



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**“MODELADO Y SIMULACIÓN DE UN GENERADOR
SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.”**

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO

DE INGENIERO ELECTRICISTA

PRESENTA:

JUAN MEDINA GÓMEZ

ASESOR DE TESIS:

DR. GILBERTO GONZALES AVALOS

MORELIA MICHOACÁN, MARZO 2017.





**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**



**“MODELADO Y SIMULACIÓN DE UN GENERADOR SÍNCRONO
DE IMANES PERMANENTES.”**

T E S I S

**PARA OBTENER EL TÍTULO
DE INGENIERO ELECTRICISTA**

PRESENTA:

JUAN MEDINA GÓMEZ

ASESOR DE TESIS:

DR. GILBERTO GONZALES AVALOS

MORELIA MICHOACÁN, MARZO DEL 2017.

ABSTRACT

In the present work of thesis, the model of the permanent magnet synchronous generator is presented. It begins with a brief wording of the history of the evolution of electric machines; As well as the basic physical laws that govern electric machines; then we proceed give know of the basic elements of the general theory of electric machines, in the reference frame of abc , at the same time, the conversion of the general model of electric machines to the reference frame $dq0$. Being this the reference frame where one proceeds to realize the mathematical model of the permanent magnets synchronous generator.

After conversion of the model of the permanent magnet synchronous generator into the reference frame $dq0$, we carry out the process of obtaining the voltage equations, current, electrical torque and mechanical speed of the permanent magnet synchronous generator. In the same way, similarly, the abc reference frame conversion diagrams are developed to $dq0$, and the simulation diagrams of the permanent magnet synchronous generator with state space variables; in the reference frame $dq0$. Proceeding to obtain the response of the mathematical model of the permanent magnets synchronous generator, in the reference frame of abc and $dq0$.

RESUMEN

En el presente trabajo de tesis, se presenta el modelo del generador síncrono de imanes permanentes. Se comienza con una breve redacción de la historia de la evolución de las máquinas eléctricas; al igual se da a conocer las leyes físicas básicas que rigen las máquinas eléctricas; después, se procede a dar un recuento de los elementos básicos de la teoría general de máquinas eléctricas, en el marco de referencia abc ; al mismo tiempo, se realiza la conversión del modelo general de las máquinas eléctricas, al marco de referencia $dq0$. Siendo éste el marco de referencia donde se procede para realizar el modelo matemático del generador síncrono de imanes permanentes.

Una vez realizado la conversión del modelo del generador síncrono de imanes permanentes en el marco de referencia $dq0$, se lleva a cabo el proceso de obtención de las ecuaciones de voltaje, corriente, Par eléctrico y velocidad mecánica del generador síncrono de imanes permanentes. Del mismo modo, se desarrollan los diagramas de conversión del marco de referencia del abc a $dq0$, y los diagramas de simulación del generador síncrono de imanes permanentes con variables de espacio de estado; en el marco de referencia $dq0$. Procediendo a obtener la respuesta del modelo matemático del generador síncrono de imanes permanentes, en el marco de referencia de abc y $dq0$.

MODELO, PAR ELECTRICO, CORRIENTE, MARCO DE REFERENCIA, MAQUINAS, ELECTRICAS.

DEDICATORIA

A Dios por su infinita sabiduría y a mi familia que jamás dejó de creer en mí.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, Creador del Universo, Ingeniero por excelencia.

A Mi Familia, por su apoyo incondicional, durante toda mi vida.

A Mis Amigos, por estar en las buenas y en las malas.

A Todos Mis Profesores, por sus profundos conocimientos.

Al Dr. Gilberto Gonzales Avalos, por su gran apoyo en el asesoramiento de tesis.

A la Facultad de Ingeniería Eléctrica (FIE).

A La Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH).

ÍNDICE

PORTADA	
CONTRAPORTADA	
ABSTRACT	I
RESUMEN	II
DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTOS	IV
ÍNDICE	V
ÍNDICE DE FIGURAS	VII
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Importancia de los generadores síncronos de imanes permanentes.....	1
1.2 Objetivo.....	2
1.3 Justificación	2
1.4 Metodología	3
1.5 Contenido de la tesis	4
CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA CON IMANES PERMANENTES.....	6
2.1 Breve historia de las máquinas eléctricas y su evolución.	6
2.2 Definición de una máquina eléctrica y conceptos básicos.	14
2.3 Principios básicos de la teoría generalizada de las máquinas eléctricas.....	30
2.4 Principios de transformación a los marcos de referencia $\alpha \beta\gamma$ y $dq0$	46
CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.....	59

3.1 Modelo en $dq0$ del generador síncrono de imanes permanentes (PMGS).	59
3.2 Ecuaciones de corrientes y enlace de flujo del PMGS.....	62
3.3 Conversión del voltaje de abc a $dq0$	80
3.4 Ecuación de potencia eléctrica y Par eléctrico del PMGS.	83
3.5 Relación de Par eléctrico y velocidad del rotor del PMGS.....	85
3.6 Transformación del modelo del PMGS $dq0$ a abc	86
CAPITULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.	87
4.1 Introducción a la simulación del PMSG en Matlab Simulink®.....	87
4.2 Simulación de la matriz de Clark-Park en Matlab Simulink®.	90
4.3 Simulación de la inversa de la matriz de Clark-Park en Matlab Simulink®. .	94
4.4 Simulación del PMSG en $dq0$ en Matlab Simulink®.....	97
4.5 Respuesta del PMSG en $dq0$ Y abc en Matlab Simulink®.....	103
CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	113
5.1 Conclusiones.	113
5.2 Recomendaciones.	115
APÉNDICE A: IDENTIDADES Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.....	116
A.1 Razones trigonométricas de ángulos notables	116
A.2 Suma y diferencias de ángulos dobles	116
A.3 Productos de senos y cosenos.....	116
BIBLIOGRAFÍA	117

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Generador electrostático de Otto Von Guericke.	6
Figura 2.2 Generador Electrostático de Francis Hawksbee	7
Figura 2.3 La Botella de Leyden.	8
Figura 2.4 La Máquina de Wimshurst.	9
Figura 2.5 El Dínamo de Faraday.	10
Figura 2.6 El primer prototipo de generador eléctrico de CD.	11
Figura 2.7 La máquina de inducción de Tesla.	12
Figura 2.8 La máquina síncrona.	13
Figura 2.9 Máquina síncrona de imanes permanentes.	14
Figura 2.10 Desplazamiento de una carga en un campo eléctrico	16
Figura 2.11 La trayectoria Amperiana	17
Figura 2.12 La fuerza magnetomotriz	18
Figura 2.13 Flujo magnético.....	19
Figura 2.14 Transformador eléctrico ideal.....	23
Figura 2.15 Una partícula cargada.....	26
Figura 2.16 Una espira de corriente.....	27
Figura 2.17 El electroimán	28
Figura 2.18 Transformador eléctrico	32
Figura 2.19 Transformador trifásico eléctrico.....	35
Figura 2.20 Motor de reluctancia monofásico	36
Figura 2.21 Relación de ángulos eléctricos y mecánicos.....	41
Figura 2.22 Máquina de rotor cilíndrico trifásico a dos polos	46
Figura 2.23 Marco de referencia ortogonal $\alpha\beta$	47
Figura 2.24 Marco de referencia ortonormal $\alpha\beta\gamma$	50
Figura 2.25 Marco de referencia ortonormal dq	51
Figura 2.26 Marco de referencia ortonormal $dq0$	52
Figura 2.27 Eje de directa y cuadratura	58
Figura 3.1 El PMSG	59

Figura 3.2 Configuraciones del PMSG (a) montando imanes superficiales, (b) montado de imanes interiores.	60
Figura 3.3 Configuración de la PMSG (a) montando imanes superficiales, (b) montado de imanes interiores. En los ejes de directa y cuadratura	61
Figura 3.4 Prototipo del PMSG en abc	63
Figura 3.5 Prototipo del PMSG en $dq0$	77
Figura 3.6 Circuito eléctrico equivalente de la PMSG en $dq0$	79
Figura 4.1 Bloques de Matlab Simulink®	87
Figura 4.2 Voltaje pico, velocidad del sistema, y Angulo de desfase.	88
Figura 4.3 Respuesta del voltaje en abc	89
Figura 4.4 Funciones de la fuente trifásica en abc	89
Figura 4.5 Diagrama de simulación de la matriz de Clark.....	90
Figura 4.6 Respuesta en $\alpha\beta\gamma$	91
Figura 4.7 Respuesta individual en $\alpha\beta\gamma$	92
Figura 4.8 Diagrama de simulación de la matriz de $dq0$	92
Figura 4.9 Respuesta de $dq0$	93
Figura 4.10 Respuesta individual en $dq0$	93
Figura 4.11 Diagrama sistema general de conversión de abc a $dq0$	94
Figura 4.12 Diagrama de simulación de la matriz inversa de $dq0$	95
Figura 4.13 Respuesta de la matriz inversa de $dq0$	95
Figura 4.14 Diagrama de simulación de la matriz inversa de $\alpha\beta\gamma$	96
Figura 4.15 Respuesta de la matriz inversa de $\alpha\beta\gamma$	96
Figura 4.16 Diagrama de sistema general del inverso de conversión de $dq0$ a abc	97
Figura 4.17 Diagrama de simulación de id	98
Figura 4.18 Diagrama de simulación de iq	98
Figura 4.19 Diagrama de simulación de $i0$	99
Figura 4.20 Diagrama de simulación de $idq0$	99
Figura 4.21 Diagrama de simulación del Par eléctrico Te	100
Figura 4.22 Diagrama de simulación de la velocidad mecánica ωm	100
Figura 4.23 Diagrama general del PMSG	101

Figura 4.24 Diagrama del PMSG junto con la ecuación de ωm	101
Figura 4.25 Diagrama general de simulación.....	102
Figura 4.26 Diagrama general de simulación con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®.....	104
Figura 4.27 Voltaje en abc del sistema	104
Figura 4.28 Voltaje en $dq0$	105
Figura 4.29 Voltaje en $dq0$ con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®	105
.....	
Figura 4.30 Corrientes en $dq0$	106
Figura 4.31 Corrientes en $dq0$ con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®	106
Figura 4.32 Corrientes en abc a) simulación del sistema propuesto b) simulación con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®.....	107
Figura 4.33 Par eléctrico y Par de carga.....	108
Figura 4.34 Par eléctrico y Par de carga con la transformada de Clark-Par de Matlab Simulink®	108
Figura 4.35 Velocidad angular del rotor y velocidad angular mecánica	109
Figura 4.36 Velocidad del rotor y mecánica con la transformada de Matlab Simulink®	109
.....	
Figura 4.37 Ángulo mecánico y eléctrico	110
Figura 4.38 Ángulo mecánico y eléctrico con la transformada de Matlab Simulink®	110
.....	
Figura 4.39 Corrientes en $dq0$	111
Figura 4.40 Par eléctrico y Par de carga.....	111
Figura 4.41 Velocidad del rotor y velocidad mecánica.....	112
Figura 4.42 Ángulo eléctrico y ángulo mecánico.....	112

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Importancia de los generadores síncronos de imanes permanentes.

Los generadores síncronos son muy utilizados por su velocidad constante, por el sincronismo del campo con la armadura, su eficiencia, su estabilidad, la capacidad que tiene de regular el voltaje; a medida que se tiene caídas de voltaje por inyección de carga en el sistema, de igual manera por su capacidad de entregar o consumir potencia reactiva y la robustez que proporciona al sistema eléctrico.

Para la generación de energía eléctrica con fuentes renovables, se tiene la innovación del generador síncrono con imanes permanentes, conocido en inglés *permanent magnet synchronous generator* (PMSG). Éste tiene una mayor eficiencia, un alto Par eléctrico, con un menor tamaño; por lo que lo que disminuye el volumen y peso. En cuestión mecánica, no es necesario contar con la caja de cambio de velocidad, prácticamente se tiene poco mantenimiento electromecánico, caso contrario a los generadores asíncronos y de corriente directa que requieren de mayor mantenimiento constante. El PMSG es de mayor confianza al operarlo, ya que se cuenta con la mayor confiabilidad y disponibilidad, los cuáles son dos conceptos importantes en un análisis de falla en los sistemas. En lo que concierne el PMSG, contribuye a la generación de energía renovable o limpia. Las desventajas del PMSG

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

consistiría la compleja estructura electromagnética, la alta manufactura de construcción, desgaste magnético con forme al paso del tiempo de los imanes permanentes, de la misma manera, es necesario contar con un inversor de potencia muy eficiente, que tenga capacidad de manejar altas velocidades y las variaciones de ésta. Por tal motivo es bueno conocer el comportamiento dinámico del PMSG.

El enfoque de este trabajo constará principalmente en obtener el modelo matemático y su respuesta dinámica del PMSG, realizando la simulación de dicho modelo, llegando a obtener la respuesta principalmente de las variables como las corrientes, los voltajes y el Par eléctrico del generador, en el marco de referencia $dq0$ y en abc de tal manera que se conozca el comportamiento de esta máquina eléctrica.

1.2 Objetivo

En esta tesis se dará el enfoque en la deducción del modelo matemático del PMSG, en el marco de referencia $dq0$, usando la matriz transformación de Clark-Park, (conocida como Matriz de Park mayormente) el modelo del PMSG será de manera general considerando ciertas restricciones, que se darán a conocer más adelante, sin entrar tanto a detalles de los tipos de diseños de la máquina, aunque se dará referencias de los tipos de configuraciones. Una vez desarrollado el modelo, se llevará a cabo la realización de los diagramas de simulación y la simulación del modelado; obteniendo así, la respuesta transitoria y estable del PMSG, tanto como en el marco de referencia $dq0$ y en abc en Matlab Simulink®, el cual se tendrá una idea del comportamiento del PMSG.

1.3 Justificación

Es importante conocer el comportamiento del PMSG, ya que hoy en día las fuentes de energías renovables, se están implementado más y más. Países como Dinamarca, Inglaterra, etc.; son los ejes principales en la generación de este tipo de energía, llegando a generar hasta un 30% en su generación nacional. El cual, también a nivel mundial, ha

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

crecido la idea de la generación de energía eléctrica de manera limpia y segura; sin el uso de carbón o combustóleo u otros combustibles fósiles o de plantas nucleoelectricas que tienen mayor riesgo de contaminación por radiación atómica. La razón principal de crecimiento de generación de energía eléctrica por medio de las fuentes renovables es el efecto climático, que se ha tenido, como el efecto de invernadero causado por la contaminación; por el uso excesivo de combustibles fósiles y los daños causados al ambiente, por la radiación atómica del uranio. Esto ha hecho que las personas tengan más confianza en la generación eléctrica a través de fuentes renovables. En México existe una meta, para el año 2026 se debe tener un 35% en generación eléctrica a través de fuentes renovables, siendo la eólica la más relevante; haciendo hincapié a la generación híbrida, (principalmente hidroeléctrica combinada con la eólica) esto hace que el PMSG tenga mayor relevancia en su estudio; por ello en este trabajo se aborda para conocer y entender esta máquina. Ya que un aerogenerador trabaja 60% a 80% del tiempo, opera a su potencia nominal 10% del tiempo de trabajo. En un día promedio, se genera de 30% a 35% de la energía que se generaría si se trabajará a potencia nominal todo el tiempo.

1.4 Metodología

En esta tesis, se comenzará por una breve historia de la evolución de las máquinas eléctricas, conocer las leyes básicas que rigen dichas máquinas eléctricas y los fundamentos básicos de la teoría generalizada de máquinas eléctricas, donde se basará la deducción del modelo del PMSG, y por lo consecuente de otras máquinas, pero la prioridad es conocer el modelo dinámico del PMSG, al mismo tiempo la deducción de la transformación del marco de referencia de abc a $dq0$, de la misma manera la transformación inversa del marco de referencia de $dq0$ a abc . Después de haber presentado los fundamentos y las herramientas necesarias para poder deducir el modelo del PMSG; se procede a deducir el modelo del PMSG, realizando la conversión en el marco de referencia $dq0$. El modelo será deducido de manera general en base a las investigaciones y los artículos leídos.

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

Una vez obtenido el modelo matemático, se desarrollará los diagramas de simulación, y a la vez obtener su respuesta dinámica por medio de una simulación en Matlab Simulink®. Donde de igual manera, se dará a conocer el proceso de obtención del modelo matemático y los diagramas de simulación, paso a paso; de igual manera, la respuesta de las variables de estado propuestas. Una vez hecho estos pasos se obtendrá conclusiones elementales, sobre los resultados observados de su comportamiento.

1.5 Contenido de la tesis

En el capítulo uno se incluye una breve introducción sobre la importancia del PMSG, así como el objetivo a lograr, la justificación; donde se expone la razón porque se debe conocer el modelo matemático y respuesta del PMSG, la metodología o el proceso que se llevara a cabo en la investigación de esta tesis, por último, la descripción del contenido de este trabajo en particular.

Para el capítulo dos, se expondrá un breve resumen de la historia de la evolución de las máquinas eléctricas, luego, se presentará algunas de las leyes importantes por el cual se rigen las maquinas eléctricas como la ley de ampere, ley de Faraday-Lenz, ley de las fuerzas electromagnéticas, ley la conservación de la energía. Después de esto, se procederá a dar una presentación de los elementos de la teoría generalizada de máquinas, así como también se dará a conocer, el modelo general de las máquinas eléctricas, en términos del marco de referencia en abc conociendo la ecuación general de voltaje y Par eléctrico, para después proceder a la deducción de la trasformación de variables eléctricas trifásicas, del marco de referencia abc al marco de referencia $\alpha \beta \gamma$ después al marco de referencia $dq0$.

Para el capítulo tres, se desarrollará el modelo matemático del PMSG en espacios de estado, convirtiendo la ecuación general del marco de referencia abc al marco de referencia $dq0$, como se describió en el capítulo dos; aquí se deducirá paso a paso las ecuaciones del PMSG, hasta tener las ecuaciones de voltaje, corriente, potencia eléctrica,

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

Par eléctrico y velocidad angular; por medio de enlace de flujos y corrientes en el marco de referencia $dq0$.

En el capítulo cuatro se realizará los diagramas de simulación y la simulación del modelado matemático del PMSG, por medio de Matlab Simulink®, donde se obtendrá la respuesta en su estado dinámico, para conocer y observar el comportamiento del PMSG.

Por último, en el capítulo cinco se incluirá las conclusiones, observaciones, obtenidas durante la realización de la tesis, del mismo modo, las propuestas y trabajos a futuros sobre el modelado matemático del PMGS.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA CON IMANES PERMANENTES.

2.1 Breve historia de las máquinas eléctricas y su evolución.

El fenómeno eléctrico y magnético data de hace más de dos mil años en la antigüedad (a. de C.), los griegos ya estaban familiarizados con los efectos de la electricidad atmosférica, en particular la del rayo, ya que las tormentas son comunes en las latitudes más meridionales, sin embargo, comprendían muy poco sobre estos fenómenos y no eran capaces de explicar científicamente su razón de ser o naturaleza. Incluso los chinos ya conocían la brújula. (Wikipedia, Historia del Eléctromagnetismo., 2016). No es sino hasta a finales del siglo XVII, que el conocimiento sobre el fenómeno electromagnético es mucho



Figura 2.1 Generador electrostático de Otto Von Guericke.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

más claro y preciso. Es aquí donde el ser humano comienza a inventar las primeras máquinas capaces de generar energía eléctrica.

En 1660 Otto Von Guericke un físico y jurista alemán, inventó el generador electrostático de la figura 2.1, éste generador constaba de un dispositivo mecánico que consistía en una manivela con una bola de azufre (aislador), que se hacía girar con una mano y con la otra se frotaba la bola de azufre. Éste fue el primer dispositivo mecánico, que hoy se conoce como un transductor capaz de convertir energía mecánica a eléctrica, por medio del proceso de la triboelectricidad que consiste en friccionar o frotar dicho objeto con otros. (Epec, 2015). La máquina de Otto Von Guericke era capaz de generar alto voltaje con corrientes continuas muy pequeñas. Posteriormente fue mejorada alrededor del año 1750 por el científico inglés Francis Hawksbee, Litzendorf, y por el Prof. Matthias Georg Bose, véase figura 2.2. Bose fue el primero en emplear el primer conductor en este tipo de máquinas, consistía en una varilla de hierro en la mano de una persona cuyo cuerpo fue aislado por pie sobre un trozo de resina. En estos años se inventaron máquinas eléctricas hechas de cristal. Gracias a la máquina de Otto Von Guericke muchos otros científicos

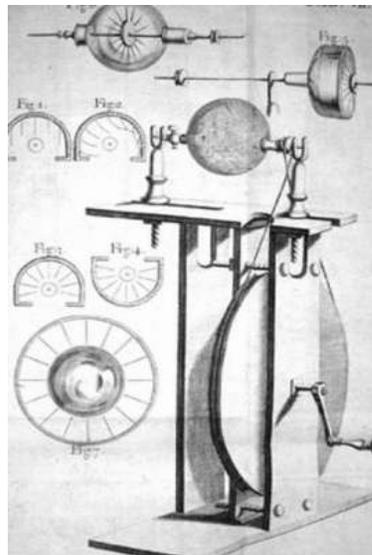


Figura 2.2 Generador Electrostático de Francis Hawksbee

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

experimentaban, por lo que entre más conocían sus propiedades, la electricidad era mayormente controlada.

Otros de los experimentos importantes para esta época, fue la botella de Leyden de la figura 2.3. Constaba de un dispositivo eléctrico realizado con una botella de vidrio, que permitía almacenar cargas eléctricas (también conocido como el primer capacitor). Fue recreado independientemente, por el científico alemán Ewald Georg von Kleist, y por Pieter van Musschenbroek en 1746. (Wikipedia, Botella de Leyden, 2016). Este invento permitió saber que existen elementos capaces de generar un potencial eléctrico.

Otros de los fenómenos importantes descubiertos para estas épocas es el fenómeno de la inducción electrostática, quien lo descubrió fue el científico británico John Canton en 1753, en conjunto con el profesor sueco Johan Carl Wilcke en 1762. La inducción electrostática, no es otra cosa más que la inyección de cargas eléctricas de un material a otro, esta investigación dio paso a otra máquina eléctrica llamada la máquina de influencia, también es conocida como la máquina de Wimshurst (Martín, 2004) de la figura 2.4. Esta máquina era un generador electrostático de alto voltaje, que regularmente consistía en dos discos que rotaban en sentido opuesto, montadas en un eje vertical donde también contaba con dos barras metálicas, con cepillos metálicos y dos esferas de metal; separadas donde

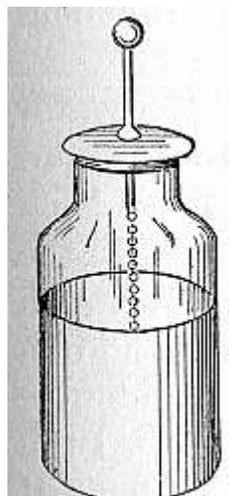


Figura 2.3 La Botella de Leyden.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

pasaban las chispas. El desequilibrio de cargas es inducido, amplificado y almacenado por dos pares de peines de metal con los puntos situados cerca de la superficie de cada disco. Estos colectores se montan sobre un soporte aislante y conectado a una salida terminal. La retroalimentación positiva, aumenta la acumulación de cargas en forma exponencial hasta que la tensión de ruptura dieléctrica del aire alcanza dar una chispa. Este fue el primer generador de energía eléctrica continua con un tipo de escobillas, conocido en esta época.

Para estas épocas el físico y químico danés Hans Christian Ørsted (1777-1851), estaba demostrando la interacción entre el magnetismo y la electricidad, mediante la observación del movimiento de una brújula puesta cerca de un hilo recorrido por corriente eléctrica. (bibliografica, 2004). Esto provocó que el físico y matemático francés André-Marie Ampere (1775-1836), considerado como uno de los descubridores del electromagnetismo, comprobará su teoría electromagnética y su famosa ley Ampere. (funciona, 2004). Más tarde Georg Simón Ohm (1789-1854), un físico y matemático alemán que estudió la relación entre el voltaje V aplicado a una resistencia R y la intensidad de corriente I que circula por ella. El cual en el año 1827 formuló la ley que lleva su nombre (la ley de Ohm). Toda esta teoría

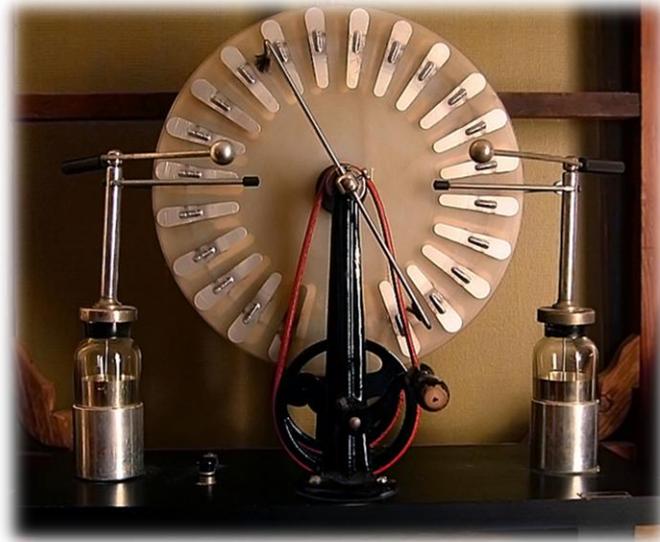


Figura 2.4 La Máquina de Wimshurst.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

formulada ayudo a que las máquinas eléctricas, tengan un desarrollo de manera más fácil. Pero no fue hasta que el estadounidense Joseph Henry (1797-1878) un físico que investigó el electromagnetismo y sus aplicaciones en electroimanes y relés. Descubrió la inducción electromagnética, que en su honor se denominó Henry (símbolo H) a la unidad de inductancia, castellanizada como Henrio. Simultánea e independientemente Michael Faraday, FRS (Newington, 22 de septiembre de 1791-Londres, 25 de agosto de 1867), un físico y químico británico que estudió el electromagnetismo y la electroquímica, que observó que un campo magnético variable puede inducir una fuerza electromotriz en un circuito cerrado.

Dado a estos descubrimientos la principal aportación fue la ley de la inducción electromagnética descubierta por medio de experimentos, dice que puede existir un voltaje inducido al existir un cambio en el flujo magnético, a su vez esta ley, dio un paso para poder entender un poco más el fenómeno electromagnético el cuál ayudó a construir los primeros generadores y motores eléctricos.

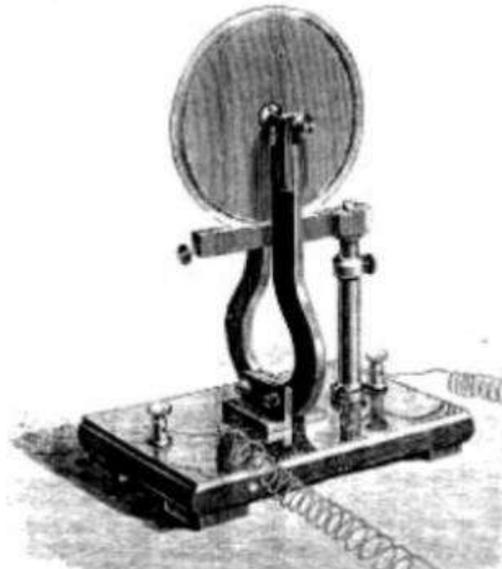


Figura 2.5 El Dínamo de Faraday.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.



Figura 2.6 El primer prototipo de generador eléctrico de CD.

El primer generador eléctrico de inducción fue llamado dínamo de la figura 2.5, inventado por Faraday. A partir de este tiempo Heinrich Friedrich Emil Lenz (12 de febrero de 1804 - 10 de febrero de 1865) (Wikipedia, Heinrich Lenz, 2015), donde a partir de sus investigaciones formula que al existir una tensión se genera una fuerza electromotriz que se opone al paso de la corriente. Con estas leyes se da el comienzo del diseño de las primeras máquinas eléctricas de manera artesanal.

Más tarde James Clerk Maxwell (Edimburgo, Reino Unido; 13 de junio de 1831- Cambridge, Inglaterra; 5 de noviembre de 1879), un físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad anteriores. Éste físico fue quien dio una pauta teórica electromagnética, a la unión de los fenómenos electromagnéticos, a partir de aquí comienza la búsqueda del desarrollo de modelos matemáticos para las máquinas

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

eléctricas el cual al mismo tiempo se van creando máquinas; tal como el primer prototipo de generador eléctrico de la figura 2.6 , desarrollado por Hippolyte Pixii, el instrumento consistía en un imán rotatorio, manejado manualmente con una manivela, en el cual los polos norte (positivo) y sur (negativo) se hacen pasar sobre una bobina con un núcleo de hierro. Cada vez que un polo pasaba sobre la bobina se producía un pulso eléctrico. Esta máquina eléctrica que abarca el tiempo desde 1831 hasta 1851, está enlazado ininterrumpidamente con los nombres de los científicos rusos E. J. Lenz y B. S. Jacobi. La máquina de corriente continua adquirió los rasgos fundamentales de la construcción moderna. Fueron propuestas y realizadas: la máquina con autoexcitación de Gramme y el inducido de anillo de Pacinotti; el tipo hoy día normal de inducido de tambor (Hefner - Altenek, año 1871).

Más tarde el primer prototipo de motor eléctrico, capaz de funcionar con corriente alterna véase la figura 2.7 fue desarrollado y construido por el ingeniero Nikola Tesla (Smiljan, actual Croacia, 1856 - Nueva York, 1943) Físico e ingeniero electromecánico

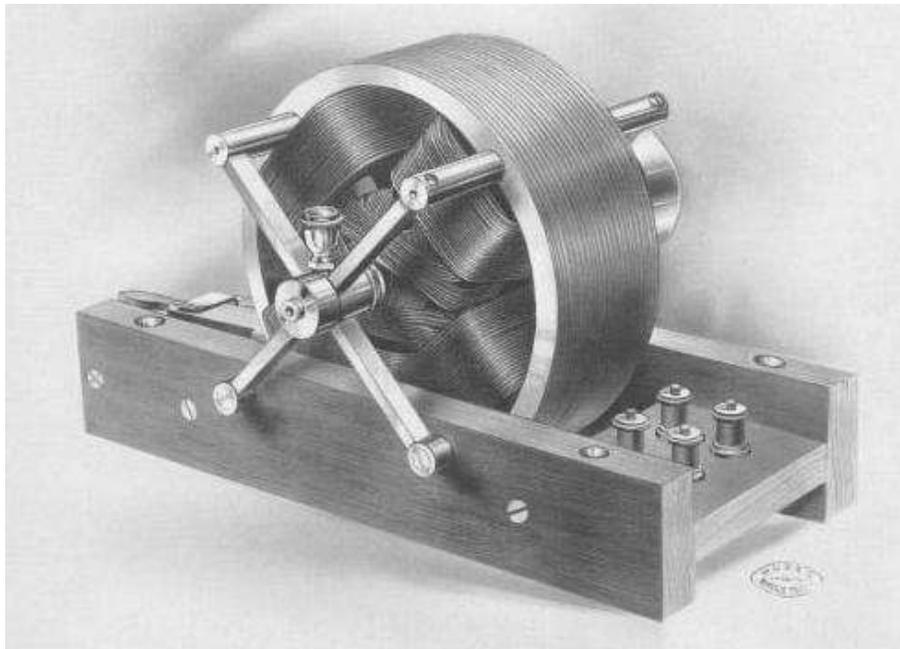


Figura 2.7 La máquina de inducción de Tesla.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

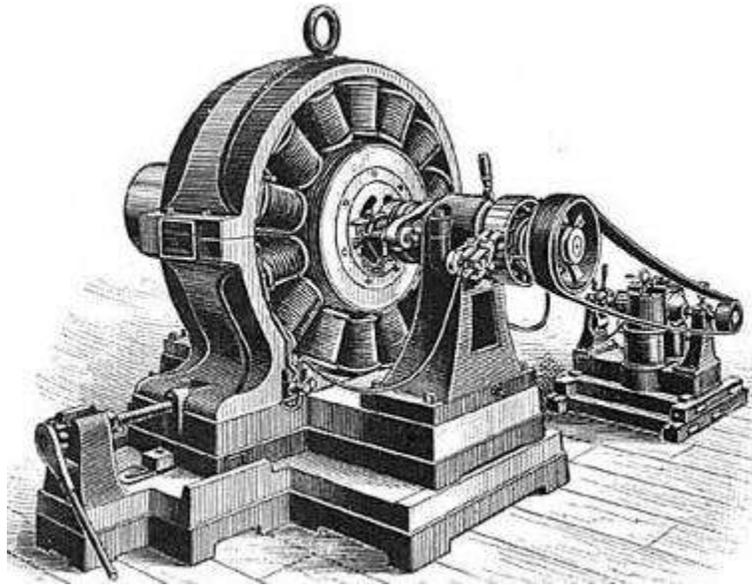


Figura 2.8 La máquina síncrona.

estadounidense de origen serbio. Estudió en las universidades de Graz (Austria) y Praga. (bibliografica, 2004). A través del descubrimiento del campo magnético giratorio, hecho por Nikola Tesla, se desarrolla la máquina síncrona, véase la figura 2.8. Cuya característica es tener una velocidad sincronizada del campo magnético trifásico generado con la armadura; con una alimentación en el rotor en corriente continua esto hace que gire a velocidad constante cuyo caso fuera motor como generador este genera el de manera inversa. A partir de la máquina síncrona nace el concepto de la máquina síncrona con imanes permanentes, eliminando el devanado del rotor siendo reemplazado por imanes permanentes tal como lo muestra la figura 2.9.

A partir de estos modelos, los ingenieros de a principios del siglo XX buscaron la forma de diseñar matemáticamente un modelo, donde las máquinas puedan ser representadas independientemente del tipo o modelo que sea. Para ello, varios ingenieros e investigadores como Blondel, Doherty, Nickle, Kron, Clarck, Park, Krause y entre otros propusieron sus teorías matemáticas, el cual hoy en día se conoce como la teoría generalizada de las

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.



Figura 2.9 Máquina síncrona de imanes permanentes.

máquinas eléctricas, donde se combina el álgebra lineal con ecuaciones diferenciales, usando matrices o álgebra matricial que más adelante se da un estudio general. Cabe mencionar, que el enfoque principal es en estudiar a la máquina de imanes permanentes para el uso de generación eléctrica a través de fuentes alternas de energía.

2.2 Definición de una máquina eléctrica y conceptos básicos.

Una máquina eléctrica se define como: un dispositivo que puede convertir energía mecánica a energía eléctrica (principio generador), o bien energía eléctrica a energía mecánica (principio motor) a través de la acción de los campos magnéticos (Chapman, 2000). Aunque una máquina eléctrica no solo se refiere a los motores, también se tiene a los transformadores que se define como: un dispositivo que convierte energía eléctrica de corriente alterna de un cierto nivel de voltaje a otro nivel de voltaje. (Chapman, 2000). Cabe decir que estos principios mencionados son los que rigen generalmente a las máquinas

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

eléctrica, a continuación, se menciona algunas leyes por el cual se rigen las máquinas eléctricas donde tales principios son físicos, eléctricos y magnéticos.

2.2.1 Campo eléctrico y campo magnético

El campo eléctrico y el campo magnético son dos fenómenos correlacionados entre sí y ambos están presentes en las máquinas eléctricas, estos campos se sostienen uno al otro y forman una onda electromagnética que se propaga a través del espacio (Young, Huhg D. y Roger A. Freedman, 2009), sin embargo, se requiere tomar algunos conceptos básicos para poder entender el fenómeno eléctrico y magnético en una máquina eléctrica, como es el caso el generador síncrono con imanes permanentes el cual es el interés de esta tesis.

2.2.2 Intensidad del campo eléctrico y diferencia de potencial

La diferencia de potencial o voltaje, desde el punto de vista de teoría electromagnética es la energía necesaria para mover una carga puntual de un punto A a otro punto B de un campo eléctrico, de acuerdo con (William H. Hayt, JR Y John A. Buck, 2006) y (Sadiku, Matthew N. O., 2002) el diferencial de energía está dado por la ecuación (2.1)

$$dW = -F \cdot dl \quad (2.1)$$

Donde la fuerza eléctrica queda definida por la ecuación (2.2) de manera general.

$$F = Q \cdot E \quad (2.2)$$

Donde:

F= fuerza electrostática que es una cantidad vectorial.

E=intensidad del campo eléctrico que es una cantidad vectorial.

Q= la carga con la que interactúa el campo eléctrico.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Al sustituir la ecuación (2.2) en (2.1) se obtiene la ecuación (2.3) expresada a manera de una integral.

$$W = -Q. \int E. dl \quad (2.3)$$

Si se realiza la división del trabajo sobre la carga que se desea mover se obtiene la diferencia de potencial eléctrico conocido como voltaje (2.4).

$$\frac{W}{Q} = -V_{ab} = - \int_a^b E. dl \quad (V) \quad (2.4)$$

Como resultado se tiene un producto escalar. Prácticamente esta expresión de voltaje que como unidad son los (volts). Esta ley se muestra de manera gráfica en la figura 2.10. Por lo tanto, si se desea mover una carga en un campo eléctrico es necesario una diferencia de potencial y esta diferencia de potencial es proporcional a la integral de línea o trayectoria del movimiento de la carga multiplicada por a la intensidad del campo eléctrico.

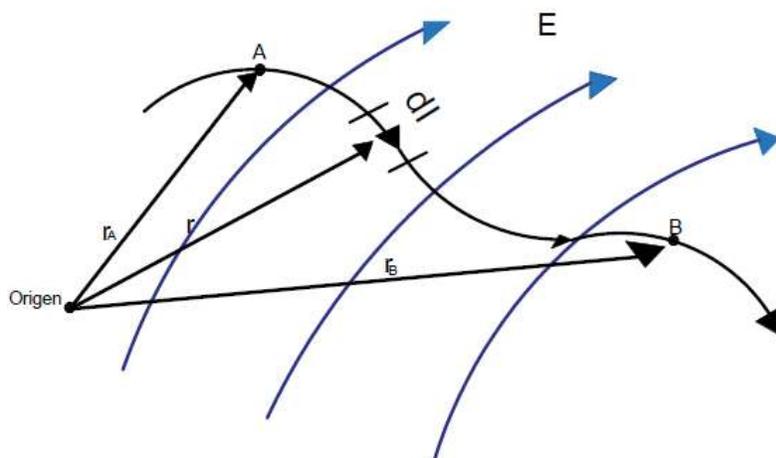


Figura 2.10 Desplazamiento de una carga en un campo eléctrico

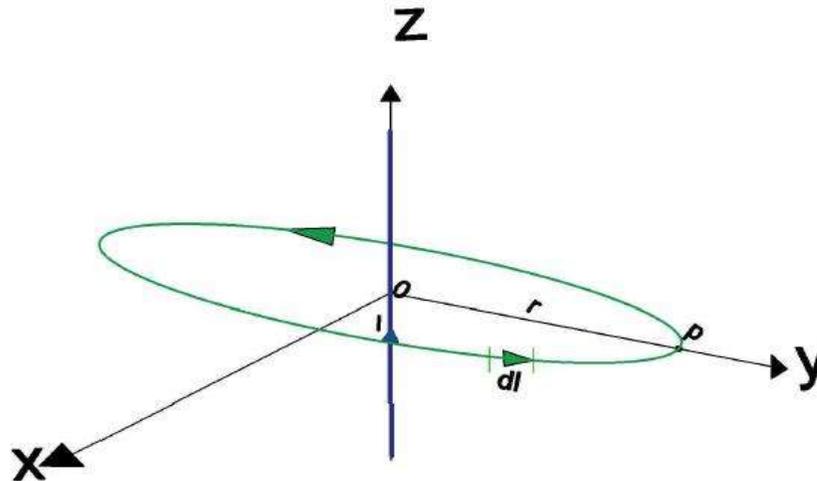


Figura 2.11 La trayectoria Amperiana

2.2.3 La ley de los circuitos de ampere

En las máquinas eléctricas la transformación de la energía, no es directamente de *mecánica-eléctrica* (principio generador) o *eléctrica-mecánica*, existe un intermediario que es el campo magnético, que es generado al existir una corriente en los devanados o espiras, por lo que la energía en las máquinas eléctricas tiene el siguiente proceso: *eléctrica-magnética-mecánica* o bien *mecánica-magnética-eléctrica*; para el caso del transformador es el siguiente *eléctrica -magnética-eléctrica*.

Para el proceso *eléctrico-magnético* es descrito por la ley de ampere. Que se define de la siguiente manera: “La ley de los circuitos de ampere establece que la integral de la línea de la componente tangencial de H alrededor de una trayectoria cerrada es igual a la corriente neta encerrada”. (Sadiku, Matthew N. O., 2002) Al igual como lo define: (William H. Hayt, JR Y John A. Buck, 2006) “la ley circuital de Ampere establece que la integral de línea de H (intensidad de campo magnético) sobre cualquier trayectoria cerrada es exactamente igual a la corriente encerrada por dicha trayectoria.” Expresada en la ecuación vectorial (2.5), véase la figura 2.11.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

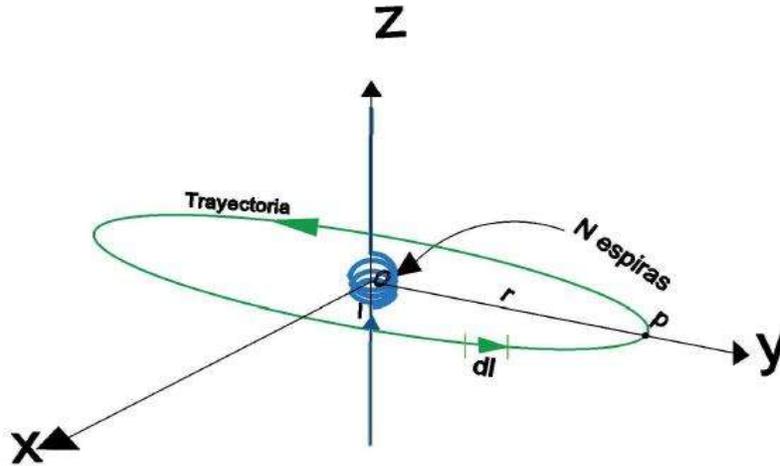


Figura 2.12 La fuerza magnetomotriz

$$I_{enc} = \oint H \cdot dl \tag{2.5}$$

La intensidad de campo eléctrico está mutuamente relacionada con la distancia. La ley indica, que entre más cerca sea el campo magnético más intensidad se tiene o el efecto es mayor. Algo relacionado con la ley circuital de ampere es la fuerza magnetomotriz, el cual se basa; en que se tiene una bobina con N números de vueltas puede ser expresado por la ecuación (2.6), (William H. Hayt, JR Y John A. Buck, 2006) el cual, también se representa por la figura 2.12.

$$\mathfrak{F}_{mm} = NI_{enc} = \oint H \cdot dl \tag{2.6}$$

Cabe mencionar que la densidad del flujo magnético, está definida por la ecuación (2.7). Por lo que la variable de fuerza magneto motriz \mathfrak{F}_{mm} tiene que ver con el voltaje de magnetización V_m , donde al mismo tiempo tiene una relación con el flujo magnético expresado en la ecuación (2.8).

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

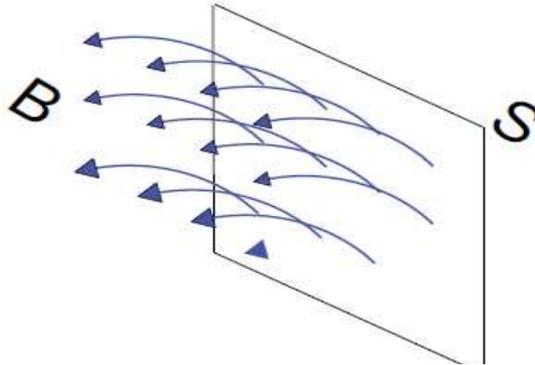


Figura 2.13 Flujo magnético

$$B = \mu \cdot H \quad (2.7)$$

$$\mathcal{F}_{mm} = \psi \mathcal{R} \quad (2.8)$$

Aquí entra en juego otro parámetro importante llamado reluctancia \mathcal{R} el cual tiene que ver con el tipo de material, su estructura física y geométrica donde el flujo magnético fluirá. El flujo magnético está expresado por la ecuación (2.9).

$$\psi = \int B \cdot ds \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) tiene la siguiente interpretación geométrica mostrada en la figura 2.13, donde se ve que el flujo magnético tiene una dirección en un área determinada.

2.2.4 Ley de Lenz-Faraday

Todas las máquinas eléctricas, se rigen principalmente por esta ley. Donde Michael Faraday en Londres y Joseph Henry en New York, descubrieron que un campo magnético variable en el tiempo producía una corriente eléctrica, de acuerdo con estos experimentos

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

de Faraday dice: un campo magnético estático $H(x, y, z)$ no produce flujo de corriente (a menos que esté campo este en un movimiento en el espacio tal como se verá más adelante), pero un campo variable en el tiempo $H(x, y, z, t)$ produce un voltaje inducido (fuerza electromotriz) y al cerrar el circuito se produce un flujo de corriente (Sadiku, Matthew N. O., 2002), esto quiere decir que al mismo tiempo que al existir campos magnéticos variantes en el tiempo $H(x, y, z, t)$ existen campos eléctricos variantes en el tiempo $E(x, y, z, t)$.

De acuerdo con (William H. Hayt, JR Y John A. Buck, 2006) y (Sadiku, Matthew N. O., 2002), Faraday descubrió que la fuerza electromotriz inducida V_{fe} (Volts) en un circuito cerrado es igual a la rapidez del cambio del eslabonamiento del flujo magnético por el circuito.

$$V_{fe} = -\frac{d\lambda}{dt} \quad (2.10)$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton: Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto, por ello lleva el signo negativo.

El eslabonamiento es proporcional al flujo magnético multiplicado por el número de espiras o vueltas N , expresado con la ecuación (2.11).

$$\lambda = N\psi \quad (2.11)$$

El cual al sustituir la ecuación (2.10) y (2.11) queda expresado en la ecuación (2.12)

$$V_{fe} = -N\frac{d\psi}{dt} \quad (2.12)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Esta ecuación representa la ley de Faraday, donde expresa que para existir un voltaje inducido debe existir una variación del flujo magnético. Dicho flujo magnético puede variar de dos formas principalmente con respecto al tiempo que es lo más habitual, a través del movimiento del material que contiene el campo magnético o de las dos formas simultáneas.

El eslabonamiento del flujo magnético, de igual manera, es proporcional a la corriente inducida en el material por lo que se tiene la expresión (2.13).

$$\lambda \propto i \tag{2.13}$$

Al existir una proporcionalidad entre el flujo magnético generado y la corriente que lo genera, por lo cual existe una constante de proporcionalidad; llamada inductancia que esta es puramente dependiente de las características físicas del material (2.14).

$$\lambda = L i \tag{2.14}$$

Por lo cual al sustituir la ecuación (2.14) en la (2.10) se tiene como resultado con la ecuación (2.15).

$$V_{fe} = -L \frac{di}{dt} \tag{2.15}$$

Dicha ecuación se le conoce también como la ley de Lenz que dice: “la dirección del flujo de corriente en el circuito es tal que el campo magnético resultante de la corriente inducida se opondrá al campo magnético que lo origina.” (Sadiku, Matthew N. O., 2002) Concuera con la ley de Faraday, sólo que ésta es directamente expresada con variables eléctricas.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

La ley de Lenz- Faraday, es aplicable principalmente a generadores electromotrices como: los generadores eléctricos, las baterías, baterías termoelectricas, pilas fotovoltaicas, etc.

Anteriormente se hizo mención de dos casos importantes por el cual se puede realizar un análisis de como la ley de Lenz-Faraday, donde se explica de qué forma se puede inducir un voltaje. Analizando la relación entre campo eléctrico y magnético dentro de los parámetros de la ley de Faraday, se tiene la ecuación (2.12). Por lo que anteriormente se definió la diferencia potencial (2.4) y el flujo magnético (2.9) la expresión queda definida por la expresión (2.16).

$$V_{fe} = -N \frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = - \int_a^b E \cdot dl = -N \frac{d}{dt} \int B \cdot ds \quad (2.16)$$

La expresión siguiente se tiene la relación entre un campo magnético y eléctrico. Por lo que la ley de Faraday llega a cumplirse, para poder generar un campo eléctrico o en este caso para poder generar una diferencia de potencial, es necesario tener un campo magnético que sea variable en tiempo y mantener estático el material que lo contiene, o bien, un campo magnético invariante en el tiempo, pero el material que lo contiene debe estar en continuo movimiento o desplazamiento en el espacio, o bien como se mencionó anteriormente ambas cosas a la vez deben de variar el campo magnético en el tiempo y moviendo el material que lo contiene.

2.2.5 Ley de la transformación y conservación de la energía en las maquinas eléctricas

Una cosa muy importante al analizar los fenómenos eléctricos, magnéticos y mecánicos es que: La energía nunca se crea ni se destruye, sólo cambia de forma (Young, Huhg D. y Roger A. Freedman, 2009) todas las máquinas basan sus transformaciones

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

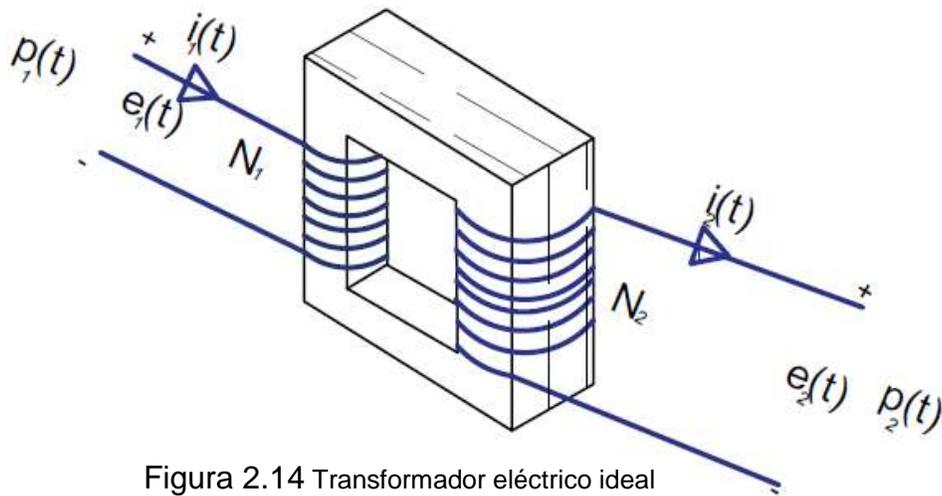


Figura 2.14 Transformador eléctrico ideal

energéticas en dicha ley de la conservación de la energía, el cual también las máquinas eléctricas están regidas bajo dicha ley de la conservación de la energía.

Para ilustrar esta ley se usará el transformador ideal. Considerándolo sin pérdidas en el que la bobina primaria y la secundaria, y que se tienen autoinductancias infinitas representada por la figura 2.14. La ley de la conservación de la energía, en las máquinas eléctricas se define el voltaje inducido por medio de la ley de Lenz, que es la ecuación (2.15), tomando en consideración que en el transformador existe la inductancia propia de cada bobina y la mutua entre ellas se tiene las ecuaciones del voltaje inducido (2.16) y (2.17) de acuerdo con (Sadiku, Matthew N. O., 2002).

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_2}{dt} \quad (2.16)$$

La ecuación (2.17) es para la parte secundaria del transformador quedando definido:

$$e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + L_m \frac{di_1}{dt} \quad (2.17)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Esto es considerando que las inductancias mutuas son iguales para ambos lados, sabemos que la potencia queda de finida por la ecuación (2.18).

$$P = v * i \quad (2.18)$$

Por lo que las potencias para ambos lados quedan expresadas (2.19) y (2.20)

$$p_1 = i_1 e_1 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_m i_1 \frac{di_2}{dt} \quad (2.19)$$

$$p_2 = i_2 e_2 = L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + L_m i_2 \frac{di_1}{dt} \quad (2.20)$$

Para un transformador tanto como para otras máquinas se cumple que :

$$P_1 = P_2 = P$$

Entonces igualamos las ecuaciones (2.19) y (2.20).

$$L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_m i_1 \frac{di_2}{dt} = L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + L_m i_2 \frac{di_1}{dt}$$

Se tiene noción que el diferencial de energía esta expresado por (2.21).

$$dW = p dt \quad (2.21)$$

Por lo que se sustituye en (2.19) y (2.20) en (2.21) quedando eliminado el diferencial queda la expresión (2.22).

$$L_1 i_1 di_1 + L_m i_1 di_2 = L_2 i_2 di_2 + L_m i_2 di_1 \quad (2.22)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Realizando la integración de ambos lados queda la expresión (2.23).

$$L_1 \int_{i_0}^i i_1 di_1 + L_m i_1 \int_{i_0}^i di_2 = L_2 \int_{i_0}^i i_2 di_2 + L_m i_2 \int_{i_0}^i di_1 \quad (2.23)$$

Considerando las condiciones iniciales igual a cero se tiene como resultado (2.24).

$$\frac{L_1}{2} i_1^2 + L_m i_1 i_2 = \frac{L_2}{2} i_2^2 + L_m i_2 i_1 \quad (2.24)$$

De manera que se tiene la energía de ambos lados del transformador son iguales:

$$W_1 = W_2$$

O bien al realizar la diferencia se tiene un resultado igual a cero:

$$W_1 - W_2 = 0$$

De esta manera, queda definida que la energía que entra es igual a la que sale de una maquina eléctrica, cabe aclarar que de manera real se debe tomar en consideración las perdidas por efecto Joule, histéresis, por magnetización, etc. Pero al considerar que existe un balance de energía se entiende que las máquinas eléctricas, trabajan bajo los parámetros de esta ley física.

2.2.6 Fuerza y par una espira de corriente

Para poder entender el funcionamiento de los generadores electromotrices es necesario retomar el concepto de fuerza eléctrica y magnética, Par eléctrico y voltaje inducido de acuerdo con (Sadiku, Matthew N. O., 2002). Tal como se muestra en la figura 2.15.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

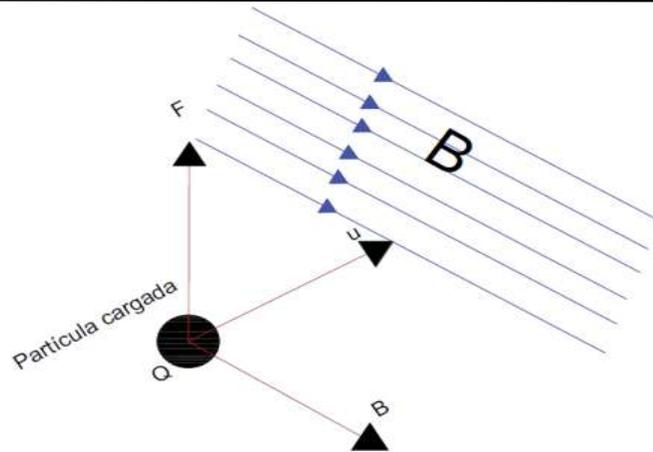


Figura 2.15 Una partícula cargada

Para una partícula cargada en movimiento se demuestra que la fuerza magnética, con una velocidad U en un campo magnético B está dado por la ecuación vectorial (2.26).

$$F_m = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.26)$$

Al aplicar el mismo efecto a un elemento de corriente como se muestra en la figura 2.14, se tiene la ecuación (2.27).

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.27)$$

Donde para el elemento de corriente se tiene la ecuación (2.28).

$$I dl = \frac{dQ}{dt} dl \quad (2.28)$$

Al mismo tiempo, se puede expresar que una carga se mueve a una velocidad de la siguiente manera:

$$I dl = dQ \frac{dl}{dt} = dQU$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

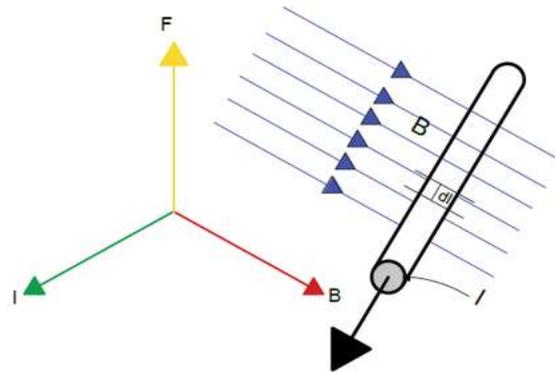


Figura 2.16 Una espira de corriente

Quedando la ecuación (2.29), como un diferencial de fuerza sobre un elemento de corriente incluyendo la sustitución de la ecuación (2.28) queda.

$$dF_m = I dl \times B \quad (2.29)$$

Expresada de manera integral la ecuación (2.29) queda de la siguiente manera:

$$F_m = \oint_{l_0}^l I dl \times B$$

Para un conductor recto en un campo uniforme, se tiene la expresión siguiente, cuya interpretación gráfica es la figura 2.16.

$$F_m = I \cdot L \times B \quad (2.30)$$

Donde la magnitud está dada por la ecuación siguiente:

$$F_m = B \cdot I \cdot L \cdot \sin \theta$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

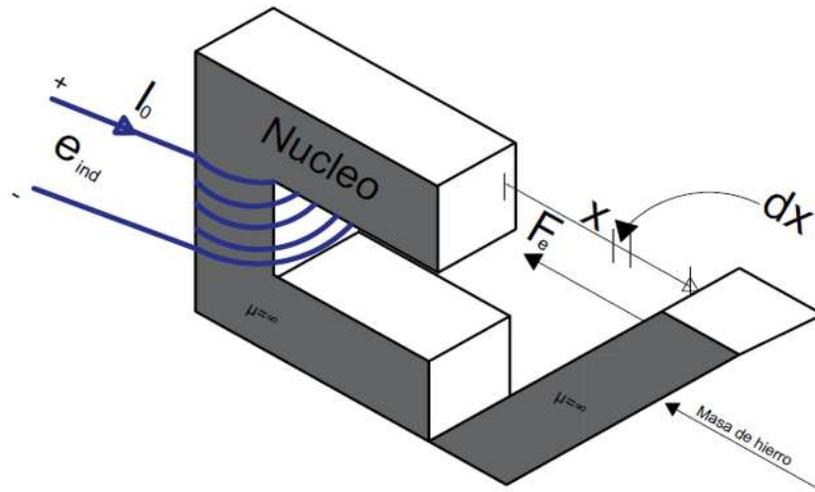


Figura 2.17 El electroimán

Con la ecuación de diferencia de potencial (2.4) aplicándolo para la fuerza magnética aplicada a una espira o carga nos queda que el voltaje inducido está dado por la ecuación según (Syed A. Nasar, 1982).

$$\frac{F_m}{Q} = \frac{Q \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{Q}$$

Prácticamente el voltaje inducido está dado por el movimiento de una espira en un campo magnético externo:

$$e_{ind} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Las definiciones anteriores son en base a exponer un hilo de corriente a un campo magnético, de acuerdo con (Syed A. Nasar, 1982) aplicando la definición de fuerza y energía y en base al desplazamiento lineal, se tiene la ecuación (2.31) que el diferencial de energía eléctrica almacenada queda definido por el producto de la energía eléctrica por el diferencial de desplazamiento o bien el producto de la potencia con el diferencial de tiempo, aplicándolo al electroimán de la figura 2.17.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

$$dW_e = F_e dx = P_e dt \quad (2.31)$$

Donde la potencia eléctrica queda definida por la ecuación (2.32)

$$P_e = I_o e_{ind} = I_o \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.32)$$

O expresándolo en variables eléctricas con la ley de Lenz:

$$P_e = L I_o \frac{dI_o}{dt}$$

Al sustituir (2.32) en (2.31) queda definida la expresión (2.33).

$$dW_e = F_e dx = I_o d\lambda = LI_o dI_o \quad (2.33)$$

Considerando un circuito lineal se tiene que $dW_e = dW_m$, la energía transferida es igual a la energía almacenada magnéticamente. Por lo que la expresión de fuerza eléctrica queda definida por la ecuación (2.34).

$$F_e = \frac{dW_m(\lambda, x)}{dx} \quad (2.34)$$

O bien por la ecuación (2.35)

$$F_e = \frac{dW_m(i, x)}{dx} \quad (2.35)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Para un sistema giratorio o rotacional, de manera similar se tiene que el Par eléctrico las expresiones (2.36) y (2.38).

$$T_e = \frac{dW_m(\lambda, \theta)}{d\theta} \quad (2.36)$$

$$T_e = \frac{dW_m(i, \theta)}{d\theta} \quad (2.37)$$

Para el modelado de las máquinas eléctricas, el Par eléctrico es una cuestión fundamental. Ya que las máquinas eléctricas rotatorias, su función principal es la transducción de energía eléctrica a mecánica o viceversa pasado por el intermediario que es el magnético, y el par juega un papel importante donde: el Par está definido como el momento mecánico de fuerza donde a una espira al aplicarle un campo magnético esta tiende a girar (Sadiku, Matthew N. O., 2002).

2.3 Principios básicos de la teoría generalizada de las máquinas eléctricas.

La teoría generalizada es concebida con la misión de facilitar y abarcar completamente el estudio de los distintos tipos de máquinas eléctricas. Con el uso de una sola teoría unificada, se parte de la idea de incluir el modelo de polos salientes en el estator, donde este se le llamó la teoría generalizada y sirve para representar cualquier máquina eléctrica, siempre y cuando se considere ciertas adecuaciones propias de la naturaleza de cada una de ellas.

Esta teoría gira entorno a las ecuaciones del voltaje instantáneo y del par. Este enfoque, plantea los voltajes instantáneos en el marco de referencia abc en función de las corrientes i_{abc} del mismo modo que el voltaje es instantáneo. Una vez obtenido el modelo,

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

se pasa al marco de referencia $dq0$ de un marco de referencia giratorio a uno estático, para facilitar el estudio de las máquinas eléctricas.

Para el estudio de las máquinas eléctricas se realizan las siguientes consideraciones según (D. O'Kelly and S. Simmons, 1968) Y (Rojas, 2004).

- a. La saturación magnética es ignorada. Se puede aplicar superposición en los campos magnéticos, las inductancias propias y mutuas de todos los devanados son independientes de la magnitud de corriente en el devanado. Es decir, la máquina se estudia como un sistema lineal.
- b. La FMM en el entrehierro y los flujos son solo representados con la componente fundamental.
- c. Los efectos de rasurado se ignoran y los diámetros de los conductores son pequeños.
- d. La conmutación es ideal, el ancho de las escobillas y segmentos del conmutador son ignoradas y el cambio de corriente es instantáneo.
- e. Se desprecian las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas

2.3.1 Ecuación del voltaje en el marco de referencia abc

Para poder explicar los principios de la teoría generalizada, se hace mediante la consideración de dos devanados uno del rotor y otro del estator. Pero antes de ir muy lejos, cabe considerar que las ecuaciones son variantes en el tiempo en un determinado intervalo. Para explicarlo de manera más simple, se empezará con el modelo del transformador el de la figura 2.17, el cual es una máquina estática, sin movimiento giratorio, su función es cambiar los niveles de voltaje, por consecuente la corriente de forma inversa al voltaje el cual se mostró en la sección 2.2.5; que este transductor cumple con la ley de la conservación de la energía.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

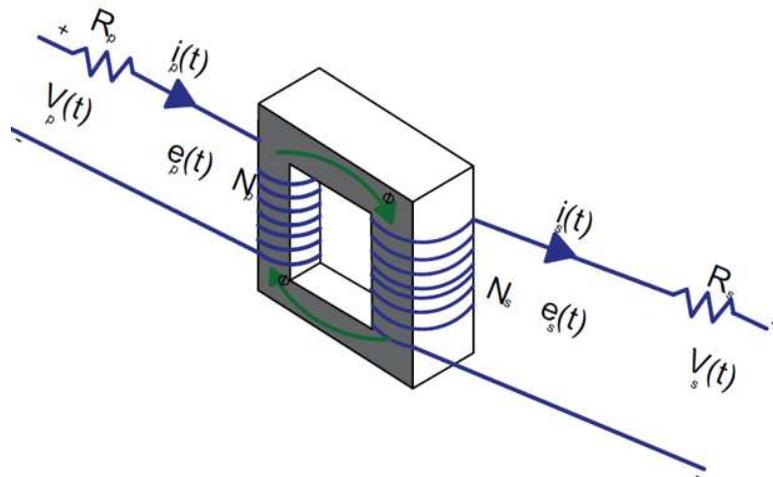


Figura 2.18 Transformador eléctrico

En el transformador de la figura 2.18, se tiene el devanado primario el secundario por lo que se tiene el siguiente sistema de ecuación que variarían en el tiempo, según (Che-Mung Ong, 1998) y (D. O'Kelly and S. Simmons, 1968).

$$v(t)_p = i(t)_p R_p + e(t)_p \quad (2.38)$$

$$v(t)_s = i(t)_s R_s + e(t)_s \quad (2.39)$$

La ecuación (2.38) representa el lado primario del transformador y la ecuación (2.39) representa el lado secundario. Donde el voltaje inducido según la ley de Faraday que es la ecuación (2.10), se expresa para ambos lados del transformador por las siguientes ecuaciones:

$$e(t)_p = \frac{d\lambda(t)_p}{dt}$$

$$e(t)_s = \frac{d\lambda(t)_s}{dt}$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Por lo que las ecuaciones (2.38) y (2.39) quedan expresado por las ecuaciones:

$$v(t)_p = i(t)_p R_p + \frac{d\lambda(t)_p}{dt}$$

$$v(t)_s = i(t)_s R_s + \frac{d\lambda(t)_s}{dt}$$

Para el enlace de flujos, se sabe que se tiene el enlace propio de cada bobina y el mutuo, por lo que queda expresado por las ecuaciones (2.40) y (2.41).

$$\lambda_p = \lambda_p + \lambda_m \quad (2.40)$$

$$\lambda_s = \lambda_s + \lambda_m \quad (2.41)$$

De aquí puede ser expresado con la relación que existe con la ley de Faraday, que es la ecuación (2.11), donde relaciona el flujo magnético con el número de vueltas o bien con la expresión (2.14), que es la inductancia con la corriente como se ve en las ecuaciones (2.42) y (2.43).

$$\lambda_p = L_p i(t)_p + M_{ps} i(t)_s \quad (2.42)$$

$$\lambda_s = L_s i(t)_s + M_{sp} i(t)_p \quad (2.43)$$

Para este caso las ecuaciones (2.42) y (2.43) en (2.38) y (2.39) quedando la siguiente expresión matemática para el transformador

$$v_p(t) = i_p(t)R_p + \frac{d}{dt} [L_p i(t)_p + M_{ps} i(t)_s]$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Para el lado secundario se tiene la ecuación:

$$v_s(t) = i_s(t)R_s + \frac{d}{dt} [L_s i(t)_s + M_{sp} i(t)_p]$$

Expresando de forma matricial se tiene el siguiente resultado que es el (2.44) el cual representa un circuito acoplado (Aller, 2006)

$$\begin{bmatrix} v(t)_p \\ v(t)_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t)_p \\ i(t)_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_p & M_{ps} \\ M_{sp} & L_s \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t)_p \\ i(t)_s \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Donde la matriz de inductancias es conocida como matriz L, que representa los elementos físicos por el cual existe la transformación de la energía eléctrica a magnética o la correlación entre estos dos campos.

$$L = \begin{bmatrix} L_p & M_{ps} \\ M_{sp} & L_s \end{bmatrix}$$

O bien representa las inductancias propias y mutuas que da origen al voltaje inducido en un transformador, estas no tienen ninguna variación en posición caso contrario en un motor o generador eléctrico. Partiendo de la expresión matricial (2.44) se puede realizar el modelo de un transformador trifásico (2.45) estrella-estrella de la figura 2.19.

$$\begin{bmatrix} v(t)_{abcp} \\ v(t)_{abcs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{abcp}] & 0 \\ 0 & [R_{abcs}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t)_{abcp} \\ i(t)_{abcs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [L_{abcp}] & [M_{abcps}] \\ [M_{abcsp}]^T & [L_{abcs}] \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t)_{abcp} \\ i(t)_{abcs} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

La razón de que la su matriz de M_{abcps} sea traspuesta para el voltaje secundario es considerado $M_{ps} = M_{sp}$.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

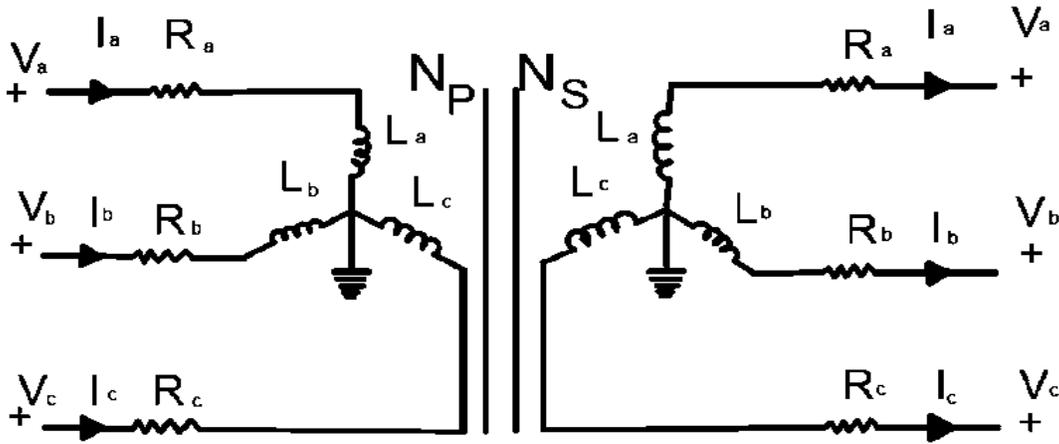


Figura 2.19 Transformador trifásico eléctrico

Ahora se cuenta con el siguiente efecto; poner una de las bobinas a rotar como se muestra en la figura 2.20, donde se muestra un motor de reluctancia monofásico.

Al realizar una rotación en una de las bobinas, se genera el efecto motor donde se tiene que la inductancia propia y la mutua entre rotor y estator ya no son constantes, sino que dependen de la variación de posición angular θ_r del rotor, esto lleva a concebir una inductancia variable, donde va depender mucho del diseño, material y estructura física de motor o generador.

Por lo que las ecuaciones sufren un cambio, quedando expresado por (2.46) y (2.47) considerando que el subíndice (s) indica las variables del estator y el subíndice (r) las del rotor.

$$v(t)_r = i(t)_r R_r + \frac{d}{dt} [L(\theta)_r i(t)_r + M(\theta)_{rs} i(t)_s] \quad (2.46)$$

$$v(t)_s = i(t)_s R_s + \frac{d}{dt} [L(\theta)_s i(t)_s + M(\theta)_{rs} i(t)_r] \quad (2.47)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

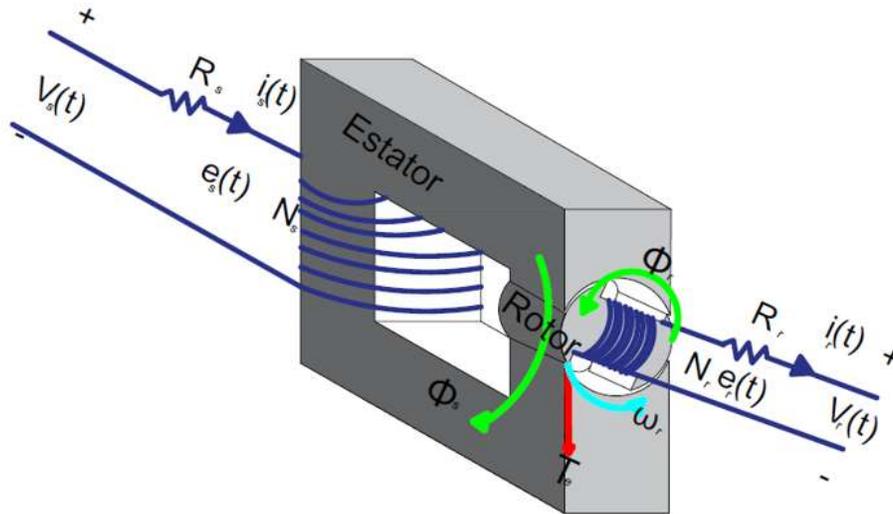


Figura 2.20 Motor de reluctancia monofásico

Ahora el sistema depende de dos variables tanto como del tiempo (t) y de la posición angular del rotor (θ_r) por lo que, la derivada de cada producto queda expresada en las ecuaciones (2.48) y (2.49).

$$v(t)_r = i(t)_r R_r + \frac{d}{dt} [L(\theta)_r i(t)_r] + \frac{d}{dt} [M(\theta)_{rs} i(t)_s] \quad (2.48)$$

$$v(t)_s = i(t)_s R_s + \frac{d}{dt} [L(\theta)_s i(t)_s] + \frac{d}{dt} [M(\theta)_{rs} i(t)_r] \quad (2.49)$$

Aplicando la regla de la derivada del producto a las ecuaciones (2.48) y (2.49) como resultado, queda las ecuaciones (2.50) y (2.51).

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

$$v(t)_r = i(t)_r R_r + L(\theta)_r \frac{d}{dt} i(t)_r + i(t)_r \frac{d}{dt} L(\theta)_r + M(\theta)_{rs} \frac{d}{dt} i(t)_s + i(t)_s \frac{d}{dt} M(\theta)_{rs} \quad (2.50)$$

$$v(t)_s = i(t)_s R_s + L(\theta)_s \frac{d}{dt} i(t)_s + i(t)_s \frac{d}{dt} L(\theta)_s + M(\theta)_{rs} \frac{d}{dt} i(t)_r + i(t)_r \frac{d}{dt} M(\theta)_{rs} \quad (2.51)$$

Como las inductancias propias y mutuas dependen de la posición angular θ_r , no se puede derivar de manera directa con respecto al tiempo, por lo que se multiplica por $\frac{d\theta}{dt}$ quedando la ecuación (2.52).

$$v(t)_r = i(t)_r R_r + L(\theta)_r \frac{d}{dt} i(t)_r + i(t)_r \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} L(\theta)_r + M(\theta)_{rs} \frac{d}{dt} i(t)_s + i(t)_s \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} M(\theta)_{rs} \quad (2.52)$$

Para la expresión dada en la ecuación (2.52), se considera la siguiente igualdad (2.53).

$$\frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} \quad (2.53)$$

Donde se tiene que la derivada de la posición angular θ_r con respecto al tiempo es igual a la velocidad angular.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Por lo que esa velocidad es la del rotor, expresada en la ecuación (2.54) según (Aller, 2006)

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \omega(\theta)_r \quad (2.54)$$

Sustituyendo la ecuación (2.54) en (2.52) llega a quedar la ecuación (2.55)

$$\begin{aligned} v(t)_r = & i(t)_r R_r + L(\theta)_r \frac{d}{dt} i(t)_r + i(t)_r \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} L(\theta)_r + M(\theta)_{rs} \frac{d}{dt} i(t)_s \\ & + i(t)_s \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} M(\theta)_{rs} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Al reordenar los términos se tiene como resultado la ecuación (2.56)

$$\begin{aligned} v(t)_r = & i(t)_r R_r + L(\theta)_r \frac{d}{dt} i(t)_r + M(\theta)_{rs} \frac{d}{dt} i(t)_s + i(t)_r \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} L(\theta)_r \\ & + i(t)_s \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} M(\theta)_{rs} \end{aligned} \quad (2.56)$$

La ecuación (2.56) representa al rotor, para el lado del estator se tiene la ecuación (2.57).

$$\begin{aligned} v(t)_s = & i(t)_s R_s + L(\theta)_s \frac{d}{dt} i(t)_s + M(\theta)_{rs} \frac{d}{dt} i(t)_r + i(t)_s \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} L(\theta)_s \\ & + i(t)_r \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} M(\theta)_{rs} \end{aligned} \quad (2.57)$$

En su forma matricial de manera general se tiene la siguiente representación:

$$\begin{bmatrix} v(t)_s \\ v(t)_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t)_s \\ i(t)_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L(\theta)_s & M(\theta)_{rs} \\ M(\theta)_{rs} & L(\theta)_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t)_s \\ i(t)_r \end{bmatrix} + \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L(\theta)_s & M(\theta)_{rs} \\ M(\theta)_{rs} & L(\theta)_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t)_s \\ i(t)_r \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Donde se tiene que la matriz L para el efecto transformador es:

$$L(\theta) = \begin{bmatrix} L(\theta)_s & M(\theta)_{rs} \\ M(\theta)_{rs} & L(\theta)_r \end{bmatrix}$$

Y la matriz G para el efecto del voltaje rotatorio:

$$G(\theta) = \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L(\theta)_s & M(\theta)_{rs} \\ M(\theta)_{rs} & L(\theta)_r \end{bmatrix} = \frac{d}{d\theta} L(\theta)$$

Si se habla de un sistema trifásico balanceado, al igual que un transformador se tiene la ecuación (2.58), para un sistema giratorio.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v(t)_{abcs} \\ v(t)_{abcr} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_{abcs} & 0 \\ 0 & R_{abcr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t)_{abcs} \\ i(t)_{abcr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L(\theta)_{abcs} & M(\theta)_{abcrs} \\ M(\theta)_{abcrs} & L(\theta)_{abcr} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t)_{abcs} \\ i(t)_{abcr} \end{bmatrix} \\ &+ \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L(\theta)_{abcs} & M(\theta)_{abcrs} \\ M(\theta)_{abcrs} & L(\theta)_{abcr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t)_{abcs} \\ i(t)_{abcr} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.58)$$

El sistema se vuelve más complejo, donde se tiene submatrices de inductancias propias, mutuas y de resistencias. De forma compacta y matricial se tiene la ecuación matricial (2.59), donde tanto como la posición angular y la velocidad angular es la del rotor.

$$[v(t)] = [R][i(t)] + [L(\theta_r)] \frac{d}{dt} [i(t)] + \omega_r [G(\theta_r)] \quad (2.59)$$

El efecto transformador está dado por la siguiente expresión:

$$[R][i(t)] + [L(\theta_r)] \frac{d}{dt} [i(t)]$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Para el voltaje rotatorio o el efecto de transformación de energía magnética a mecánica está dado por la expresión siguiente.

$$\omega(\theta)[G(\theta_r)][i(t)]$$

Por el cual, de manera general también se puede tener la ecuación de enlace de flujo para un sistema general (2.60).

$$[v(t)] = [R][i(t)] + \frac{d}{dt} [\lambda] \quad (2.60)$$

Para realizar el modelo en *abc*, uno puede tomar ya sea la ecuación (2.59) o (2.60) dependiendo de la complejidad y de la respuesta que uno quiera, ambos son válidos. Por lo regular siempre se parte de la ecuación (2.60).

2.3.2 Ecuación del Par eléctrico en *abc*

Se tiene que la energía almacenada para los circuitos acoplados de acuerdo con lo dicho en la sección 2.2.5, en el análisis de la conversión de energía, la ecuación (2.24) se puede realizar de manera matricial la deducción de la ecuación del Par eléctrico, o bien de acuerdo con la energía almacenada en inductor está dada por la ecuación (2.61) (Sadiku, Matthew N. O., 2002).

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (2.61)$$

Ahora para una máquina eléctrica, de manera matricial se tiene la expresión (2.62).

$$W = \frac{1}{2} [i(t)]^T [L(\theta)] [i(t)] \quad (2.62)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

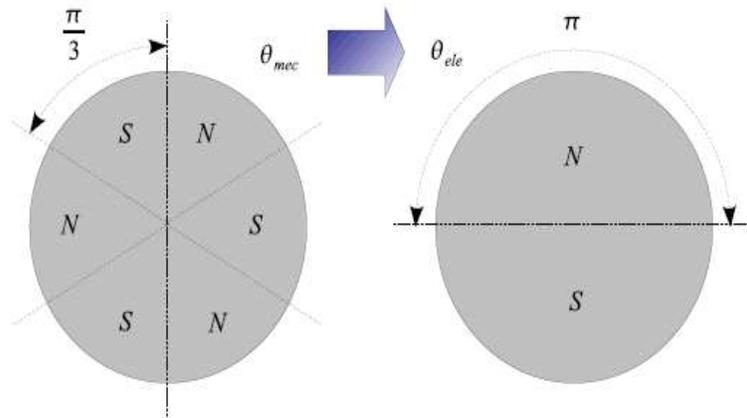


Figura 2.21 Relación de ángulos eléctricos y mecánicos

Cabe mencionar de acuerdo con (Aller, 2006) explica que, para las máquinas rotativas eléctricas, en su diseño puede tener varios polos, donde estos polos son divididos físicamente en lo que se conoce como ángulos mecánicos, cuya relación con los ángulos eléctricos donde estos quedan definidos por el número de polos (norte y sur) se muestra en la figura 2.21.

En base a esto se determina la relación de los ángulos mecánicos con los ángulos eléctricos, el cual los eléctricos siempre son 2π radianes eléctricos, esta relación está dada por la siguiente ecuación (2.63).

$$\theta_e = p\theta_m \quad (2.63)$$

Prácticamente p representa los pares de polos mecánicos, se puede tener los que se desee dependiendo de la funcionalidad y configuración de la máquina. En base a esto se puede decir que, en la relación de la velocidad entre la velocidad mecánica y eléctrica está dada por la expresión matemática (2.64).

$$\omega_e = p\omega_m \quad (2.64)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Donde la velocidad $\omega_e = \omega_r$, al igual que el ángulo eléctrico $\theta_e = \theta_r$ donde el Par eléctrico está dado por la ecuación siguiente, partiendo de las ecuaciones (2.36), (2.37), (2.61) y (2.63) de manera matricial:

$$\tau_e = \frac{dW}{d\theta_m} = p \frac{dW}{d\theta_r} = \frac{p}{2} [i(t)]^T \frac{d}{d\theta_r} [L(\theta_r)] [i(t)]$$

Como resultado final se tiene la ecuación (2.65), por lo que el Par eléctrico de las maquinas eléctricas depende de las corrientes, el cambio de las inductancias o la matriz G y del número de polos de dicha máquina eléctrica.

$$\tau_e = \frac{p}{2} [i(t)]^T [G(\theta_r)] [i(t)] \tag{2.65}$$

2.3.3 Voltaje y corriente del rotor con referencia al estator

Para referenciar las variables de voltaje y corriente, se utilizará la ley del voltaje inducido de Faraday, expresada anteriormente en la ecuación (2.12) por lo que nuestro enfoque de transformación se tiene las expresiones (2.66) y (2.67) de acuerdo con (Syed A. Nasar, 1982).

$$e_s = -N_s \frac{d\psi}{dt} \tag{2.66}$$

$$e_r = -N_r \frac{d\psi}{dt} \tag{2.67}$$

Se tiene que el flujo magnético es variante en el tiempo o sinusoidal (2.68).

$$\psi = \psi_m \sin \omega t \tag{2.68}$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Donde la derivada de la función $\sin \omega t$ es un $\cos \omega t$ por lo que las expresiones quedan (2.69) y (2.70).

$$e_s = -N_s \psi_m \cos \omega t \quad (2.69)$$

$$e_r = -N_r \psi_m \cos \omega t \quad (2.70)$$

Al obtener la relación de transformación se tiene la ecuación (2.71).

$$\frac{e_s}{e_r} = \frac{-N_s \psi_m \cos \omega t}{-N_r \psi_m \cos \omega t} \quad (2.71)$$

Al eliminar términos se tiene la ecuación (2.72) conocido como la relación de transformación.

$$\frac{e_s}{e_r} = \frac{N_s}{N_r} = a \quad (2.72)$$

Para las corrientes se utiliza la ley de ampere expresada en la ecuación (2.6) donde al tener una bobina con N vueltas se tiene que en una longitud simétrica al integrar se tiene:

$$NI = Hl \quad (2.73)$$

Esta ecuación es conocida por la fuerza electromotriz, suponiendo que es lineal se puede escribir las ecuaciones (2.74) y (2.75).

$$N_s I_s = Hl \quad (2.74)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

$$N_r I_r = Hl \quad (2.75)$$

Al obtener la razón de transformación se tiene la ecuación (2.76).

$$\frac{N_r I_r}{N_s I_s} = \frac{Hl}{Hl} \quad (2.76)$$

Finalmente se llega a la ecuación (2.77) al igual que la ecuación (2.72) es la relación de transformación.

$$\frac{I_r}{I_s} = \frac{N_s}{N_r} = a \quad (2.77)$$

Aplicando las ecuaciones (2.72) y (2.77) a las impedancias el cual está dado por las expresiones (2.78) y (2.79).

$$Z_s = \frac{V_s}{I_s} \quad (2.78)$$

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p} \quad (2.79)$$

De este modo se tiene la relación de transformación para las impedancias de las maquinas (2.80).

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

$$\frac{Z_s}{Z_p} = \frac{V_s I_p}{V_p I_s} = \left(\frac{N_s}{N_p}\right)^2 = a^2 \quad (2.80)$$

De este modo se puede referenciar el voltaje y corriente del secundario al primario en la matriz (2.81) y (2.82).

$$[V_r'] = a[V_r] \quad (2.81)$$

$$[I_r'] = \frac{[I_r]}{a} \quad (2.82)$$

Del mismo modo para la inductancia y resistencia (2.83) y (2.84).

$$[L_r'] = a^2[L_r] \quad (2.83)$$

$$[R_r'] = a^2[R_r] \quad (2.84)$$

Partiendo del modelo la máquina trifásica, del mismo modo que se tiene un transformador trifásico, se puede tener un modelo general en abc (2.85).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v(t)_{abcs} \\ v(t)_{abcr} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [R_{abcs}] & [0] \\ [0] & [R_r'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t)_{abcs} \\ i(t)_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [L(\theta)_{abcs}] & [M(\theta)'_{abcrs}] \\ [M(\theta)'_{abcrs}]^T & [L(\theta)'_{abcr}] \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t)_{abcs} \\ i(t)_{abcr} \end{bmatrix} \\ &+ \omega(\theta)_r \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} [L(\theta)_{abcs}] & [M(\theta)'_{abcrs}] \\ [M(\theta)'_{abcrs}]^T & [L(\theta)'_{abcr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t)_{abcs} \\ i(t)_{abcr} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

2.4 Principios de transformación a los marcos de referencia $\alpha \beta \gamma$ y $dq0$.

La mayoría de los generadores o motores eléctricos son alimentados trifásicamente, donde se tiene una representación de la distribución de sus devanados como se representa en la figura 2.22.

Este es un sistema dinámico o en movimiento que está equilibrado, con una velocidad constante, tal como se pudo ver la representación trifásica es un poco más compleja, en el marco de referencia abc , por lo que se requiere un nuevo marco de referencia. Este sistema trifásico abc . Puede ser representado en un sistema ortonormal llamado $\alpha \beta \gamma$, donde este sistema también está girando a una velocidad angular pero ahora se tiene ambas a 90° grados. Para eliminar la complejidad del movimiento angular se requiere otro sistema el cual tiene que ser estático pero que entregue la misma respuesta, es por ello que se usa el marco de referencia $dq0$. Para estos sistema se requiere sacar las matrices de conversión de cada sistema del abc a $\alpha \beta \gamma$ y de $\alpha \beta \gamma$ a $dq0$ de acuerdo con (D. O'Kelly and S. Simmons, 1968) y (Che-Mung Ong, 1998).

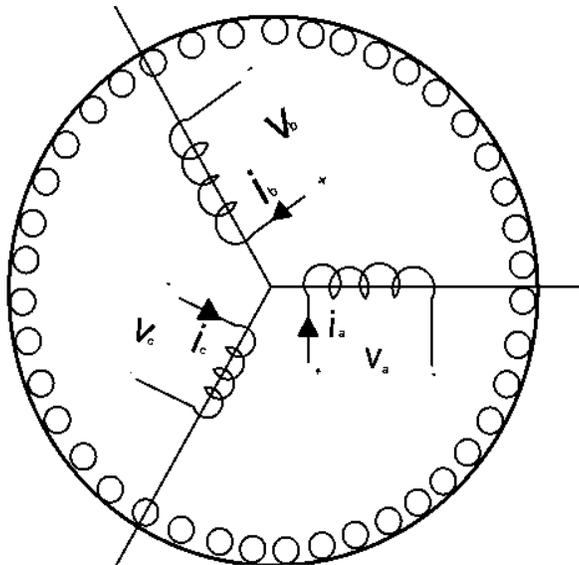


Figura 2.22 Máquina de rotor cilíndrico trifásico a dos polos

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

2.4.1 Transformación de abc a $\alpha\beta\gamma$

Para realizar la siguiente transformación se debe considerar lo siguiente: El sistema es trifásico balanceado, el cuál esta gira a una velocidad angular ω_r del rotor, se pretende descomponer a un sistema o marco de referencia ortogonal $\alpha\beta$ como se muestra en la figura 2.23, donde el sistema $\alpha\beta$ se encuentra girando a una misma velocidad angular ω_r y los vectores del sistema abc son cantidades instantáneas (Delgado, 2014).

Realizando la descomposición al marco de referencia $\alpha\beta$, se obtiene las ecuaciones (2.86) y (2.87).

$$V_\alpha = V_a - V_b \sin(30^\circ) - V_c \sin(30^\circ) \quad (2.86)$$

$$V_\beta = V_b \cos(30^\circ) - V_c \cos(30^\circ) \quad (2.87)$$

Por razones trigonométricas de ángulos notables expuesto en el apéndice A.1 queda expresado matricialmente (2.88).

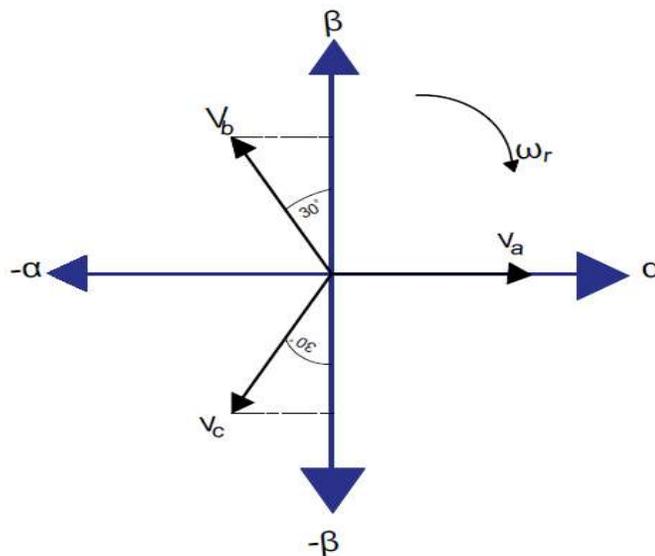


Figura 2.23 Marco de referencia ortogonal $\alpha\beta$

**CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES
PERMANENTES.**

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

En el concepto de álgebra lineal, se puede comprobar que cada ecuación es linealmente independiente, donde el producto escalar o de magnitud es igual a cero, se define por, $(V_\alpha)^T V_\beta = V_\alpha V_\beta \cos 90^\circ = 0$; entonces, para proponer una base tridimensional \mathbb{R}^3 se propone un tercer vector ortogonal que sería V_γ , de manera que:

$$(V_\alpha)^T V_\gamma = 0$$

$$(V_\beta)^T V_\gamma = 0$$

Desarrollando las ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\gamma 1} \\ V_{\gamma 2} \\ V_{\gamma 3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\gamma 1} \\ V_{\gamma 2} \\ V_{\gamma 3} \end{bmatrix} = 0$$

Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V_{\gamma 1} - \frac{1}{2}V_{\gamma 2} - \frac{1}{2}V_{\gamma 3} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}V_{\gamma 2} - \frac{\sqrt{3}}{2}V_{\gamma 3} = 0$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Resolviendo el sistema, se obtiene que $V_{\gamma 2} = V_{\gamma 3}$ y $V_{\gamma 2} = V_{\gamma 1}$ por lo que se propone que el vector $V_{\gamma} = \mathcal{K}[1 \quad 1 \quad 1]$. Ahora se propone normalizar la base ortogonal donde:

$$\|V_{\alpha}\| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\|V_{\beta}\| = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\|V_{\gamma}\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

Al normalizar cada vector nos queda:

$$V_{\alpha} = \frac{V_{\alpha}}{\|V_{\alpha}\|}$$

$$V_{\beta} = \frac{V_{\beta}}{\|V_{\beta}\|}$$

$$V_{\gamma} = \frac{V_{\gamma}}{\|V_{\gamma}\|}$$

Para el vector V_{γ} , como es un vector unitario sus términos pueden ser expresados por $V_{\gamma} = \mathcal{K} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right]$ quedando la siguiente expresión.

$$V_{\gamma} = \frac{V_{\gamma}}{\|V_{\gamma}\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Dando así origen a la matriz de normalización llamada M , conocida como la transformación de Clark (2.89), por lo que nuestra base ortonormal queda como se muestra en la figura 2.24.

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \\ V_\gamma \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

La matriz de Clark queda expresada de la siguiente manera:

$$M = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

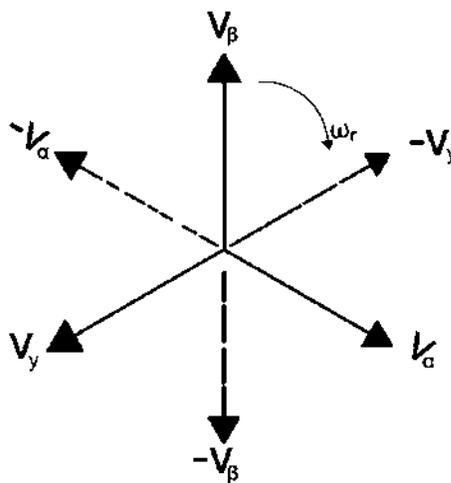


Figura 2.24 Marco de referencia ortonormal $\alpha\beta\gamma$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

2.4.2 Transformación de $\alpha\beta\gamma$ a $dq0$

Los ejes o bases del marco de referencia $\alpha\beta\gamma$, son rotatorios giran a una velocidad angular ω_r al igual que el marco de referencia abc , lo que se busca es un eje o base estacionario el cuál se define como dq , donde queda definido el un ángulo ϑ tal como se aprecia en la figura 2.25.

Realizando la descomposición vectorial quedan las siguientes expresiones matemáticas:

$$V_d = V_\alpha \cos \vartheta + V_\beta \sin \vartheta$$

$$V_q = -V_\alpha \sin \vartheta + V_\beta \cos \vartheta$$

Donde V_d y V_q son independientes, ya que, su producto interno es igual a cero y su norma es unitaria. Creando una base ortonormal donde de forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

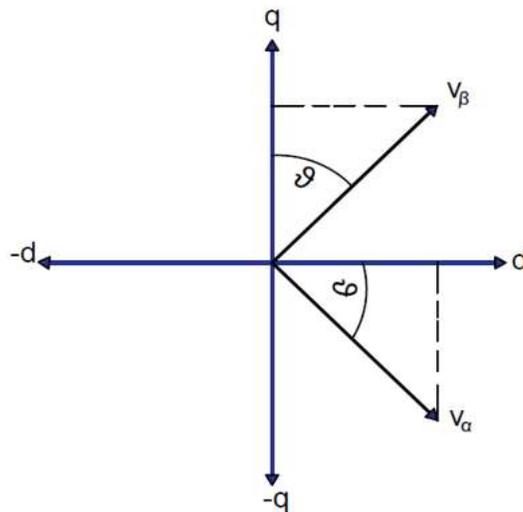


Figura 2.25 Marco de referencia ortonormal dq

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

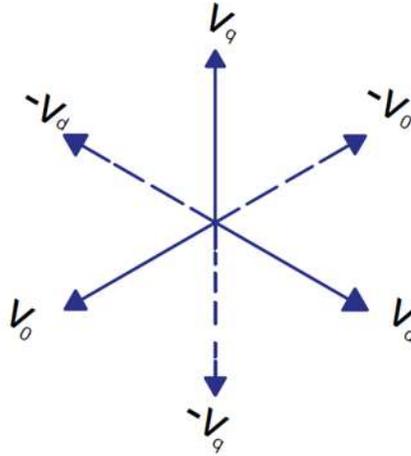


Figura 2.26 Marco de referencia ortonormal $dq0$

De este modo se genera una matriz R conocida como la matriz de rotación en un plano \mathbb{R}^2 .

$$R = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Recordando que $\alpha\beta\gamma$ es un conjunto ortonormal en \mathbb{R}^3 , donde el eje γ coincide con el eje 0, así generando un espacio \mathbb{R}^3 para $dq0$, completando así la base ortonormal agregando la componente para la transformación de $\alpha\beta\gamma$ a $dq0$ como se muestra en la figura 2.26

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \\ V_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Donde la siguiente matriz es conocida como la matriz N o la matriz de Park:

$$N = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Para realizar una transformación de un plano dinámico o en movimiento a un plano estático se requiere las matrices de conversión obtenidas anteriormente (2.92) y (2.93).

$$[V_{\alpha\beta\gamma}] = [M][V_{abc}] \quad (2.92)$$

$$[V_{dq0}] = [N][V_{\alpha\beta\gamma}] \quad (2.93)$$

Como resultado de la sustitución de (2.93) en (2.92) se tiene la expresión (2.94)

$$[V_{dq0}] = [N][M][V_{abc}] \quad (2.94)$$

Así obteniendo la transformación aun marco de referencia estático conocido como la transformación de Clark-Park $[K] = [N][M]$. Quedando la expresión simplificada en (2.95) del mismo modo se puede utilizar ambas definiciones tal como se hará mención más tarde.

$$[V_{dq0}] = [K][V_{abc}] \quad (2.95)$$

El producto matricial $[K] = [N][M]$ queda expresado de la siguiente manera:

$$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones del producto matricial correspondiente se obtiene la siguiente matriz:

$$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\frac{1}{2} \cos \vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \vartheta & -\frac{1}{2} \cos \vartheta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \frac{1}{2} \sin \vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \vartheta & \frac{1}{2} \sin \vartheta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \vartheta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Usando las identidades trigonométricas de A.2 realizando la sustitución en la matriz K por el cual queda definida de la siguiente manera:

$$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\vartheta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \vartheta & -\sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\vartheta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Para la siguiente expresión en ángulos de desfase queda definido como:

$$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(\vartheta - 120^\circ) & \cos(\vartheta + 120^\circ) \\ -\sin \vartheta & -\sin(\vartheta - 120^\circ) & -\sin(\vartheta + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Quedando la transformación de marco de referencia de abc a $dq0$, directamente con la matriz K de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(\vartheta - 120^\circ) & \cos(\vartheta + 120^\circ) \\ -\sin \vartheta & -\sin(\vartheta - 120^\circ) & -\sin(\vartheta + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

Para la máquina síncrona se tiene que $\vartheta = \theta_r$ ya que esté gira a la misma velocidad ω_r se tiene la representación con la posición del rotor de la matriz de Clark-Park.

$$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz de transformación, según la definición de (D. O'Kelly and S. Simmons, 1968), donde se tiene la siguiente definición de K^{-1} :

$$[K]^{-1} = [K]^T$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Esto es comprobable al realizar la inversa de la matriz K , lo que interesa es que se puede realizar las siguientes operaciones, al saber que la inversa de la matriz K es la traspuesta, entonces:

$$[K]^T = [M]^T [N]^T$$

2.4.3 Conversión del modelo general de las máquinas eléctricas de abc a $dq0$

Ahora se realizará la conversión del marco de referencia abc , al marco de referencia $dq0$ de manera general, esto se hace con la finalidad de poder manipular de manera más sencilla el modelo del PMSG. Usando la ecuación de enlace de flujo (2.60), deducida en la sección 2.3.1, para un sistema trifásico (Delgado, 2014), que es la siguiente expresión matemática:

$$[v_{abc}] = [R][i_{abc}] + \frac{d}{dt}[\lambda_{abc}]$$

En base a la deducción de la transformación de un marco de referencia abc a $dq0$, se tiene la ecuación (2.95):

$$[V_{dq0}] = [K][V_{abc}]$$

Aplicado el concepto de conversión al marco de referencia $dq0$, a las variables de corriente y enlace de flujo, se tiene:

$$[i_{dq0}] = [K][i_{abc}]$$

$$[\lambda_{dq0}] = [K][\lambda_{abc}]$$

Al realizar la conversión del modelo de enlace de flujo (2.60), sustituyendo (2.95) se obtiene la expresión siguiente:

$$[v_{dq0}] = [K]\{[R][i_{abc}]\} + [K]\left\{\frac{d}{dt}[\lambda_{abc}]\right\}$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Del mismo modo, se realiza la sustitución de las matrices de corriente y enlaces de flujo en el marco de referencia $dq0$, donde se tiene la siguiente expresión:

$$[v_{dq0}] = [K][R]([K^{-1}][i_{dq0}]) + [K] \frac{d}{dt} ([K^{-1}][\lambda_{dq0}])$$

Del mismo modo que el modelo en abc se tiene que es un producto de derivadas de dos variables diferentes. Por lo tanto, se le aplica la regla del producto de una derivada, quedando expresado por la ecuación (2.96).

$$v_{dq0} = [K][R][K^{-1}][i_{dq0}] + K \left(\frac{d}{dt} [K^{-1}][\lambda_{dq0}] + [K^{-1}] \frac{d}{dt} [\lambda_{dq0}] \right) \quad (2.96)$$

Claramente se vio, que la matriz K depende de la variación de la posición θ_r , por lo que la derivada de K^{-1} respecto al tiempo no se puede realizar porque se tiene que realizar la sustitución de la derivada la variación de la posición angular $\frac{d\theta_r}{dt}$, quedando la expresión matemática (2.96), de tal forma que se pueda derivar con respecto a tiempo y a la posición angular del rotor de la siguiente manera:

$$v_{dq0} = [K][R][K^{-1}][i_{dq0}] + K \frac{d\theta_r}{dt} \frac{d}{dt} [K^{-1}][\lambda_{dq0}] + K [K^{-1}] \frac{d}{dt} [\lambda_{dq0}]$$

Apreciando el modelo en $dq0$, se tiene que depender de la velocidad angular de la máquina eléctrica, tal como se obtuvo en el modelo abc , por lo que se tiene la expresión final en enlaces de flujo es la ecuación (2.97).

$$v_{dq0} = [K][R][K^{-1}][i_{dq0}] + \omega_r K \frac{d}{dt} [K^{-1}][\lambda_{dq0}] + K [K^{-1}] \frac{d}{dt} [\lambda_{dq0}] \quad (2.97)$$

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

Para los enlaces de flujo se tiene las siguientes expresiones en abc .

$$[\lambda_{abc}] = [L_{abc}][i_{abc}]$$

Aplicando la conversión al marco de referencia $dq0$, se obtiene la expresión (2.98)

$$[\lambda_{dq0}] = [K][L_{abc}][K^{-1}][i_{dq0}] \quad (2.98)$$

El modelo que se presentará para la máquina síncrona de imanes permanentes será en $dq0$, realizando los parámetros de conversión obtenidos en este capítulo y después transformar la respuesta con la matriz de transformación Clark-Park se obtendrá la respuesta en abc .

2.4.4 Interpretación del eje de directa y cuadratura

De acuerdo con los lineamientos se definen los ejes de directa y cuadratura como ejes magnéticos y son ficticios, el cual simplifican el análisis de las máquinas eléctricas. (Aller, 2006).

Eje de directa (d): Gira con respecto al estator a la velocidad del rotor, y en todo momento se encuentra colineal con el eje magnético del campo o bien en la dirección Norte-Sur del rotor, con su origen en el centro magnético y en dirección hacia el Norte.

Eje de cuadratura (q): Rota con respecto al estator a la velocidad del rotor, y en todo momento su dirección se encuentra perpendicular con el eje magnético del campo y tiene el mismo origen que el anterior.

Eje cero (0): Fijo en el estator y se encuentra desacoplado magnéticamente del resto de los ejes de la máquina.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES DE LA MÁQUINA SÍNCRONA DE IMANES PERMANENTES.

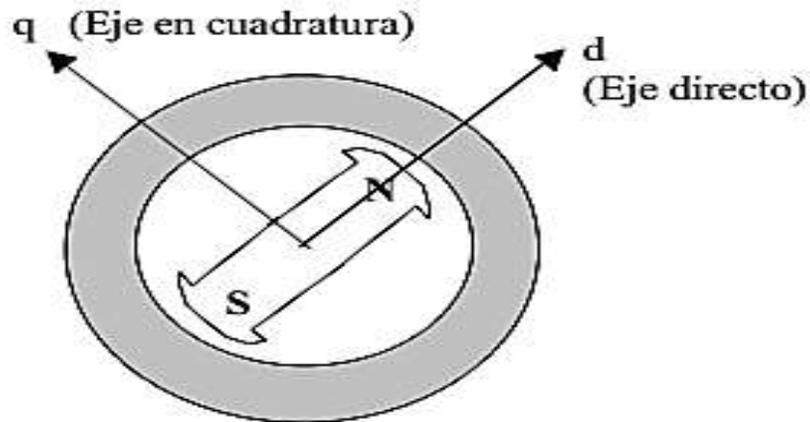


Figura 2.27 Eje de directa y cuadratura

Aun cuando los ejes d y q , giran a igual velocidad que el rotor, estos ejes representan variables del estator, tal como se muestra en la figura 2.27. El eje 0 es necesario para permitir que la transformación de coordenadas sea bidireccional, es decir, se pueda transformar de variables primitivas a variables $dq0$ y viceversa. El eje 0 tiene una estrecha relación con las variables de secuencia cero de la transformación de Clark-Park u otro sistema; como el de componentes simétricas.

En la práctica, el eje 0 permite representar flujos de dispersión que no están acoplados con otras bobinas de la máquina eléctrica, al igual permite saber si existe un desbalance, falla o anomalía en la máquina y en el sistema. Para el modelo del PMSG, es importante conocer esta definición de los ejes de directa y cuadratura ya que nos permite realizar estudios necesarios, como saber que tan robusto es ante una contingencia, ante el desacoplo de cargas, y su respuesta transitoria.

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

3.1 Modelo en $dq0$ del generador síncrono de imanes permanentes (PMGS).

Se tiene la configuración del PMSG de la figura 3.1, para mayor facilidad del modelo del PMSG, se realizará primero la conversión del marco de referencia abc , al marco de referencia $dq0$. Para esta máquina existen dos configuraciones básicas, tal como se muestra en la figura 3.2.

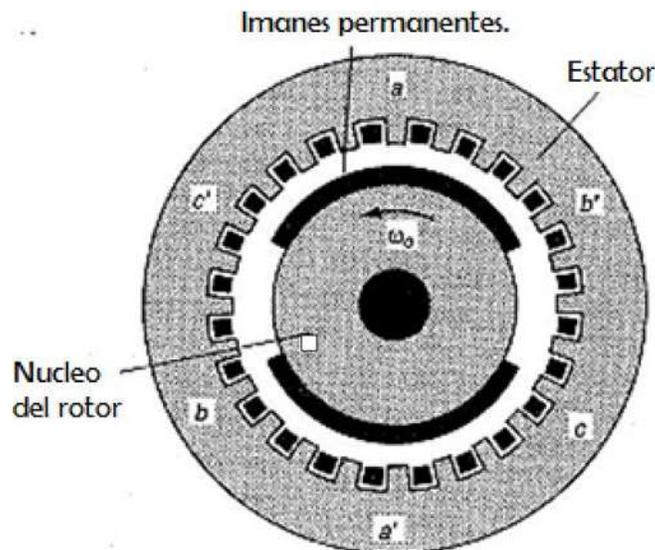


Figura 3.1 El PMSG

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

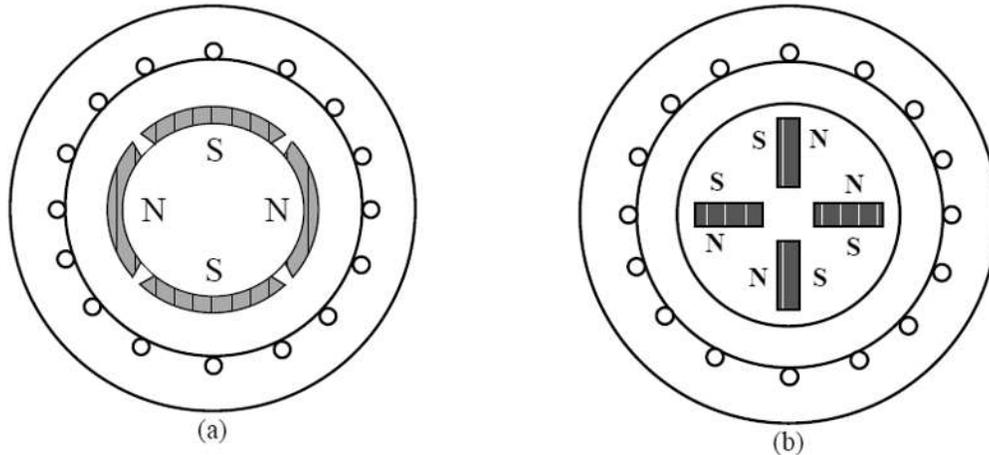


Figura 3.2 Configuraciones del PMSG (a) montando imanes superficiales, (b) montado de imanes interiores.

Las configuraciones se basan en la disposición de los imanes permanentes en el rotor; ya sea, el montaje superficial (a) o imanes interiores (b). Cuando los imanes van montados en la superficie del rotor van con adhesivos, para dotarlo de rigidez, el cual es importante para el manejo de altas velocidades; el espacio interpolar se encuentra relleno de material no-ferromagnético, donde posteriormente van insertados en materiales de alta rigidez como fibra de vidrio o zapatas polares atornillados. Cuando los imanes van montados en la superficie, puede ser considerando como una máquina eléctrica de polos lisos, dando lugar a que las inductancias (magnetización) propias de estator y rotor $L = L_{dis} + L_1$, sea constante, agregándole el efecto de inductancia de dispersión, la mutua entre devanados de estator o de rotor $L = -\frac{L_1}{2}$, donde solo la mutua entre rotor y estator sería $L_{sr} = M_{sr} \cos \theta_r$ generando así, un entrehierro alto, dando lugar a que la inductancia magnetizaste L_s (síncrona), sean iguales con el de los ejes de directa y cuadratura ($L_q = L_d = L_s$), sin el efecto de dispersión en los devanados. Además, como el entrehierro es alto; esto hace que la inductancia magnetizaste sea menor que el de la máquina síncrona convencional. Como se ve en la figura 3.3 (a), el eje de directa está ubicado en el mismo sentido del flujo magnético.

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

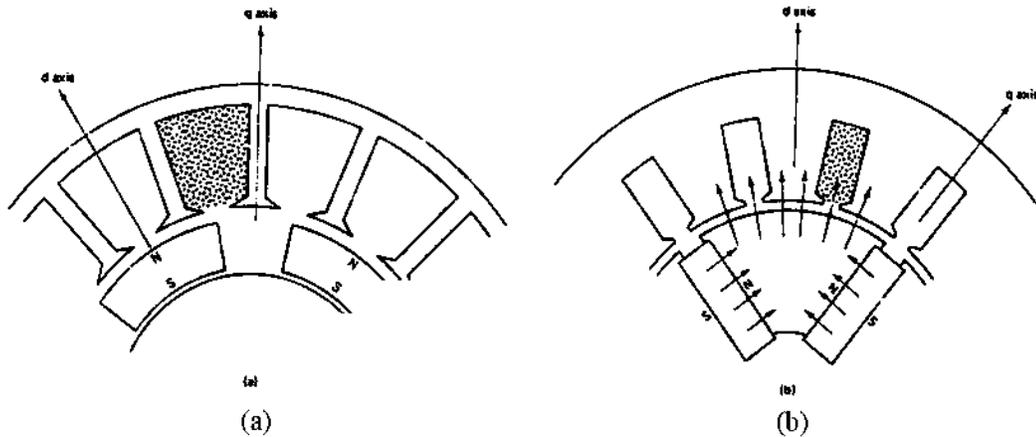


Figura 3.3 Configuración de la PMSG (a) montando imanes superficiales, (b) montado de imanes interiores. En los ejes de directa y cuadratura

Para la configuración de imanes interiores, donde los imanes están embutidos en el interior del rotor ferromagnético, esta configuración consigue una mayor robustez mecánica, apropiada para altas velocidades, se puede considerar como una máquina eléctrica de polos salientes, el cual, para esta máquina la ecuación de la inductancia propia para el rotor $L = L_{disp} + L_1 + L_2 \cos 2(\theta_r)$, donde la mutua entre devanado del rotor o estator es $L_m = \frac{-L_1}{2} + L_2 \cos 2(\theta_r - 60^\circ)$ (Che-Mung Ong, 1998), del mismo modo para el estator si tuviera polos salientes, donde la inductancia mutua entre estator y rotor $L_{rs} = M_{sr} \cos \theta_r$, para un sistema trifásico existe el desfase de 120° , entre devanados. La configuración hace que la reluctancia del eje de cuadratura sea mayor que el eje de directa ($L_q > L_d$). Con respecto al flujo magnético, al contrario, de lo que ocurre con las máquinas de polos salientes convencionales. Como se ve en la figura 3.3 (b).

El PMSG ha tenido un incremento notable; debido a la aparición de material magnético de elevada remanencia. En un principio, se utilizaba la ferrita, hoy en día se utiliza el cobalto-samario ($SmCo_5$ o Sm_2Co_{17}) o bien el Neodimio-Hierro-boro ($Nd - Fe - B$), este último presenta una gran propiedad de magnetismo remanente y con una característica

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

bastante lineal ante la curva de desmagnetización, el inconveniente es el desgaste magnético ante la temperatura. El Cobalto samario presenta mejores características, pero es de alto costo y solo se utiliza para aplicaciones especiales donde se justifique su costo, según (Landeros, 2011) y (Sanz, 2012).

Las máquinas de imanes permanentes, son muy utilizadas en aplicaciones de baja potencia como servo-accionamientos de herramientas (sistema de posicionamiento, tornos, fresadoras, etc.) por la facilidad de control que ofrece.

La aportación principal es en la generación eólica, ya que esta máquina eléctrica ofrece las siguientes características:

- Alta intensidad del flujo en el entrehierro.
- Alta aceleración de par/inercia para conseguir elevadas aceleraciones.
- Alta relación de potencia/peso.
- Par electromagnético suave, o bajo nivel de rizado en el Par, incluso a bajas velocidades, para obtener una gran precisión en el manejo de posiciones.
- Control de Par a velocidad nula.
- Alto rendimiento y mejor factor de potencia.
- Diseño compacto.

3.2 Ecuaciones de corrientes y enlace de flujo del PMGS.

El generador síncrono de imanes permanentes es muy usado en la generación eléctrica, mayormente en las hidroeléctricas y en los parques eólicos, como se mencionó anteriormente, y en este capítulo se procederá a obtener el modelo matemático.

El modelo se construirá tomando en cuenta que la conexión eléctrica del estator es en estrella, como se muestra en la figura 3.4, considerado lineal los efectos del imán permanente. Por lo que en este apartado se obtiene el modelo del PMSG, a partir de la

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

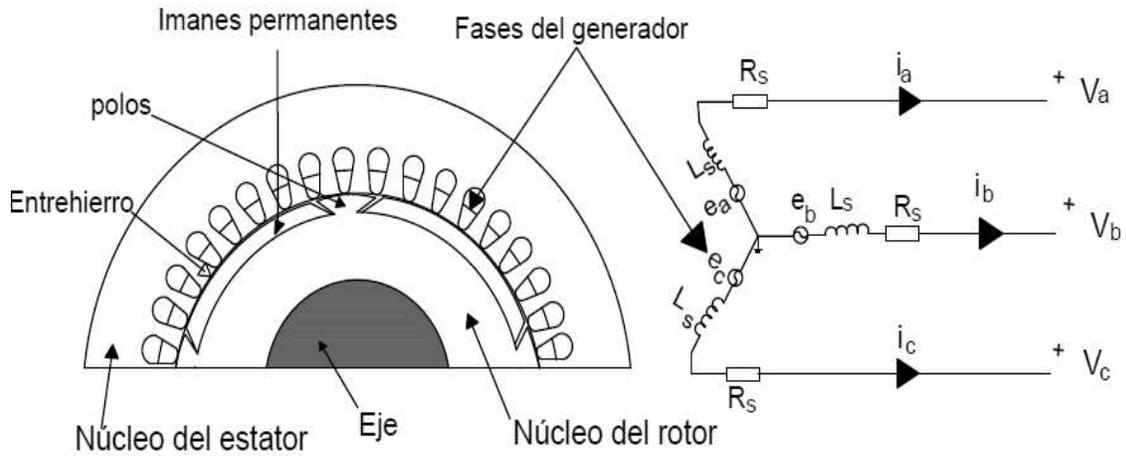


Figura 3.4 Prototipo del PMSG en *abc*

ecuación (2.60) del modelo de enlace de flujo obteniendo la ecuación (3.1), basados en los artículos de (Kedar Patil, Bhinal Mehta, 2014) y (Tianyu Wang, et al., 2014)

$$[v_{abc}] = [R_s][i_{abc}] + \frac{d}{dt}[\lambda_{abc}] \quad (3.1)$$

De acuerdo con la ecuación (2.96), para convertir del modelo *abc* a *dq0*, queda expresado con la ecuación (3.2).

$$v_{dq0s} = [K_s][R_s][K_s^{-1}][i_{dq0s}] + K_s \left(\frac{d}{dt} [K_s^{-1}][\lambda_{dq0s}] + [K_s^{-1}] \frac{d}{dt} [\lambda_{dq0s}] \right) \quad (3.2)$$

O bien al distribuir el término K_s queda la ecuación (3.2) expresada con la ecuación (3.3).

$$v_{dq0s} = [K_s][R_s][K_s^{-1}][i_{dq0s}] + K_s \frac{d}{dt} [K_s^{-1}][\lambda_{dq0s}] + K_s [K_s^{-1}] \frac{d}{dt} [\lambda_{dq0s}] \quad (3.3)$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

De la ecuación (3.3) se considera desarrollar las siguientes expresiones para poder obtener el modelo matemático del PMGS, en el marco de referencia $dq0$.

$$\begin{aligned} & [K_s][K_s^{-1}] \\ & [K_s][R_s][K_s^{-1}] \\ & [K_s]\frac{d}{dt}[K_s^{-1}] \end{aligned}$$

En base a la deducción de (D. O'Kelly and S. Simmons, 1968), donde la inversa de K_s está dado por la expresión (3.4) que viene siendo la transpuesta de K_s .

$$[K_s]^{-1} = [K_s]^T \tag{3.4}$$

De acuerdo a las expresiones tomadas de la ecuación (3.3), quedan definidas aplicando $[K_s]^T$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & [K_s][K_s]^T \\ & [K_s][R_s][K_s]^T \\ & [K_s]\frac{d}{dt}[K_s]^T \end{aligned}$$

Para $[K_s]^T$ se tiene la siguiente matriz (3.5).

$$[K_s]^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r + 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Para la expresión $[K_s][K_s]^T$ se tiene el siguiente producto matricial.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r + 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Resolviendo los términos de la raíz cuadrada, el producto matricial queda expresado de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r + 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se realiza el producto de los términos de las matrices y encontrar la matriz resultante de la expresión $[K_s][K_s]^T$, por lo que se genera otra matriz de mismo número de términos de la siguiente manera:

$$[K_s][K_s]^T = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para el término a_{11} se tiene la expresión (3.6).

$$\cos^2 \theta_r + \cos^2(\theta_r - 120^\circ) + \cos^2(\theta_r + 120^\circ) \tag{3.6}$$

Usando identidades trigonométricas de A.3 se obtiene:

$$\cos^2 \theta_r + \frac{1}{4}(-\cos \theta_r + \sqrt{3} \sin \theta_r)(-\cos \theta_r + \sqrt{3} \sin \theta_r) + \frac{1}{4}(\cos \theta_r + \sqrt{3} \sin \theta_r)(\cos \theta_r + \sqrt{3} \sin \theta_r)$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Resolviendo los binomios resulta la siguiente expresión:

$$\cos^2 \theta_r + \frac{1}{4} \cos^2 \theta_r + \frac{1}{4} \cos^2 \theta_r + \frac{3}{4} \sin^2 \theta_r + \frac{3}{4} \sin^2 \theta_r$$

Reduciendo términos queda de la siguiente manera:

$$\frac{6}{4} (\cos^2 \theta_r + \sin^2 \theta_r)$$

Como resultado final para el término a_{11} se tiene:

$$a_{11} = \frac{3}{2}$$

Para el término a_{22} se tiene la expresión (3.7)

$$\sin^2 \theta_r + \sin^2(\theta_r - 120^\circ) + \sin^2(\theta_r + 120^\circ) \quad (3.7)$$

Usando identidades trigonométricas de A.3 se llega al resultado:

$$\sin^2 \theta_r + \frac{1}{4} (\sin \theta_r + \sqrt{3} \cos \theta_r)(\sin \theta_r + \sqrt{3} \cos \theta_r) + \frac{1}{4} (-\sin \theta_r + \sqrt{3} \cos \theta_r)(-\sin \theta_r + \sqrt{3} \cos \theta_r)$$

Resolviendo los binomios se tiene el siguiente resultado:

$$\sin^2 \theta_r + \frac{3}{4} \cos^2 \theta_r + \frac{3}{4} \cos^2 \theta_r + \frac{1}{4} \sin^2 \theta_r + \frac{1}{4} \sin^2 \theta_r$$
$$\frac{6}{4} (\cos^2 \theta_r + \sin^2 \theta_r)$$

Como resultado final para el término a_{22} se tiene que:

$$a_{22} = \frac{3}{2}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Para el término a_{33} se tiene la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Dando como resultado:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Por lo que como resultado final para a_{33} es:

$$a_{33} = \frac{3}{2}$$

Para el término a_{12} y a_{21} se tiene la misma expresión (3.8).

$$-\left[\sin \theta_r \cos \theta_r + \sin(\theta_r - 120^\circ) \cos(\theta_r - 120^\circ) + \sin(\theta_r + 120^\circ) \cos(\theta_r + 120^\circ)\right] \quad (3.8)$$

Mediante identidades trigonométricas de A.3 se tiene:

$$-\left[\sin \theta_r \cos \theta_r - \frac{1}{4}(-\cos \theta_r + \sqrt{3} \sin \theta_r)(\sin \theta_r + \sqrt{3} \cos \theta_r) - \frac{1}{4}(\cos \theta_r + \sqrt{3} \sin \theta_r)(-\sin \theta_r + \sqrt{3} \cos \theta_r)\right]$$

Se resuelve los binomios y se obtiene:

$$-\left[\sin \theta_r \cos \theta_r - \frac{1}{4}(2 \sin \theta_r \cos \theta_r) - \frac{1}{4}(2 \sin \theta_r \cos \theta_r)\right] - [\sin \theta_r \cos \theta_r - \sin \theta_r \cos \theta_r] = 0$$

Como resultado final se tiene para el término a_{12} y a_{21} .

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

**CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES
PERMANENTES.**

Para el término a_{31} se tiene la expresión (3.9).

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_r + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_r - 120^\circ) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_r + 120^\circ) \quad (3.9)$$

Con las identidades trigonométricas de A.3 se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \theta_r + \frac{1}{2} (-\cos \theta_r + \sqrt{3} \sin \theta_r) - \frac{1}{2} (\cos \theta_r + \sqrt{3} \sin \theta_r) \right]$$

Como resultado se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \theta_r - \frac{1}{2} \cos \theta_r - \frac{1}{2} \cos \theta_r \right) = 0$$

Por lo que para el término a_{31} se tiene como resultado:

$$a_{31} = 0$$

Para el término a_{23} y a_{32} se tiene la misma expresión (3.10).

$$-\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta_r + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta_r - 120^\circ) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta_r + 120^\circ) \right] \quad (3.10)$$

Con identidades trigonométricas de A.3 se obtiene:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin \theta_r - \frac{1}{2} (\sin \theta_r + \sqrt{3} \cos \theta_r) + \frac{1}{2} (-\sin \theta_r + \sqrt{3} \cos \theta_r) \right]$$

Como resultado se tiene:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin \theta_r - \frac{1}{2} \sin \theta_r - \frac{1}{2} \sin \theta_r \right] = 0$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

El resultado final para el término a_{23} y a_{32} :

$$a_{23} = a_{32} = 0$$

Por lo que se tiene la siguiente matriz para el resultado del producto de $[K_s][K_s]^T$:

$$[K_s][K_s^T] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Quedando así definido para $[K_s][K_s]^T$ como la matriz identidad (3.11).

$$[K_s][K_s^T] = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Para el término $[K_s][R_s][K_s]^T$ se tiene el siguiente producto matricial:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r + 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Resolviendo $[K_s][R_s]$ da el siguiente resultado:

$$[K_s][R_s] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} R_s \cos \theta_r & R_s \cos(\theta_r - 120^\circ) & R_s \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -R_s \sin \theta_r & -R_s \sin(\theta_r - 120^\circ) & -R_s \sin(\theta_r + 120^\circ) \\ R_s \frac{1}{\sqrt{2}} & R_s \frac{1}{\sqrt{2}} & R_s \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

$$[K_s][R_s] = R_s \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Se sabe que $[K_s][K_s]^T$ es igual a la matriz identidad, según se obtuvo anteriormente en la ecuación (3.11), Por lo que se tiene el resultado para $[K_s][R_s][K_s]^T$ quedando la ecuación (3.12).

$$[K_s][R_s][K_s]^T = R_s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Donde, para un generador sin saliencia, genera el mismo resultado en las inductancias, tal como se mencionó, en el inciso 3.1 sobre de las configuraciones, generando así $L_s = L_d = L_q$.

Para la siguiente expresión $[K_s] \frac{d}{dt} [K_s]^T$, se debe obtener la derivada de $\frac{d}{dt} [K_s]^T$ como esta matriz depende de la posición angular y no del tiempo como se comentó en la sección 2.4.3 por lo que se procede a multiplicar $\frac{d\theta_r}{d\theta_r}$ quedando la expresión (3.13).

$$\frac{d\theta_r}{dt} \cdot \frac{d}{d\theta_r} [K_s]^T \quad (3.13)$$

Donde la expresión $\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r$ por lo que matricialmente queda de la siguiente manera:

$$\omega_r \frac{d}{d\theta_r} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta_r + 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Al derivar la matriz queda expresado de la siguiente forma:

$$\omega_r \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_r & -\cos \theta_r & 0 \\ -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\cos(\theta_r - 120^\circ) & 0 \\ -\sin(\theta_r + 120^\circ) & -\cos(\theta_r + 120^\circ) & 0 \end{bmatrix}$$

Quedando así la nueva expresión (3.14).

$$[K_s] \frac{d}{dt} [K_s]^T = \omega_r \cdot [K_s] \frac{d}{\vartheta_r} [K_s]^T \quad (3.14)$$

De manera matricial se expresa de la siguiente forma:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_r & \cos(\vartheta_r - 120^\circ) & \cos(\vartheta_r + 120^\circ) \\ -\sin \vartheta_r & -\sin(\vartheta_r - 120^\circ) & -\sin(\vartheta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \omega_r \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_r & -\cos \theta_r & 0 \\ -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\cos(\theta_r - 120^\circ) & 0 \\ -\sin(\theta_r + 120^\circ) & -\cos(\theta_r + 120^\circ) & 0 \end{bmatrix}$$

Simplificando la constante, queda el siguiente producto matricial:

$$\omega_r \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta_r & -\cos \theta_r & 0 \\ -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\cos(\theta_r - 120^\circ) & 0 \\ -\sin(\theta_r + 120^\circ) & -\cos(\theta_r + 120^\circ) & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que al realizar el producto de $\omega_r \cdot [K_s] \frac{d}{\vartheta_r} [K_s]^T$ se tiene como resultado la siguiente matriz:

$$\omega_r \cdot [K_s] \frac{d}{\vartheta_r} [K_s]^T = \omega_r \frac{2}{3} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Realizando el producto matricial queda que los términos b_{13} , b_{23} Y b_{33} son ceros.

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Para el término b_{11} se tiene la expresión similar a la ecuación (3.8) por lo que es igual a cero.

$$-[\sin \theta_r \cos \theta_r + \sin(\theta_r - 120^\circ) \cos(\theta_r - 120^\circ) + \sin(\theta_r + 120^\circ) \cos(\theta_r + 120^\circ)] = 0$$

$$b_{11} = 0$$

Del mismo modo para el término b_{22} :

$$[\sin \theta_r \cos \theta_r + \sin(\theta_r - 120^\circ) \cos(\theta_r - 120^\circ) + \sin(\theta_r + 120^\circ) \cos(\theta_r + 120^\circ)] = 0$$

$$b_{22} = 0$$

Igual que los siguientes términos b_{31} y b_{32} demostrados en las ecuaciones (3.9) y (3.10). Para el término b_{31} se tiene que:

$$-\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta_r + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta_r - 120^\circ) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta_r + 120^\circ)\right] = 0$$

$$b_{31} = 0$$

Para el término b_{32} al igual se tiene la expresión:

$$-\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_r + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_r - 120^\circ) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_r + 120^\circ)\right] = 0$$

$$b_{32} = 0$$

Los siguientes términos al igual se demostraron b_{12} y b_{21} en las ecuaciones (3.6) y (3.7). Para el término b_{12} :

$$-[\cos^2 \theta_r + \cos^2(\theta_r - 120^\circ) + \cos^2(\theta_r + 120^\circ)] = -\frac{3}{2}$$

$$b_{12} = -\frac{3}{2}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Para el término b_{21} :

$$\sin^2 \theta_r + \sin^2(\theta_r - 120^\circ) + \sin^2(\theta_r + 120^\circ) = \frac{3}{2}$$

$$b_{21} = \frac{3}{2}$$

Generándose el siguiente resultado matricial, para el término $\omega_r \cdot [K_s] \frac{d}{dt} [K_s]^T$:

$$\omega_r \cdot [K_s] \frac{d}{dt} [K_s]^T = \omega_r \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Simplificando términos queda la matriz (3.15).

$$\omega_r \cdot [K_s] \frac{d}{dt} [K_s]^T = \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Una vez de haber obtenido las matrices (3.11), (3.12) y (3.15), se tiene el modelo general del PMSG con enlace de flujos (3.16) en $dq0$.

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

El cual puede ser expresado el modelo del PMSG, de manera compacta en la ecuación matricial (3.17).

$$v_{dq0s} = [R_s][i_{dq0s}] + \omega_r[\lambda_{qd0s}] + \frac{d}{dt}[\lambda_{dq0s}] \quad (3.17)$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Para los enlaces o eslabonamiento de flujo λ , se tiene, la relación donde es proporcional a la inductancia multiplicada por la corriente $\lambda = Li$ de acuerdo con (William H. Hayt, JR Y John A. Buck, 2006) y (Sadiku, Matthew N. O., 2002) y como se mencionó anteriormente, el efecto en un generador sin saliencia la inductancia síncrona es constante (magnetización), el único que varía es la inductancia mutua del rotor- estator tal como se estipulo en la sección 3.1 por lo que al aplicar la ecuación (2.98).

$$[\lambda_{dq0s}] = [K][L_{abcs}][K]^T [I_{dq0s}]$$

Donde la matriz de inductancias síncrona o de magnetización ($L_s = L_1$) y entre los devanados de estator ($L_m = -\frac{L_1}{2}$), para una máquina eléctrica en general y de cero saliencia, agregándole la inductancia de dispersión (L_{disp}). Queda representado de la siguiente manera:

$$[L_{abcs}] = \begin{bmatrix} L_1 + L_{disp} & -\frac{1}{2}L_1 & -\frac{1}{2}L_1 \\ -\frac{1}{2}L_1 & L_1 + L_{disp} & -\frac{1}{2}L_1 \\ -\frac{1}{2}L_1 & -\frac{1}{2}L_1 & L_1 + L_{disp} \end{bmatrix}$$

Por lo que, la expresión $[K][L_{abcs}][K]^T$ queda definido como $[L_{dq0s}]$ al realizar la conversión, del mismo modo que se hizo con las variables de la resistencia síncrona R_s queda expresado:

$$[L_{dq0s}] = \begin{bmatrix} L_1 + \frac{2}{3}L_{disp} & 0 & 0 \\ 0 & L_1 + \frac{2}{3}L_{disp} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}L_{disp} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Para $L_s = L_1$ conocido como la inductancia de magnetización, despreciando el efecto de la inductancia de dispersión ya que es mínima, su valor aproximado es de 5% al 10%, la expresión de las inductancias en $dq0$ queda expresado:

$$[L_{dq0s}] = \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, consideremos el efecto del imán permanente de la siguiente manera:

$$[\lambda_{rs}] = \begin{bmatrix} \lambda_{rr} \\ \lambda_{ra} \\ \lambda_{rb} \\ \lambda_{rc} \end{bmatrix}$$

Para λ_{rr} que es el efecto es constante sobre sí mismo al aplicar la ley de Faraday es igual a cero, pero como el enlace mutuo entre estator-rotor, tiene que ver con la inductancia mutua que es $L_{sr} = M_{sr} \cos \theta_r$ se puede aplicar el mismo principio donde $\lambda = N\psi_{mutuo}$, considerando que es un imán permanente $N = 1$, por lo que $\lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{mutuo}$, esto se realiza para pasar de un vector ortogonal a uno ortonormal y el flujo va variar conforme a la posición θ_r . De esta manera queda definido el efecto del imán en el estator:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{ra} \\ \lambda_{rb} \\ \lambda_{rc} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \psi_f \cos \theta_r \\ \psi_f \cos(\theta_r - 120) \\ \psi_f \cos(\theta_r + 120) \end{bmatrix}$$

Al realizar la conversión $dq0$, para el flujo magnético mutuo del imán permanente y el estator.

$$[\lambda_{rdq0}] = [K][[\lambda_{rs}]]$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Quedando expresado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{rd} \\ \lambda_{rq} \\ \lambda_{r0} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \psi_f \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De este modo el enlace de flujo λ_d , se le agrega el efecto mutuo del campo magnético de los imanes permanentes λ_{rd} , como se mencionó anteriormente, estos están alineados al eje de directa, y como si existiera inductancia mutua tal como la máquina de polos lisos, con un efecto constante, quedando las siguientes expresiones:

$$\lambda_d = L_d i_d + \psi_f$$

$$\lambda_q = L_q i_q$$

Donde ψ_f representa el efecto mutuo del campo magnético de los imanes permanentes en el estator, siendo constante por lo que al derivar para expresar la ecuación matricial (3.17) en términos de corrientes i_{dq0} , se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \lambda_d = L_d \frac{d}{dt} i_d$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_q = L_q \frac{d}{dt} i_q$$

Realizando la sustitución dentro del modelo (3.16), para así tener el modelo en variables eléctricas que en este caso sería en términos de corrientes y voltajes instantáneos, representado por la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_d i_d + \psi_f \\ L_q i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ i_0 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

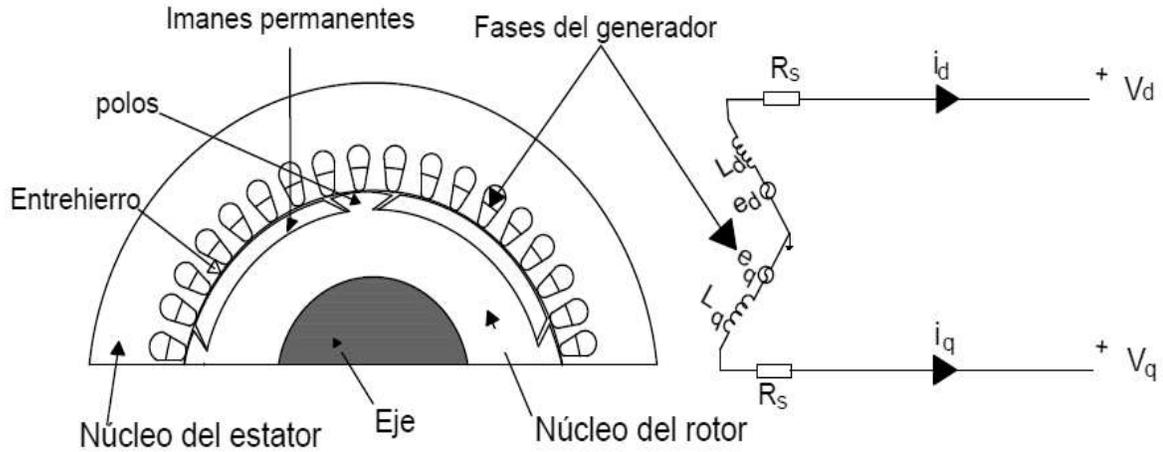


Figura 3.5 Prototipo del PMSG en $dq0$

Realizando las operaciones matemáticas el modelo se define de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 \\ L_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \psi_f + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ i_0 \end{bmatrix}$$

Por lo que el voltaje inducido en $dq0$ está dado por la matriz (3.18).

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \\ e_0 \end{bmatrix} = \omega_r \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 \\ L_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \psi_f \quad (3.18)$$

De este modo se realiza una representación menos compleja del PMSG, como el de la figura 3.4, donde se tiene una representación en abc , por lo que en $dq0$ se tiene la representación en la figura 3.5. Donde e_d y e_q queda expresado por las siguientes ecuaciones:

$$e_d = -\omega_r L_q i_q$$

$$e_q = \omega_r (L_d i_d + \psi_f)$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Todo esto es en un sistema balanceado donde i_0 es igual a cero, por lo que a la vez representa un sistema simétrico de no ser así i_0 sería diferente de cero, se hablaría de un sistema asimétrico y desbalanceado. Al simplificar las matrices el modelo queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & -\omega_r L_q & 0 \\ \omega_r L_d & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \psi_f + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ i_0 \end{bmatrix}$$

Se sabe que, al multiplicar un vector por la matriz identidad es igual al mismo vector:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ i_0 \end{bmatrix}$$

Por lo que el modelo queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & -\omega_r L_q & 0 \\ \omega_r L_d & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \omega_r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \psi_f + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ i_0 \end{bmatrix}$$

Expresándolo en diferenciales de corriente se define de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_d i_d \\ L_q i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_S & \omega_r L_q & 0 \\ -\omega_r L_d & -R_S & 0 \\ 0 & 0 & -R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \psi_f$$

Realizando el despeje de las inductancias se tiene el modelo final de corrientes instantáneas de la PMGS (3.19).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d/L_d \\ v_q/L_q \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_S/L_d & (\omega_r L_q)/L_d & 0 \\ (-\omega_r L_d)/L_q & -R_S/L_q & 0 \\ 0 & 0 & -R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_r/L_q \\ 0 \end{bmatrix} \psi_f \quad (3.19)$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

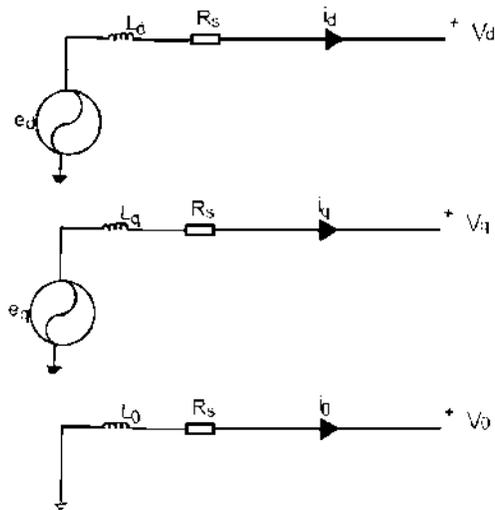


Figura 3.6 Circuito eléctrico equivalente de la PMSG en $dq0$

De este modo las ecuaciones de cada diferencial de corriente quedan expresado por (3.20) Y (3.21). Coincidiendo con los artículos (D.I. Stroe, et al, 2011) y (Junfei Chen, et al.,, 2012) así como con otros autores.

$$\frac{d}{dt} i_d = \frac{1}{L_d} [V_d - R_s i_d + \omega_r L_q i_q] \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} i_q = \frac{1}{L_q} [V_q - (R_s i_q + \omega_r L_d i_d + \omega_r \psi_f)] \quad (3.21)$$

Para un sistema trifásico balanceado i_0 es igual a cero $i_0 = 0$, pero no se debe descartar su importancia, ya que su función es que al existir una corriente i_0 existe desbalances, por lo que su ecuación es:

$$\frac{d}{dt} i_0 = \frac{1}{L_0} (V_0 - R_s i_0)$$

El circuito eléctrico equivalente del PMSG, tal como se muestra en la figura 3.6, para el circuito de la componente i_0 , está desacoplado magnéticamente del de directa y cuadratura, pero es bueno considerar una resistencia síncrona y la inductancia de componente cero, para identificar desbalance y fallas en el generador.

3.3 Conversión del voltaje de abc a $dq0$.

En el modelo del PMSG se considera el voltaje en abc definido por el vector (3.20).

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = V_{ll} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega_b t) \\ \cos(\omega_b t - 120^\circ) \\ \cos(\omega_b t + 120^\circ) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Donde $\omega_b t$ es igual al ángulo eléctrico del sistema. Realizando la conversión del voltaje (3.22) basado se en la relación (2.95) para $dq0$:

$$[V_{dq0}] = [K][V_{abc}]$$

Por lo que matricialmente queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} V_{ll} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega_b t) \\ \cos(\omega_b t - 120^\circ) \\ \cos(\omega_b t + 120^\circ) \end{bmatrix}$$

Realizando la operación de la constante cuadrática queda definido el producto matricial:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = V_{ll} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r - 120^\circ) & \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ -\sin \theta_r & -\sin(\theta_r - 120^\circ) & -\sin(\theta_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega_b t) \\ \cos(\omega_b t - 120^\circ) \\ \cos(\omega_b t + 120^\circ) \end{bmatrix}$$

Para el siguiente producto matricial se obtiene un vector de la misma dimensión:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = V_{ll} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

El cuál se utilizará identidades trigonométricas de A.3 para resolver el producto matricial. Para el término c_1 se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \cos(\omega_b t) \cos \theta_r + \cos(\omega_b t - 120^\circ) \cos(\theta_r - 120^\circ) + \cos(\omega_b t + 120^\circ) \cos(\theta_r + 120^\circ) \\ &= \cos(\omega_b t) \cos \theta_r + \frac{1}{4} [(-\cos(\omega_b t) + \sqrt{3}\sin(\omega_b t))(-\cos \theta_r + \sqrt{3}\sin \theta_r)] \\ & \quad + \frac{1}{4} [(\cos(\omega_b t) + \sqrt{3}\sin(\omega_b t))(\cos \theta_r + \sqrt{3}\sin \theta_r)] \end{aligned}$$

Realizando el producto de binomios y reduciendo términos, resulta:

$$\begin{aligned} &= \cos(\omega_b t) \cos \theta_r + \frac{1}{2} (\cos(\omega_b t) \cos \theta_r + 3 \sin(\omega_b t) \cos \theta_r) \\ &= \frac{3}{2} (\cos(\omega_b t) \cos \theta_r + \sin(\omega_b t) \cos \theta_r) \end{aligned}$$

Usando las identidades trigonométricas de A.2 donde c_1 quedando el resultado la ecuación (3.23).

$$c_1 = \frac{3}{2} \cos(\omega_b t - \theta_r) \tag{3.23}$$

Para el término c_2 usando las identidades trigonométricas de A.3 resulta:

$$\begin{aligned} & -[\cos(\omega_b t) \sin \theta_r + \cos(\omega_b t - 120^\circ) \sin(\theta_r - 120^\circ) + \cos(\omega_b t + 120^\circ) \sin(\theta_r + 120^\circ)] \\ &= \cos(\omega_b t) \cos \theta_r - \frac{1}{4} [(-\cos(\omega_b t) + \sqrt{3}\sin(\omega_b t))(\sin \theta_r + \sqrt{3}\cos \theta_r)] \\ & \quad - \frac{1}{4} [(\cos(\omega_b t) + \sqrt{3}\sin(\omega_b t))(-\sin \theta_r + \sqrt{3}\cos \theta_r)] \end{aligned}$$

Realizando el producto de binomios y simplificando términos se tiene:

$$\begin{aligned} &= -\left[\cos(\omega_b t) \sin \theta_r - \frac{1}{2} (-\cos(\omega_b t) \sin \theta_r + 3 \sin(\omega_b t) \cos \theta_r) \right] \\ &= \frac{3}{2} (\sin(\omega_b t) \cos \theta_r - \cos(\omega_b t) \cos \theta_r) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Usando las identidades trigonométricas de A.2 se tiene la expresión para c_2 (3.24).

$$c_2 = \frac{3}{2} \sin(\omega_b t - \theta_r) \quad (3.24)$$

Para el término c_3 se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\omega_b t) + \cos(\omega_b t - 120^\circ) + \cos(\omega_b t + 120^\circ)] = 0$$

Como se demostró anteriormente, para la expresión siguiente que es la (3.10), donde el resultado es cero para c_3 :

$$c_3 = 0 \quad (3.25)$$

Representando de manera matricial las ecuaciones (3.23), (3.24) y (3.25) el voltaje en $dq0$.

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = V_{ll} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cos(\omega_b t - \theta_r) \\ \frac{3}{2} \sin(\omega_b t - \theta_r) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizando las simplificaciones, queda expresado por el vector de voltajes (3.26)

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = V_{ll} \begin{bmatrix} \cos(\omega_b t - \theta_r) \\ \sin(\omega_b t - \theta_r) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Se puede apreciar que, el voltaje de salida de una máquina rotativa depende de la velocidad del sistema en este caso la frecuencia y el movimiento rotatorio del PMSG.

3.4 Ecuación de potencia eléctrica y Par eléctrico del PMGS.

Algo muy importante en las máquinas eléctricas en general es la relación que hay entre el sistema eléctrico y el mecánico, la razón es descrita en el capítulo 2 en el inciso 2.2.5; donde se aborda la transformación y conservación de la energía en las máquinas eléctricas, la relación más importante para los sistemas electromecánicos es el Par eléctrico, por ello es importante definirlo para el PMSG.

Se tiene que la potencia eléctrica instantánea está dada por la ecuación (3.27), la relación aquí es matricial por ello el voltaje tiene la misma secuencia utilizada, por lo que se propone que la corriente es la transpuesta:

$$[P_{abc}] = [i_{abc}]^t [V_{abc}] \quad (3.27)$$

Para el marco de referencia $dq0$, se tiene la ecuación (3.28)

$$[P_{dq0}] = [i_{dq0}]^t [V_{dq0}] \quad (3.28)$$

Por lo que la potencia instantánea mecánica viene siendo la ecuación (3.29), basándonos en (Syed A. Nasar, 1982).

$$P_{mdq0} = [i_{dq0}]^t [e_{dq0}] \quad (3.29)$$

La ecuación del Par eléctrico está dada por las ecuaciones (2.36) y (2.37).

$$\tau_e = \frac{p}{2} \frac{dW}{d\theta_r}$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

Por lo que la energía está relacionada con la potencia de la siguiente manera:

$$dW = P dt$$

Por ello que la potencia en $dq0$ viene siendo expresado:

$$P_{mdq0} = \frac{2}{p} \frac{d\theta_r}{dt} \tau_e$$

Para el generador síncrono de imanes permanentes, se tiene que la potencia es:

$$P_{mdq0} = \frac{2}{p} \omega_r \tau_e$$

Cuyo Par eléctrico está expresado por la ecuación siguiente:

$$\tau_e = \frac{p}{2} \frac{P_{mdq0}}{\omega_r}$$

Sustituyendo la potencia mecánica $dq0$ (3.29), queda definido por la ecuación (3.30).

$$\tau_e = \frac{p}{2} \frac{[i_{dq0}]^t [e_{dq0}]}{\omega_r} \quad (3.30)$$

De manera matricial el Par eléctrico queda expresado por la ecuación (3.31).

$$\tau_e = \frac{p}{2} [i_d \quad i_q \quad i_0] \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 \\ L_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \psi_f \right\} \quad (3.31)$$

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

La ecuación de Par eléctrico, viene dándose por la ecuación (3.32), coincidiendo con el artículo de (Jay Verma, et al., 2014) y (Tianyu Wang, et al., 2014) junto con otros artículos.

$$\tau_e = \frac{p}{2} [(L_d - L_q) i_d i_q + \psi_f i_q] \quad (3.32)$$

Para el PMSG de cero saliencia, como $L_d = L_q = L_s$ el Par eléctrico queda expresado:

$$\tau_e = \frac{p}{2} [\psi_f i_q]$$

3.5 Relación de Par eléctrico y velocidad del rotor del PMGS.

En la parte mecánica existe una relación importante, el cual principalmente tiene que ver con la inercia, fricción y torsión. Además, se tiene constantes relacionadas al Par eléctrico y la velocidad del rotor, la ecuación (3.33) representa lo antes mencionado.

$$\tau_e = J \frac{d^2 \theta_r}{dt^2} + F_v \frac{d\theta_r}{dt} + k\theta_r \quad (3.33)$$

Una vez definido la relación mecánica, se incluye a la vez el par de la carga, que viene siendo representado por T_l , al incluirlo en la ecuación queda definido por:

$$\tau_e = \left(J \frac{d^2 \theta_r}{dt^2} + F_v \frac{d\theta_r}{dt} + k\theta_r \right) + T_l$$

Tal como se vio en el capítulo 2 la relación de ángulo eléctrico o de rotor, entre el ángulo mecánico está dado por la ecuación (2. 63), donde muestra que la relación de estas variables es proporcional al par de polos $\theta_r = p\theta_m$ que se tenga; por lo que se tiene, que la

CAPÍTULO 3 MODELADO DE UN GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

diferencial de la posición mecánica del PMSG, de segundo orden, queda representada por la ecuación (3.34).

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = \frac{1}{p * J} (\tau_e - T_l) - \frac{F_v}{J} \frac{d\theta_m}{dt} - \frac{k}{J} \theta_m \quad (3.34)$$

Una vez de haber obtenido el modelo del PMSG, que son las ecuaciones en $dq0$ se tiene el modelo completo, para poder realizar la simulación en Matlab Simulink®.

3.6 Transformación del modelo del PMGS $dq0$ a abc .

Una vez obtenido el modelo en $dq0$ es importante conocer la respuesta en abc , por lo que es necesario volver a utilizar la matriz de transformación de Clark-Park, quedando definido que:

$$V_{abcs} = K_s^T V_{dq0s}$$

$$i_{abcs} = K_s^T i_{dq0s}$$

$$e_{abcs} = K_s^T e_{dq0s}$$

Al haber definido estas variables se pueden conocer, el Par eléctrico y la potencia instantánea de acuerdo con las relaciones matemáticas entre ellas. Pero para fines prácticos la matriz de Clark-Park, se realizará la simulación con diagramas de bloques, en Matlab Simulink®.

CAPITULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES.

4.1 Introducción a la simulación del PMSG en Matlab Simulink®.

En el capítulo anterior se obtuvo el modelo del PMSG, en el marco de referencia $dq0$. Por lo que se procede a realizar los diagramas de simulación de dicho modelo general. En la simulación del PMSG, se realiza las consideraciones expuestas en el capítulo 2 y sección 3, además, como se mencionó en el capítulo 3 y sección 1, donde la configuración del generador es de imanes superficiales, por lo que la inductancia síncrona es igual a la de

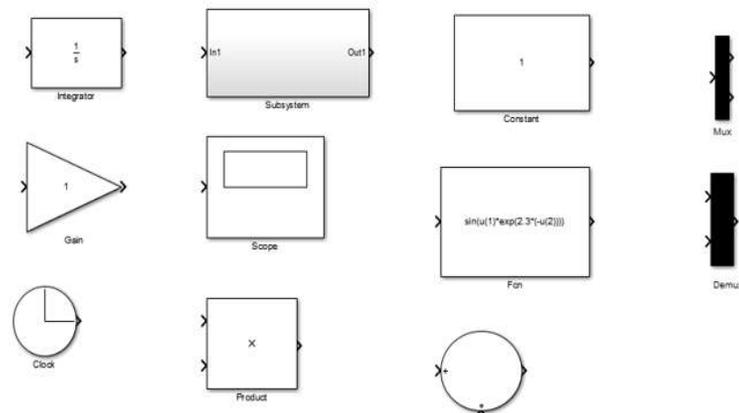


Figura 4.1 Bloques de Matlab Simulink®

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

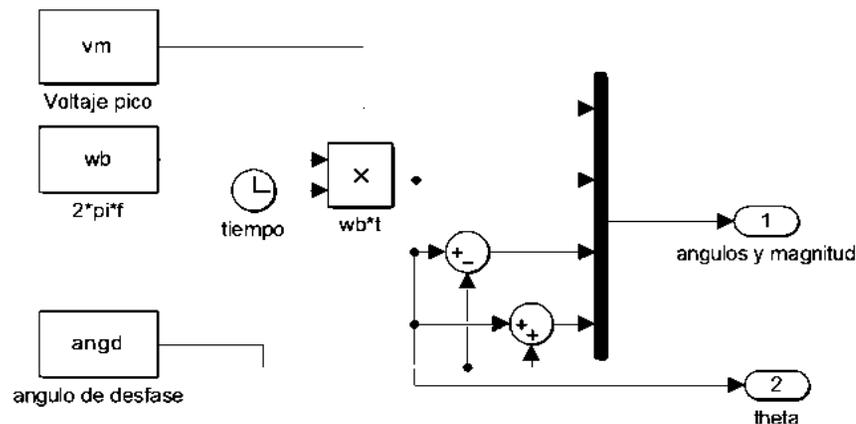


Figura 4.2 Voltaje pico, velocidad del sistema, y Ángulo de desfase.

cuadratura y de directa, a la vez el efecto del campo magnético de los imanes se considera lineal, por lo que se desprecia los efectos de la curva de esteréis o saturación, y de este modo el generador se puede considerar como una máquina de rotor liso.

Se construirá varios diagramas de simulación, tal como el de la matriz de transformación de Clark-Park, para obtener una respuesta de los voltajes y corrientes en el marco de referencia $dq0$, al igual que los diagramas de simulación la inversa de dicha matriz para saber la respuesta en abc . Después se procede a crear los diagramas de simulación del modelo del PMSG, obtenido en el capítulo 3 en el marco de referencia $dq0$. Donde se utilizará la matriz de transformación de Clark-Park, y su inversa para así obtener la respuesta del sistema tanto como en el marco de referencia $dq0$ y en abc . Todo el desarrollo de la simulación será realizado en la plataforma de Matlab Simulink®, por lo que se trabajará con diagramas de bloques de este simulador como sumadores, multiplicadores, integradores, etc. Véase la figura 4.1.

Antes de realizar la simulación de la transformación de Clark-Park, se debe realizar una fuente trifásica, que a continuación se muestran los diagramas de simulación en las figuras 4.2 y 4.3.

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

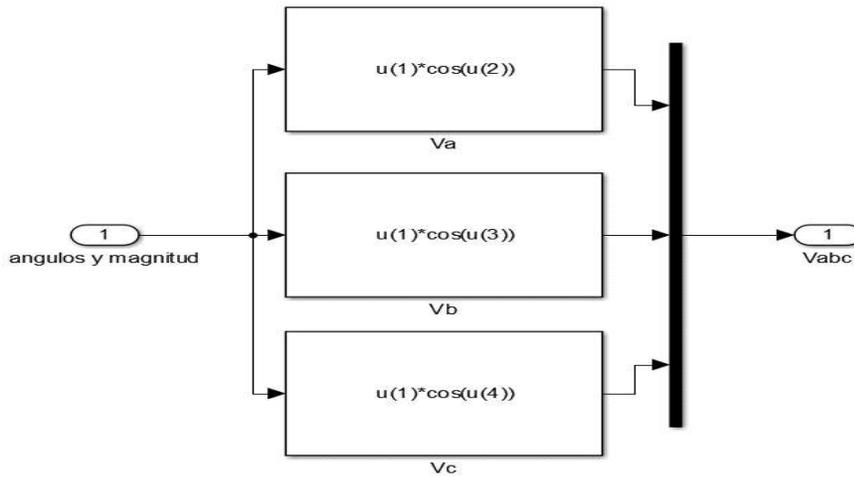


Figura 4.4 Funciones de la fuente trifásica en abc

En la figura 4.2 se realiza la simulación de las variables trifásicas como el voltaje pico, la velocidad del sistema, donde se incluye la frecuencia que se utilizara para este caso sería de 60hz , el cual es un sistema trifásico balanceado desfasado a 120° , todo esto da origen a los ángulos eléctricos, sumando a su correspondiente desfaseamiento. Una vez que se tiene el resultado en la salida ángulos y magnitud, donde esta pasa a la simulación de la figura 4.3 para obtener el voltaje trifásico, donde en la salida theta se tiene la rotación eléctrica del sistema siendo $\theta_e = 2 * \pi * f$ el cual será útil para la transformación a $dq0$.

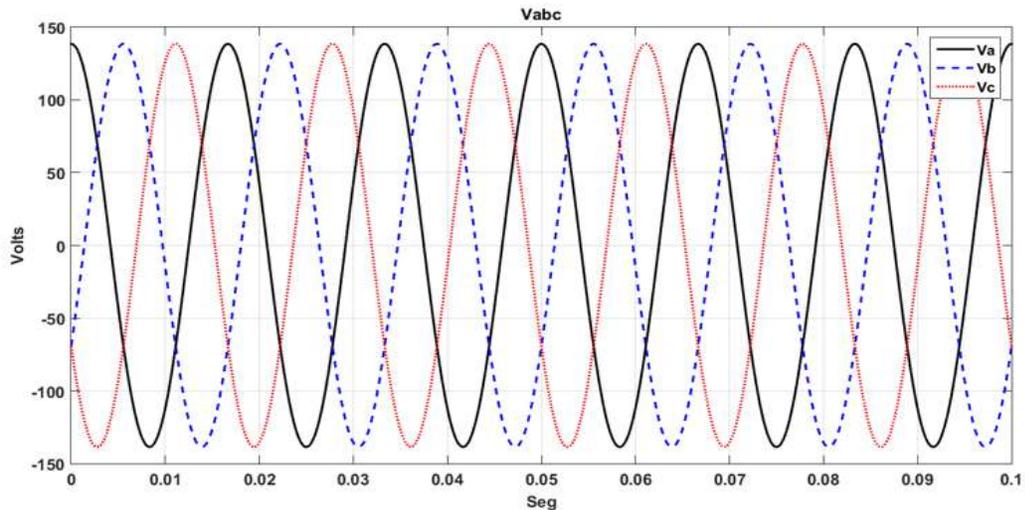


Figura 4.3 Respuesta del voltaje en abc

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

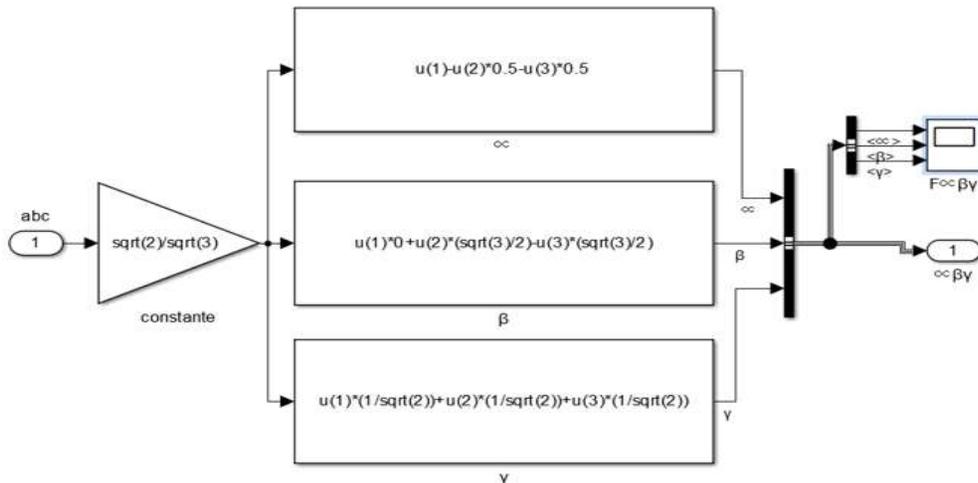


Figura 4.5 Diagrama de simulación de la matriz de Clark

La respuesta de la fuente de voltaje en Matlab Simulink® se muestra en la figura 4.4, el cual es la fuente propuesta en el capítulo 3 y sección 3 la ecuación (3.22), se tiene un $V_m = 138\text{volts}$ con la frecuencia antes dicha.

4.2 Simulación de la matriz de Clark-Park en Matlab Simulink®.

La transformación de Clark-Park, es muy importante para la simulación de la PMSG; ya que el modelo se realizó en el marco de referencia $dq0$, por lo que las variables del marco de referencia abc , son necesarias convertirlas en el marco de referencia $dq0$, por ello se hizo la simulación de la matriz de conversión Clark-Park.

Para mayor flexibilidad se utilizará la definición la matriz K , de la siguiente manera.

$$[K] = [M][N]$$

Donde se sabe que:

$[M]$ = la submatriz de $[K]$ o matriz de transformación de Clark de un eje ortonormal.

$[N]$ = la submatriz de $[K]$ o la matriz de transformación de Park a un eje estático

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

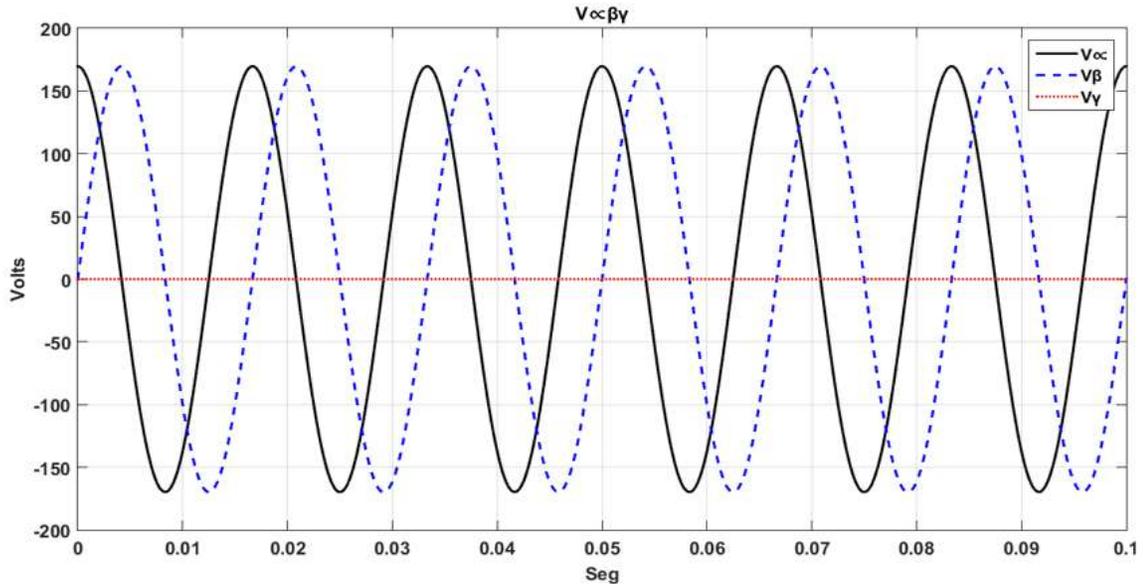


Figura 4.6 Respuesta en $\alpha\beta\gamma$

La razón importante, por lo que se trabajará con estas submatrices es en que se puede saber la respuesta en los marcos de referencia $dq0$ y en $\alpha\beta\gamma$.

Los diagramas de simulación de la matriz de Clark o la matriz M expuesta en la sección 2.4.2, en Matlab Simulink® queda expresado tal como se muestra en la figura 4.5, donde se tiene una entrada trifásica en abc , pasando en un demultiplexor, insertándose a las funciones de las ecuaciones de la matriz M , para luego multiplicarse por la constante de la matriz. Generando de esta forma la respuesta en el marco de referencia $\alpha\beta\gamma$, tal como se ve en la figura 4.6; se aprecia claramente que se tiene la respuesta de α y β , desfasados a 90° y por ende γ devuelve una respuesta nula ya que el sistema es simétrico y balanceado. A continuación, se tiene la figura 4.7, mostrando la respuesta individual de $\alpha\beta\gamma$.

Una vez de haber obtenido la simulación de la respuesta en el marco de referencia $\alpha\beta\gamma$, donde aún el sistema es giratorio a la velocidad del sistema ω_r , tal como se dio a conocer en la sección 3.4 donde $dq0$; es un marco de referencia estático. Por lo que a partir

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

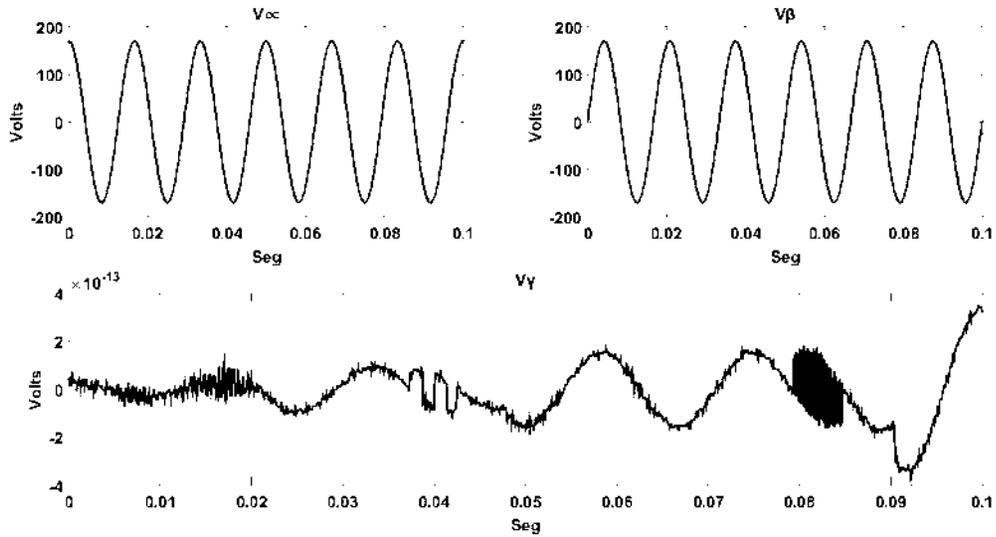


Figura 4.7 Respuesta individual en $\alpha\beta\gamma$

de la respuesta de $\alpha\beta\gamma$, se debe pasar al marco de referencia $dq0$, el cuál se tiene el diagrama de simulación mostrado en la figura 4.8; que representan la matriz de Park o N .

La respuesta que se tiene en el marco de referencia $dq0$, se puede apreciar en la figura 4.9; donde se ve claramente que la variación del sistema oscilatorio desaparece, quedando una componente constante.

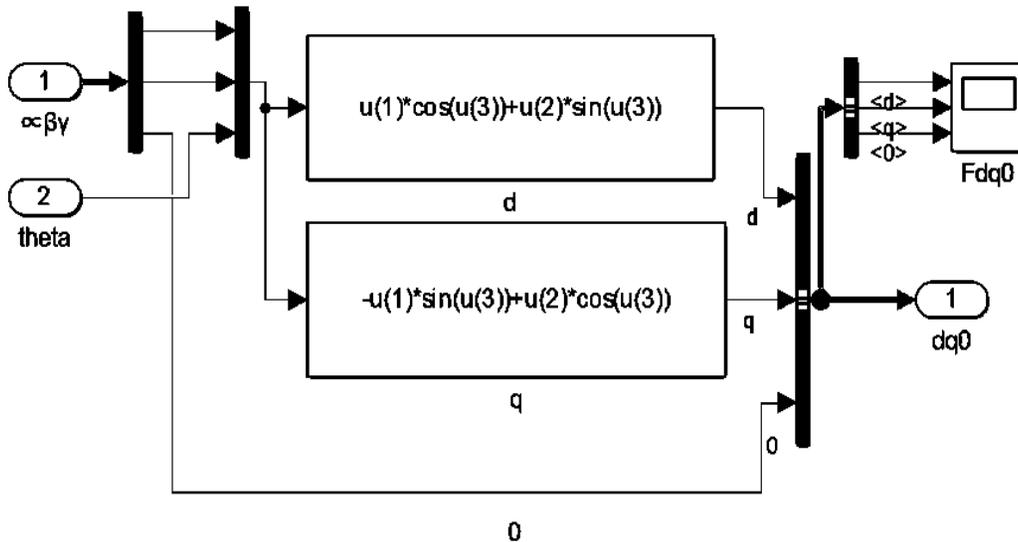


Figura 4.8 Diagrama de simulación de la matriz de $dq0$

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

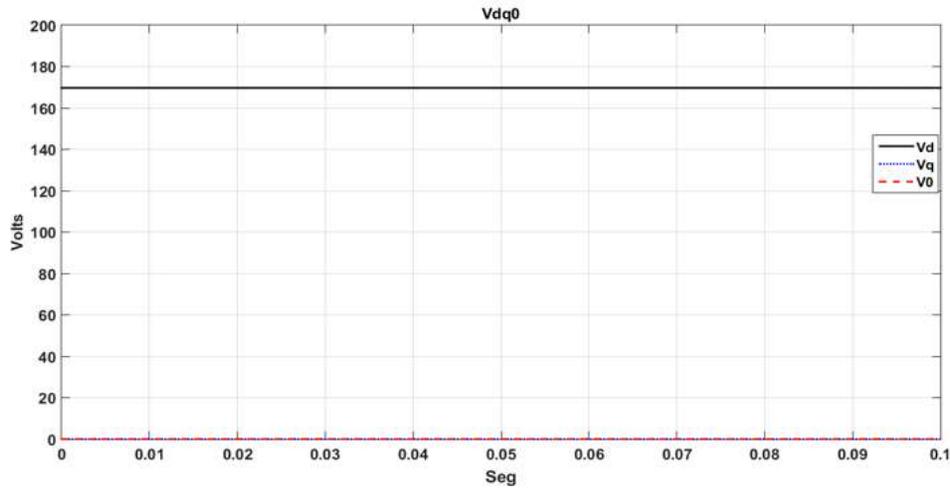


Figura 4.9 Respuesta de $dq0$

La respuesta del marco de referencia estático, se basa en el movimiento relativo cuando se está en el marco de referencia abc ; es como si uno estuviera fuera del marco de referencia dicho u observado y se observa de lejos el movimiento. Al realizar el cambio a $\alpha\beta\gamma$; en vez de ver tres ondas oscilatorias del sistema solo se ve dos y una vez que se hace la conversión al marco de referencia $dq0$, es como si se estuviera dentro del marco de referencia o el observador dentro de este y no se notaría el cambio en las variables de

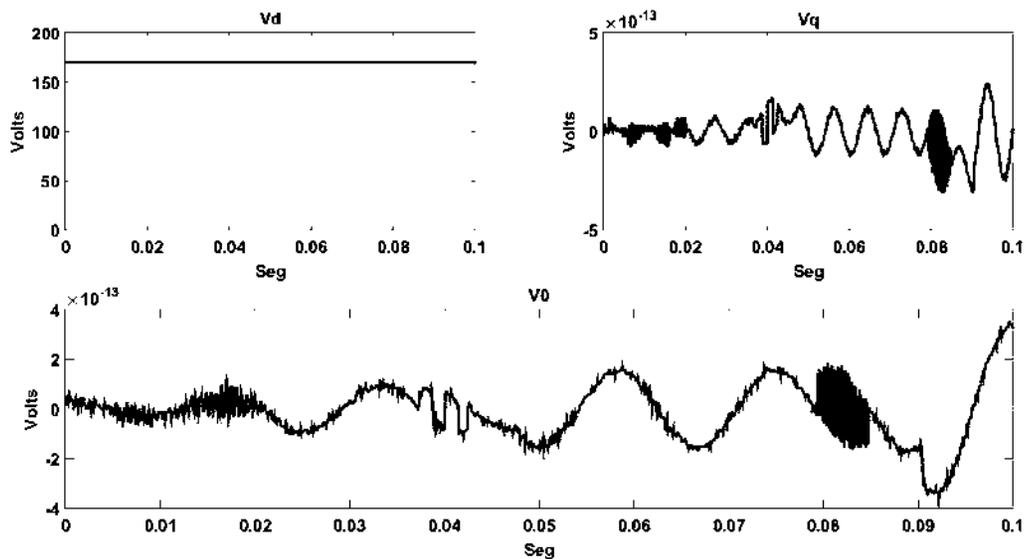


Figura 4.10 Respuesta individual en $dq0$

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

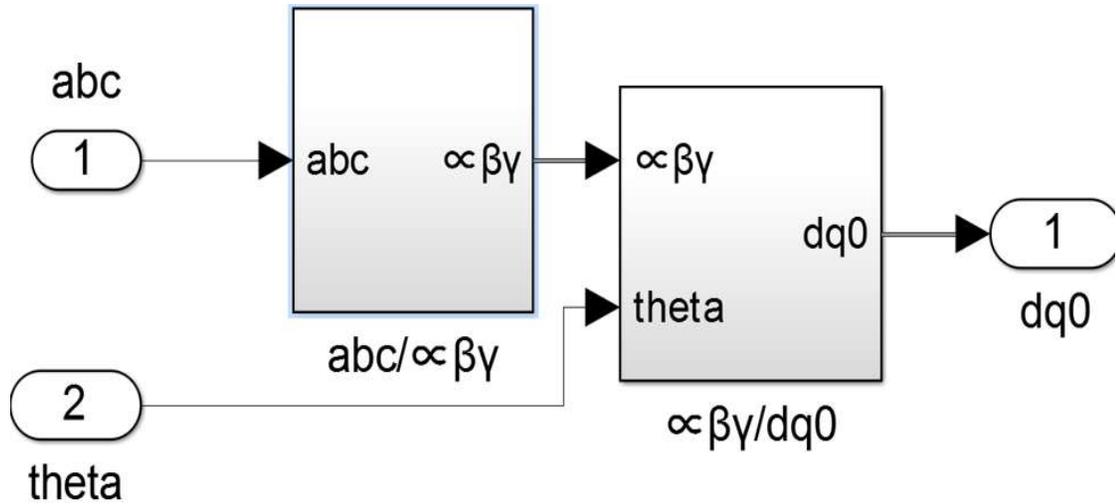


Figura 4.11 Diagrama sistema general de conversión de abc a $dq0$

velocidad, del sistema solo se lograría ver una componente o magnitud. Por ello se tiene la respuesta individual de cada componente en $dq0$, que se muestra en la figura 4.10.

El sistema de conversión de Clark-Park o la matriz de transformación al marco de referencia a $dq0$, conocido como K , queda definido tal como se muestra en la figura 4.11, donde se tiene la conversión del sistema abc , pasando al marco de referencia $\alpha\beta\gamma$, luego de $\alpha\beta\gamma$, al marco de referencia $dq0$, donde este último se dice que el ángulo eléctrico es el mismo, que del sistema por lo que $\vartheta_r = \omega_b t$ de tal forma que cuando se tenga la transformación de a abc a $dq0$, sea constante tal como se desea.

4.3 Simulación de la inversa de la matriz de Clark-Park en Matlab Simulink®.

Una vez ya habiendo obtenido la situación de la matriz K , por medio de las submatrices M y N , de acuerdo con la sección 3.4.2 se tiene que:

$$[K]^{-1} = [K]^t$$

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

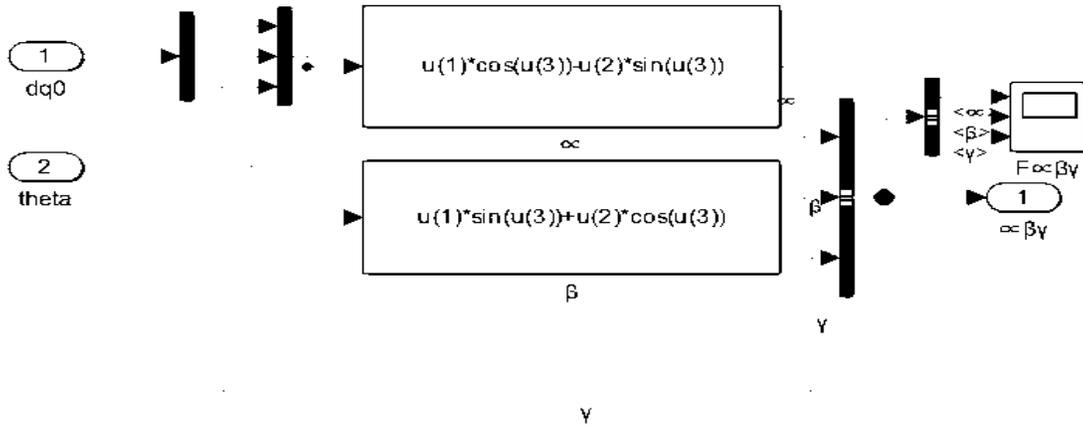


Figura 4.12 Diagrama de simulación de la matriz inversa de $dq0$

Por lo que se tiene que;

$$[K]^t = [N]^t[M]^t$$

Esta definición igual que el anterior, nos da la posibilidad de realizar la simulación de las inversas de cada submatriz, de manera individual para tener la respuesta en cada uno de los marcos de referencia.

Ahora el fin de encontrar la inversa de la matriz de transformación K , es para conocer el efecto del sistema en abc , ya que se trabajará con el modelo de la máquina en el marco

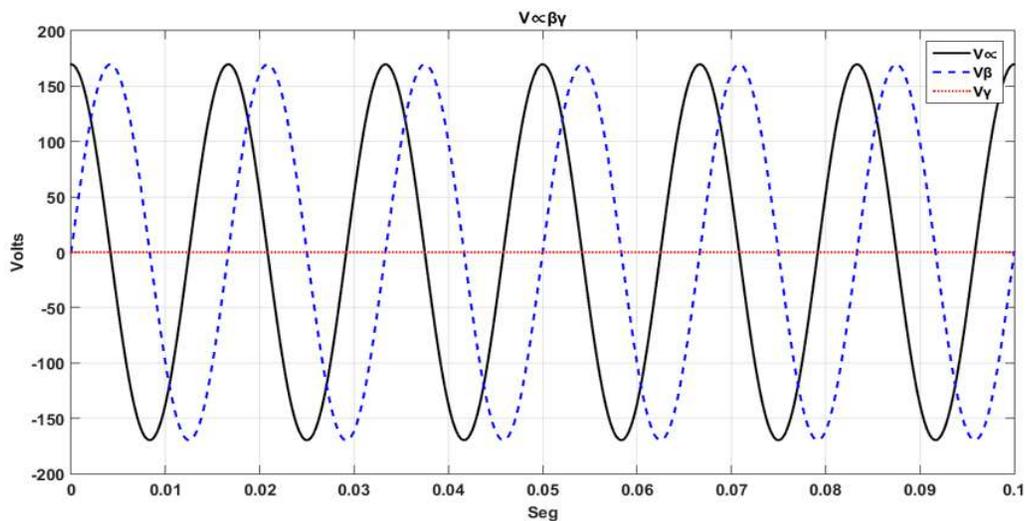


Figura 4.13 Respuesta de la matriz inversa de $dq0$

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

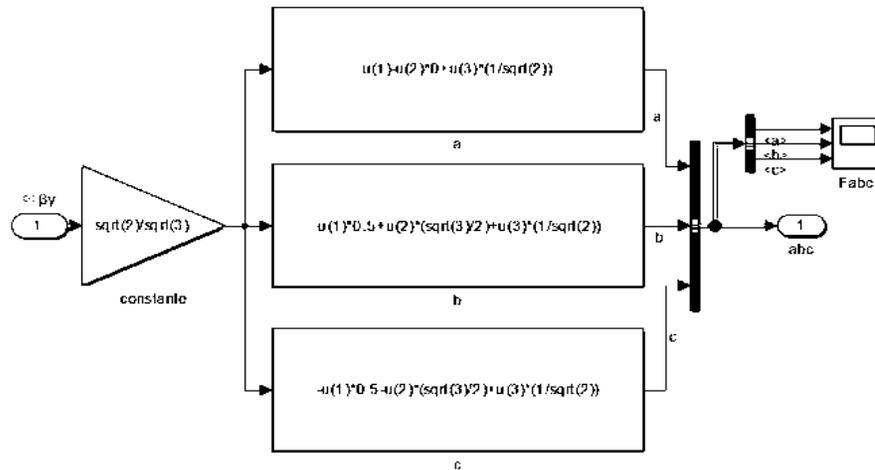


Figura 4.14 Diagrama de simulación de la matriz inversa de $\alpha\beta\gamma$

de referencia $dq0$, por ello lo primero es encontrar la inversa de la matriz de Park o N^t , el cual se tiene como resultado el diagrama de simulación de la figura 4.12, el cual su respuesta de la inversa es en $\alpha\beta\gamma$ como se muestra en la figura 4.13, donde exactamente es la misma que se obtiene al convertir de abc a $\alpha\beta\gamma$ sólo que aquí se parte de $dq0$ a $\alpha\beta\gamma$.

Para la matriz inversa de Clark o M^t se tiene la simulación de la figura 4.14, al igual que en la sección anterior. Esta matriz nos sirve para pasar de $\alpha\beta\gamma$ a abc , cuya respuesta

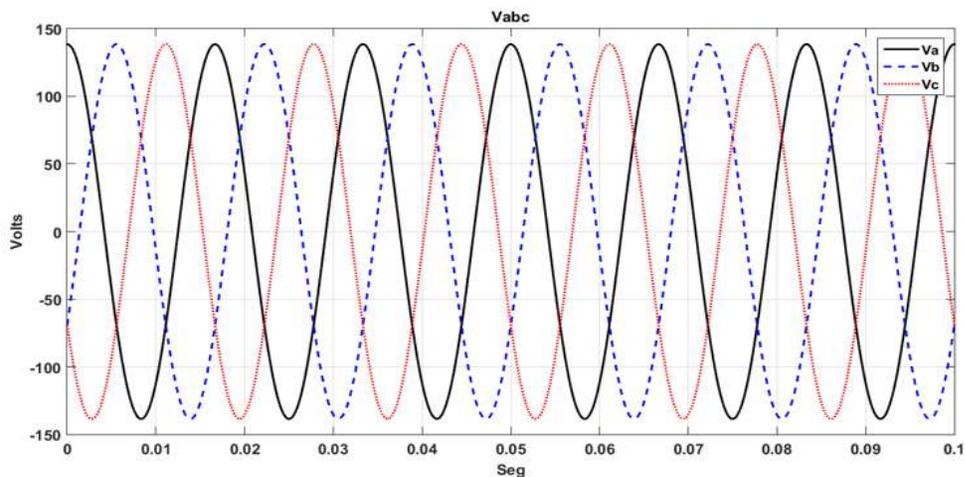


Figura 4.15 Respuesta de la matriz inversa de $\alpha\beta\gamma$

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

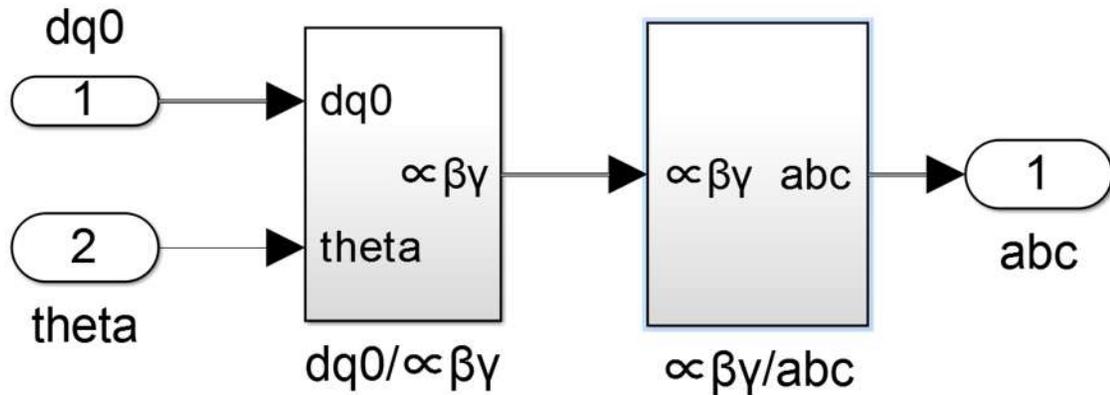


Figura 4.16 Diagrama de sistema general del inverso de conversión de $dq0$ a abc

se presenta en la figura 4.15. De este modo se tiene el sistema inverso de K o bien K^T , que viene siendo el inverso de la transformación de Clark-Park; como se muestra en la figura 4.16. Una vez obtenido la transformada de Clark-Park y su inversa se tiene listo para realizar la simulación del modelo del PMSG en $dq0$, por lo tanto, el siguiente paso es la simulación de las ecuaciones y variables del generador.

4.4 Simulación del PMSG en $dq0$ en Matlab Simulink®.

A partir de aquí se presenta el modelado del PMSG; cuyo modelo está en el marco de referencia $dq0$, expuesto en el capítulo 3 de esta tesis. El primer paso a realizar, es el diagrama de simulación de las ecuaciones de corriente i_{dq0} , que son las ecuaciones (3.20) y (3.21) incluyendo i_0 , sabiendo que en un sistema trifásico balanceado su valor es cero. Una vez realizado el diagrama de simulación de las corrientes i_{dq0} ; se realizará el diagrama de simulación del Par eléctrico T_e , cuya ecuación es (3.32) y por último se realizará el diagrama de simulación, la parte en donde se logra encontrar la velocidad mecánica y el ángulo de rotación mecánico, cuya ecuación es (3.34), no olvidando la relación entre velocidad mecánica y velocidad eléctrica, expuesta en el capítulo y sección 2.3.2 cuyas ecuaciones son (2.63) y (2.64) y de este modo se tendrá el modelo general del PMSG.

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

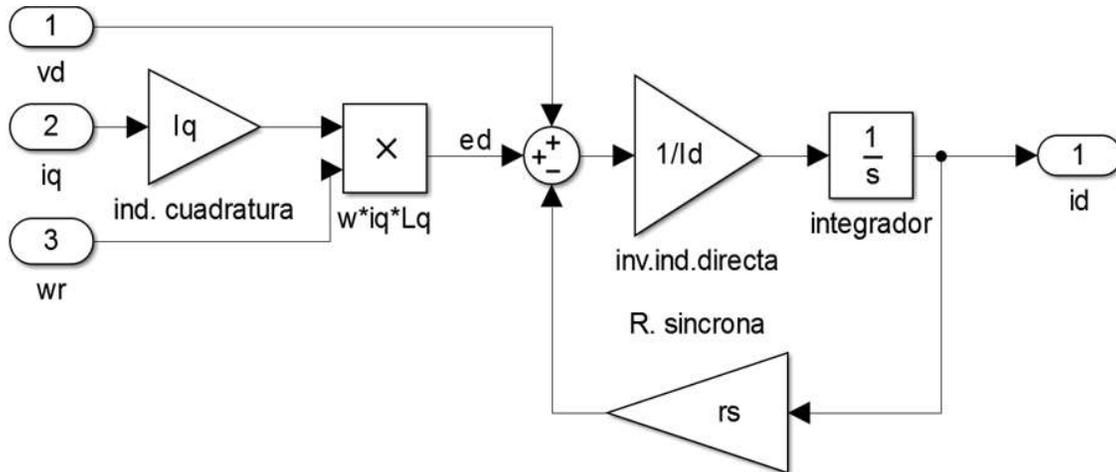


Figura 4.17 Diagrama de simulación de i_d

Para los sistemas dinámicos sobre todo en las máquinas eléctricas; se considera que el voltaje es constante y sinusoidal variante en el tiempo a la salida, por lo que se sabe correctamente que la corriente se representa con variables de estado, en este capítulo, se realiza los diagramas de simulación de las corrientes en $dq0$, donde se usa la transformada de Clark-Park; para obtener el voltaje en $dq0$ y obtener el comportamiento de la corriente del PMSG. La corriente i_d se encuentra en el eje de directa su relación es colineal con el

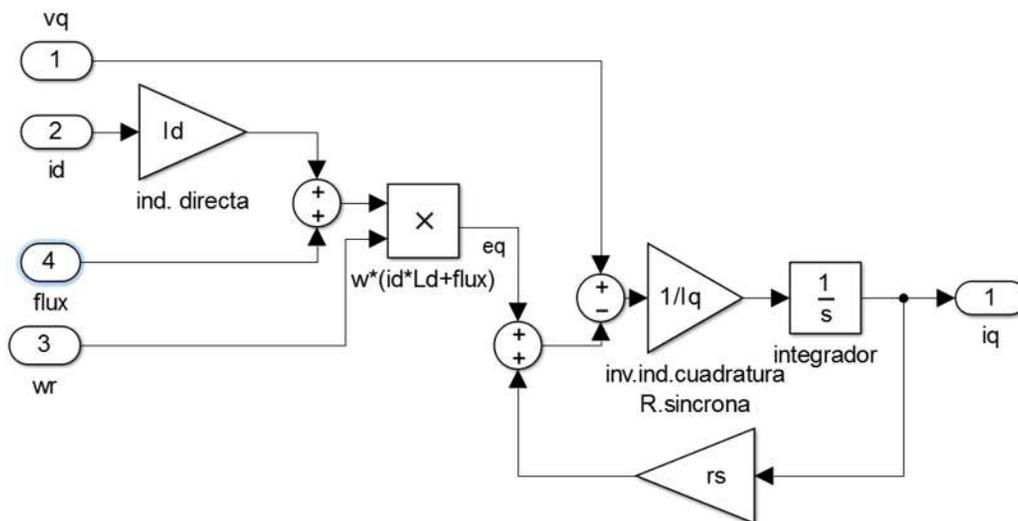


Figura 4.18 Diagrama de simulación de i_q

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

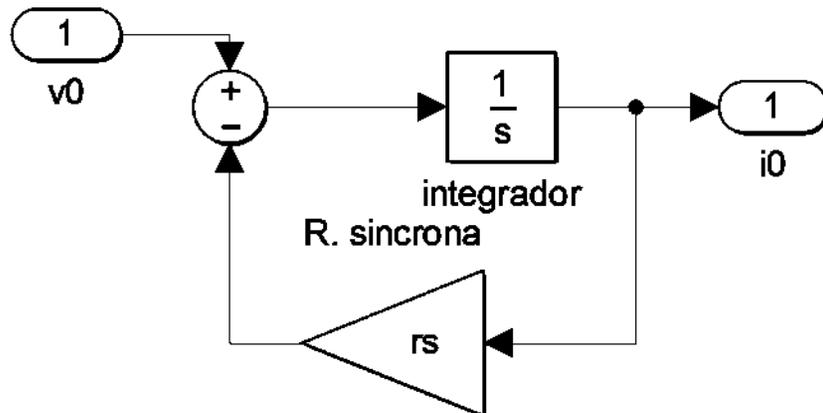


Figura 4.19 Diagrama de simulación de i_0

campo magnético del estator; cuyo diagrama de simulación de la ecuación de i_d (3.20) se muestra en la figura 4.17.

La corriente i_q , está ubicada en el eje de cuadratura a 90° del campo magnético del estator. El diagrama de simulación de la ecuación de i_q (3.21); se muestra en la figura 4.18, por el cual esta corriente i_q está influido directamente, por el flujo magnético de los imanes permanentes.

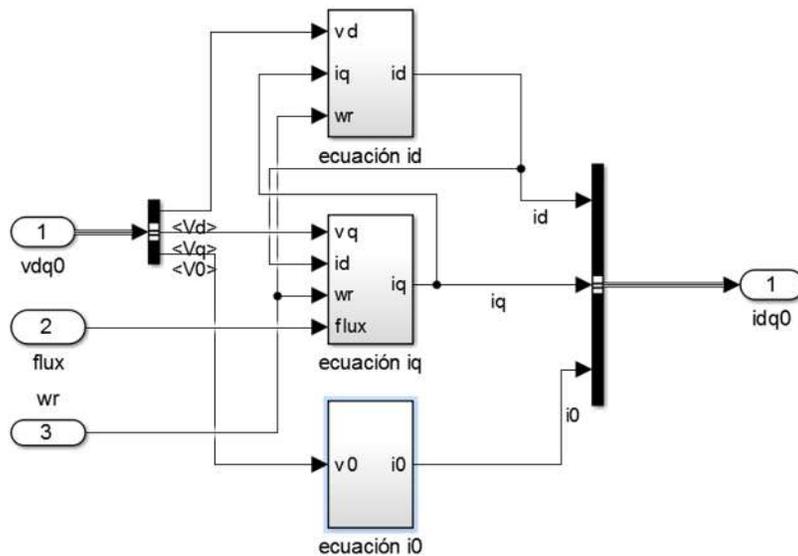


Figura 4.20 Diagrama de simulación de i_{dq0}

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

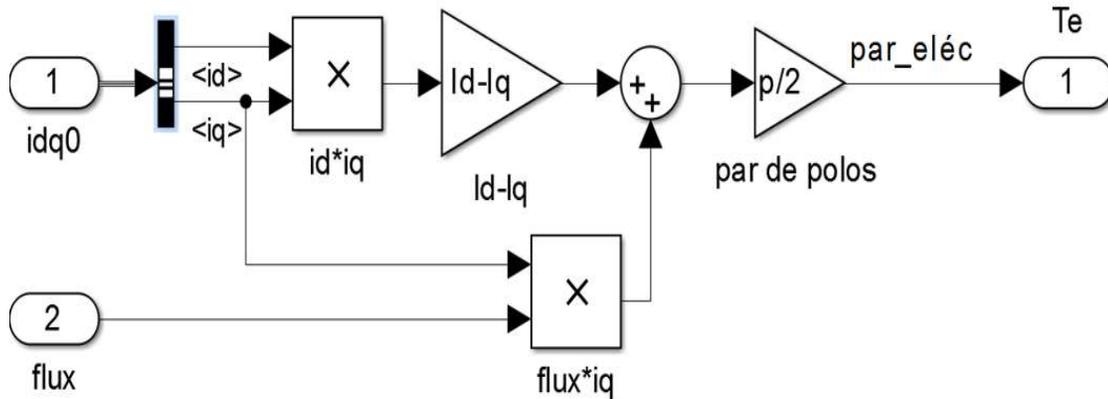


Figura 4.21 Diagrama de simulación del Par eléctrico T_e

La corriente i_0 su diagrama de simulación presentada en la figura 4.19, está desacoplado de sistema magnético, pero su importancia reside que al existir i_0 el sistema entra en desbalance. Al tener desarrollado los diagramas de simulación de las corrientes i_{dq0} , se presenta el diagrama general de las ecuaciones de corrientes representando en la figura 4.20. De este modo se obtiene el diagrama de simulación de las corrientes del sistema, por lo que el paso que sigue sería el diagrama del Par eléctrico.

En la figura 4.21, se representa el diagrama de simulación del Par eléctrico T_e cuya ecuación es (3.32), la función del Par eléctrico es importante; ya que depende de las

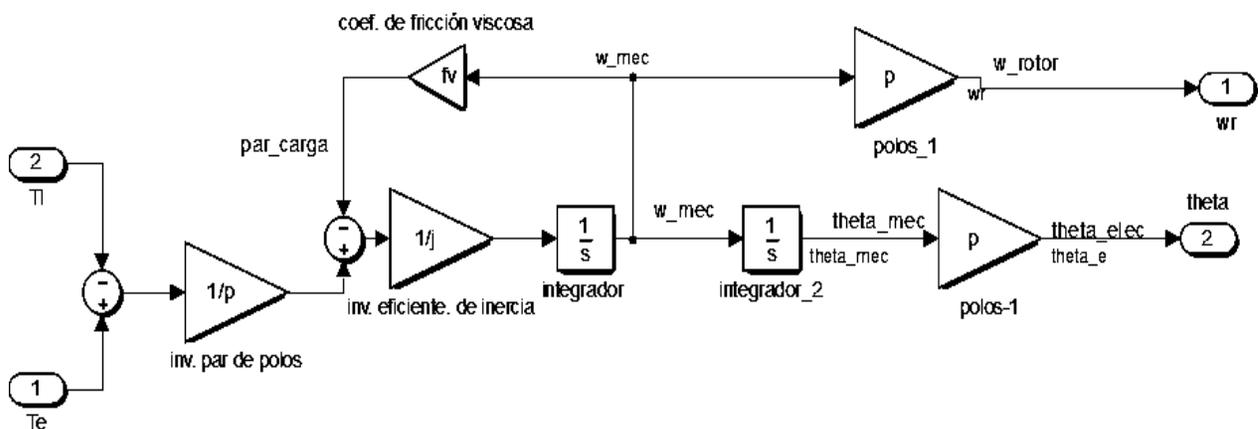


Figura 4.22 Diagrama de simulación de la velocidad mecánica ω_m

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

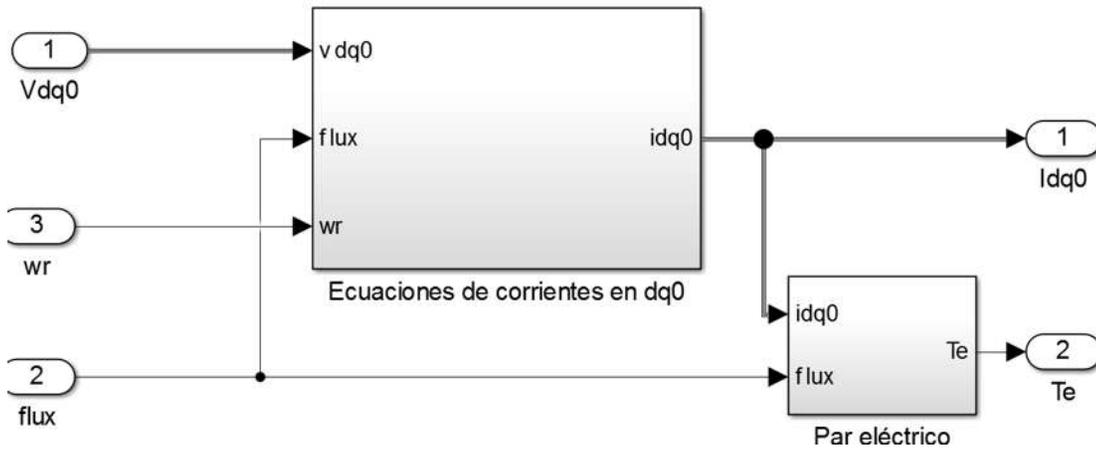


Figura 4.23 Diagrama general del PMSG

corrientes i_d e i_q , al mismo tiempo del flujo magnético de los imanes permanentes y como también del número de polos, como se explicó anteriormente.

De este modo, al igual que el Par eléctrico se relaciona con el sistema mecánico de la máquina; representado en la figura 4.22, se tiene el diagrama de simulación de la ecuación (3.34), no olvidando la relación de la velocidad mecánica con la velocidad eléctrica o bien, el ángulo eléctrico con el ángulo mecánico, donde estos son proporcionales al par de polos que contenga la máquina o el generador. De este modo se ha elaborado el

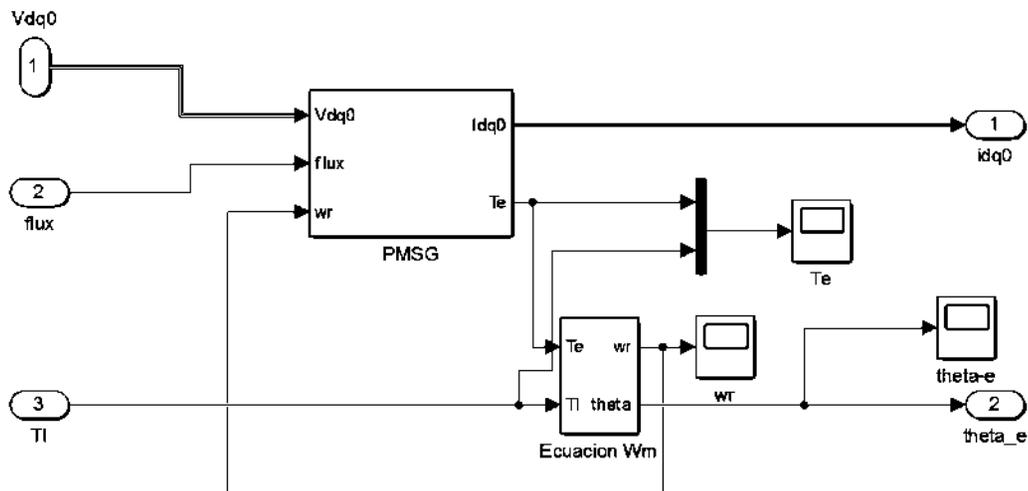


Figura 4.24 Diagrama del PMSG junto con la ecuación de ω_m

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

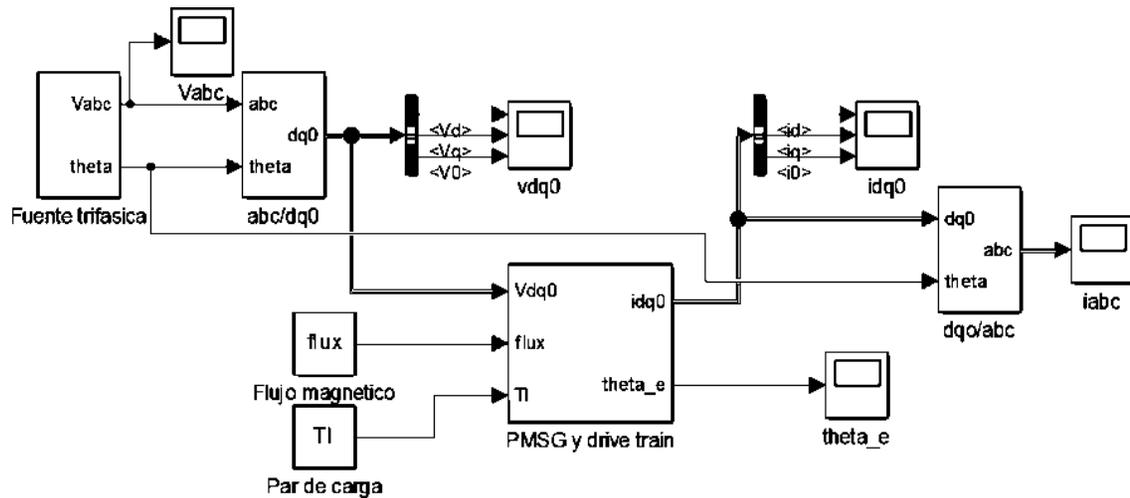


Figura 4.25 Diagrama general de simulación

diagrama de simulación del generador síncrono de imanes permanentes, representado de manera general en la figura 4.23.

Una vez obtenido el diagrama general del PMSG, de las variables eléctricas no queda más que relacionarlas con las mecánicas, el cual queda definido como se muestra en la figura 4.24. De modo general, se incluye todo lo desarrollado hasta ahora, para poder saber la respuesta de la máquina.

Tal como se muestra en la figura 4.25, se incluye la fuente trifásica, la transformada de Clark-Park y su respectiva inversa, así como el modelo del PMSG donde se puede ver la respuesta de la corriente en $dq0$ y en abc , y así de este modo se ha realizado el modelado del PMSG.

Por último, lo que corresponde es ver la respuesta del sistema, corrientes y voltajes en $dq0$ y en abc , como también conocer otras variables importantes como el Par eléctrico, la velocidad del rotor y el ángulo eléctrico.

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

4.5 Respuesta del PMSG en $dq0$ Y abc en Matlab Simulink®.

Tabla 4.1 Características del generador síncrono de imanes permanentes

Características	Valor
R_s	3.15Ω
$L_d = L_q$	$0.0084H$
$\psi_{\text{flujo magnético}}$	$0.433Wb$
$J_{\text{inercia del generador}}$	$0.003192kg.m^2$
$B_{\text{fricción de viscosidad}}$	$0.0317N.m.s/rad$
$p_{\text{par de polos}}$	2
T_{load}	$-5N.m$
$f_{\text{frecuencia del sistema}}$	$60hz$
V_p	$\sqrt{2} * 120V$
θ_r	$2 * \pi * f$
$t_{\text{tiempo de simulación}}$	$0.1 seg$

Para finalizar la simulación del PMSG, en este capítulo y sección se presenta la respuesta del sistema, considerando la siguiente tabla 4.1, con las características para la simulación. Para realizar una comparación, se hizo de igual manera un segundo diagrama de simulación; usando los bloques de la transformada de Clark-Park de Simulink para relacionar los resultados que se obtengan, el diagrama se muestra en la figura 4.26. La transformada de Clark-Park de Matlab Simulink® usa la siguiente matriz de Clark o M :

$$M = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

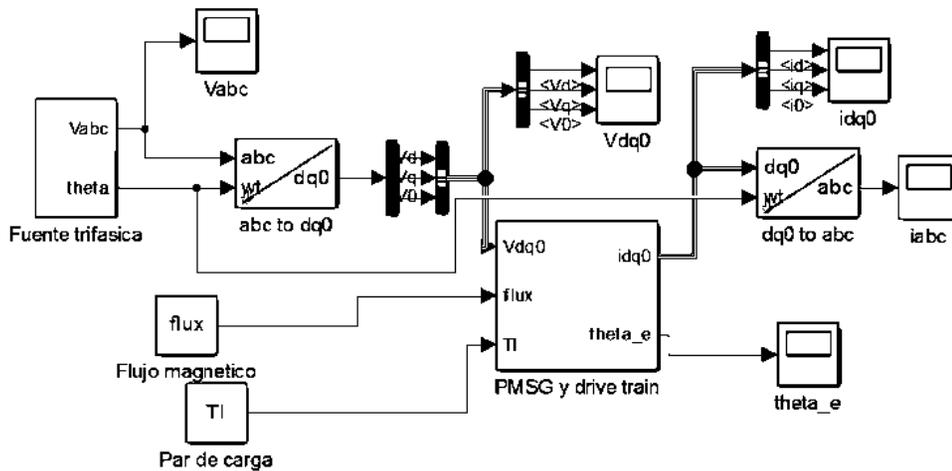


Figura 4.26 Diagrama general de simulación con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®

Por el cual existirá una variación de la magnitud de salida en $dq0$, pero se tendrá exactamente la misma magnitud en abc .

El voltaje para este sistema se mantendrá constante y sinusoidal sin transitorios por lo que se tiene la figura 4.27, donde se muestra el voltaje en abc , tal como se propuso en el capítulo 3, que es la ecuación (3.22) la razón del cambio de la magnitud del voltaje es porque se

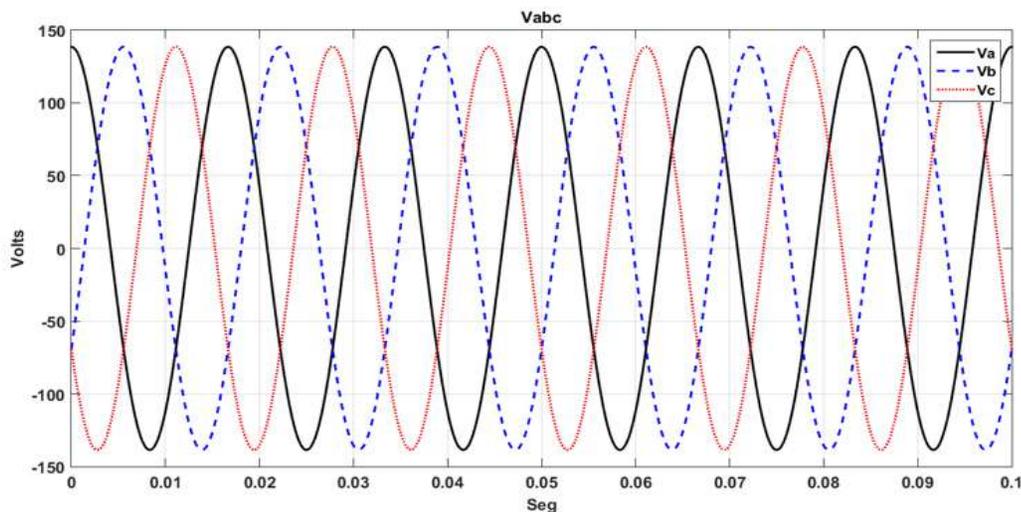


Figura 4.27 Voltaje en abc del sistema

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

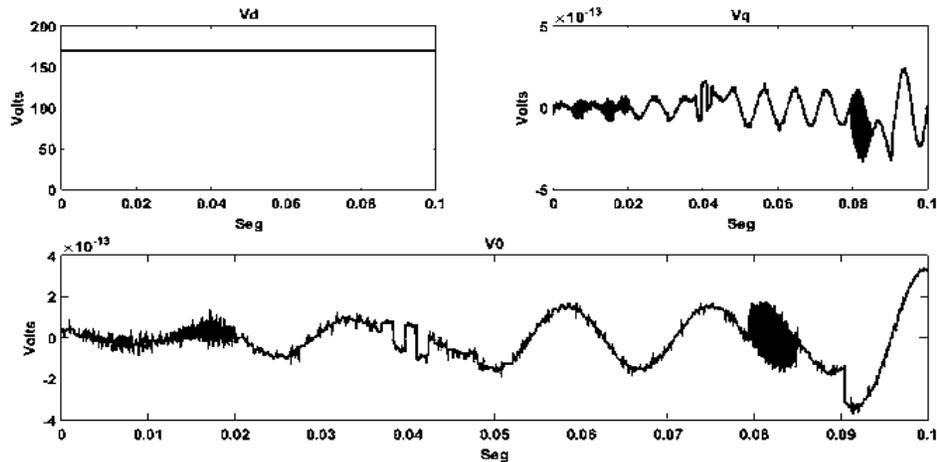


Figura 4.28 Voltaje en $dq0$

multiplicó por la constante de Clark que es $\sqrt{\frac{2}{3}}$, esto se hace para que al transformarlo $dq0$, a se tenga la magnitud original propuesta. En lo que respecta la respuesta del voltaje transformado a $dq0$, se tiene en la figura 4.28; por lo que se logra ver que V_d tiene la magnitud que se propuso en la tabla 4.1, y en lo que respecta a V_q y V_0 son casi nulos por lo que sólo se tiene el ruido numérico generado por el integrador. Comparando V_{dq0} con la transforma de Clark-Park se tiene la figura 4.29, donde se tiene la respuesta similar lo único

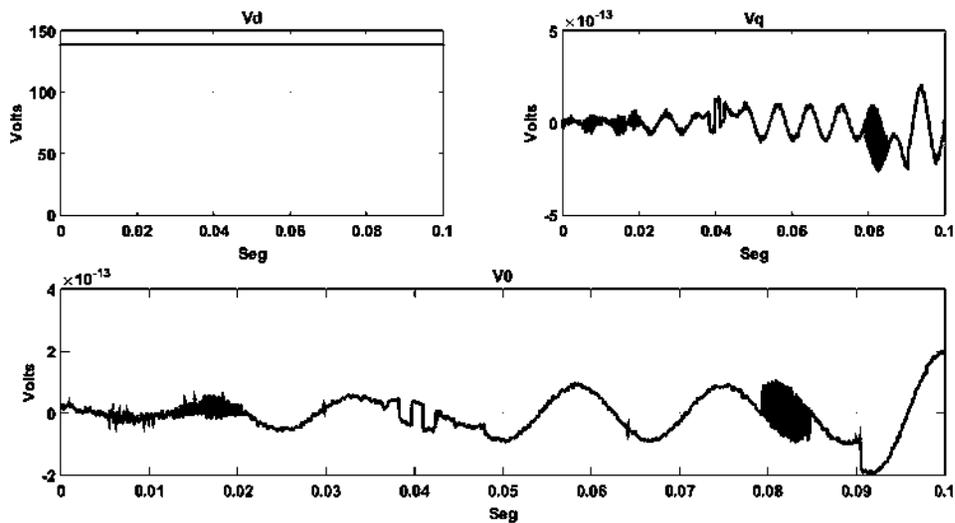


Figura 4.29 Voltaje en $dq0$ con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

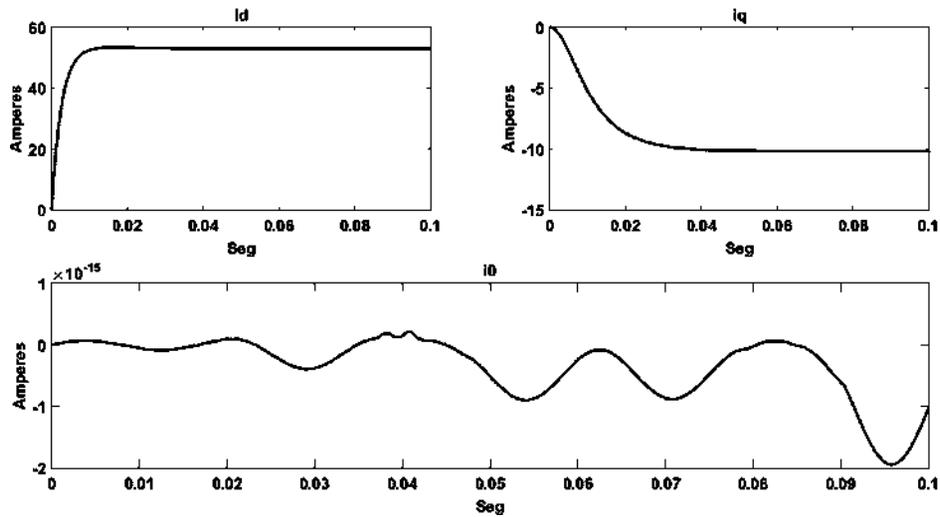


Figura 4.30 Corrientes en $dq0$

que cambia sería la magnitud, el cual es el mismo multiplicado por la constante de Clark $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cuyo caso sería $V_p = 138.564Vots$, el único cambio como se dijo anteriormente es la magnitud al usar la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®.

Las corrientes i_{dq0} del PMSG, tienen una respuesta como se muestra en la figura 4.30, donde la corriente i_d es opuesta y con una magnitud mayor que i_q y lo que corresponde a i_0 tiende a cero, significa que el sistema está balanceado; por lo que i_q tiene

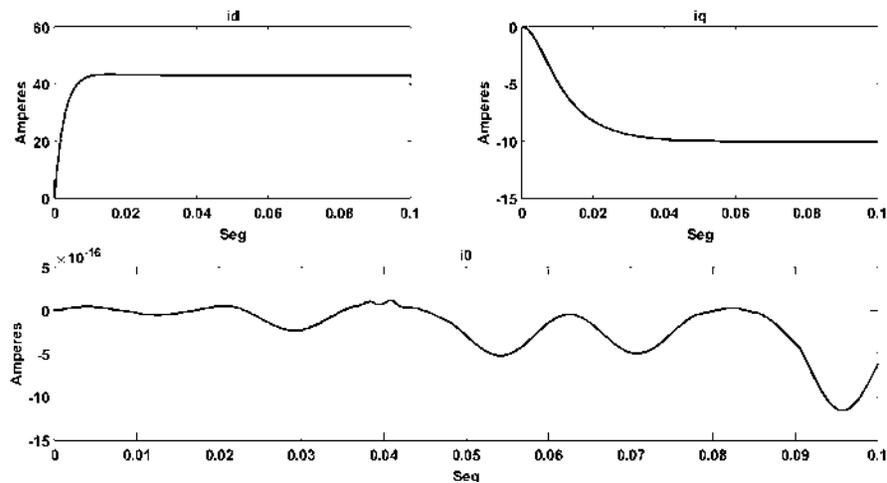


Figura 4.31 Corrientes en $dq0$ con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

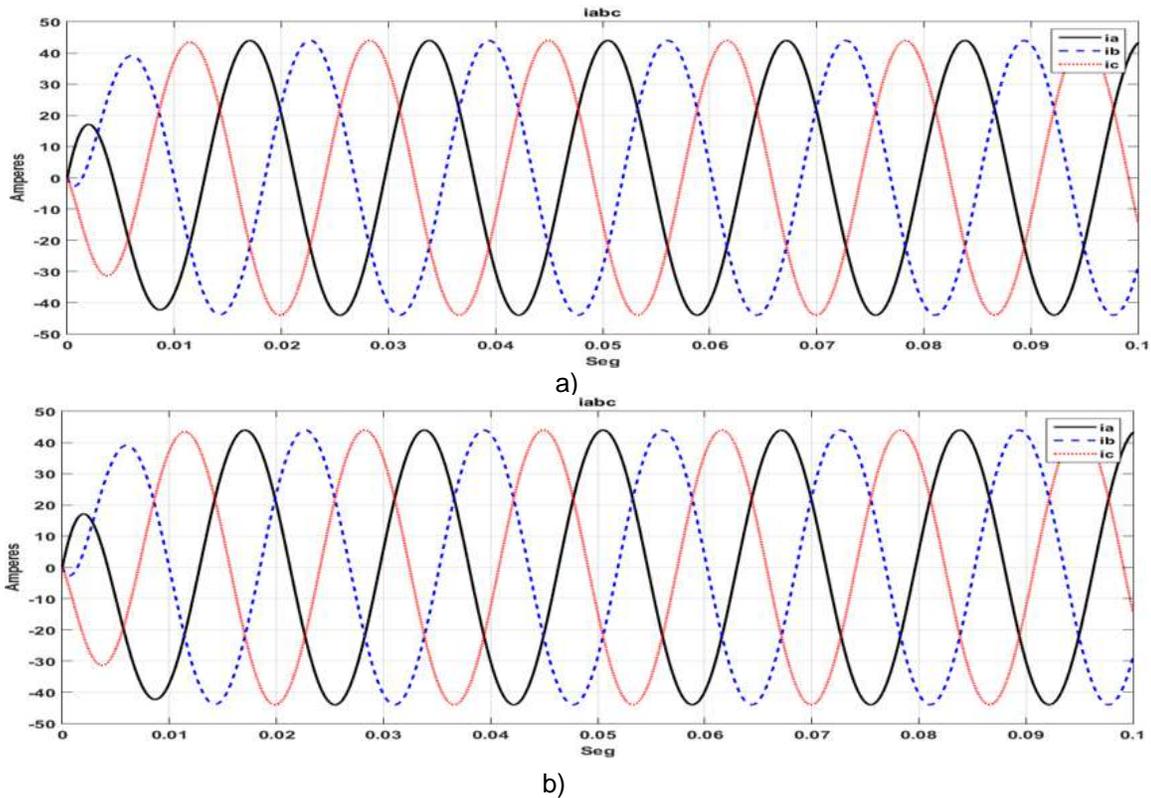


Figura 4.32 Corrientes en abc a) simulación del sistema propuesto b) simulación con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink®

mas relación con el trabajo como generador o como motor, estas corrientes tienen la parte transitoria y estable tal como se puede apreciar. En la figura 4.31 se tiene la respuesta de i_{dq0} ; usando la transformación de Clark-Park de Matlab Simulink®, por lo que las corrientes i_{abc} , tienen las mismas respuestas transitorias y estables, para ambas simulaciones con la diferencia de la magnitud. Las corrientes en abc como se muestra en la figura 4.32, donde en ambas simulaciones tiene la misma magnitud y respuesta, por lo que la simulación del modelo de la máquina no se ve afectado por la transformación de Clark-Park.

El Par eléctrico es importante como se vio en el capítulo y sección 2.3.2, donde el par eléctrico, está íntimamente ligado con las corrientes, los polos de la máquina y las inductancias. Para este caso se tiene la respuesta del Par eléctrico y el Par de carga en la

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

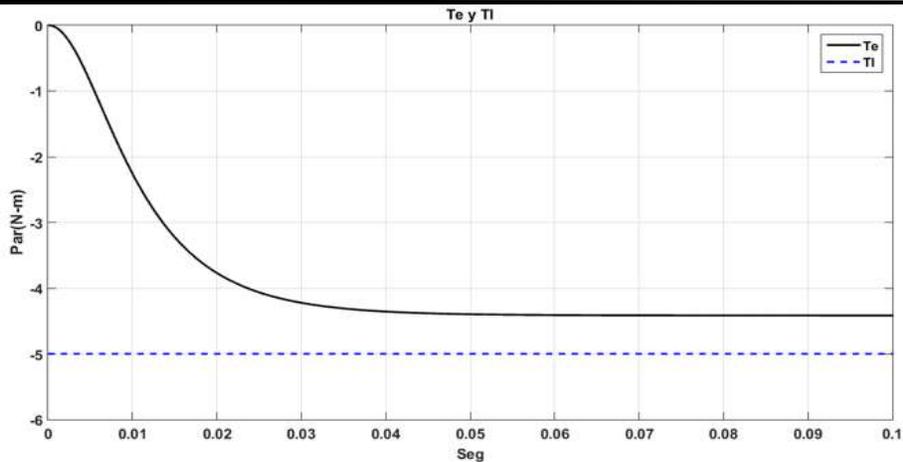


Figura 4.33 Par eléctrico y Par de carga

figura 4.33. El Par eléctrico siempre va tender a igualar a el Par de carga, por lo que el Par eléctrico de la misma manera, se tiene la simulación con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink® en la figura 4.34, el signo negativo significa que se está trabajando como generador eléctrico.

La velocidad mecánica está relacionada con la velocidad del rotor a través de los pares de polos de la máquina o generador mostrado en la figura 4.35, la velocidad del rotor tiene una mayor magnitud que la velocidad mecánica, por lo que la velocidad del rotor tiene que ver con el voltaje inducido de la máquina o generador, del mismo modo se presenta la

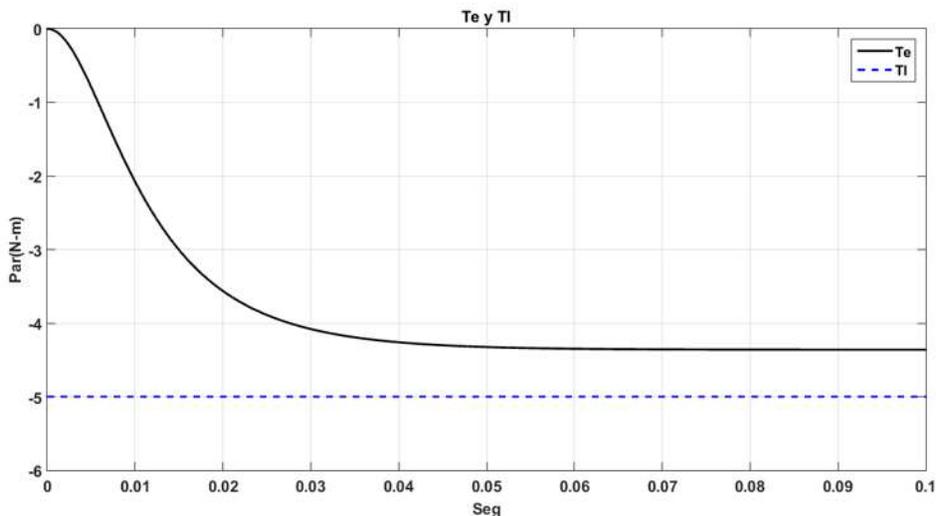


Figura 4.34 Par eléctrico y Par de carga con la transformada de Clark-Par de Matlab Simulink®

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

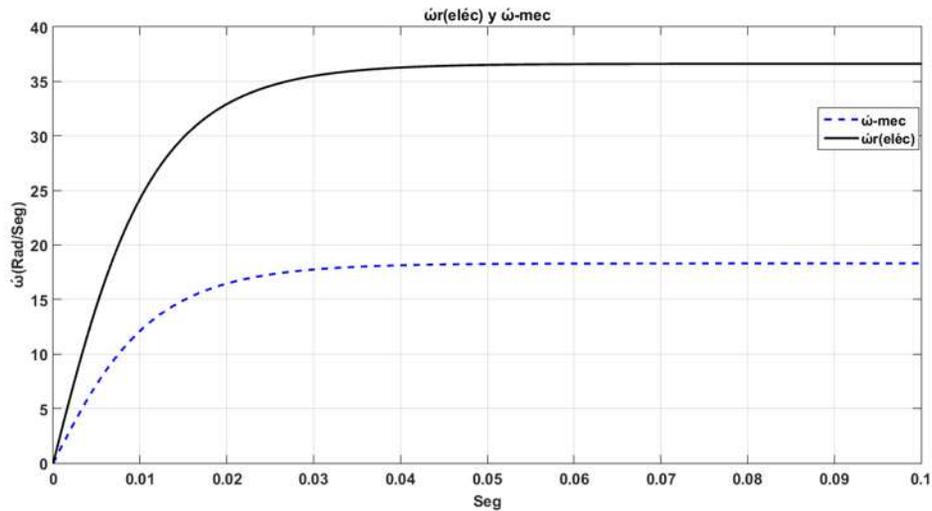


Figura 4.35 Velocidad angular del rotor y velocidad angular mecánica

respuesta de la simulación con la transformada de Clark-Park de Matlab Simulink® en la figura 4.36. Como también en la figura 4.37, se tiene la respuesta del ángulo mecánico y eléctrico, ambos ángulos están relacionados de igual manera por el par de polos que tenga la máquina, la respuesta del ángulo siempre es inestable tal como se aprecia, en comparación con la simulación propuesta, se tiene la simulación con la transformación de Clark-Park de Matlab Simulink® de la figura 4.38.

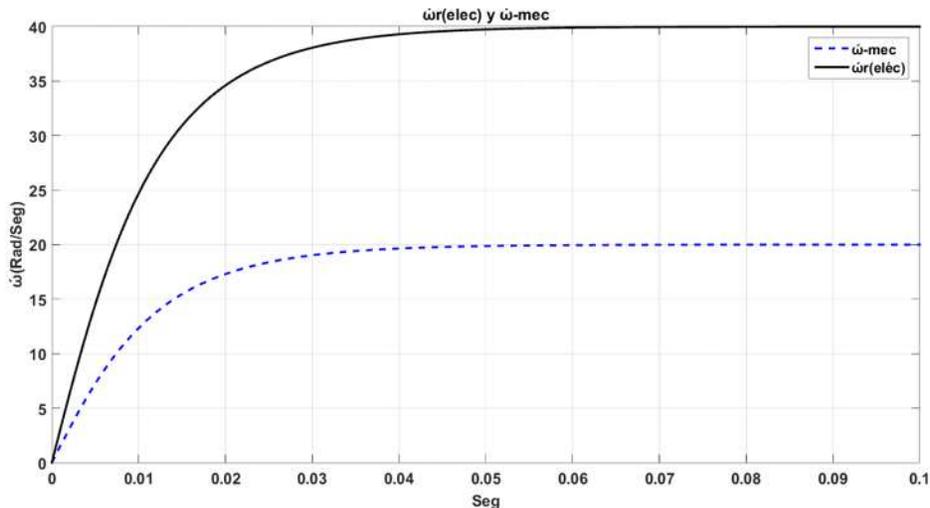


Figura 4.36 Velocidad del rotor y mecánica con la transformada de Matlab Simulink®

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

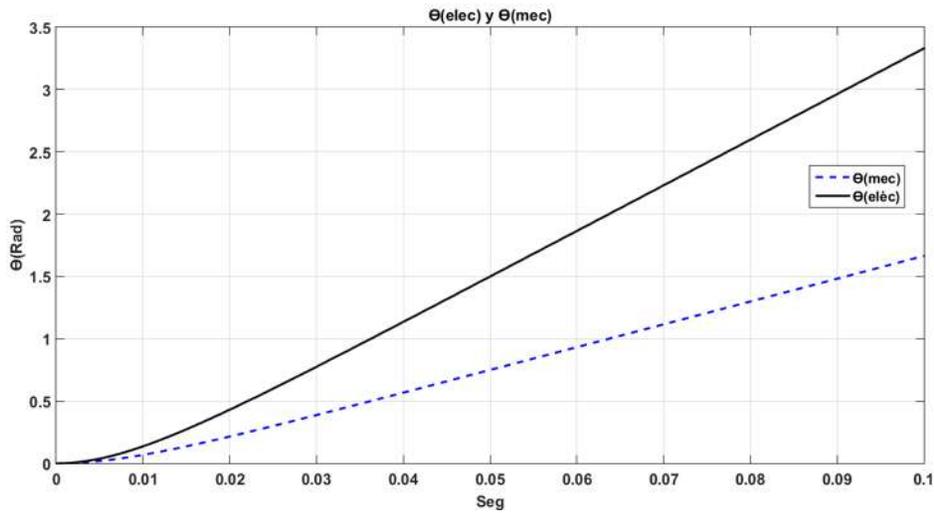


Figura 4.37 Ángulo mecánico y eléctrico

Ahora en el modelo se pretende realizar una variación del Par de carga, para ver el comportamiento de la corriente i_{dq0} y i_{abc} , el par eléctrico T_e , la velocidad mecánica y eléctrica, como también el ángulo, se propone iniciar con un par de $-5N.m$ pasando a $-24N.m$, de lo cual se tiene las siguientes respuestas.

Al realizar una variación del Par eléctrico; se puede apreciar un cambio en las corrientes del sistema i_{dq0} como se muestra en la figura 4.39, disminución de i_d aumento

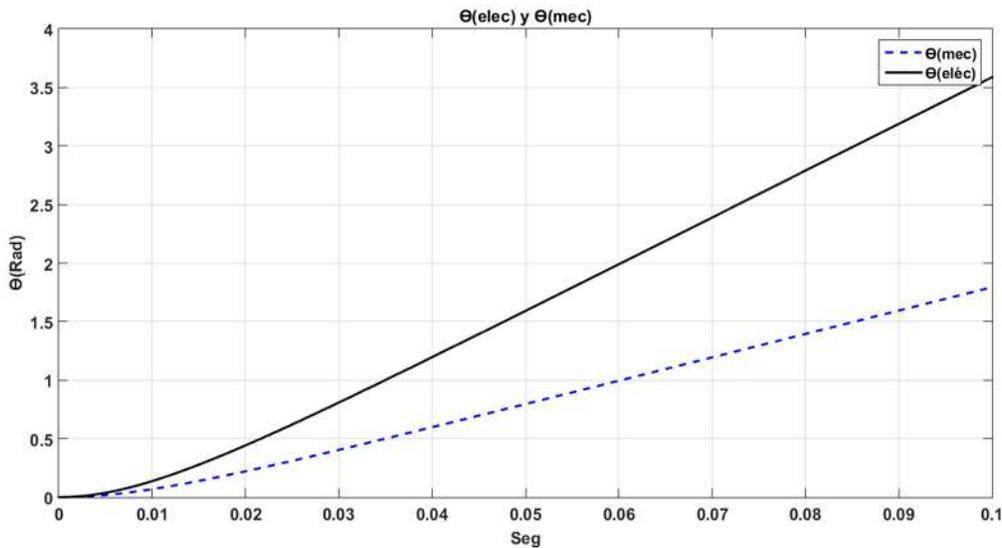


Figura 4.38 Ángulo mecánico y eléctrico con la transformada de Matlab Simulink®

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

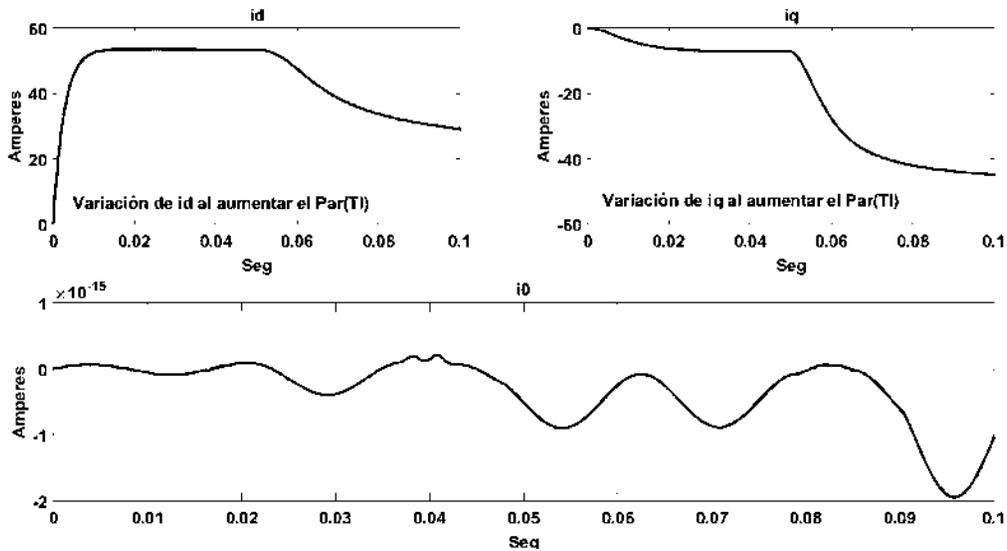


Figura 4.39 Corrientes en $dq0$

de i_q del mismo modo se ve afectado el Par eléctrico, como se muestra en la figura 4.40. Estos efectos son repercutidos también en la velocidad del rotor, como se muestra en la figura 4.41, al mismo tiempo en la posición angular eléctrica, como se ve en la figura 4.42. La máquina genera cambios en sus variables importantes, como la velocidad, Par eléctrico, ángulo, y la corriente la razón es porque estas son afectadas directamente, es que existe un enlace entre ellas. Otra observación importante es que al realizar cambios bruscos o de

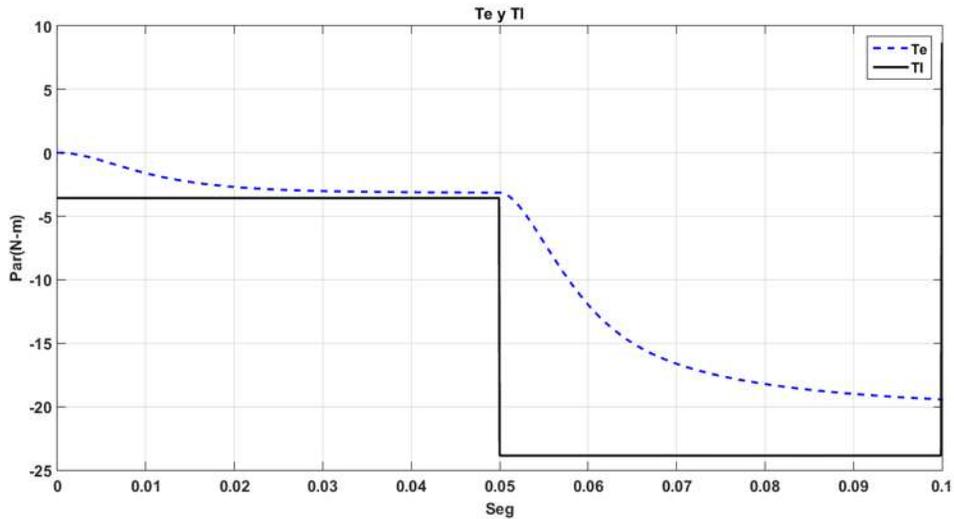


Figura 4.40 Par eléctrico y Par de carga

CAPÍTULO 4 SIMULACIÓN DEL MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO DE IMANES PERMANENTES

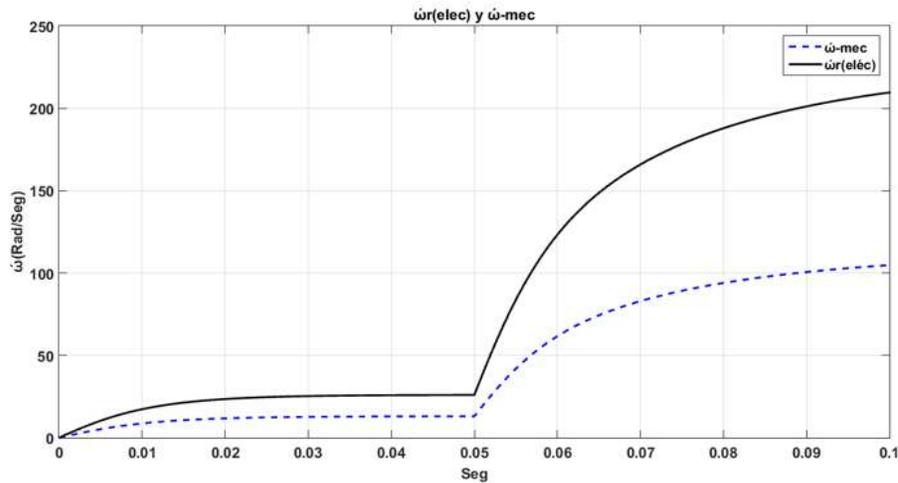


Figura 4.41 Velocidad del rotor y velocidad mecánica

magnitudes grandes del Par de carga, el transitorio es más largo o el tiempo de recuperación en su estado estable es mucho más largo, esto puede afectar para generadores de alta potencia, como romperse la flecha por su inercia alta al intentar operarlo con un alto Par de arranque, por ello, es recomendable usar un Par de carga adecuado para su arranque. Otro factor importante al aumentar el Par de carga de manera desconsiderada, es el desboque de la flecha, como se aprecia que la posición no tiene un control y es inestable, puede generar problemas por la alta aceleración causada y no se diga los brincos de corriente exagerados, igual nos puede llevar a considerar calentamiento en los devanados, desgaste del esmalte de los devanados.

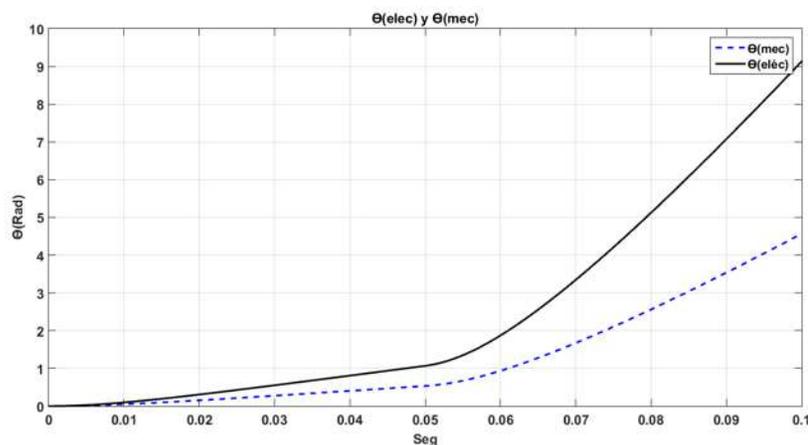


Figura 4.42 Ángulo eléctrico y ángulo mecánico

CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones.

En esta tesis se presenta el modelo general del generador síncrono de imanes permanentes, cuyo caso es una variante del generador síncrono con la diferencia que no se tiene el devanado del rotor y los devanados de amortiguamiento, prácticamente se está trabajando con el devanado del estator, agregándole el efecto el flujo magnético de los imanes permanentes, de manera constante y lineal en el marco de referencia $dq0$.

Para el modelo realizado del PMSG, la transformación del modelo al marco de referencia $dq0$, hace que el modelo sea más sencillo para su análisis y simulación. Al realizar el modelo matemático del generador síncrono de imanes permanentes en el marco de referencia $dq0$ se simplifica el problema de acoplamientos magnéticos, y el desplazamiento del rotor. Si se considerara realizar el modelo en abc se enfrentaría a estos problemas dichos, aun así, el modelo del generador síncrono de imanes permanentes sería más simple en el marco de referencia abc , por ello al usar el marco de referencia $dq0$ existe un desacoplo magnético, pasando a un sistema lineal, teniendo una respuesta mucho más favorable.

Conocer los parámetros de este generador resulta motivador. saber sobre el funcionamiento, la configuración de los imanes permanentes, la respuesta transitoria y en estado estable. El modelo matemático en el marco de referencia $dq0$, enseña que la máquina depende de varias variables como es el Par eléctrico, la velocidad angular, la posición angular, las corrientes y como también el voltaje inducido.

CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el desarrollo del modelo en $dq0$, el mayor problema que se tiene es utilizar la matriz de transformación, por ello es de suma importancia, saber que esta matriz tiene muchas variantes, en esta tesis solo se usa la matriz clásica. Los diagramas de simulación fueron representaciones, del generador síncrono de imanes permanentes en variables de espacio de estado, principalmente donde los estados son las corrientes, en el marco de referencia $dq0$, como entrada se tiene los voltajes donde estos se consideran fijos en el marco de referencia $dq0$, como a su vez el Par de carga es constante. La salida se puede considerar como la respuesta del Par eléctrico, donde este depende de los estados y de otras variables como el flujo magnético de los imanes, la velocidad del rotor. En la simulación se puede decir que sus estados son estables, considerando que al igual que todo sistema tiene la parte transitoria; como también el Par eléctrico se me mantiene estable, lo único que se considera inestable es el ángulo eléctrico y mecánico. En la simulación se realizó una variación del Par de carga, claramente se aprecia que al realizar dicha variación el sistema tiene una respuesta transitoria para generar una nueva respuesta estable, entre mayor sea la variación del par mayor es el tiempo de estabilidad.

Hoy en día se le está dando mucha importancia a la generación de energía eléctrica por medio de fuentes renovables. Por ello se debe estar relacionado con este tipo de generador síncrono de imanes permanentes. Otros países ya son líderes en la generación eólica que es donde se usa este tipo de generador tales como Dinamarca, Inglaterra, entre otros. De este mismo modo, en México se pretende integrar más este tipo de generación, esto hace que se tenga una mayor razón por la cual conocer los parámetros, respuesta de este generador síncrono de imanes permanentes, con el tiempo este generador tendrá mayor relevancia.

5.2 Recomendaciones.

En México aún se comienza a integrar energías renovables; a comparación de otros países mencionados anteriormente, por lo que los se le debe dar una mayor importancia al generador síncrono de imanes permanentes, tal como se hace en las fuentes de energía clásicas. Este generador síncrono de imanes permanentes, debe ser parte del estudio de las maquinas eléctricas como es el de la máquina de corriente directa, la máquina asíncrona, la monofásica y la máquina síncrona. Ya que en un futuro es posible que sea la de mayor uso para la generación de energía eléctrica a través de fuentes renovables.

Al igual se debe realizar un caso de estudio de laboratorio. Donde se realice un análisis del generador de imanes permanentes con mayor detalle para poder conocer aún más de cerca son comportamiento real, mediante una comparación de la respuesta con lo obtenido a través del modelo, y ver las variantes que hay de uno con el otro. Esto daría un paso mucho más amplio al conocimiento de este generador eléctrico.

APÉNDICE A: IDENTIDADES Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

A.1 Razones trigonométricas de ángulos notables

$$\sin(\pm 30^\circ) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\sin(\pm 60^\circ) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\pm 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\pm 60^\circ) = \frac{1}{2}$$

A.2 Suma y diferencias de ángulos dobles

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin\left(x \pm \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \sin(x) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x)$$

$$\cos\left(x \pm \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos(x) \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x)$$

A.3 Productos de senos y cosenos.

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos(x) \sin(y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Aller, J. M. (2006). *Máquinas Eléctricas Rotativas: Introduccion a la Teoria General*. Caracas. Venezuela: Editorial Equinoccio.
2. B. Ratheen Kumar Reddy 1, et al., (2012). Modeling and Control of Variable Spend Wind Turbine Equipped With Permanent Magnet synchronous Generator. *ijmer*, II, 2-3.
3. bibliografica, e. (2004). *biografiasyvidas*. (www.biografiasyvidas.com) Recuperado el 07 de Agosto de 2016, de Hans Christian Oersted: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/o/oersted.htm>
4. Chapman, S. J. (2000). *Máquinas Eléctricas*. British Aerospace Australia: MC GRAW HILL.
5. Che-Mung Ong. (1998). *Dynamic Simulation of Electric Machinery Using Matlab Simulink*. New Jersey: Prentice Hall pTR.
6. D. O'Kelly and S. Simmons. (1968). *Introduction to Generalized Electrical Machine Teory*. London: MCGRAW-HILL.
7. D.C. Aliprantis, et al., (2012). Modeling and Control of a Variable-sppend wind Turbine Equipped with Permanent Magnet synchronous Generator. *PUECE*, 2, 1-3.
8. D.I. Stroe, et al. (2011). Modeling and Control of Variable Spend Wind Turbine Equipped with PMSG. *13th World Congress in Mechanism and Machine Science, I(B y C)*, 3.
9. Delgado, M. A. (2014). *"Análisis de la Teoría de Márcos de Referencia de la Máquina de Inducción Usando un Enfoque del Algebra Lineal"*. Morelia,Michoacan: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

BIBLIOGRAFÍA

10. Epec. (2015). *Historia de la Eléctricidad: Guericke y el Generador electrostático*. Recuperado el 02 de agosto de 2016, de epec: <http://www.epec.com.ar/docs/educativo/institucional/fichaguericke.pdf>
11. funciona, a. (2004). *Asifunciona*. (asifunciona) Recuperado el 08 de Agosto de 2016, de ANDRÉ-MARIE AMPÈRE (1775 - 1836): <http://www.asifunciona.com/biografias/ampere/ampere.htm>
12. Jay Verma, et al.,. (2014). Performance, Analysis and Simulation of wind Energy Conversion system Connected With Grid. *IJRTE*, III, 1-7.
13. Junfei Chen, et al.,. (2012). Modeling and Simulation of Directly Driven Wind, Turbine With Permanent Magnet Synchronous Generator. *IEEE*, B, 2-4.
14. K. Uday Kumar Reddy, et al.,. (2012). Modeling and Control of a Permanent Magnet Synchronous Generator Wind Turbine With Energy Storage. *Ijera*, 2, 1-4.
15. Kedar Patil, Bhinal Mehta. (2014). Modeling and Simulation of Variable speed Wind Turbine with Direct Drive Permanent Magnet Synchronous Generator. *Charotar University of Science and Technology*, II, 1-6.
16. Landeros, M. A. (2011). *Control del Par del motor Sincrono de Imanes Permanentes*. Mexico, DF.: IPN.
17. Martín, I. I. (2004). *Máquina de Wimshurst*. (upct) Recuperado el 06 de Agosto de 2016, de Aparatos para la enseñanza de las leyes físicas del siglo XIX: https://www.upct.es/seeu/_as/divulgacion_cyt_09/Libro_Historia_Ciencia/web/wimshurst.htm
18. P.M. Anderson and A.A. Fouad. (2002). *Power System and Control Stability*. U.S.A: IEEE PRESS.
19. Rojas, D. C. (2004). *Elementos De la Teoría Generalizada de Maquinas eléctricas (notas)*. Morelia, Michoacan: Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo.

BIBLIOGRAFÍA

20. Sadiku, Matthew N. O. (2002). *Elementos del Eléctromagnetismo*. Oxford, Reino Unido: OXFORD UNIVERSITY PRESS.
21. Sanz, J. S. (2012). *Calculo y Reducción de Pérdidas en Máquinas de Imanes Permanentes*. Pamplona, España: UPNA.
22. Sasi C, G. Mohan. (2013). Performance Analysis of Grid Connected Wind Energy Conversion System With a PMSG During Fault Conditions. *IJEAT*, 1, 356-357.
23. Subhrakanti Nanda, Mainak Sengupta. (2014). Design, Fabrication and Analytical Investigation on a Permanent Magnet Synchronous Generator. *IEST*, 1-3.
24. Syed A. Nasar, P. .. (1982). *Máquinas eléctricas y Electromecánicas*. U.S.A: MCGRAW-HILL.
25. Tianyu Wang, et al,. (2014). An Electromechanical Transient Model of Direct-Driven Permanent Magnet Synchronous Generator Based Wind Power System. *Powercon*, B, 1-3.
26. Tze-Fun Chan, et al,. (2010). Permant Magnet Synchronous Generator Supplying an Isolated Load. *IEEE*, 1, 1-2.
27. Wikipedia. (1998). *Wikipedia*. Obtenido de Historia de las maquinas de corriente continua: <http://html.wikipedia.com/historia-de-las-maquinas-de-corriente-continua.html>
28. Wikipedia. (14 de Marzo de 2014). Recuperado el 03 de Agosto de 2016, de Francis Hauksbee: https://es.wikipedia.org/wiki/Francis_Hauksbee
29. Wikipedia. (02 de Abril de 2015). *Heinrich Lenz*. (Fundación Wikimedia, Inc.) Recuperado el 10 de Agosto de 2016, de Heinrich Lenz: https://es.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Lenz

BIBLIOGRAFÍA

30. Wikipedia. (14 de junio de 2016). *Botella de Leyden*. (Fundación Wikimedia, Inc) Recuperado el 05 de Agosto de 2016, de wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Botella_de_Leyden
31. Wikipedia. (14 de mayo de 2016). *Historia del Eléctromagnetismo*. (Fundación Wikimedia, Inc.) Recuperado el 15 de agosto de 2016, de Historia del Eléctromagnetismo.: https://es.wikipedia.org/wiki/Historia_del_electromagnetismo
32. William H. Hayt, JR Y John A. Buck. (2006). *Engineering Electromagnetics*. México: THE MCGRAW-HILL.
33. Young, Huhg D. y Roger A. Freedman. (2009). *Física Universitaria con Física Moderna*. Mexico: Pearson Educación.