



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA

TRABAJO DE TESIS
SIMULACIÓN DE SISTEMAS MODELADOS
EN BOND GRAPH

PARA OBTENER EL GRADO DE:
INGENIERO EN COMPUTACIÓN

PRESENTA:
MARIA DEL SOCORRO ARROYO CERVANTES

ASESOR DE TESIS:
DOCTOR EN INGENIERÍA
DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

MORELIA, MICHOACÁN

MARZO DE 2018.



Dedicatoria:

El presente trabajo de tesis está dedicado especialmente a mis padres Reynaldo y Lucina que me han formado con buenos sentimientos, hábitos y valores, lo cual me ha ayudado a salir adelante en los momentos más difíciles.

A mi hermano Roberto que siempre ha estado junto a mí bríndame su apoyo, ya que ha sido un ejemplo a seguir adelante.

A mi familia en general, porque me han brindado su apoyo incondicional y compartir conmigo buenos y malos momentos.

A todas las personas cercanas que me han apoyado durante este proceso de desarrollo, gracias por su apoyo.

Agradecimientos

Primeramente agradezco a Dios por haberme otorgado una familia maravillosa, quienes han creído en mí siempre, dándome su ejemplo de superación, humildad y enseñándome a valorar todo lo que tengo.

Agradezco a la UMSNH la cual me ha brindado grandes cosas, siendo parte de ella, para poder estudiar mi carrera, así como también agradezco a los diferentes docentes que me brindaron sus conocimientos y apoyo para seguir adelante día a día.

Agradezco también a mi asesor de tesis, el Dr. Gilberto González Avalos, por haberme brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento científico, así como también por haberme tenido toda la paciencia del mundo para guiarme durante todo el desarrollo de la tesis.

Agradezco a mi profesor, Ing. Ignacio Franco Torres quien se ha tomado el tiempo de transmitirme sus diversos conocimientos, especialmente del campo y de los temas que corresponde a mi profesión.

A todos los que fueron mis amigos y compañeros de clase durante todos los niveles de la Licenciatura, gracias por el compañerismo, amistad y apoyo moral que me han brindado.

Resumen

Una de las técnicas que simplifica el desarrollo y la obtención de modelos matemáticos es la técnica de modelado llamada Bond Graph, esta técnica nos reduce el tiempo que tardamos en obtener las ecuaciones del modelo matemático de un sistema, es más sencilla de comprender y de aplicar, ya que tomamos un sistema físico y lo representamos gráficamente.

En el presente trabajo de tesis, la aplicación de la técnica de Bond Graph nos permitirá modelar sistemas de Bond Graph con lazos algebraicos $S_{22} \neq 0$ y por medio de la Estructura Union propuesta poder construir un nuevo Bond Graph sin lazos algebraicos $S_{22} = 0$ y determinar que ambos sistemas son equivalentes, además utilizaremos una herramienta de software llamada 20-sim.

20-sim es un software que nos permite modelar sistemas físicos en Bond Graph, además de que puede ser visual, podemos entender y simular el comportamiento del sistema por medio de la transferencia de energía a través de los diferentes elementos del sistema, así obteniendo los resultados del análisis sobre la respuesta que tiene el sistema.

Palabras claves: Bond Graph, Matriz de Estructura Unión, simulación de sistema, sistema con lazos algebraicos, sistema sin lazos algebraicos.

Abstract

One of the techniques that simplifies the development and obtaining of mathematical models is the modeling technique called Bond Graph, this technique reduces the time it takes us to obtain the equations of the mathematical model of a system, it is easier to understand and apply, since we take a physical system and represent it graphically.

In this thesis work, the application of the Bond Graph technique will allow us to model Bond Graph systems with algebraic bonds $S_{22} \neq 0$ and through the proposed Union Structure Matrix, to be able to construct a new Bond Graph without algebraic ties $S_{22} = 0$ and determine that both systems are equivalent, in addition we will use a software tool called 20-Sim.

20-Sim is a software that allows us to model physical systems in Bond Graph, besides that it can be visual, we can understand and simulate the behavior of the systems through the transfer of energy through the different elements of the systems, thus obtaining the results of the analysis on the response that the system has.

Keywords: Bond Graph, Union Structure Matrix, system simulation, system with algebraic ties, system without algebraic ties.

Índice General

Dedicatoria:	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Índice General	V
Índice de Figuras	VIII
Índice de Tablas	IX
Lista de Abreviaturas y Símbolos	X

CAPITULO 1 Introducción	1
1.1 Simulación de sistemas	1
1.2 Objetivo	1
1.3 Justificación	2
1.4 Metodología	2
1.5 Contenido de la Tesis	2

CAPITULO 2 Modelado de Sistemas en Bond Graph	4
2.1 Introducción	4
2.2 Elementos Básicos de Bond Graph	5
2.2.1 Puertos-1 Pasivos	7
2.2.2 Puertos-1 Activos o Fuentes	9
2.2.3 Elementos Ideales Puertos-2	10
2.2.3.1 Transformador (GY)	10
2.2.3.2 Girador (GY)	11
2.2.4 Puertos-3: Elementos de Unión	11

2.3	Causalidad.....	13
2.4	Causalidad Derivativa en Bond Graph.....	15
2.5	Procedimiento para el Modelado de Sistemas	16
 CAPITULO 3 Simulación de Sistemas en Bond Graph.....		18
3.1	Introducción	18
3.2	Estructura Unión en Sistemas Multipuerto	18
3.2.1	Vectores clave.....	19
3.2.2	Relaciones Constitutivas y Ecuación de Estado	20
3.2.3	Procedimiento para obtener la Estructura de Unión de un Modelo en Bond Graph	24
3.3	Modelado de Sistemas en Bond Graph sin Lazos Algebraicos	25
3.3.1	Vectores Clave	25
3.3.2	Relaciones constitutivas.....	26
3.3.3	Matriz de Estructura Unión.....	27
3.3.4	Ecuaciones de Estado.....	28
 CAPITULO 4 Solución al Problema de Lazos Algebraicos		32
4.1	Introducción.....	32
4.1.1	Orden causal Ruta cero	33
4.1.2	Estructura Unión de un BGI	35
4.2	Solución a los lazos algebraicos	36
4.3	Casos de estudio.....	38
4.3.1	Ejemplo 1.	38
4.3.2	Ejemplo 2.	43
4.3.3	Ejemplo 3.	48

CAPITULO 5	55
Conclusiones y Recomendaciones	55
5.1 Conclusiones	55
5.2 Recomendaciones	56
Bibliografía.....	57

Índice de Figuras

Figura 2.1	<i>Representación de un Bond</i>	<i>5</i>
Figura 2.2	<i>Representación de un Bond con las variables de potencia.....</i>	<i>6</i>
Figura 2.3	<i>Representación del elemento R.....</i>	<i>7</i>
Figura 2.4	<i>Representación del elemento C.</i>	<i>7</i>
Figura 2.5	<i>Representación del elemento I.....</i>	<i>8</i>
Figura 2.6	<i>Tetraedro de estado.....</i>	<i>9</i>
Figura 2.7	<i>a) Fuente de esfuerzo; b) Fuente de flujo.</i>	<i>9</i>
Figura 2.8	<i>Representación del transformador en Bond Graph.....</i>	<i>10</i>
Figura 2.9	<i>Representación en Bond Graph de un Girador (GY).</i>	<i>11</i>
Figura 2.10	<i>Unión-0 para la conexión en paralelo.....</i>	<i>12</i>
Figura 2.11	<i>Unión-1 para la conexión en serie.</i>	<i>12</i>
Figura 2.12	<i>Representación en un “bond” del trazo causal.</i>	<i>13</i>
Figura 2.13	<i>Circuito eléctrico con causalidad derivativa.....</i>	<i>15</i>
Figura 2.14	<i>Elemento C2 con causalidad derivativa.</i>	<i>16</i>
Figura 2.15	<i>Reglas de simplicación.</i>	<i>17</i>
Figura 3.1	<i>Diagrama de la Estructura Unión de un Bond Graph.</i>	<i>19</i>
Figura 3.2	<i>Modelo de Bond Graph de sistema eléctrico.....</i>	<i>25</i>
Figura 4.1	<i>Bond Graph con orden causal de orden cero clase 1.....</i>	<i>34</i>
Figura 4.2	<i>Bond Graph con orden causal de orden cero clase 2.....</i>	<i>34</i>
Figura 4.3	<i>BGI con dos lazos algebraicos</i>	<i>38</i>
Figura 4.4	<i>BGI-R del ejemplo 1</i>	<i>40</i>
Figura 4.5	<i>Resultados obtenidos de la simulación del Ejemplo 1.....</i>	<i>42</i>
Figura 4.6	<i>BGI con un lazo algebraico.....</i>	<i>43</i>
Figura 4.7	<i>BGI-R del ejemplo 2</i>	<i>45</i>
Figura 4.8	<i>Resultados obtenidos de la simulación del Ejemplo 2.....</i>	<i>47</i>
Figura 4.9	<i>BGI con tres lazos algebraicos.....</i>	<i>48</i>
Figura 4.10	<i>BGI-R del ejemplo 3</i>	<i>51</i>
Figura 4.11	<i>a) Simulación de las inductancias del Ejemplo 3.</i>	<i>53</i>
Figura 4.11	<i>b) Simulación del capacitor del Ejemplo 3.....</i>	<i>54</i>

Índice de Tablas

Tabla 2.1	<i>Variables generalizadas para sistemas físicos</i>	<i>6</i>
Tabla 2.2	<i>Puertos Pasivos</i>	<i>8</i>
Tabla 2.3	<i>Condiciones de causalidad para elementos en Bond Graph.</i>	<i>14</i>

Lista de Abreviaturas y Símbolos

Abreviatura	Significado
$A(t), B(t), C(t), D(t)$	Matriz de estado
C	Capacitancia
D	Detectores
$e(t)$	Esfuerzo
$f(t)$	Flujo
GY	Girador
I	Inductor
MSe	Fuente de esfuerzo modulado
MSf	Fuente de flujo modulado
$p(t)$	Variable de momento
$q(t)$	Variable de desplazamiento
R	Resistencia
$S(t)$	Matriz de estructura unión
TF	Transformador
$u(t)$	Vector de entrada del sistema
$x(t)$	Vector de estados asociados a elementos en causalidad integral
$y(t)$	Vector de salida del sistema
$z(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad integral
0	Unión 0
1	Unión 1

CAPITULO 1

Introducción

1.1 Simulación de sistemas

La palabra *sistema* tiene muchos significados, algunos de los cuales no tienen lugar a una discusión científica. Un sistema es un conjunto de objetos, junto con las relaciones entre los objetos y entre sus atributos.

El estudio y diseño de sistemas físicos puede ser llevado a cabo usando métodos empíricos. Los métodos empíricos pueden ser inviables si los sistemas físicos son complejos, extensos o peligrosos para realizar experimentos.

El estudio analítico de sistemas físicos consiste en cuatro partes:

- ✓ Modelado
- ✓ Desarrollo de la descripción matemática
- ✓ Análisis
- ✓ Diseño

1.2 Objetivo

El objetivo del presente trabajo es simular diversos sistemas a través de la plataforma de modelado llamada Bond Graph, para obtener el modelo matemático que permita analizar y obtener el comportamiento de dichos sistemas. Así, poder determinar de qué manera se comporta el sistema de acuerdo a Bond Graph.

1.3 Justificación

El utilizar la técnica de modelado de Bond Graph desarrollado por el profesor Henry Martyn Paynter, tiene como finalidad obtener un modelo matemático de los diversos sistemas y realizar la simulación de ellos y a si determinar qué tipo de sistema es, ya sea un sistema sin lazos algebraicos $S_{22} = 0$, o un sistema con lazos algebraicos $S_{22} \neq 0$.

Y una vez que determinamos con qué tipo de sistema nos encontramos, en el caso de un sistema con lazos algebraicos $S_{22} \neq 0$ poder llegar por medio de su Matriz de Estructura Unión a un nuevo sistema propuesto sin lazos algebraicos $S_{22} = 0$ y concluir que ambos son equivalentes.

1.4 Metodología

- Método de modelado Bond Graph.
- Aplicación del método a los sistemas
- Obtener resultados de los sistemas.

1.5 Contenido de la Tesis

El desarrollo del presente trabajo de tesis titulado “Simulación de Sistemas Modelados en Bond Graph” consta de cinco capítulos, estructurados de la siguiente manera.

Capítulo 1: Muestra una breve introducción sobre el contenido general de la tesis, para mostrar el porqué del presente trabajo de tesis.

Capítulo 2: Hace una referencia a los antecedentes y conceptos básicos que se requieren en Bond Graph. También, explica el modelado de sistemas físicos en el método de Bond Graph como son sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

Capítulo 3: Titulado “Simulación de Sistemas en Bond Graph”, contiene el análisis de los sistemas sin lazos algebraicos $S_{22} = 0$ a partir del modelado en Bond Graph.

Capítulo 4: En este capítulo se realiza el análisis de un sistema con lazos algebraicos $S_{22} \neq 0$, el cual se describirá paso a paso para por medio de la técnica de modelado de Bond Graph obtener las ecuaciones matemáticas del sistema, una vez obtenido el modelo se dará una solución al problema de lazos algebraicos, y el cual se simulará en el software 20-sim para obtener su comportamiento.

Capítulo 5: En este capítulo se darán una serie de conclusiones, recomendaciones y comentarios finales sobre los resultados obtenidos.

CAPITULO 2

Modelado de Sistemas en Bond Graph

2.1 Introducción

Hoy en día, se ha vuelto cada vez más importante la necesidad del modelado y la simulación en el proceso de diseño y análisis de sistemas dinámicos, ya que con la simulación de un sistema podemos obtener el comportamiento de dicho sistema, y por tanto podemos obtener información crítica sin la necesidad de tener un prototipo de prueba, el cual tiene un costo mayor que el desarrollo de la simulación del mismo.

Bond Graph es un método que se comenzó a desarrollar para el modelado de sistemas dinámicos y fue creado por Henry M. Paynter en 1961 profesor del MIT, más tarde desarrollado por Karnopp and Rosenberg (1968, 1975, 1983), también por Thomas (1975) y Van Dixhoorn (1982), esencialmente en casos donde existía interacción entre sistemas mecánicos, hidráulicos, eléctricos y térmicos.

El profesor Henry M. Paynter, dio la idea de interpretar los sistemas en términos de bonds de potencia, conectando a los elementos del sistema físico a modelar por uniones. El intercambio de potencia entre los elementos del sistema interactúa con puertos de energía formando un esquema gráfico llamado modelo en Bond Graph.

Mediante este enfoque, un sistema físico puede ser representado por los símbolos y las líneas de identificación de las rutas de flujo de potencia. Los elementos de parámetros de la resistencia, la capacitancia, e inductancia, la conservación de energía por los lazos y las uniones están interconectados de tal manera que resulta una estructura de red.

2.2 Elementos Básicos de Bond Graph

Bond Graph es una representación de un sistema dinámico donde se relacionan una colección de componentes que interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes en el sistema describen como fluye la potencia a través del sistema.

El componente fundamental en la técnica de modelado de Bond Graph es el *Bond*, el cual se representa mediante una semiflecha como se muestra en la Figura 2.1, que representa el flujo de potencia entre sistemas y los elementos del sistema. La dirección de la semiflecha indica la dirección del flujo de potencia.

La potencia que varía en el tiempo se representa por un Bond en particular y es expresada por el producto de dos variables:

- El esfuerzo $e(t)$
- El flujo $f(t)$

Siendo estas dos variables en función de tiempo dando como resultado la ecuación 2.1.

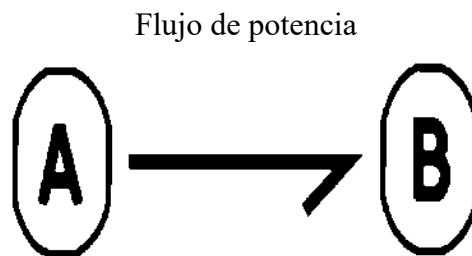


Figura 2.1 Representación de un Bond

$$\text{Potencia} = e(t) * f(t) \quad (2.1)$$

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamadas variables de energía, denominadas *momento* $p(t)$ o *esfuerzo acumulado* $e_a(t)$ y *desplazamiento* $q(t)$ o *flujo acumulado* $f_a(t)$. Se denominan $p(t)$ y $q(t)$ variables dinámicas.

El comportamiento de la energía se muestra en la Figura 2.2 con respecto al esfuerzo y flujo de potencia.

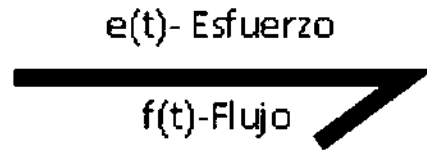


Figura 2.2 Representación de un Bond con las variables de potencia.

A continuación en la Tabla 2.1 se muestran las variables generalizadas que se utilizan en Bond Graph para representar el modelado de sistemas eléctricos, hidráulicos y mecánicos.

Tabla 2.1 Variables generalizadas para sistemas físicos

Variable	General	Eléctrico	Mecánico Traslacional	Mecánico rotacional	Hidráulico
Esfuerzo	$E(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad	$\omega(t)$ Velocidad angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$p(t) = \int e(t)dt$	$\lambda(t)$ Enlace de flujo	$P_r(t)$ Momento rotacional	$H(t)$ Momento angular	$P_p(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t)dt$	$q(t)$ Carga	$X(t)$ Distancia	$\theta(t)$ Angulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$p(t) = e(t)i(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p)dp$ $E(q) = \int e(q)dq$	$\int i(\lambda)dp$ $\int e dq$	$\int V(P_R)dp$ $\int F(x)dq$	$\int \omega(H)dH$ $\int \tau(\theta)d\theta$	$\int Q(P_p)dP_p$ $\int P_e(V)dV$

Para la representación de un sistema, utilizando la técnica de Bond Graph primero es necesario conocer los elementos propios de esta técnica, para lo cual, existe una clasificación de los elementos.

2.2.1 Puertos-1 Pasivos

Los elementos pasivos son aquellos que representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía. Se les conoce como Puertos-1 Pasivos a todos aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo.

Los elementos gráficos de bonds son los siguientes:

- **R:** Transforma la potencia suministrada a él en energía térmica disipada y su representación se muestra en la Figura 2.3.

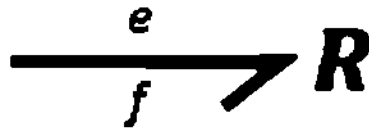


Figura 2.3 Representación del elemento R.

- **C:** Transforma la potencia suministrada a él en energía almacenada, y su representación se muestra en la Figura 2.4.

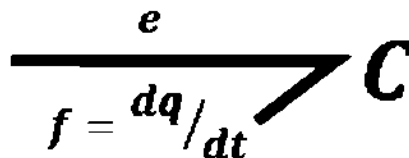


Figura 2.4 Representación del elemento C.

- **I:** Transforma la potencia suministrada a él en energía almacenada, su representación se muestra en la figura 2.5.

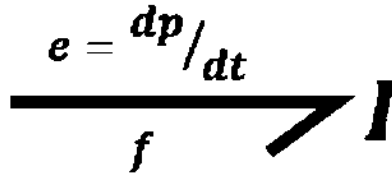


Figura 2.5 Representación del elemento *I*.

En la Tabla 2.2 se muestran los elementos; *R* de disipación, *C* de almacenamiento de flujo e *I* para el almacenamiento de esfuerzo para sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

Tabla 2.2 Puertos Pasivos

Elemento	Relación	Sistemas		
		Eléctricos	Mecánicos	Hidráulicos
R	Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
	No lineal	$v = \varphi(i)$	$F = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$
C	Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$	$F(t) = k \int V dt$	$P_r(t) = C \int \Delta Q dt$
	No lineal	$v = \varphi(q)$	$F(t) = \varphi(x)$	$P_r(t) = \varphi(V)$
I	Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
	No lineal	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_r)$

En la Figura 2.6 se muestra el tetraedro de estado, el cual facilita determinar la relación que existe entre las variables generalizadas y la representación de los elementos Pasivos Puerto-1 (R, C, I).

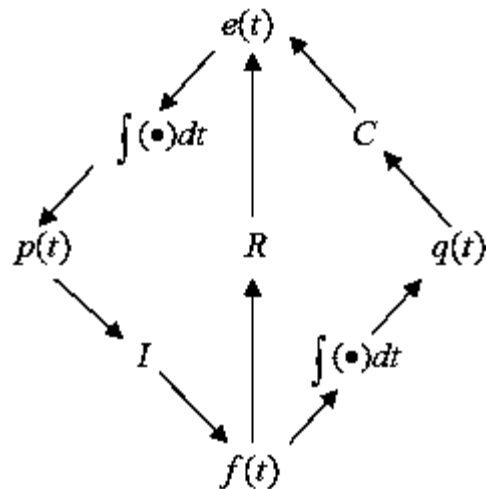


Figura 2.6 Tetraedro de estado

2.2.2 Puertos-1 Activos o Fuentes

Estos son los elementos que suministran energía al sistema, a estos elementos se les llama fuentes y existen dos tipos de fuentes:

- Fuente de esfuerzo modulada (voltaje, fuerza o presión), denotada como MS_e .
- Fuente de flujo modulada (corriente, velocidad o caudal), denotada como MS_f .

En la Figura 2.7 se muestra la representación de cada una de las fuentes.



Figura 2.7 a) Fuente de esfuerzo; b) Fuente de flujo.

2.2.3 Elementos Ideales Puertos-2

Existen dos elementos ideales puerto-2, llamados: *transformador (TF)* y *girador (GY)*. Estos elementos cambian la relación flujo esfuerzo entre las variables, caracterizándose por tener dos puertos, y una relación lineal entre esfuerzos y flujos.

2.2.3.1 Transformador (GY)

Este transformador no almacena o disipa energía (conservación de la potencia). Un transformador se encarga de relacionar las variables de flujo-flujo y esfuerzo-esfuerzo. El Bond que representa a un transformador TF se muestra en la Figura 2.8.



Figura 2.8 Representación del transformador en Bond Graph.

Las relaciones de las variables de bond generalizada para el transformador están dadas por las ecuaciones 2.2 y 2.3.

$$e_2(t) = me_1(t) \quad (2.2)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{m} f_1(t) \quad (2.3)$$

2.2.3.2 Girador (GY)

Al igual que el transformador, este no almacena o disipa energía. En comparación con el transformador, un girador establece relaciones entre flujo-esfuerzo y esfuerzo-flujo.

En la Figura 2.9 se muestra la representación del elemento girador, el cual tiene un módulo para la conversión de la energía llamado r .



Figura 2.9 Representación en Bond Graph de un Girador (GY).

Las relaciones entre las variables de bond generalizadas para el girador están dadas por las ecuaciones 2.4 y 2.5.

$$e_1(t) = r f_2(t) \quad (2.4)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r} e_2(t) \quad (2.5)$$

2.2.4 Puertos-3: Elementos de Unión

Este tipo de puertos se llaman uniones, estos sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema, y representan las conexiones en serie y paralelo.

La unión de flujo, unión-0 o unión de esfuerzo común es utilizada para la conexión en paralelo, como se ilustra en la Figura 2.10.

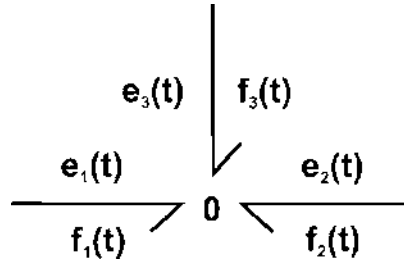


Figura 2.10 Unión-0 para la conexión en paralelo.

Las relaciones de interconexión están dadas por las siguientes expresiones:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.6)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.7)$$

La unión de esfuerzo, unión-1 o de flujo común es utilizada para la conexión en serie, como se ilustra en la Figura 2.11.

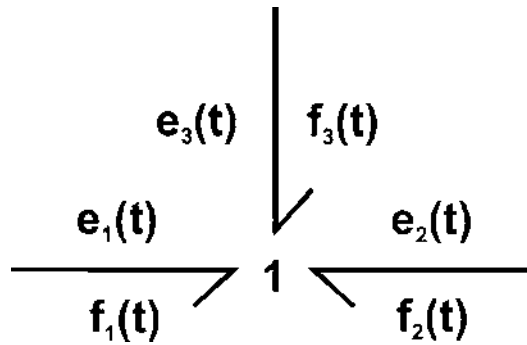


Figura 2.11 Unión-1 para la conexión en serie.

Las relaciones de interconexión están dadas por las siguientes expresiones:

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.8)$$

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.9)$$

2.3 Causalidad

La causalidad es un elemento que establece la relación causa-efecto. Para representar estas relaciones causa-efecto en un modelo de Bond Graph se coloca una marca ($|$) en la semiflecha llamada **trazo causal**.

El trazo causal indica la dirección en que el esfuerzo es dirigido, este se coloca cerca del elemento que recibe el esfuerzo y es independiente del sentido de la semiflecha, como se ilustra en la Figura 2.12.

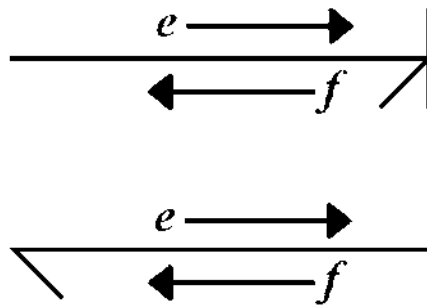
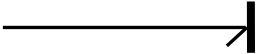
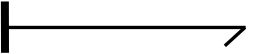
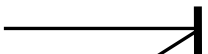
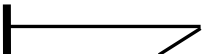
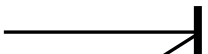
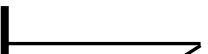
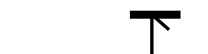
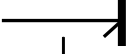
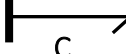
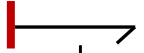
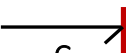
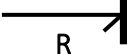
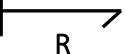


Figura 2.12 Representación en un “bond” del trazo causal.

En la Figura 2.12 se puede observar que el trazo causal indica un sentido de entrada-salida para $e(t)$ y $f(t)$ en cada puerto de los dos componentes juntos. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal y por consecuencia el flujo va en dirección contraria.

Además, el trazo causal debe de cumplir ciertas condiciones para cada elemento que se maneja en Bond Graph, en la Tabla 2.3 se muestran los trazos causales para cada elemento.

Tabla 2.3 Condiciones de causalidad para elementos en Bond Graph.

Causalidad necesaria	MSe  MSe	MSf  MSf
Causalidad restrictiva	 TF TF	 TF TF1
	 GY GY	 GY GY1
	 0	 0
	 1	 1
Causalidad integral	 I I	 C C
Causalidad derivativa	 I I	 C C
Causalidad arbitraria	 R R	 R R

Procedimiento 2.1: Para obtener la asignación de causalidad se necesita aplicar las relaciones de causalidad para los multipuertos básicos establecidos en la Tabla 2.3 y seguir el procedimiento siguiente:

1. Considerar cualquier MS_e o MS_f y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1, TF y GY .
2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la Tabla 2.3.
3. Escoger cualquier R que no esté asignado y dar una causalidad arbitraria a R . Extender las implicaciones usando 0, 1, TF y GY .

Se dice que un Bond Graph es *causalmente correcto*, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones.

2.4 Causalidad Derivativa en Bond Graph

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes. En la Figura 2.13 se muestra un ejemplo de causalidad derivativa de un sistema eléctrico con dos capacitores en paralelo, además de dos elementos resistivos.

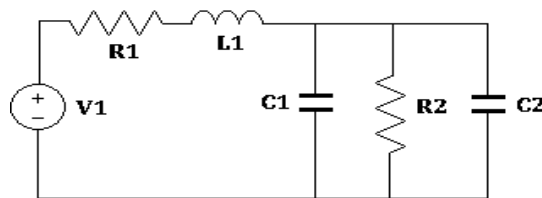


Figura 2.13 Circuito eléctrico con causalidad derivativa.

En el circuito de la Figura 2.13 vemos que los capacitores 1 y 2 se encuentran en conexión paralelo, comúnmente los capacitores tienen causalidad integral, sin embargo cuando se presenta este tipo de caso, a uno de los capacitores se le asigna causalidad integral y al otro causalidad de derivativa, como se ilustra en la Figura 2.14.

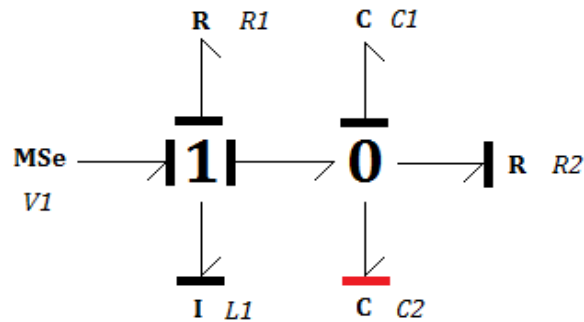


Figura 2.14 Elemento C2 con causalidad derivativa.

2.5 Procedimiento para el Modelado de Sistemas

El modelado en Bond Graph es una herramienta gráfica que permite el modelado de sistemas en ingeniería. Bond Graph permite construir modelos de sistemas físicos como eléctricos, mecánicos, hidráulicos, etc., utilizando un procedimiento de modelado simple y directo, el cual se describe a continuación:

1. Utilizando la unión-0 identificar cada nodo del sistema donde se unen dos o más elementos en paralelo.
2. Colocar la unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y disipadores.
3. Colocar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.

4. Remover la unión-**0** que representa el punto de *referencia* y remover todos los bonds conectados a esta unión.
5. Simplificar de acuerdo a las reglas de la Figura 2.15.
6. Finalmente se asigna su causalidad a cada elemento respetando las reglas de la misma.

$$\overline{\hspace{1cm}} \nearrow 1 \overline{\hspace{1cm}} \nearrow = \overline{\hspace{1cm}} \nearrow$$

$$\overline{\hspace{1cm}} \nearrow 0 \overline{\hspace{1cm}} \nearrow = \overline{\hspace{1cm}} \nearrow$$

Figura 2.15 Reglas de simplificación.

CAPITULO 3

Simulación de Sistemas en Bond Graph

3.1 Introducción

El modelado y simulación es cada vez más importante en el diseño y análisis de sistemas dinámicos. El resultado del modelado es un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento dinámico del sistema.

El proceso para crear un modelo matemático comienza con un análisis del sistema físico, que normalmente se describe por medio de un diagrama basado en componentes y enlaces. Es por ello que una representación gráfica, como un Bond Graph, muestra explícitamente la interconexión entre los diferentes elementos y permite un análisis gráfico del panorama físico.

Bond Graph es una herramienta útil e importante para el modelado de sistemas físicos. Se basa en la representación de energía y permite la descripción del sistema, por medio de elementos de almacenamiento y disipación de energía.

3.2 Estructura Unión en Sistemas Multipuerto

La estructura unión es una representación análoga a una representación en espacio de estados tradicional en donde se visualiza la dinámica del sistema, la diferencia radica en que se utilizan variables de energía y no los estados en sí, por lo que a partir de esta representación podemos obtener una representación en espacio de estados.

En la Figura 3.1 se muestra un diagrama de bloques de la estructura unión de un modelo, donde se puede observar todos los elementos que conforman cualquier sistema

dinámico. Para obtener la estructura unión de un sistema, es necesario conocer los vectores clave y relaciones constitutivas (relaciones de campo).

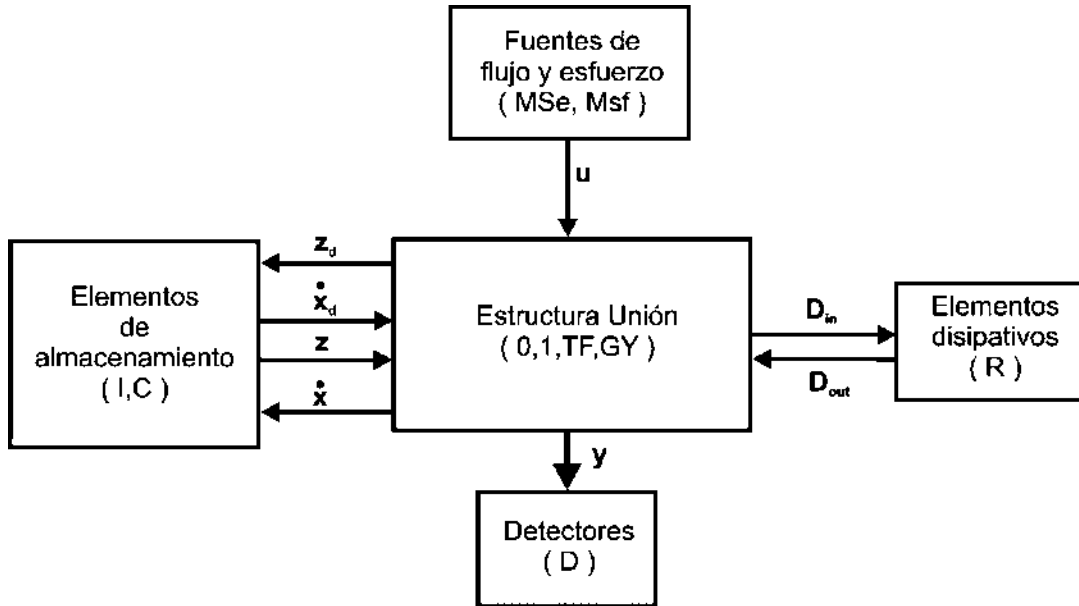


Figura 3.1 Diagrama de la Estructura Unión de un Bond Graph.

3.2.1 Vectores clave

En un Bond Graph, los bonds pueden ser clasificados como *bonds externos*, que conectan a los elementos o puertos (R , C , I , MSe y MSf), y estos a su vez ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía, y los bonds que se unen a un elemento de la estructura unión son llamados *bonds internos* (0 , 1 , TF , GY).

Los vectores clave se encuentran divididos de la siguiente manera: **MSe** , **MSf** se refiere a las fuentes; **C** o **I** es el campo de elementos almacenadores de energía; **R** es el campo de elementos resistivos o disipadores; el conjunto de elementos de unión está formado por los elementos (**0** , **1** , **TF** , **GY**).

Los vectores clave se les llama así porque son los vectores que modelan o representan al sistema, estos vectores se representan en la estructura unión de la Figura 3.1, en donde:

- $\mathbf{x}$ es el vector de estado en causalidad integral (p en I , q en C).
- $\dot{\mathbf{x}}$ es el vector de las derivadas de $\mathbf{x}$ en función del tiempo con causalidad integral (e en I , f en C).
- $\mathbf{z}$ es el vector de estado coenergía con causalidad integral (f en I , e en C).
- $\mathbf{x}_d$ es el vector de estado con causalidad derivativa (p en I , q en C).
- $\dot{\mathbf{x}}_d$ es el vector de las derivadas de $\mathbf{x}$ en función del tiempo con causalidad derivativa (e en I , f en C).
- $\mathbf{z}_d$ es el vector del estado de coenergía con causalidad derivativa (f en I , e en C).
- $\mathbf{u}$ es el vector de la fuente de salida (e en S_e , f en S_f).
- $\mathbf{D}_{in}$ es el vector de entrada al campo R .
- $\mathbf{D}_{out}$ es el vector de salida del campo R .

3.2.2 Relaciones Constitutivas y Ecuación de Estado

Para sistemas lineales con coeficientes constantes, tanto de almacenamiento como de disipación, las relaciones de campo o constitutivas pueden expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D}_{out}(t) = \mathbf{L}\mathbf{D}_{in}(t) \quad (3.2)$$

donde:

- F es una matriz diagonal cuadrada de dimensiones igual al número de elementos que conforman el puerto del campo R .
- L es una matriz cuadrada en forma de diagonal, con dimensiones igual al número de elementos que conforman el puerto del campo C e I .

En la metodología de Bond Graph, (L, F) son matrices reales de dimensiones $r \times r$ y $n \times n$, respectivamente.

El modelo matemático de un Bond Graph se obtiene a través de la relación que tienen los vectores dentro de la estructura unión, llamada *Matriz de Estructura de Unión* y se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde S está definida por,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A partir de las relaciones existentes en la estructura unión, se puede obtener una representación en espacio de estados tradicional de la forma:

$$\dot{x}(t) = A_x(t) + B_u(t) \quad (3.5)$$

$$y(t) = C_x(t) + D_u(t) \quad (3.6)$$

Los elementos que conforman la matriz S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son módulos del transformador y girador.

Las submatrices S_{ij} tienen las dos siguientes propiedades:

- ✓ Las matrices S_{11} y S_{22} son matrices anti simétricas.
- ✓ La matriz S_{12} es la transpuesta negativa de la matriz S_{21} y viceversa.

Estas dos propiedades están basadas en el principio de conservación de energía. La extensión de la ecuación (3.3) es:

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}D_{out} + S_{13}u \quad (3.7)$$

$$D_{in} = S_{21}z + S_{22}D_{out} + S_{23}u \quad (3.8)$$

$$y = S_{31}z + S_{32}D_{out} + S_{33}u \quad (3.9)$$

Tomando la ecuación (3.8) y sustituyendo en ella las ecuaciones (3.2) y (3.1) queda:

$$D_{in} = S_{21}Fx + S_{22}LD_{in} + S_{23}u \quad (3.10)$$

Despejando D_{in} queda:

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1}S_{21}Fx + (I - S_{22}L)^{-1}S_{23}u \quad (3.11)$$

Ahora tomamos de la ecuación (3.7) y se sustituye en ella las ecuaciones (3.1) y (3.2):

$$\dot{x} = S_{11}Fx + S_{12}LD_{in} + S_{13}u \quad (3.12)$$

Sustituyendo la ecuación (3.10) en la ecuación (3.12) queda:

$$\dot{x} = S_{11}Fx + S_{12}MS_{21}Fx + S_{12}MS_{23}u + S_{13}u \quad (3.13)$$

donde,

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \quad (3.14)$$

Así que:

$$\dot{x} = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]Fx + [S_{13} + S_{12}MS_{23}]u \quad (3.15)$$

por lo tanto,

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]F \quad (3.16)$$

$$B = S_{13} + S_{12}MS_{23} \quad (3.17)$$

Tomando la ecuación (3.9) y sustituimos las ecuaciones (3.1) y (3.2) queda:

$$y = S_{31}Fx + S_{32}LD_{in} + S_{33}u \quad (3.18)$$

Sustituyendo la ecuación (3.10) en la ecuación (3.18):

$$y = S_{31}Fx + S_{32}MS_{21}Fx + S_{32}MS_{23}u + S_{33}u \quad (3.19)$$

donde M es la ecuación (3.14). La ecuación (3.18) al agrupar los términos queda:

$$y = [S_{31} + S_{32}MS_{21}]Fx + [S_{33} + S_{32}MS_{23}]u \quad (3.20)$$

entonces,

$$C = [S_{31} + S_{32}MS_{21}]F \quad (3.21)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (3.22)$$

Las expresiones anteriores son necesarias para poder representar sistemas en variables de estado, en Bond Graph son necesarias para su representación matemática.

3.2.3 Procedimiento para obtener la Estructura de Unión de un Modelo en Bond Graph

En esta sección se describen los pasos necesarios para obtener la matriz de estructura unión, **S** de un bond graph:

- Se enumeran los bonds.
- Se determinan los vectores clave, tomando en cuenta lo siguiente:
 - Para un elemento C_n le corresponde en $x_n \rightarrow q_n$, $\dot{x}_n \rightarrow f_n$, $z_n \rightarrow e_n$.
 - Para un elemento I_n le corresponde en $x_n \rightarrow p_n$, $\dot{x}_n \rightarrow e_n$, $z_n \rightarrow f_n$.

Donde p es el momento generalizado, q es el desplazamiento generalizado y f y e son los flujos y esfuerzos (en un sistema eléctrico son la corriente y el voltaje).

El número asignado a cada bond se utiliza como subíndice.

- Para establecer las relaciones constitutivas se considera:

$z = Fx \Rightarrow F = \text{diag}\left(\frac{1}{M_1}, \dots, \frac{1}{M_n}\right)$ donde M_n son los elementos almacenadores de energía en causalidad integral.

$D_{out} = LD_{in} \Rightarrow L = \text{diag}(N_1, \dots, N_n, \dots, \frac{1}{\tilde{N}_1}, \dots, \frac{1}{\tilde{N}_n})$, donde N_n y $\tilde{N}_n$ son los elementos resistivos y de conductancia respectivamente.

- La matriz **S** se obtiene aplicando las reglas de interconexión que describen una unión de flujo común (*Unión-1*), así como de una unión de esfuerzo común (*Unión-0*). Para así tener completa la estructura de unión del modelo.

3.3 Modelado de Sistemas en Bond Graph sin Lazos Algebraicos

Para poder representar un modelo de Bond Graph sin lazos algebraicos, es necesario obtener la matriz de Estructura unión y verificar que la matriz $S_{22} = 0$.

Para presentar un ejemplo, tomamos como punto de partida el modelo en Bond Graph del sistema eléctrico representado en la Figura 3.2.

Para encontrar los vectores clave y las relaciones constitutivas, primero se enumeran los bonds Figura 3.2.

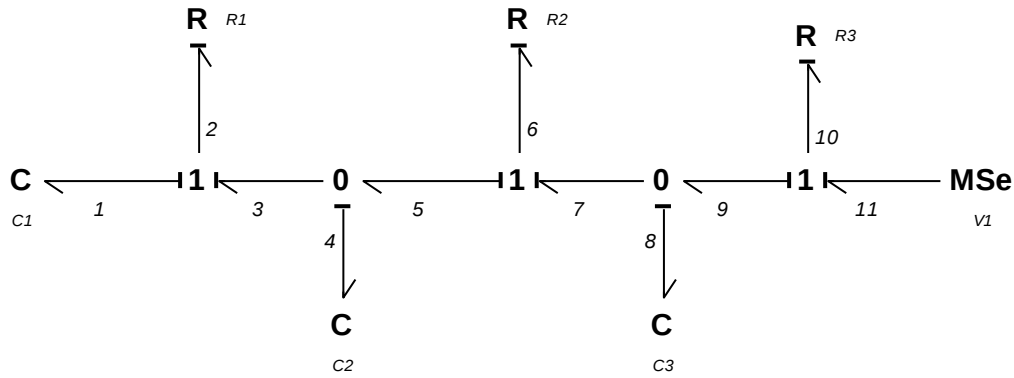


Figura 3.2 Modelo de Bond Graph de sistema eléctrico.

3.3.1 Vectores Clave

El siguiente paso es encontrar los vectores clave y las relaciones constitutivas, utilizando la numeración ilustrada en la Figura 3.2.

$$x = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_4 \\ q_8 \end{bmatrix}; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \\ f_8 \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_4 \\ e_8 \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{10} \end{bmatrix}; \quad D_{in} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{10} \end{bmatrix}$$

$$u = e_{11}$$

$$y = e_8$$

3.3.2 Relaciones constitutivas

A partir de la ecuación (3.1), las relaciones constitutivas de los elementos de disipación como de almacenamiento, para obtener la incógnita F puede ser definida a partir de $z(t)$ y $x(t)$ quedando de la siguiente forma:

$$z(t) = Fx(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_4 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_4 \\ q_8 \end{bmatrix}$$

$$F = diag\left\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}\right\}$$

Podemos definir L con los vectores clave obtenidos anteriormente, resultando la siguiente ecuación:

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{10} \end{bmatrix}$$

$$L = diag\left\{\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3}\right\}$$

3.3.3 Matriz de Estructura Unión

A continuación se procede a completar la Matriz de Estructura Unión $S(t)$, a partir de la ecuación (3.3).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los vectores clave y las relaciones constitutivas, tendremos la siguiente representación de Matriz de Estructura Unión:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_4 \\ f_8 \\ \dots \\ e_2 \\ e_6 \\ e_{10} \\ \dots \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_4 \\ e_8 \\ \dots \\ f_2 \\ f_6 \\ f_{10} \\ \dots \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

dónde:

$$s_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad s_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$s_{31} = [0 \quad 0 \quad 1], \quad s_{32} = [0 \quad 0 \quad 0], \quad s_{33} = [0]$$

Haciendo constar las propiedades de las submatrices de la matriz de Estructura Unión $S(t)$, las cuales se muestran enseguida:

- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí podemos constatar que la matriz $S_{22} = 0$, y por lo cual podemos decir que es un sistema sin lazos algebraicos.

- S_{12} es la transpuesta negativa de S_{21} . (Esto es $a_{ij} = -b_{ij}$) para todo $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$).

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} ; S_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3.3.4 Ecuaciones de Estado

Enseguida procedemos a encontrar las ecuaciones de estado a partir de las ecuaciones (3.14), (3.16), (3.17), (3.21) y (3.22), las cuales son las siguientes:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1}$$

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F$$

$$B = (S_{13} + S_{12}MS_{23})$$

$$C = (S_{31} + S_{12}MS_{21})F$$

$$D = (S_{33} + S_{32}MS_{23})$$

Sustituyendo los elementos correspondientes en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

donde $M = L$ y $L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3} \right\}$.

En la ecuación (3.16) se tiene:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

quedando:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_2} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{R_2 C_3} \\ 0 & \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_3} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix}$$

Realizando de la misma manera la sustitución en las ecuaciones (3.17), (3.21) y (3.22), quedan de la siguiente forma:

$$B = \left(\begin{array}{c} [0] \\ [0] \\ [0] \end{array} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc} [0 & 0 & 1] + [0 & 0 & 0] \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

$$D = \left(\begin{array}{c} [0] + [0 & 0 & 0] \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$D = [0]$$

Así, las ecuaciones de estado descritas en las siguientes ecuaciones (3.5) y (3.6) quedan de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_4 \\ \dot{f}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_2} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{R_2 C_3} \\ 0 & \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_3} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_4 \\ q_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} [e_{11}]$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$[e_8] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_8 \end{bmatrix} + [0][e_{11}]$$

De esta manera se finaliza la obtención del modelo matemático de un sistema a partir de Bond Graph sin lazos algebraicos.

CAPITULO 4

Solución al Problema de Lazos Algebraicos

4.1 Introducción

Una característica importante de un modelo de Bond Graph es la causalidad de los elementos. Cuando los elementos de disipación se acoplan a través de la Estructura Unión en un bond graph, se pueden encontrar problemas de asignación de causalidad. Estos problemas se denotan como lazos algebraicos por Karnopp y Rosenberg.

Un Bond Graph puede tener un lazo algebraico entre dos elementos de almacenamiento, uno con causalidad integral y el otro en causalidad derivativa. Estos casos explican la existencia de caminos causales de orden cero y proporcionan un modelo matemático representado por un conjunto implícito de ecuaciones algebraicas diferenciales (DAEs).

Van Dijk y Breedveld comparan los resultados de simulación de los métodos de eliminación de la ruta causal de orden cero de la clase 1 con la solución numérica directa de los DAE mediante métodos comúnmente utilizados para resolver sistemas rígidos de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs).

Karnopp y Margolis propusieron el enfoque de cumplimiento de rigidez en el modelo, eliminando los lazos causales entre integrales y derivadas de los puertos causales de almacenamiento.

4.1.1 Orden causal Ruta cero

La clasificación de las trayectorias causales de orden cero se deduce del trabajo de investigación realizado por Van Dijk y Breedveld y a continuación se resume:

1. Ruta causal es una secuencia de lazos causales entre dos vértices del bond graph. Los trazos causales deben estar unidos a cada enlace en la misma posición relativa.
2. Ciclo causal es un camino causal cerrado.
3. Bucle topológico es un lazo de señal (flujo o esfuerzo) asociado con un ciclo causal.
4. Malla causal es una trayectoria causal cerrada, por lo general termina en un puerto de un elemento, y tiene que contener un número impar de giradores.

Un ciclo causal es esencial si:

- a) Hay un ciclo cerrado a lo largo de una estructura unión simple; si se aplican más principios de conservación de energía, entonces el bond graph debe representarlos explícitamente.
- b) Hay una trayectoria causal cerrada a lo largo de una estructura unión ponderada y la ganancia del lazo asociada con este ciclo no es igual a 1.

En todos los demás casos el ciclo causal no es esencial:

El camino causal de orden cero es un camino causal con lazos topológicos cuyas variables se relacionan así mismas mediante asignaciones algebraicas. Algunas de las clasificaciones de caminos causales de orden cero son las siguientes:

1. Ruta causal de orden cero de clase 1:

La trayectoria causal está entre un elemento de almacenamiento con una derivada y un elemento con causalidad integral, como se aprecia en la Figura 4.1.

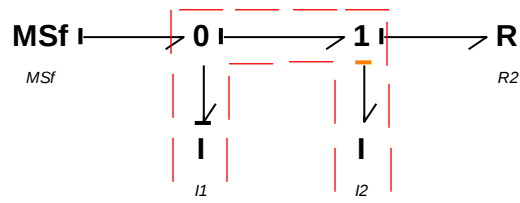


Figura 4.1 Bond Graph con orden causal de orden cero clase 1.

2. Ruta causal de orden cero de clase 2:

El camino causal esta entre los elementos cuyas relaciones constitutivas son algebraicas (lazo algebraico), se muestra en la Figura 4.2.

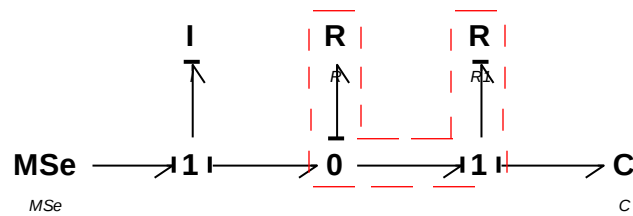


Figura 4.2 Bond Graph con orden causal de orden cero clase 2.

4.1.2 Estructura Unión de un BGI

Algunos modelos de bond graph pueden presentar lazos algebraicos, es decir lazos que no contienen ninguna operación de integración, que se encuentran a menudo en los bonds graphs de redes resistivas.

En la siguiente proposición se presenta una matriz de estructura unión con el objetivo de obtener un modelo de bond graph del sistema sin lazos algebraicos.

Proposición 1. Considerar una descripción de espacio de estado (A, B, C, D) de un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LTI) Multi-entrada Multi-salida (MIMO). Supongamos que todos los elementos de almacenamiento tienen una asignación de causalidad integral. Por lo tanto, una Estructura Unión Sin Lazos Algebraicos para este sistema es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{D}_{in}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_n & \mathbf{B}_p \\ -\mathbf{I}_n & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_p \mathbf{F}^{-1} & 0 & \mathbf{D}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{D}_{out}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde las relaciones para los elementos de almacenamiento y disipativos son:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (4.2)$$

$$\mathbf{D}_{out}(t) = \mathbf{L}\mathbf{D}_{in}(t) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{L} = -\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1} \quad (4.4)$$

Prueba. Como todos los elementos de almacenamiento permanecen en causalidad integral, $\mathbf{S}_{22} = 0$ de la ecuación (3.14) $\mathbf{M} = \mathbf{L}$. Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (4.1) y (3.16) la matriz de estado del sistema es $\mathbf{A} = -\mathbf{L}\mathbf{F}$, que es equivalente a $\mathbf{L} = -\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}$.

Además, a partir de las ecuaciones (3.17) y (4.1) $\mathbf{B}$ se reduce a $\mathbf{S}_{13} = \mathbf{B}$ y se sustituyen las ecuaciones (4.1) por (3.21), $\mathbf{C} = \mathbf{S}_{31}\mathbf{F}$, es decir $\mathbf{C}$ como $\mathbf{S}_{31} = \mathbf{C}\mathbf{F}^{-1}$. Finalmente, a partir de la ecuación (3.22) y utilizando la ecuación (4.1), $\mathbf{D} = \mathbf{S}_{33}$.

4.2 Solución a los lazos algebraicos

Con base en la Proposición 1, se presentará un procedimiento general que resuelve el problema de los lazos algebraicos en un modelo de bond graph de un sistema Multi-entrada Multi-salida (MIMO) de tiempo lineal invariante (LTI). Este procedimiento se basa en una Estructura Unión propuesta y un campo R . Esta estructura unión desacopla los elementos del campo de disipación, eliminando así los lazos algebraicos.

Con el fin de mantener un significado físico para el modelo de bond graph propuesto, el campo R inicial de bond graph se transforma en un campo disipativo de resistencias de puerto-1, transformadores y giradores.

Procedimiento:

1. Partiendo de un bond graph inicial dado con asignación de causalidad integral (IBGI), los lazos algebraicos se identifican usando caminos causales entre las resistencias o si la submatriz de la estructura unión $\mathbf{S}_{22} \neq 0$. Entonces, la relación constitutiva del campo de disipación usando una resistencia de puerto-1 se denomina $\mathbf{L}$.
2. Conociendo el número de elementos o campos $\mathbf{I}$ y $\mathbf{C}$ en la relación constitutiva del campo de almacenamiento, $\mathbf{F}$, se definen los vectores clave de este campo.
3. Se identifican los vectores clave del campo $\mathbf{R}$.
4. Obtener las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ del sistema utilizando las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.14) para el bond graph inicial.
5. Determine una relación constitutiva del campo $\mathbf{R}$ usando la ecuación (4.4), que se denota por $\mathbf{L}$.

6. Obtener un BGI utilizando el campo R (BGI-R) a través de la construcción de un modelo de un bond graph que se muestra en los siguientes pasos:
 - a) Dibuje cada elemento de almacenamiento y unión asociada del vector clave $x(t)$; si se trata de un elemento o campo C , está conectado a una unión 0, y si es elemento o campo I , está conectado a una unión 1.
 - b) En cada unión del paso anterior, conecte las fuentes según la submatriz $\mathbf{S}_{13} = \mathbf{B}$. Si el elemento de esta submatriz es una ganancia dada por R o $\frac{1}{R}$, conecte un girador entre la fuente y la unión donde la ganancia es el modulo girador. Si la ganancia es $\frac{R_1}{R_2}$, conecte un transformador entre la fuente y la union donde $\frac{R_1}{R_2}$ es el modulo del transformador.
 - c) Del paso (a) conecte cada unión 0 a cada unión 1 con un bond. La dirección de la potencia de este bond está en la misma dirección del elemento o campo C . Conecte cada unión 1 a una unión 0 con un bond y su dirección es la misma que la del elemento o campo I . Estas uniones corresponden a la submatriz $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{I}$.
 - d) Las uniones 0 y 1 del paso anterior están conectadas al campo R de la etapa (3) y (5). Como la submatriz $\mathbf{S}_{21} = -\mathbf{I}$ la dirección de estos bonds está en la dirección opuesta con respecto a los elementos o campos C y los elementos o campos I , que representan la submatriz $\mathbf{S}_{21} = -\mathbf{I}$.
 - e) Cada salida del sistema se obtiene usando bonds activos y un diagrama de bloques.
 - f) Finalmente, aplicar una asignación de causalidad integral al campo de almacenamiento y extender las implicaciones de causalidad al resto de los elementos del bond completo.

4.3.1 Ejemplo 1.

The diagram illustrates the execution of a program with the following components and flow:

- Initial State:** Registers $R1$, $R2$, and $R3$ are empty.
- Operation 1:** MSe (Memory Store) operation.
- Operation 2:** $R1$ is updated with the value 1.
- Operation 3:** $R1$ is updated with the value 0.
- Operation 4:** $L1$ (Load) operation.
- Operation 5:** $R2$ is updated with the value 1.
- Operation 6:** $R2$ is updated with the value 1.
- Operation 7:** $R2$ is updated with the value 0.
- Operation 8:** $L2$ (Load) operation.
- Operation 9:** $R3$ is updated with the value 1.
- Operation 10:** $R3$ is updated with the value 1.
- Operation 11:** $C1$ (Control) operation.

The final state of the registers is shown at the end of the sequence: $R1$ contains 1, $R2$ contains 1, and $R3$ contains 1.

Paso 1. El BGI de la figura 4.3 muestra que tiene dos lazos algebraicos: los primeros lazos están formados por los bonds 2-3-5-6 y los segundos lazos por 6-7-9-10.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_8(t) \\ q_{11}(t) \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_8(t) \\ f_{11}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_8(t) \\ e_{11}(t) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{F} = diag \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C} \right\}$$

Paso 3. Los vectores clave del campo de disipación son:

$$\mathbf{D}_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_6(t) \\ f_{10}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{D}_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_6(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix}$$

con una relación constitutiva

$$\mathbf{L} = \text{diag} \left\{ R_1, \frac{1}{R_2}, R_3 \right\}$$

y la entrada $u = e_1$.

La Matriz de Estructura Unión es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{D}_{in}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{D}_{out}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}$$

La submatriz $\mathbf{S}_{22}$ muestra que el modelo de bond graph tiene dos lazos algebraicos.

Paso 4. La realización del espacio de estado es:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} (R_2 + R_3) & \frac{-R_1 R_3}{L_2} & \frac{R_1}{C} \\ \frac{-R_1 R_3}{L_1} & \frac{-R_3}{L_2} (R_1 + R_2) & \frac{R_1 + R_2}{C} \\ \frac{-R_1}{L_1} & -\frac{R_1 + R_2}{L_2} & \frac{-1}{C} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_2 + R_3 \\ R_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $\Delta = R_1 + R_2 + R_3$.

Paso 5. Una relación constitutiva del campo de disipación usando campo R es:

$$L = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_1(R_2 + R_3) & R_1 R_3 & -R_1 \\ R_1 R_3 & R_3(R_1 + R_2) & -(R_1 + R_2) \\ R_1 & R_1 + R_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 6. El modelo BGI-R del sistema se muestra en la Figura 4.4

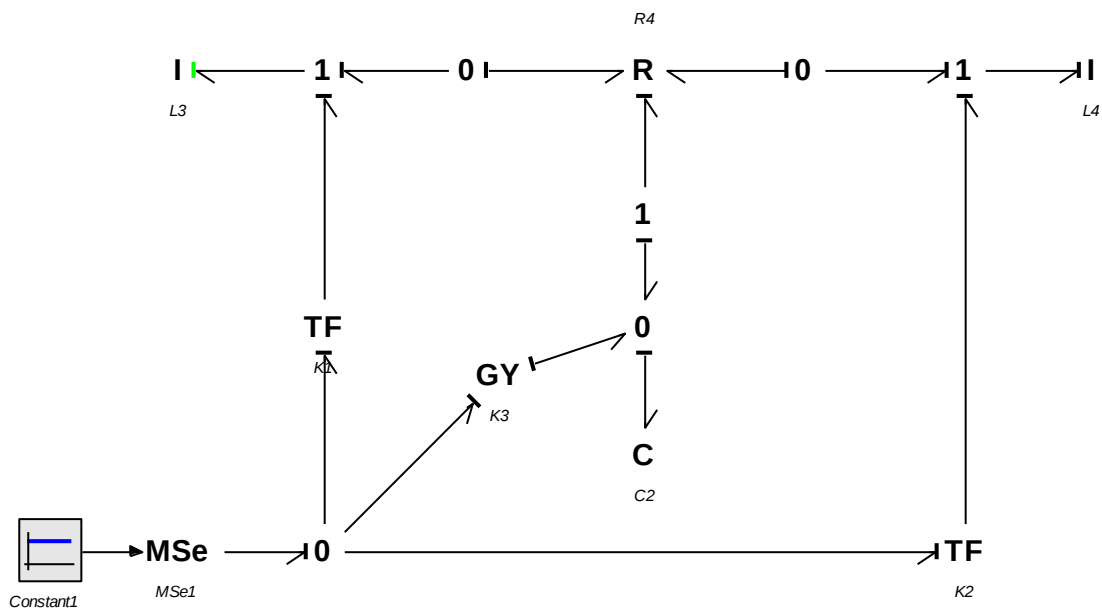


Figura 4.4 BGI-R del ejemplo 1

$$TF = \frac{1}{K_1}$$

$$TF1 = \frac{1}{K_2}$$

$$\mathbf{GY} = \frac{1}{K_3}$$

$$\text{donde } K_1 = \frac{R_2+R_3}{\Delta}, K_2 = \frac{R_3}{\Delta}, \text{ y } K_3 = \frac{1}{\Delta}.$$

Para poder demostrar que el sistema de la Figura 4.3 y 4.4 son equivalentes, simulamos ambos sistemas en un software llamado 20-Sim, un BGI con los lazos algebraicos y el otro BGI-R sin lazos algebraicos. Para dicha simulación tomamos los siguientes valores:

$$C_1 = 0.01 \text{ F}$$

$$R_1 = 10 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = 3 \text{ } \Omega$$

$$R_3 = 5 \text{ } \Omega$$

$$L_1 = 0.1 \text{ H}$$

$$L_2 = 0.5 \text{ H}$$

Entonces, calculamos K_1 , K_2 y K_3 sustituyendo los valores anteriores en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{TF} = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{\frac{R_2+R_3}{\Delta}} = 2.25$$

$$\mathbf{TF1} = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{\frac{R_3}{\Delta}} = 3.6$$

$$\mathbf{GY} = \frac{1}{K_3} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta}} = 18$$

Obteniendo como resultado las siguientes gráficas de los elementos de los estados de los sistemas, donde podemos observar que estos son equivalentes debido que al momento de simular se obtuvieron los mismos en cada uno de los elementos.

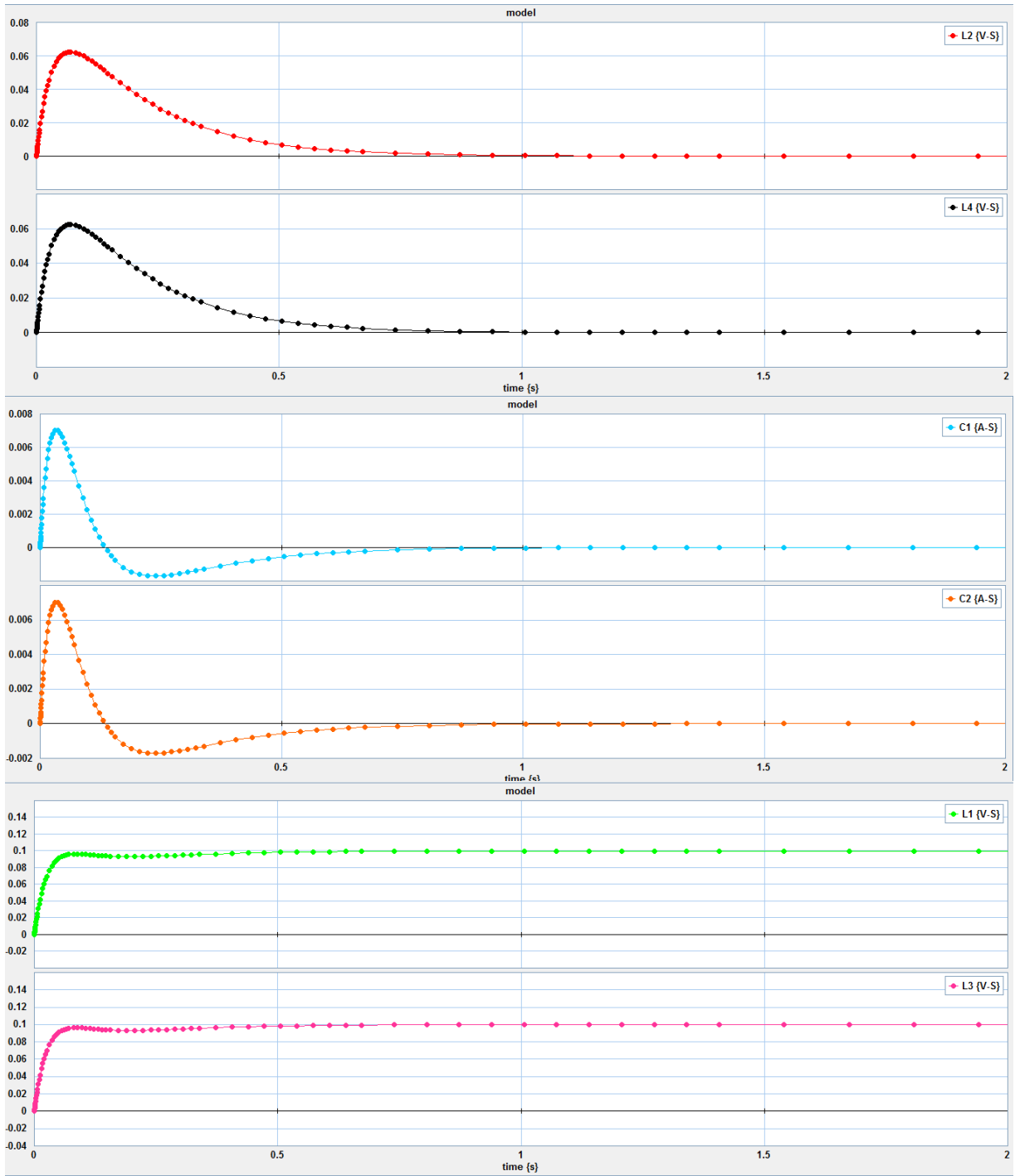


Figura 4.5 Resultados obtenidos de la simulación del Ejemplo 1.

4.3.2 Ejemplo 2.

Considere el siguiente BGI que se muestra en la Figura 4.5

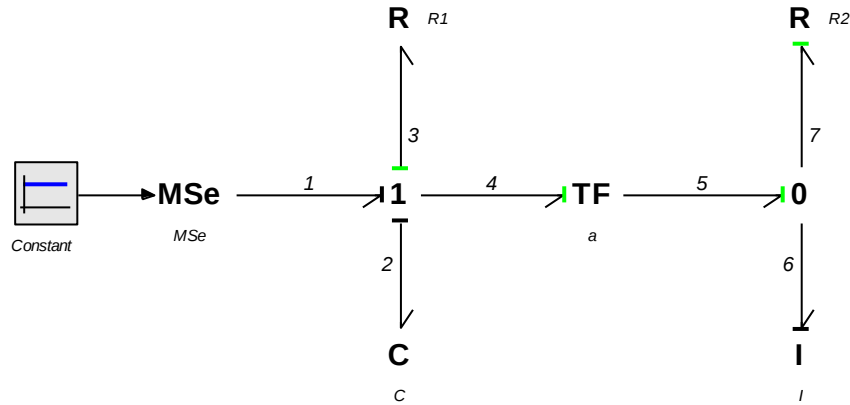


Figura 4.6 BGI con un lazo algebraico

Paso 1. El BGI de la figura 4.6 muestra que tiene un lazo algebraico, el cual está formado por los bonds 3-4-5-7.

Paso 2. Los vectores clave del campo de almacenamiento son:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} q_2(t) \\ p_6(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_6(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix}$$

con una relación constitutiva

$$\mathbf{F} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_2} \right\}$$

Paso 3. Los vectores clave del campo de disipación son:

$$\mathbf{D}_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix}$$

con una relación constitutiva

$$\mathbf{L} = \text{diag}\left\{R_1, \frac{1}{R_2}\right\}$$

y la entrada $u = e_1$.

La Matriz de Estructura Unión es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{D}_{in}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ \hline 0 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{D}_{out}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}$$

La submatriz $\mathbf{S}_{22}$ muestra que el modelo de bond graph tiene un lazo algebraico.

Paso 4. La realización del espacio de estado es:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -1 & \frac{aR_2}{L_2} \\ \frac{a^2R_2C_1}{-aR_2} & \frac{-R_1}{a^2L_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 \\ aR_2 \end{bmatrix}$$

donde $\Delta = a^2R_2 + R_1$.

Paso 5. Una relación constitutiva del campo de disipación usando campo R es:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2 R_2} & -a R_2 \\ a R_2 & \frac{R_1}{a^2} \end{bmatrix}$$

Paso 6. El modelo BGI-R del sistema se muestra en la Figura 4.7.

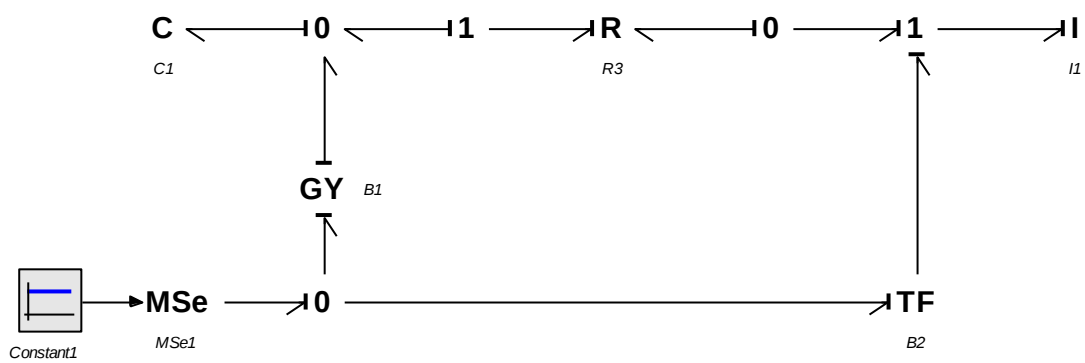


Figura 4.7 BGI-R del ejemplo 2

$$TF1 = \frac{1}{B_2}$$

$$GY = \frac{1}{B_1}$$

donde $B_1 = \frac{1}{a^2 \Delta R_2}$ y $B_2 = \frac{a R_2}{\Delta}$.

En el siguiente ejercicio también vamos probar que el sistema de la Figura 4.6 y 4.7 son equivalentes, simulamos ambos sistemas en un software 20-Sim, un BGI y el otro BGI-R. Para esta simulación tomamos los siguientes valores:

$$C_1 = 0.01 \text{ F}$$

$$R_1 = 2 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = 4 \text{ } \Omega$$

$$a = 0.1$$

$$L_2 = 0.2 \text{ H}$$

Entonces, calculamos B_1 y B_2 sustituyendo los valores anteriores en las siguientes ecuaciones:

$$TF1 = \frac{1}{B_2} = \frac{1}{\frac{aR_2}{\Delta}}$$

$$GY = \frac{1}{B_1} = \frac{1}{\frac{1}{a^2 \Delta R_2}} = 2.04$$

Obteniendo como resultado las siguientes gráficas de los estados de los elementos de los sistemas, donde podemos observar que estos también son equivalentes ya que al simularlos se obtuvieron las mismas gráficas en cada uno de los elementos.

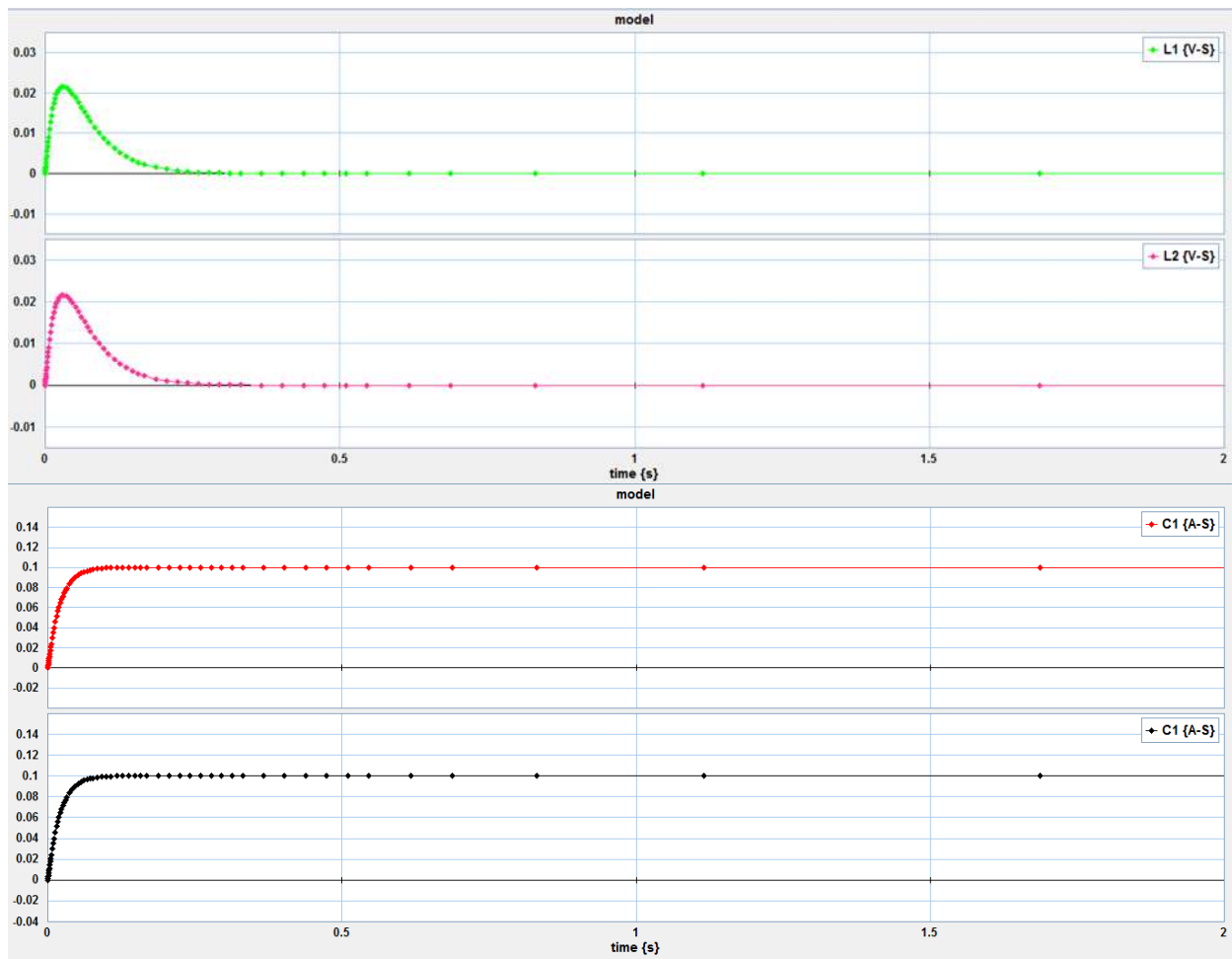


Figura 4.8 Resultados obtenidos de la simulación del Ejemplo 2.

4.3.3 Ejemplo 3.

Considere el siguiente BGI que se muestra en la Figura 4.9

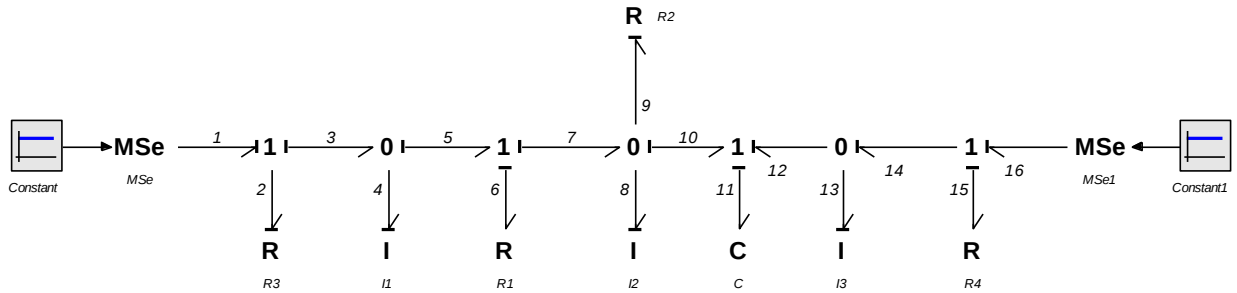


Figura 4.9 BGI con tres lazos algebraicos

Paso 1. El BGI de la figura 4.9 muestra que tiene tres lazos algebraicos: los primeros lazos están formados por los bonds 2-3-5-6, los segundos lazos por 6-7-9 y los terceros lazos por 9-10-12-14-15.

Paso 2. Los vectores clave del campo de almacenamiento son:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_8(t) \\ q_{11}(t) \\ p_{13}(t) \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_8(t) \\ f_{11}(t) \\ e_{13}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_8(t) \\ e_{11}(t) \\ f_{13}(t) \end{bmatrix}$$

con una relación constitutiva

$$\mathbf{F} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{L_3} \right\}$$

Paso 3. Los vectores clave del campo de disipación son:

$$\mathbf{D}_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \\ e_9(t) \\ e_{15}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{D}_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \\ f_9(t) \\ f_{15}(t) \end{bmatrix}$$

con una relación constitutiva

$$\mathbf{L} = diag\left\{R_3, R_1, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_4}\right\}$$

Y dos entradas $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{16} \end{bmatrix}$.

La matriz de Estructura Unión es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{D}_{in}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \vdots & -1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{D}_{out}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}$$

La submatriz $\mathbf{S}_{22}$ muestra que el modelo de bond graph tiene tres lazos algebraicos.

Paso 4. La realizacion del espacio de estado es:

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -\frac{R_3}{L_1}(R_1R_2 + R_1R_4 + R_2R_4) & \frac{-R_2R_4R_3}{L_2} & \frac{R_2R_3}{C_1} & \frac{R_2R_3R_4}{L_3} \\ \frac{-R_2R_4R_3}{L_1} & \frac{-R_2R_4(R_1 + R_3)}{L_2} & \frac{R_2}{C_1}(R_1 + R_3) & \frac{R_2R_4}{L_3}(R_1 + R_3) \\ \frac{-R_2R_3}{L_1} & \frac{-R_2}{L_2}(R_1 + R_3) & \frac{-1}{C_1}(R_1 + R_2 + R_3) & \frac{-R_4}{L_3}(R_1 + R_2 + R_3) \\ \frac{R_2R_4R_3}{L_1} & \frac{R_2R_4}{L_2}(R_1 + R_3) & \frac{R_4}{C_1}(R_1 + R_2 + R_3) & \frac{-R_2R_4}{L_3}(R_1 + R_3) \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_1(R_2 + R_4)R_2R_4 & -R_2R_3 \\ R_2R_4 & -R_2(R_1 + R_3) \\ R_2 & R_1 + R_2 + R_3 \\ -R_2R_4 & R_2(R_1 + R_3) \end{bmatrix}$$

donde $\Delta = R_1R_2 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4$.

Paso 5. Una relación constitutiva del campo de disipación usando campo R es:

$$L = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_3(R_1R_2 + R_1R_4 + R_2R_4) & R_2R_4R_3 & -R_2R_3 & -R_2R_3R_4 \\ R_2R_4R_3 & R_2R_4(R_1 + R_3) & -R_2(R_1 + R_3) & -R_2R_4(R_1 + R_3) \\ R_2R_3 & (R_1 + R_3) & R_1 + R_2 + R_3 & R_4(R_1 + R_2 + R_3) \\ -R_2R_4R_3 & -R_2R_4(R_1 + R_3) & -R_4(R_1 + R_2 + R_3) & R_2R_4(R_1 + R_3) \end{bmatrix}$$

Paso 6. El modelo BGI-R del sistema se muestra en la Figura 4.8

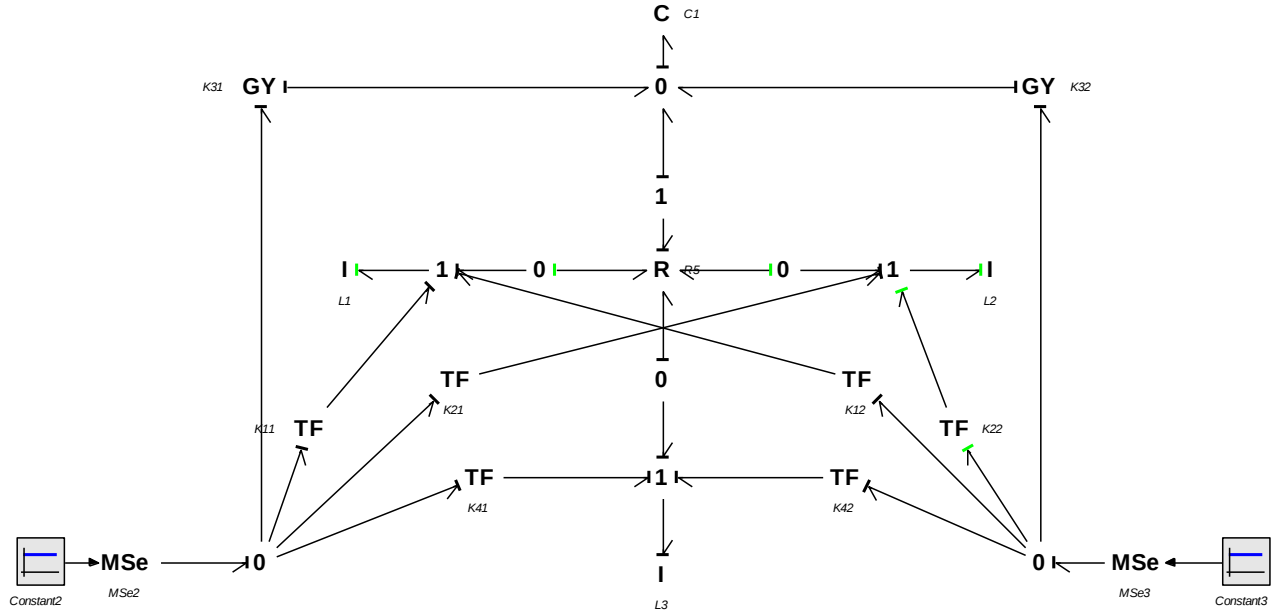


Figura 4.10 BGI-R del ejemplo 3

donde

$$K_{11} = \frac{R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4}{\Delta}; \quad K_{12} = \frac{-R_2R_3}{\Delta}$$

$$K_{21} = \frac{R_2R_4}{\Delta}; \quad K_{22} = \frac{-R_2(R_1 + R_3)}{\Delta}$$

$$K_{31} = \frac{R_2}{\Delta}; \quad K_{32} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{\Delta}$$

$$K_{41} = \frac{-R_2R_4}{\Delta}; \quad K_{42} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{\Delta}$$

Enseguida procedemos a probar que el sistema de la Figura 4.9 y 4.10 son equivalentes, simulamos ambos sistemas en un software 20-Sim, un BGI y el otro BGI-R. Para esta simulación tomamos los siguientes valores:

$$C_1 = 0.02 \text{ F}$$

$$I_1 = 0.1 \text{ H}$$

$$I_2 = 0.2 \text{ H}$$

$$I_3 = 0.15 \text{ H}$$

$$R_1 = 2 \Omega$$

$$R_2 = 4 \Omega$$

$$R_3 = 10 \Omega$$

Entonces, calculamos K_{11}^{-1} , K_{12}^{-1} , K_{21}^{-1} , K_{22}^{-1} , K_{31}^{-1} , K_{32}^{-1} , K_{41}^{-1} y K_{42}^{-1} sustituyendo los valores anteriores en las siguientes ecuaciones:

$$K_{11}^{-1} = \frac{R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4}{\Delta} = 0.6181$$

$$K_{12}^{-1} = \frac{-R_2R_3}{\Delta} = -0.109$$

$$K_{21}^{-1} = \frac{R_2R_4}{\Delta} = 0.3636$$

$$K_{22}^{-1} = \frac{-R_2(R_1 + R_3)}{\Delta} = -0.181$$

$$K_{31}^{-1} = \frac{R_2}{\Delta} = 0.0363$$

$$K_{32}^{-1} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{\Delta} = 0.081$$

$$K_{41}^{-1} = \frac{-R_2R_4}{\Delta} = -0.363$$

$$K_{42}^{-1} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{\Delta} = 0.1818$$

Obteniendo los mismos resultados en las siguientes gráficas de la simulación de los estados de los elementos de los sistemas, donde podemos acertar que el procedimiento es válido.

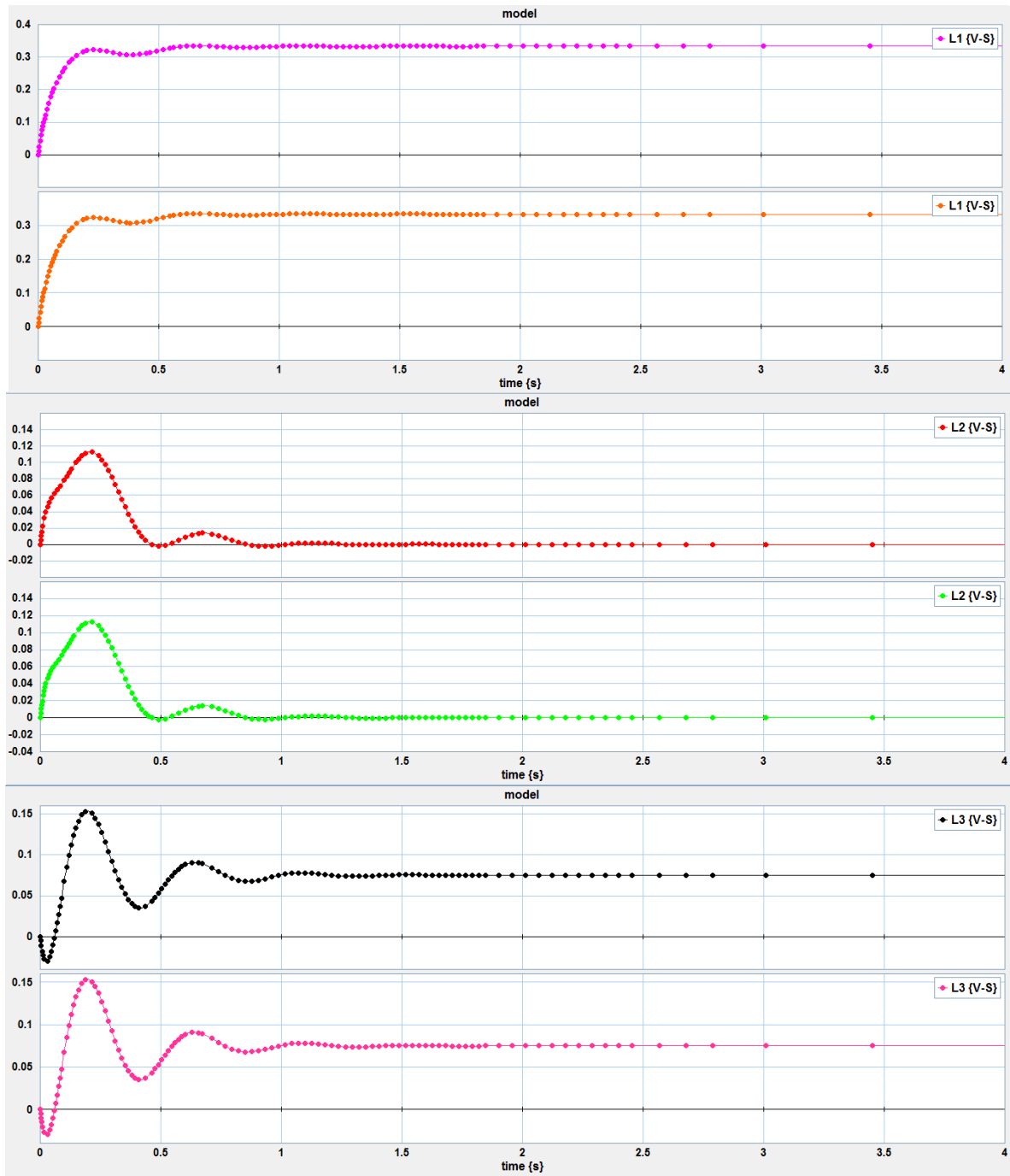


Figura 4.11 a) Simulación de las inductancias del Ejemplo 3.

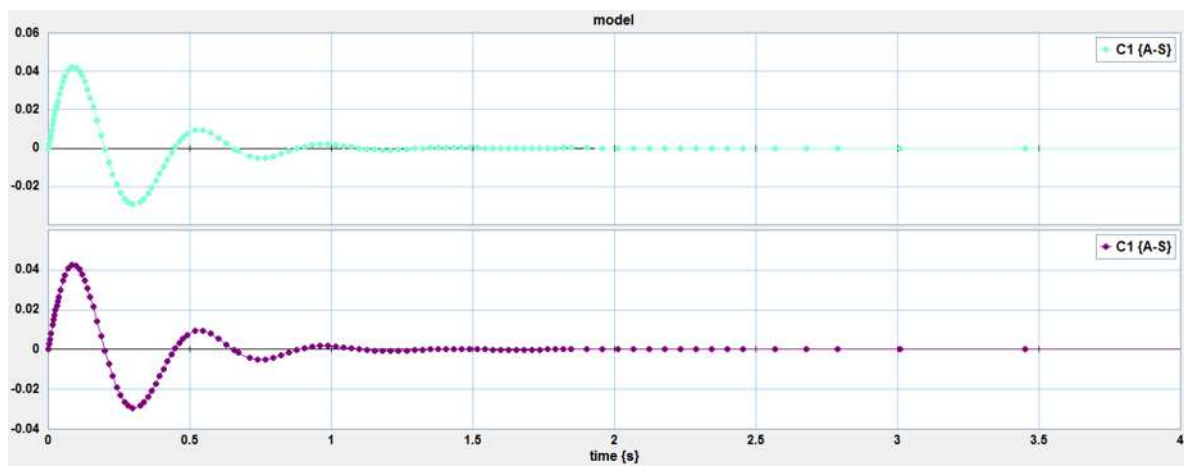


Figura 4.11 b) Simulación del capacitor del Ejemplo 3.

CAPITULO 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

Con el desarrollo del presente trabajo de tesis, se ha demostrado que el uso de modelado de sistemas por medio de la técnica de modelado de Bond Graph es eficaz.

En este caso se probó un procedimiento sencillo, general y directo que se basa en una Estructura Unión propuesta que desacopla las trayectorias causales del campo de disipación. Además, dicho procedimiento se presenta para la construcción de un nuevo de Bond Graph sin lazos algebraicos, por medio de una Matriz de Estructura Unión propuesta obtenida de un Bond Graph con lazos algebraicos dando como resultado al momento de simularlos en un software el mismo resultado y concluyendo que ambos sistemas uno con lazos algebraicos donde $S_{22} \neq 0$ y el obtenido por medio de la Estructura Unión ya sin lazos algebraicos $S_{22} = 0$ son equivalentes.

El modelo matemático Bond Graph simulado en el software 20-Sim nos proporciona facilidad visual y facilidad en la comprensión matemática que representa la respuesta del sistema.

Para concluir el análisis de cualquier sistema en Bond Graph, es viable en lo que respecta al ahorro de tiempo y facilidad computacional, debido a que es una técnica que puede ser modelada por medio de un software y esto permite mayor facilidad de obtener los modelos matemáticos de cualquier sistema que se desee modelar.

5.2 Recomendaciones

El presente trabajo muestra que aunque Bond Graph es una técnica que simplifica el modelado de sistemas, es recomendado realizar una instigación previa sobre el sistema que se vaya a analizar, esto para poder determinar si los resultados son correctos al aplicar la técnica de modelado de Bond Graph, lo cual se observa cuando se simula dichos sistemas en algún software, en nuestro caso 20-sim y se obtienen los mismos resultados en las respuestas gráficas, de esta manera podemos saber si los resultados arrojados por el simulador son correctos.

Es recomendable usar la técnica de modelado de Bond Graph, por que simplifica la obtención del modelo matemático de los sistemas físicos, el tiempo de desarrollo para la obtención del modelo es menor, además de que dicha técnica tiene una forma ordenada para desarrollar el análisis matemático para poder llevar al modelo final.

Bibliografía

- [1] W. Borutzky, G Dauphin-Tanguy, and J. U. Thoma
Advances in bond graph modelling: theory, software, applications, mathematics and computers in simulation.
1995.

- [2] Jan F. Broenink
Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graph.
University of Twente, Dept EE, 1999.

- [3] G. Dauphin-Tanguy
Les bond graphs
Hermes Science Publications, 2000.

- [4] Gilberto González –A and R Galindo
Removing the algebraic loops of bond graph models.
14 pril 2008.

- [5] Peter J. Gawthrop, and Geraint P. Bevan
Bond-Graph Modelling.
IEEE Control Systems Magazine 2007.