



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

TESIS:

**IMPLEMENTACIÓN ELÉCTRICA DE SISTEMAS
MODELADOS EN BOND GRAPH**

Que para obtener el Título de:
INGENIERO ELECTRÓNICO

Presenta:
LADISLAO ANDRADE GARCÍA

Asesor de Tesis:
DR. GILBERTO GONZÁLEZ ÁVALOS

Morelia, Michoacán, febrero del 2018.

Agradecimiento

Al gran divino creador de todo a Dios, por prestarme lo más apreciado que es la vida, por la fortaleza y fe depositado en él, al saber que soy uno más de todos, que desentraña las fronteras del conocimiento, en el amplio saber humano de la misión por este mundo.

Agradecimiento especial al Dr. Gilberto González Ávalos por la motivación, atención, paciencia y asesoría, pero sobre todo su tiempo valioso, dedicado que prestó durante el desarrollo de mi tesis, muchas gracias.

La Universidad por la formación académica, que me ha brindado en mi instancia hasta a lo que hoy culmino.

A la Facultad de Ingeniería Eléctrica, por la oportunidad de aprender y adquirir los conocimientos.

A todos los profesores que me brindaron su valioso tiempo y conocimiento, les digo gracias.

A mis revisores de trabajo, por sus valiosas contribuciones y acertadas observaciones, gracias.

A los amigos y no amigos que me acompañaron, durante la travesía en la carrera y en lo personal, por las experiencias compartidas.

Si bien se dice lo que uno inicia, lo tiene que terminar, sin importar lo que venga.

Dedicatoria

Ante todo dedicado con mucho cariño a mi gran familia, sobre todo a mis padres por haber creído en mi convicción hasta lo que soy ahora, también por el apoyo brindado incondicionalmente, en las buenas y en las malas. Y ante todo las adversidades que uno se enfrenta, que a pesar de todo gracias. A los valores inculcados, firmeza, sacrificio, persistencia, voluntad que fueron de vital impulso en mi desarrollo académico, y no sólo eso si no la decisión en el rumbo de mi vida, con lo que estos momentos presenciar uno de los actos que se presentan una sola vez al paso del tiempo, será una historia que escribir de un capítulo y peldaño más, en el seguir de mi persona y no sólo eso, si no también profesional.

A mis Abuelos por los regaños que no me olvido, tíos y tías por la orientación, impulso y consejos en forjar e inculcar valores, en bien de mi persona encaminado a una persona íntegra.

A mis hermanos por su apoyo y motivación brindado.

En las personas que creyeron en mí, de que cuando se tiene voluntad, perseverancia y paciencia, no hay reto imposible que obstaculice el camino, porque de cada tropiezo se aprende y se vive, con ello ser mejor cada día en no rendirse hasta lograr lo que uno se propone.

Contenido

Agradecimientos	I
Dedicatoria	II
Contenido	V
Lista de Figuras	VI
Lista de Tablas	VIII
Lista de Símbolos y Abreviaciones	IX
Resumen	X
Abstract	XI
1. Introducción	1
1.1. Modelado de Sistemas	1
1.2. Objetivo	2
1.3. Justificación	2
1.4. Metodología	3
1.5. Contenido de la tesis	3
2. Antecedentes de Modelado en Bond Graph	5
2.1. Introducción	5
2.2. Noción conceptual de Bond Graph	6
2.3. Partes elementales que integran un Bond Graph	7
2.3.1. Potencia y Energía	7
2.3.2. Puertos-1 Pasivos	9
2.3.3. Puertos-1 Activos o Fuentes	11
2.3.4. Puertos-2 Elementos Ideales	12
2.3.5. Puertos-3 Elementos de Unión	13
2.4. Causalidad	14
2.4.1. Reglas necesarias de asignación causal	15
2.4.2. Causalidad Integral y Derivativa Elemento-C	17

2.4.3.	Causalidad Integral y Derivativa Elemento-I	19
2.4.4.	Pasos de asignación de Causalidad en un multipuerto	20
2.4.5.	Causalidad derivativa en un Bond Graph.	21
2.5.	Bond Activo	22
2.6.	Procedimiento para el modelado de Sistemas	22
2.6.1.	Sistemas Eléctricos	23
2.7.	Matriz de Estructura de Unión	26
2.7.1.	Vectores Clave o Vectores Significativos	26
2.7.2.	Relación de campo y ecuación de estado	28
2.7.3.	Ejemplo para un Sistema eléctrico	31
2.7.4.	Derivación de Sistemas de Ecuaciones de Estado	36
3.	Procedimiento de la Implementación Eléctrica	39
3.1.	Introducción	39
3.2.	Modelado Matemático de Sistemas	39
3.3.	Variables de Estado de un Sistema Dinámico	40
3.4.	Modelo Matemático de Sistemas Eléctricos	41
3.4.1.	Desarrollo teórico Circuito-1	42
3.4.2.	Desarrollo teórico Circuito-2	45
3.4.3.	Desarrollo teórico de un Motor CD	49
3.5.	Relación descriptiva del Sistema Eléctrico con BG	53
3.5.1.	Circuito-1	54
3.5.2.	Circuito-2	55
3.5.3.	Circuito-3	56
4.	Casos de Estudio	58
4.1.	Introducción	58
4.2.	Software de simulación en Bond Graph	59
4.2.1.	¿Qué es 20-sim?	59
4.2.2.	Editor	60
4.2.3.	Library	60
4.2.3.1.	Library	60
4.2.3.2.	Examples	61
4.2.3.3.	Getting Started Manual	61
4.2.4.	Simulador	61
4.3.	Caso de Estudio 1	62
4.3.1.	Representación en 20-sim	63
4.3.1.1.	Resultado de la Simulación	64
4.3.2.	Implementación Eléctrica Circuito-1	66
4.3.2.1.	Respuesta Experimental en C y L	66
4.4.	Caso de Estudio 2	68
4.4.1.	Representación en 20-sim	68
4.4.1.1.	Resultado de la Simulación	69
4.4.2.	Implementación Eléctrica Circuito-2	70
4.4.2.1.	Resultado Experimental en los elementos C	70

4.5. Caso de Estudio 3	72
4.5.1. Representación en 20-sim	74
4.5.1.1. Resultado de la simulación	75
4.5.2. Implementación Eléctrica Circuito-3	75
4.5.2.1. Resultado Experimental	76
5. Conclusiones y Recomendaciones	78
5.1. Conclusiones	78
5.2. Recomendaciones	79
Bibliografía	80

Lista de Figuras

2.1. Esquema elemental de un bond semiflechado	7
2.2. Un bond resistivo	9
2.3. Un bond capacitivo	9
2.4. Un bond de Inercia	9
2.5. Tetraedro de Estado [5].	10
2.6. Elemento activo fuente de esfuerzo.	11
2.7. Elemento activo fuente de flujo.	11
2.8. Fuentes moduladas <i>a) Esfuerzo</i> y <i>b) Flujo</i>	11
2.9. Relación de transformación en Bond Graph para <i>TF</i>	12
2.10. Representación en Bond Graph para un girador <i>GY</i>	12
2.11. Unión-0 Equivalencia en Bond Graph.	13
2.12. Representación Unión-1.	14
2.13. Causalidad para un Bond.	15
2.14. Concepto de causalidad comparada con una jeringa [12].	15
2.15. Formas de expresión de la causalidad en un bond.	15
2.16. Ejemplo de Unión-0 sin Casualidad.	16
2.17. Ejemplo de Unión-0 con causalidad.	17
2.18. (a) Elemento-C en causalidad integral, (b) Diagrama a bloques.	18
2.19. (a) Elemento-C en causalidad derivativa, (b) Diagrama a bloques [10].	18
2.20. (a) Elemento-I en causalidad integral, (b) Diagrama a bloques.	19
2.21. (a) Elemento-I en causalidad derivativa, (b) Diagrama a bloques [10].	19
2.22. Diagrama de un circuito eléctrico.	21
2.23. Bond Graph en causalidad derivativa e integral.	21
2.24. Bond Activo.	22
2.25. Bond Graph con un Bond activo.	22
2.26. Reducciones equivalentes: (a) simple y (b) doble [7]	23
2.27. Ejemplo de un Circuito eléctrico.	23
2.28. Identificación de Nodos y asignación de <i>Union-0</i>	24
2.29. Asignación de <i>Unión-1</i>	24
2.30. Unión de enlaces con arpones con dirección emanada de la fuente.	24
2.31. Anulación de la referencia C.	25
2.32. Representación acausal en Bond Graph del sistema eléctrico.	25
2.33. Representación final del Modelo en Bond Graph con causalidad asignada.	26
2.34. Bloques de la estructura de unión de un Bond Graph.	27

2.35. Numeración y dirección de los flujos y esfuerzos definidos.	32
3.1. Diagrama eléctrico circuito mixto simple.	42
3.2. Bond Graph simplificado con causalidad asignada y numeración arbitraria.	42
3.3. Esquema eléctrico con elementos disipadores y capacitivos.	45
3.4. Modelo simplificado en Bond Graph con causalidad.	46
3.5. Diagrama eléctrico de un Motor CD	49
3.6. Modelo simplificado en Bond Graph con causalidad del Motor CD.	50
3.7. Modelo en Bond Graph y su relación con los diagramas icónicos.	55
3.8. Modelo en BG y su representación equivalente al Sistema Eléctrico.	56
3.9. Modelo en BG y su representación equivalente al Sistema Eléctrico del Motor CD.	57
4.1. Esbozo de Ingeniería.	61
4.2. Representación directa de un modelo de Máquinas dinámicas y su simulación en 20-sim 4.6 Demo.	62
4.3. Parámetros del bloque Step en 20-sim.	63
4.4. Modelo Circuito-1 bosquejado en 20-sim.	64
4.5. Simulación del circuito-1: en C_1 y L_1	64
4.6. Señal de respuesta del transitorio en Voltaje en R_1	65
4.7. Señal de respuesta del transitorio Voltaje en C_1	66
4.8. Señal de respuesta del Voltaje en R_1	67
4.9. Modelo Circuito-2 red con elementos C y R.	69
4.10. Simulación del circuito-2 respuesta escalon en C_1 y C_2	70
4.11. Señal de respuesta del transitorio en Voltaje de C_1	71
4.12. Señal de respuesta del transitorio en Voltaje de C_2	71
4.13. Motor usado para la implementación física marca Indiana General.	72
4.14. Valor medido de la inductancia y resistencia de armadura del Motor CD.	73
4.15. Velocidad en RPM obtenido del tacómetro digital del Motor CD a 12 volts.	73
4.16. Representación del motor en 20-sim	74
4.17. Respuesta de señal del motor CD en 20-sim.	75
4.18. Implementación física.	76
4.19. Señal escalón obtenida del motor en canal A y Corriente $i_{L_a=R_a}$ del canal B.	77

Lista de Tablas

2.1. Variables generalizadas de sistemas Eléctricos e Hidráulicos.	8
2.2. Elementos <i>Puertos -1</i> Pasivos.	10
2.3. Consideraciones causales para los multipuertos Básicos.	16
2.4. Formas y Relaciones Causales para Puertos 1.	20
2.5. Relación para los elementos I, C en $p(\text{momento})$ y $q(\text{desplazamiento})$	32
4.1. Valores de los elementos I, C, R y V_1	63
4.2. Valores de los elementos I, C, R y V_1	68
4.3. Valores de los elementos para el motor de CD.	73

Lista de Símbolos y Abreviaciones

A	Ampere, Unidad física de la corriente eléctrica
BG	Bond Graph
$\rightarrow C$	Capacitancia
$i(t)$	Corriente
CD	Corriente Directa
GY	Girador
HIL	Hardware in the Loop
$\rightarrow I$	Inductancia
MIT	Instituto Tecnológico de Massachussets
LTI	Lineal Time-Invariant (Lineal Invariante en el Tiempo)
LTV	Lineal Time-Variant (Lineal Variante en el Tiempo)
A, B, C, D	Matrices de Estado
S	Matriz de Estructura de Unión
MS_e	Modulación en la Fuente de esfuerzo (Voltaje)
MS_f	Modulación en la Fuente de flujo (Corriente)
$MIMO$	Multiple-Input Multiple-Output
Ω	Ohm, Unidad física de la unidad de Resistencia eléctrica
\parallel	Paralelo
$\rightarrow R$	Resistencia
TF	Transformador
$3D$	Tres Dimensiones
$-0-$	Unión 0
$-1-$	Unión 1
$U.C.$	University of California
$U.T.$	University of Texas
$q(t)$	Variable de desplazamiento
$e(t)$	Variable de Esfuerzo
$f(t)$	Variable de Flujo
$p(t)$	Variable de Momento
$u(t)$	Vector de Entrada del Sistema
$x(t)$	Vector de Estados
$y(t)$	Vector de salida del Sistema
$v(t)$	Voltaje

Resumen

La investigación desarrollada en esta Tesis parte de una metodología teórica enfocada en BG en el análisis de sistemas dinámicos modelados en el dominio físico, de la cual se hace hincapié a la noción amplia de conceptos básicos que lo componen, así como las propiedades, reglas de simplificación y aplicación de la causalidad.

Después se abarca la construcción de la Matriz de Estructura de Unión, dicha técnica es la parte fundamental que permite la obtención de ecuaciones en espacio de estado conociendo la causalidad del sistema e involucrando así una ejemplificación de un sistema eléctrico.

Para cumplir con el objetivo de la tesis se desarrollan 3 modelos eléctricos particulares abarcando una red simple a una mas grande, simplificados y asignando causalidades en BG e íntegramente expresando sus ecuaciones derivadas en variables en espacio de estados, compuestos de elementos de almacenamiento capacitivo e inductivo, disipadores y un girador con el propósito de contar con los casos requeridos para las pruebas necesarias, previa a la implementación física posterior en el Capítulo 4.

Una vez teniendo los modelos resueltos, se da paso sobre como se desarrollará la implementación eléctrica en relación al diagrama eléctrico y el esquema simplificado en BG, describiendo así la estructura de BG análogamente comparando la equivalencia de los elementos.

Última etapa se somete el sistema aplicando una señal de entrada para cada uno de los modelos desarrollados en el Capítulo 3, para tal efecto se realizan las pruebas de los esquemas para cada uno de los casos de estudio, comparando así las respuestas obtenidas en las variables seleccionadas de la simulación en 20-sim y finalmente se hacen las pruebas de implementación física en cada modelo.

Palabras clave: Bond Graph, Implementación eléctrica, 20-sim, Matriz de estructura de unión, Causalidad.

Abstract

The research developed in this Thesis is based on a theory methodology focused on BG in the analysis of dynamic systems modeled in the physical domain, which emphasizes the broad notion of basic concepts that comprise it, as well as the properties, rules of Simplification and application of causality.

After the construction of the Junction-Structure Matrix is covered, this technique is the fundamental part that allows the obtaining of equations in the state space knowing the causality of the system and thus involving an exemplification of an electrical system.

In order to fulfill the objective of the thesis, 3 particular electrical models are developed, ranging from a simple network to a larger one, simplified and assigning causalities in BG and integrally expressing their derived equations in state space variables, composed of capacitive and inductive storage elements, dissipaters and a gyrator with the purpose of having the required cases for the necessary tests, prior to the subsequent physical implementation in Chapter 4.

Once the models have been solved, the electric implementation will be developed in relation to the electrical diagram and the simplified scheme in BG, thus describing the BG structure analogously comparing the equivalence of the elements.

Last stage the system is subjected by applying an input signal for each of the models developed in Chapter 3, for this purpose the tests of the schemes for each one of the study cases are carried out, comparing the answers obtained in the variables selected from the simulation in 20-sim and finally the physical implementation tests are done in each model.

Introducción

1.1. Modelado de Sistemas

Modelar un sistema que muestre un patrón deseado en las características del comportamiento de un proceso dinámico a partir de modelos matemáticos, instintivamente pueden adoptar muchas formas distintas dependiendo del sistema y las circunstancias específicas en las interacciones de dominio de energía, como lo son las variables eléctricas, mecánicas, térmicas o de cualquier otra índole de interacción en particular.

Por lo general estas se describen en términos de ecuaciones diferenciales, del que se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema como lo son las Leyes de Kirchhoff en el sistema eléctrico y de Newton la parte mecánica.

Siguiendo desde luego una metodología analítica, desde el modelado matemático, simulación y diseño dicho del sistema, es la aplicación de herramientas con principios científicos, cuya solución de problemas se tiene un resultado esperado de lo que se pretende obtener.

Por otra parte es necesario definir términos que estarán muy asociados a los sistemas dinámicos.

Modelo: Son construcciones simplificadas y abstractas utilizadas para estudiar y determinar el comportamiento de sistemas, por ello un modelo no es único, la representación final se hace de análisis, a su mayor utilidad, a su facilidad de estudio y a su manejabilidad.

Sistema: Está formado por componentes que actúan juntos, estructura de entidades que están involucrados con los elementos que conforman dicho sistema en el cual involucran modelos a partir de una descripción real basado por parámetros numéricos como propiedad de dicho sistema realizan un objetivo determinado.

Sistemas Dinámicos: Hay almacenamiento de materia, energía e información. Los sistemas dinámicos sirven para entender cómo evolucionan los procesos y son llamados también sistemas con memoria, estos sistemas son representados mediante ecuaciones diferenciales [13].

En general la dinámica de muchos sistemas siendo mecánicos, eléctricos, térmicos, etc. Si se tiene un planteamiento basado en una descripción matemática de un problema nuevo, las consideraciones de variables controladas es tal que la cantidad o condición que se mide o se controla, signifiquen corregir o limitar la desviación del valor medido respecto al valor deseado, son ciertas propiedades en juego pero en consecuencia la afectación de una señal tiende a afectar el valor de la salida de un sistema. Por ello es decisivo si en un sistema se produce dentro o fuera del mismo, por lo que tomando estas consideraciones estas pueden ser predecibles o conocidas pueden compensarse o en su caso impredecibles, un sistema no se limita a los sistemas físicos si no que estas se pueden aplicar a los fenómenos abstractos como puede ser la economía [2, 8].

1.2. Objetivo

En este trabajo se pretende mostrar el uso de los gráficos de enlaces de unión o ligaduras, como una manera de obtener la contribución de esta teoría en obtener resultados en sus parámetros físicos y teóricos en su conjunto, validando así su implementación en pruebas por simulación y tanto experimentales a diferentes casos, presentados para sistemas eléctricos usando las propiedades importantes que ofrece Bond Graph particularmente enfocados en una red de circuitos eléctricos.

1.3. Justificación

Relativamente es un tema nuevo para mi investigación, es interesante resaltar porque presenta un nuevo concepto de análisis y estudio, para modelado de sistemas abarcando diferentes dominios físicos, por ejemplo el caso de sistemas eléctricos permite modelar sistemas complejos en el campo de control, en diferentes perspectivas como aplicados a LTI, LTV, Observabilidad, Controlabilidad, Observadores de estado, Controladores, etc [4, 13, 1].

Esta teoría viene siendo una alternativa joven que va proliferando como intermediario entre el área de control clásico y moderno, por eso BG de momento tiene consigo reglas explícitas y estrictas para modelar un sistema que de forma tradicional la representación de conjunto de ecuaciones diferenciales,

el caso es que si el sistema es lo bastante complejo, su desarrollo sería bastante tedioso de trabajar, por ello como inicio de estudio es aprovechar las ventajas que ofrece el lenguaje BG, como medio que facilita usar tan sólo gráficos de enlaces por ligaduras, aportando información muy valiosa que se aplicará en caso exclusivo con fines de estudio a sistemas eléctricos.

Los resultados que determinen en los distintos casos de estudio se comprobará en su conjunto la simulación del software 20-sim en las variables que interesarían en los elementos de una red eléctrica, es decir las variaciones que estas podrían aportar.

De esa manera se hace su uso obteniendo una mayor experiencia y alcance en conocimiento, sobre el lenguaje en BG y todas sus dependencias o derivaciones que se pueda aprender, como una teoría bien estructurada y a la vez sirve como base y complemento para explorar, como un paso más a diferentes enfoques de estudio enriqueciendo la investigación en otros temas.

1.4. Metodología

La metodología utilizada para el avance de esta tesis es el método inductivo como experimental, ya que parte o comprende de manera particular a lo general iniciando con el estudio y análisis del fundamento teórico en BG, para después obtener el modelado de sistemas físicos representado en BG, posteriormente la implementación eléctrica hasta concluir con la técnica en su aplicación, a sistemas eléctricos de manera general siguiendo las condiciones de dicha teoría.

Este complemento está fundamentado en citas bibliográficas de distintas investigaciones, como técnica de búsqueda en recolección de información tomadas en varios medios: internet, notas, libros y aporte de artículos que enriquecen conceptualizaciones e integración de textos de interés, para procesos de modelado, como también ejemplos prácticos que se consideraron para el contenido de dicho trabajo. Se aprovechó la herramienta computacional *20-sim* como base para modelado exclusivo de sistemas eléctricos.

1.5. Contenido de la tesis

Capítulo 1.- Se inicia con una introducción de investigación sobre el modelado de sistemas y su importancia de estudio en esta tesis, después se define un objetivo que se quiere lograr, una justificación del porque y finalmente una metodología a seguir.

Capítulo 2.- Se da una breve introducción histórica de la teoría de Bond Graph, posteriormente se abordan conceptos, así como sus herramientas o elementos estructurales que lo integran, incluyendo unos ejemplos prácticos para reforzar su aplicación, así como también se tiene un problema ejemplificado de un modelo matemático, asociado con el dominio físico del sistema eléctrico previo al procedimiento de implementación eléctrica .

Capítulo 3.- En este apartado se comprende el desarrollo teórico usando los modelos de sistemas eléctricos, seleccionados ya simplificados en BG y haciendo uso de la Causalidad para posteriormente aplicar la técnica de la Matriz de Estructura de Unión, para hallar las ecuaciones en variables en espacio de estado, donde seguidamente se describirá sobre como se llevará el proceso de implementación eléctrica en perspectiva analogía con Bond Graph.

Capítulo 4.- Se abordan particularmente los 3 diferentes casos de estudio en el que se destaca prácticamente la novedad o relevancia, en relación a los sistemas eléctricos comenzando de lo simple a lo general, que consiste en comprobar y realizar pruebas tanto simulaciones en 20-sim idealmente y experimentales a lo real, a partir del esquema simplificado en Bond Graph para cada uno de los sistemas usando así parámetros para los elementos elegidos.

El interés es obtener resultados, aplicando una señal de excitación de entrada al sistema y con ello ver la salida de señales, para cada variable seleccionada de su comportamiento simulado, y probar la ventaja que da 20-sim al usar una de sus herramientas.

Empleando Bond Graph, por eso las señales de respuesta producidas de acuerdo a los valores asignados, para la obtención de los transitorios que serán de interés en cubrir el objetivo, al hacer uso de Bond Graph y la causalidad, para observar después la respuesta producida, para cada caso de estudio de este capítulo.

Capítulo 5.- Parte final de la tesis, se comenta en breve el enfoque de la metodología en Bond Graph, cuyo objetivo fue la implementación eléctrica y a la misma vez, las recomendaciones para aporte en estudios futuros en otros trabajos.

Antecedentes de Modelado en Bond Graph

2.1. Introducción

Ante las exigencias en diversos campos de estudio, por buscar nuevas técnicas y novedades de modelos, para resolver un problema propuesto o debido también a su complejidad abstracta u otras motivaciones que le confieren, ante ello distintos sistemas físicos, han sido de estudio en las investigaciones de la ciencias de la física y matemáticas.

Tanto que se interesa en describir a los fenómenos de las Leyes que lo gobiernan, lo que también en la ingeniería de control, en su rol busca la viabilidad en la obtención y formulación de modelos, por las formas distintas que estas puedan tomar.

A los sistemas dinámicos donde una manera de describirlos se busca otorgarle formalización en: estructurar, unificar dichos modelados de sistemas, ya que son interacciones energéticas que presentan variables de distintos dominios como: mecánico, eléctrico, magnético y hidráulico.

Es así que con la incursión de la metodología de Bond Graph, toma un lugar especial en el campo del control, expresado como un lenguaje de representación gráfico de ligaduras, que permite conocer sus ecuaciones de estado, en el modelado y manipulación de sistemas dinámicos de ingeniería [2].

Las primeras investigaciones surgen a partir del mérito de contribución valiosa, definida por Henry Martyn Paynter (Agosto 11, 1923 - junio 14, 2002) del MIT & U.T. en Austin, como el creador de enlace de ligaduras desarrollada entre 1959 a 1961, su labor como profesor impartiendo diversos temas, se enfocó en la dinámica de fluidos y sistemas de alimentación de gobierno, entre sus contribuciones se destacan también, sus trabajos como pionero de la computación analógica y digital, la dinámica no lineal, control y en base a estas notoriedades de experiencia se da una concepción de

notación.

Pero esta se formaliza más por sus alumnos Dean C. Karnopp, que posteriormente funge como profesor de U.C. en Davis y Ronald C. Rosenberg en Michigan State University, quien realiza las bases de la primera herramienta en computadora (ENPORT), que fortaleció la simulación para los modelos gráficos de ligaduras.

Luego a inicios en los años posteriores a los 70's, Jan J. Van Dixhoon profesor de la Universidad de Twente de los Países Bajos, implementa un algoritmo de software basado en diagramas de bloques de lo que sería TUTSIM, para entrada causal simple una década después en colaboración con Jean U. Thoma profesor de la Universidad de Waterloo Ontario Canadá, quienes fueron los primeros en introducir los gráficos de ligaduras por Europa.

Estos trabajos dan sustento pilar para desarrollar la herramienta de simulación, en la Universidad de Twente de lo que ahora es el software '20-sim', que al mismo tiempo se inician también estudios, de sistemas físicos más complejos y de termofluidos [3].

Por ello Bond Graph ha tomado relevancia teniendo gran alcance en conferencias, adopción en los planes de estudio, en varias universidades siendo campo de investigación, aplicaciones para el diseño sistemas, simulación y determinación de leyes de control con lo que de esa manera, puede ser ubicada entre los métodos necesarios para la construcción de modelos, evitando con ello costes materiales y riesgos [2].

2.2. Noción conceptual de Bond Graph

Es una representación gráfica de un sistema dinámico de dominio físico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes colocados en el sistema describen cómo fluye la potencia a través del sistema.

En los sistemas dinámicos es posible obtener ecuaciones de estado, que se resuelven para las variables involucradas con el propósito de describir el comportamiento de un sistema a través del tiempo.

En general es un enfoque que facilita la construcción de modelos de sistemas eléctricos, magnéticos, mecánicos, hidráulicos, neumáticos y términos empleando solo un pequeño conjunto de elementos ideales. Técnicas estándares expresan los modelos en ecuaciones diferenciales o esquemas de simula-

ción por computadora [2].

2.3. Partes elementales que integran un Bond Graph

Para conocer las interacciones de intercambio de energía y la procedencia de la información de las variables energía y en tanto las relaciones constitutivas que describen un sistema dinámico es necesario saber el proceso de composición de los gráficos de ligaduras.

La parte elemental por el que está compuesto en su conjunto general son: Unión, puertos, dirección y Causalidad tratado posteriormente.

Enlace o bond está representado por una semiflecha, donde se indica la dirección de ésta, en como fluye la energía entre los puertos que corresponde a la unión, al que está conectado y que representan un subsistema como elemento simple de un sistema, donde se involucran las variables denominadas *esfuerzo*(e) y *flujo*(f). Mediante la orientación del arpón, se define la dirección positiva de la potencia a una de las variables, por lo que sí es un enlace entrante se considera estándar porque consume energía cuando el producto de las variables es positivo, lo que se describe en la siguiente figura 2.1.

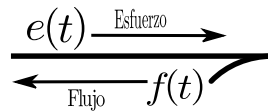


Figura 2.1: Esquema elemental de un bond semiflechado

Los sistemas con un puerto sencillo es denotado *puerto-1*, un sistema con dos puertos es llamado *puerto-2*. Así sucesivamente los sistemas multipuertos sea a *puertos-n* donde n es el número de puertos.

2.3.1. Potencia y Energía

Al intercambio de energía y transferencia de potencia, es definida como el producto de variables esfuerzo $e(t)$ por flujo $f(t)$:

$$P(t) = e(t) * f(t) \quad (2.1)$$

Donde la potencia instantánea es transmitida por un bond particular, estas variables de bond son generalizadas, ambas en función del tiempo, razón por la cual puedan ser utilizadas en todos

los dominios de energía. Para sistemas almacenadores de energía se hace indispensable en definir variables, que representen el estado del sistema, llamadas variables de energía denominada momento $p(t)$ o esfuerzo acumulado $e_a(t)$ y desplazamiento $q(t)$ o flujo acumulado $f_a(t)$, están dadas por: $p(t)$ y $q(t)$ lo cual se conocen como variables energéticas o dinámicas.

$$p(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau + p(0), \quad (2.2)$$

$$q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau + q(0), \quad (2.3)$$

Al cambio o variación de energía obtenida por integración de la potencia $P(t)$ con respecto al tiempo, se define como en la ecuación descrita a continuación:

$$\Delta E = \int_0^t P(\tau)d\tau = \int_0^t e(\tau)f(\tau)d\tau + E(0) \quad (2.4)$$

Las variables generalizadas para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos traslacionales, sistemas mecánicos rotacionales y de sistemas hidráulicos empleadas en Bond Graph se describen en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Variables generalizadas de sistemas Eléctricos e Hidráulicos.

Variables	General	Eléctrico	Hidráulico
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ voltaje	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ corriente	$Q(t)$ Caudal
Momento	$p(t) = \int e(t)dt$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_p(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t)dt$	$q(t)$ Carga	$V(t)$ Volumen
Potencia	$P(t) = e(t)f(t)$	$v(t)i(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p)dp$ $E(q) = \int e(q)dq$	$\int i(\lambda)d\lambda$ $\int edq$	$\int Q(P_p)dP_p$ $\int P_e(V)dV$

En esta sección se presentan un conjunto de puertos básicos como componentes ideales que son

requeridos para el modelado de un sistema, interconectados a través de enlaces y con ello poder mostrar cualquier dominio físico para tener un modelo.

2.3.2. Puertos-1 Pasivos

Son elementos ideales de disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía su nombre se debe a que son elementos que intercambian potencia en un puerto o simplemente un elemento sencillo pasivo, con respecto a lo anunciado se da una clasificación.

- **Elemento R:** Resistencia disipa la energía en forma de calor como consecuencia de la potencia suministrada y de su caída de voltaje al paso de la corriente eléctrica, su empleo se hace indispensable para el modelado al fenómeno físico relacionadas por expresiones matemáticas, de la variable flujo con esfuerzo como ejemplo de ello se tiene la misma resistencia eléctrica, amortiguador en lo mecánico, fricción mecánica y pérdidas de carga hidráulicas.

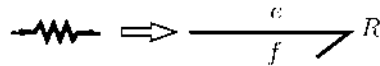


Figura 2.2: Un bond resistivo

- **Elemento C:** Capacitor o condensador acumulador de energía en forma de campo eléctrico, debido a su diferencial de voltaje este puerto integra a la variable (f) flujo, el almacenar la variable de estado (q) desplazamiento, por ejemplo: carga del mismo capacitor o un tanque por diferencia de altura.

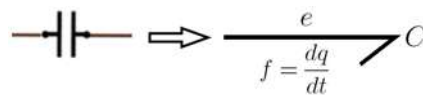


Figura 2.3: Un bond capacitivo

- **Elemento I:** Inductor de almacén de energía en forma de campo magnético, por la integración de la variable esfuerzo (e) teniendo como resultado una variable de estado momentum (p).

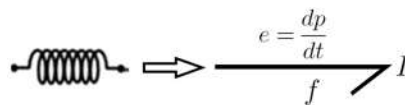


Figura 2.4: Un bond de Inercia

En la siguiente Tabla 2.2 se muestra los elementos de disipación R , de almacenamiento de flujo C y de esfuerzo I , para sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos

Tabla 2.2: Elementos *Puertos -1* Pasivos.

Elemento	Relación	Sistemas		
		Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
R	<i>Lineal</i>	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
	<i>No-lineal</i>	$v = \varphi(i)$	$F = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$
C	<i>Lineal</i>	$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$	$F(t) = k \int V dt$	$P_r(t) = c \int \Delta Q dt$
	<i>No-lineal</i>	$v(t) = \varphi(q)$	$F = \varphi(x)$	$P_r(t) = \varphi(V)$
I	<i>Lineal</i>	$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
	<i>No-lineal</i>	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_p)$

Con referencia a conceptos previos vistos anteriormente, se muestra en resumen de un esquema mnemónico tetraedro de estados donde se muestra la relación de variables generalizadas, por tres puertos-1 pasivos R , C y I . Como se puede apreciar en la Figura 2.5 mostrada, las variables están distribuidas en los cuatro vértices del tetraedro, mientras tanto los elementos representan los bordes que conectan los vértices.

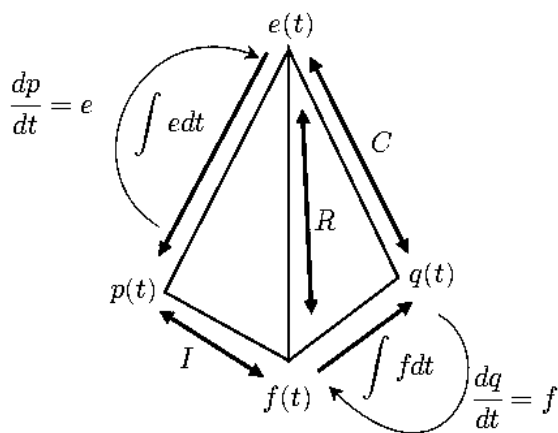


Figura 2.5: Tetraedro de Estado [5].

2.3.3. Puertos-1 Activos o Fuentes

Los elementos estándar que suministran energía al sistema son llamados fuentes independientes, ya que generan esfuerzo y flujo constante, mediante ellos se modelan las condiciones de frontera de los modelos, porque se consideran entidades externas al sistema. Por lo que se tienen 2 tipos:

- **Fuentes de esfuerzo (voltaje, fuerza o presión):** Denotadas por S_e ya que sigue el estándar de una convención fija con orientación saliente de la fuente y su representación en Bond Graph es el siguiente:



Figura 2.6: Elemento activo fuente de esfuerzo.

- **Fuente de flujo (corriente, velocidad o caudal):** Representadas por S_f también con enlace saliente de la fuente por defecto y su equivalente en Bond Graph es:

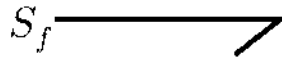


Figura 2.7: Elemento activo fuente de flujo.

- **Fuentes Moduladas:** Por otra parte para modelar los gráficos de enlace existen otros elementos de variables externas de control, a contrariedad de las fuentes normales ya que en estas no se puede ejercer control sobre ellas, por lo que estas se distinguen acoplando una señal a elementos de la fuente modulada, ya que estos elementos convierten una señal de entrada en esfuerzos o flujos, al que se desea manipular la variación en ciertos parámetros de entrada, por lo tanto son denotados con la M de modulación y su representación es el siguiente:

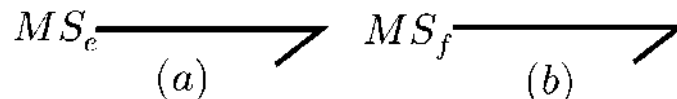


Figura 2.8: Fuentes moduladas a) *Esfuerzo* y b) *Flujo*.

2.3.4. Puertos-2 Elementos Ideales

Se presentan dos puertos conservativos o dos Bonds, ideales que son lineales en el que existe una relación que está constituida por el cambio en los variables flujo y esfuerzo, en donde el valor de la potencia de entrada es igual al de la salida.

- Transformadores-(TF):** Representan la reducción de cada una de las variables siendo en un dominio o más dominios energéticos, la ecuación relaciona *esfuerzo-esfuerzo* y *flujo-flujo* definido por el módulo de transformador, en el que se transmite el factor de potencia con escalar de potencia, al encontrar la relación constitutiva $TF(e_1 f_1 = e_2 f_2)$ ejemplo de ello: se tiene transformador eléctrico, ruedas dentadas, cilindros hidráulicos o neumáticos su representación en Bond Graph es el mostrado en la siguiente figura 2.9.

$$\frac{e_1(t)}{f_1(t)} \xrightarrow[n]{TF} \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$$

Figura 2.9: Relación de transformación en Bond Graph para TF .

$$e_1(t) = n \cdot e_2(t) \quad (2.5)$$

$$f_2(t) = n \cdot f_1(t) \quad (2.6)$$

El índice de transformación n puede ser variable o constante

- Girador-(GY):** Es la relación del esfuerzo de entrada con flujo de salida y flujo-esfuerzo, mediante el mismo módulo (r) para describir procesos de transducción, transformación de energía en otro ejemplo de ello es motor eléctrico, una bomba centrífuga, altavoces, etc.

$$\frac{e_1(t)}{f_1(t)} \xrightarrow[r]{GY} \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$$

Figura 2.10: Representación en Bond Graph para un girador GY .

Las relaciones de variables de Bond generalizadas para el girador están dadas por:

$$e_1(t) = r \cdot f_2(t) \quad (2.7)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r} \cdot e_2(t) \quad (2.8)$$

Estos elementos juegan un papel muy importante, para el modelado de la conversión de potencia de un dominio físico.

2.3.5. Puertos-3 Elementos de Unión

Son enlaces de interconexión con otros elementos de tres o más puertos de distribución de energía, dentro de un subsistema de la cual resaltan 2 uniones que son 0 y 1, en la que representan las ideas fundamentales de este modelado, la forma de multipuertos con dos conexiones en (serie y paralelo).

- Unión 0:** Multipuerto junta de flujo o de esfuerzo común empleado para la conexión en paralelo en los elementos que integran al sistema, donde la entrada y salida es la misma en los esfuerzos, como también la suma algebraica de *flujo es igual 0*, análogo a la *Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)*, donde la orientación de los enlaces determina el signo de la suma de flujo, si los flujos apuntan hacia la unión 0 se suman, en caso contrario se restan.

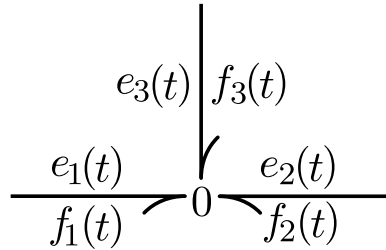


Figura 2.11: Unión-0 Equivalencia en Bond Graph.

Ecuaciones de interconexión que describen una unión de flujo están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t), \quad (2.9)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0. \quad (2.10)$$

- **Unión 1:** Este multipuerto representa la conexión en serie esta vez la suma algebraica de esfuerzos es 0, y para los flujos son iguales para todos los enlaces esta es análoga a la *Ley de Voltajes de Kirchoff (LVK)*, de la misma manera la orientación de los enlaces determina el signo de la suma de los esfuerzos, si los enlaces apuntan hacia la *unión 1* se suman y en caso contrario deben ser restados.

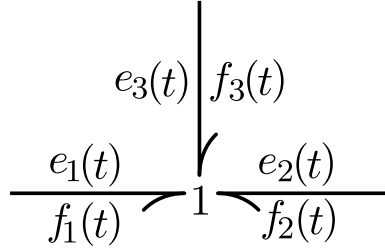


Figura 2.12: Representación Unión-1.

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t), \quad (2.11)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0. \quad (2.12)$$

2.4. Causalidad

Establece la relación de causa y efecto para esfuerzos y flujos, entre los distintos factores de potencia interconectados, ya que son variables asociadas con las entradas y salidas, están caracterizadas por un trazo causal denotado por una línea vertical ($()$), que es perpendicular al Bond enlace horizontal que se coloca en extremo del Bond, el esfuerzo entra en un bond en un mismo sentido que el trazo causal, y por consecuencia el flujo va en dirección contraria. Se debe distinguir que el trazo causal indica cual es la variable de estado, que entra al bond lo que a continuación se muestra en la siguiente Figura 2.13.

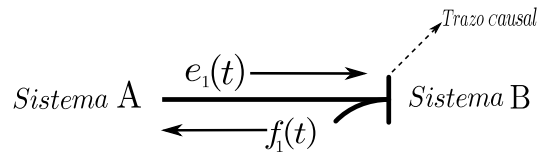


Figura 2.13: Causalidad para un Bond.

Una alternativa para comprender el concepto de causalidad será como lo ilustrado en la siguiente figura 2.14, aplicando una fuerza de empuje del cilindro hacia el émbolo equivalente a un esfuerzo, en dicha reacción aparecerá un flujo:

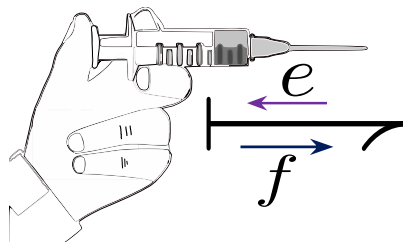


Figura 2.14: Concepto de causalidad comparada con una jeringa [12].

A continuación se presentan 4 formas de expresar la causalidad en un bond ilustrado en la siguiente figura 2.15.

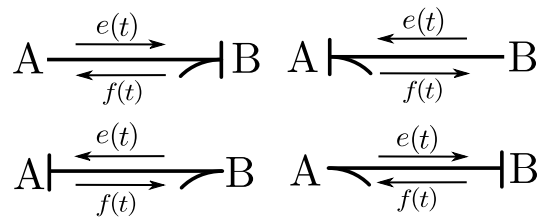


Figura 2.15: Formas de expresión de la causalidad en un bond.

De la figura 2.15 mostrada se muestran para todos los casos en el que el flujo sigue una trayectoria en sentido opuesto, que el recorrido que toma el esfuerzo cuando tiene lugar la transferencia de potencia, entre un elemento a otro, esta vía indicará que elementos demandan o entregan potencia.

2.4.1. Reglas necesarias de asignación causal

Reglas causales necesarias que se deben de cumplir para los multipuertos básicos, mostrada en la siguiente Tabla 2.3.

Tabla 2.3: Consideraciones causales para los multipuertos Básicos.

<i>Causalidad</i>		
<i>Necesaria</i>	$MS_e \longrightarrow \nearrow$	$MS_f \longleftarrow \nearrow$
<i>Restriictiva</i>	$\longrightarrow \nearrow TF \longrightarrow \nearrow$	$\longleftarrow \nearrow TF \longleftarrow \nearrow$
	$\longrightarrow \nearrow GY \longleftarrow \nearrow$	$\longleftarrow \nearrow GY \longrightarrow \nearrow$
	$\longrightarrow \nearrow 0 \longrightarrow \nearrow$	$\longleftarrow \nearrow 0 \longrightarrow \nearrow$
	$\longrightarrow \nearrow 1 \longrightarrow \nearrow$	$\longleftarrow \nearrow 1 \longrightarrow \nearrow$
<i>Integral</i>	$\longrightarrow \nearrow I$	$\longleftarrow \nearrow C$
<i>Derivativa</i>	$\longleftarrow \nearrow I$	$\longrightarrow \nearrow C$
<i>Arbitraria</i>	$\longrightarrow \nearrow R$	$\longleftarrow \nearrow R$

Para ello se toman 2 ejemplos para explicar la importancia de la causalidad. Un modelo para la unión-0 sin causalidad se muestra en la figura 2.16.

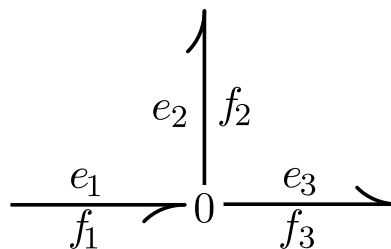


Figura 2.16: Ejemplo de Unión-0 sin Casualidad.

De la figura 2.16 se obtienen las siguientes relaciones:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t), \tag{2.13}$$

$$f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) = 0 \quad (2.14)$$

Lo que ahora sigue, con el trazo causal, en la Figura 2.17, significa que $e_1(t)$ entra en la unión y $e_2(t)$ y $e_3(t)$ son salidas de la unión, efectos de $e_1(t)$, así $f_1(t)$ está en el sentido opuesto y va fuera de la unión, es una salida, $f_2(t), f_3(t)$ son entradas a la unión.

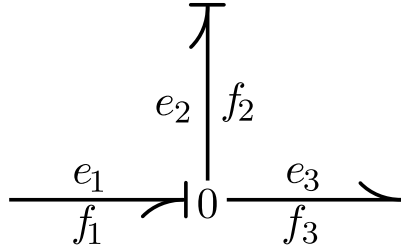


Figura 2.17: Ejemplo de Unión-0 con causalidad.

Esto se representa con las ecuaciones de interconexión:

$$e_1(t) = e_2(t) \quad (2.15)$$

$$e_3(t) = e_1(t) \quad (2.16)$$

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t) \quad (2.17)$$

En una forma bien adaptada para el cálculo numérico.

2.4.2. Causalidad Integral y Derivativa Elemento-C

Ahora se considera al *elemento-C*. La relación constitutiva es de $f(t)$ a $e(t)$ y almacena flujo, es decir, relaciona $e(t)$ a una variable de desplazamiento como sigue:

$$q(t) = \int f(t)dt. \quad (2.18)$$

Tomando la variable generalizada de la capacitancia C definida como:

$$e(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (2.19)$$

por la relación $e(t)$ a $f(t)$ se tiene:

$$e(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int f(t)dt}{C} = \frac{1}{C} \int f(t)dt$$

Se integra $f(t)$ para encontrar $q(t)$, luego si el elemento es lineal este es dividido por la capacitancia $e(t)$, es una salida relacionada a $q(t)$, a esta causalidad en un elemento de almacenamiento se le llama integral.

Debido a que la integral de la entrada $f(t)$, se relaciona con la salida $e(t)$, el esfuerzo está relacionado directamente al desplazamiento, como causa es flujo mostrado en la figura 2.18.

$$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t)dt. \quad (2.20)$$

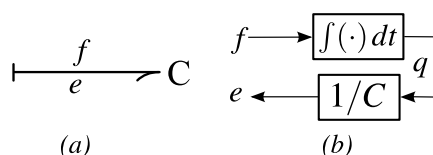


Figura 2.18: (a) Elemento-C en causalidad integral, (b) Diagrama a bloques.

Con la inversión de la causalidad, se obtiene la misma relación de la ecuación (2.20) pero descrita con derivadas:

$$f(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Ce)}{dt} = C \frac{d(e)}{dt} \quad (2.21)$$

A esta causalidad se le llama causalidad derivativa de un elemento de almacenamiento mostrado en el ejemplo siguiente:

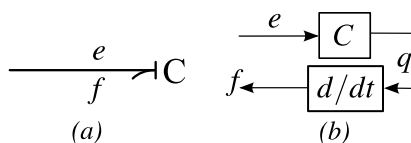


Figura 2.19: (a) Elemento-C en causalidad derivativa, (b) Diagrama a bloques [10].

2.4.3. Causalidad Integral y Derivativa Elemento-I

Elemento-I almacenador de energía caracterizado por la relación constitutiva $e(t)$ a $f(t)$ relaciona directamente el momento del esfuerzo acumulado:

$$p(t) = \int e(t)dt, \quad (2.22)$$

La variable generalizada de I es:

$$f(t) = \frac{p(t)}{I} \quad (2.23)$$

Como la causa es esfuerzo $e(t)$ al *elemento-I*, en causalidad integral $e(t)$ es integrado para determinar el momento $p(t)$, teniendo como salida $f(t)$ sustituyendo la ecuación (2.22) en (2.23) quedando:

$$f(t) = \frac{1}{I} \int e(t)dt \quad (2.24)$$

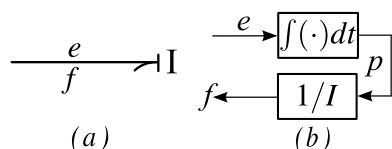


Figura 2.20: (a) Elemento-I en causalidad integral, (b) Diagrama a bloques.

Para la causalidad derivativa se tiene:

$$e(t) = \frac{dp}{dt} = \frac{d(I f)}{dt} = I \frac{df}{dt} \quad (2.25)$$

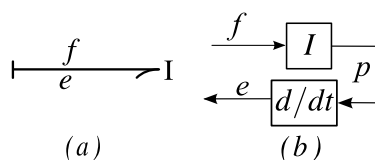


Figura 2.21: (a) Elemento-I en causalidad derivativa, (b) Diagrama a bloques [10].

En la siguiente tabla se muestran los *Puertos-I*, con la causalidad equivalente al elemento individual.

Tabla 2.4: Formas y Relaciones Causales para Puertos 1.

Elemento	Forma Causal		Relación Causal	
	<i>Integral</i>	<i>Derivativa</i>	<i>Integral</i>	<i>Derivativa</i>
<i>Fuente de esfuerzo</i>	$MS_e \longrightarrow \nearrow$		$e(t) = E(t)$	
<i>Fuente de flujo</i>	$MS_f \longleftarrow \nearrow$		$f(t) = F(t)$	
<i>Resistencia</i>	$\longleftarrow \nearrow R$	$\longrightarrow \nearrow R$	$e(t) = \Phi_R[f(t)]$	$f(t) = \Phi_R^{-1}[e(t)]$
<i>Capacitancia</i>	$\longleftarrow \nearrow C$	$\longrightarrow \nearrow C$	$e(t) = \Phi_C^{-1} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right]$	$f(t) = \frac{d}{dt} [\Phi_C e(t)]$
<i>Inductancia</i>	$\longrightarrow \nearrow I$	$\longleftarrow \nearrow I$	$e(t) = \Phi_I^{-1} \left[\int_0^t e(\tau) d\tau \right]$	$e(t) = \frac{d}{dt} [\Phi_I f(t)]$

* Φ_x (*Phi x*) Notación usada para indicar la relación constitutiva de los elementos x en la Tabla 2.4.

Procedimiento para la Obtención de las ecuaciones diferenciales, cumpliendo de acuerdo a las reglas de causalidad a los multipuertos elementales, mostrado en la Tabla 2.3.

2.4.4. Pasos de asignación de Causalidad en un multipuerto

1. Aplicar causalidad prioritaria para cualquier fuente MS_e o MS_f , usando las restricciones de 0, 1, *TF* y *GY* ver (ir a Tabla 2.3).
2. Después asignar la causalidad integral a los elementos C e I , respetando las restricciones de la (Ver Tabla 2.3).
3. Por último, elegir cualquier R que no esté asignado dar una causalidad arbitraria a R . Extender las implicaciones usando 0,1, *TF* y *GY*. (Ver Tabla 2.3).
4. Al existir un problema causal entre los elementos y las uniones, retornar al segundo paso y modificar la causalidad del elemento C o I .

Se debe notar que la causalidad derivativa de un elemento almacenador de energía, proporciona propiedades importantes que se explican en la siguiente sección.

2.4.5. Causalidad derivativa en un Bond Graph.

Esta existe solo si un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes. Para una asignación de causalidad integral predefinida. En este caso se presenta una situación para un sistema eléctrico con dos capacitores en paralelo como se puede notar en la siguiente figura 2.22.

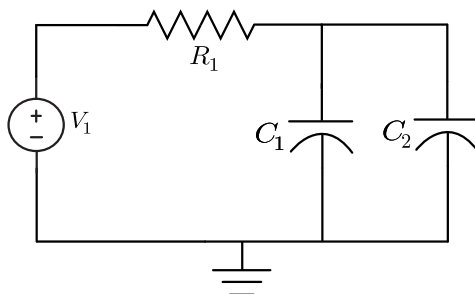


Figura 2.22: Diagrama de un circuito eléctrico.

De la figura 2.22 se observan 2 elementos capacitivos, C_1 y C_2 conectados en paralelo, Ahora en representación de su Bond Graph, con causalidad asignada, donde los capacitores típicamente tienen causalidad integral, en un caso como este, a uno de los capacitores se le asigna causalidad integrativa (C_1) y otra causalidad derivativa (C_2), como se observa en la figura 2.23.

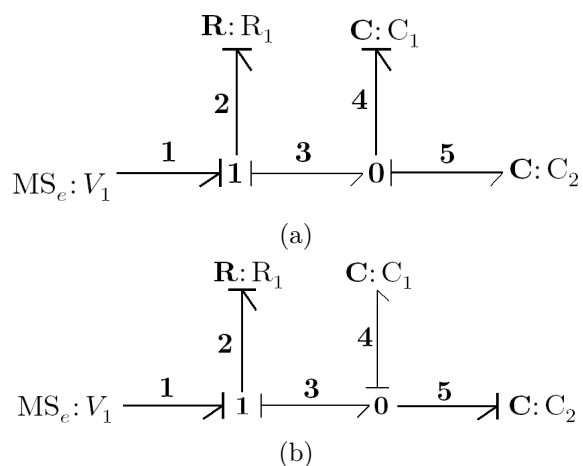


Figura 2.23: Bond Graph en causalidad derivativa e integral.

El número de elementos que almacenan energía en causalidad integral, es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes. Y el número de elementos almacenadores en causalidad

derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes.

2.5. Bond Activo

Un bond normalmente cuenta con 2 señales *esfuerzo* $e(t)$ y *flujo* $f(t)$, indicado por una semiflecha. Lo que ahora diferencia a un bond activo es que transmite una de las 2 señales posibles en una trayectoria, en esta vez se presenta como una flecha completa teniendo así un flujo de señal de potencia 0.



Figura 2.24: Bond Activo.

Un bond activo se utiliza como una señal en un diagrama de bloques, la cual se conecta un bloque a otro sin consumir energía como se muestra en la figura 2.25.

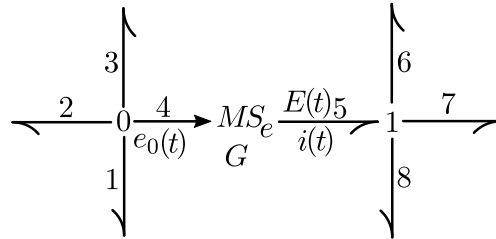


Figura 2.25: Bond Graph con un Bond activo.

El bond activo que entra a MS_e , indica que $E(t)$ es modulada por $e_0(t)$, así $E(t) = Ge_0(t)$, donde G es la ganancia de voltaje. El bond activo viene de una *unión-0*, el voltaje $e_0(t)$ es el mismo que e_1, e_2, e_3 . Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a $e_0(t)$ es despreciable. La suma de la corriente en la *unión-0* se debe únicamente a i_1, i_2 e i_3 .

2.6. Procedimiento para el modelado de Sistemas

Es notorio que para representar sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos, se requiere seguir pasos ordenados y claros en dicho modelado de Bond Graph:

1. Dibujar una *Unión-0*, para cada punto en el esquema donde las trayectorias de esfuerzo o flujo paralelas coincidan.
2. Dibujar una *Unión-1*, para cada componente en una trayectoria en serie, y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y disipadores.
3. Dibujar Bonds entre las uniones adyacentes respetando la dirección del flujo de potencia.
4. Se remueve la *Unión-0*, que representa el punto de referencia, y remover todos los Bonds que se encuentren conectados a esta unión.
5. Finalmente se reduce aplicando las simplificaciones siguientes:

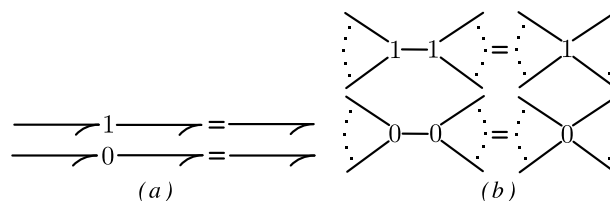


Figura 2.26: Reducciones equivalentes: (a) simple y (b) doble [7]

2.6.1. Sistemas Eléctricos

El procedimiento en el modelado de un sistema es generalizado en la obtención de Bond Graph, en este caso en la solución de un ejemplo en particular a los sistemas eléctricos para la figura 2.27:

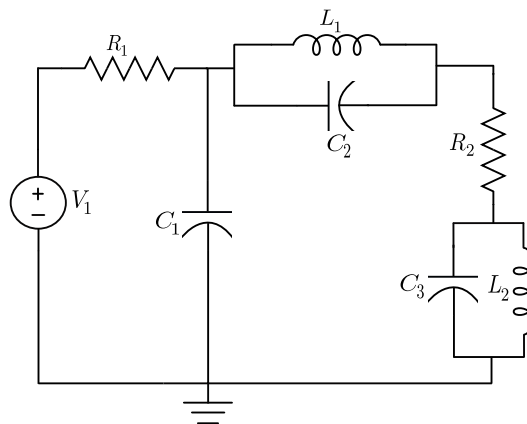


Figura 2.27: Ejemplo de un Circuito eléctrico.

Paso 1. Se identifican los puntos de unión para cada voltaje distinto en el circuito con el que se marcan con una *Unión-0* en los nodos:

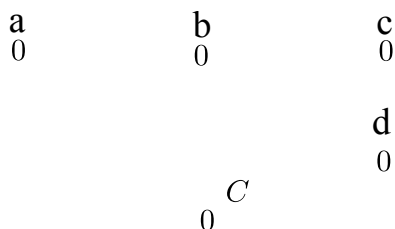


Figura 2.28: Identificación de Nodos y asignación de *Unión-0*.

Paso 2. Ahora se marcan los elementos que serán representados por una *unión-1*, para cada componente en Bond Graph representado con una semiflecha. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, al punto inicial en las fuentes en dirección a elementos almacenadores y disipadores.

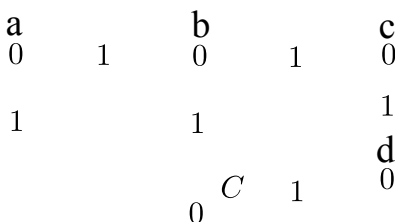


Figura 2.29: Asignación de *Unión-1*.

Paso 3. Se realiza la unión de enlaces subyacentes respetando la dirección del flujo de Potencia.

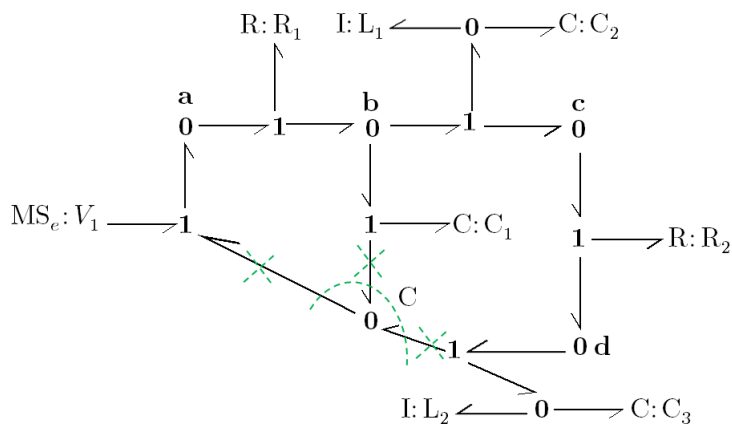


Figura 2.30: Unión de enlaces con arpones con dirección emanada de la fuente.

Paso 4. Se remueve la *Unión-0*, común de referencia y anulando así todos los Bonds que se encuentren conectados en esta unión.

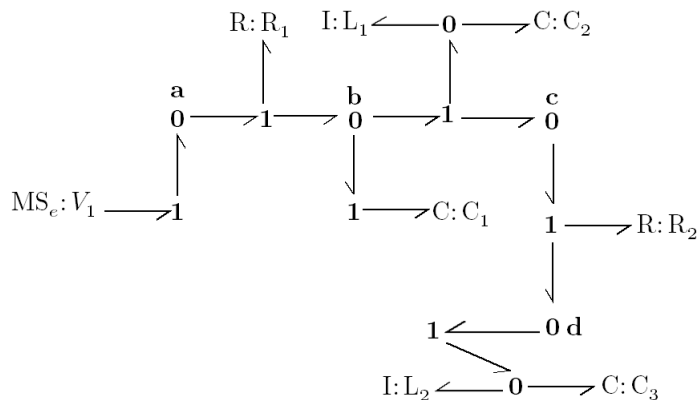


Figura 2.31: Anulación de la referencia C.

Paso 5. Lo que sigue reducción en equivalencias de acuerdo a la figura 2.26 :

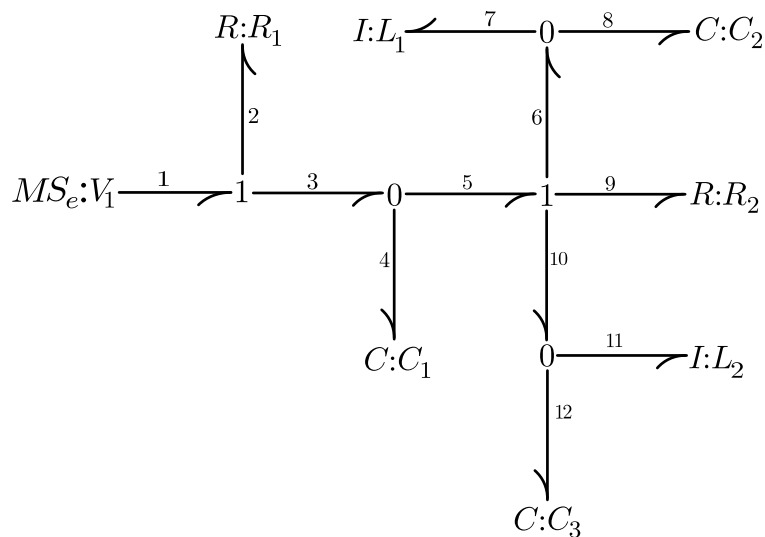


Figura 2.32: Representación acausal en Bond Graph del sistema eléctrico.

Paso 6. Aplicación final de causalidad de acuerdo a la Tabla 2.3, lo que para este problema solo se tienen causalidades integrales, y de la misma manera este sistema será útil para derivar las ecuaciones de estado, definido por el sentido de las variables en los bonds activos, bosquejada en la figura 2.33.

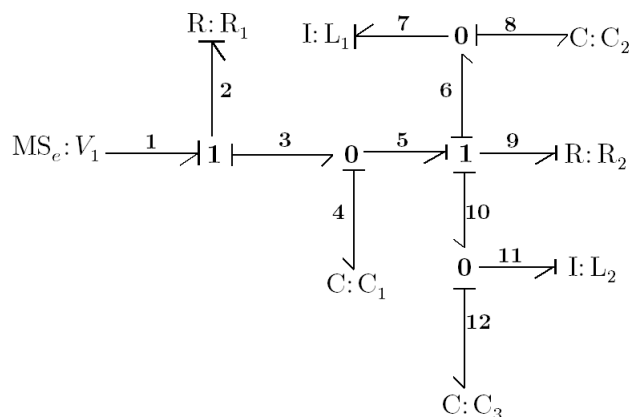


Figura 2.33: Representación final del Modelo en Bond Graph con causalidad asignada.

2.7. Matriz de Estructura de Unión

En base al modelado de un sistema físico en Bond Graph, se conocerán las relaciones entre los diferentes elementos que forman el sistema, para ello lograrlo de una manera sistemática, el modelo matemático del mismo se logra con los gráficos de enlaces de ligaduras en causalidad asignada, haciendo uso del método conocido como estructura de unión, para encontrar las ecuaciones de estado, ya que con esta técnica se genera la manipulación y reducción significativa, en las operaciones de sistemas de ecuaciones, tema tratado en la siguiente subsección.

2.7.1. Vectores Clave o Vectores Significativos

La forma convencional de tratar los modelos de Bond Graph, es que todos los Bonds, en su efecto estos pueden ser identificados como sigue:

- **Bonds Externos:** Enlazan a los elementos como R , C , I , MS_e y MS_f clasificándose de acuerdo a su uso y manifestación de energía.
- **Bonds Internos:** Los que conectan elementos 0 , 1 , GY y TF . La figura 2.34 muestra el diagrama de bloques de una *Estructura de Unión* de un Bond Graph.

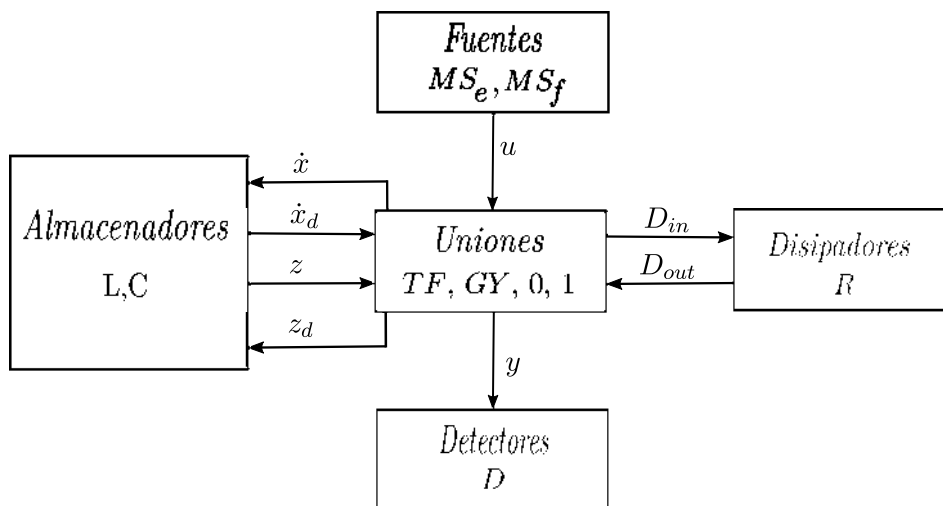


Figura 2.34: Bloques de la estructura de unión de un Bond Graph.

De la figura 2.34 se observa la forma en que están organizados, los elementos en cada bloque las fuentes (MS_e , MS_f), los elementos almacenadores (L , C), los disipadores R , detectores D , luego en la estructura de unión donde intervienen los transformadores TF , giradores GY y uniones 0 , 1 .

Los vectores clave en un Bond Graph son los que representan a un sistema físico de diferente o mismo dominio de energía. Estos vectores se muestran en la figura 2.34 en forma de diagrama a bloques, comenzando con:

- $\mathbf{u}(t)$: Vector de entrada aporta todas las variables de potencia (*esfuerzo y flujo*) definidos por los elementos activos o fuentes en la estructura de unión.
- Los estados $\mathbf{x}(t)$ en causalidad integral y $\mathbf{x}_d(t)$ en causalidad derivativa: Respectivamente están compuestos de dos variable de energía; momento generalizado $p(t)$ el cual se encuentra en los elementos almacenadores de *flujo* (I) y desplazamiento generalizado $q(t)$ en elementos (C).
- $\dot{\mathbf{x}}(t)$: Es el vector de las derivadas de $\mathbf{x}(t)$, en función del tiempo en causalidad integral [4].
- $\mathbf{z}(t)$ causalidad integral y $\mathbf{z}_d(t)$ derivativa: Son variables clave de co-energía, según se estén empleando en los elementos de almacenamiento *flujo*(I), *esfuerzo*(C).
- $\mathbf{D}_{in}(t)$ y $\mathbf{D}_{out}(t)$: Combinación de los esfuerzos y flujos que se está analizando en el sistema, estos contienen los intercambios de energía entre el campo de disipación y la estructura de

unión, siendo de entrada y salida en R estrictamente.

- $\mathbf{y}(t)$: Se emplea como salida del sistema.

2.7.2. Relación de campo y ecuación de estado

Las relaciones de campo no lineales de la Figura 2.34 de almacenamiento y disipación sus expresiones son las siguientes:

$$z(t) = \Phi_F(x), \quad (2.26)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d), \quad (2.27)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}), \quad (2.28)$$

Donde:

Φ_F denota una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{Fd} denota una función que relaciona cada z_{di} con x_{id} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{out} con D_{in} para $i = 1, \dots, r$.

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual es llamada como su *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = Fx(t), \quad (2.29)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t), \quad (2.30)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t), \quad (2.31)$$

Donde:

L = Es una matriz real de dimensión $r \times r$.

F = Es una matriz real de dimensión $n \times n$.

F_d = Es una matriz real de dimensión $m \times m$.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t), \quad (2.33)$$

Donde la matriz de estructura de unión, está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Los elementos de S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son módulos del transformador y girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- P1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
- P2.- S_{12} Es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades P1 y P2 están basadas en el principio de conservación de energía. Un sistema LTI MIMO está representado en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.35)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.36)$$

Hallando los valores matriciales A,B,C,D

Si se relacionan las variables de estado operando matricialmente (2.32) y (2.34) resultan en ecuaciones siguientes en \dot{x} , D_{in} y y como sigue:

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}D_{out} + S_{13}u \quad (2.37)$$

$$D_{in} = S_{21}z + S_{22}D_{out} + S_{23}u \quad (2.38)$$

$$y = S_{31}z + S_{32}D_{out} + S_{33}u \quad (2.39)$$

Desarrollando en D_{in} de la ecuación (2.38)

$$D_{in} = S_{21}z + S_{22}D_{out} + S_{23}u \quad \text{como } D_{out} = LD_{in} \text{ se sustituye:}$$

$$D_{in} = S_{21}z + S_{22}LD_{in} + S_{23}u \quad \text{reagrupando las variables del mismo término}$$

$$D_{in} - S_{22}LD_{in} = S_{21}z + S_{23}u$$

$$D_{in}(I - S_{22}L) = S_{21}z + S_{23}u \quad \text{despejando la variable } D_{in}$$

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}z + S_{23}u) \quad (2.40)$$

De la misma manera ahora se encuentra la relación para la variable de estado de la ecuación (2.37)

en \dot{x} :

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}D_{out} + S_{13}u \quad \text{donde: } D_{out} = LD_{in}$$

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}LD_{in} + S_{13}u \quad \text{sustituyendo por la ecuación (2.40) se tiene:}$$

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}z + S_{23}u) + S_{13}u$$

Siendo:

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (2.41)$$

Con $M = L(I - S_{22}L)^{-1}$ es una manera convencional de representar la ecuación obtenida anteriormente.

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}z + S_{23}u) + S_{13}u$$

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}M(S_{21}z + S_{23}u) + S_{13}u$$

Factorizando el polinomio y sustituyendo $z = Fx$:

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}MS_{21}z + S_{12}MS_{23}u + S_{13}u$$

$$\dot{x} = (S_{11} + S_{12}MS_{21})z + (S_{12}MS_{23} + S_{13})u$$

$$\dot{x} = (S_{11} + S_{12}MS_{21})Fx + (S_{12}MS_{23} + S_{13})u$$

Finalmente se obtienen los valores de la matriz A y B del Sistema.

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.42)$$

$$B = (S_{12}MS_{23} + S_{13}) \quad (2.43)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Para obtener los siguientes valores de C y D es el mismo procedimiento que se aplica, para ello se recurre a la relación y operando matricialmente (2.32) y (2.34) obtenemos la salida:

En base a la ecuación (2.39) obtenida se desarrolla:

$$y = S_{31}z + S_{32}D_{out} + S_{33}u \quad \text{si: } D_{out} = LD_{in}$$

$$y = S_{31}z + S_{32}LD_{in} + S_{33}u \quad \text{sustituyendo de acuerdo a la ecuación 2.40}$$

$$y = S_{31}z + S_{32}L(I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}Z + S_{23}u) + S_{33}u \quad \text{reemplazando } M \text{ de la expresión 2.41}$$

$$y = S_{31}z + S_{32}M(S_{21}z + S_{23}u) + S_{33}u$$

Desarrollando y factorizando el polinomio se tiene que:

$$y = S_{31}z + S_{32}MS_{21}z + S_{32}MS_{23}u + S_{33}u$$

$$y = (S_{31} + S_{32}MS_{21})z + (S_{32}MS_{23} + S_{33})u$$

Sustituyendo por la ecuación (2.29) queda:

$$y = (S_{31} + S_{32}MS_{21})Fx + (S_{33} + S_{32}MS_{23})u$$

Finalmente de la expresión obtenida se identifican los valores de la matriz C y D del Sistema.

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \tag{2.44}$$

$$D = (S_{33} + S_{32}MS_{23}) \tag{2.45}$$

$$y(t) = Cx + Du$$

Si:

$$S_{22} = 0 \quad M = L \tag{2.46}$$

La expresión (2.42) a (2.41) permite la obtención directa del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación de Bond Graph. Son necesarias ya que a partir de un sistema físico, se obtiene el modelado en Bond Graph y posteriormente se obtienen sus vectores clave para obtener su modelo matemático.

2.7.3. Ejemplo para un Sistema eléctrico

Retomando el circuito eléctrico de la figura 2.27, se determinará la aplicación de la Matriz de estructura de Unión, en obtener en su conjunto las matrices A, B del sistema en variables de estado.

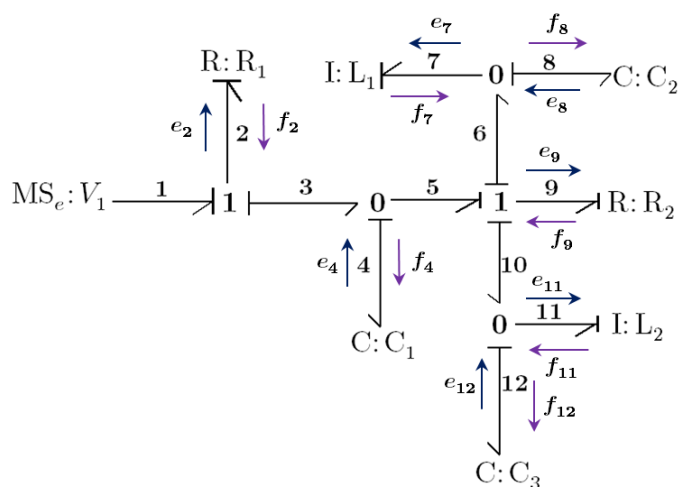


Figura 2.35: Numeración y dirección de los flujos y esfuerzos definidos.

De acuerdo al diagrama de bloques de la estructura de unión de la figura 2.34, la dirección de las flechas se asigna conforme a la dirección que toma D_{out} o D_{in} , es decir si hacia los elementos o en su caso a las uniones, el mismo caso es aplicable para los elementos almacenadores, mientras tanto la numeración es arbitraria. Es así que resalta la importancia de la causalidad porque de esta manera se definen los sentidos de los *esfuerzos* $e(t)$ y *flujos* $f(t)$.

Vectores Clave

El siguiente paso es encontrar los Vectores clave:

$u = e_1$ para este caso se cuenta con una fuente de esfuerzo

Se rellenan las matrices para los disipadores:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_9 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_9 \end{bmatrix}$$

Tabla 2.5: Relación para los elementos I , C en $p(\text{momento})$ y $q(\text{desplazamiento})$.

	x	\dot{x}	z
I	p	e	f
C	q	f	e

Por último, se completan las matrices en cada variable en los elementos almacenadores en referencia a la Tabla 2.5.

$$x = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \\ q_8 \\ p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

Para encontrar las relaciones constitutivas de L diagonal de la ecuación (2.31), en donde la incógnita L se define a partir de las matrices D_{in} y D_{out} , las cuales ya se obtuvieron en el paso anterior. Esta relación se encuentra aplicando la Ley de Ohm en las diagonales principales sea de dimensión de $n \times n$. Por lo tanto, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_9 \end{bmatrix}; L = \text{diag}\left\{\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right\}.$$

Luego se obtiene la incógnita de la diagonal en la matriz F para $z = Fx$:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \\ q_8 \\ p_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix}; F = \text{diag}\left\{\frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_1}, \frac{1}{C_2}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C_2}\right\}.$$

El paso siguiente ahora será tomar la matriz de estructura de unión:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

A continuación, se rellena la matriz S :

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{12} \\ e_2 \\ e_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_8 \\ f_{11} \\ e_{12} \\ f_2 \\ f_9 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Para completar los elementos de las submatrices de la matriz S , se sigue por los enlaces que están activos, siendo una de las 2 variables de esfuerzo o flujo en localizar las variables faltantes o que son incógnitas, en caso contrario si es un enlace inactivo se busca por uno activo, para tal efecto eso depende de la complejidad del circuito se tomarían varias consideraciones, por lo que como base se parte de las siguientes definiciones teniendo en cuenta la Ley de Kirchhoff.

- En una *unión-0* los esfuerzos son iguales.
- En una *unión-1* los flujos son iguales.

El paso siguiente es rellenar el valor de los elementos de la primera fila de la matriz S .

Para ello es necesario despejar la variable f_4 localizada en la *Unión-0*, en el circuito mostrado de la figura 2.35 (bond que no conecta a ningún elemento activo, solo conecta entre uniones) lo cual es necesario enlazar los flujos a una unión donde se tiene un bond que está activo, y estos se encuentran hacia los costados de esta unión, por lo tanto se procede a obtener las ecuaciones siguientes:

Se tiene que $f_3 = f_4 + f_5$ que resulta a partir de la Ley de corriente de ahí se despeja $f_4 = f_3 - f_5$ para completar la matriz S no se satisface la condición en la matriz del vector de estado z , para la obtención de 0 's o 1 's para el relleno parcial, no se encuentra f_3 ni f_5 por lo tanto es una unión interna que no enlaza ningún elemento disipador o almacenador.

La forma de encontrar esa variable, es ver en ambos lados y localizar las variables activas, por lo tanto se observa que los flujos son iguales para una *unión-1*, de ahí la definición de procedencia para f_3 :

Como $f_1 = f_2 = f_3$ y luego para el otro lado del enlace de f_5 está en la misma unión:

$$f_5 = f_6 = f_9 = f_{10}$$

de esta manera se observa en la figura 2.35 las variables faltantes para encontrar f_4 y así completar z , con ello quedaría de la siguiente manera:

Donde f_5 está en un bond inactivo se reemplaza f_5 por f_9 y f_3 se cambia por f_2 quedando finalmente la ecuación de la siguiente manera:

$$f_4 = f_2 - f_9$$

Con la ecuación anterior se llena la **primera fila** de la matriz S .

El relleno para la **segunda fila** de la matriz S está en la variable e_7 , se puede observar en la figura 2.35 el esfuerzo entra en una *unión-0*, donde todos los esfuerzos son iguales para este caso $e_7 = e_8 = e_6$, tomando sólo los Bonds activos queda de la siguiente manera:

$$e_7 = e_8$$

Para la **tercera fila** de la matriz S se despeja f_8 , de la ecuación siguiente:

$f_6 - f_7 - f_8 = 0$ ó tomando como $f_6 = f_7 + f_8$ y luego despejando:

$f_8 = f_6 - f_7$, se observa que f_6 se encuentra en un bond inactivo, es necesario tomar el flujo donde el bond es activo quedando:

$$f_8 = f_9 - f_7$$

Para la **cuarta fila** de la matriz S , se debe despejar e_{11} de la ecuación siguiente:

$e_{10} = e_{11} = e_{12}$, donde todos los esfuerzos son iguales para una *unión-0*, y se toman los esfuerzos donde el bond es activo, quedando de la siguiente manera:

$$e_{11} = e_{12}$$

Para la **quinta fila** de la matriz S , en esta se debe de despejar a f_{12} que está en una *unión-0*, la ecuación que se obtiene es: $f_{10} - f_{11} - f_{12} = 0$, despejando $f_{12} = f_{10} - f_{11}$, pero f_{10} está en un bond inactivo es necesario cambiar f_{10} por f_9 quedando de la siguiente manera:

$$f_{12} = f_9 - f_{11}$$

Para la **sexta fila** de la matriz S , se despeja a e_2 de la siguiente ecuación obtenida $e_1 - e_2 - e_3 = 0$ o $e_1 = e_2 + e_3$, despejando $e_2 = e_1 - e_3$, pero e_3 , se encuentra en un bond inactivo por lo que se cambia por $-e_4$ quedando:

$$e_2 = e_1 - e_4$$

Para la **séptima fila** de la matriz S , se debe de despejar a e_9 de la siguiente ecuación obtenida $e_5 - e_6 - e_9 - e_{10} = 0$ o $e_5 = e_6 + e_9 + e_{10}$ despejando e_9 , se tiene la siguiente ecuación:

$e_9 = e_5 - e_6 - e_{10}$ pero e_5 , e_6 y e_{10} están en un bond inactivo por lo que es necesario tomar los bonds activos quedando como:

$$\boxed{e_9 = e_4 - e_8 - e_{12}}$$

De esta manera se concluye el relleno en la matriz S , y se obtiene la comprobación de que S_{11} y S_{22} , son matrices cuadradas y anti-simétricas:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para S_{12} , es la matriz transpuesta negativa de S_{21} :

Se comprueba que: $-S_{12}^T = S_{21}$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Con ello se cumplen las propiedades, lo que significa que se efectuó bien el procedimiento descrito anteriormente.

2.7.4. Derivación de Sistemas de Ecuaciones de Estado

Donde la matriz A , esta dada por la siguiente ecuación:

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F$$

Retomando la matriz $M = (I - LS_{22})^{-1}L$, y sabiendo que $S_{22} = 0$ por lo que se hace $M = L$.

$$M = L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

con:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

desarrollando:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

quedando finalmente reducida como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 & \frac{1}{R_2 C_2} & 0 & \frac{1}{R_2 C_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 & -\frac{1}{R_2 C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{R_2 C_1} & 0 & -\frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{L_2} & -\frac{1}{R_2 C_3} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Luego para la matriz:

$$B = (S_{13} + S_{12} M S_{23})$$

sustituyendo;

$$B = \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Teniendo así la ecuación en espacio de estado de acuerdo a la ecuación (2.35)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_8 \\ e_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & 0 & \frac{1}{R_2 C_2} & 0 & \frac{1}{R_2 C_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 & -\frac{1}{R_2 C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{R_2 C_1} & 0 & -\frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{L_2} & -\frac{1}{R_2 C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \\ q_8 \\ p_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

La salida no se utiliza para este problema.

A través de la expresión matricial de ecuaciones en variables de estado, se concluye formalmente la obtención del modelo matemático en Bond Graph, que describe el comportamiento para el circuito de la figura 2.27, como se puede notar las operaciones matriciales que se realizaron para este problema, se extienden dependiendo de dicho sistema que tan grande sea, es así que se obtendrá el tamaño de dicha matriz S como sea posible definido por los elementos activos.

Procedimiento de la Implementación Eléctrica

3.1. Introducción

Los circuitos son un buen modelo para el estudio de sistemas de energía en general, por la física y la matemática aplicada. En Ingeniería Eléctrica, Comunicaciones, Electrónica, etc. A menudo se tiene un interés especial en comunicar o transferir energía de un punto a otro. Realizarlo requiere una interconexión de dispositivos eléctricos. A tal interconexión se le conoce como circuito eléctrico y cada componente del circuito como elemento, para ello encontrar los valores de esas variables en un circuito dado es necesario que se conozcan las leyes fundamentales que gobiernan a los circuitos eléctricos. Estas leyes conocidas la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff son base en que se apoya el análisis de circuitos eléctricos [11].

Un análisis en base a la teoría de Bond Graph, es ¿Ver cómo responde el sistema en su modelado? Así mismo un estudio de respuesta de los elementos y dispositivos conectados en el circuito, por ello es de vital interés en lograr este objetivo.

3.2. Modelado Matemático de Sistemas

Para obtener el modelo de un sistema es conveniente desarrollar primero un modelo simplificado, para obtener una idea general de la solución en el análisis de las relaciones entre las variables. Antes que el sistema pueda diseñarse y como los sistemas considerados son de naturaleza dinámica, que por lo general son las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema del que se presentan las siguientes clasificaciones:

- **Sistema lineal:** Esta se cumple si es aplicable el principio de superposición, lo que significa que la respuesta producida ante dos entradas distintas esta será la suma de las dos respuestas individuales. Lo que permite desarrollar soluciones complicadas para la ecuación lineal a partir de soluciones simples [8].
- **Sistema No lineal:** Se dice que no cumple con el principio de superposición, ya que todos los sistemas físicos son no lineales en algún grado por lo que la mayoría de los sistemas en la vida real tienen características no lineales estos son representados por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales [9, 13].
- **Sistema lineal invariante en el tiempo:** Cuando los parámetros del sistema son estacionarios con respecto al tiempo, que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.
- **Sistema lineal variante en el tiempo:** Cuya representación son mediante ecuaciones diferenciales donde sus coeficientes son variables y que están en función del tiempo

3.3. Variables de Estado de un Sistema Dinámico

Las variables de estado de un sistema caracterizan el comportamiento dinámico de éste. El interés está principalmente en sistemas físicos donde las variables son voltajes, corrientes, velocidades, posiciones, presiones, temperaturas y variables similares. Sin embargo el concepto de estado de un sistema no está limitado al análisis de sistemas físicos, y es particularmente útil en análisis de sistemas biológicos sociales y económicos. Para estos sistemas el concepto de estado se extiende más allá del concepto de energía de un sistema físico, hasta el punto de vista más amplio de variables que describen el comportamiento futuro del sistema.

El **estado** de un sistema es un conjunto de variables tales que el conocimiento de estas variables y de las funciones de entrada, junto con las ecuaciones que describen la dinámica, proporcionan la salida y el estado futuro del sistema.

Es así que el estado de un sistema se describe en función de un conjunto de **variables de estado** $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ [6].

Vector de Estado: Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el com-

portamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector x , un vector que determina unívocamente el estado del sistema $\mathbf{x}(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geq t_0$, una vez que se conoce el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.

Espacio de estados: Espacio n -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , eje x_2, \dots , eje x_n , donde x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados [8].

Ecuaciones en el espacio de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Donde:

\dot{x} = Vector de estado de primer orden

A = Es una matriz cuadrada de $n \times n$

B = Es una matriz de $n \times 1$

u = Vector de entrada(Escalar) de dimensión m

y = Vector de salida(Escalar)

C = Es una matriz de $1 \times n$

D = Matriz de dimensión (*escalar*)

3.4. Modelo Matemático de Sistemas Eléctricos

Para modelizar el sistema se usará una red de circuitos usando inductores, capacitores, resistencias, fuente de voltaje y un Motor de CD. Desde luego el desarrollo matemático está basado en la Metodología de Bond Graph, aplicando la técnica de la Matriz de Estructura de Unión, posteriormente su modelo matemático en variables de espacio de estado, siendo una opción de estudio, en donde los problemas presentados que se tratarán a continuación, son exclusivamente sistemas en causalidad Integral, para posteriormente presentar los casos de estudio en el Capítulo 4, la simulación de modelos en 20-sim usando el esquema en Bond Graph y los resultados de la implementación física, este desarrollo muestra las opciones de trabajar desde diferentes perspectivas.

3.4.1. Desarrollo teórico Circuito-1

Como inicio de este capítulo se tomará un problema seleccionado, con el que se trabajará siendo particularmente un circuito mixto simple, conformado por los elementos I, C, R y una fuente de voltaje mostrado en la figura 3.1.

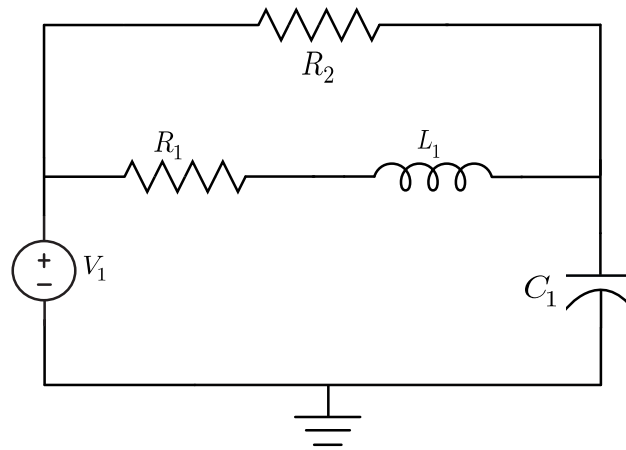


Figura 3.1: Diagrama eléctrico circuito mixto simple.

A partir del modelo eléctrico anterior, se tiene representado ahora en Bond Graph con causalidad asignada en la siguiente figura 3.2, muestra la enumeración correspondiente y la dirección de las variables de flujo y esfuerzo.

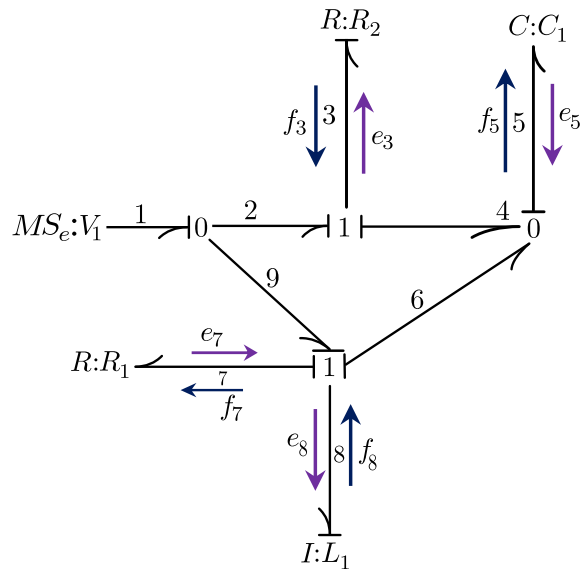


Figura 3.2: Bond Graph simplificado con causalidad asignada y numeración arbitraria.

Luego se inicia con la obtención de variables de salida y entrada para cada uno de los vectores.

Vectores clave

Con $u = e_1$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_3 \\ f_7 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} f_3 \\ e_7 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} q_5 \\ p_8 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} f_5 \\ e_8 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_5 \\ f_8 \end{bmatrix}$$

Relaciones constitutivas

Obteniendo la diagonal L , por las matrices D_{out} y D_{in} a partir de la ecuación (2.31) del capítulo anterior.

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ e_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ f_7 \end{bmatrix}; L = \text{diag}\left\{\frac{1}{R_2}, R_1\right\}.$$

Encontrando la diagonal F , para las matrices ya conocidas z y x de acuerdo a la ecuación (2.29).

$$\begin{bmatrix} e_5 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 \\ p_8 \end{bmatrix}; L = \text{diag}\left\{\frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_1}\right\}.$$

Rellenar de acuerdo a la ecuación (2.34), para la matriz de estructura de unión de 0 y 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

A continuación, se rellena la matriz S :

$$\begin{bmatrix} f_5 \\ f_8 \\ e_3 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_8 \\ f_3 \\ e_7 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Se completan los elementos individuales de la matriz S , localizando los elementos activos para las incógnitas a encontrar en: f_5, f_8, e_3 y f_7 en base al orden la matriz anterior, buscando las relaciones en la figura 3.2 si el enlace es inactivo se busca a uno activo sea f o e en consideración a la definición *unión-0* y *unión-1*. En analogía con la Ley de corriente y voltaje de Kirchoff visto en el Capítulo 2.

Fila-1 Unión-0 ||

$$e_4 = e_6 = e_5$$

$$f_5 = f_4 + f_6$$

$$f_5 = f_3 + f_8$$

Fila-3 Unión-1 serie

$$f_2 = f_3 = f_4$$

$$e_3 = e_2 - e_4$$

$$e_3 = e_1 - e_5$$

Fila-2 Unión-1 serie

$$f_9 = f_7 = f_8 = f_6$$

$$e_8 = e_9 - e_7 - e_6$$

$$e_8 = e_1 - e_7 - e_5$$

Fila-4 Unión-0 ||

$$f_9 = f_8 = f_6 = f_7$$

$$f_7 = f_8$$

Ecuaciones de estado para A, B

Identificando las submatrices, previamente para la operación matricial:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En relación a las ecuaciones obtenidas anteriormente: (2.42) y (2.43), se opera matricialmente para llegar a la siguiente ecuación en espacio de estado:

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F$$

$$B = (S_{13} + S_{12}MS_{23})$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{L_1} \\ -\frac{1}{C_1} & -\frac{R_1}{L_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.1)$$

Para la ecuación que la describe (2.35), queda definida finalmente de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_5 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{L_1} \\ -\frac{1}{C_1} & -\frac{R_1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_5 \\ p_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3.4.2. Desarrollo teórico Circuito-2

Como segundo problema se tiene ahora un circuito eléctrico mixto más grande y que consta de dos elementos capacitivos, el resto son disipativos de la misma manera se tiene una fuente de tensión, mostrado en la figura 3.3.

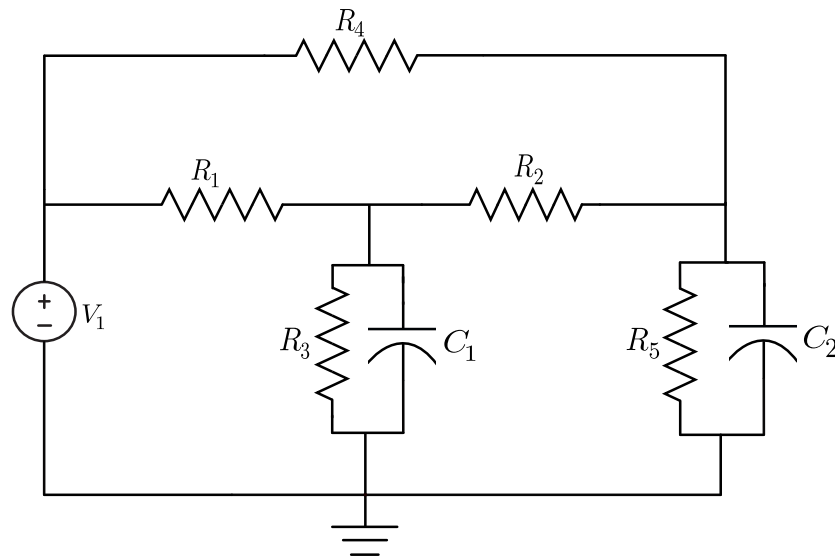


Figura 3.3: Esquema eléctrico con elementos disipadores y capacitivos.

Se presenta a continuación el modelo reducido en Bond Graph con causalidad, dirección asignada para cada variable de esfuerzo y flujo en los elementos activos:

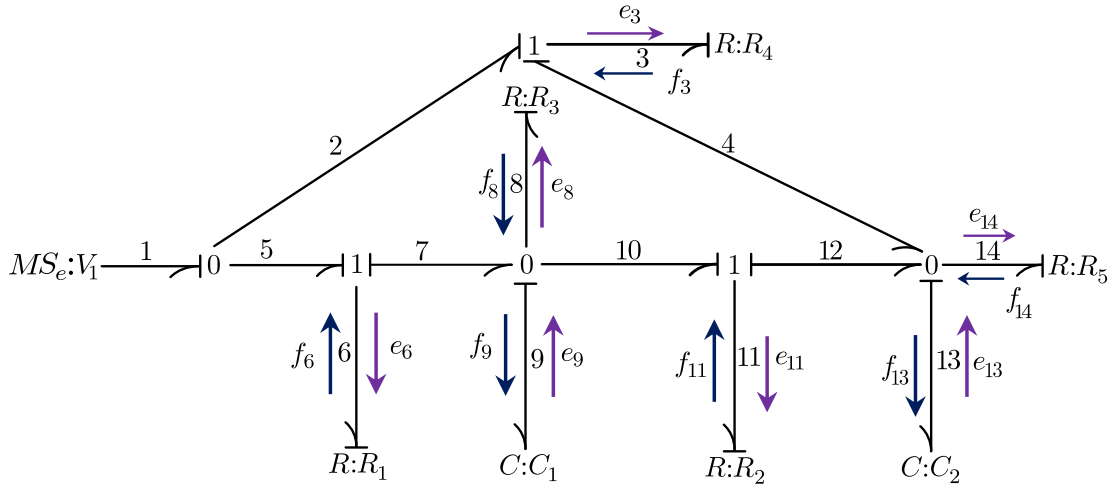


Figura 3.4: Modelo simplificado en Bond Graph con causalidad.

Obteniendo los vectores a partir de las variables de entrada y salida, en las uniones ya sean disipadores o de almacenamiento de acuerdo a la figura 3.4

Vectores clave

Obteniendo el vector de entrada: $u = e_1$

Para las variables de entrada y salida en los enlaces D_{in} y D_{out} .

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_6 \\ e_8 \\ e_{11} \\ e_{14} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_6 \\ f_8 \\ f_{11} \\ f_{14} \end{bmatrix}$$

Luego encontrando: x, \dot{x}, z :

$$x = \begin{bmatrix} q_9 \\ q_{13} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_9 \\ f_{13} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_9 \\ e_{13} \end{bmatrix}$$

Relaciones constitutivas

Obteniendo la diagonal L , por las matrices D_{out} y D_{in} a partir de la ecuación (2.31).

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_6 \\ f_8 \\ f_{11} \\ f_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_6 \\ e_8 \\ e_{11} \\ e_{14} \end{bmatrix}; L = \text{diag}\left\{\frac{1}{R_4}, \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_3}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_5}\right\}.$$

Encontrando la diagonal F , en las matrices conocidas z y x de acuerdo a la ecuación (2.29).

$$\begin{bmatrix} e_9 \\ e_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_9 \\ q_{13} \end{bmatrix}; L = \text{diag}\left\{\frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_3}\right\}.$$

Rellenando de acuerdo a la ecuación (2.34) para la matriz S , de estructura de unión para cada elemento:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

A continuación, se rellena la matriz S :

$$\begin{bmatrix} f_9 \\ f_{13} \\ e_3 \\ e_6 \\ e_8 \\ e_{11} \\ e_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ \hline 0 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_9 \\ e_{13} \\ f_3 \\ f_6 \\ f_8 \\ f_{11} \\ f_{14} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Completando los elementos individuales de la matriz S , y localizando los elementos activos para las incógnitas a encontrar en: $f_9, f_{13}, e_3, e_6, e_8, e_{11}$ y e_{14} en base al orden la matriz anterior, buscando las relaciones en la figura 3.4 siguiendo la misma regla anterior, si los enlaces son inactivos se busca a uno activo sea f o e .

F1 Unión-0 ||

$$e_7 = e_8 = e_9 = e_{10}$$

$$f_9 = f_7 - f_8 - f_{10}$$

$$f_9 = f_6 - f_8 - f_{11}$$

F2 Unión-0 ||

$$e_{12} = e_{14} = e_4 = e_{13}$$

$$f_{13} = f_4 + f_{12} - f_{14}$$

$$f_{13} = f_3 + f_{11} - f_{14}$$

F3 Unión-1 serie

$$f_2 = f_3 = f_4$$

$$e_3 = e_2 - e_4$$

$$e_3 = e_1 - e_{13}$$

F4 Unión-1 serie

$$f_5 = f_7 = f_6$$

$$e_6 = e_5 - e_7$$

$$e_6 = e_1 - e_9$$

F5 Unión-0 ||

$$e_8 = e_7 = e_9 = e_{10}$$

$$e_8 = e_9$$

F6 Unión-1 Serie

$$f_{10} = f_{11} = f_{12}$$

$$e_{11} = e_{10} - e_{12}$$

$$e_{11} = e_9 - e_{13}$$

F7 Unión-0 ||

$$e_{14} = e_{12} = e_{13}$$

$$e_{14} = e_{13}$$

Ecuaciones de estado para A, B

Identificando las submatrices previamente para la operación matricial:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} S_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.42) y (2.43), se opera matricialmente para obtener la ecuación en espacio de estado:

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F$$

$$B = (S_{13} + S_{12}MS_{23})$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_2} \right) \\ \frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{C_2} \left(-\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_5} \right) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} u \quad (3.3)$$

Para la ecuación que la describe (2.35), queda definida finalmente de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_9 \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_2} \right) \\ \frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{C_2} \left(-\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_5} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.4.3. Desarrollo teórico de un Motor CD

Finalmente para este modelo se plantea un problema formado por un motor de CD, de excitación separada presentado de forma básica para su estudio.

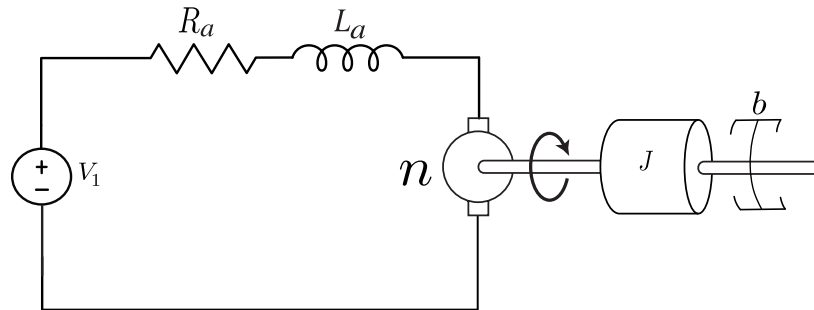


Figura 3.5: Diagrama eléctrico de un Motor CD

Modelo eléctrico transformado a Bond Graph con causalidad y dirección asignada, para cada variable en los elementos activos del Motor de CD mostrado en la figura 3.6 que continuación es el siguiente:

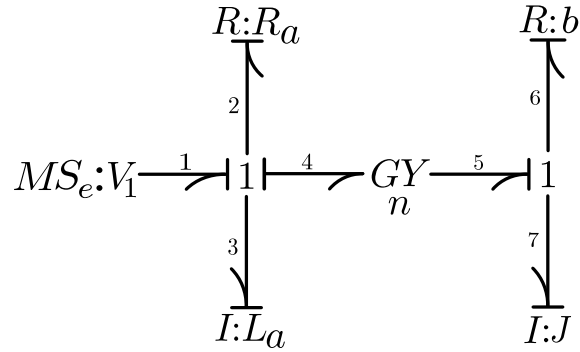


Figura 3.6: Modelo simplificado en Bond Graph con causalidad del Motor CD.

Vectores clave

Con un vector de entrada $u = e_1$

En los elementos de disipacion R , b (Coeficiente de rozamiento) y de almacenamiento C , I y J (Momento de Inercia en el eje del Motor).

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

Relaciones constitutivas

Obteniendo la diagonal L , por las matrices D_{out} y D_{in} a partir de la ecuación (2.31).

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; L = \text{diag}\{R_a, b\}.$$

Encontrando la diagonal F , en las matrices conocidas z y x de la ecuación (2.29).

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix}; F = \text{diag}\left\{\frac{1}{L_a}, \frac{1}{J}\right\}.$$

Por la ecuación (2.34), se determina la matriz S de estructura de unión para cada elemento:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Generando la dimensión de la matriz S :

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \\ f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n & -1 & 0 & 1 \\ n & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \\ e_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Agregando los valores en las celdas individuales de la matriz S , y localizando los elementos activos para las incógnitas a encontrar en: e_3 , e_7 , f_2 y f_6 siguiendo el mismo orden, ubicando las relaciones en la figura 3.6 con la misma regla en los enlaces si estos son inactivos se busca a uno activo sea f o e .

Como el problema es diferente a los anteriores se tiene ahora un elemento nuevo como: un motor, por lo que para definir las ecuaciones será en relación entorno al girador, en las celdas individuales en la matriz S mostrado en el arreglo matricial por lo que es denotado por un índice n como constante, por esa razón es necesario encontrar la relación de dicho elemento y el resto del procedimiento es lo mismo.

Relación de transformación del girador obtenida de acuerdo a la dirección de la causalidad de la figura 3.6. La relación de entrada y salida es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

de la misma manera operando matricialmente (3.5), se encuentran las ecuaciones siguientes:

$$e_4 = n \cdot f_5 \quad (3.6)$$

$$f_4 = e_5 \cdot \frac{1}{n} \quad (3.7)$$

F1 Unión-1 serie

$f_1 = f_2 = f_3 = f_4$ se tienen flujos iguales

$e_1 - e_2 - e_3 - e_4 = 0$ expresando en término de esfuerzos de la figura 3.6 y despejando e_3

$e_3 = e_1 - e_2 - e_4$ reemplazando e_4 por uno activo de la ecuación (3.6)

$e_3 = e_1 - e_2 - n f_5$ nuevamente f_5 es un enlace libre se busca un remplazo

$e_3 = e_1 - e_2 - n f_7$ cambiando f_5 por uno activo que es f_7

$e_3 = e_1 - e_2 - n f_7$

F2 Unión-1 serie

$f_5 = f_6 = f_7$ Con flujos iguales

$e_5 - e_6 - e_7 = 0$ despejando e_7

$e_7 = e_5 - e_6$ Como e_5 es un bond inactivo, por lo que se busca uno activo

$e_7 = f_4 n - e_6$ reemplazando de la ecuación (3.7)

$e_7 = f_4 n - e_6$ luego f_4 es enlace simple se reemplaza por uno activo en f_3

$e_7 = f_3 n - e_6$

F3 Unión-1 serie

$f_1 = f_2 = f_3 = f_4$ Los flujos son iguales

$f_2 = f_3$ Localizando la incógnita en f_3

F4 Unión-1 serie

$f_5 = f_6 = f_7$ De la misma forma con flujos iguales

$f_6 = f_7$

Ecuaciones de estado para A, B

Identificando las submatrices previamente para la operación matricial:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} \quad S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.42) y (2.43), se obtiene la ecuación en espacio de estado del modelo del Motor, las salidas en este caso no se consideran, teniendo presente las ecuaciones requeridas para operar los elementos de las submatrices que componen la matriz de estructura de unión:

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F$$

$$B = (S_{13} + S_{12}MS_{23})$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.8)$$

Para la ecuación que la describe (2.35), queda definida finalmente de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_9 \\ e_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.5. Relación descriptiva del Sistema Eléctrico con BG

El enfoque previo al procedimiento de implementación física, que se describirá para esta sección se hace necesario ver la relación descriptiva, con los gráficos de enlaces, si bien el diagrama eléctrico se transformó en ceros y unos, después en arpones usando las reglas de reducción y por último asignándole causalidad a los elementos activos.

Posteriormente en el desarrollo teórico se hallaron las ecuaciones en las filas de la matriz S , a partir de la causalidad, definidas por las variables de entrada y salida en los componentes activos, recordando que la matriz S se formó por los vectores clave y las relaciones constitutivas, usando la metodología de matriz de estructura de unión.

Otorgando así la derivación de recursos valiosos para formar las ecuaciones de estado de forma sistemática, sin que se obtuviera de manera tradicional, tan sólo el hecho de operar matricialmente

sin requerir otros procedimientos más, por esa parte es explícita porque se basa de un tema ya estructurado.

Antes de iniciar con la simulación y la implementación que será tratado en el Capítulo 4, es necesario ver la analogía que existe con los enlaces de ligaduras en su forma equivalente, con los elementos a su forma representativa.

Es decir de manera habitual es familiar trabajar con interpretaciones de simbología en diagrama eléctrico, pero una noción de ver gráficos de enlaces con uniones de ceros y unos o la particularidad en paralelo, serie causarían un poco de confusión en el estudio de BG.

3.5.1. Circuito-1

La manera representativa en que quedaría la implementación previa antes de montar el circuito es mostrado en la figura 3.7, en la que se aprecian las trayectorias de los enlaces de ligaduras unidas a las *uniones-1*, es decir *flujo* que se considera en serie el equivalente que une a R_1 y L_1 , para lo cual concentra a los elementos de un mismo nodo en las áreas rectangulares del esquema, debido a las propiedades de reducción de ahí los arpones son salientes de la *unión-1* apuntando hacia los elementos.

Respecto a las uniones en paralelo estas se concentran en la *unión-0* representadas como variables de *esfuerzo* son iguales, por otra parte es visible que se define la dirección de la potencia, indicada por los arpones emanada al menos por una fuente de esfuerzo.

Las áreas rectangulares indican la unión, lo cual drenan el flujo hasta el área del punto g en referencia a *gnd*.

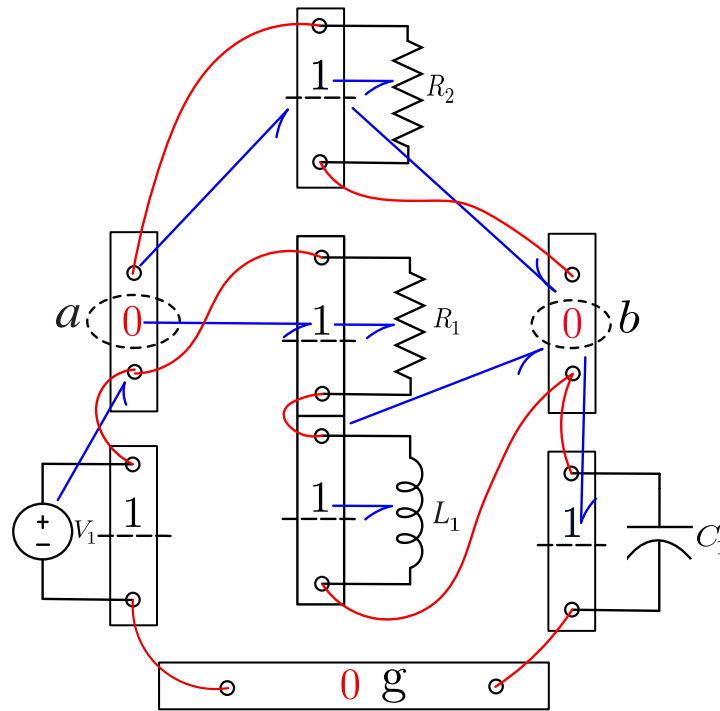


Figura 3.7: Modelo en Bond Graph y su relación con los diagramas icónicos.

3.5.2. Circuito-2

Del mismo problema que el circuito anterior se tiene representado el esquema eléctrico y las ligaduras que relacionan a los elementos activos, respecto a los elementos donde muestra la trayectoria seguida en dirección de la potencia siendo visibles tres nodos a , b y c de la figura 3.8.

Representando a través de las uniones 0 , dado que los elementos identificados como R_3 , C_1 y R_5 junto a C_2 están en paralelo drenados a ground representado por g , los arpones siguen la trayectoria emanada de la fuente de esfuerzo, también se observa que la semiflecha es saliente apuntando a los elementos de esa manera se relaciona el diagrama eléctrico con los enlaces.

Por otra parte dado el caso en elementos en serie no se tienen, es así que la construcción para implementar el circuito es representada con relación a BG.

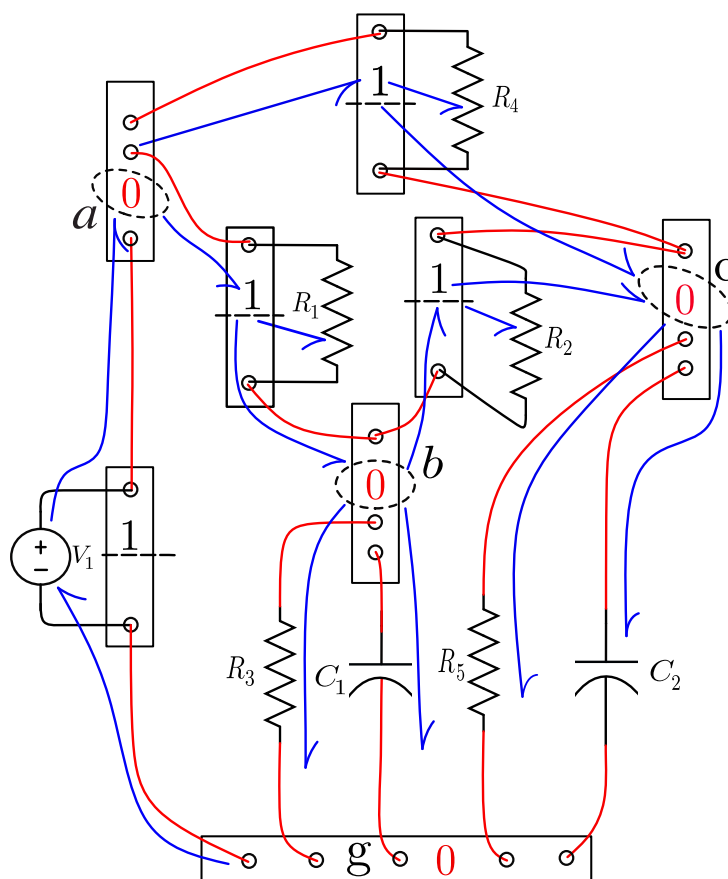


Figura 3.8: Modelo en BG y su representación equivalente al Sistema Eléctrico.

3.5.3. Circuito-3

Para esta última representación se tiene un modelo del motor CD, que cuenta con un esquema de la parte eléctrica y a la misma vez su equivalente en relación a Bond Graph, donde se muestran las dos partes análogas en la figura 3.9.

En la fuente activa V_1 se tiene una *unión*-1, después se une al Nodo A quedando *unión*-0, posteriormente se tienen dos elementos R_a y L_a que están en serie. De ahí que las semiflechas o arpones apuntan a los elementos en su caso indican la dirección del flujo de energía a través de los enlaces que los unen por nodos.

Seguidamente llega un nodo C *unión*-0, de ahí se forma el enlace para el girador que llega a ground, y del mismo girador se tiene un bond saliente que apunta a J y b que están serie por *uniones* - 1, pero que finalmente se reducen aplicando las propiedades de reducción en Bond Graph

siguiendo cuidadosamente los pasos necesarios.

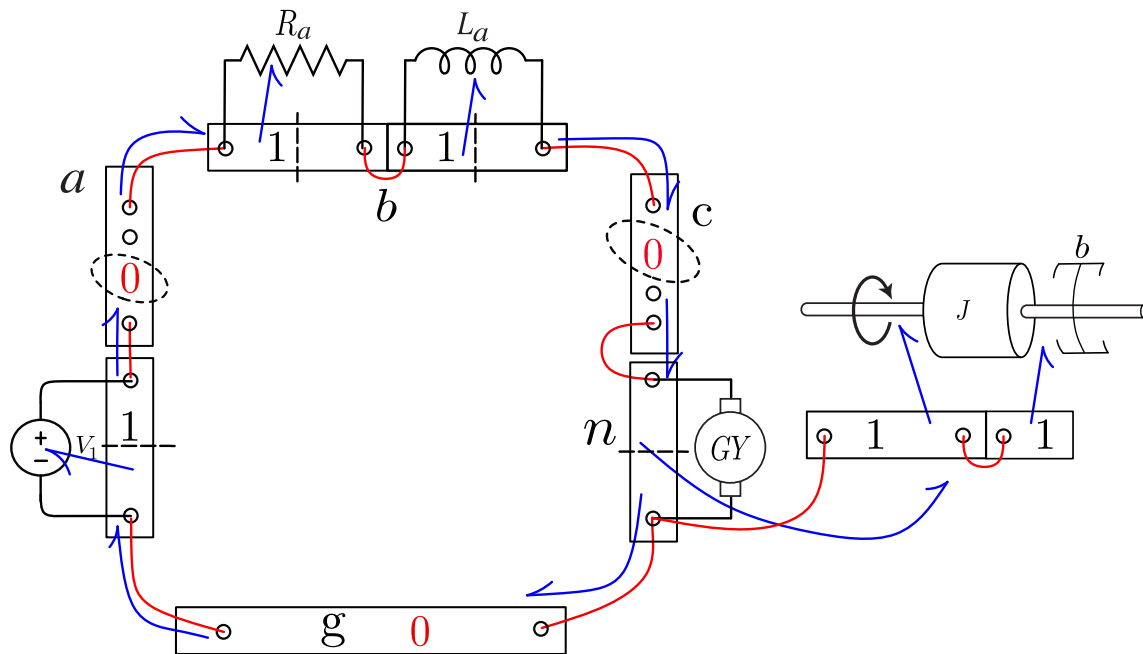


Figura 3.9: Modelo en BG y su representación equivalente al Sistema Eléctrico del Motor CD.

Con esto se concluye la parte descriptiva, para cada uno de los 3 casos de los circuitos presentados en su esquema eléctrico y equivalente en Bond Graph previa, para iniciar la simulación usando 20-sim y la implementación física de los elementos, con ello corroborar las respuestas haciendo uso de Bond Graph tratado en el siguiente Capítulo.

Capítulo 4

Casos de Estudio

4.1. Introducción

La tendencia en la actualidad por mejorar, optimizar o una manera de hacer eficiente cierto proceso de un sistema de la ingeniería relacionado a un campo de estudio, obliga a buscar metodologías para facilitar el estudio de tareas mas complejas optando por simulaciones. Donde implementar pruebas físicas de un sistema en la vida real representaría grandes costes en materiales, por eso aunado a ello se crearon herramientas que significativamente ayuden ahorrar costes gracias al uso de tecnología computacional, se predice el comportamiento del mismo ya que sí fuera el caso no sería posible con la ayuda de las computadoras.

Si a un sistema se excita con una señal de entrada, en consecuencia este reaccione ante un estímulo en cierto periodo transcurrido. Es decir en régimen transitorio o hasta que sea una vez alcanzado al valor permanente por cierto instante de tiempo en alcanzar la estabilidad en la entrada, por eso es de vital importancia ver las similitudes que existan entre un sistema real a uno ideal, dicho resultado será comprobado con un paquete de software que será usado para la simulación de unas de varias redes de circuitos eléctricos.

En este apartado se dará seguimiento especial en el uso del software 20-sim, ya que es una herramienta poderosa y versátil para modelados de sistemas, constatar prácticamente los desarrollos hechos con anterioridad de dicha técnica en BG, razón por la cual se hizo uso de la asignación de causalidad, dando información muy importante para obtener las ecuaciones en espacio de estado, obtenidas anteriormente en el Capítulo 3, dicha técnica es opcional. Por lo que los sistemas tratados se presentarán por casos de estudio, dando validez en las pruebas reales implementadas en las variables

seleccionadas en los elementos de almacenamiento.

4.2. Software de simulación en Bond Graph

4.2.1. ¿Qué es 20-sim?

20-sim (Sus siglas comerciales provienen al origen de la Universidad de Twente del paquete y la región de twente). Es un programa de modelado que permite ver la simulación y análisis de comportamiento para sistemas dinámicos, con aplicaciones: mecatrónicos, eléctricos, hidráulicos, térmicos, etc. Software desarrollado por Controllab Products que trabaja sobre plataforma Windows.

Como dato 20-sim, fue el primer paquete de software lanzado comercialmente para admitir modelado de Bond graph. La primera versión de 20-sim contaba con una biblioteca de gráficos de enlaces que se lanzó en 1995. Desde entonces, se ha hecho un enorme esfuerzo continuo para mejorar el modelado de gráficos de enlaces, siendo ahora 20-sim estándar en el modelado de Bond Graph [7].

Opera sobre una interfaz de modelo gráfico, similar a dibujar un esquema de ingeniería por la forma de elegir componentes de la biblioteca y conectarlos, en la que su esquema de ingeniería se reconstruye, sin entrar en una sola línea de matemáticas. Con estos modelos se puede simular y analizar la respuesta de los sistemas dinámicos multi-dominio y crear sistemas de control. Incluso puede generar código C y ejecutar este código en hardware para prototipado rápido y simulación HIL.

Además, proporciona herramientas que permiten crear modelos de forma muy rápida e intuitiva. Puede crear modelos utilizando ecuaciones, diagramas de bloques, componentes físicos o diagramas icónicos y gráficos de enlaces. Varias cajas de herramientas que ayudan a construir modelos, simularlos y analizar su rendimiento con aplicaciones numerosas en muchas industrias.

Sus características más destacadas son:

- Ofrece la opción de crear modelos con ecuaciones diferenciales y empaquetarlos como elementos de diagramas de bloques o componentes físicos.
- Utiliza un método de integración numérica más avanzada en comprobación y procesamiento para después ser convertido en código máquina.

- Simulador versátil los diagramas se muestran como horizontal y vertical como gráficos basados en tiempo, frecuencia y animaciones 3D.
- Es autocontenido, no requiere software adicional ya que incluye todas las cajas de herramienta en la misma interfaz.

A continuación se presentan las partes que integran 20-sim:

4.2.2. Editor

El editor se utiliza para introducir y editar modelos es la ventana principal de 20-sim, se carga automáticamente cuando 20-sim se inicia, que consta de cuatro partes:

- *Model tab/ Library tab*: La pestaña modelo muestra la jerarquía del modelo, es decir la composición de los elementos, la pestaña de biblioteca muestra las carpetas de ejemplos y conteniendo íconos para el editor gráfico.
- *Graphical Editor/ Equation Editor*: El editor gráfico mostrará el modelo creado y el editor de ecuación mostrará sus ecuaciones que lo rigen.
- *Output tab/ Process tab/ Find tab*: Estas pestañas muestran los archivos que están abiertos y almacenados, el de proceso muestra los mensajes del compilador y el buscar muestra los resultados de búsqueda
- *Interfaz tab/ Icon tab/ Global tab*: La interfaz muestra la entrada, salida y puertos de un modelo seleccionado, la de ícono muestra el modelo en gráfico, y por último la de global mostrará los parámetros globales y las variables del modelo.

4.2.3. Library

Esta pestaña integra carpetas concatenadas de todos los modelos que son visibles en el Explorador de bibliotecas:

4.2.3.1. Library

Esta biblioteca cuenta con los íconos para dibujar esquemas en Bond Graph como uniones o ligaduras, Icon Diagrams para crear un circuito eléctrico y Signal que tiene fuentes generadores de

señal discreta, escalón, funciones de transferencia, ...etc.

4.2.3.2. Examples

Esta carpeta contiene ejemplos en 1D Mechanics, 2D Mechanics, 3D Mechanics, Bond Graph, Control, Drivetrains, Electric Motors, Electrical Networks, Hydraulics, Mathematics, Mechatronics, Rapid prototyping,..etc.

4.2.3.3. Getting Started Manual

Esta guía contiene herramientas que son de gran utilidad, como ejemplos de modelos animados en 3D de estructuras mecánicas. Comprendiendo toda dinámica y cinemática del cuerpo, modelos que van directamente desde un brazo robótico en las articulaciones, así como acople de resortes, amortiguadores, engranes.

Donde cada cuerpo puede ser cambiado a una esfera, un bloque, un cilindro, entre otras más, estos ejemplos facilitan al usuario familiarizarse con los componentes en realizar dichas tareas conteniendo: 3D Mechanics, Animation Toolbox, Block Diagrams, Bond Graphs, Frequency Domain Toolbox, Iconic Diagrams, Mechatronics Toolbox, Time Domain Toolbox.

4.2.4. Simulador

Permite ver las respuestas de dicho sistema con ciertos parámetros de interés del sistema que se desea simular, esta ventana por lo general se genera de manera independiente del editor como la que se puede apreciar en la figura 4.2.

Ejemplo incluido en la librería de la sección carpeta concatenada:

Examples/1D Mechanics/MachineDynamics en el software 20-sim, en la que se muestra un modelo típico de una máquina, con varios elementos que lo integran describiendo su comportamiento dinámico en un modelo simple en la figura 4.1.

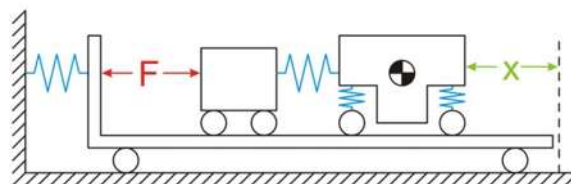


Figura 4.1: Esbozo de Ingeniería.

El modelo completo por componentes de dicha estructura que conforman todo el sistema dinámico se muestra en la figura 4.2, donde se observa que la primera ventana del fondo es el editor gráfico, que se usa para ingresar y editar modelos y la segunda ventana es el simulador [7].

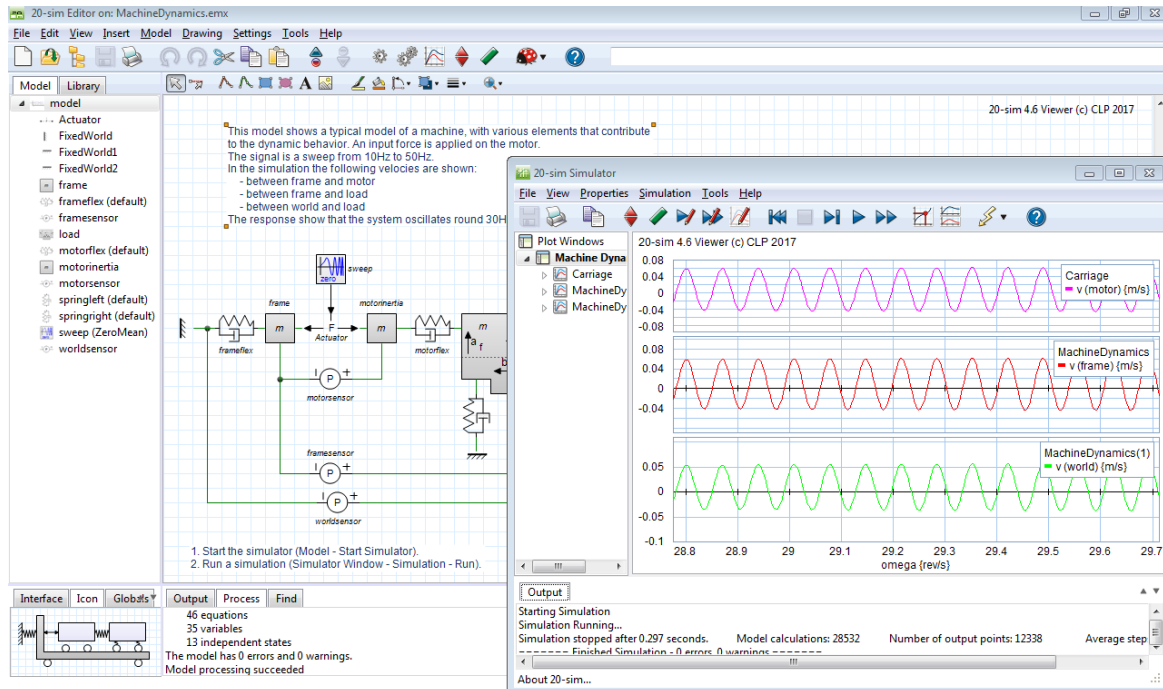


Figura 4.2: Representación directa de un modelo de Máquinas dinámicas y su simulación en 20-sim 4.6 Demo.

4.3. Caso de Estudio 1

Para iniciar con el presente apartado, se presenta el esquema del sistema completo del circuito-1 de segundo orden en el software que se empleará en Bond Graph, lo cual de este primer circuito fue base de estudio en el anterior Capítulo-3 en el que se desarrolló la parte teórica empleando la técnica o la metodología de la Matriz de Estructura de Unión. Y posteriormente se derivaron las ecuaciones de estado para las matrices A,B, lo que sigue ahora es considerar que en la simulación en 20-sim, teniendo ya su modelado en Bond Graph, con causalidad asignada y tomando en cuenta a los elementos en causalidad integral, será comprobar previamente con valores de los elementos que a continuación se mostrarán en la siguiente tabla 4.1.

Tabla 4.1: Valores de los elementos I, C, R y V_1 .

Circuito-1					
Elementos	V_1	C_1	R_1	R_2	L_1
Parámetros	10 <i>volts</i>	100 μF	56 Ω	100 Ω	4.827 <i>mH</i>

Las consideraciones necesarias para llevar a cabo la simulación será incluir en la fuente una señal externa. Lo que significa que estará dependiendo de una entrada que se agregará, para efectos de estudio como un interruptor accionado durante lapso de tiempo muy pequeño para ver la señal, es incluir un bloque escalón, siendo así una fuente modulada o controlada por una señal externa de la que se aprecia en la figura 4.4.

Configuración inicial del bloque escalón, se indica en la figura 4.3.

```

parameters
  real amplitude = 10.0;
  real start_time = 1.0 {s};
variables
  boolean hidden change;
equations
  "calculate at least at the start time"
  change = timeevent (start_time);
  "calculate the step signal"
  output = amplitude * step (start_time);

```

Figura 4.3: Parámetros del bloque Step en 20-sim.

4.3.1. Representación en 20-sim

La señal modulada configurada para la fuente mostrada en la figura 4.3, es de una amplitud de 10 con paso de tiempo de 1s sin embargo también del esquema en 20-sim. Se observa que para simular se requieren los trazos causales necesariamente ya que indican la relación de las variables de estado y la dirección de la potencia en los enlaces de uniones 1 y 0. Y que a manera tradicional de costumbre se realiza con elementos icónicos en otros simuladores Multisim, Proteus, Orcad Pspice y 20-sim, también lo hace de la misma manera teniendo lo suyo, lo que resalta la relevancia de los enlaces de unión. Por consiguiente se tiene su Modelo eléctrico representado en Bond Graph causal:

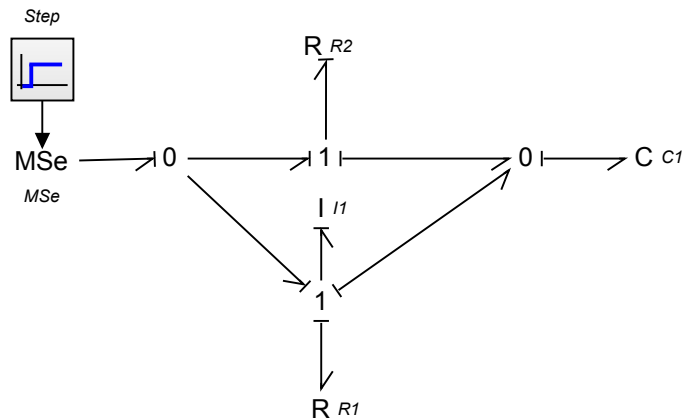


Figura 4.4: Modelo Circuito-1 bosquejado en 20-sim.

4.3.1.1. Resultado de la Simulación

La simulación obtenida de las dos gráficas de la figura 4.5 en C_1 y L_1 . Se aprecia el comportamiento de la señal de respuesta obtenida, seleccionando la variable de carga del capacitor de la primer gráfica es decir, que para la variable de esfuerzo inicialmente crece hasta estabilizarse a un valor constante casi en 10 a un tiempo de 526 ms, mientras que en la Gráfica-2 la variable flujo, crece a un valor máximo con una corriente de 0.166 A con 500 ms en el inductor, después se observa la decadencia en el intervalo de tiempo hasta ser prácticamente cero.

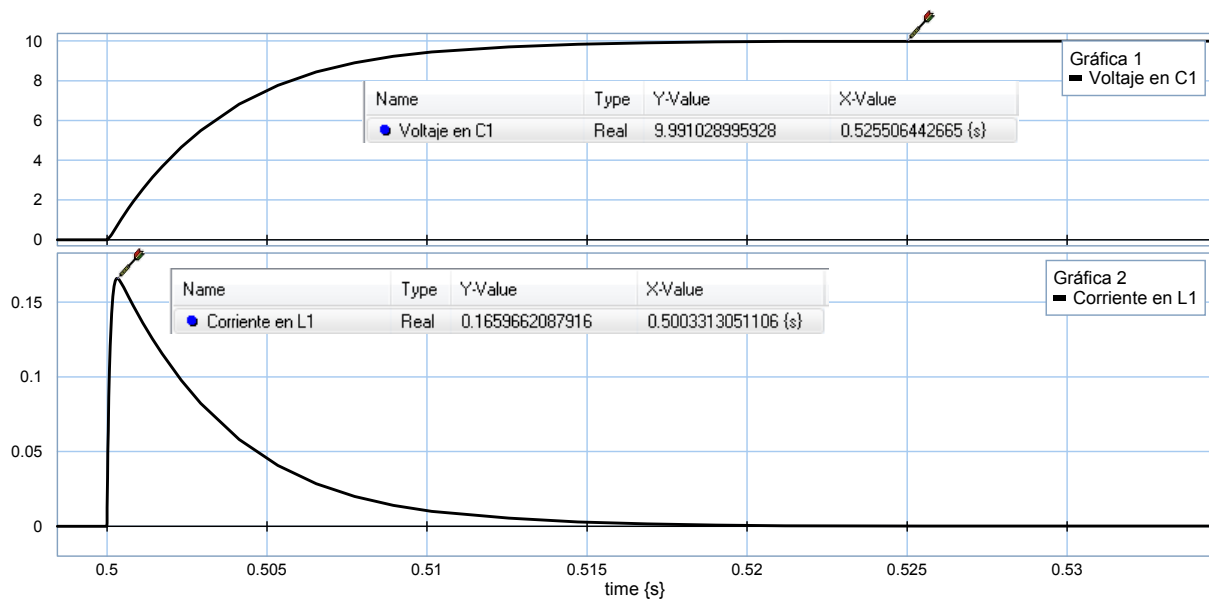


Figura 4.5: Simulación del circuito-1: en C_1 y L_1 .

Lo que significa constatar que la respuesta sucede a un tiempo muy rápido y no tan lento, eso tiene que ver con los valores de los elemento elegidos, y recordar que un inductor se comporta como un cortocircuito en corriente continua y de la misma vez la frecuencia de esta, en CD es cero.

Por otra parte, para conseguir la respuesta de la señal de corriente en i_{L_1} , del inductor en el osciloscopio debido a que la naturaleza del mismo no es un medidor de corriente, si no más bien visualiza la señal de la tensión diferencial en cierto elemento, para tal efecto se realiza un procedimiento que no es un truco pero bien funciona, cumplir dicho objetivo. Y que permitirá conocer el valor de la corriente misma, de obtener lo deseado al menos se cubre el interés, para lograrlo consiste en medir la tensión diferencial en la resistencia de V_{R_1} sabiendo que la corriente es la misma en serie, se divide entre el valor de resistencia en este caso que es de 56Ω .

$$I_{R_1max} = \frac{V_{R_1}}{R_1}$$

De acuerdo de la figura 4.6, se tiene un voltaje máximo en 9.29 volts se calcula:

$$I_{R_1max} = \frac{9.29 \text{ v}}{56 \Omega} = 0.165 \text{ A}$$

Lo que resulta evidente que la corriente es la misma en la Gráfica-2, de la figura 4.5 anterior en i_{L_1}

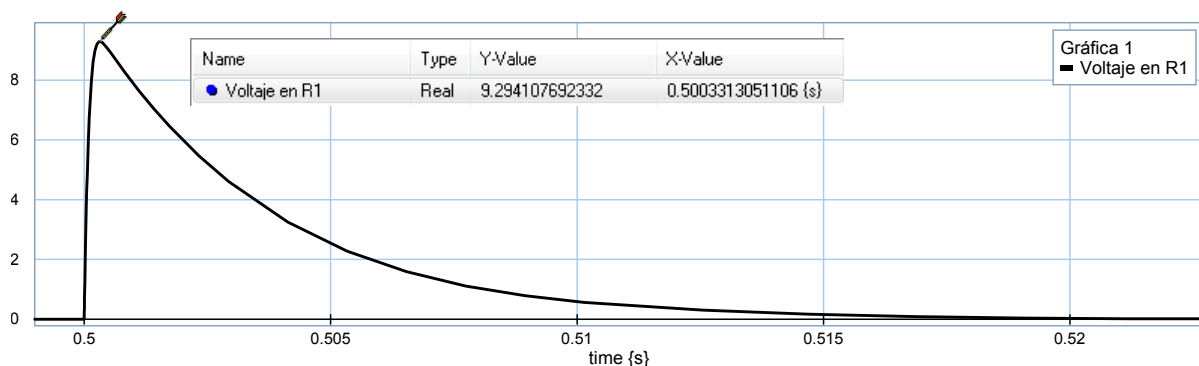


Figura 4.6: Señal de respuesta del transitorio en Voltaje en R_1 .

Por esta razón este cálculo obtenido de I_{R_1max} , servirá como referencia de análisis para dar seguimiento en la implementación física.

4.3.2. Implementación Eléctrica Circuito-1

Ahora sería la comprobación con los elementos reales L, C, R y una fuente regulada, con los parámetros de acuerdo a la tabla 4.1, para llevar a cabo el experimento necesario que se requiere para validar, y ver la diferencia del modelo eléctrico del circuito en Bond Graph simulado anteriormente en 20 sim.

Para tal efecto, se hará uso del mismo método usado para encontrar la corriente en L_1 , obtenida anteriormente.

4.3.2.1. Respuesta Experimental en C y L

Las variables de interés de salida serán a continuación como se muestra en la figura 4.7, la señal obtenida en Osciloscopio Tektronix del voltaje en el capacitor C_1 , muestra como este se carga de un estado transitorio hasta alcanzar el estado estacionario. Teniendo una señal de salida al estabilizarse a 10 volts donde cada cuadro equivale a 2 volts, después de cerrar el interruptor en un instante de tiempo, lo cual se hace evidente que el valor respecto a la simulación en 20-sim, se aprecia que la señal resultante en la implementación es buena.

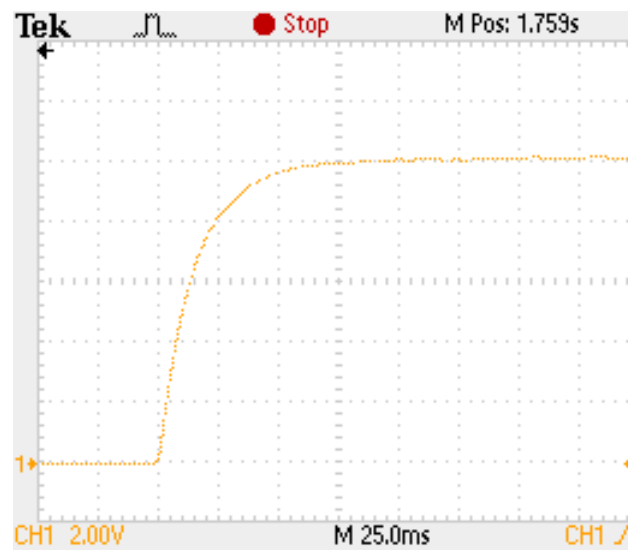


Figura 4.7: Señal de respuesta del transitorio Voltaje en C_1 .

Continuando con el experimento ahora se hallará el valor de la corriente de I_{L_1} , siguiendo el método anterior se encuentra la corriente I_{R_1max} en la resistencia y se calcula de la siguiente manera:

Se tienen 1.16 *v* volts/div. de acuerdo a la figura 4.8, del osciloscopio multiplicado por 6 cuadros sale: 6.96 *volts* de ahí se toma para realizar el cálculo siguiente en esta ocasión:

$$I_{R_1max} = \frac{6.96 \text{ v}}{56 \Omega} = 0.124 \text{ A}$$

Luego como:

$$I_{R_1max} = I_{L_1max}$$

el valor de:

$$I_{L_1max} = 124 \text{ mA}$$

Se debe considerar que hay una caída de tensión en el inductor debido a que posee una resistencia en las vueltas de alambre que es de 6.6 Ω por lo que afecta en parte la corriente del inductor, finalmente la corriente al de la simulación con el real:

$$I_{L_1max} = 0.124 - 0.166 = 0.042 \text{ A}$$

Por lo que hay una diferencia de 42 mA respecto a la simulación, pero si fuera el caso sin la resistencia interna del inductor incrementaría a 140 mA en lugar de los 124 mA, quedaría compensada muy cerca del valor original de la simulación del inductor en 20-sim, con este caso se puede concluir que el valor es aproximado.

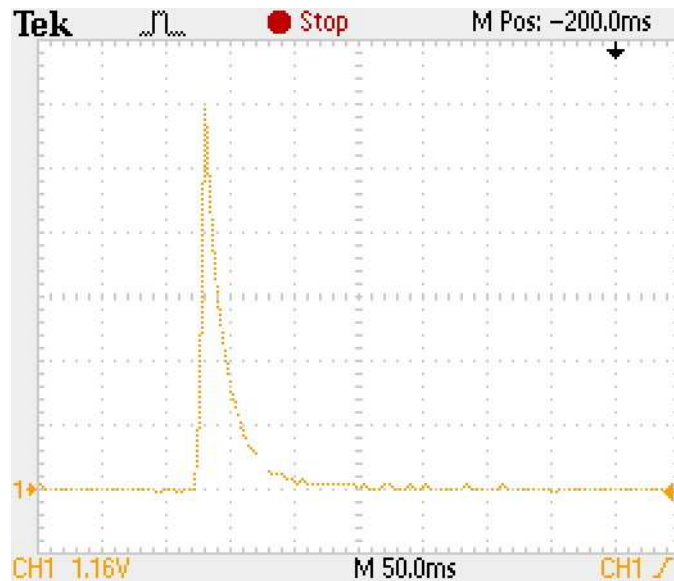


Figura 4.8: Señal de respuesta del Voltaje en R_1 .

De manera general para este caso se concluye que las diferencias a la simulación y de la implementación eléctrica, los resultados son satisfactorios aunque con una diferencia, visto en la corriente del inductor respecto a la caída de tensión afectando la señal de respuesta.

Pero al final influye mucho las tolerancias y por el diseño de los elementos, de esta manera se comprueba la eficiencia de la metodología en Bond Graph en causalidad integral, siendo una herramienta indispensable que va de la mano con 20-sim.

4.4. Caso de Estudio 2

El segundo caso de estudio, es el mismo que el anterior sólo que ahora el sistema es una red más grande de elementos. Siendo de segundo orden por los elementos capacitivos, en el capítulo anterior se desarrollaron las ecuaciones de estado derivando las variables para A y B, y teniendo una vez más el caso con elementos en causalidad integral siendo notorio de manera extensa la matriz, lo que a continuación se procederá a la simulación en software y después la implementación eléctrica

Parámetros elegidos para el Modelo Circuito-2, mostrado a continuación en la siguiente tabla:

Tabla 4.2: Valores de los elementos I, C, R y V_1 .

Circuito-2								
Elementos	V_1	C_1	C_2	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
Parámetros	12 volts	374 μF	22 μF	80 Ω	40 Ω	3 k Ω	60 Ω	90 Ω

El bloque step2 para este circuito-2, tendrá un paso de tiempo de 1 s con una amplitud de 12 para realizar la simulación

4.4.1. Representación en 20-sim

Muestra la simplificación del esquema con las ligaduras en causalidad asignada, con su respectiva dirección del flujo de potencia, acoplada a una señal modulada en el software 20-sim en la siguiente figura 4.9.

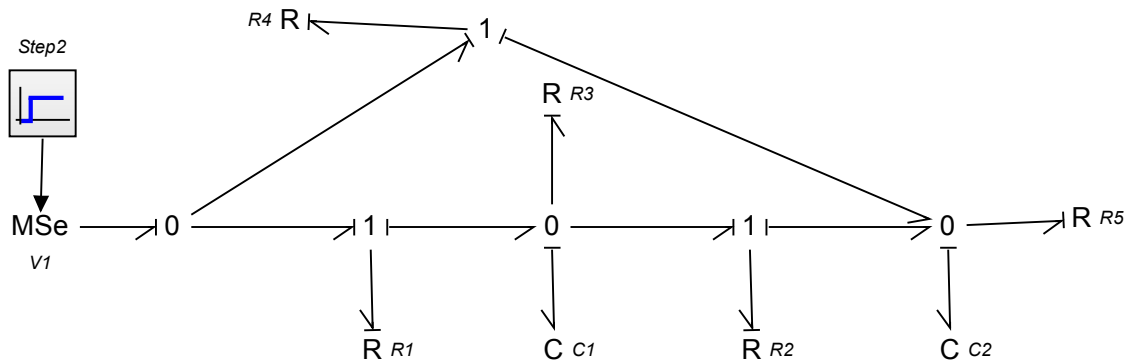


Figura 4.9: Modelo Circuito-2 red con elementos C y R.

4.4.1.1. Resultado de la Simulación

Las gráficas obtenidas del modelo eléctrico son de segundo orden, por contener dos elementos de almacenamiento se muestran en conjunto dos simulaciones para las variables de interés elegidas. En esta ocasión siendo para los elementos de almacenamiento tomados en C_1 y C_2 de la figura 4.10.

En la primera gráfica superior es notorio que el valor del transitorio crece en forma exponencial hasta quedar constante o en estado permanente, teniendo un circuito abierto totalmente cargado después de un cierto instante de tiempo inicial hasta un valor constante, justo después de accionar el interruptor con un tiempo de 50 ms con un valor a 9.41 volts .

Siguiendo con la segunda gráfica de la parte inferior, se observa que el comportamiento es el mismo teniendo un crecimiento suave. Hasta alcanzar un valor estable de 8.24 volts , de esa manera la simulación basada en el software, muestra una tendencia al usar señal de excitación externa de amplitud de 12. Donde la carga de los elementos no supera la tensión nominal, alcanzados por cada uno de los capacitores.

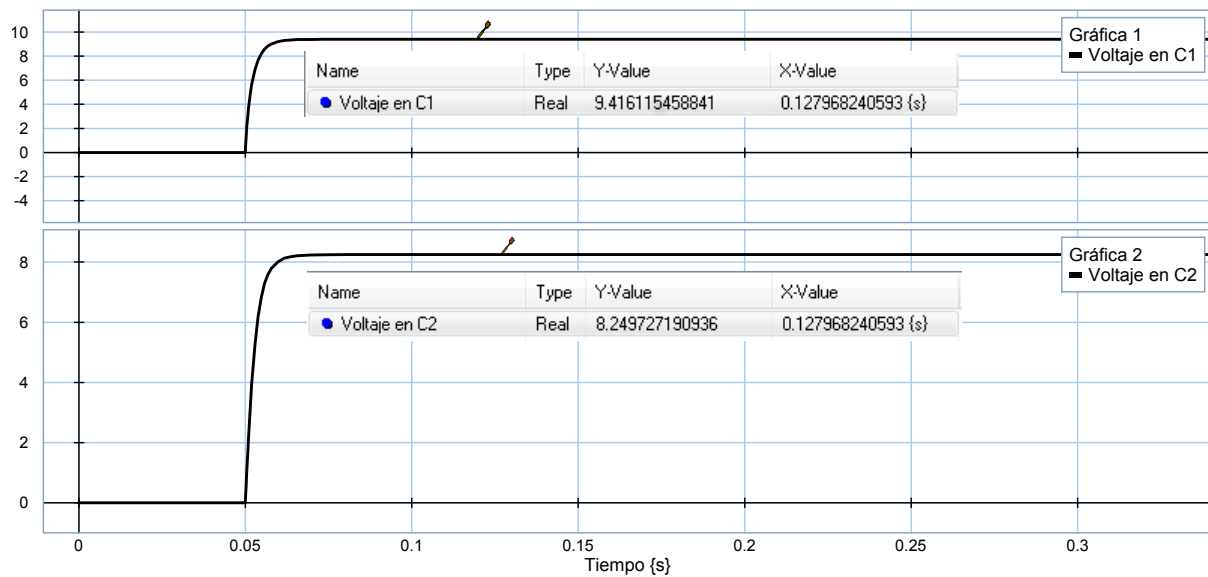


Figura 4.10: Simulación del circuito-2 respuesta escalon en C_1 y C_2 .

4.4.2. Implementación Eléctrica Circuito-2

Lo que sigue será la implementación física, corresponde montar los elementos para alimentarlos a una fuente de tensión regulada de 12 *volts*, para lograr los resultados de interés que se tiene con la simulación, lo que también es importante mencionar que en el estudio de circuitos RC.

Que la tensión no puede cambiar abruptamente en el capacitor durante el tiempo de la carga, es decir que no puede tener una subida instantánea, si no que toma cierto tiempo temporal la cuál se estabilizará en un tiempo, alcanzando el estado estable y de cierta manera una tensión continua del capacitor, esta se comporta como circuito abierto.

4.4.2.1. Resultado Experimental en los elementos C

Los resultados obtenidos del osciloscopio son los mostrados a continuación en la figura 4.11, se observa que la tensión alcanzada en C_1 después de cerrar el interruptor en un instante tiempo.

La carga del capacitor crece plenamente no tan uniforme, esta vez hasta tener un voltaje de 9.28 *volts* estable lo que para cada cuadro del osciloscopio, representa una factor multiplicador de 1.60 *volts* respectivamente el valor es aproximado al de la simulación que fue de 9.41 *volts*.

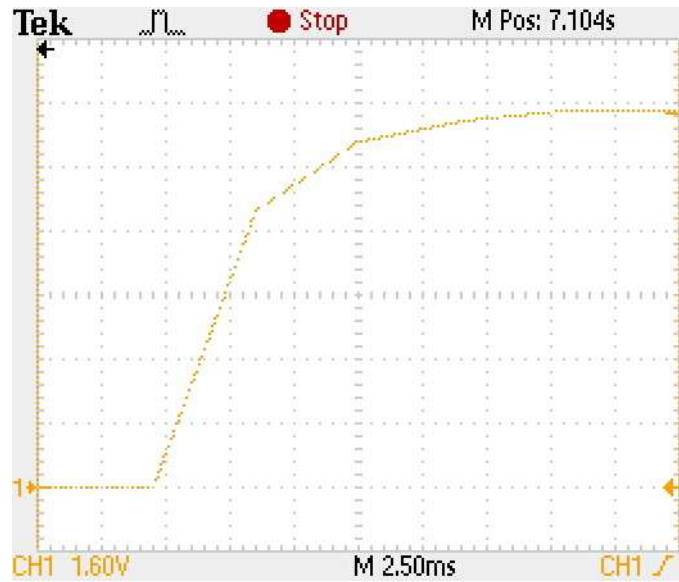


Figura 4.11: Señal de respuesta del transitorio en Voltaje de C_1 .

Del segundo resultado del osciloscopio de la figura 4.12 se tiene que la tensión tomada del capacitor en C_2 de la misma forma su transitorio crece suavemente hasta alcanzar un régimen estable de 8 volts lo que para este circuito difiere al de la simulación obtenida anteriormente es aproximada.

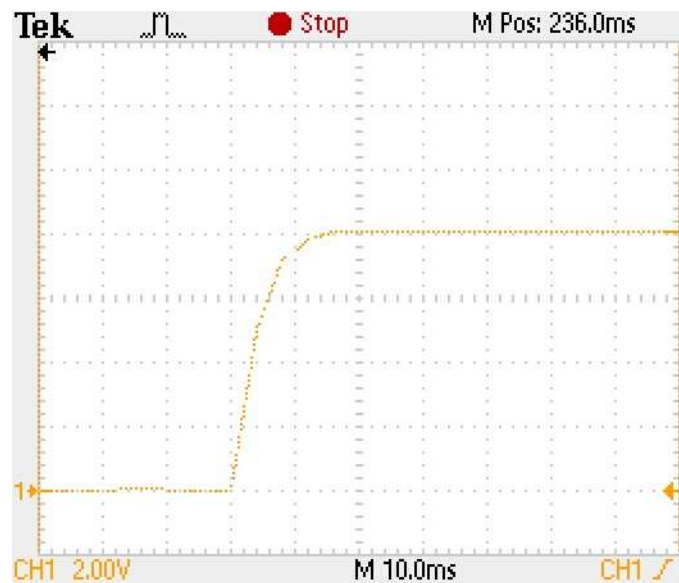


Figura 4.12: Señal de respuesta del transitorio en Voltaje de C_2 .

4.5. Caso de Estudio 3

Para este último caso se implementa el caso de un motor de CD, en su representación de manera estándar, para fines de estudio, de excitación independiente controlado por armadura teniendo como dos partes; que consta de la parte eléctrica y la parte mecánica.

Lo cual se considerarán con parámetros ya caracterizados del motor donde la prueba será sin carga, es decir al vacío sin ningún objeto de arrastre que afecte la flecha del rotor. Que servirá para comprobar las características operativas del modelo en su comportamiento dinámico equivalente en Bond Graph, y posteriormente en la simulación usando el software 20-sim.

Para ello el desarrollo de esta validación se tomarán en cuenta como selección el uso de un motor de CD de la marca Indiana General, con una tensión nominal de operación máxima a 24 *volts* que se muestra a continuación en la figura 4.13, para dicho objetivo se trabajará sólo con 12 *volts*.

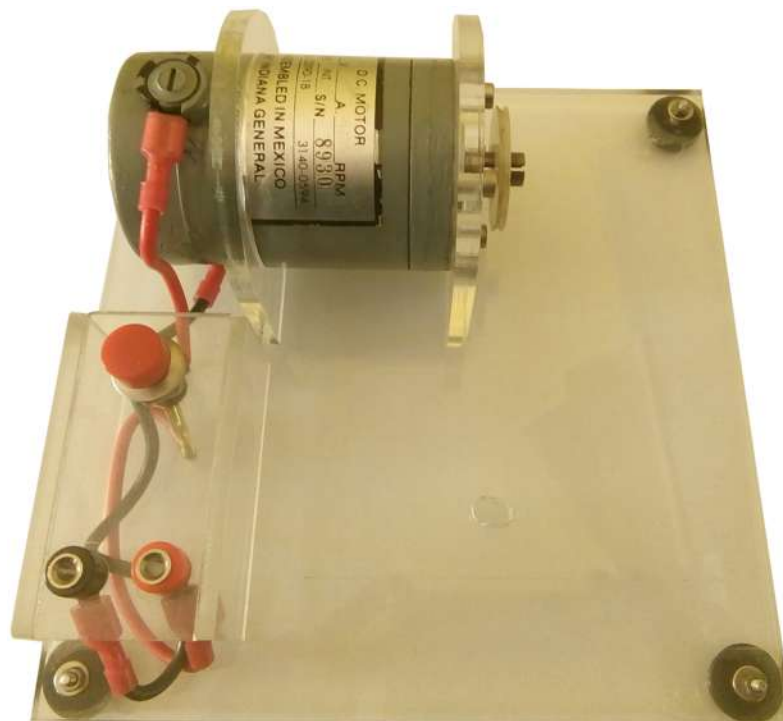


Figura 4.13: Motor usado para la implementación física marca Indiana General.

Para encontrar el valor de la inductancia L_a y resistencia de armadura R_a , se utilizó un medidor digital LCR meter esto sin alimentar el motor de esta manera la medición realizada fue de 12Ω con una inductancia de 1.15 mH , apreciándose una toma en la siguiente figura 4.14.

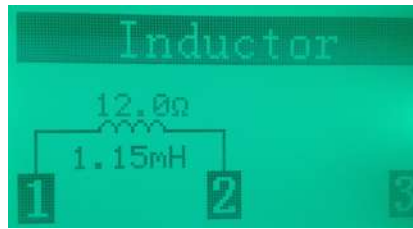


Figura 4.14: Valor medido de la inductancia y resistencia de armadura del Motor CD.

Luego para la parte de la velocidad a 12 *volts* nominales, se obtuvo de la medición con un tacómetro digital por contacto obteniéndose una velocidad aproximada de 1964 RPM siendo equivalente a 205.67 *rad/s*.



Figura 4.15: Velocidad en RPM obtenido del tacómetro digital del Motor CD a 12 volts.

En estas condiciones los valores medidos se agregan como parte en los parámetros para las variables asociadas de importancia. Parámetros elegidos para el Modelo Circuito-3 mostrado a continuación en la siguiente tabla:

Tabla 4.3: Valores de los elementos para el motor de CD.

Circuito-3		
Elementos	Valores	unidades
R_a	12	Ω
L_a	1.15	<i>mH</i>
n	0.052511404	$k_e(V \cdot s/rad) = k_m(N \cdot m/A)$
J	$2.297872696 \times 10^{-6}$	$kg \cdot m^2$
b	$2.553192198 \times 10^{-5}$	$N \cdot m \cdot s/rad$
V_1	12	<i>volts</i>

Donde a cada variable representado se define de la siguiente forma:

R_a	= Resistencia de armadura
L_a	= Inductancia de armadura
k_e	= Constante eléctrica
k_m	= Constante mecánica
J	= Constante de Inercia
b	= Constante de fricción viscosa
V_1	= Tensión aplicada

4.5.1. Representación en 20-sim

Para iniciar el modelado de simulación en 20-sim, donde previamente ya se conocen los valores de los variables asociadas al motor de CD, serán los parámetros que se usarán para ver la respuesta dinámica en su comportamiento.

El esquema que se muestra a continuación equivalente en Bond Graph, en el software es el siguiente que se observa en la figura 4.16, se nota que la fuente modulada de excitación que se le agregará será la misma, que los casos anteriores siendo una señal escalón con un valor de 12, donde para este problema se tiene desarrollado sólo en causalidad Integral.

Para la parte del girador la relación n , relaciona las constantes k_e , k_m de la parte eléctrica y para la parte mecánica serán iguales, estos valores serán válidos sólo si la corriente se mantiene constante durante la operación del motor.

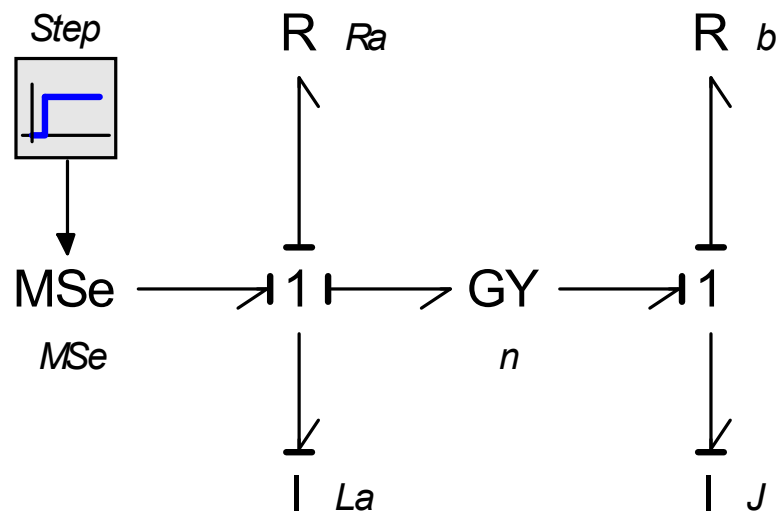


Figura 4.16: Representación del motor en 20-sim

4.5.1.1. Resultado de la simulación

Para continuar con la simulación las variables que se usarán para ver la respuesta de señales de interés, serán las variables de $i_{L_a=R_a}$ con ello observar los resultados de la respuesta de la corriente, y para la velocidad se tomará en la variable J para conocer entonces su estado estacionario.

Se puede observar que al correr la simulación en la figura 4.17, se tienen dos señales de respuesta seleccionadas, la primera pertenece a la corriente que circula en la armadura del motor, donde es notorio que al momento de accionar el interruptor se eleva la corriente $i_{L_a=R_a}$.

A un pico máximo de 964 mA después, empieza a decrecer exponencialmente hasta ser constante en ese instante de tiempo llegando a consumir 100 mA .

Siguiendo con la descripción, ahora para la parte de la velocidad de un momento inicial, antes de romper la inercia del eje del motor se requiere la fuerza contraelectromotriz requerida para iniciar el giro del rotor, lo que seguidamente sucede después al aplicar la tensión, en ese momento aumenta gradualmente la velocidad hasta alcanzar su estado estacionario con un valor de 205.3 rad/s

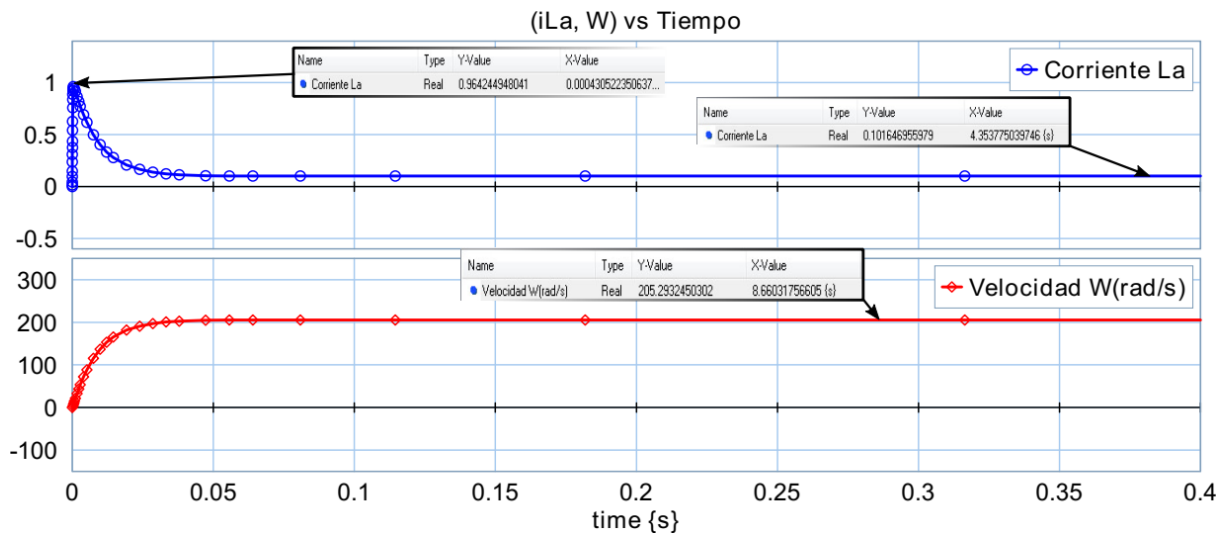


Figura 4.17: Respuesta de señal del motor CD en 20-sim.

4.5.2. Implementación Eléctrica Circuito-3

Lo que resta después de todo, será ahora encontrar las señales de respuesta natural del motor implementado físicamente, para ello se usará una sonda sensor de corriente OTC, que se conectará directamente al osciloscopio fluke industrial

Y así lograr que la señal de corriente se aprecie mucho mejor desde luego contando con una fuente de 12 *volts*. todo lo descrito se puede observar en la siguiente figura 4.18.



Figura 4.18: Implementación física.

4.5.2.1. Resultado Experimental

Como resultado la implementación física llevada a cabo, sin antes iniciar para definir la señal de corriente en el osciloscopio de la sonda de corriente, con una escala seleccionada 1 *mv*/10 *mA* para observarlo en dicha pantalla.

De la figura 4.19, se observa que la señal obtenida en el canal A pertenece al escalón de tensión de alimentación, para el motor con un valor de aproximado a 12 *volts* con 5 *V/div*, y para el canal B es la señal obtenida de la corriente de armadura.

En la que se puede apreciar, que el pico máximo de corriente se alcanza a 900 *mA* con 50 *mV/d*, aproximados luego decrece hasta quedar constante a 110 *mA*, comparándose así a la señal anterior obtenida de la simulación en 20-sim.

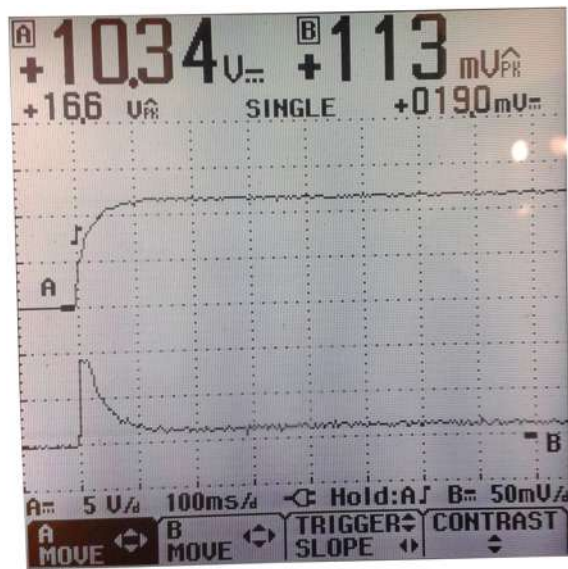


Figura 4.19: Señal escalón obtenida del motor en canal A y Corriente $i_{L_a=R_a}$ del canal B.

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

Para esta investigación realizada, se presentaron inicialmente las bases teóricas de modelado en Bond Graph, que desde luego se inició con las propiedades importantes en que está basada, estructurada y reglas que la componen.

Ya que la metodología es una opción para explotar las herramientas, en el estudio y análisis de trabajar en problemas, para la obtención de modelos de sistemas dinámicos físicos de amplio campo.

Por decirlo así el tan sólo hecho de ser sobresaliente, en la derivación de ecuaciones de estado, sobre todo la causalidad y la relación muy estrecha que guarda, con la matriz de estructura de unión de manera consistente, porque permitió obtener información indispensable.

Sobre todo, en las variables de estado que fueron útiles para la construcción al trabajar con la matriz S , a lo que de manera tradicional se realiza en forma distinta en control clásico, al obtener las ecuaciones de estado, siendo útil de comprobar y aprovechar las ventajas propias de las herramientas, que ofrece Bond Graph para modelado de sistemas dinámicos.

Con dicho conocimiento, permitiría en sí abordar problemas simples hasta lo más complejo, que se pueda presentar para un estudio más avanzado.

Como objetivo presentado de la tesis, estas ventajas se aprovecharon para contribuir en la implementación física, particularmente en los sistemas eléctricos con tres casos para validar las respuestas al modelarlos. Desde luego obtenido del modelo gráfico, permitiendo así el conocer su comportamiento y así mismo, la comparación de los resultados en cada uno de los casos presentados, donde previamente se hizo el desarrollo matemático y la derivación de ecuaciones en espacio de estado, en

la parte teórica de los circuitos propuestos.

Posteriormente, se hizo uso del software en 20-sim para modelar sistemas gráficos, simplificados en causalidad de Bond Graph, como prueba final al validar los resultados ideales y los reales de acuerdo a los valores propuestos, con parámetros elegidos para cada caso.

Lo que permitió conocer entonces los resultados esperados, demostrando ser eficiente y competente en las simulaciones, incursionándose una vez más, como una alternativa más al incluir Bond Graph.

De lo que normalmente otros simuladores no ofrecen, pero que el propósito de la tesis fue tratado de manera superficial, no profundizándose muy a fondo para estudio a detalle, como el caso del motor de CD, en la que varios factores y también variables habrían influido en su comportamiento o funcionamiento.

Pero aunado a ello sólo se usó Bond Graph, de manera demostrativa en el tratamiento en modelado de sistemas dinámicos.

5.2. Recomendaciones

De todo lo realizado para esta investigación, se pretende que sea sustento de base y fruto deseable para derivar a más profundidad, sobre todo en las ecuaciones en espacio de estado en comprobar por ejemplo: en Matlab la construcción del sistema por bloques usando simulink, a la vez programarlo y por último la caracterización del motor.

Considerando otras variables a más detalle, como sumar cargas en el eje del motor, con engranes de arrastre, se produciría así una perturbación más que cambiaría el comportamiento.

En el modelado del motor de CD a su manera simple, la otra podría ser la implementación física para unirlo con convertidores, una práctica común de control por variación de voltaje, y para demostrar también el uso de transformadores en dicha técnica de Bond Graph.

Para finalizar, se recomienda aprovechar las ventajas al máximo que tiene 20-sim, como un software de modelado de sistemas dinámicos.

Bibliografía

- [1] Raquel Sarahí Rodríguez Angulo, *Diseño de Controladores en Bond Graph para Sistemas LTI*, Master's thesis, UMSNH, Especialidad Ciencias en Ingeniería Eléctrica, División de Estudios de Posgrado, 2010.
- [2] Dr. Gilberto González Avalos, *Curso Modelado de Sistemas en el Dominio Físico*, Notas para Estudiantes, UMSNH, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Especialidad en Control, Maestría en Ingeniería Eléctrica, 2007.
- [3] Peter C Breedveld, *Modeling and Simulation of Dynamic Systems Using Bond Graphs*, Oxford, UK: Eolss Publishers, 2008.
- [4] Mayra Yadira Herrera Contreras, *Retroalimentación de Estado de Sistemas Singularmente Perturbados en un Enfoque de Bond Graph*, Master's thesis, UMSNH, Especialidad Sistemas de Control, División de Estudios de Posgrado, 2014.
- [5] S. Das, *Mechatronic Modeling and Simulation Using Bond Graphs*, CRC Press, 2009.
- [6] Richard Dorf and Robert Bishop, *Sistemas de Control Moderno*, Décima ed., Pearson Educación, 2005.
- [7] Ir. M. A. Groothuis Ir. C. Kleijn, *Getting Started with 20-sim 4.6*, 2017.
- [8] Ogata Katsuhiko, *Ingeniería de Control Moderna*, Quinta ed., Editorial Prentice Hall, 2010.
- [9] Benjamin C Kuo, *Sistemas de Control Automático*, Séptima ed., Pearson Educación, 1996.
- [10] J. Kypuros, *System Dynamics and Control with Bond Graph Modeling*, CRC Press, 2013.

-
- [11] Matthew Alexander Sadiku, *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*, Mc Graw Hill, 2006.
- [12] Octavio Barriga Torres, *Modelado y Control de una Central Eléctrica Hidroeléctrica Sujeta a Vibraciones en la Turbina en el Dominio Físico*, Master's thesis, UMSNH, Especialidad Ciencias en Ingeniería Eléctrica, División de Estudios de Posgrado, 2008.
- [13] Joel Abraham González Vieyra, *Modelado y Análisis de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo en un Enfoque de Bond Graph*, Master's thesis, UMSNH, Especialidad Sistemas de Control, División de Estudios de Posgrado, 2014.