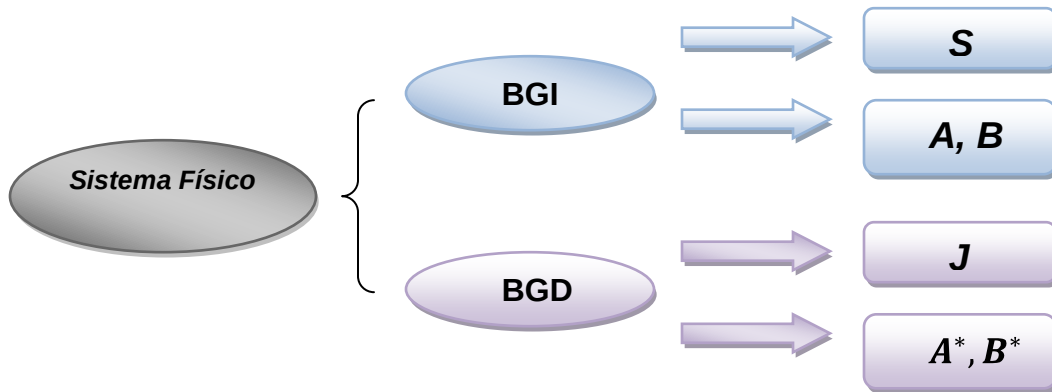


Figura 3.2 Expresiones que se utilizan para el caso de estudio en BGI y BGD.

Capítulo 4

Casos de estudio de sistemas equivalentes

4.1 Introducción

Para demostrar lo anteriormente propuesto acerca de la relación que existe entre el BGI y el BGD [7], y que además las expresiones que se obtuvieron son equivalentes, se tiene el siguiente análisis de algunos circuitos eléctricos que en este capítulo se proponen y además se estudiara el caso del estado estable, ya que su desarrollo es una importante característica de un sistema ante una respuesta transitoria aplicada y que frecuentemente presenta oscilaciones antes de alcanzar un estado de equilibrio, cuando su período dinámico ha concluido y se logra estabilizar

4.2 El estado estable en Bond Graph

El comportamiento de estado estacionario es una característica importante de un sistema cuando la respuesta transitoria dinámica ha terminado, actualmente algunos equipos, tales como máquinas eléctricas en sistemas eléctricos de potencia requieren conocer los valores de estado estacionario para calibración y ajuste de protectores, etc. En la figura 4.1 se ilustran los periodos transitorio y de estado estable de una señal.

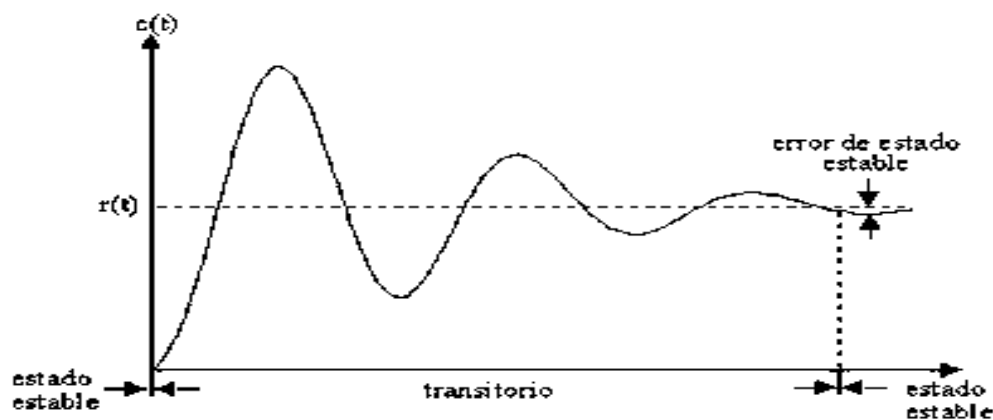


Figura 4.1 Representación gráfica del estado estable.

La respuesta de estado estacionario es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado de un sistema físico; es la representación en espacio de estado cuando el período dinámico ha terminado [8] y ya no existen variaciones en la señal de entrada. Así que mediante el BGI haciendo $\dot{x} = 0$, y teniendo en cuenta que $E = I$ y $S_{14} = 0$ se tiene que:

$$X_{ss} = -A^{-1} B U_{ss} \quad (4.1)$$

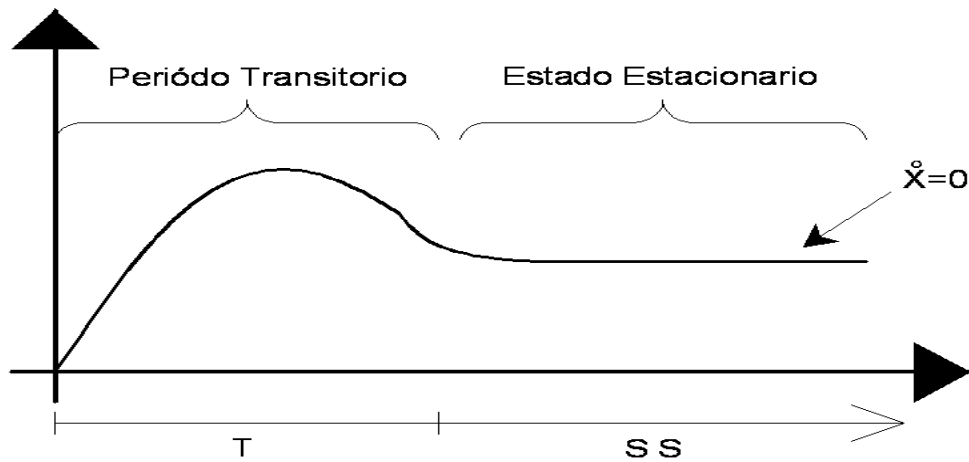


Figura 4.2 Representación gráfica del estado estacionario para una señal de entrada.

La ecuación (4.1) es válida siempre y cuando los valores de entrada no cambien, ya que si la entrada esta variando la salida también lo hará, entonces matemáticamente hablando cuando ya no existe una variación de la señal de entrada, la derivada de esa señal es igual a cero ya que la derivada de una constante es cero, al llegar a este valor se obtiene el estado estacionario, como se puede apreciar en la figura 4.2.

Se llega a la ecuación anterior haciendo el siguiente análisis y teniendo en cuenta que la expresión (2.18) es igual a:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Entonces como se mencionó, haciendo $\dot{x} = 0$, se tiene:

$$AX_{ss} + BU_{ss} = 0 \quad (4.2)$$

De esta manera despejando X_{ss} , se obtiene la expresión (4.1). Así de esta manera, es posible calcular el estado estable [9], pero es necesario obtener A^{-1} y en ocasiones no es sencillo obtenerla para sistemas de órdenes mayores.

Con la siguiente expresión usando el BGD se resuelve el problema de encontrar A^{-1} y de esta manera obtener el estado estacionario directamente.

$$X_{ss} = (F)^{-1} B^* U_{ss} \quad (4.3)$$

Para la expresión (4.3), la variable $(F)^{-1}$ es una matriz diagonal que consiste en elementos que contienen elementos es causalidad integral y derivativa como se ve en la siguiente ilustración:

$$(F)^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{F}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_d^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

En la expresión (4.4) la $\tilde{F}^{-1}$ los elementos que en el BGI tienen causalidad integral y en el BGD causalidad derivativa, en tanto que para la F_d^{-1} , a los elementos en causalidad derivativa en el BGD.

Se llega a la expresión (4.3) mediante el B^* del BGD, entonces realizando el proceso deductivo se define lo siguiente.

Utilizando la expresión (3.25) y realizando la sustitución de expresiones se obtiene el resultado que se muestra a continuación:

Siendo:

$$B^* = -FA^{-1}B$$

Entonces:

$$-A^{-1}B = F^{-1}B^* \quad (4.5)$$

Y así es como finalmente, se llega a la expresión (4.3) que define el estado estacionario. Para obtener la Z_{ss} se tiene el siguiente análisis, en base a las expresiones que se describen a continuación:

Al tener en cuenta que la expresión (2.13) es:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F} \mathbf{X}$$

Entonces:

$$\mathbf{Z}_{ss} = \mathbf{F} \mathbf{X}_{ss} \quad (4.6)$$

En la expresión (4.6), $\mathbf{F}$ es una matriz constante y al realizar las sustituciones y eliminar términos, se obtiene:

$$\mathbf{Z}_{ss} = \cancel{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{U}_{ss} \quad (4.7)$$

y finalmente se puede deducir $\mathbf{Z}_{ss}$ como resultado de la eliminación de términos:

$$\mathbf{Z}_{ss} = \mathbf{B}^* \mathbf{U}_{ss} \quad (4.8)$$

Ahora mediante el BGD sabiendo que $\mathbf{E} \neq \mathbf{I}$ y $\mathbf{S}_{14} \neq \mathbf{0}$ y tomando en cuenta la expresión (3.3) que se mencionaron anteriormente, se tiene que:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}^* \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^* \mathbf{u}$$

Se sabe que para el caso de estudio en el BGI existen algunos elementos en causalidad integral y algunos elementos en causalidad derivativa, para el caso del BGD todos los elementos están en causalidad derivativa, esto se ilustra en las figuras 4.3 y 4.4:

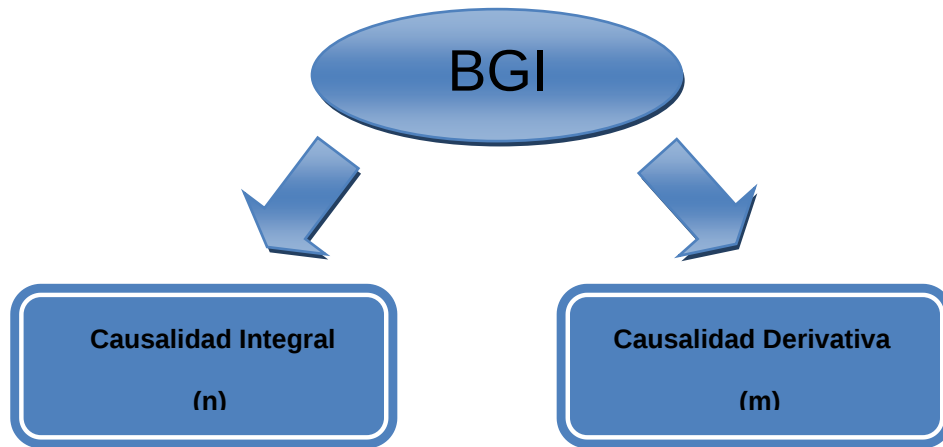


Figura 4.3 Tipos de causalidades que se tienen en un BGI.

Para el BGD se tiene lo siguiente:

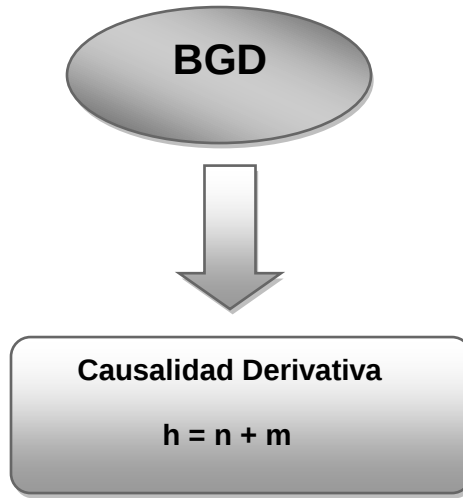


Figura 4.4 Elementos que involucran la causalidad derivativa en Bond Graph.

Entonces como se ilustra en la figura 4.4 la variable “h” involucra tanto elementos en causalidad integral (n) y derivativa (m) entonces $n + m$ es el número de elementos en causalidad derivativa en el BGD (h).

Sabiendo esto la expresión para el caso del BGI:

$$E \dot{x} = Ax + Bu \quad (4.9)$$

Entonces si se tiene esta expresión se puede decir que:

$$\tilde{X}_{ss} = -A^{-1} B U_{ss} \quad (4.10)$$

Con esta expresión, no se obtiene todo el vector de estado, para el resto del vector se sabe que existe una relación entre el BGI y el BGD, ya que la matriz S_{14} implica que hay elementos en causalidad derivativa en el BGI entonces, la relación entre elementos en causalidad integral y derivativa se da por la expresión (2.13) como se muestra enseguida:

$$Z = F X$$

$$Z_d = F_d X_d$$

Al realizar la sustitución de Z_d y Z se llega al resultado:

$$F_d X_d = -S_{14}^T Z \quad (4.11)$$

Con estas expresiones, se tiene ya la relación que existe entre el BGI y el BGD:

$$F_d X_d = -S_{14}^T F X \quad (4.12)$$

Despejando a X_d :

$$X_d = -F_d^{-1} S_{14}^T F X \quad (4.13)$$

Para finalmente obtener el $(X_d)_{ss}$, que forma la parte restante del vector de estado:

$$(X_d)_{ss} = -F_d^{-1} S_{14}^T F \tilde{X}_{ss} \quad (4.14)$$

Entonces una vez que se obtienen las ecuaciones (4.10) y (4.14) se tiene ya el vector de estado completo, el orden de las expresiones que es necesario seguir para formar el vector de estado se muestra a continuación:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{ss} \\ (X_d)_{ss} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

El orden de los elementos de almacenamiento es, primero los que se encuentran en causalidad integral en el BGI y en causalidad derivativa en el BGD, estos valores se encuentran contenidos en $\tilde{X}_{ss}$, después al ordenar los que están en causalidad derivativa en el BGI y en el BGD, lo que se obtiene del BGD es el estado estacionario de todas las variables de estado, en tanto que $(X_d)_{ss}$ se refiere a la causalidad derivativa de los elementos de almacenamiento, en él están contenidos los elementos con causalidad derivativa en el BGI y en el BGD.

Como parte final se tiene la ecuación de salida la cual se definió como la expresión (2.19):

$$y = Cx + Du$$

Por lo tanto, la expresión de salida del estado estacionario mediante el BGI es:

$$Y_{ss} = C X_{ss} + D U_{ss} \quad (4.16)$$

Sustituyendo datos de la expresión 4.1 para X_{ss} se tiene que:

$$Y_{ss} = C (-A^{-1}B U_{ss}) + D U_{ss} \quad (4.17)$$

Recordando la definición (3.27) de D^* :

$$D^* = D - C A^{-1} B \quad (4.18)$$

Se tiene la expresión de salida mediante el BGD para el estado estacionario:

$$Y_{ss} = D^* U_{ss} \quad (4.19)$$

Sustituyendo datos se obtiene lo siguiente:

$$Y_{ss} = (D - C A^{-1} B) U_{ss} \quad (4.20)$$

Con la obtención de las variables X_{ss} , y Y_{ss} mediante el BGI que se dan cuando no se tienen elementos en causalidad derivativa y cumpliendo las condiciones $E = I$ y $S_{14} = 0$, y las variables $\tilde{X}_{ss}$, $(X_d)_{ss}$ y Y_{ss} que existen cuando se tienen elementos en causalidad derivativa bajo las condiciones de $E \neq I$ y $S_{14} \neq 0$, se da por concluido el estudio para obtener el estado estable de una señal para un sistema dado, en los casos de estudio siguientes se podrán obtener estas expresiones, ya sea mediante el BGI o BGD.

4.3 Un caso básico de estudio

A continuación en esta sección, se presenta el análisis en Bond Graph de un caso de estudio básico, cuyo circuito está conformado por dos elementos almacenadores de energía, un inductor y un capacitor y dos resistencias donde se obtendrá primeramente el BGI y posteriormente el BGD además del estado estable del sistema que se propone de la figura 4.5:

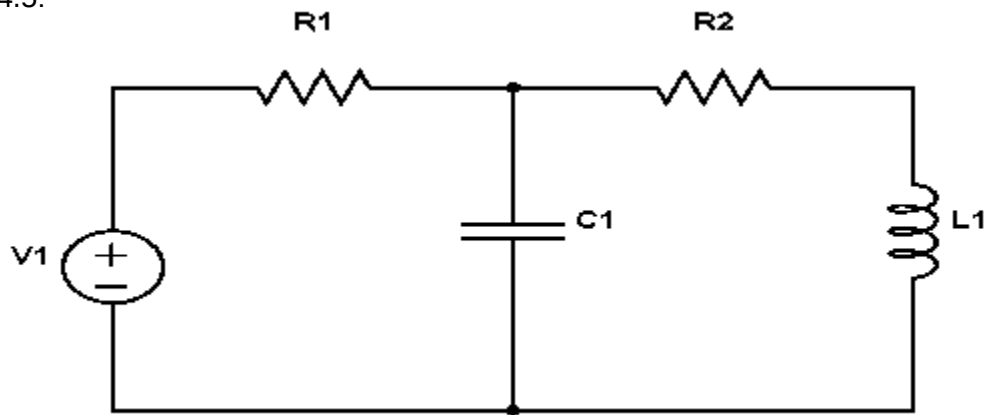


Figura 4.5 Ejemplo de un sistema eléctrico simple.

Partiendo del circuito eléctrico propuesto ahora se puede obtener el Bond Graph de dicho sistema, el cual se muestra en la figura 4.6.

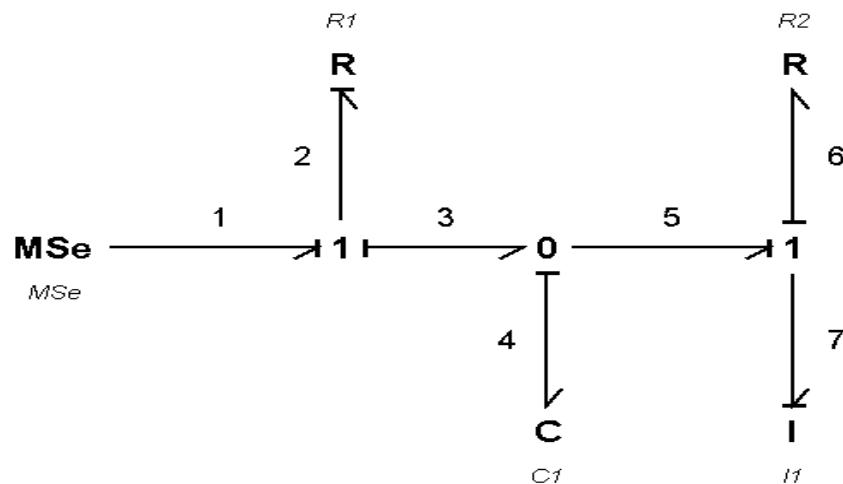


Figura 4.6 Bond Graph en causalidad integral del sistema eléctrico.

Para comenzar a utilizar la técnica de Bond Graph, se deben obtener primeramente los vectores clave, es posible apoyarse de la ilustración 4.7:

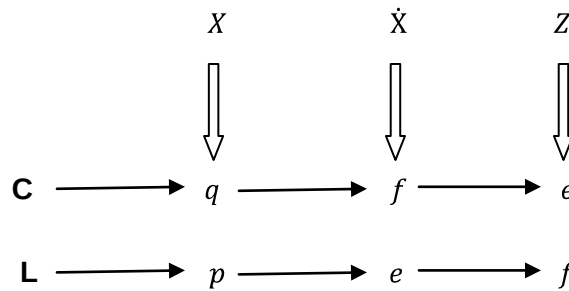


Figura 4.7 Asignación de variables para formar los vectores clave.

Como se puede observar en la figura 4.7 los primeros vectores clave que se obtienen son X , $\dot{X}$ y Z . Posteriormente del lado izquierdo de la ilustración se tienen los elementos que almacenan energía, capacitores (**C**) e inductores (**L**), las variables que le siguen a la derecha en cada fecha son las que se utilizan para cada vector clave que se desee generar.

El vector X lo conforman elementos que almacenan energía, **C** para los elementos capacitivos y **L** para los elementos inductivos. Entonces como ya se mencionó en la tabla 2.1 la variable p hace referencia a un momento y eléctricamente se relaciona a una variable de acoplamiento inductivo en tanto que para la variable q hace referencia a un desplazamiento, y eléctricamente se relaciona con una carga, entonces cada vez que se tiene un capacitor en el circuito eléctrico, se utiliza la variable q junto con su respectivo subíndice numérico del Bond, al que se hace referencia y lo mismo ocurre cada vez que se tiene un inductor, para el vector X se utiliza la variable p y el subíndice numérico del Bond, esto se realiza sucesivamente para el resto de los vectores clave.

En el vector $\dot{X}$ la variable e se refiere a un esfuerzo y eléctricamente se puede relacionar al voltaje, para la variable f se hace referencia a un flujo y eléctricamente se relaciona a una corriente.

El vector Z está conformado por los elementos del vector $\dot{X}$ (e y f) y representan el tipo de energía que proporcionan a los elementos C y L .

Para este caso los vectores clave generados son:

$$X = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix} ; \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \end{bmatrix} ; \quad Z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Los siguientes vectores clave son U , D_{in} y D_{out} . El vector clave U está compuesto por los elementos que proporcionan energía al sistema y en él se colocan todas las fuentes de energía, tanto fuentes de esfuerzo (e) como fuentes de flujo (f), de igual manera también un subíndice numérico indicando el Bond al cual están conectadas.

El vector clave D_{in} lo conforman los elementos que dispersan energía, los cuales son los elementos resistivos R . Este vector indicará que tipo de energía de entrada tienen los elementos R después de determinar la causalidad de todo el sistema, es decir si el trazo causal del Bond va dirigido hacia un elemento R , entonces este recibe la entrada de un esfuerzo (e), caso contrario si el trazo causal del Bond se sitúa en el lado opuesto al elemento R entonces este recibirá la entrada de un flujo (f); es necesario también para determinar este vector clave, la colocación del subíndice numérico el cual indicara el número del Bond donde reciben energía los elementos R .

El vector clave D_{out} , está formado también por elementos resistivos R , este vector indicará el tipo de energía de salida que tienen dichos elementos R , una vez que se tiene la causalidad de todo el sistema. Entonces si a través del trazo causal, un elemento R está recibiendo energía en forma de esfuerzo (e), la energía de salida será energía en forma de flujo (f) y viceversa; conservando también el subíndice numérico de los Bonds de los cuales la energía sale.

Los vectores clave siguientes son:

$$U = [e_1] ; \quad D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} ; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Una vez que ya tenemos todos los vectores clave podemos formar ahora las relaciones constitutivas $\mathbf{D}_{out} = \mathbf{L} \mathbf{D}_{in}$ a fin de obtener el valor de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{Z} = \mathbf{F} \mathbf{X}$ para calcular $\mathbf{F}$, primeramente se obtiene $\mathbf{D}_{out}$, cuya expresión (2.15) se mencionó en el capítulo 2, y se muestra enseguida:

$$\mathbf{D}_{out} = \mathbf{L} \mathbf{D}_{in}$$

Al sustituir los datos de esta expresión se tiene que:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Para este caso se fue posible calcular f_2 siguiendo la expresión:

$$f = \frac{e}{R} \quad (4.24)$$

Donde:

f = Energía en forma de flujo.

e = Energía en forma de esfuerzo.

R = Elemento resistivo del sistema.

Para el cálculo de e_6 se sigue la expresión que se muestra enseguida:

$$e = R f \quad (4.25)$$

Finalmente:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Posterior a obtener L se calcula ahora la relación constitutiva $Z = F X$, cuya expresión (2.13) se menciona en el capítulo 2:

$$Z = F X$$

Sustituyendo datos:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Para conocer el valor de e_4 se tiene que:

$$e = \frac{q}{C} \quad (4.28)$$

Donde:

e = Energía en forma de esfuerzo.

q = Energía en forma de carga.

C = Elemento capacitivo del sistema.

Con lo referente a f_7 la expresión que se muestra enseguida determinara su valor:

$$f = \frac{p}{L} \quad (4.29)$$

Donde:

f = Energía en forma de flujo.

p = Enlace de flujo.

L = Elemento inductivo del sistema.

Y finalmente se tiene que:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Concluido el cálculo de las relaciones constitutivas, se pasa ahora a la formación de la estructura unión del sistema cuya forma estructural es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} Z \\ D_{out} \\ U \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Sustituyendo datos:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} & \mathbf{s}_{12} & \mathbf{s}_{13} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$\mathbf{s}_{21} \quad \mathbf{s}_{22} \quad \mathbf{s}_{23}$

Se puede observar que la matriz S se encuentra subdivida en varias partes como lo son $\mathbf{s}_{11}$, $\mathbf{s}_{12}$, $\mathbf{s}_{13}$ etc. para el cálculo de cada una de estas expresiones es necesario recordar lo referente a los tipos de unión 0 y unión 1, que se menciona en el capítulo 2 y que se muestran nuevamente:

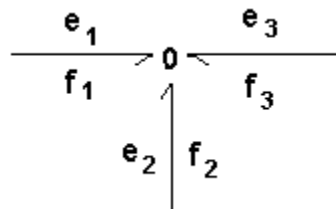


Figura 4.8 Unión de flujo o unión 0.

La unión de flujo o unión 0 se rige de acuerdo a las expresiones (2.6) y (2.7) que se mencionaron en el capítulo 2 y que se ven a continuación:

$$e_1 = e_2 = e_3$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

En esta unión, los esfuerzos son iguales, y la suma de todos los flujos siempre dan como resultado 0.

En tanto que para la unión de esfuerzo o unión 1 se tiene que:

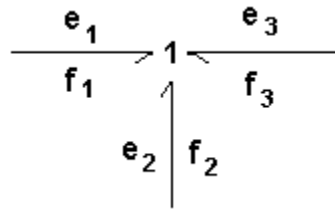


Figura 4.9 Unión de esfuerzo o unión 1.

Para la unión 0 se tiene lo opuesto a la unión anterior, los flujos son iguales, y la suma de todos los esfuerzos siempre dan como resultado 0 como se ve en las expresiones (2.8) y (2.9), respectivamente.

$$f_1 = f_2 = f_3$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

Entonces bajo estas condiciones es posible determinar cada una de las subdivisiones de la matriz S cuyo primer renglón se determina por el valor de f_4 del vector clave $\dot{X}$, tomando en cuenta todos los bonds que involucran a f_4 , y la expresión resultante se iguala a 0, se puede observar que el flujo f_3 está entrando en la unión 0 en tanto que los flujos f_4 y f_5 salen de esta unión, entonces la expresión para este caso es:

$$f_3 - f_4 - f_5 = 0 \tag{4.33}$$

Despejando f_4 de la expresión anterior entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$f_4 = f_3 - f_5 \quad (4.34)$$

Entonces se comienza por determinar los valores de f_3 y f_5 . Ya que f_3 está conectada a una unión 1 entonces todos los flujos involucrados en esa unión son iguales, por lo tanto:

$$f_3 = f_1 = f_2 \quad (4.35)$$

Entonces se tiene que:

$$f_3 = f_2 \quad (4.36)$$

Es necesario que el valor de f_3 este contenido dentro de alguno de los vectores clave $\mathbf{Z}$, $\mathbf{D}_{out}$ y $\mathbf{U}$, para este caso f_2 forma parte del vector clave $\mathbf{D}_{out}$, es por ello que es necesario igualar las expresiones, ahora para f_5 se tiene que está conectada a una unión 1, entonces:

$$f_5 = f_6 = f_7 \quad (4.37)$$

Al conocer el resultado de esta expresión podemos observar que f_7 forma parte del vector clave $\mathbf{Z}$ entonces la expresión resultante es:

$$f_5 = f_7 \quad (4.38)$$

Al sustituir datos para la expresión (4.28) se tiene que:

$$f_4 = f_2 - f_7 \quad (4.39)$$

Ya con esta expresión se forma el primer renglón de la matriz $\mathbf{S}$ cuya sustitución de datos se puede hacer transponiendo todo el vector que contiene a $\mathbf{Z}$, $\mathbf{D}_{out}$ y $\mathbf{U}$, y agregando 1's en las posiciones donde se encuentren contenidas f_2 y f_7 y sustituyendo con 0's el resto de la matriz como se ve en la expresión (4.32).

Para el renglón de la matriz $\mathbf{S}$ siguiente, se necesita obtener el valor de e_7 que pertenece al vector clave $\dot{\mathbf{X}}$, se toman en consideración todos los bonds que rodean a e_7 ,

se observa que el esfuerzo e_5 entra por la unión 1, en tanto que los esfuerzos e_6 y e_7 salen de dicha unión, al igualando la ecuación a 0 se tiene que:

$$e_5 - e_6 - e_7 = 0 \quad (4.40)$$

Despejando a e_7 se tiene:

$$e_7 = e_5 - e_6 \quad (4.41)$$

De esta expresión se tiene que e_6 pertenece al vector clave $\mathbf{D}_{out}$, por lo que resta encontrar el valor de e_5 , ya que esta se encuentra conectada a una unión 0, los esfuerzos conectados a esta unión son todos iguales y la expresión resultante es:

$$e_5 = e_3 = e_4 \quad (4.42)$$

De esta ecuación e_4 pertenece al vector clave $\mathbf{Z}$, por lo tanto:

$$e_5 = e_4 \quad (4.43)$$

Sustituyendo datos de la expresión (4.35) resulta:

$$e_7 = e_4 - e_6 \quad (4.44)$$

Como se mencionó anteriormente en estas posiciones corresponde ubicar los 1's para llenar el segundo renglón de la matriz $\mathbf{S}$, para el resto se colocan 0's como se puede apreciar en la expresión (4.32).

El mismo procedimiento se sigue para obtener el renglón siguiente de la matriz $\mathbf{S}$, primeramente se define la ecuación en donde se involucran los esfuerzos que rodean a e_2 , quedando definida la ecuación de la siguiente manera:

$$e_1 - e_2 - e_3 = 0 \quad (4.45)$$

Despejando al esfuerzo e_2 :

$$e_2 = e_1 - e_3 \quad (4.46)$$

Debido a que e_1 se encuentra contenida en el vector clave U y ya que se conoce el valor de e_3 , la expresión (4.42) quedo definida como:

$$e_3 = e_4$$

Al sustituir datos de la expresión (4.46) se tiene:

$$e_2 = e_1 - e_4 \quad (4.47)$$

Y para el último renglón de la matriz S , corresponde determinar f_6 , los bonds a su alrededor son f_5 y f_7 , todos están conectados a una unión 1, y los flujos son todos iguales en esta unión, f_7 forma parte del vector clave Z , y por lo tanto el valor de f_6 queda determinada por la expresión (4.37) la cual se determino con anterioridad:

$$f_6 = f_7$$

Con esta última expresión, se completa la matriz S cuyas condiciones citadas en el capítulo 2, deben de cumplirse y las cuales son:

- 1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas y anti simetricas.
- 2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Si se dan las condiciones anteriores, se procede ahora a determinar el valor de las ecuaciones de estado del sistema propuesto.

Ya que:

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Entonces:

$$M = L \quad (4.49)$$

Se procede ahora al cálculo de las variables de estado A y B . Obteniendo primeramente la ecuación de estado A mediante:

$$A = (S_{11} + S_{12} M S_{21}) F \quad (4.50)$$

Al sustituir datos de la matriz S en la expresión (4.50) se tiene:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Realizando las operaciones internas de multiplicación y reduciendo términos:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Al sumar las matrices internas se tiene el resultado:

$$A = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Realizando las operaciones finales, el resultado de la ecuación de estado A es:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 * C_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Al obtener la inversa de A resulta que:

$$(A)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{C_1 * R_1 * R_2}{R_1 + R_2} & \frac{C_1 * R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{L_1 * R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{L_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Ahora se realiza el cálculo para obtener la variable de estado B , se requiere de la expresión siguiente:

$$B = S_{13} + S_{12} M S_{23} \quad (4.56)$$

Realizando la sustitución de valores:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Al realizar operaciones y multiplicar para reducir términos se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Entonces, al sumar ambos elementos se obtiene el valor de la ecuación de estado B , como se ve enseguida:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Una vez que se obtienen los valores de las ecuaciones de estado A y B es posible determinar A^* mediante la expresión (3.24), entonces al sustituir datos se tiene:

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{C_1 * R_1 * R_2}{R_1 + R_2} & \frac{C_1 * R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{L_1 * R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{L_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Y finalmente:

$$A^* = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Ahora se obtiene B^* mediante la expresión (3.25) y sustituyendo datos se tiene como resultado:

$$B^* = - \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{C_1 * R_1 * R_2}{R_1 + R_2} & \frac{C_1 * R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{L_1 * R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{L_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Realizando la multiplicación de matrices el resultado final es:

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ 1 \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Ahora se realiza el análisis en BGD del mismo circuito para determinar, los vectores clave, relaciones constitutivas, la relación de estructura unión J y la obtención de A^* y B^* además de la determinación del estado estacionario X_{ss} y Z_{ss} .

La figura 4.10 muestra la causalidad para el análisis en BGD del sistema:

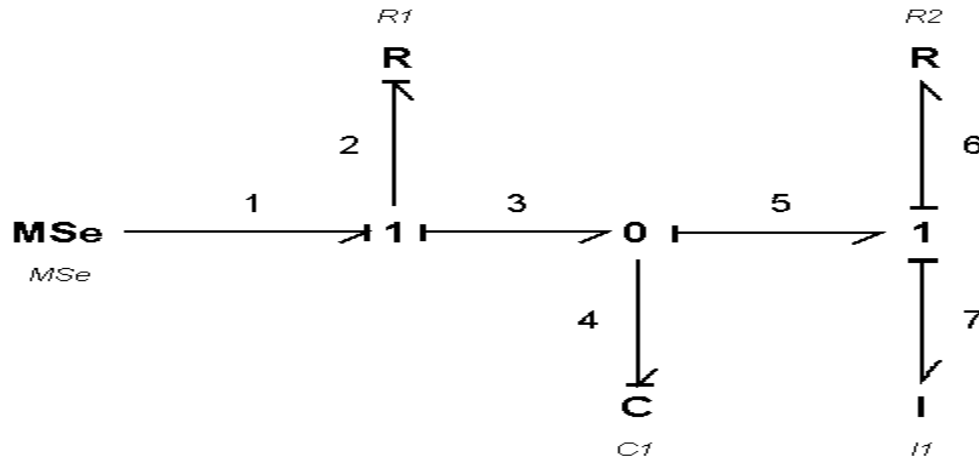


Figura 4.10 Bond Graph en causalidad derivativa del sistema.

Obteniendo los vectores clave del mismo modo que se realizó para el caso de estudio del BGI, los primeros vectores clave son los mismos de la expresión (4.21), sin embargo el resto de los vectores, quedan determinados por:

$$U = [e_1]; \quad D_{in}^d = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; \quad D_{out}^d = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Una vez determinadas las ecuaciones anteriores, se pueden obtener ahora las relaciones constitutivas y realizando la sustitución de las expresiones (3.2) y (3.17) se llega al resultado mostrado enseguida:

$$D_{out}^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Donde:

$$L^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

En tanto que:

$$Z^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Donde:

$$F^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Posteriormente, se forma la relación de estructura unión la cual se muestra en la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} Z \\ D_{in}^d \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out}^d \\ U \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Sustituyendo datos para de esta manera formar la matriz de unión J entonces se tiene que:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} & \mathbf{J}_{13} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & \mathbf{J}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Las expresiones para formar el primer renglón de la matriz J se muestran enseguida:

$$e_4 = e_6 + e_7 \quad (4.71)$$

Para el renglón siguiente:

$$f_7 = f_3 - f_4 \quad (4.72)$$

Para el tercer renglón se tiene:

$$e_2 = e_1 - e_6 - e_7 \quad (4.73)$$

Y finalmente para el cuarto renglón:

$$f_6 = f_2 - f_4 \quad (4.74)$$

Ya que en la matriz J el elemento $J_{22} \neq 0$ entonces se tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}^d = (\mathbf{I} - \mathbf{L}^d \mathbf{J}_{22})^{-1} \mathbf{L}^d \quad (4.75)$$

Al sustituir datos la expresión resultante queda:

$$\mathbf{M}^d = \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Multiplicando y reduciendo términos internos:

$$\mathbf{M}^d = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{R_1} \\ R_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Restando términos internos:

$$\mathbf{M}^d = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{R_1} \\ -R_2 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Invirtiendo la matriz:

$$\mathbf{M}^d = \left(\begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \\ \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Y al multiplicar ambos términos, se obtiene el valor de $\mathbf{M}^d$ el cual se muestra en la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} & -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Ahora una vez que se conoce el valor de $\mathbf{M}^d$ se puede calcular $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$, estos valores mediante el BGD coinciden con el análisis que se hizo para el BGI, primero se calcula $\mathbf{A}^*$ mediante la expresión (3.5) y sustituyendo los datos se tiene que:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} & -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Al realizar la multiplicación de términos y reducir la expresión se obtiene:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Obsérvese, que la A^* resultante (4.83) utilizando el BGD es exactamente la misma que la expresión (4.61) para el análisis en BGI del sistema propuesto:

$$A^* = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Ahora se obtiene B^* mediante la expresión (3.6) y sustituyendo datos se llega a:

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} & -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Realizando la multiplicación y reduciendo términos:

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ 1 \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Nótese, que resultado de B^* en BGD (4.86), al igual que el caso anterior, es la expresión (4.63) para el análisis mediante el BGI del sistema:

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ 1 \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Al coincidir A^* y B^* , tanto para el análisis en BGI como para el BGD se tiene la certeza que los resultados obtenidos son los adecuados y se tiene un sistema equivalente.

Mediante el BGD, es posible llegar a las ecuaciones de estado A y B que se calcularon para el análisis del sistema en BGI, para ello debemos obtener $(A^*)^{-1}$, cuya ecuación resultante es:

$$(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Ahora a través de la sustitución de datos de la expresión (3.36), el resultado que se tiene es:

$$A = \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Obsérvese, que al realizar la multiplicación para obtener el resultado final, la expresión (4.89) mediante el BGD, es la misma que la (4.54) del análisis en BGI del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 * R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Calculando la ecuación de estado B , mediante la expresión (3.39) y sustituyendo datos:

$$B = - \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ 1 \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Nótese, que el valor de B para el BGD en la expresión (4.91), resulta el mismo que la expresión (4.59) para el análisis en BGI del caso de estudio:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Comprobando con esto que es posible llegar a un sistema equivalente en BGI del sistema a través del BGD, mediante las relaciones mostradas anteriormente.

Ahora para encontrar el estado estable X_{ss} y Z_{ss} del sistema propuesto mediante el BGD, es necesario obtener $(F^d)^{-1}$, cuya expresión resultante se muestra enseguida:

$$(F^d)^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Ahora, realizando la sustitución de datos de la expresión (4.3) se obtiene lo siguiente:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ 1 \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.93)$$

Realizando las operaciones correspondientes, finalmente se obtiene:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{C_1 * e_1 * R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{e_1 * L_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Posteriormente, se calcula Z_{ss} a través de la expresión (4.8) y sustituyendo datos se tiene la siguiente expresión:

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ 1 \\ \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.95)$$

Y realizando operaciones se llega al resultado final:

$$Z_{ss} = \left[\begin{array}{c} \frac{R_2 * e_1}{R_1 + R_2} \\ e_1 \\ \frac{e_1}{R_1 + R_2} \end{array} \right] \quad (4.96)$$

Ahora a través del BGI se determina X_{ss} , mediante la expresión (4.1) y retomando los datos para el análisis que se realizó del sistema propuesto, tomando en cuenta que $S_{14} = 0$ entonces $E = I$ se hace la sustitución de datos, resultando la expresión que se muestra enseguida:

$$X_{ss} = - \left[\begin{array}{cc} -\frac{C_1 * R_1 * R_2}{R_1 + R_2} & \frac{C_1 * R_1}{R_1 + R_2} \\ -\frac{L_1 * R_1}{R_1 + R_2} & -\frac{L_1}{R_1 + R_2} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} 1 \\ R_1 \\ 0 \end{array} \right] * [e_1] \quad (4.97)$$

Obsérvese, que la expresión (4.98) para el caso de estudio mediante el BGI, es la misma que la expresión (4.94) para el análisis en BGD que se realizó con anterioridad:

$$X_{ss} = \left[\begin{array}{c} \frac{C_1 * e_1 * R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{e_1 * L_1}{R_1 + R_2} \end{array} \right] \quad (4.98)$$

De esta manera queda comprobado que se puede llegar a el mismo resultado del estado estable tanto para el BGI como para el BGD. Para dejar más claro el proceso y las condiciones que se tiene que dar para cada caso y de esta manera obtener un sistema equivalente, se tiene la siguiente figura 4.11:

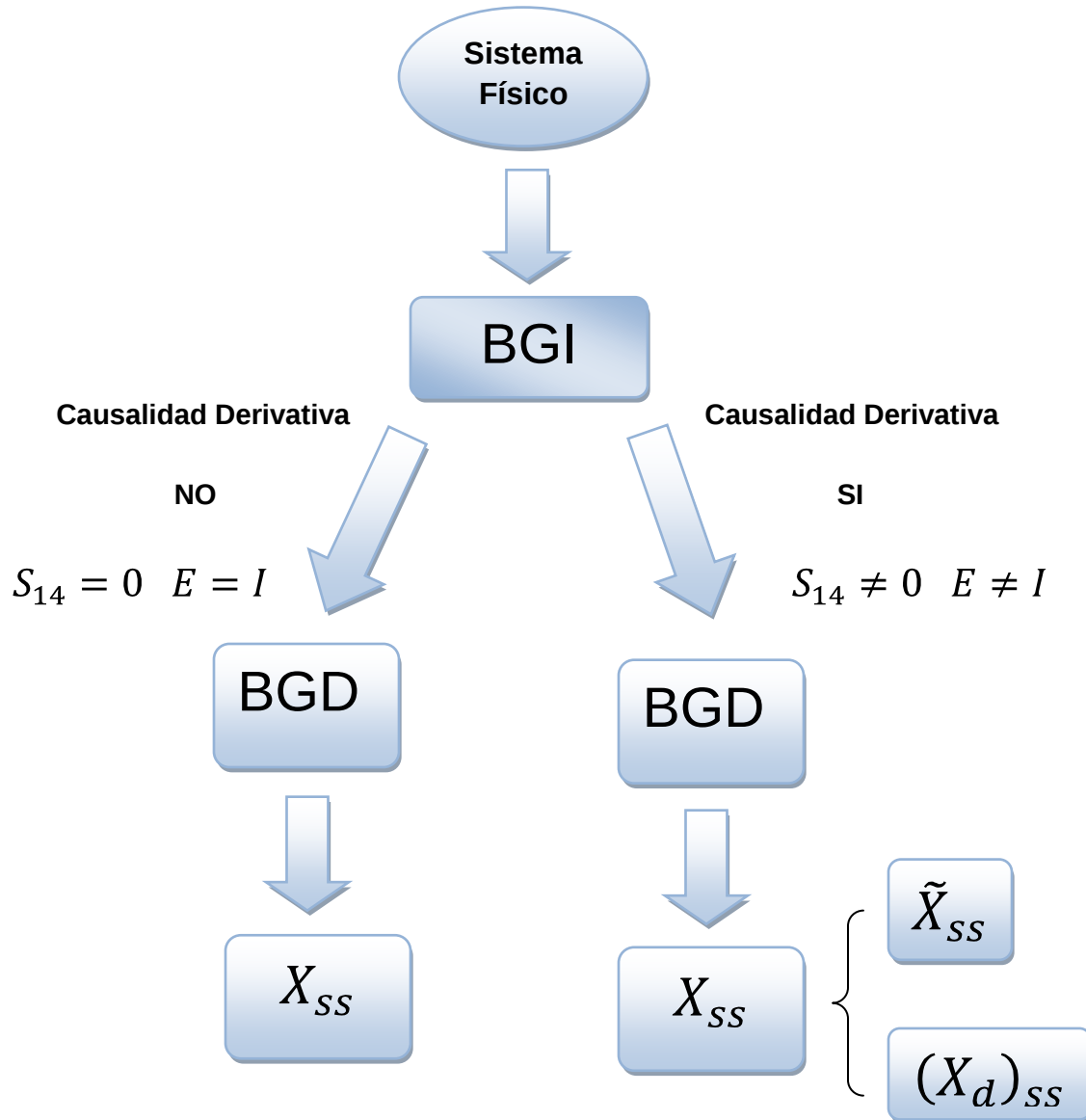


Figura 4.11 Diagrama de bloques para el análisis de Bond Graph.

Se puede observar que existen dos formas para el análisis del sistema propuesto ya sea mediante el BGI o mediante el BGD, si se pretende obtener el estado estacionario y se cumple que $S_{14} = 0$ entonces $E = I$ y que además no existen elementos en causalidad derivativa al obtener el BGD se llega directamente al X_{ss} , siendo esta la forma mas simple de obtener el estado estacionario en un sólo paso.

Ahora al existir causalidad derivativa en el sistema de estudio y si se cumple que $S_{14} \neq 0$ entonces $E \neq I$, y al obtener el BGD se puede obtener también el X_{ss} , pero adicionalmente para comprobar el resultado mediante el BGI, se necesita de $\tilde{X}_{ss}$ y $(X_d)_{ss}$ para obtener el vector completo de las variables de estado estable y compararlos con los resultados obtenidos con el BGD; al ser similares se tiene la certeza de que los resultados son los correctos.

4.4 Un caso de una red eléctrica

Se realiza ahora el estudio del siguiente sistema propuesto que se muestra en la figura 4.12, el cual consiste en un arreglo de resistencias, inductores y capacitores y una fuente de voltaje, para formar una red eléctrica.

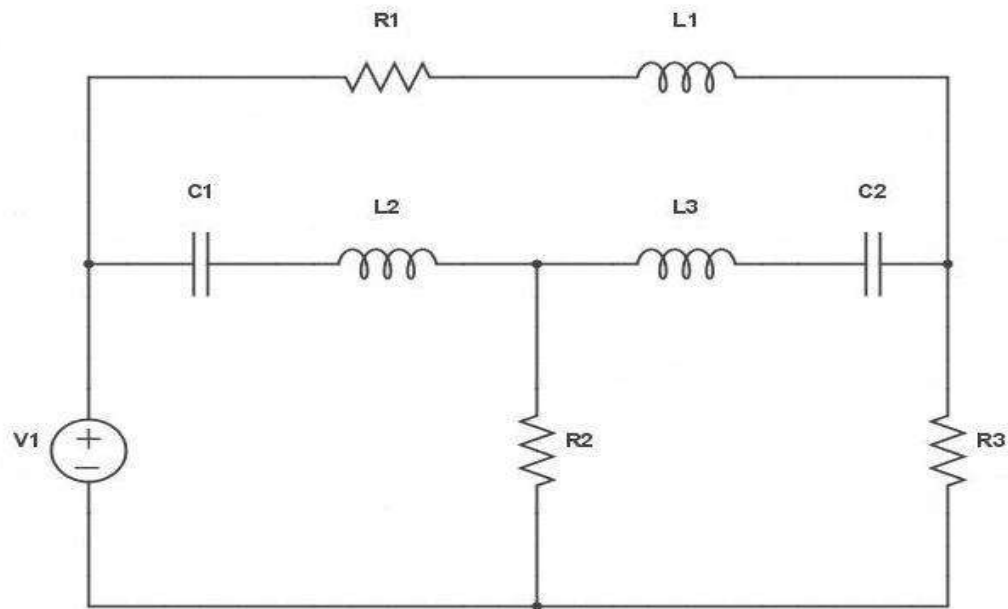


Figura 4.12 Circuito de una red eléctrica.

Este sistema es ahora mas complejo que el anterior, ya que se puede observar que existen elementos R y L en serie y elementos C y L en serie para ciertas rama del circuito también se observan elementos R en paralelo. Se procederá su análisis primero mediante el BGI y posteriormente mediante el BGD y finalmente obtener el estado estable del mismo.

Realizando el análisis mediante el BGI, se comienza por obtener el Bond Graph del sistema.

La representación de esta red se ilustra en la figura 4.13:

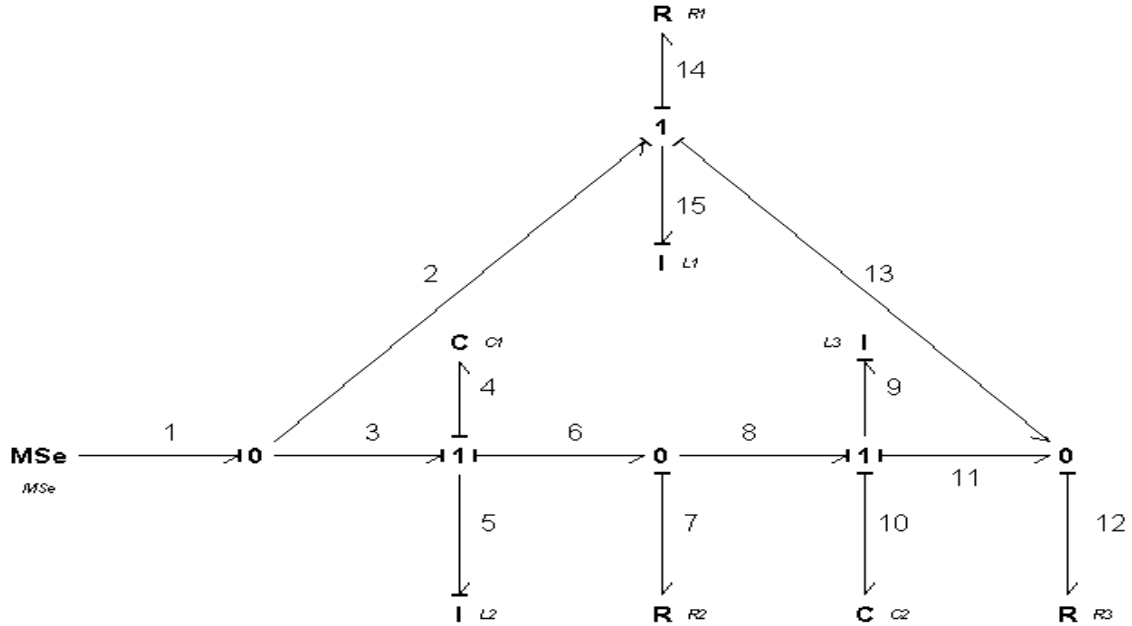


Figura 4.13 Bond Graph de la red eléctrica.

Obteniendo los tres primeros vectores clave del sistema:

$$X = \begin{bmatrix} q_4 \\ q_{10} \\ p_{15} \\ p_5 \\ p_9 \end{bmatrix}; \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_{10} \\ e_{15} \\ e_5 \\ e_9 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_{10} \\ f_{15} \\ f_5 \\ f_9 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

El resto de los vectores clave es:

$$U = [e_1]; \quad D_{in} = \begin{bmatrix} f_{14} \\ f_7 \\ f_{12} \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_{14} \\ e_7 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Ahora se determinan las relaciones constitutivas $\mathbf{D}_{out} = \mathbf{L} \mathbf{D}_{in}$ y $\mathbf{Z} = \mathbf{F} \mathbf{X}$; primeramente se calcula el valor de $\mathbf{D}_{out}$ sustituyendo las variables de la ecuación (2.15) dando por resultado:

$$\begin{bmatrix} e_{14} \\ e_7 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_{14} \\ f_7 \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Siendo:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Determinando el valor de la relación constitutiva $\mathbf{Z}$ y sustituyendo datos de la ecuación (2.13) se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ e_{10} \\ f_{15} \\ f_5 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 & \frac{1}{L_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_4 \\ q_{10} \\ p_{15} \\ p_5 \\ p_9 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Siendo:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 & \frac{1}{L_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Obteniendo la relación de estructura unión del sistema propuesto mediante el BGI, a partir de la expresión (4.31), el resultado final se define a continuación:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ f_{10} \\ e_{15} \\ e_5 \\ e_9 \\ f_{14} \\ f_7 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} & & \mathbf{S}_{11} & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{S}_{12} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \hline \mathbf{S}_{22} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{S}_{13} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \hline \mathbf{S}_{23} \end{matrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_{10} \\ f_{15} \\ f_5 \\ f_9 \\ e_{14} \\ e_7 \\ e_{12} \\ e_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Como se puede observar, en la matriz de estructura unión $\mathbf{S}$ para este sistema; $\mathbf{S}_{22} = \mathbf{0}$ por lo tanto $\mathbf{M} = \mathbf{L}$, bajo estas condiciones se obtiene la ecuación de estado $\mathbf{A}$ mediante la expresión (4.50) y sustituyendo datos de la matriz $\mathbf{S}$ se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) *$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Haciendo las operaciones correspondientes, el resultado final es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{R_1 - R_3}{L_1} & 0 & -\frac{R_3}{L_3} \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_3} \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & -\frac{R_3}{L_1} & \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2 - R_3}{L_3} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Posteriormente, se obtiene A^{-1} cuyo resultado se muestra enseguida en la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -C_1 * R_2 & C_1 * R_2 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_2 * R_2 & -\frac{[(R_1 * R_2) + (R_1 * R_3) + (R_3 * R_2)] * C_2}{R_1 + R_3} & \frac{R_3 * C_2}{R_1 + R_3} & 0 & -C_2 \\ 0 & -\frac{R_3 * L_1}{R_1 + R_3} & -\frac{L_1}{R_1 + R_3} & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

Ahora se determina la ecuación de estado B mediante la expresión (4.56) y sustituyendo datos se obtiene:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

Al realizar todas las operaciones que se tienen en la expresión anterior el resultado final es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

A continuación se determinan ahora las expresiones de $\mathbf{A}^*$ y $\mathbf{B}^*$ se comienza por determinar primeramente $\mathbf{A}^*$ mediante la expresión (3.24), entonces al sustituir datos se tiene:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} * \quad (4.111)$$

$$\begin{bmatrix} -C_1 * R_2 & C_1 * R_2 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_2 * R_2 & -\left[\frac{(R_1 * R_2) + (R_1 * R_3) + (R_3 * R_2)}{R_1 + R_3} \right] * C_2 & \frac{R_3 * C_2}{R_1 + R_3} & 0 & -C_2 \\ 0 & -\frac{R_3 * L_1}{R_1 + R_3} & -\frac{L_1}{R_1 + R_3} & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y al realizar las operaciones correspondientes, se tiene que:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -R_2 & R_2 & 0 & -1 & 0 \\ R_2 & -\frac{[(R_1 * R_3) + (R_2 * R_3) + (R_2 * R_1)]}{R_3 + R_1} & \frac{R_3}{R_3 + R_1} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{R_3}{R_3 + R_1} & -\frac{1}{R_3 + R_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

Finalmente se obtiene B^* , sustituyendo datos y mediante la expresión (3.25) se tiene la siguiente expresión:

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} * \quad (4.113)$$

$$\begin{bmatrix} -C_1 * R_2 & C_1 * R_2 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_2 * R_2 & -\frac{[(R_1 * R_3) + (R_2 * R_3) + (R_2 * R_1)]}{R_3 + R_1} & \frac{R_3 * C_2}{R_3 + R_1} & 0 & -C_2 \\ 0 & -\frac{R_3 * L_1}{R_3 + R_1} & \frac{L_1}{R_3 + R_1} & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} *$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al realizar operaciones, el resultado final es:

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{R_3}{R_3 + R_1} \\ \frac{1}{R_3 + R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Ahora se realiza el análisis del sistema mediante el BGD, como se puede apreciar en la siguiente figura 4.14:

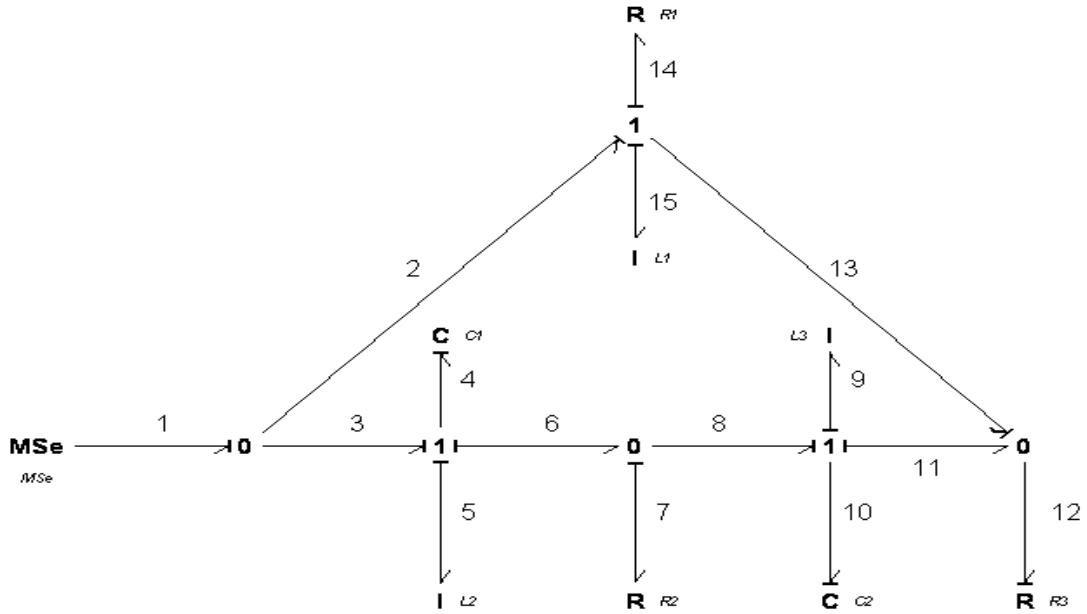


Figura 4.14 BGD de la red eléctrica.

Los primeros cuatro vectores clave $\mathbf{X}$, $\dot{\mathbf{X}}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{U}$ quedan definidos de la misma manera que para el análisis de BGI, solo resta definir los vectores clave $\mathbf{D}_{in}^d$ y $\mathbf{D}_{out}^d$.

Los cuales son:

$$\mathbf{D}_{in}^d = \begin{bmatrix} f_{14} \\ f_7 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Y para el siguiente vector se tiene:

$$\mathbf{D}_{out}^d = \begin{bmatrix} e_{14} \\ e_7 \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

Determinando las relaciones constitutivas $\mathbf{D}_{out}^d = \mathbf{L}^d \mathbf{D}_{in}^d$ y $\mathbf{Z}^d = \mathbf{F}^d \mathbf{X}$; primeramente se calcula el valor de $\mathbf{D}_{out}^d$ sustituyendo las variables de la ecuación (3.2) dando por resultado:

$$\begin{bmatrix} e_{14} \\ e_7 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_{14} \\ f_7 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

Donde:

$$\mathbf{L}^d = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Ahora se determina el valor de la relación constitutiva $\mathbf{Z}^d$ y sustituyendo datos de la ecuación (3.17) se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ e_{10} \\ f_{15} \\ f_5 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_4 \\ q_{10} \\ p_{15} \\ p_5 \\ p_9 \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

Donde:

$$\mathbf{F}^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

Posteriormente, se forma la relación de estructura unión en la cual se sustituyen datos de la expresión (4.69) para de esta manera formar la matriz J y obtener el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ e_{10} \\ f_{15} \\ f_5 \\ f_9 \\ \hline f_{14} \\ f_7 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} & & J_{11} & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} & & J_{12} & & \\ 0 & -1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & J_{13} & & \\ & & & 1 & \\ & & & -1 & \\ & & & 0 & \\ & & & 0 & \\ & & & 0 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} J_{21} & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} & & J_{22} & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -1 & 0 & 0 & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & J_{23} & & \\ & & & 0 & \\ & & & 0 & \\ & & & 1 & \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ f_{10} \\ e_{15} \\ e_5 \\ e_9 \\ \hline e_{14} \\ e_7 \\ f_{12} \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

Debido a que $J_{22} \neq 0$ se realiza la sustitución de datos de la expresión (4.75) dando por resultado:

$$M^d = \left(I - \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Realizando operaciones se tiene que:

$$M^d = \begin{bmatrix} R_1 * R_3 & 0 & \frac{R_1}{R_3 + R_1} \\ 0 & R_2 & 0 \\ -\frac{R_1}{R_3 + R_1} & 0 & \frac{1}{R_3 + R_1} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Una vez obtenidas las variables anteriores, es posible calcular A^* mediante la expresión (3.5) y sustituyendo datos se tiene lo siguiente:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \quad (4.124)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{R_1 * R_3}{R_3 + R_1} & 0 & \frac{R_1}{R_3 + R_1} \\ 0 & R_2 & 0 \\ -\frac{R_1}{R_3 + R_1} & 0 & \frac{1}{R_3 + R_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese, que el resultado de la expresión (4.125) del análisis en BGD, es el mismo que el de la expresión (4.112) para el análisis en BGI que se realizó anteriormente:

$$A^* = \begin{bmatrix} -R_2 & R_2 & 0 & -1 & 0 \\ R_2 & -\frac{[(R_1 * R_3) + (R_2 * R_3) + (R_2 * R_1)]}{R_3 + R_1} & \frac{R_3}{R_3 + R_1} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{R_3}{R_3 + R_1} & -\frac{1}{R_3 + R_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

De esta manera se tiene la certeza de que los cálculos son correctos, se determina ahora B^* a través de la expresión (3.6) al sustituir datos se llega a la expresión que se muestra a continuación:

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_1 * R_3 & 0 & R_1 \\ 0 & R_2 & 0 \\ -\frac{R_1}{R_3 + R_1} & 0 & \frac{1}{R_3 + R_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Obsérvese, que el resultado dado en la expresión (4.127) coincide con la expresión (4.114) que se obtuvo para el análisis de BGI:

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{R_3}{R_3 + R_1} \\ \frac{1}{R_3 + R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Al seguir analizando este sistema es posible llegar a las ecuaciones de estado **A** y **B** mediante las expresiones (3.36) y (3.39) respectivamente, como ya se demostró anteriormente, para lo cual se requiere conocer antes el valor de $(A^*)^{-1}$ que se muestra a continuación:

$$A^{*-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -R_3 - R_1 & 0 & -R_3 \\ -1 & 0 & 0 & -R_2 & R_2 \\ 0 & -1 & -R_3 & R_2 & -R_3 - R_2 \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

Sustituyendo datos de la expresión (3.36) para determinar la ecuación de estado **A**, a través del BGD se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -R_3 - R_1 & 0 & -R_3 \\ -1 & 0 & 0 & -R_2 & R_2 \\ 0 & -1 & -R_3 & R_2 & -R_3 - R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

Nótese, que al realizar operaciones el resultado de la expresión (4.130) del análisis en BDG, es el mismo de la expresión (4.107) que se obtuvo para el análisis en BGI con esto se comprueba la relación que existe entre el BGI y el BGD:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{R_3 - R_1}{L_1} & 0 & -\frac{R_3}{L_3} \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{R_2}{L_3} \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & -\frac{R_3}{L_1} & \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2 - R_2}{L_3} \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

Ahora para obtener la ecuación de estado **B** se utiliza la expresión (3.39) sustituyendo datos se tiene la siguiente expresión:

$$B = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -R_3 - R_1 & 0 & -R_3 \\ -1 & 0 & 0 & -R_2 & R_2 \\ 0 & -1 & -R_3 & R_2 & -R_3 - R_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ R_3 \\ -\frac{R_3 + R_1}{R_3 + R_1} \\ \frac{1}{R_3 + R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

Obsérvese, que una vez realizadas las operaciones la expresión (4.132) es similar a la expresión (4.110) que se realizó para el análisis del sistema en BGI demostrando nuevamente, que los resultados obtenidos son correctos y de que existe una relación entre el BGI y el BGD:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

Ahora se realiza el cálculo del estado estable, pero antes de ello, es necesario conocer $(F^d)^{-1}$ así que realizando operaciones, se obtiene la expresión mostrada enseguida:

$$F^d^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

Con todos los elementos anteriormente mencionados se obtiene el estado estable X_{ss} y Z_{ss} , primeramente mediante el BGD, sustituyendo datos de la expresión (4.3) entonces se tiene que:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{R_3}{R_3 + R_1} \\ \frac{1}{R_3 + R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.134)$$

Al realizar las operaciones de multiplicación de matrices, el resultado es:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} C_1 * e_1 \\ -\frac{C_2 * e_1 * R_3}{R_1 + R_3} \\ \frac{e_1 * L_1}{R_1 + R_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

Ahora para determinar Z_{ss} , se realiza la sustitución de datos de la expresión (4.8), entonces se tiene que:

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{R_3}{R_3 + R_1} \\ \frac{1}{R_3 + R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.136)$$

Una vez realizadas las operaciones se tiene por resultado la expresión siguiente:

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} e_1 \\ -\frac{e_1 * R_3}{R_3 + R_1} \\ \frac{e_1}{R_3 + R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Ahora determinando X_{ss} , a través del BGI, a fin de corroborar resultados y mediante la expresión (4.1), se retoman los datos para el análisis que se realizó del

sistema propuesto tomando en cuenta que $S_{14} = \mathbf{0}$ entonces $E = I$ y haciendo la sustitución de datos, se obtiene la expresión que se muestra enseguida:

$$X_{ss} = - \begin{bmatrix} -C_1 * R_2 & C_1 * R_2 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_2 * R_2 & -\frac{[(R_1 * R_2) + (R_1 * R_3) + (R_3 * R_2)] C_2}{R_1 + R_3} & \frac{R_3 * C_2}{R_1 + R_3} & 0 & -C_2 \\ 0 & -\frac{R_3 * L_1}{R_1 + R_3} & -\frac{L_1}{R_1 + R_3} & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \quad (4.138)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [e_1]$$

Nótese, que el resultado final de la expresión (4.139) mediante el BGI, es exactamente el mismo de la expresión (4.135) que se realizó para el caso de estudio en BGD:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} C_1 * e_1 \\ -\frac{C_2 * e_1 * R_3}{R_1 + R_3} \\ \frac{e_1 * L_1}{R_1 + R_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

Con estas expresiones similares, se comprueba que todos los resultados obtenidos anteriormente son correctos, además de la equivalencia de sistemas que existe entre BGI y el BGD.

4.5 Un caso electromecánico

A continuación se tiene el siguiente caso de estudio, el cual consiste en un sistema electromecánico en el que se combinan partes eléctricas tales como una fuente de voltaje (V_1), una resistencia (R_a) y un inductor (L_a) y partes mecánicas tales como un motor de CD ($\ddot{n}$), una inercia (J) [10] y un cojinete (R_b), y cuya representación se muestra en la figura 4.15:

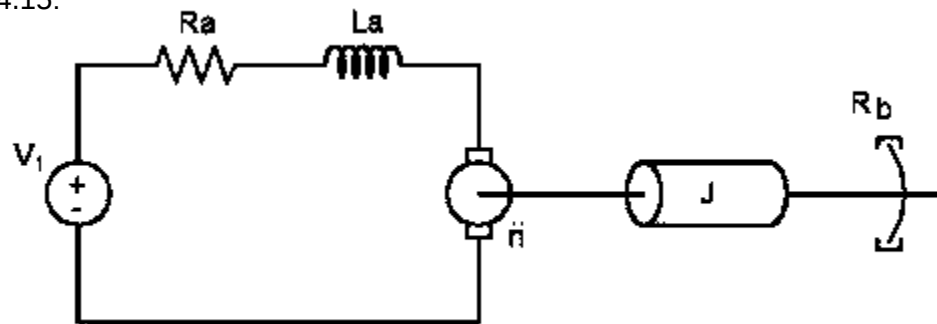


Figura 4.15 Representación de un sistema electromecánico.

La representación en Bond Graph del sistema anterior se muestra en la figura 4.16:

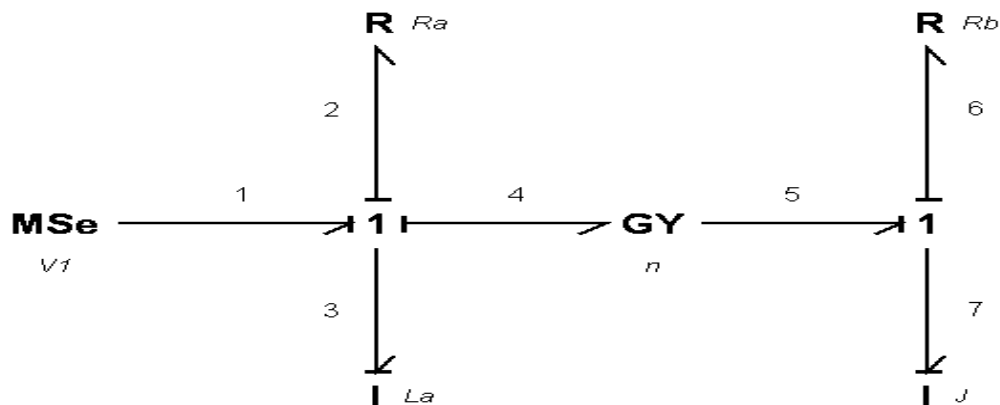


Figura 4.16 BGI del sistema electromecánico.

Obteniendo los tres primeros vectores clave del sistema:

$$X = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

Los siguientes vectores clave son:

$$U = [e_1] \quad D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

Ya que se obtienen los vectores clave el siguiente paso consiste en establecer las relaciones constitutivas, para D_{out} se realiza la sustitución de datos de la expresión (2.15) mostrando el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

Donde:

$$L = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_b \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

Ahora para la relación constitutiva Z , se realiza la sustitución de datos en la expresión (2.13) dando por resultado:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

Donde:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

Conociendo las relaciones constitutivas, el siguiente paso es obtener la matriz de unión S del sistema, cuya expresión resultante se muestra enseguida:

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ 0 & -n & -1 & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ e_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

Con dichos valores que se obtuvieron de la matriz de unión S , ahora se puede calcular la ecuación de estado A mediante la expresión (4.50), y sustituyendo datos se tiene:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

Realizando operaciones, se llega al siguiente resultado de la ecuación de estado A :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{R_b}{J} \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

Al obtener A^{-1} se tiene que:

$$(A)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{R_b * L_a}{R_a * R_b + n^2} & \frac{n * L_a}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{n * J}{R_a * R_b + n^2} & -\frac{R_a * J}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

Determinando la ecuación de estado B , mediante la expresión (4.56) y sustituyendo los datos que se piden, se llega a la siguiente ecuación:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

Una vez que se realizan las operaciones de multiplicación y suma, se tiene el siguiente resultado:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

Ahora se determina A^* mediante la expresión (3.24), y sustituyendo datos se obtiene la ecuación siguiente:

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{R_b * L_a}{R_a * R_b + n^2} & \frac{n * L_a}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{n * J}{R_a * R_b + n^2} & -\frac{R_a * J}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

Al realizar operaciones de multiplicación, el resultado final es:

$$A^* = \begin{bmatrix} -\frac{R_b}{R_a * R_b + n^2} & \frac{n}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{n}{R_a * R_b + n^2} & -\frac{R_a}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

Y finalmente para el caso de estudio en BGI se obtiene B^* , sustituyendo datos y mediante la expresión (3.25) se tiene la siguiente expresión:

$$B^* = - \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{R_b * L_a}{R_a * R_b + n^2} & \frac{n * L_a}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{n * J}{R_a * R_b + n^2} & -\frac{R_a * J}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

El resultado final al realizar la operaciones correspondientes, es:

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ \frac{n}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

Habiendo concluido el análisis en BGI del sistema, ahora se realiza su análisis mediante el BGD como se ve en la figura 4.17:

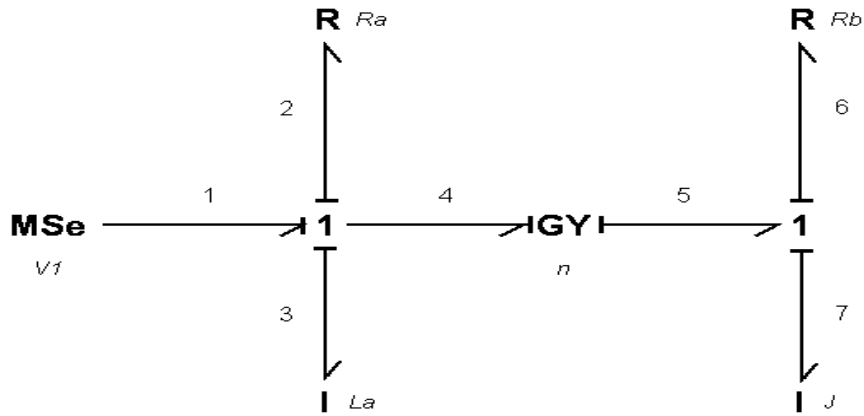


Figura 4.17 BGD del sistema electromecánico.

Los primeros cuatro vectores clave $\mathbf{X}$, $\dot{\mathbf{X}}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{U}$ quedan definidos de la misma manera que para el análisis de BGI, solo resta definir los vectores clave $\mathbf{D}_{in}^d$ y $\mathbf{D}_{out}^d$.

Los cuales son:

$$\mathbf{D}_{in}^d = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (4.156)$$

Y para el siguiente vector se tiene:

$$\mathbf{D}_{out}^d = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (4.157)$$

Se determinan ahora las relaciones constitutivas del sistema electromecánico, $D_{out}^d = L^d D_{in}^d$ y $Z^d = F^d X$; primeramente se calcula el valor de D_{out}^d sustituyendo las variables de la ecuación (3.2) dando por resultado:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

Donde:

$$L^d = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_b \end{bmatrix} \quad (4.159)$$

Posteriormente, se obtiene el valor de la relación constitutiva Z^d y sustituyendo datos de la ecuación (3.17) se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

Donde:

$$F^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

Ahora, al tener las relaciones constitutivas del sistema, se forma la relación de estructura unión en la cual se sustituyen datos de la expresión (4.69) para de esta manera formar la matriz de unión J y obtener el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} & \mathbf{J}_{13} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & \mathbf{J}_{23} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ e_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.162)$$

Debido a que $\mathbf{J}_{22} \neq \mathbf{0}$ se realiza la sustitución de datos de la expresión (4.75) dando por resultado:

$$\mathbf{M}^d = \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} R_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)^{-1} * \begin{bmatrix} R_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_b \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

Realizando operaciones se tiene que:

$$\mathbf{M}^d = \begin{bmatrix} \frac{n^2 * R_a}{R_a * R_b + n^2} & \frac{R_a * n * R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{R_a * n * R_b}{R_a * R_b + n^2} & \frac{n^2 * R_b}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.164)$$

Una vez obtenidas las variables anteriores es posible calcular $\mathbf{A}^*$ mediante la expresión (3.5) y sustituyendo datos se llega a la expresión que se muestra a continuación:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \mathbf{0} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{n^2 * R_a}{R_a * R_b + n^2} & \frac{R_a * n * R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{R_a * n * R_b}{R_a * R_b + n^2} & \frac{n^2 * R_b}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.165)$$

Obsérvese, que resultado la expresión (4.166) del análisis en BGD para este sistema, es el mismo que la expresión (4.153) para el caso de estudio en BGI, como se muestra enseguida:

$$A^* = \begin{bmatrix} -\frac{R_b}{R_a * R_b + n^2} & \frac{n}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{n}{R_a * R_b + n^2} & -\frac{R_a}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

Ahora para obtener B^* mediante la expresión (3.6) y al sustituir datos se llega al resultado siguiente:

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{n^2 * R_a}{R_a * R_b + n^2} & \frac{R_a * n * R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{R_a * n * R_b}{R_a * R_b + n^2} & \frac{n^2 * R_b}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad (4.167)$$

Nótese, que realizando las operaciones correspondientes se tiene que el resultado de B^* de la expresión (4.168) es el mismo que el de la expresión (4.155) para el análisis del sistema en BGI:

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ \frac{n}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

Concluidos los cálculos anteriores, se determina el estado estable pero antes de ello, es necesario conocer $(F^d)^{-1}$ así que realizando el cálculo correspondiente, se obtiene la expresión mostrada enseguida:

$$(F^d)^{-1} = \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \quad (4.169)$$

Con las expresiones anteriormente calculadas se obtiene el estado estable X_{ss} y Z_{ss} , primeramente mediante el BGD y sustituyendo datos de la expresión (4.3) entonces se tiene que:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ \frac{n}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.170)$$

Realizando las operaciones, el resultado final es:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 * L_a * R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ \frac{J * n * e_1}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.171)$$

Posteriormente se determina Z_{ss} se realizando la sustitución de datos de la expresión (4.8), entonces se tiene que:

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ \frac{n}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.172)$$

Y finalmente al realizar la multiplicación el resultado es:

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 * R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ \frac{e_1 * n}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

Una vez que se determina el X_{ss} mediante el BGD, es posible determinarlo también para el BGI con el fin de comprobar resultados, y mediante la expresión (4.1), se retoman los datos para el análisis que se realizó del sistema electromecánico en BGI haciendo la sustitución de datos, y tomando en cuenta que $S_{14} = 0$ entonces $E = I$ se obtiene la expresión que se muestra enseguida:

$$X_{ss} = - \begin{bmatrix} -\frac{R_b * L_a}{R_a * R_b + n^2} & -\frac{n * L_a}{R_a * R_b + n^2} \\ -\frac{n * J}{R_a * R_b + n^2} & -\frac{R_a * J}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.174)$$

Nótese, que realizando la multiplicación, el resultado final de la expresión (4.175) es exactamente el mismo de la expresión (4.171) para el caso de estudio en BGD, comprobando con esto que los resultados son correctos:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 * L_a * R_b}{R_a * R_b + n^2} \\ \frac{J * n * e_1}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.175)$$

4.6 Un caso general de estudio

El caso de estudio siguiente, consiste en un sistema electromecánico también, el cuál es un tanto más complejo que el caso de estudio anterior, se combinan partes eléctricas como lo son: una fuente de voltaje (V_1), una resistencia (R_a), y un inductor (L_a), en tanto que para las partes mecánicas se tiene: un girador ($\ddot{n}$), un transformador ($\ddot{a}$), dos inercias denominadas (J) y (J_e) y dos cojinetes (b) y (b_e), cuya representación se ilustra en la figura 4.18:

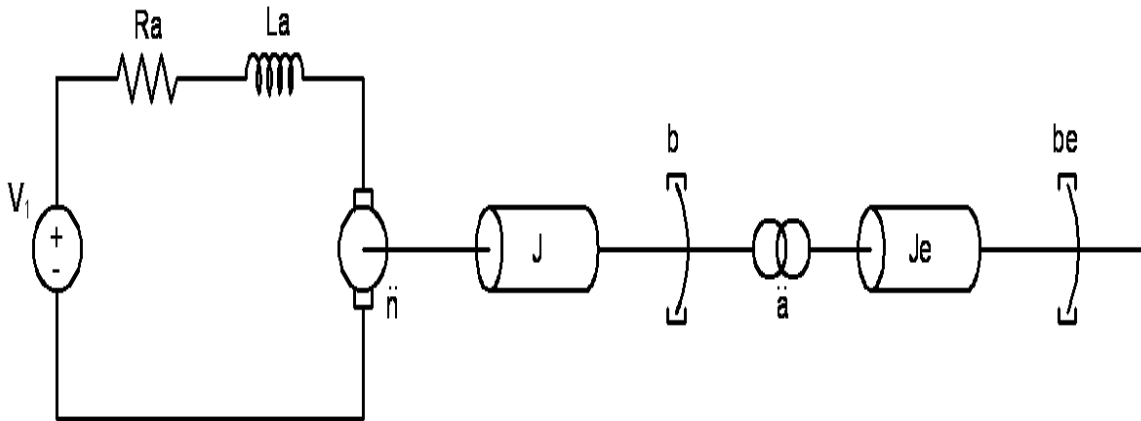


Figura 4.18 Circuito electromecánico formado por un girador y un transformador.

La representación en Bond Graph de este sistema se muestra en la figura 4.19:

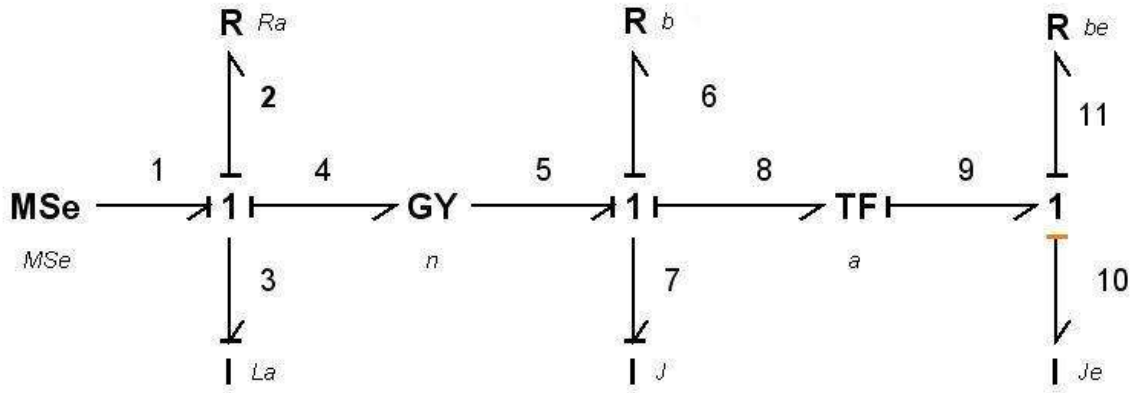


Figura 4.19 Representación en Bond Graph del sistema electromecánico.

Comenzando el análisis en BGI de este sistema se obtienen los tres primeros vectores clave los cuales se muestran a continuación:

$$X = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix}; \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (4.176)$$

Enseguida, se tienen el resto de los vectores clave de causalidad integral:

$$U = [e_1]; \quad D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{11} \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (4.177)$$

Al tener un elemento en causalidad derivativa se tienen los siguientes vectores clave:

$$X_d = [p_{10}]; \quad \dot{X}_d = [e_{10}]; \quad Z_d = [f_{10}] \quad (4.178)$$

Con los vectores clave obtenidos, el siguiente paso consiste en establecer las relaciones constitutivas, para D_{out} se realiza la sustitución de datos de la expresión (2.15) mostrando el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{11} \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

Donde:

$$L = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} \quad (4.180)$$

Ahora para la relación constitutiva Z se realiza la sustitución de datos en la expresión (2.13) dando por resultado:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} \quad (4.181)$$

Donde:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (4.182)$$

Y para la relación constitutiva Z_d cuyo elemento se encuentra con causalidad derivativa, se realiza la sustitución de datos en la expresión (2.14) dando por resultado:

$$[f_{10}] = \left[\frac{1}{J_e} \right] * [p_{10}] \quad (4.183)$$

Donde:

$$F^d = \left[\frac{1}{J_e} \right] \quad (4.184)$$

Donde el valor de $(F^d)^{-1}$ se muestra en enseguida en la expresión siguiente:

$$(F^d)^{-1} = [J_e] \quad (4.185)$$

Conociendo las relaciones constitutivas el siguiente paso es obtener la matriz de estructura unión S del sistema, cuya expresión resultante se muestra enseguida:

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & s_{11} & & s_{12} & & s_{13} & s_{14} \\ 0 & -n & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 0 & -1 & -a & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ e_2 \\ e_6 \\ e_{11} \\ e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} \quad (4.186)$$

$s_{21} \quad s_{22} \quad s_{23} \quad s_{24}$

Una vez que se tiene la matriz de estructura unión S , obsérvese que para este caso la sección $s_{14} \neq 0$ y por lo tanto $E \neq I$ entonces se obtiene ahora E de la expresión (2.25), sustituyendo los datos obtenidos se tiene que:

$$E = I + \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} * [J_e] * \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (4.187)$$

Realizando las operaciones correspondientes, el resultado final es:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J + J_e * a^2}{J} \end{bmatrix} \quad (4.188)$$

Ahora obteniendo E^{-1} se tiene la expresión siguiente:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J + J_e * a^2} \end{bmatrix} \quad (4.189)$$

Conociendo los valores anteriores, se puede calcular la ecuación de estado A mediante la expresión (2.21) y al sustituir datos se llega al resultado siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J + J_e * a^2} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (4.190)$$

Al realizar las operaciones pertinentes, el resultado final se tiene en la siguiente expresión:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{J * n}{(J + J_e * a^2) * L_a} & \frac{-b - a^2 * b_e}{J + J_e * a^2} \end{bmatrix} \quad (4.191)$$

Y al calcular A^{-1} se tiene::

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{(b + a^2 * b_e) L_a}{K_1} & \frac{n * L_a * (J + J_e * a^2)}{J * K_1} \\ -\frac{n * J}{K_1} & -\frac{R_a * (J + J_e * a^2)}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Con los resultados de las expresiones anteriores es posible ahora realizar el cálculo de A^* pero en este caso se utiliza el término de A_e^* el cual se denomina, A^* equivalente mediante la expresión (3.24), este término se refiere a que A^* es singular, es decir que la matriz es no invertible, y sustituyendo datos en dicha expresión se obtiene la ecuación siguiente:

$$A_e^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{(b + a^2 * b_e)L_a}{K_1} & \frac{n * L_a * (J + J_e * a^2)}{J * K_1} \\ -\frac{n * J}{K_1} & -\frac{R_a * (J + J_e * a^2)}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Al realizar operaciones, el resultado final es:

$$A_e^* = \begin{bmatrix} -\frac{b + a^2 * b_e}{K_1} & \frac{n(J + J_e * a^2)}{J * K_1} \\ -\frac{n}{K_1} & -\frac{R_a(J + J_e * a^2)}{R_a * R_b + n^2} \end{bmatrix} \quad (4.194)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Al determinar el rango de A_e^* con el fin de conocer el número elementos que es posible invertir en una matriz, se obtiene como resultado 2, este número se traduce como las variables linealmente independientes del sistema, es decir como los elementos almacenadores de energía que conservan la causalidad integral.

Finalmente, para el caso de estudio en BGI se obtienen B y B_e^* , denominado B^* equivalente. Comenzando con la expresión (2.22) es posible determinar B y al sustituir los datos se tiene que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{J}{J + J_e * a^2} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.195)$$

Al realizar las operaciones correspondientes, se tiene que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.196)$$

Ahora para obtener el B_e^* del sistema electromecánico, se sustituyen datos de la expresión (3.25) y se tiene lo siguiente:

$$B_e^* = - \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{(b + a^2 * b_e)L_a}{K_1} & \frac{n * L_a * (J + J_e * a^2)}{J * K_1} \\ -\frac{n * J}{K_1} & -\frac{R_a * (J + J_e * a^2)}{K_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

El resultado final es:

$$B_e^* = \begin{bmatrix} \frac{b + a^2 * b_e}{K_1} \\ \frac{n}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.198)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Realizando ahora el análisis del sistema mediante el BGD, como se puede apreciar en la figura 4.20:

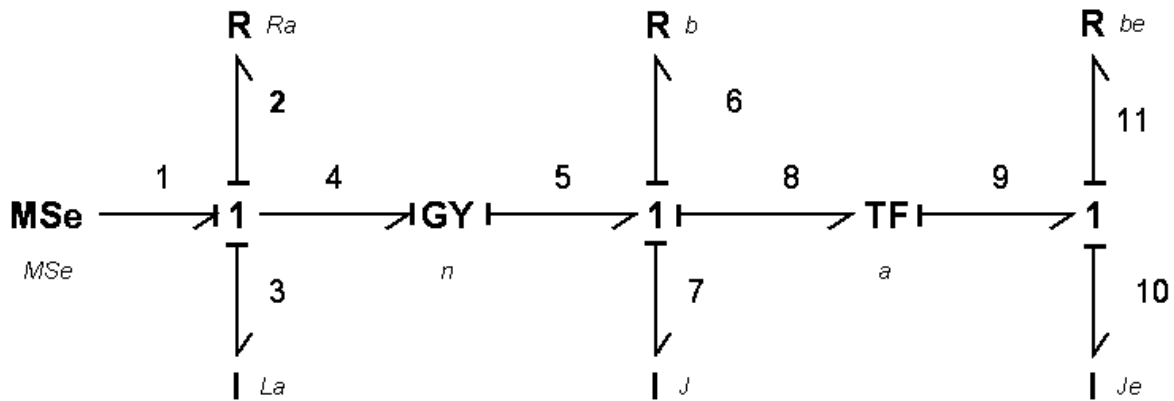


Figura 4.20 Representación BGD para el sistema electromecánico.

Los primeros tres vectores clave $\mathbf{X}$, $\dot{\mathbf{X}}$, $\mathbf{Z}$, se definen ahora como:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \\ p_{10} \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ e_{10} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ f_{10} \end{bmatrix} \quad (4.199)$$

Enseguida, se tienen el resto de los vectores clave de causalidad derivativa:

$$\mathbf{U} = [e_1]; \quad D_{in}^d = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{11} \end{bmatrix}; \quad D_{out}^d = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad (4.200)$$

Con los vectores clave se establecen las relaciones constitutivas; para $\mathbf{D}_{out}$ se realiza la sustitución de datos de la expresión (2.15) dando por resultado la expresión (4.201) a fin de obtener $\mathbf{L}^d$, nótese que el resultado de $\mathbf{L}^d$, es el mismo de la expresión (4.180) para el análisis realizado en BGI del sistema:

$$\mathbf{L}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_e \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

Para la relación constitutiva $\mathbf{Z}$ se realiza la sustitución de datos de la expresión (2.13) dando por resultado:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{J_e} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \\ p_{10} \end{bmatrix} \quad (4.202)$$

Donde:

$$F^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_e} \end{bmatrix} \quad (4.203)$$

Conociendo las relaciones constitutivas, el siguiente paso es obtener la matriz de estructura unión J del sistema, cuya expresión resultante se muestra enseguida:

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ f_{10} \\ f_2 \\ f_6 \\ f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} & \mathbf{J}_{13} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} & \mathbf{J}_{23} \end{matrix} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ e_{10} \\ e_2 \\ e_6 \\ e_{11} \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.204)$$

Ahora, debido a que $J_{22} \neq 0$ para calcular M^d se puede hacer mediante la expresión (4.75), se sustituyen datos y se tiene que:

$$M^d = \left(I - \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{a}{n} \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} \quad (4.205)$$

Realizando operaciones, se tiene el resultado final:

$$M^d = \begin{bmatrix} -\frac{n^2 * R_a}{K_1} & -\frac{R_a * n * b}{K_1} & -\frac{R_a * a * n * b_e}{K_1} \\ -\frac{R_a * n * b}{K_1} & -\frac{b * (n^2 + R_a * a^2 * b_e)}{K_1} & -\frac{R_a * a * b * b_e}{K_1} \\ -\frac{R_a * a * n * b_e}{K_1} & -\frac{R_a * a * b * b_e}{K_1} & -\frac{b_e * (n^2 + R_a * b)}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.206)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Obteniendo las variables anteriores, es posible calcular A^* mediante la expresión (3.5) y sustituyendo datos se llega al resultado que se muestra a continuación:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{a}{n} \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{n} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{a}{n} \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{n} & 0 & 0 \end{bmatrix} * M^d * \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{a}{n} \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.207)$$

Dando por resultado:

$$A^* = \begin{bmatrix} -\frac{b + a^2 * b_e}{K_1} & \frac{n}{K_1} & \frac{a * n}{K_1} \\ -\frac{n}{K_1} & -\frac{R_a}{K_1} & -\frac{R_a * a}{K_1} \\ -\frac{a * n}{K_1} & -\frac{R_a * a}{K_1} & -\frac{R_a * a^2}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.208)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Como se puede apreciar, el resultado final de A^* es de distintas dimensiones al obtenido para el caso de estudio en BGI, ya que se obtuvo un A_e^* de 2 x 2 mientras que para este último caso el resultado es una matriz de 3 x 3, esto se debe al enfoque de estudio, mientras que en el BGI se tienen dos elementos en causalidad integral y un elemento en causalidad derivativa o linealmente dependiente, este último provoca una cierta pérdida de la información para completar la matriz, en el BGD todos los elementos

se mantienen con causalidad derivativa y por lo tanto no hay pérdida de elementos para completar la matriz A^* , al calcular nuevamente el rango se obtiene como resultado 2 y comprobando que el resultado obtenido sea el correcto al comprobar el determinante de A^* se tiene como resultado 0.

Ahora para obtener B^* mediante la expresión (3.6) y al sustituir datos se llega al resultado siguiente:

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{n} \\ \frac{a}{n} \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{a}{n} \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{n} & 0 & 0 \end{bmatrix} * M^d * \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{n} \\ \frac{a}{n} \\ n \end{bmatrix} \quad (4.209)$$

Realizando operaciones, finalmente se tiene que el resultado de B^* es:

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{b + a^2 * b_e}{K_1} \\ \frac{n}{K_1} \\ \frac{a * n}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.210)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Para iniciar con la determinación del estado estable mediante el BGD, es necesario conocer $(F^d)^{-1}$ así que realizando el cálculo correspondiente, se obtiene la expresión mostrada enseguida:

$$(F^d)^{-1} = \begin{bmatrix} L_a & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_e \end{bmatrix} \quad (4.211)$$

Con las expresiones anteriormente calculadas se obtiene el estado estable X_{ss} y Z_{ss} , sustituyendo datos de la expresión (4.3) entonces se tiene que:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} L_a & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_e \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{b + a^2 * b_e}{K_1} \\ \frac{n}{K_1} \\ \frac{a * n}{K_1} \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.212)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Al realizar la multiplicación, resultado final es:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 * L_a (b + a^2 * b_e)}{K_1} \\ \frac{e_1 * J * n}{K_1} \\ \frac{e_1 * J_e * a * n}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.213)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Posteriormente, se determina Z_{ss} y realizando la sustitución de datos de la expresión (4.8), entonces se tiene que:

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{b + a^2 * b_e}{K_1} \\ \frac{n}{K_1} \\ \frac{a * n}{K_1} \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.214)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Al realizar la multiplicación de las matrices, el resultado final es:

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 * (b + a^2 * b_e)}{K_1} \\ \frac{e_1 * n}{K_1} \\ \frac{e_1 * a * n}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Una vez que se determina X_{ss} mediante el BGD, es posible determinarlo mediante el BGI, con a fin de comprobar resultados, y mediante la expresión (4.1), se retoman los datos para el análisis que se realizó del sistema electromecánico en BGI, así que al realizar la sustitución de datos y tomando en cuenta que $S_{14} \neq 0$ entonces $E \neq I$, se obtiene la expresión que se muestra enseguida:

$$\tilde{X}_{ss} = - \begin{bmatrix} -\frac{(b + a^2 * b_e)L_a}{K_1} & \frac{n * L_a * (J + J_e * a^2)}{J * K_1} \\ -\frac{n * J}{K_1} & -\frac{R_a * (J + J_e * a^2)}{K_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [e_1] \quad (4.216)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Realizando la multiplicación de matrices, el resultado final es:

$$\tilde{X}_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 * L_a(b + a^2 * b_e)}{K_1} \\ \frac{e_1 * J * n}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.217)$$

$$* K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

La expresión anterior solo representa una parte del vector del estado estable, para obtener el vector completo se utiliza la expresión (4.14) y al sustituir datos se tiene lo siguiente:

$$(X_d)_{ss} = -[K_e] * [0 \quad -a] * \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{e_1 * L_a(b + a^2 * b_e)}{K_1} \\ \frac{e_1 * J * n}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Realizando las operaciones correspondientes, el resultado final que se obtiene es:

$$(X_d)_{ss} = \left[\frac{e_1 * J_e * a * n}{K_1} \right] \quad (4.219)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Obsérvese, que al ordenar las expresiones $\tilde{X}_{ss}$ y $(X_d)_{ss}$ de forma adecuada, primero los elementos de almacenamiento en causalidad integral, y después aquellos elementos que se encuentren en causalidad derivativa, como lo muestra la expresión (4.220), se consigue el vector completo para el estado estable, el cual corresponde a la expresión (4.213) para el caso de estudio en BGD:

$$X_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 * L_a(b + a^2 * b_e)}{K_1} \\ \frac{e_1 * J * n}{K_1} \\ \frac{e_1 * J_e * a * n}{K_1} \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

$$K_1 = R_a * b + R_a * a^2 * b_e + n^2$$

Como se puede apreciar entonces, se puede calcular el estado estacionario mediante el enfoque del BGI o el BGD y es posible obtener los mismos resultados, en el caso del BGD al determinar el X_{ss} a través del B^* , se logra conseguir el estado estacionario de todas las variables de estado directamente en un solo calculo, mientras que para el caso del BGI, se requiere realizar operaciones adicionales para obtener el vector completo del estado estable.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Con el desarrollo del presente trabajo de tesis, se ha demostrado que el uso del modelado de sistemas mediante la técnica de modelado de Bond Graph es efectivo, en este caso la técnica satisface el análisis de sistemas dinámicos tales como los circuitos eléctricos en los casos de estudio vistos en el capítulo anterior. Se logró obtener el modelado matemático de los sistemas además, de observar que existen expresiones equivalentes las cuales se obtuvieron mediante el BGI y mediante el BGD que permiten obtener la equivalencia de sistemas, bajo la consideración de que dos sistemas son llamados equivalentes si el conjunto de soluciones es el mismo para ambos sistemas.

Cuando se realiza el estudio de Bond Graph con un enfoque de causalidad puramente derivativa, éste nos permite determinar ciertas propiedades como observabilidad, controlabilidad, estructurales y de estado estacionario mediante las expresiones de A^*, B^* , la matriz de unión J , X_{ss} etc. por citar algunas.

Los sistemas dinámicos son sistemas cuyo comportamiento está descrito por ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento de un sistema físico, lo que un modelo matemático pretende es describir las relaciones existentes entre las magnitudes características del sistema a fin de encontrar o no un control para estos. Este trabajo de investigación no pretende abarcar el modelado de todos los posibles sistemas físicos; tampoco el modelado pretende ser exhaustivo. La exposición se centra principalmente en el modelado de sistemas eléctricos básicos, así como las señales más utilizadas para estos casos, ya sean tensiones, inductores, flujos etc. y algunos casos de estudio electromecánicos además del procedimiento para obtener las expresiones dinámicas que son descritas por los elementos de almacenamiento y llegar a la equivalencia que existen en dichos sistemas a través del enfoque de análisis en BGI y BGD.

Se explicó de una manera concisa la metodología para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico, las ecuaciones de estado, y la relación que existe entre el BGI y el BGD y poder comprobar la equivalencia de resultados para ambos casos. Se presentó una manera alternativa para poder modelar circuitos eléctricos además de comprender el comportamiento de cada uno de los elementos básicos que forman parte de la técnica Bond Graph.

Los modelos son simplificaciones de la realidad, ya que son construcciones simplificadas y abstractas utilizadas para estudiar y determinar el comportamiento de sistemas, los modelos ideales son frecuentemente usados en ingeniería cuando no es práctico usar sistemas reales, a causa de que un modelo es una simplificación de la realidad, hay una gran cantidad de trabajo en la construcción de modelos, uno que sea excesivamente complejo y detallado puede contener parámetros a veces imposibles o muy difíciles de analizar, por el contrario un modelo excesivamente simplificado no es capaz de exhibir características importantes, entonces si se requiere modelar sistemas físicos muy grandes o complejos, la técnica de modelado Bond Graph satisface ampliamente el desarrollo para la obtención de los modelos matemáticos de diversos tipos de sistemas, reduciendo el tiempo y los errores que puedan presentarse siendo una herramienta útil para conocer el desempeño del sistema.

Las variables de estado son el conjunto más pequeño de variables que representan al sistema dinámico, dichas variables de estado deben de ser linealmente independientes, en los sistemas de circuitos eléctricos analizados, el número de variables de estados es igual al número de elementos que almacenan energía como capacitores e inductores. Esta representación de variables e estados de un sistema se da con las matrices A y B ya que estas tienen que ver con la relación entre entrada y estado, a este par de matrices se les conoce como el par de controlabilidad, la determinación de esta característica es importante ya que al crear un control sin determinar la controlabilidad del sistema no se garantiza que este actúe de forma adecuada o esperada.

El rango es una característica de las matrices donde se tiene un número n que es igual al número de filas o columnas linealmente independientes, el rango se puede hallar al encontrar la submatriz cuadrada del orden más alto que no sea singular, es decir que no es invertible.

Dado que en un sistema físico se involucra almacenamiento de energía, la salida del sistema relacionada con una entrada, no puede seguir a ésta inmediatamente sino que presenta una respuesta transitoria antes de poder alcanzar un estado estacionario, al realizar el análisis de estos sistemas físicos, es importante examinar el comportamiento del estado estable. La respuesta de estado estacionario es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado de un sistema físico en una representación en espacio de estado cuando el periodo dinámico ha terminado.

5.2 Recomendaciones

El uso de la técnica de Bond Graph en sistemas dinámicos facilita la obtención del modelo matemático, sin embargo, se debe tener cierto cuidado en la obtención del mismo, auxiliándose de las reglas básicas al momento de realizar la sustitución de las expresiones dadas y seguir adecuadamente la metodología para así mismo obtener resultados confiables del modelo y comportamiento del sistema a estudiar.

Bond Graph no se limita a sólo estudiar y modelar sistemas eléctricos, también es posible modelar elementos de conmutación en circuitos, tales como diodos y tiristores encontrándose dicha información a detalle en la tesis de licenciatura llamada: “Análisis y Modelado De Sistemas En Conmutación En Bond Graph”, cuyo autor es, Rene Bautista Gaspar, la fecha de publicación de esta tesis se dio en septiembre del año 2010.

Para definir correctamente las relaciones constitutivas de causa y efecto mediante el trazo causal es importante seguir las leyes para asignar adecuadamente la causalidad ya que no siempre es posible asignar causalidad integral como es preferente hacerlo, a todos los elementos almacenadores de energía, permaneciendo estos elementos almacenadores de energía en un caso dado con causalidad derivativa y linealmente dependientes de algunos elementos con causalidad integral.

Para resolver las matrices generadas por las expresiones resultantes de la técnica de Bond Graph es recomendable apoyarse de software computacional como **MATLAB®** y **SCIENTIFIC WORKPLACE®** a fin de obtener rápidamente los resultados de las expresiones dadas.

Bibliografía

1. Eborn, J. (1996). Object Oriented Modelling Of Hybrid Technical Systems. *Department Of Automatic Control* , 1-8.
2. Craig, K. (1994). Mechatronics Modelling With Bond Graphs. *IEEE Control Systems Magazine* , 1-125.
3. Santiago Zorrilla A. ,Miguel Torres X. (1992). *Guía Para Elaborar La Tesis*. Edo. De México: McGraw-Hill Interamericana de México, S,A. De C.V.
4. Vieyra, J. A. (Marzo de 2011). Analisis de Controlabilidad Y Observabilidad En Sistemas Modelados en Bond Graph. *Tesis de Licenciatura* . Morelia, Michoacán , Mexico : Universidad Michoacana De San Nicolas De Hidalgo.
5. Granda, J. J. (1984). Bond Graph Modeling Solutions Of Algebraic Loops And Differential Causality In Mechanical And Electrical Systems. *Proceedings Of The Tenth International Association Of Science And Technology For Development (IASTED)* (págs. 1-6). San Francisco: California State University.
6. González Avalos, G. (2011). Steady State Of A Closed Loop System: A Bong Graph Approach. *Proceedings Of The IASTED International Conference* (págs. 64-70). Innsbruck, Austria: Modelling Identification And Control (MIC).
7. González Avalos, G. (2011). The Steady State Of LTI Systems Modelled By Bond Graph Though Equivalent Systems. *Institute Of Electrical An Electronics Engineers (IEEE)* , 300-305.
8. González Avalos Gilberto , Galindo Rene. (2003). Steady State Values For A Phsyscal System With Bond Graph Approach. *9th IEEE International Conference On Methods And Models In Automation And Robotics* (págs. 1317-1322). Miedzyzdroje, Poland: Methods And Models In Automation And Robotics (MMAR).
9. González Avalos Gilberto , Galindo Orozco Rene, Morales De León Jesus. (2009). Procedimientos Gráficos Para Obtener Expresiones Analíticas Del Estado Estacionario y De Las Condiciones de Estabilidad. *Revista De Divulgación Científica Y Tecnológica De La Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL)* , XII (1), 1-8.
10. S. Nise, N. (2006). *Sistemas de Control Para Ingeniería* (Tercera Edición ed.). México: Compañía Editorial Continental.