



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE INGENIERÍA EN TECNOLOGÍA DE LA MADERA

*APLICACIÓN DEL MODELO CÓNICO SEGMENTADO A
LOS TIPOS DENDROMÉTRICOS CLÁSICOS COMO
FUNCIÓN DEL NÚMERO DE SEGMENTOS*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**MAESTRO EN CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DE LA MADERA**

PRESENTA:
LUISA PATRICIA URANGA VALENCIA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GILDARDO CRUZ DE LEÓN

MORELIA, MICH., Septiembre de 2008

ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN	1
2.	CONCEPTOS GENERALES	8
	Métodos aproximados para determinar el área bajo una curva en un intervalo.	8
	Métodos aproximados para determinar el volumen de un sólido de revolución.	9
	Tipos dendrométricos clásicos.	10
	Funciones de volumen y de perfil.	13
	Métodos estándar de cubicación.	14
	La Regla del Trapecio.	15
	El Modelo Cónico Segmentado (MCS).	15
	Aplicación del MCS a las mediciones forestales.	16
	Diámetros Dendrométricos.	18
	Diámetros medios para una altura del pecho irregular.	18
3.	METODOLOGÍA	19
	Estimación de volúmenes.	19
	Estimación del volumen de una esfera de radio unitario.	21
	Estimación del volumen de un paraboloides.	21
	Estimación del volumen de un cono.	23
	Estimación del volumen de un neiloide.	24
	Cálculo analítico del volumen para los casos de $n=5$ y $n=10$.	25
	Cálculo numérico para cualquier n finita.	26
	Cálculo del límite cuando $n \rightarrow \infty$.	27
	Definición de notación.	27
4.	RESULTADOS	28
	Aplicación del MCS a una esfera de radio unitario como función del número de segmentos	28
	Obtención de fórmulas generales para la aplicación de MCS a una esfera de radio unitario.	29
	Obtención de la fórmula general para el volumen exacto de segmento en la esfera de radio unitario.	32
	Resultados de la aplicación analítica de MCS a una esfera de radio unitario con 6 segmentos.	33
	Resultados para una esfera de radio unitario con 6 segmentos mediante la fórmula general del volumen exacto.	35
	Resultados de la aplicación analítica de MCS a una esfera de radio unitario con 10 segmentos.	37

Resultados obtenidos al aplicar MCS a una esfera de radio unitario para 6, 10, 12, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente mediante Excel.	38
Cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$ para el volumen total de la esfera de radio unitario aplicando MCS.	39
Fórmula general del volumen de segmento para una esfera de radio unitario, como función del número de segmentos, utilizando el método de Smalian.	41
Fórmula general del volumen de segmento para una esfera de radio unitario, como función del número de segmentos, utilizando el método de Huber.	
Fórmula general del volumen de segmento para una esfera de radio unitario, como función del número de segmentos, utilizando el método de Newton.	42
Estimación del volumen de una esfera de radio unitario con 6 segmentos utilizando los métodos estándar de cubicación.	43
Estimación del volumen de una esfera de radio unitario con 10 segmentos utilizando los métodos estándar de cubicación.	
Estimación del volumen de una esfera de radio unitario con 6, 10, 12, 20, 100 y 500 segmentos utilizando los métodos estándar de cubicación mediante Excel.	44
Resumen de resultados para una esfera de radio unitario.	49
Aplicación del MCS a un paraboloides como función del número de segmentos	49
Obtención de la fórmula general al aplicar MCS a un paraboloides.	
Obtención de la fórmula general para el volumen exacto, como función del número de segmentos para un paraboloides.	51
Resultados de la aplicación analítica de MCS a un paraboloides con 5 segmentos.	52
Resultados para un paraboloides con 5 segmentos mediante el método exacto.	
Resumen de resultados para un paraboloides con 5 segmentos.	53
Estimación del volumen de un paraboloides con 10 segmentos utilizando MCS y el método exacto.	56
Resultados de los cálculos obtenidos mediante la aplicación de MCS a un paraboloides con 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente por medio de Excel.	57
Cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$ para el volumen total de un paraboloides aplicando MCS.	61
Resumen de fórmulas generales para un paraboloides.	64
	65
Aplicación del MCS a un cono como función del número de segmentos	66
	67
	71
	72

Obtención de fórmulas generales al aplicar MCS a un cono.	72
Resultados de la aplicación analítica de MCS para un cono con 5 segmentos.	75
Resultados para un cono con 5 segmentos mediante el método de Smalian.	
Resultados para un cono con 5 segmentos mediante la fórmula general de Huber.	78
Resultados para un cono con 5 segmentos mediante la fórmula general de Newton.	81
Estimación del volumen para un cono con 10 segmentos utilizando MCS y los métodos estándar de cubicación.	83
Resultados de los cálculos obtenidos mediante la aplicación de MCS para un cono con 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente por medio de Excel.	85
Resumen de fórmulas generales para un cono.	87
Aplicación del MCS a un neiloide como función del número de segmentos	
Obtención de fórmulas generales al aplicar MCS a un neiloide.	88
Resultados de la aplicación analítica de MCS a un neiloide con 5 segmentos.	
Resultados para un neiloide con 5 segmentos mediante el método exacto.	89
Resultados para un neiloide con 5 segmentos mediante la fórmula general de Smalian.	89
Resultados para un neiloide con 5 segmentos mediante la fórmula general de Huber.	92
Resultados para un neiloide con 5 segmentos mediante la fórmula general de Newton.	96
Estimación del volumen de un neiloide con 10 segmentos utilizando los métodos de cubicación.	99
Resultados de los cálculos obtenidos mediante la aplicación del MCS a un neiloide con 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente por medio de Excel.	101
Calculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$.	103
Resumen de fórmulas generales para un neiloide.	106
5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN	107
APÉNDICE A. Cálculos de volumen en esfera, $n \geq 10$.	
APÉNDICE B. Cálculos de volumen en paraboloides, $n \geq 10$.	
APÉNDICE C. Cálculos de volumen en cono, $n \geq 10$.	108
APÉNDICE D. Cálculos de volumen en neiloide, $n \geq 10$.	110
BIBLIOGRAFÍA	111
	119
	132
	144
	161
	185

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Partes generales de un árbol de latifoliada y conífera. (Diéguez-Aranda <i>et al.</i> , 2003).	2
Figura 2.1. Método de aproximación mediante rectángulos para determinar el área bajo una curva, mediante la aproximación de rectángulos; cuando $y = f(x)$ en un intervalo.	9
Figura 2.2. Sólido de revolución generado al realizar una rotación de 2π de la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y el área bajo ella, alrededor del eje x (Stewart, 2002).	10
Figura 2.3. Aproximación al volumen de una esfera con $r=1$, mediante un número n de cilindros, para los casos de $n = 5, 15$ y 20 respectivamente (Stewart, 2002).	10
Figura 2.4. Tipos dendrométricos clásicos. 1) cilindro; 2) paraboloides; 3) cono y 4) neiloide (Figura tomada de Chapman, 1921).	11
Figura 2.5. Formas geométricas que se asocian a las diferentes secciones de un tronco de árbol. Izquierda) Romahn de la Vega <i>et al.</i> , 1994; Derecha) Chapman and Meyer, 1949. La geometría de la figura a la derecha está asociada con las geometrías de la figura 2.4.	12
Figura 2.6. Modelo para coníferas. (Plank and Cahill, 1984).	12
Figura 2.7. Diferencia entre una función de perfil (línea continua) y mediante tipos dendrométricos (línea punteada) para <i>Eucalyptus pilularis</i> , (West, 2004).	14
Figura 2.8. Aproximación al área bajo una curva en un intervalo mediante la regla del trapecio.	15
Figura 2.9. El Modelo Cónico Segmentado (MCS). En general, el modelo aproxima cualquier geometría de un tronco de árbol mediante segmentos en la forma de conos truncados, cilindros y un cono en la punta. En esta figura en particular, no se utilizaron cilindros.	17
Figura 3.1. Aplicación de MCS a una esfera. Se muestran cortes transversales que pasan por su centro, para los casos de 5, 10 y 20 segmentos.	21
Figura 3.2. Curva generatriz de un paraboloides de altura H y división en segmentos de igual longitud.	22
Figura 3.3. Paraboloides y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo	22
Figura 3.4. Curva generatriz de un cono de altura H , división en segmentos de igual longitud y aplicación de la regla del trapecio.	23
Figura 3.5. Cono y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo	24
Figura 3.6. Curva generatriz de un neiloide de altura H , división en segmentos de igual longitud y aplicación de la regla del trapecio.	24
Figura 3.7. Neiloide y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo	25

Figura 4.1.1. Aplicación general del modelo cónico segmentado a una esfera de radio unitario para un número par de n segmentos. El eje z es perpendicular a la página.	29
Figura 4.1.2. Aplicación del modelo cónico segmentado a una esfera de radio unitario con 6 segmentos. Se aproxima el volumen mediante conos truncados y dos conos en los extremos. La figura muestra un corte transversal que pasa por el centro de la esfera.	33
Figura 4.1.3. Aproximación de volumen a una esfera de radio unitario con 10 segmentos mediante la aplicación del MCS. Cortes transversales en el centro de una esfera.	37
Figura 4.2.1. Aplicación general del modelo cónico segmentado a un paraboloides para un número n de segmentos	53
Figura 4.2.2. Aplicación del modelo cónico segmentado a un paraboloides con 5 segmentos.	58
Figura 4.2.3. Aplicación del modelo cónico segmentado a un paraboloides con 10 segmentos.	65
Figura 4.3.1. Aplicación general del modelo cónico segmentado a un cono para un número n de segmentos.	72
Figura 4.3.2. Aplicación del modelo cónico segmentado a cono con 5 segmentos.	75
Figura 4.3.3. Aplicación de MCS a un cono con 10 segmentos.	86
Figura 4.4.1. Diagrama general de MCS a un neiloide para n segmentos	89
Figura 4.4.2. Aplicación del modelo cónico segmentado a un neiloide con 5 segmentos.	92
Figura 4.4.3. Aplicación del modelo cónico segmentado a un neiloide con 10 segmentos.	106
Figura A.1. Corte transversal que muestra la aproximación al volumen de una esfera de radio unitario con 10 segmentos mediante la aplicación de MCS.	119
Figura A.2. Imagen de pantalla de la hoja de cálculo de Excel, para una esfera de radio unitario con 100 segmentos.	129
Figura B.1. Aplicación del modelo cónico segmentado a un paraboloides con 5 segmentos.	132
Figura B.2. Muestra de la hoja de cálculo, para el caso de un paraboloides con 500 segmentos.	140
Figura C.1. Aplicación del modelo cónico segmentado a un cono de 10 segmentos.	144
Figura C.2. Muestra de la hoja de calculo para el caso de un cono con 100 segmentos.	157
Figura D.1. Aplicación del modelo cónico segmentado a un neiloide con 10 segmentos.	161
Figura D.2. Muestra de la hoja de calculo para el caso de un cono con 100 segmentos.	181

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Tipos dendrométricos clásicos asociados con la función generatriz de acuerdo al valor p de la potencia.	11
Tabla 4.1.1. Valores de los radios de las secciones transversales de los extremos de segmentos en la esfera de radio unitario.	30
Tabla 4.1.2. Volúmenes de segmento para la semiesfera y volumen total de la esfera de radio unitario con 6 segmentos.	36
Tabla 4.1.3. Volúmenes por segmento para la semi-esfera con 5 segmentos y volumen total de la esfera.	38
Tabla 4.1.4. Volumen total de una esfera de radio unitario como función del número de segmentos utilizando las fórmulas generales de MCS en Excel.	39
Tabla 4.1.5. Volúmenes de segmento y totales en la esfera de radio unitario para 6 segmentos.	48
Tabla 4.1.6. Volúmenes de segmento y totales, resultantes de los métodos de cubicación estándar para una esfera de radio unitario con 10 segmentos. Se incluyen los resultados del volumen exacto y MCS, obtenidos en el capítulo previo, para efectos de comparación.	49
Tabla 4.1.7. Resultados del volumen total calculados mediante Excel para todos los métodos utilizados y con diferentes valores del número de segmentos, n , a partir de las fórmulas generales.	50
Tabla 4.1.8. Fórmulas generales para el volumen de segmento obtenidas para cada método de cubicación para una esfera de radio unitario.	51
Tabla 4.2.1. Valores asignados a la variable x para los cortes transversales del sólido de revolución de la figura 21 y sus respectivos valores y^2 dados por la ecuación [4.2.1], así como su raíz cuadrada, y , que representa los radios de dichas secciones transversales.	54
Tabla 4.2.2. Volúmenes por segmento y totales de paraboloides con 5 segmentos según fórmulas generales obtenidas para el MCS y el método exacto.	64
Tabla 4.2.3. Volúmenes de segmento y totales obtenidos mediante MCS y el método exacto para un paraboloides con 10 segmentos.	66
Tabla 4.2.4. Volúmenes totales como función del número de segmentos para el método exacto y MCS.	67
Tabla 4.2.5. Fórmulas generales para el volumen de segmento de paraboloides, obtenidas para cada método de cubicación.	71
Tabla 4.3.1. Valores asignados a la variable x por cortes transversales del cono.	73
Tabla 4.3.2. Fórmulas generales obtenidas para cada método de cubicación en un cono.	74
Tabla 4.3.3. Volumen total y por segmento mediante los métodos de cubicación para un cono con 5 segmentos.	85

Tabla 4.3.4. Volumen por segmento y volumen total de cada método de cubicación.	86
Tabla 4.3.5. Volúmenes totales para los diferentes métodos como función del número de segmentos.	87
Tabla 4.3.6. Fórmulas generales para el volumen de segmentos obtenidas para cada método de cubicación para un cono.	88
Tabla 4.4.1. Valores asignados a la variable x de la función generatriz del neiloide.	90
Tabla 4.4.2. Fórmulas generales obtenidas para cada método de cubicación para un neiloide.	92
Tabla 4.4.3. Valores dados a la ecuación generatriz de un neiloide.	93
Tabla 4.4.4. Volumen de cada segmento y de cada método de cubicación según fórmulas generales obtenidas para un neiloide con 5 segmentos.	105
Tabla 4.4.5. Volumen por segmento y por método de cubicación para un neiloide con 10 segmentos.	107
Tabla 4.4.6. Volúmenes totales obtenidos en Excel para cualquier n a partir de las formulas generales.	107
Tabla 4.4.7. Fórmulas generales obtenidas para cada método de cubicación de un neiloide.	110
Tabla 5.1. Resumen de fórmulas generales para el volumen de segmento como función del número de segmento y del número total de segmentos, para los métodos MCS, Smalian, Huber y Newton.	113
Tabla A.1. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para una semi-esfera con 6 segmentos, o bien, una esfera con 12 segmentos.	130
Tabla A.2. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para una semi-esfera con 10 segmentos, o bien, una esfera con 20 segmentos.	130
Tabla A.3. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para una semi-esfera con 50 segmentos, o bien, una esfera con 100 segmentos.	131
Tabla B.1. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un paraboloides con 20 segmentos.	141
Tabla B.2. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un paraboloides con 100 segmentos	141
Tabla C.1. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un cono con 20 segmentos.	158
Tabla C.2. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un cono con 100 segmentos.	158
Tabla D.1. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un neiloide con 20 segmentos.	182
Tabla D.2. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un neiloide con 100 segmentos.	182

1. INTRODUCCIÓN

A pesar de los notables avances en el desarrollo de nuevos materiales, el material madera, por sus características, físicas, químicas, mecánicas, estéticas, etc., continúa siendo un material insustituible con gran demanda para usos diversos de la sociedad.

La madera, es uno de los principales productos de un bosque. En particular, el tronco contiene la mayor parte de la madera en un árbol. Los inventarios forestales para estimar la cantidad de madera aprovechable de un determinado bosque se realizan mediante estudios estadísticos que involucran estimaciones de volumen de los troncos de muestras de árboles. La estimación de las dimensiones de un tronco como función del tiempo representa el parámetro de referencia en investigaciones sobre el crecimiento de los árboles en un bosque. La estimación de la capacidad de un bosque para capturar bióxido de carbono se realiza en función de su biomasa, gran parte de la cual está constituida por los troncos de los árboles. En este tipo de investigaciones, también interviene la determinación del volumen de dichos troncos. Finalmente, los troncos y trozas se comercializan por su volumen. De esta forma, en relación con un bosque, tanto el aspecto de investigación como el económico dependen en gran medida de la estimación del volumen de los troncos de sus árboles.

La determinación del volumen de madera, de un tronco o troza, es un proceso que requiere extremo cuidado. En el sector forestal la venta de productos de primera transformación esta basada en medidas estándar de cubicación, entre las que se pueden mencionar el m^3 y pt, las cuales tienen un valor en el mercado. No se determinaría la cantidad justa por el producto a causa de una mala estimación de volumen. Existe una cadena de involucrados, desde el poseedor del bosque, el dueño del aserradero, el comerciante de la madera aserrada, sus trabajadores y el usuario final. El error en la estimación del volumen de madera puede ser por exceso o por defecto, de manera que tanto a vendedores como a compradores les conviene la mejor estimación posible. Existen diferentes métodos para llevar acabo dicha tarea, unos más exactos que otros, los cuales se discutirán posteriormente. El conocimiento de dichos métodos

y sus características es una condición necesaria para toda persona involucrada. Es común escuchar en este campo, que hay quienes buscan aprovecharse de la situación y quieren comprar madera en base a la estimación por algún método y quieren vender en base a otro, según les convenga. Saben muy bien cual método sub-estima y cual sobre-estima el volumen de los troncos de madera que comercializan.

A pesar de que el término *tronco* de árbol es de uso común, su significado presenta un poco de ambigüedad en la literatura. En este trabajo, de conformidad con (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003), se entenderá como tronco a la parte de un árbol que está por encima del cuello de la raíz una vez descontadas las ramas, y como fuste, a la parte del tronco comprendida por encima del cuello de la raíz y hasta un diámetro determinado por un interés comercial particular. En el caso de las coníferas el tronco y el fuste son diferentes, pero para las latifoliadas coinciden (Figura 1.1).

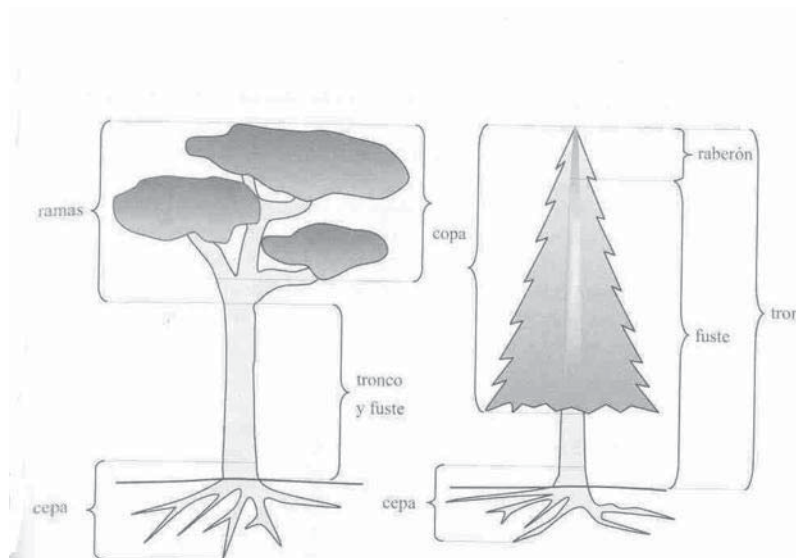


Figura 1.1. Partes generales de un árbol de latifoliada y conífera. (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003).

La forma de los troncos está sujeta a una gran cantidad de factores como los climáticos, características y tipo de terreno, entre otros, y varía no solo en las diferentes secciones de un mismo tronco, sino también dentro de la misma especie y de especie a especie. La

determinación de la geometría de un tronco de árbol constituye un problema fundamental para varias disciplinas. Representa prácticamente un campo de investigación en si mismo. Sin embargo, después de más de un siglo de investigación, todavía no se tienen respuestas universalmente aceptadas. Se han propuesto teorías de diferente naturaleza, entre las que destaca la teoría mecánica, que considera a la forma de un tronco como respuesta a los vientos para una determinada condición de anclaje al suelo. La teoría predice que la forma de un tronco sería la de un paraboloides cúbico ó cuadrático, según fuera el tipo de anclaje al suelo, rígido ó semi-rígido (Larson, 1963).

Una de las tareas prioritarias en ciencia y tecnología forestal corresponde a la estimación de las dimensiones de los árboles, en particular, de troncos y trozas para determinar los volúmenes comerciales de madera. Por simplicidad, a lo anterior se le denominará aquí *cubicación*, aún cuando el término es mucho más amplio y se refiere a cualquier determinación de volumen de madera, en rollo o tabla (Alfaro-Trujillo, 2008). La rama que se encarga de ese estudio se llama Dendrometría e involucra procedimientos de medición y cálculo. El volumen de un tronco o fuste, depende principalmente de su altura, área basal y forma. Es uno de los parámetros más difíciles de medir porque cualquier variación en las variables anteriores se reflejará en la estimación del volumen (Brack, 1999).

Para comprender los fundamentos de la cubicación habrá que remontarse unos 2500 años atrás. Sus orígenes comienzan con los antiguos griegos quienes, aplicando el *método de agotamiento*, hallaban el área exacta de cualquier polígono al dividirlo en triángulos y sumar el área de estos. Para aproximar el área de figuras curvas inscribían polígonos en ellas, observando que al aumentar el número de lados del polígono se incrementaba el grado de aproximación (Stewart, 2002).

Con el transcurso del tiempo, se desarrollaron diferentes métodos de aproximación para estimar áreas bajo curvas los cuales dieron origen al cálculo. Uno de tales métodos se conoce como *regla del trapecio* al cual esta vinculado directamente el trabajo de la presente tesis. De igual forma, se desarrollaron métodos de aproximación para estimar volúmenes de sólidos, en particular, de sólidos de revolución.

Se debe señalar la importancia de las mediciones, especialmente la del diámetro. Por lo regular, su medición es simple y con ella se puede calcular el área de la sección transversal correspondiente. En ocasiones el contorno de la sección transversal, de la troza o tronco, difiere de la forma circular y esa excentricidad debe ser considerada. En Dendrometría se definen diferentes tipos de diámetros como son: el diámetro medio, el diámetro medio cuadrático y el diámetro medio geométrico, los cuales son de gran utilidad en los casos en que las secciones presentan irregularidades (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003; Romahn de la Vega, et al., 1994; Bruce and Schumacher, 1965).

Si la forma de los troncos no es tan irregular y se aproxima a un sólido de revolución, es posible modelar de manera relativamente fácil su geometría, por secciones. En la literatura forestal tradicional, a dichas secciones se les relaciona con las formas geométricas simples: cilindro, paraboloides, cono y neiloide, a las que se les denomina, tipos dendrométricos. En este caso, paraboloides y neiloide corresponderían al paraboloides cuadrático y al paraboloides cúbico, respectivamente, mencionados en el párrafo precedente en relación con la teoría mecánica. Naturalmente, los troncos y trozas reales no tienen la forma de un cuerpo geométrico perfecto pero, a pesar de ello, por mucho tiempo se recurrió a los tipos dendrométricos para estimar su volumen (Romahn de la Vega, *et al.*, 1994; Bruce y Shumacher, 1965; Chapman, 1921). Actualmente, se desarrollan tipos dendrométricos más complejos en base a funciones de perfil o ahusamiento para diferentes especies, cuya discusión queda fuera del alcance del presente trabajo (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003; West, 2004). Para distinguir los tipos dendrométricos tradicionales de estos últimos, se les denominará aquí *tipos dendrométricos clásicos* de conformidad con (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003).

Existen diferentes formas para llevar a cabo la cubicación o aproximación al volumen de un sólido de revolución. Se distinguen dos tipos de métodos: los métodos directos y los métodos indirectos (Brack, 1999). Entre los métodos directos se pueden mencionar el conocido método de desplazamiento de fluido o xylometría (Figueredo-Filho *et al.*, 2000), el método gráfico, en el cual se grafica la sección transversal como función de la altura y el área bajo la curva corresponde al volumen, y los métodos por secciones que incluyen a los conocidos métodos de

Huber, de Smalian y de Newton. Estos tres últimos métodos son los más referidos en la literatura por lo que se les denominará aquí simplemente como *métodos estándar de cubicación*. Por otro lado, se encuentran los métodos indirectos entre los cuales se incluyen las ecuaciones o funciones de volumen y las de perfil, mencionadas en el párrafo precedente. Éstos dos últimos, representan métodos sofisticados de alta precisión que se desarrollan en la investigación de frontera sobre el tema y se aplican en estudios de aprovechamiento de bosques (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003; West, 2004; Hernández y Soto-Soto, 2005; Cruz-Cobos *et al.*, 2005).

Entre los métodos por secciones, puede incluirse un modelo general desarrollado recientemente, en base a la aplicación de la regla del trapecio, denominado Modelo Cónico Segmentado (MCS), el cual propone la aproximación a la forma de cualquier sólido de revolución mediante una secuencia de conos truncados (Cruz de León y Cruz de León, 2006). En dicho trabajo se sugiere, como caso particular, la posible aplicación de dicho modelo al caso de las mediciones forestales con la finalidad de cubicar, de manera aproximada, troncos o trozas de árbol.

Es común en la práctica, determinar el volumen de una troza de conífera mediante la ecuación de un cono truncado. Recientemente, se encontró que una aplicación similar ya había sido realizada, a nivel de investigación, para estimar el volumen del tronco en un par de coníferas. En particular, se compararon los resultados de los métodos de Smalian, Huber y Bruce, con los que proporcionó la estimación de volumen considerando a los segmentos de interés como una secuencia de conos truncados (Plank and Cahill, 1984). El método de Bruce representa una pequeña variación al método de Smalian y de acuerdo a su particular derivación, es un método aplicable a las trozas que tienen como extremo a la zona de corte en donde se derriba el árbol, que son las de mayor interés comercial (Bruce, 1982). Por otro lado, en la misma referencia anterior, se menciona que la ecuación del cono truncado ya estaba aceptada en el Pacífico Noroeste de USA para diferentes especies, con el fin de compensar la sobre-estimación y sub-estimación de volumen, que ocasionaría el uso de cualquiera de los otros dos métodos de uso común en la práctica, Smalian ó Huber, en las diferentes secciones de un mismo tronco. El MCS fue desarrollado de manera independiente a los trabajos anteriores. Sin embargo,

conglomera todas las características discutidas y establece formalmente las bases de un método general aplicable a cualquier geometría de sólido de revolución y por lo tanto a cualquier especie de tronco de árbol con una geometría simétrica.

El MCS, no ha sido aplicado de manera formal a ningún sólido de revolución. Únicamente se estudió, a manera de ejemplo, el caso de una esfera de radio unitario dividida en 10 segmentos (Cruz de León y Cruz de León, 2006) y se comparó con el resultado de otro método de aproximación mediante cilindros que reporta la literatura (Stewart, 2002). Como primer caso de aplicación general del modelo se presenta, en este trabajo, la determinación del volumen de una esfera de radio unitario como función del número de segmentos y el cálculo analítico de dicho volumen en el límite cuando el número de segmentos tiende a infinito.

El principal objetivo de la presente tesis consistió en llevar a cabo la primera aplicación formal del MCS a la cubicación forestal. Para este propósito, se requieren sistemas de referencia conocidos, en donde se pueda establecer una comparación con los métodos estándar de cubicación. Se eligió como sistemas de prueba a los tipos dendrométricos clásicos para los cuales ya se conocen de manera exacta tanto su volumen total como por secciones. Finalmente, se presenta el cálculo analítico del volumen en el límite cuando el número de segmentos tiende a infinito en el cual el MCS recupera los volúmenes exactos ya conocidos para dichas figuras.

Como material adicional, se llevó a cabo también, la determinación del volumen de los tipos dendrométricos clásicos como función del número de segmentos mediante los métodos estándar de cubicación. Hasta donde se sabe, tampoco este tipo de trabajo había sido realizado previamente. Se compararon los resultados con los obtenidos a través del MCS

Cabe mencionar, que la propuesta y desarrollo de nuevos métodos por secciones continúa siendo un campo activo a nivel de investigación avanzada, de manera paralela al de las ecuaciones de volumen y de perfil. Lo anterior no se sabía antes de la revisión de literatura realizada para el presente trabajo, se creía que ese tipo de investigación ya no estaba vigente a ese nivel. Tal observación fue un aliciente durante el transcurso de este trabajo. Existe una

extensa cantidad de publicaciones al respecto, cuya discusión no es posible abarcar aquí. Se pueden citar como ejemplos, una propuesta reciente de generalización del método de Bruce y una aplicación de la misma (Doruska y Patterson, 2004; Patterson *et al.*, 2007).

2. CONCEPTOS GENERALES

2.1. Métodos aproximados para determinar el área bajo una curva en un intervalo

El principio fundamental del cálculo integral para determinar el área bajo una curva $y = f(x)$, en un intervalo $[a, b]$ de la variable x , es usualmente explicado como sigue: se divide el intervalo en un número n de segmentos o subintervalos, $[x_{i-1}, x_i]$, de igual longitud, $\Delta x = (b-a)/n$, en donde $i=1,2,\dots,n$; $x_0 = a$ y $x_n = b$. A esos subintervalos, se les asocian rectángulos de alturas $f(x_i^*)$ en donde x_i^* puede ser cualquier punto dentro de los mismos. Los puntos x_i^* se llaman *puntos muestra*. Los más utilizados son: los extremos izquierdos, los extremos derechos y los puntos medios de los subintervalos. El área bajo la curva se aproxima mediante la suma de áreas de los rectángulos, como se ilustra en la figura 2.1.

[2.1]

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

Conforme el número de subintervalos se incrementa, la aproximación es mejor y en el límite cuando ese número tiende a infinito, se obtiene el área exacta. En ese límite, la suma se define como una integral particular denominada *integral definida* y se escribe como

[2.2]

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*) \Delta x + f(x_2^*) \Delta x + \dots + f(x_n^*) \Delta x]$$

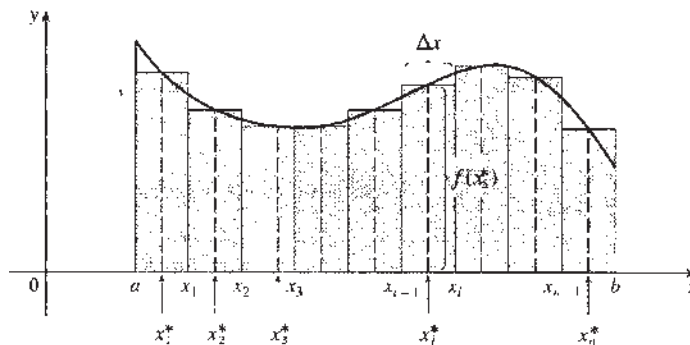


Figura. 2.1. Método de aproximación mediante rectángulos para determinar el área bajo una curva, cuando $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$.

De hecho, los segmentos en la figura 2.1, pueden tener diferente longitud y la condición sería que en el límite, cuando su número tiende a infinito, la longitud del segmento mayor tienda a cero (Stewart, 2002; Courant and John, 1965). Este hecho es relevante en la propuesta general de aplicación del Modelo Cónico Segmentado al campo forestal (Cruz de León y Cruz de León, 2006)

2.2. Métodos aproximados para determinar el volumen de un sólido de revolución

Un sólido de revolución se genera por una rotación de 2π alrededor del eje x , de la curva $y = f(x)$, considerando también el área bajo ella, como puede verse en la figura 2.2 para el caso de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

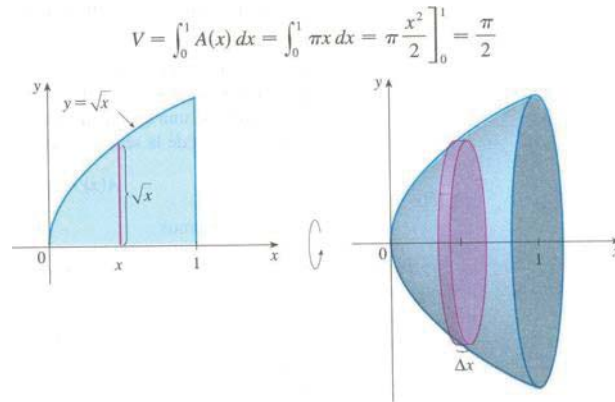


Figura 2.2. Sólido de revolución generado al realizar una rotación de 2π de la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y el área bajo ella, alrededor del eje x (Stewart, 2002).

La misma rotación de los n rectángulos utilizados en la aproximación del área, origina una aproximación al volumen del sólido de revolución mediante n cilindros. En la figura 2.3, se ilustra dicha aproximación para el caso de una esfera de radio unitario, mediante 5, 10 y 20 cilindros, respectivamente. El volumen exacto se obtiene cuando n tiende a infinito (Stewart, 2002).

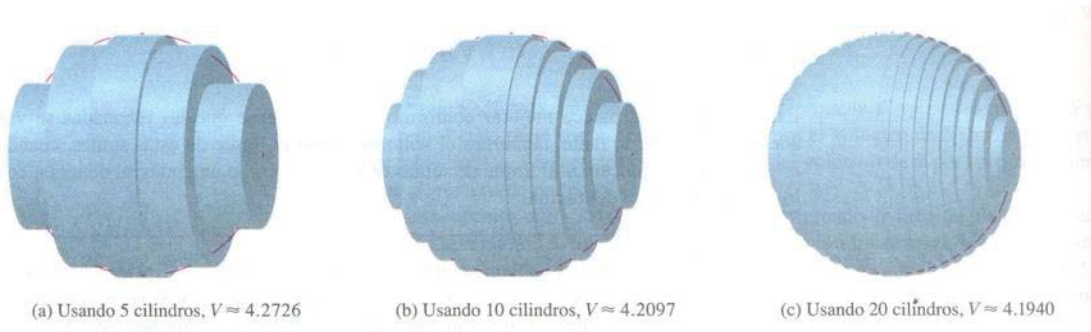


Figura 2.3. Aproximación al volumen de una esfera con radio unitario ($r=1$), mediante un número n de cilindros, para los casos de $n = 5, 10$ y 20 , respectivamente (Stewart, 2002).

2.3. Tipos dendrométricos clásicos

Los troncos de los árboles que por causas naturales no han sido perturbados, tienden a tomar una forma simétrica, que se asemeja a un sólido de revolución. Los troncos no tienen una forma geométrica predeterminada. Para estimar su volumen se recurre a modelarlos mediante

los tipos dendrométricos, como se muestra en la figura 2.4. Los tipos dendrométricos que tradicionalmente se asocian a ellos son los tipos dendrométricos clásicos: cilindro, cono, paraboloides y neiloide como se muestra en la figura 2.4. (Chapman, 1921; Bruce y Shumacher, 1965; Romahn de la Vega *et al.*, 1994).

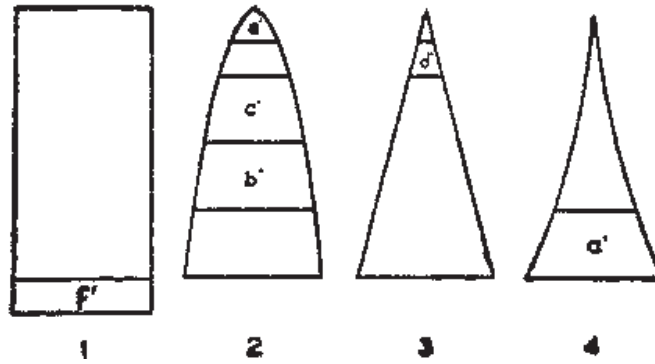


Figura 2.4. Tipos dendrométricos clásicos. 1) cilindro; 2) paraboloides; 3) cono y 4) neiloide (Figura tomada de Chapman, 1921).

Las geometrías de los tipos dendrométricos clásicos son generadas por la función $y^2 = Ax^p$, en donde p es un número entero positivo que define la forma del cuerpo de que se trata, A es una constante denominada el parámetro de forma, x y y son las coordenadas en un sistema cartesiano bidimensional. En resumen, dichas geometrías se generan de acuerdo con la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Tipos dendrométricos clásicos asociados con la función generatriz de acuerdo al valor p de la potencia.

Valor de "p"	Sólido de revolución
0	cilindro
1	paraboloides
2	cono
3	neiloide

Existen varias formas de modelar un árbol con base en estas geometrías. Sin embargo, no se aprecia uniformidad en la literatura al respecto como puede verse en las dos formas de modelos que se muestran en la figura 2.5 (Chapman y Meyer, 1949; Romahn de la Vega *et al.*,

1994). Incluso, se encuentran otras versiones como es el caso de las coníferas, que se muestra en la figura 2.6, (Plank y Cahill, 1984).

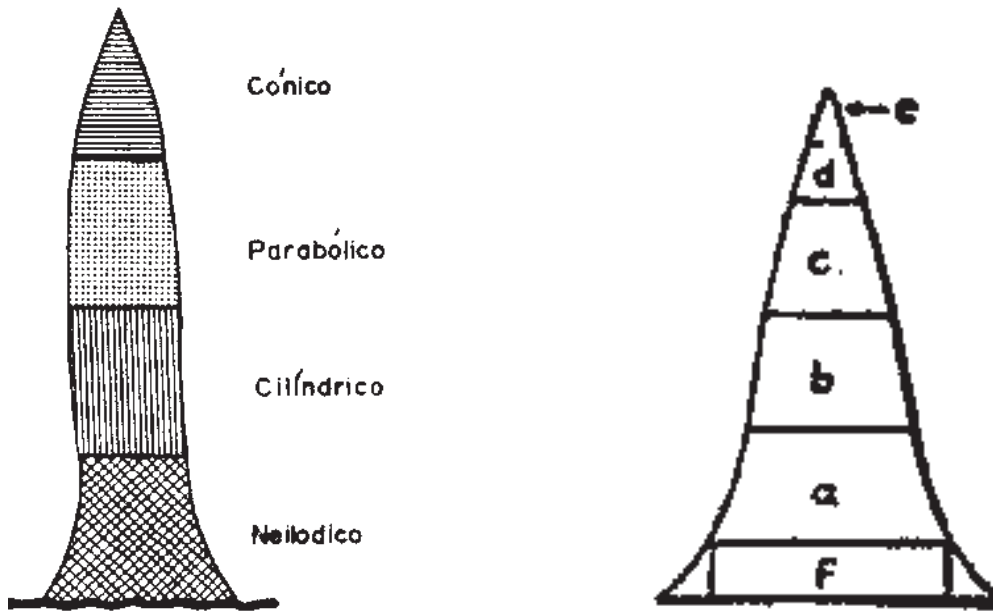


Figura 2.5. Formas geométricas que se asocian a las diferentes secciones de un tronco de árbol. Izquierda) Romahn de la Vega et al., 1994; Derecha) Chapman and Meyer, 1949. La geometría de la figura a la derecha esta asociada con las geometrías de la figura 2.4.

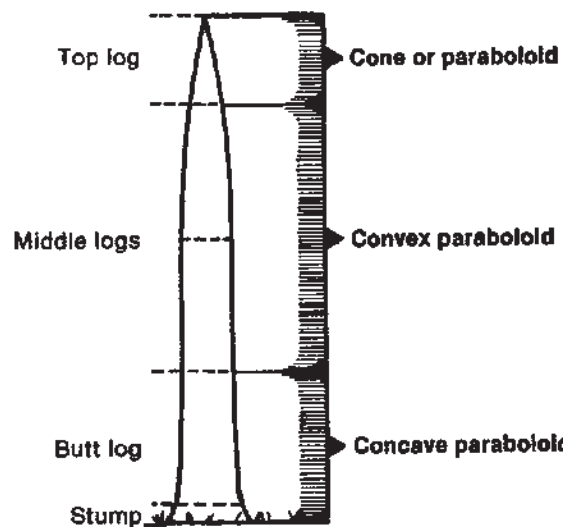


Figura 2.6. Modelo para coníferas. Figura tomada de (Plank y Cahill, 1984).

Mediante técnicas estándar de cálculo integral, es posible calcular el volumen exacto para los tipos dendrométricos clásicos así como para segmentos de los mismos.

2.4. Funciones de volumen y de perfil

Actualmente, ya no se buscan geometrías generales para troncos de cualquier árbol. Las investigaciones están dirigidas hacia la determinación de funciones de volumen y funciones de perfil (o ahusamiento) para cada especie de interés. De esta forma, se ha generado una extensa lista de dichas funciones (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003; West, 2004; Cruz-Cobos *et al.*, 2005; Hernández y Soto-Soto, 2005). La función de volumen del tronco, proporciona el volumen total como función de los dos parámetros característicos en mediciones forestales que son el diámetro a la altura del pecho (D_p) y la altura total (H), mientras que una función de perfil es una función que proporciona el diámetro como función de los dos parámetros anteriores y de la altura h (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003; West, 2004). Las funciones de perfil son funciones continuas de variación suave que proporcionan la forma del tronco para cualquier zona. No están presentes los cambios abruptos de forma que estaban involucrados al usar los tipos dendrométricos clásicos, en donde además *no es posible determinar con precisión en donde termina una geometría e inicia otra*. Los tipos dendrométricos clásicos son casos particulares muy simples de funciones de perfil, representan formas muy básicas para determinación de volumen que continúan siendo de uso común en la práctica. En la figura 2.7, se muestra la diferencia entre el modelo de tronco para *Eucalyptus pilularis*, mediante una función de perfil (línea continua), y mediante los tipos dendrométricos, neiloide, paraboloides y cono (línea punteada) (West, 2004).

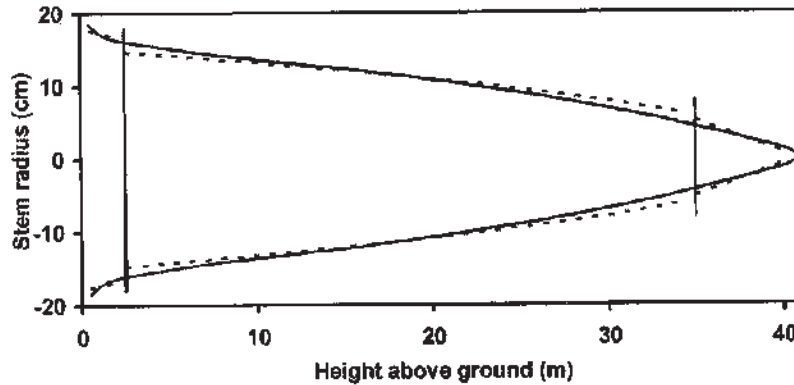


Figura 2.7. Diferencia entre una función de perfil (línea continua) y mediante tipos dendrométricos (línea punteada) para *Eucalyptus pilularis*, (West, 2004).

2.5. Métodos estándar de cubicación

Los métodos de cubicación más conocidos son: el método de Huber, de Smalian y de Newton, que se definen a través de sus fórmulas de cubicación. El método de Newton es el más exacto, tiene la particularidad de reproducir de manera exacta el volumen para todos los tipos dendrométricos clásicos, los cuales serán los valores de referencia. Si se denota a S y S' como las áreas de las secciones transversales de los extremos de un segmento de tronco o troza de longitud L , $S_{1/2}$ al área de la sección transversal correspondiente a la mitad, $L/2$, dichas fórmulas son, respectivamente, (Chapman y Meyer, 1949; Castro, 1955; Bruce y Schumacher, 1965; Romahn de la Vega, *et al.*, 1994; Avery y Burkhart, 2002).

[2.3]

$$V^H = S_{1/2}L$$

[2.4]

$$V^S = \left[\frac{S + S'}{2} \right] \frac{L}{2}$$

[2.5]

$$V^N = \left[\frac{S + 4S_{1/2} + S'}{6} \right] L$$

2.6. La Regla del Trapecio

Existe una forma particular de seleccionar los rectángulos en la aproximación del área bajo una curva. Se relaciona a cada subintervalo o segmento con un rectángulo cuya área es el promedio de los rectángulos con alturas $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$ las cuales corresponden a las alturas en sus extremos. La aproximación resultante es equivalente a una aproximación mediante trapecios en donde una línea recta conecta a los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ de cada segmento como se muestra en la figura 2.8, a la que se denomina *regla del trapecio* (Stewart, 2002).

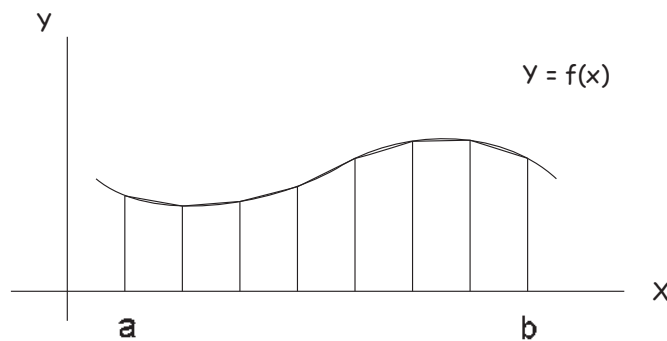


Figura 2.8. Aproximación al área bajo una curva en un intervalo mediante la regla del trapecio.

2.7. El Modelo Cónico Segmentado (MCS)

Si se gira la curva de la figura 2.8, y el área bajo ella, un ángulo 2π alrededor del eje x , se genera un sólido de revolución. Si se aplica la misma rotación a los trapecios, resulta una aproximación al volumen de dicho sólido mediante conos truncados. El volumen total se estima obteniendo primero el volumen de cada uno de los trapecios y posteriormente se suman. Ya sea que se utilicen conos truncados de la misma o diferente longitud, el modelo de aproximación descrito, es a lo que se denomina Modelo Cónico Segmentado (MCS) (Cruz de León y Cruz de León, 2006). El modelo está soportado en la ecuación de volumen de cono truncado.

[2.6]

$$v = \frac{\pi l (d^3 - d'^3)}{12 (d - d')}$$

en donde d y d' son los diámetros mayor y menor de un cono truncado de longitud l . Realizando un poco de algebra, la ecuación anterior también se puede expresar de la siguiente manera,

[2.7]

$$v = \frac{\pi l}{12} [d^2 + d'^2 + dd']$$

o bien,

[2.8]

$$v = \frac{l}{3} \left[d^2 + d'^2 + \sqrt{SS'} \right]$$

que es su forma más conocida. El cono y el cilindro son casos particulares de esta ecuación en los limites cuando d' tiende a cero y cuando d' tiende a d , respectivamente.

2.8. Aplicación del MCS a las mediciones forestales

Los métodos de aproximación utilizan comúnmente segmentos de igual longitud por simplicidad pero los principios del cálculo son generales y valen para el caso de segmentos de diferente longitud (Courant y John, 1965; Stewart, 2002). En base a lo anterior, la aplicación general del modelo cónico segmentado al campo de las mediciones forestales que se sugiere en la referencia Cruz de León y Cruz de León (2006) se ilustra en la figura 2.9.

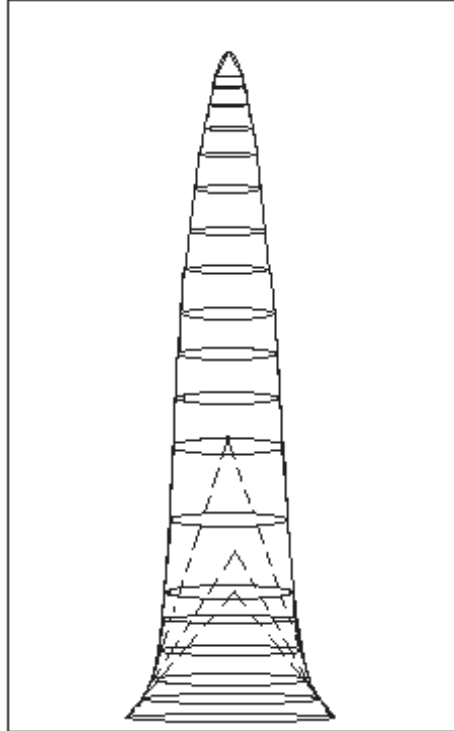


Figura 2.9. El Modelo Cónico Segmentado (MCS). En general, el modelo aproxima cualquier geometría de un tronco de árbol mediante segmentos en la forma de conos truncados, cilindros y un cono en la punta. En esta figura en particular, no se utilizaron cilindros.

En dicha referencia, también se muestra que el método de Newton queda en función de los métodos de Huber y Smalian mediante la siguiente expresión.

[2.9]

$$V^N = \left(\frac{2}{3}\right)V^H + \left(\frac{1}{3}\right)V^S.$$

La ecuación [2.9] es general y puede verificarse fácilmente a partir de la ecuación [2.5].

2.9. Diámetros Dendrométricos

Cuando una sección transversal de un tronco o troza es asimétrica respecto a su eje, en dendrometría se definen: el diámetro medio aritmético (d_a), el diámetro medio cuadrático (d_c) y el diámetro medio geométrico (d_g), basados en los diámetros extremos de la troza o tronco que corresponden al diámetro mayor y diámetro menor (d_m y d_M), mediante las siguientes expresiones.

[2.10]

$$d_a = \frac{d_m + d_M}{2}$$

$$d_c = \sqrt{\frac{d_m^2 + d_M^2}{2}}$$

$$d_g = \sqrt{d_m d_M}$$

2.10. Diámetros medios para una altura de pecho irregular

Es muy común que, en ocasiones, la zona de interés para la medición de diámetro no solo sea asimétrica, sino también muy irregular o con deformaciones. En particular, cuando se requiere medir el diámetro característico en mediciones forestales que es el diámetro a la altura del pecho, denominado así porque se le considera a la altura de 1.30 metros y se encuentra exactamente en la zona mencionada, se mide el diámetro a una distancia determinada por encima de la altura del pecho y el diámetro a esa misma distancia por debajo de la misma; obteniendo de esta manera un diámetro promedio. En base a estos dos diámetros, se definen los mismos tipos de diámetros que en la sección precedente. (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003).

3. METODOLOGÍA

La metodología utilizada en el presente trabajo se basa, en general, en los métodos de aproximación del cálculo y en particular, en el MCS, de conformidad con el material mostrado en el capítulo anterior. Se utiliza además, álgebra elemental para derivar las ecuaciones y aplicar el límite cuando el número de segmentos tiende a infinito. En el presente capítulo se describe, de manera esquemática la forma en que se aplicará dicho modelo a una esfera de radio unitario, un paraboloides, un cono y un neiloide, como función del número de segmentos.

Cruz de León y Cruz de León (2006), proponen al MCS como un método general de aproximación para cualquier sólido de revolución, que tiene su fundamento matemático en el análogo tridimensional de la regla del trapecio, del cálculo y la ecuación de cono truncado [2.8]. Alfaro Trujillo (2008), muestra que los métodos estándar de cubicación también corresponden a métodos particulares de aproximación del cálculo, que pueden ser definidos en base a diferentes relaciones matemáticas y haciendo uso de la definición de los diámetros dendrométricos, generalizada a cualquier segmento o troza. Por lo tanto, dichos métodos pueden también ser aplicados a cualquier sólido de revolución, no solo a troncos y trozas. Esa tarea se lleva a cabo aquí, por vez primera, para el caso de la esfera de radio unitario como función del número de segmentos, de manera similar al MCS.

3.1. Estimación de Volúmenes

Para estimar el área debajo de una curva es necesario estimar por separado el área del rectángulo correspondiente a cada segmento considerado y posteriormente sumar las áreas de todos los segmentos. Por facilidad, se utilizan segmentos de igual longitud. De conformidad con lo mencionado en la sección 2.6, para una función dada $f(x)$, la altura del i -ésimo segmento será $f(x_i^*)$, en donde x_i^* es el punto muestra correspondiente a dicho segmento. Si se denota por l a la longitud de cada segmento, el área para cada segmento se define como:

[3.1]

$$A_i = lf(x_i^*),$$

y el área total como,

[3.2]

$$A_T = \sum_{i=1}^n A_i .$$

En forma similar, para el caso del volumen de un sólido de revolución, al dividir el eje x en intervalos de igual longitud, l , y considerar el volumen asociado a ellos, se tendrá una especie de secciones o rebanadas. En general, al utilizar métodos de aproximación para estimar el volumen de cada rebanada, se aproxima su geometría a la de un cilindro con una sección transversal promedio por cada método. Se define el volumen del i -ésimo segmento como,

[3.3]

$$V_i = lS_i ,$$

en donde S_i es la sección transversal promedio del i -ésimo segmento. Al sumar el volumen de los cilindros, se tendrá una estimación del volumen total del sólido de revolución, que se define como:

[3.4]

$$V_n = \sum_{i=1}^n V_i .$$

En particular, al aplicar el MCS se aproxima cada rebanada del sólido de revolución mediante un cono truncado. Este procedimiento se aplicará a las geometrías de interés como se describe a continuación.

3.2. Estimación del volumen de una esfera de radio unitario

Cruz de León y Cruz de León (2006), obtuvieron el volumen para una esfera de radio unitario dividida en diez segmentos mediante el MCS. En este trabajo se deriva una fórmula general válida para cualquier número de segmentos.

En la figura 3.1, se ilustra la forma como se aplica el MCS a una esfera. La aproximación al volumen se realiza mediante conos truncados y dos conos en los extremos. La figura muestra cortes transversales de la esfera, que pasan por su centro, para los casos de 5, 10 y 20 segmentos, respectivamente.

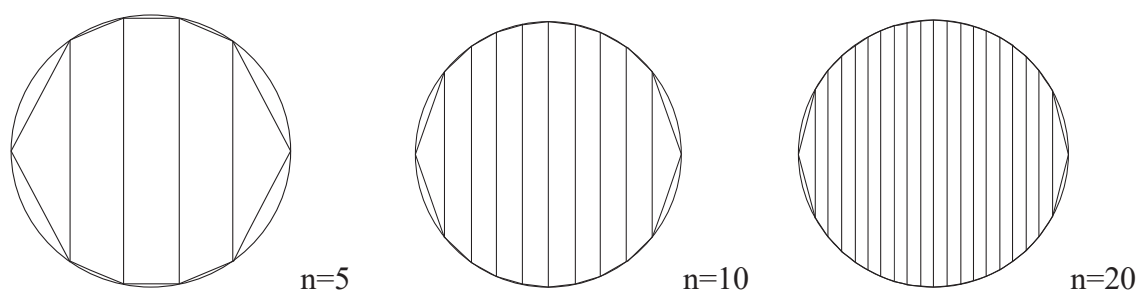


Figura 3.1. Aplicación del MCS a una esfera. Se muestran cortes transversales que pasan por su centro, para los casos de 5, 10 y 20 segmentos.

3.3. Estimación del volumen de un paraboloide

De acuerdo con el material de la sección 2.6, uno de los métodos para aproximar el área bajo una curva es utilizando la regla del trapecio para un determinado número de segmentos. El primer tipo dendrométrico de interés para este trabajo es el paraboloide. La aplicación de la regla del trapecio para estimar el área bajo la curva generatriz de un paraboloide, de altura H , se ilustra en la figura 3.2. Se muestra como ejemplo el caso para 10 segmentos, de longitud $H/10$.

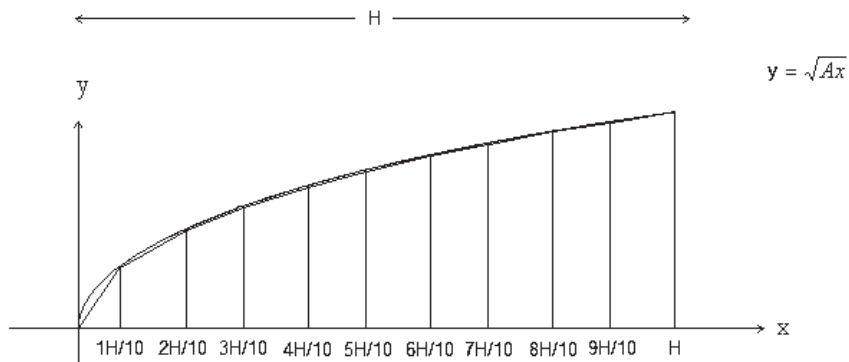


Figura 3.2. Curva generatriz de un paraboloides de altura H y división en segmentos de igual longitud.

Si se gira la curva de la figura 3.2, junto con el área total bajo ella, un ángulo de 2π alrededor del eje x , se generará entonces un paraboloides. Si se aplica el mismo giro a los trapecios, se generaran conos truncados. El resultado final, será una aproximación al volumen del paraboloides mediante conos truncados, que corresponde precisamente a la aplicación del MCS, como se muestra en la figura 3.3.

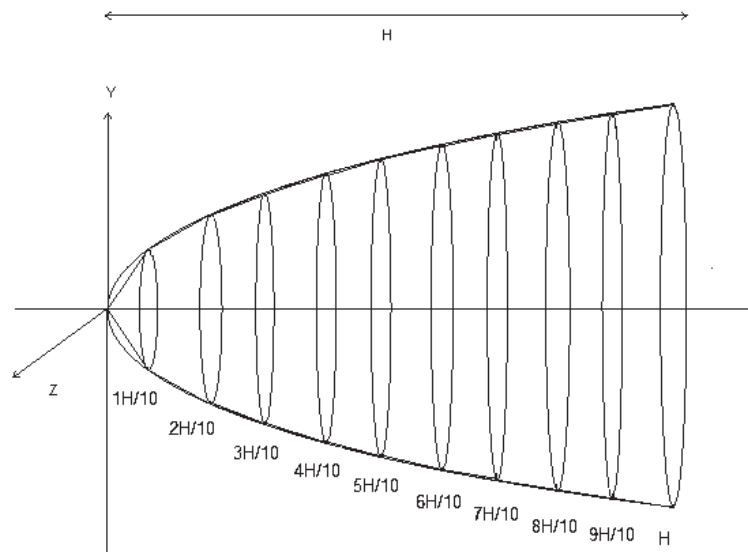


Figura 3.3. Paraboloides y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo.

3.4. Estimación del volumen de un cono

Al igual que en el caso anterior, en la figura 3.4, se muestra la línea generatriz de un cono de altura H , con la división en diez segmentos de igual longitud y la correspondiente aplicación de la regla del trapecio. En este caso la regla del trapecio proporciona el área exacta bajo la curva.

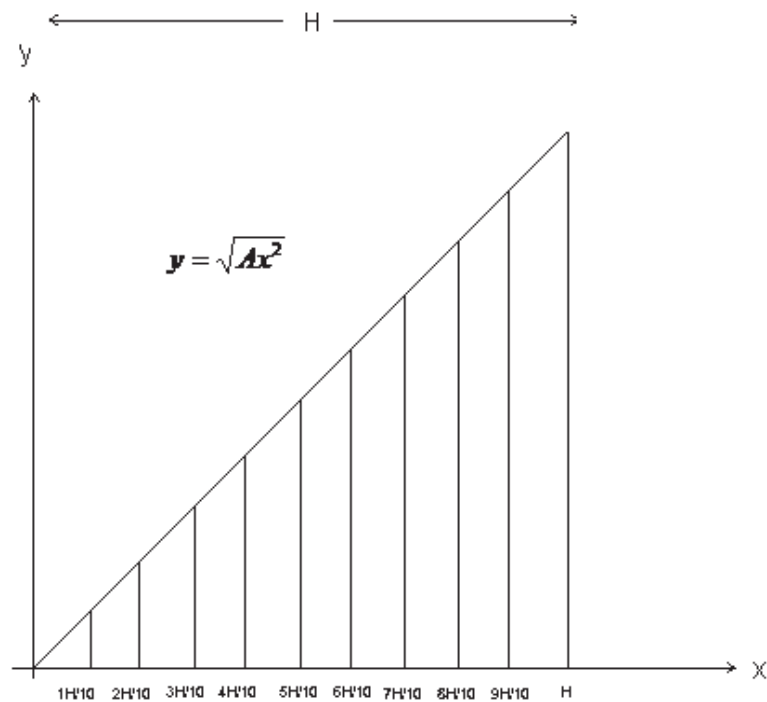


Figura 3.4. Curva generatriz de un cono de altura H , división en segmentos de igual longitud y aplicación de la regla del trapecio.

Si se gira la curva de la figura 3.4, junto con el área bajo ella, en un ángulo de 2π alrededor del eje x , se generará un cono. Al aplicar el mismo giro a los trapecios, se generan conos truncados que no es otra cosa que la aplicación del MCS a un cono. Lo anterior se ilustra en la figura 3.5.

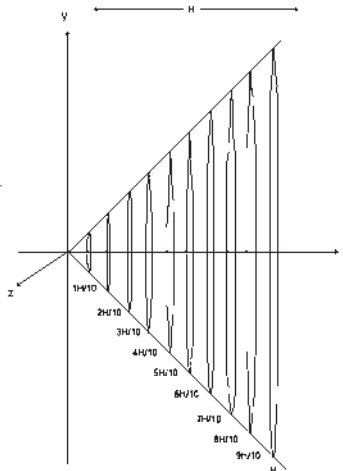


Figura 3.5. Cono y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo.

Como puede verse, este es un caso trivial en donde el MCS proporciona el volumen exacto.

3.5. Estimación del volumen de un neiloide

De forma similar a los casos anteriores, en la figura 3.6, se muestra la curva generatriz de un neiloide de altura H , la división en diez segmentos de igual longitud y la correspondiente aplicación de la regla del trapecio para estimar de manera aproximada el área bajo ella.

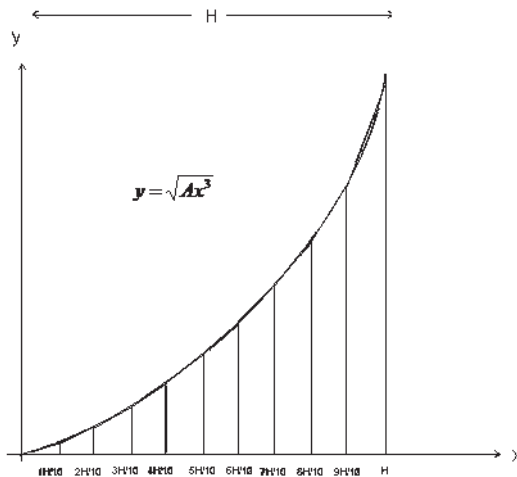


Figura 3.6. Curva generatriz de un neiloide de altura H , división en segmentos de igual longitud y aplicación de la regla del trapecio.

En la figura 3.7, se muestra el sólido de revolución generado al girar la curva de la figura 3.6, junto con el área bajo ella, en un ángulo de 2π alrededor del eje x , denominado neiloide. También se muestran los conos truncados obtenidos al girar de igual manera a los trapecios de la figura 3.6, lo que corresponde a la aplicación del MCS a un neiloide.

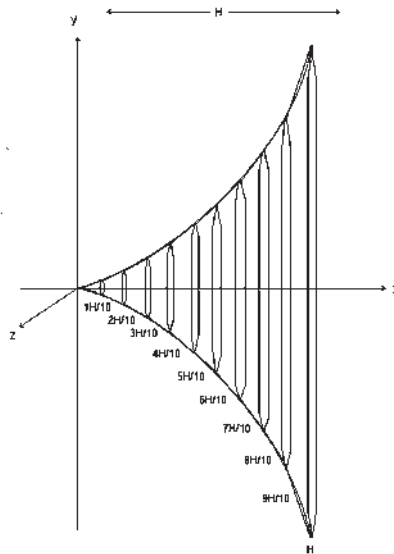


Figura 3.7. Neiloide y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo.

3.6. Cálculo analítico del volumen para los casos de $n=5$ y $n=10$

Se realizaron los cálculos analíticamente por secciones, para el paraboloides, cono y neiloide mediante la aplicación del MCS y también mediante cada método de cubicación estándar para 5 y 10 segmentos. Algo similar se hizo en el caso de la esfera, excepto que se realizaron los cálculos para 6 y 10 segmentos, debido a que la fórmula general se derivó únicamente para segmentos pares.

3.7. Cálculo numérico para cualquier n finita

Se analizó el modelo en general para un número n de segmentos y se determinaron analíticamente las fórmulas de volumen como función tanto del número de segmentos como del segmento en particular. Haciendo una excepción en la fórmula general de la esfera, en donde, para facilitar el cálculo de su volumen total, solo se realizaron los cálculos para la mitad de los segmentos en los que fue dividida y se multiplicó por dos. Se aplicaron las fórmulas generales en Excel, para varios números de segmentos. En particular, para un número de segmentos mayor de 10, en donde ya es muy difícil o imposible realizar los cálculos analíticamente, así como las correspondientes a los métodos estándar de cubicación y se realizó su comparación. En general para cualquier n finita, el procedimiento del cálculo se puede realizar mediante Excel de acuerdo al procedimiento de una hoja de cálculo. Se introducen las variables discretas, n e i , en las primeras dos columnas, y la correspondiente fórmula general, que es función de aquellas, se inserta en la tercera columna.

El número de segmento se asigna manualmente. Se realizaron los cálculos para $n=5, 10, 20, 100$ y 500 . Aunque se puede hacer el cálculo para cualquier número de segmentos, se consideró suficiente hasta 500 para los tipos dendrométricos clásicos. En el caso de la esfera, se calculó analíticamente el volumen para 6 y 10 segmentos; mientras que en Excel se calculó para $6, 10, 12, 20, 100$ y 500 segmentos, debido a que se requieren segmentos pares.

Los cálculos analíticos realizados para números pequeños de segmentos, sirvieron como datos de referencia para probar que las fórmulas introducidas en Excel estaban escritas correctamente. El software de Excel es muy sensible a errores mínimos en la escritura de las fórmulas matemáticas. Una vez que en Excel se reprodujeron exactamente todos los datos mencionados, se tuvo la seguridad de que las fórmulas estaban bien escritas y que podía realizarse el cálculo para cualquier número de segmentos.

3.8. Cálculo del límite cuando $n \rightarrow \infty$

Finalmente, para cada caso, se determinó analíticamente por métodos algebraicos estándar, el límite cuando el número de segmentos tiende a infinito, a partir de las fórmulas generales proporcionadas por el modelo, verificándose que se obtuvieran los volúmenes exactos respectivos.

3.9. Definición de notación

En lo que resta del trabajo, se utilizará la notación $V_{k,n}^{Met-Geo}$ para el volumen del segmento, en donde *Met* representa al método correspondiente, *Geo* a la forma geométrica, k es el número de segmento ($k=1, 2, 3, \dots, n$) y n el número total de segmentos. Para los volúmenes totales, con n segmentos, se utilizará simplemente la notación $V_n^{Met-Geo}$. La terminología para las *Geo* involucradas será: E, SE, P, C y N, para esfera, semi-esfera, paraboloides, cono y neiloide, respectivamente. La terminología para *Met*, será: MCS, Ex, S, H y Nw, para los métodos, Modelo Cónico Segmentado, Exacto, de Smalian, de Huber y de Newton, respectivamente. Por ejemplo, $V_{3,10}^{Nw-N}$ significa el volumen del tercer segmento de un neiloide que ha sido dividido en 10 segmentos, estimado mediante el método de Newton. Similarmente, V_{10}^{Nw-N} significa el volumen total estimado para un neiloide dividido en 10 segmentos, utilizando el método de Newton, que no es otra cosa que la suma de los volúmenes de los segmentos individuales, $V_{k,10}^{Nw-N}$, en donde $k=1, 2, 3, \dots, 10$.

4. RESULTADOS

Los resultados y detalles precisos de cálculo para cada una de las aplicaciones mencionadas en el capítulo previo, para cada una de las geometrías de interés mencionadas: esfera, paraboloides, cono y neiloide, forman el material del presente capítulo.

4.1. Aplicación del MCS a una esfera de radio unitario como función del número de segmentos

Como se ha señalado previamente, el presente trabajo representa la primera aplicación del MCS. Dicho modelo es general y puede aplicarse para la estimación de volumen de cualquier sólido de revolución. Antes de llevar el modelo al campo de las mediciones forestales, como ejemplo de esta generalidad, se aplica el modelo para estimar el volumen de una esfera de radio unitario como función del número de segmentos. Los resultados se comparan con el volumen exacto para dicha esfera ($4\pi/3$). El proceso es similar a la aproximación al volumen de la misma esfera, mediante cilindros, que presenta Stewart (2002).

Los métodos de cubicación estándar Smalian, Huber y Newton, representan métodos de estimación de volumen de trozas o segmentos de tronco de árbol. Estos últimos, se modelan como sólidos de revolución, lo que sugiere que los métodos señalados podrían considerarse como métodos de aproximación para otros sólidos de revolución. De manera similar al MCS, se aplicaron dichos métodos para la estimación de volumen por segmentos en la esfera de radio unitario. En este caso, también se determinaron las fórmulas generales del volumen correspondiente a los métodos de cubicación estándar, para los segmentos de la esfera. Hasta donde se tiene conocimiento, dichos métodos no se han aplicado explícitamente fuera del campo forestal, por lo que el material correspondiente también representa una aportación original de esta tesis. La idea anterior, es una de las bases que propiciaron un trabajo de unificación entre los métodos aproximados del cálculo y los métodos de cubicación forestal (Alfaro-Trujillo, 2008).

4.1.1. Obtención de fórmulas generales para la aplicación de MCS a una esfera de radio unitario

Para dar un enfoque de lo que implica la obtención de fórmulas generales para la aplicación de MCS a una esfera, es necesario hacer un diagrama en el cual se ilustre el seccionamiento en función del número de segmentos. Por simetría, es suficiente hacer el análisis para media esfera y posteriormente duplicar el resultado. Esto, implica que se considerará únicamente el caso de un número par de segmentos. En un sistema cartesiano tridimensional en donde el eje z es perpendicular al plano de la página, el seccionamiento para media esfera, se observaría como se muestra en la figura 4.1.1,

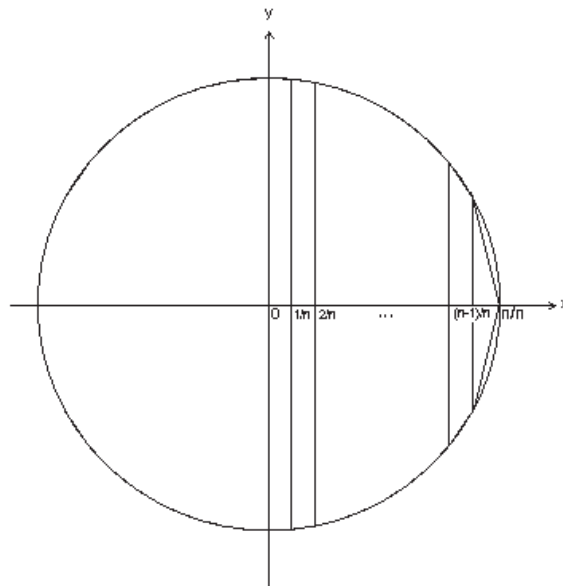


Figura 4.1.1. Corte transversal que ilustra la aplicación general del MCS a una esfera de radio unitario para un número par de n segmentos. El eje z es perpendicular a la página.

Para obtener las fórmulas generales que se requieren, se parte de la ecuación de un círculo de radio unitario para el plano x - y de la figura 4.1.1, la cual es:

[4.1.1]

$$x^2 + y^2 = 1.$$

despejando y , su expresión queda de la siguiente manera:

[4.1.2]

$$y = \sqrt{1 - x^2} = r .$$

Con la ecuación anterior, se obtienen los *radios de las secciones transversales* en los extremos de cada segmento para la esfera. En términos de las variables, i y n , dichos radios quedan como muestra la tabla 4.1.1.

Tabla 4.1.1. Valores de los radios de las secciones transversales de los extremos de segmentos en la esfera de radio unitario.

x	$y = \sqrt{1 - x^2} = r_{i/n}$
$x_0 = (0/n)H$	$y_0 = 1$
$x_1 = (1/n)H$	$y_1 = \sqrt{1 - (1/n)^2}$
$x_2 = (2/n)H$	$y_2 = \sqrt{1 - (2/n)^2}$
$x_3 = (3/n)H$	$y_3 = \sqrt{1 - (3/n)^2}$
\vdots	\vdots
$x_{n-1} = (n-1)H$	$y_{n-1} = \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}$
\vdots	\vdots
$x_n = (n/n)H$	$y_n = 0$

El modelo cónico segmentado está basado en la ecuación de volumen de cono truncado, la cual puede ser expresada de distintas maneras (Cruz de León y Cruz de León, 2006), siendo su forma más conocida:

$$v = \frac{\pi l}{12} [d^2 + d'^2 + dd'] \quad [4.1.3]$$

para un segmento de longitud l con diámetros d y d' en sus extremos.

De acuerdo con la notación definida en la sección 3.9 y la ecuación [4.1.3], el volumen del k -ésimo segmento, con $k=i+1$, para el MCS queda expresado en función de los radios respectivos como:

[4.1.4]

$$V_{i+1,n}^{MCS-Geo} = \frac{\pi d}{3} \left(r_i^2 + r_{i+1}^2 + r_i r_{i+1} \right).$$

La longitud de segmento es, $l = 1/n$.

De la tabla 4.1.1, puede verse que los valores correspondientes a los radios, para la esfera de radio unitario, están dados por

[4.1.5]

$$r_{\frac{i}{n}} = \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

y

[4.1.6]

$$r_{\frac{i+1}{n}} = \sqrt{1 - \left(\frac{i+1}{n}\right)^2}.$$

Por lo tanto, la fórmula general del MCS, para el segmento de semi-esfera queda expresada de la siguiente manera:

[4.1.7]

$$V_{i+1,n}^{MCS-SE} = \frac{\pi}{3n} \left\{ \left[1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \right] + \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{i+1}{n}\right)^2} \right\}.$$

4.1.2. Obtención de la fórmula general para el volumen exacto de segmento en la esfera de radio unitario

Los volúmenes exactos en función de i y n para los segmentos de la semi-esfera se obtienen mediante técnicas estándar del cálculo integral:

[4.1.8]

$$V_{i+1,n}^{Ex-SE} = \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (\pi y^2) dx$$

De la ecuación [4.1.1] al despejar y^2 , se tiene que

[4.1.9]

$$y^2 = 1 - x^2$$

Sustituyendo [4.1.9] en la ecuación [4.1.8] resulta,

[4.10]

$$\begin{aligned} V_{i+1,n}^{Ex-SE} &= \pi \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} (1 - x^2) dx \\ &= \pi \left[\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} dx - \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} x^2 dx \right] \\ &= \pi \left\{ \left[x \right]_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \right\} \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{i+1}{n} \right)^3 - \left(\frac{i}{n} \right)^3 \right] \right\}. \end{aligned}$$

La expresión para el volumen exacto de segmento de la semi-esfera, queda finalmente como

[4.1.11]

$$V_{i+1,n}^{Ex-SE} = \pi \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{i+1}{n} \right)^3 - \left(\frac{i}{n} \right)^3 \right] \right\}.$$

El volumen total exacto de la semi-esfera V_n^{Ex-SE} es la suma de los volúmenes individuales de la ecuación [4.1.11], y el volumen total exacto de la esfera esta dado por $V_n^{Ex-E} = 2V_n^{Ex-SE}$

Los volúmenes totales de semi-esfera y esfera de radio unitario están dados por $(2/3)\pi$ y $(4/3)\pi$. No dependen de n si se consideran segmentos con volúmenes exactos. El ejercicio tiene como objetivo proporcionar los valores exactos por segmento, como referencia, para posteriormente comparar con los proporcionados por los métodos aproximados.

4.1.3. Resultados de la aplicación analítica de MCS a una esfera de radio unitario con 6 segmentos

En la figura 4.1.2, se ilustra la geometría a considerar, en la aplicación del MCS a una esfera con 6 segmentos. Se muestran cortes transversales que pasan por su centro. De conformidad con el análisis mostrado en la sub-sección 4.1.1, debido a que es una figura simétrica, solo se requiere realizar los cálculos para la mitad de la esfera. Para obtener su volumen total, se multiplica por dos el resultado obtenido.

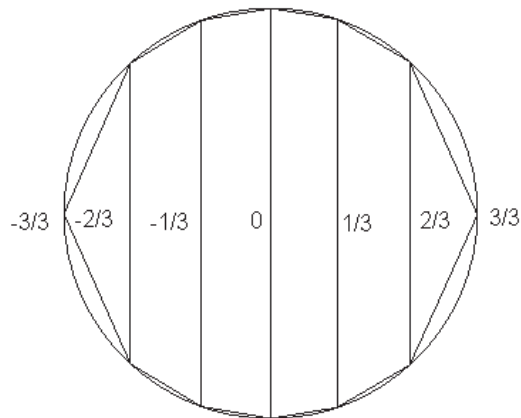


Figura 4.1.2. Aplicación del modelo cónico segmentado a una esfera de radio unitario con 6 segmentos. Se aproxima el volumen mediante conos truncados y dos conos en los extremos. La figura muestra un corte transversal que pasa por el centro de la esfera.

La fórmula general del MCS para cada segmento, en una semi-esfera con tres segmentos, esta dada por

$$V_{i+1,3}^{MCS-SE} = \frac{\pi}{3(3)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{i}{3} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{i+1}{3} \right)^2 \right] + \sqrt{1 - \left(\frac{i}{3} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{i+1}{3} \right)^2} \right\} \quad [4.1.12]$$

Para el primer segmento, $i=0, k=1$, el volumen esta dado por

$$\begin{aligned} V_{1,3}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{9} [1 + 0.888888889 + (1)(0.94280941)] \\ &= \frac{\pi}{9} (2.831698299) = 0.988449174 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1, k=2$,

$$\begin{aligned} V_{2,3}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{9} [0.888888889 + 0.555555556 + (0.94280941)(0.745355992)] \\ &= \frac{\pi}{9} (2.147173088) = 0.749504799. \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2, k=3$,

$$\begin{aligned} V_{3,3}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{9} (0.555555556) \\ &= 0.193925472 \end{aligned}$$

Se suman los resultados del volumen de cada una de las regiones y posteriormente se multiplica por 2, para obtener el volumen total de la esfera con 6 segmentos

$$\begin{aligned} V_6^{MCS-E} &= (V_{1,3}^{MCS-SE} + V_{2,3}^{MCS-SE} + V_{3,3}^{MCS-SE}) \times 2 \\ &= (V_{Total}^{MCS-SE}) \times 2 = (1.931879442) \times 2 \\ &= 3.86375889 \end{aligned}$$

Del mismo modo fueron realizados los cálculos para 10 segmentos respectivamente; los cuales se muestran de forma completa en el apéndice A.

4.1.4. Resultados para una esfera de radio unitario con 6 segmentos mediante la fórmula general del volumen exacto

Para este caso, basta aplicar la fórmula general del volumen exacto de segmento para una semi-esfera con tres segmentos,

[4.1.13]

$$V_{i+1,3}^{Ex-SE} = \pi \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{i+1}{3} \right)^3 - \left(\frac{i}{3} \right)^3 \right] \right\}$$

Para el primer segmento, $i=0$, $k=1$, el volumen esta dado por

$$\begin{aligned} V_{1,3}^{Ex-SE} &= \pi \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{0+1}{3} \right)^3 - \left(\frac{0}{3} \right)^3 \right] \right\} \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right] \\ &= 1.008412457 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$,

$$\begin{aligned} V_{2,3}^{Ex-SE} &= \pi \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1+1}{3} \right)^3 - \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right] \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^3 - \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right] \right\} \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} (0.259259259) \right] \\ &= 0.77570189 \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2, k=3$,

$$\begin{aligned}
 V_{3,3}^{Ex-SE} &= \pi \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2+1}{3} \right)^3 - \left(\frac{2}{3} \right)^3 \right] \right\} \\
 &= \pi \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3}{3} \right)^3 - \left(\frac{2}{3} \right)^3 \right] \right\} \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} (0.703703703) \right] \\
 &= 0.310280756
 \end{aligned}$$

El volumen total exacto para la esfera con 6 segmentos, hasta el noveno dígito, es

$$\begin{aligned}
 V_6^{Ex-E} &= (V_{1,3}^{E-SE} + V_{2,3}^{E-SE} + V_{3,3}^{E-SE}) \times 2 \\
 &= (2.094395104) \times 2 \\
 &= 4.188790207
 \end{aligned}$$

El valor anterior no es otra cosa que un valor redondeado de $(4/3)\pi$.

Los resultados para el volumen de segmento de la semi-esfera y el volumen total, con 6 segmentos, para el caso exacto y para el MCS, se muestran en la tabla 4.1.2.

Tabla 4.1.2. Volúmenes de segmento para la semiesfera y volumen total de la esfera de radio unitario con 6 segmentos.

No. de segmento k	$V_{k,3}^{Ex-SE}$	$V_{k,3}^{MCS-SE}$
1	1.008412457	0.988449174
2	0.77570189	0.749504799
3	0.310280756	0.193925472
Volumen de esfera	$= 2 \sum_{k=0}^2 V_{k,3}^{Ex-SE}$ =4.188790207	$= 2 \sum_{k=0}^2 V_{k,3}^{MCS-SE}$ =3.86375889

4.1.5. Resultados de la aplicación analítica del MCS a una esfera de radio unitario con 10 segmentos

Como en el caso anterior, para 10 segmentos, se comienza con la aplicación del modelo de acuerdo con la ilustración geométrica que se muestra en la figura 4.1.3.

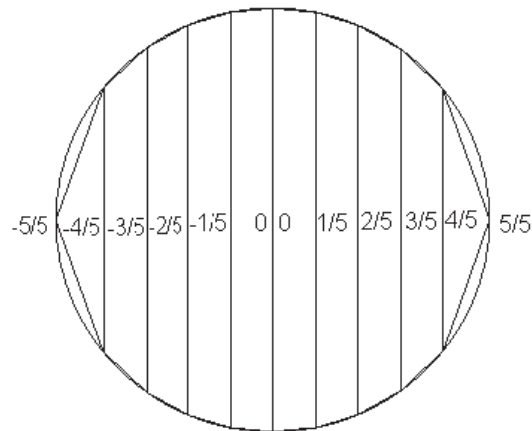


Figura 4.1.3. Aproximación de volumen a una esfera de radio unitario con 10 segmentos mediante la aplicación del MCS. Cortes transversales en el centro de una esfera.

En este caso, basta aplicar la fórmula general para el volumen de segmento para una semi-esfera de cinco segmentos,

[4.1.14]

$$V_{i+1,5}^{MCS-SE} = \frac{\pi}{3(5)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{i}{5} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{i+1}{5} \right)^2 \right] + \sqrt{1 - \left(\frac{i}{5} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{i+1}{5} \right)^2} \right\}$$

El procedimiento de cálculo de volumen por segmento es similar al mostrado en la subsección 4.1.4.

En la tabla 4.1.3, se muestran los resultados para cada segmento de semi-esfera y el volumen total de la esfera para el caso exacto y para el MCS. Los cálculos analíticos para 10 segmentos se muestran en el apéndice A.

Tabla 4.1.3. Volúmenes por segmento para la semi-esfera con 5 segmentos y volumen total de la esfera.

No. de segmento k	$V_{k,5}^{Ex-SE}$	$V_{k,5}^{MCS-SE}$
1	0.61994095	0.6157094
2	0.56967546	0.5650673
3	0.46914450	0.4635340
4	0.31834805	0.3099705
5	0.11728612	0.0753982
Volumen de esfera	$=2 \sum_{k=1}^5 V_{k,5}^{Ex-SE}$ =4.18879019	$=2 \sum_{k=1}^5 V_{k,5}^{MCS-SE}$ =4.0593588

4.1.6. Resultados obtenidos al aplicar el MCS a una esfera de radio unitario para 6, 10, 12, 20, 100 y 500 segmentos, respectivamente, mediante Excel

Después de haber obtenido las fórmulas generales para calcular cualquier n , tanto del volumen exacto de la esfera como del MCS, estas fórmulas fueron introducidas en Excel para hacer los cálculos correspondientes para 6, 10, 12, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente. Se verificó que los resultados arrojados mediante Excel para 6 y 10 segmentos, reprodujeran exactamente a los obtenidos analíticamente.

En la tabla 4.1.4, se muestran los resultados obtenidos en Excel como función del número de segmentos para el caso exacto y para el MCS.

Tabla 4.1.4. Volumen total de una esfera de radio unitario como función del número de segmentos utilizando las fórmulas generales de MCS en Excel

Número de segmentos n	V_n^{Ex-E}	V_n^{MCS-E}
6	4.1887902	3.8637589
10	4.1887902	4.0593590
12	4.1887902	4.0959683
20	4.1887902	4.1524979
100	4.1887902	4.1869921
500	4.1887902	4.1887047

4.1.7. Cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$ para el volumen total de la esfera de radio unitario aplicando el MCS

A partir de la fórmula general obtenida al aplicar el MCS, se procedió a la realización del cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$ para el volumen total de la esfera. Dichos cálculos se muestran a continuación.

La fórmula general para el volumen del $(i+1)$ -ésimo segmento mediante el MCS, también puede expresarse como

$$V_{i+1,n}^{MCS-SE} = \frac{\pi}{3n^3} \left\{ n^2 - (i+1)^2 + n^2 - i^2 + \sqrt{[n^2 - (i+1)^2][n^2 - i^2]} \right\}. \quad [4.1.15]$$

El volumen total esta dado por:

$$V_n^{MCS-SE} = \sum_{i=1}^n V_{i+1,n}^{MCS-SE} \quad [4.1.16]$$

Aproximación de números grandes.

Para n mucho mayor que 1, ($n \gg 1$), para la raíz de la ecuación anterior, se obtiene la siguiente aproximación, para el término con raíz, en función de i y n :

[4.1.17]

$$\sqrt{[n^2 - (i-1)^2][n^2 - i^2]} \approx n^2 - i^2$$

En esta aproximación, el volumen total de la semi-esfera en función de i y n esta dado por,

[4.1.18]

$$\begin{aligned} V_{i+1, n \gg 1}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{3n^3} (n^2 - i^2 + n^2 - i^2 + n^2 - i^2) \\ &= \frac{\pi}{3n^3} [3(n^2 - i^2)] \\ &= \frac{\pi}{n^3} (n^2 - i^2) \\ &= \frac{\pi}{n} - \pi \frac{i^2}{n^3} \end{aligned}$$

En el volumen total esta involucrado el término $\sum_{i=1}^n i^2$, que esta dado por Stewart (2002) como

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \quad [4.1.19]$$

Entonces, el volumen total de la semi-esfera, en la aproximación de números grandes, queda como

[4.1.20]

$$\begin{aligned}
V_{n \gg 1}^{MCS-SE} &= \sum_{i=1}^n V_{i+1, n \gg 1}^{MCS-SE} = n \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^3} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) \\
&= \pi - \frac{\pi}{3} - \pi \left(\frac{1}{2n} \right) - \pi \left(\frac{1}{6n^2} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, al aplicar el límite matemático cuando $n \rightarrow \infty$, se anula dicho límite para los dos últimos términos a la derecha de la ecuación, resultando que:

[4.1.21]

$$\begin{aligned}
V_{n \rightarrow \infty}^{MCS-SE} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_{i+1, n \gg 1}^{MCS-SE} = \pi - \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{2}{3} \pi = V^{Ex-SE}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V_{n \rightarrow \infty}^{MCS-E} = 2V_{n \rightarrow \infty}^{MCS-SE} = \frac{4}{3} \pi = V^{Ex-E}$$

De esta forma, en el límite cuando n tiende a infinito el MCS recupera el volumen total exacto de la esfera de radio unitario, de conformidad con lo que exigen las reglas formales del cálculo, para cualquier método de aproximación que se utilice.

4.1.8. Fórmula general del volumen de segmento para una esfera de radio unitario, como función del número de segmentos, utilizando el método de Smalian

Por definición, el volumen de Smalian para el i -ésimo segmento, esta dado por

$$V_{i+1, n}^{S-SE} = l \left(\frac{S_{i/n} + S_{(i+1)/n}}{2} \right) \quad [4.1.22]$$

en donde, el área de las secciones transversales en los extremos de la troza a medir son diámetros representados por (S), las cuales están en función de las variables discretas i y n . La longitud de la sección es l .

[4.1.23]

$$V_{i+1,n}^{S-SE} = \frac{\pi l}{2} \left(r_{\frac{i}{n}}^2 + r_{\frac{i+1}{n}}^2 \right)$$

$$= \frac{\pi}{2n} \left(r_{\frac{i}{n}}^2 + r_{\frac{i+1}{n}}^2 \right).$$

Sustituyendo los valores para los radios dados por las ecuaciones [4.1.5] y [4.1.6], resulta

[4.1.24]

$$V_{i+1,n}^{S-SE} = \frac{\pi}{2n} \left\{ \left[1 - \left(\frac{i}{n} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{i+1}{n} \right)^2 \right] \right\}.$$

4.1.9. Fórmula general del volumen de segmento para una esfera de radio unitario, como función del número de segmentos, utilizando el método de Huber

Para el volumen de segmento por el método de Huber, también a partir de su definición, esta dado por

[4.1.25]

$$V_{i+1,n}^{H-SE} = lS \frac{i + \left(\frac{i+1}{n} \right)}{2}$$

$$= lS \frac{i + \frac{1}{2n}}{2} = lS \frac{2i+1}{2n}.$$

En términos de los radios de las secciones transversales en los extremos del segmento, el volumen del mismo se expresa como:

[4.1.26]

$$V_{i+1,n}^{H-SE} = \pi r_{\frac{2i+1}{2n}}^2$$

Sustituyendo la expresión para el radio correspondiente, la fórmula general para el volumen de segmento en el caso de Huber es,

[4.1.27]

$$V_{i+1,n}^{H-SE} = \pi \left(\frac{1}{n} \right) \left[1 - \left(\frac{2i+1}{2n} \right)^2 \right]$$

4.1.10. Fórmula general del volumen de segmento para una esfera de radio unitario, como función del número de segmentos, utilizando el método de Newton

Finalmente, para la obtención de la fórmula general para el volumen de Newton, se hizo uso de la relación que tiene con los volúmenes de Huber y de Smalian, la cual esta dada por la ecuación [2.9]. De esta forma, el volumen de segmento en el caso de Newton es:

[4.1.28]

$$V_{i+1,n}^{Nw-SE} = \left(\frac{2}{3} \right) V_{i+1,n}^{H-SE} + \left(\frac{1}{3} \right) V_{i+1,n}^{S-SE}$$

4.1.11. Estimación del volumen de una esfera de radio unitario con 6 segmentos utilizando los métodos estándar de cubicación

Método de Smalian.

La fórmula para el volumen de segmento para una semi-esfera con tres segmentos utilizando el método de Smalian, está dada por:

[4.1.29]

$$V_{i+1,3}^{S-SE} = \frac{\pi}{2(3)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{i}{3} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{i+1}{3} \right)^2 \right] \right\}$$

El volumen para el primer segmento, $i=0$, $k=1$, es:

$$\begin{aligned} V_{1,3}^{S-SE} &= \frac{\pi}{2(3)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{0}{3} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{0+1}{3} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{6} [(1) + (0.888888889)] \\ &= \frac{\pi}{6} (1.888888889) \\ &= 0.989019909 \end{aligned}$$

El volumen para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$, es:

$$\begin{aligned} V_{2,3}^{S-SE} &= \frac{\pi}{2(3)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{1+1}{3} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{6} [(0.888888889) + (0.555555556)] \\ &= \frac{\pi}{6} (1.444444445) \\ &= 0.756309342 \end{aligned}$$

El volumen para el tercer segmento, $i=2, k=3$, es:

$$\begin{aligned}
 V_{3,3}^{S-SE} &= \frac{\pi}{2(3)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{2+1}{3} \right)^2 \right] \right\} \\
 &= \frac{\pi}{6} [(0.555555556) + (0)] \\
 &= \frac{\pi}{6} (0.555555556) \\
 &= 0.290888208
 \end{aligned}$$

El volumen total de la esfera con 6 segmentos con el método de Smalian esta dado por:

$$\begin{aligned}
 V_6^{S-E} &= (V_{1,3}^{S-SE} + V_{2,3}^{S-SE} + V_{3,3}^{S-SE}) \times 2 \\
 &= (2.03621746) \times 2 = 4.07243492
 \end{aligned}$$

Método de Huber.

La fórmula para el volumen de segmento de la semi-esfera con tres segmentos por el método de Huber, es:

[4.1.30]

$$\boxed{V_{i+1,3}^{H-SE} = \pi \left(\frac{1}{3} \right) \left[1 - \left(\frac{2i+1}{2(3)} \right)^2 \right]}$$

El volumen para el primer segmento, $i=0$, $k=1$, es:

$$\begin{aligned}V_{1,3}^{H-SE} &= \pi \left(\frac{1}{3} \right) \left[1 - \left(\frac{2(0)+1}{2(3)} \right)^2 \right] \\&= \pi \left(\frac{1}{3} \right) [1 - 0.0277777777] \\&= 1.047197551(0.972222223) \\&= 1.018108731\end{aligned}$$

El volumen para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$, es:

$$\begin{aligned}V_{2,3}^{H-SE} &= \pi \left(\frac{1}{3} \right) \left[1 - \left(\frac{2(1)+1}{2(3)} \right)^2 \right] \\&= \pi \left(\frac{1}{3} \right) [1 - 0.25] \\&= 1.047197551(0.75) \\&= 0.785398163\end{aligned}$$

El volumen para el tercer segmento, $i=2$, $k=3$, es:

$$\begin{aligned}V_{3,3}^{H-SE} &= \pi \left(\frac{1}{3} \right) \left[1 - \left(\frac{2(2)+1}{2(3)} \right)^2 \right] \\&= \pi \left(\frac{1}{3} \right) [1 - 0.6944444444] \\&= 1.047197551(0.305555556) \\&= 0.319977029\end{aligned}$$

El volumen total para la semiesfera con 6 segmentos para el método de Huber es

$$\begin{aligned}
 V_6^{H-E} &= (V_{1,3}^{H-SE} + V_{2,3}^{H-SE} + V_{3-3}^{H-SE}) \times 2 \\
 &= (2.123483924) \times 2 \\
 &= 4.246967848
 \end{aligned}$$

Método de Newton.

La fórmula para el volumen de segmento de una semi-esfera con 3 segmentos, utilizando el método de Newton, es:

[4.1.31]

$$V_{i+1,n}^{Nw-SE} = \left(\frac{2}{3}\right)V_{i+1,n}^{H-SE} + \left(\frac{1}{3}\right)V_{i+1,n}^{S-SE}$$

El volumen para el primer segmento, $i=0$, $k=1$, es:

$$\begin{aligned}
 V_{1,3}^{Nw-SE} &= \left(\frac{2}{3}\right)(1.018108731) + \left(\frac{1}{3}\right)(0.989019909) \\
 &= 0.678739154 + 0.329673303 \\
 &= 1.008412457
 \end{aligned}$$

El volumen para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$, es:

$$\begin{aligned}
 V_{2,3}^{Nw-SE} &= \left(\frac{2}{3}\right)(0.785398163) + \left(\frac{1}{3}\right)(0.756309342) \\
 &= 0.523598775 + 0.252103114 \\
 &= 0.775701889
 \end{aligned}$$

El volumen para el tercer segmento, $i=2$, $k=3$, es:

$$\begin{aligned} V_{3,3}^{Nw-SE} &= \left(\frac{2}{3}\right)(0.319977029) + \left(\frac{1}{3}\right)(0.290888208) \\ &= 0.213318019 + 0.096962736 \\ &= 0.310280755 \end{aligned}$$

El volumen para la esfera, con 6 segmentos, según el método de Newton, es:

$$\begin{aligned} V_6^{Nw-E} &= (V_{1,3}^{Nw-SE} + V_{2,3}^{Nw-SE} + V_{3,3}^{Nw-SE}) \times 2 \\ &= (2.094395101) \times 2 \\ &= 4.188790202 \end{aligned}$$

En la tabla 4.1.5, se resumen los resultados de los volúmenes totales, así como los resultados obtenidos para cada uno de los segmentos en particular.

Tabla 4.1.5. Volúmenes de segmento y totales en la esfera de radio unitario para 6 segmentos para cada uno de los métodos de cubicación.

No. de segmento k	$V_{k,3}^{Ex-SE}$	$V_{k,3}^{MCS-SE}$	$V_{k,3}^{S-SE}$	$V_{k,3}^{H-SE}$	$V_{k,3}^{Nw-SE}$
1	1.008412457	0.988449174	0.989019909	1.018108731	1.008412457
2	0.77570189	0.749504799	0.756309342	0.785398163	0.775701889
3	0.310280756	0.193925472	0.290888208	0.319977029	0.310280755
Volumen de esfera	4.188790207	3.86375889	4.07243492	4.246967848	4.188790202

4.1.12. Estimación del volumen de una esfera de radio unitario con 10 segmentos utilizando los métodos estándar de cubicación

En forma similar al caso de la esfera con seis segmentos, se realizaron los cálculos analíticos para 10 segmentos, los cuales se presentan en el apéndice A. En la tabla 4.1.6 se resumen los resultados obtenidos.

Tabla 4.1.6. Volúmenes de segmento y totales, resultantes de los métodos de cubicación estándar para una esfera de radio unitario con 10 segmentos. Se incluyen los resultados del volumen exacto y el MCS, obtenidos en el capítulo previo, para efectos de comparación.

Segmento k	$V_{k,10}^{Ex-SE}$	$V_{k,10}^{MCS-SE}$	$V_{k,10}^{S-SE}$	$V_{k,10}^{H-SE}$	$V_{k,10}^{Nw-SE}$
1	0.61994095	0.6157094	0.61575216	0.62203534	0.61994095
2	0.56967546	0.5650673	0.56548667	0.57176986	0.56967546
3	0.46914450	0.4635340	0.46495571	0.47123889	0.46914450
4	0.31834805	0.3099705	0.31415926	0.32044245	0.31834805
5	0.11728612	0.0753982	0.11309733	0.11938052	0.11728612
Volumen de esfera	4.18879019	4.0593588	4.14690229	4.20973415	4.18879019

Obsérvese que el método de Newton proporciona los resultados exactos para la esfera de radio unitario de manera similar a como ocurre con los tipos dendrométricos clásicos.

4.1.13. Estimación del volumen de una esfera de radio unitario con 6, 10, 12, 20, 100 y 500 segmentos utilizando los métodos estándar de cubicación mediante Excel

Al igual que en el caso del MCS, las fórmulas generales para los métodos estándar de cubicación, fueron introducidas en Excel para hacer los cálculos correspondientes para 6, 10, 12, 20, 100 y 500 segmentos, respectivamente. Los resultados obtenidos mediante Excel, para

6 y 10 segmentos, se compararon con los resultados obtenidos analíticamente. Se verificó que fueran exactamente los mismos.

En la tabla 4.1.7, se muestran los resultados obtenidos mediante los métodos estándar para una esfera de radio unitario utilizando Excel, para los diferentes valores del número de segmentos, n , a partir de las fórmulas generales. Se incluyen también los resultados del método exacto y del MCS para efectos de comparar y resumir los resultados.

Tabla 4.1.7. Resultados del volumen total para la esfera de radio unitario calculados mediante Excel para todos los métodos utilizados y con diferentes valores del número de segmentos, n , a partir de las fórmulas generales.

Número de Segmentos n	V_n^{Ex-E}	V_n^{MCS-E}	V_n^{S-E}	V_n^{H-E}	V_n^{Nw-E}
6	4.1887902	3.8637589	4.0724349	4.2469678	4.1887902
10	4.1887902	4.0593590	4.1469023	4.2097342	4.1887902
12	4.1887902	4.0959683	4.1597014	4.2033346	4.1887902
20	4.1887902	4.1524979	4.1783182	4.1940262	4.1887902
100	4.1887902	4.1869921	4.1883713	4.1889996	4.1887902
500	4.1887902	4.1887047	4.1887734	4.1887986	4.1887902

Obsérvese que el método de Newton proporciona resultados exactos para la esfera de manera similar a como ocurre en el caso de los tipos dendrométricos clásicos.

4.1.14. Resumen de resultados para una esfera de radio unitario

En la tabla 4.1.8, se muestran todas las fórmulas generales para estimar el volumen de segmento en una semiesfera de radio unitario, como función del número de segmentos, que fueron obtenidas en este trabajo.

Tabla 4.1.8. Fórmulas generales para el volumen de segmento obtenidas para cada método de cubicación para una semiesfera de radio unitario.

Método	$V_{i+1,n}^{Met-SE}$
Exacto	$\pi \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{i+1}{n} \right)^3 - \left(\frac{i}{n} \right)^3 \right] \right\}$
MCS	$\frac{\pi}{3n} \left\{ \left[1 - \left(\frac{i}{n} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{i+1}{n} \right)^2 \right] + \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{i+1}{n} \right)^2} \right\}$
Smalian	$\frac{\pi}{2n} \left\{ \left[1 - \left(\frac{i}{n} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{i+1}{n} \right)^2 \right] \right\}$
Huber	$\pi \left(\frac{1}{n} \right) \left[1 - \left(\frac{2i+1}{2n} \right)^2 \right]$
Newton	$\left(\frac{2}{3} \right) V_{i+1,n}^{H-SE} + \left(\frac{1}{3} \right) V_{i+1,n}^{S-SE}$

4.2. Aplicación del MCS a un paraboloides como función del número de segmentos

En esta ocasión, se considerará la aplicación del MCS a un paraboloides, al cual se le aplicarán los mismos métodos y procedimientos para la obtención de resultados que se aplicaron a la esfera.

Como se mencionó en la sección 2.3, las geometrías de los tipos dendrométricos clásicos son generadas por la función $y^2 = Ax^p$, en donde p es un número entero positivo que define la forma del cuerpo de que se trata, A es una constante denominada el parámetro de forma, x y y son las coordenadas en un sistema cartesiano bidimensional (Dieguez-Aranda *et al*, 2003; Castro, 1955; Romahn de la Vega, 1994; West, 2004).

En forma similar al caso de la esfera, para llevar a cabo la aplicación del modelo, se obtuvieron las fórmulas generales del MCS y del volumen exacto en función del segmento de interés y el número de segmentos, respectivamente. El modelo se aplicó de manera analítica a un paraboloides con 5 y 10 segmentos respectivamente. También se hicieron los cálculos correspondientes para 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos mediante el software Excel, haciendo uso de las fórmulas generales previamente obtenidas. Los resultados para 5 y 10 segmentos mediante cálculo analítico, fueron utilizados como datos de referencia para verificar que se reproducían de manera exacta mediante Excel y de esa forma asegurarse que las fórmulas matemáticas estuvieran escritas correctamente y podían utilizarse para cualquier número de segmentos.

Al igual que en el capítulo previo, entre mayor sea el número de segmentos la aproximación al volumen total del paraboloides será mejor. Finalmente, se realizó el cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$.

En éste y los siguientes dos capítulos, se analizarán las geometrías de paraboloides, cono y neiloide en la forma convencional en que se orientan en sistema cartesiano tridimensional en Dendrometría. Esto se hace en forma invertida al caso de la semi-esfera como se verá más adelante. Se derivaron fórmulas generales para el volumen de segmento como función del número de segmento y del número total de segmentos, pero se usaron sólo en los cálculos con Excel. En los cálculos analíticos para 5 y 10 segmentos, se trabajaron las ecuaciones de volumen como función de las áreas de las secciones transversales, por considerarse que simplifica el trabajo manual y es el procedimiento usual en Dendrometría.

4.2.1. Obtención de fórmula general al aplicar el MCS a un paraboloides

Para mostrar lo que implica la obtención de fórmulas generales en la aplicación del MCS a un paraboloides, es necesario hacer un esquema en el cual se ilustre el seccionamiento como función del número de segmentos. Dicho seccionamiento se observa en la figura 4.2.1. Esta figura, ilustra un paraboloides mostrando cortes transversales a su eje principal. Dichos cortes definen segmentos. A cada segmento se le aproxima por un cono truncado, se estima su volumen y posteriormente se suman, para obtener así el volumen total del paraboloides aplicando el MCS.

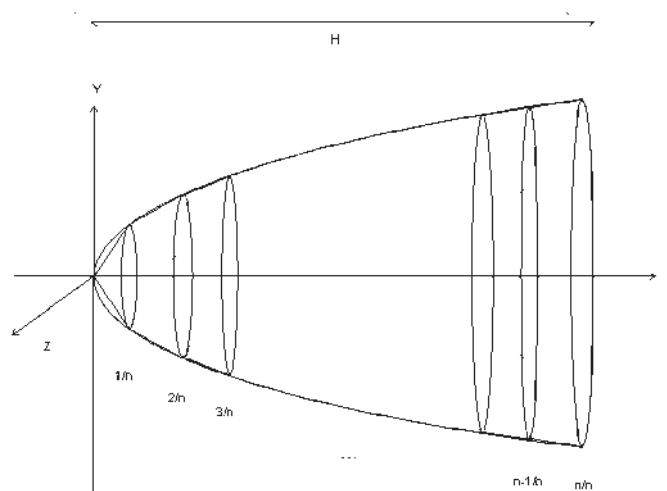


Figura 4.2.1. Aplicación general del modelo cónico segmentado a un paraboloides para un número n de segmentos.

Para obtener las fórmulas generales, se partió de la ecuación de paraboloides obtenida de la función generatriz

[4.2.1]

$$y^2 = Ax$$

En la cual, a la variable x se le asignan los valores deseados para los cortes transversales en los que fue dividido el sólido de revolución, dichos valores posteriormente se sustituyen en la ecuación [4.2.1], tal y como se ilustra en la tabla 4.2.1.

Tabla 4.2.1. Valores asignados a la variable x para los cortes transversales del sólido de revolución de la figura 4.2.1 y sus respectivos valores y^2 dados por la ecuación [4.2.1], así como su raíz cuadrada, y , que representa los radios de dichas secciones transversales..

x	$y^2 = Ax$	y
$x_1 = \left(\frac{1}{n}\right)H$	$y_1^2 = A\left(\frac{1}{n}H\right)$	$y_1 = \sqrt{AH/n} = \sqrt{1/n}\sqrt{AH} = r_{n-1}$
$x_2 = \left(\frac{2}{n}\right)H$	$y_2^2 = A\left(\frac{2}{n}H\right)$	$y_2 = \sqrt{2AH/n} = \sqrt{2/n}\sqrt{AH} = r_{n-2}$
$x_3 = \left(\frac{3}{n}\right)H$	$y_3^2 = A\left(\frac{3}{n}H\right)$	$y_3 = \sqrt{\frac{3AH}{n}} = \sqrt{\frac{3}{n}}\sqrt{AH} = r_{n-3}$
\vdots	\vdots	\vdots
$x_{n-2} = \left(\frac{n-2}{n}\right)H$	$y_{n-2}^2 = A\left(\frac{n-2}{n}H\right)$	$y_{n-2} = \sqrt{\left(\frac{n-2}{n}\right)AH} = \sqrt{\frac{n-2}{n}}\sqrt{AH} = r_2$
$x_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)H$	$y_{n-1}^2 = A\left(\frac{n-1}{n}H\right)$	$y_{n-1} = \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)AH} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{AH} = r_1$
$x_n = \left(\frac{n}{n}\right)H$	$y_n^2 = A\left(\frac{n}{n}H\right)$	$y_n = \sqrt{\left(\frac{n}{n}\right)AH} = \sqrt{AH} = r_0$

El modelo cónico segmentado esta basado en la ecuación de volumen de cono truncado, cuya forma más conocida es la que se muestra en la ecuación [4.1.3]. De acuerdo con dicha ecuación y con la notación definida en la sección 3.9, el volumen del k -ésimo segmento, con $k=i+1$, para el MCS queda expresado en función de los radios respectivos como

[4.2.2]

$$V_{i+1,n}^{MCS-Geo} = \frac{1}{3} \left(\frac{H}{n} \right) \left[r_i^2 + \pi r_{i+1}^2 + \sqrt{\pi r_i^2 \pi r_{i+1}^2} \right]$$

en donde, $i=0,1,2,\dots, (n-1)$. De la tabla 4.2.1, puede verse que los valores correspondientes a los radios, para el paraboloides, están dados por:

[4.2.3]

$$r_i = \sqrt{\frac{n-i}{n}} \sqrt{AH}$$

y

[4.2.4]

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= \sqrt{\frac{n-i-1}{n}} \sqrt{AH} \\ &= \sqrt{\frac{n-i-1}{n}} \sqrt{AH} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula general del MCS, para el segmento de un paraboloides queda expresada de la siguiente manera,

[4.2.5]

$$\begin{aligned} V_{i+1,n}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{n} \right) \left[\pi \left(\frac{n-i}{n} \right) AH + \pi \left(\frac{n-i-1}{n} \right) AH + \sqrt{\pi^2 \left(\frac{n-i}{n} \right) \left(\frac{n-i-1}{n} \right) A^2 H^2} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{n} \right) \left[\left(\frac{n-i+n-i-1}{n} \right) \pi AH + \sqrt{\frac{(n-i)(n-i-1)}{n^2} \pi^2 AH^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{n} \right) \left[\frac{2r_{i-1}^2 - 1}{n} + \sqrt{\frac{r_{i-1}^2 - r_{i-1}}{n^2}} \right] \pi A H^2 \\
&= \left\{ \frac{1}{3n} \left[\frac{2r_{i-1}^2 - 1}{n} + \sqrt{\frac{r_{i-1}^2 - r_{i-1}}{n}} \right] \right\} \pi A H^2
\end{aligned}$$

Reacomodando un poco la ecuación anterior queda como,

[5.6]

$$V_{i+1,n}^{MCS-P} = \left[\frac{2r_{i-1}^2 - 1 + \sqrt{r_{i-1}^2 - r_{i-1}}}{3n^2} \right] \pi A H^2$$

4.2.2. Obtención de fórmula general para el volumen exacto, como función del número de segmentos para un paraboloides

El volumen exacto para el segmento, $i+1$, de un paraboloides, esta dado por la ecuación

[4.2.7]

$$V_{i+1,n}^{Ex-P} = \frac{s_i + s_{i+1}}{2} \left(\frac{H}{n} \right)$$

que no es otra cosa que la ecuación de Smalian para el segmento, en donde s_i y s_{i+1} representan las secciones de cada uno de los extremos del segmento. La fórmula anterior también puede ser expresada de la siguiente manera

[4.2.8]

$$V_{i+1,n}^{Ex-P} = \frac{\pi r_i^2 + \pi r_{i+1}^2}{2} \left(\frac{H}{n} \right)$$

Sustituyendo [4.2.8] con los valores de [4.2.3] y [4.2.4] resulta,

[4.2.9]

$$\begin{aligned}
 V_{i+1,n}^{Ex-P} &= \left\{ \frac{\pi \left[\left(\frac{n-i}{n} \right) AH \right] + \pi \left[\left(\frac{n-i-1}{n} \right) AH \right]}{2} \right\} \left(\frac{H}{n} \right) \\
 &= \left[\frac{\left(\frac{n-i}{n} \right) + \left(\frac{n-i-1}{n} \right)}{2} \right] \left(\frac{\pi AH^2}{n} \right) \\
 &= \left[\frac{\left(\frac{n-i}{n} \right) + \left(\frac{n-i-1}{n} \right)}{2n} \right] \left[\frac{\pi AH^2}{n} \right]
 \end{aligned}$$

Quedando como expresión final la siguiente:

[4.2.10]

$$\boxed{V_{i+1,n}^{Ex-P} = \left[\frac{2 \left(\frac{n-i}{n} \right) - 1}{2n^2} \right] \left[\frac{\pi AH^2}{n} \right]}$$

4.2.3. Resultados de la aplicación analítica del MCS a un paraboloides con 5 segmentos

En la figura 4.2.2, se ilustra un paraboloides con la correspondiente aproximación a su volumen mediante el MCS considerando 5 segmentos. Como se mencionó anteriormente, por motivos de afinidad con la literatura sobre el tema, en este caso el análisis se hará en forma invertida. El primer intervalo será el de la extrema derecha de la figura y el último el de la extrema izquierda. Con la salvedad anterior, se seguirá utilizando la notación del capítulo previo.

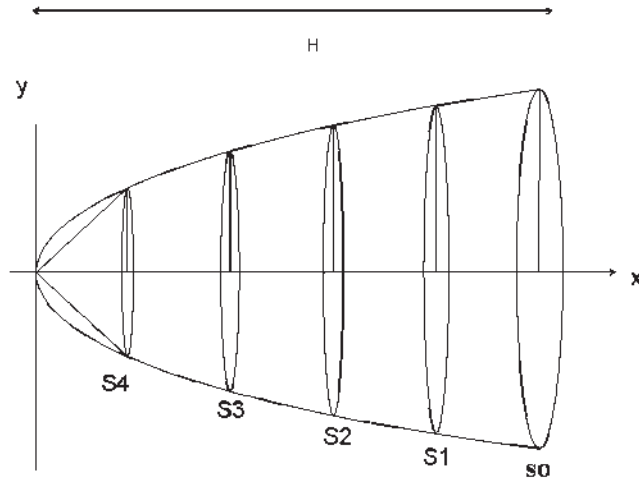


Figura 4.2.2. Aplicación del modelo cónico segmentado a un paraboloides con 5 segmentos.

Sustituyendo los valores de $y_i^2 = r_i^2$ dados en la tabla 4.2.1, en la ecuación [4.2.2], se obtienen los siguientes resultados.

Para el primer segmento de la figura 4.2.2, $i=0, k=1$,

$$\begin{aligned}
 V_{1,5}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\pi (S_0 + S_1 + \sqrt{S_0 S_1}) \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right) \left[\pi (AH) + \pi \left(\frac{4}{5} AH \right) + \sqrt{\pi AH \left(\pi \frac{4}{5} AH \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right) \left[\frac{5}{5} \pi (AH) + \frac{4}{5} \pi (AH) + \sqrt{\pi^2 \left(\frac{4}{5} \right) A^2 H^2} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\frac{9}{5} \pi AH + \sqrt{\frac{20}{25} \pi AH} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\frac{9}{5} + \frac{\sqrt{20}}{5} \right] \pi AH \\
 &= \frac{1}{15} \left[\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{4}{5}} \right] \pi AH^2 \\
 &= 0.564319503 AH^2 \\
 &= 0.179628477 (\pi AH^2)
 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1, k=2$,

$$\begin{aligned}
 V_{2,5}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\pi \left(\frac{4}{5} AH \right) + \pi \left(\frac{3}{5} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{4}{5} AH \right) \left(\pi \frac{3}{5} AH \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\frac{7}{5} \pi AH + \sqrt{\frac{12}{25} \pi AH} \right] \\
 &= \frac{1}{15} \left[\frac{7}{5} + \frac{\sqrt{12}}{5} \right] \pi AH^2 \\
 &= 0.438319259 \pi AH^2 \\
 &= 0.139521353 (\pi AH^2)
 \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2, k=3$,

$$\begin{aligned}
 V_{3,5}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[S_2 + S_3 + \sqrt{S_2 S_3} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\pi \left(\frac{3}{5} AH \right) + \pi \left(\frac{2}{5} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{3}{5} AH \right) \left(\pi \frac{2}{5} AH \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\frac{5}{5} \pi AH + \sqrt{\frac{6}{25} \pi AH} \right] \\
 &= \frac{1}{15} \left[\frac{5}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5} \right] \pi AH^2 \\
 &= 0.312043493 \pi AH^2 \\
 &= 0.099326528 (\pi AH^2)
 \end{aligned}$$

Para el cuarto segmento, $i=3, k=4$,

$$\begin{aligned}
 V_{4,5}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[S_3 + S_4 + \sqrt{S_3 S_4} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\pi \left(\frac{2}{5} AH \right) + \pi \left(\frac{1}{5} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{2}{5} AH \right) \left(\pi \frac{1}{5} AH \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\frac{3}{5} \pi AH + \sqrt{\frac{2}{25} \pi AH} \right] \\
 &= \frac{1}{15} \left[\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5} \right] \pi AH^2 \\
 &= 0.184902143 \pi AH^2 \\
 &= 0.05885618 (\pi AH^2)
 \end{aligned}$$

Para el quinto segmento, $i=4, k=5$,

$$\begin{aligned}
 V_{5,5}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[S_4 \right] \quad S_5 = 0 \\
 &= \left(\frac{H}{15} \right) \pi \left(\sqrt{\frac{AH}{5}} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{15} \right) \left(\frac{\pi AH^2}{5} \right) \\
 &= \frac{1}{75} \pi AH^2 \\
 &= 0.0418869528 (AH^2) \\
 &= 0.013333 \pi AH^2
 \end{aligned}$$

El volumen total estimado con el MCS para cinco segmentos esta dado por,

$$\begin{aligned} V_5^{MCS-P} &= (V_{1,5}^{MCS-P} + V_{2,5}^{MCS-P} + V_{3,5}^{MCS-P} + V_{4,5}^{MCS-P} + V_{5,5}^{MCS-P}) \\ &= 0.490665538 \pi AH^2 \end{aligned}$$

4.2.4. Resultados para un paraboloides con 5 segmentos mediante el método exacto

La fórmula general del volumen exacto para cada segmento, en un paraboloides con cinco segmentos, esta dada por la fórmula [4.2.7]

Para el primer segmento, $i=0, k=1$,

$$\begin{aligned} V_{1,5}^{Ex-P} &= \frac{S_0 + S_1}{2} \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{5}{5} AH \right) + \pi \left(\frac{4}{5} AH \right) \right] \frac{1}{5} H \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{9}{5} \pi AH \right] \frac{1}{5} H \\ &= \left(\frac{9}{50} \pi \right) AH^2 \\ &= 0.565486677 AH^2 \\ &= 0.18 \pi AH^2 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1, k=2$,

$$\begin{aligned}
 V_{2,5}^{Ex-P} &= \frac{S_1 + S_2}{2} \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{4}{5} AH \right) + \pi \left(\frac{3}{5} AH \right) \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{7}{5} \pi AH \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \left(\frac{7}{50} \pi \right) AH^2 \\
 &= 0.439822971 AH^2 \\
 &= 0.14\pi AH^2
 \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2, k=3$,

$$\begin{aligned}
 V_{3,5}^{Ex-P} &= \frac{S_2 + S_3}{2} \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{3}{5} AH \right) + \pi \left(\frac{2}{5} AH \right) \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{5}{5} \pi AH \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left(\frac{5}{50} \pi \right) AH^2 \\
 &= 0.314159265 AH^2 \\
 &= 0.1\pi AH^2
 \end{aligned}$$

Para el cuarto segmento, $i=3, k=4$,

$$\begin{aligned}
 V_{4,5}^{Ex-P} &= \frac{S_3 + S_4}{2} \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{2}{5} AH \right) + \pi \left(\frac{1}{5} AH \right) \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{5} \pi AH \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \left(\frac{3}{50} \pi \right) AH^2 \\
 &= 0.188495559 AH^2 \\
 &= 0.06\pi AH^2
 \end{aligned}$$

Para el quinto segmento, $i=4, k=5$,

$$\begin{aligned}
 V_{5,5}^{Ex-P} &= \frac{S_4}{2} \left(\frac{1}{5} H \right) = \frac{\pi \left(\sqrt{\frac{AH}{5}} \right)^2}{2} \left(\frac{1}{5} H \right) \quad S_5 = 0 \\
 &= \frac{\pi Ah}{10} \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \frac{1}{50} \pi AH^2 \\
 &= 0.062832(AH^2) \\
 &= 0.02\pi AH^2
 \end{aligned}$$

El volumen exacto total de paraboloides está dado por:

$$\begin{aligned}
 V^{Ex-P} &= (V_{1,5}^{Ex-P} + V_{2,5}^{Ex-P} + V_{3,5}^{Ex-P} + V_{4,5}^{Ex-P} + V_{5,5}^{Ex-P}) \\
 &= 0.5\pi AH^2
 \end{aligned}$$

Se sabe que para un truncado de paraboloides, cualquiera de los métodos estándar, Smalian, Huber o Newton, proporciona el volumen exacto (Dieguez-Aranda *et al*, 2003; Castro, 1955; Romahn de la Vega, 1994). Con la notación de este trabajo, significa que $V_{i+1,n}^{Ex-P} = V_{i+1,n}^{S-P} = V_{i+1,n}^{H-P} = V_{i+1,n}^{N-P}$. Lo anterior se verificó realizando los cálculos respectivos para cada uno de los cinco segmentos anteriores pero el material no se incluye por considerarse irrelevante.

4.2.5. Resumen de resultados para un paraboloides con 5 segmentos

En la tabla 4.2.2, se resumen los resultados de los volúmenes totales, así como los resultados obtenidos para cada uno de los segmentos en particular para cada una de las fórmulas obtenidas.

Tabla 4.2.2. Volúmenes por segmento y totales de paraboloides con 5 segmentos según fórmulas generales obtenidas para el MCS y el método exacto.

No. de Segmentos k	$V_{k,5}^{Ex-P}$ (unidades πAH^2)	$V_{k,5}^{MCS-P}$ (unidades πAH^2)
1	0.18	0.179628477
2	0.14	0.139521353
3	0.1	0.099326528
4	0.06	0.05885618
5	0.02	0.01333333
Vol. Total	0.5	0.490665868

Recuérdese que para paraboloides, $V_{i+1,5}^{Ex-P} = V_{i+1,5}^{S-P} = V_{i+1,5}^{H-P} = V_{i+1,5}^{N-P}$.

4.2.6. Estimación del volumen de un paraboloido con 10 segmentos utilizando el MCS y el método exacto

En forma similar al caso de un paraboloido con cinco segmentos, se realizaron los cálculos analíticos con 10 segmentos, mediante las fórmulas generales del MCS y el método exacto, los cuales se presentan en el apéndice B. Para aplicar MCS, se realiza un seccionamiento del sólido de revolución tal y como se ilustra en la figura 4.2.3, en donde se observan los segmentos con los cuales se estimará el volumen de dicho sólido.

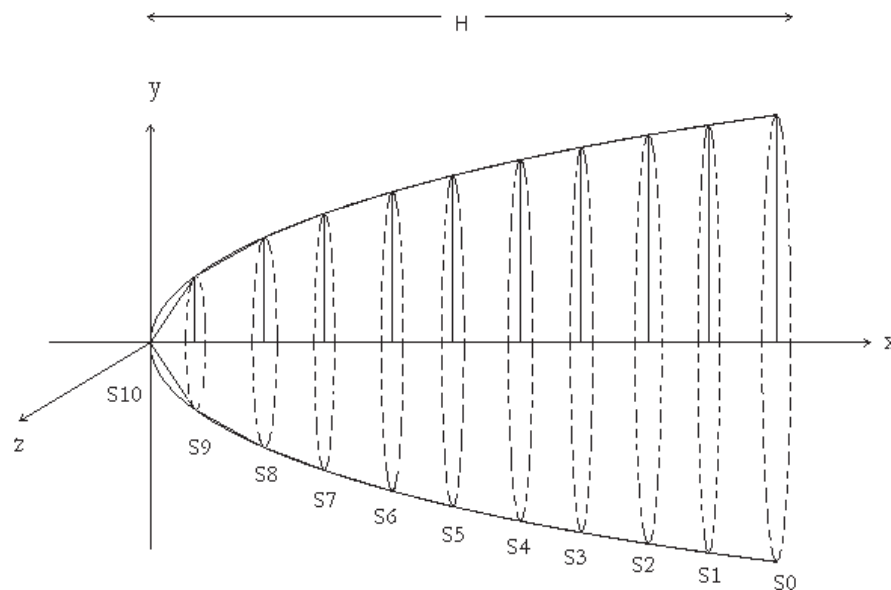


Figura 4.2.3. Aplicación del modelo cónico segmentado a un paraboloido con 10 segmentos.

En la tabla 4.2.3 se resumen los resultados obtenidos para el volumen total de paraboloido mediante cada uno de los métodos, considerando que $l = 1/10$.

Tabla 4.2.3. Volúmenes de segmento y totales obtenidos mediante el MCS y el método exacto para un paraboloides con 10 segmentos.

Segmento k	$V_{k,10}^{Ex-P}$ (unidades πAH^2)	$V_{k,10}^{MCS-P}$ (unidades πAH^2)
1	0.095	0.094956109
2	0.085	0.084950937
3	0.075	0.074944382
4	0.065	0.064935802
5	0.055	0.054924085
6	0.045	0.044907119
7	0.035	0.034880338
8	0.025	0.024831632
9	0.015	0.014714045
10	0.005	0.003333333
Vol.Total	0.5	0.497377779

También en este caso se verificó para cada uno de los segmentos, $V_{i+1,10}^{Ex-P} = V_{i+1,10}^{S-P} = V_{i+1,10}^{H-P} = V_{i+1,10}^{N-P}$, pero no se incluye el material.

4.2.7. Resultados de los cálculos obtenidos mediante la aplicación del MCS a un paraboloides con 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente por medio de Excel

Las fórmulas generales para el volumen de segmento de paraboloides, tanto para el MCS como para el método exacto, [4.2.6] y [4.2.10], fueron introducidas en Excel para hacer los cálculos

correspondientes a 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos, respectivamente. Los resultados arrojados mediante Excel, para 5 y 10 segmentos, fueron exactamente los mismos que los resultados analíticos de las sub-secciones 4.2.3-4.2.6. Los cálculos analíticos, sirvieron como datos de referencia para probar que las fórmulas introducidas en Excel estuvieran escritas correctamente.

En la tabla 4.2.4, se muestran los resultados obtenidos en el programa de Excel, para cada número de segmentos y para cada uno de los métodos utilizados.

Tabla 4.2.4. Volúmenes totales como función del número de segmentos para el método exacto y el MCS.

Número de Segmentos n	V_n^{Ex-P} (unidades πAH^2)	V_n^{MCS-P} (unidades πAH^2)
5	0.5	0.49066588
10	0.5	0.49737779
20	0.5	0.49927225
100	0.5	0.49996418
500	0.5	0.4999983

Recuérdese que para un paraboloides, $V_n^{Ex-P} = V_n^{S-P} = V_n^{H-P} = V_n^{Nw-P}$.

4.2.8. Cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$ para el volumen total de un paraboloides aplicando el MCS

Finalmente habiendo obtenido los resultados calculados para cualquier n a partir de las fórmulas generales en Excel, se procedió a la realización del cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$ para el volumen total de un paraboloides. Dichos cálculos se muestran a continuación:

La fórmula general para el volumen del i -ésimo segmento, con n segmentos, estimado mediante MCS, esta dada por la siguiente ecuación

[4.2.11]

$$V_{i+1,n}^{MCS-P} = \left[\frac{2\sqrt{(i+1)^2 - 1} + \sqrt{(i+1)^2 - (i+1)}}{3n^2} \right] \pi A H^2$$

De esta forma, el volumen total esta dado por:

$$V_n^{MCS-P} = \sum_{i=0}^{n-1} V_{i+1,n}^{MCS-P}$$

en donde si se sustituye la ecuación [4.2.6], la fórmula del volumen total queda expresada como

$$\begin{aligned} V_n^{MCS-P} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{2\sqrt{(i-1)^2 - 1} + \sqrt{(i-1)^2 - (i-1)}}{3n^2} \right] \pi A H^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{2n - 2i + 1 + \sqrt{(i-1)^2 - (i-1)}}{3n^2} \right] \pi A H^2 \end{aligned}$$

[4.2.12]

$$V_n^{MCS-P} = \left[\frac{2n^2 + n - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \sqrt{(i-1)^2 - (i-1)}}{3n^2} \right] \pi A H^2$$

Al término con raíz se le llamará g_i , para analizarlo por separado, es decir,

$$g_i = \sqrt{(i-1)^2 - (i-1)}$$

$$g_i = \sqrt{(i-1)(n-i+1) - 1}$$

$$g_i = \sqrt{(i-1)(n-1)}$$

Si n es mucho mayor a 1, lo cual se expresa de manera estándar como $n \gg 1$, y se denomina aproximación de números grandes, se tiene que

$$g_i = \sqrt{(n-i)(n-i)} = n-i$$

Sustituyendo la expresión anterior de g_i en la ecuación [4.2.12] se tiene que

[4.2.13]

$$V_{i+1, n \gg 1}^{MCS-P} = \left[\frac{2n^2 + n - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n (n-i)}{3n^2} \right] (AH^2)$$

El término $\sum_{i=1}^n i$, esta dado por (Stewart, 2002) como,

[4.2.14]

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{i+1, n \gg 1}^{MCS-P} &= \left[\frac{2n^2 + n - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n^2 - \frac{n(n+1)}{2}}{3n^2} \right] (AH^2) \\ &= \left[\frac{3n^2 + n - n^2 - n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}{3n^2} \right] (AH^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\left(2 - \frac{1}{2}\right)n^2 - \frac{n}{2}}{3n^2} \right] \pi AH^2 \\
&= \left[\frac{\frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2}}{3n^2} \right] \pi AH^2 \\
&= \left[\frac{3n^2 - n}{6n^2} \right] \pi AH^2
\end{aligned}$$

De esta forma, se obtiene la siguiente expresión

[4.2.15]

$$V_{i+1, n \gg 1}^{MCS-P} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6n} \right] \pi AH^2$$

Finalmente, aplicando el límite matemático cuando n tiende a infinito en la expresión [4.2.15], se encuentra que el volumen exacto queda como

[4.2.16]

$$V_{n \rightarrow \infty}^{MCS-P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6n} \right] \pi AH^2 = \frac{\pi AH^2}{2}$$

que es el volumen exacto conocido para el paraboloides, de altura H , generado por la ecuación 4.2.1.

4.2.9. Resumen de fórmulas generales para un paraboloido

En la tabla 4.2.5, se muestran las fórmulas generales para estimar el volumen de segmento en un paraboloido, como función del número de segmentos.

Tabla 4.2.5. Fórmulas generales para el volumen de segmento de paraboloido, obtenidas para cada método de cubicación.

Método	Fórmula
Exacto	$V_{i+1,n}^{Ex-P} = \left[\frac{2(\zeta - i) - 1}{2n^2} \right] (\zeta A H^2)$
MCS	$V_{i+1,n}^{MCS-P} = \left[\frac{2(\zeta - i) - 1 + \sqrt{(\zeta - i)^2 - (\zeta - i)}}{3n^2} \right] (\zeta A H^2)$
Smalian=Huber=Newton	=Exacto

4.3. Aplicación del MCS a un cono como función del número de segmentos

Siguiendo la misma metodología de los dos capítulos previos, en esta ocasión, se aplica MCS a un cono. En este caso, no es necesario realizar el cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$, ya que MCS es exacto para un cono independientemente del número de segmentos. En forma análoga al paraboloides, el ejercicio aparentemente obvio de seccionar un cono en conos truncados y determinar el volumen de los mismos, se realiza para obtener los volúmenes exactos de los mismos, que servirán de referencia al compararlos con los volúmenes de segmento obtenidos mediante los métodos estándar de cubicación. En este caso, MCS al igual que el método de Newton son exactos mientras que los métodos de Smalian y Huber, que son los más utilizados en la práctica, son aproximados.

4.3.1. Obtención de fórmulas generales al aplicar el MCS a un cono

En la figura 4.3.1, se muestra el seccionamiento para un cono en función del número de segmentos, considerando un sistema cartesiano tridimensional.

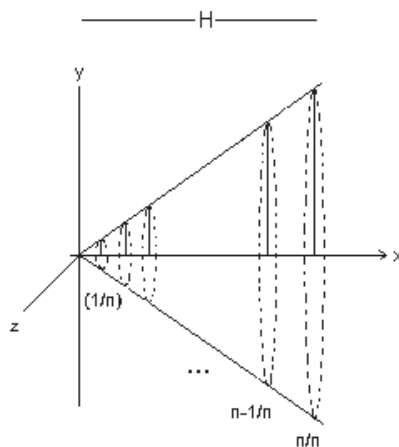


Figura 4.3.1. Aplicación general del modelo cónico segmentado a un cono para un número n segmentos.

La función generatriz correspondiente al cono esta dada por,

[4.3.1]

$$y^2 = Ax^2$$

para las coordenadas x , y de la figura 4.3.1. En la tabla 4.3.1, se muestran los valores de y^2 y y , evaluados en las coordenadas x , en los extremos de los segmentos. Nuevamente, los valores y de la tabla 4.3.1 corresponden a los radios de las secciones transversales.

Tabla 4.3.1. Valores asignados a la variable x por cortes transversales del cono.

x	$y^2 = Ax^2$	$y = \sqrt{Ax}$
$x_1 = \left(\frac{1}{n}\right)H$	$y_1^2 = A\left(\frac{1}{n}H\right)^2$	$y_1 = \sqrt{A}\left(\frac{1}{n}H\right)$
$x_2 = \left(\frac{2}{n}\right)H$	$y_2^2 = A\left(\frac{2}{n}H\right)^2$	$y_2 = \sqrt{A}\left(\frac{2}{n}H\right)$
$x_3 = \left(\frac{3}{n}\right)H$	$y_3^2 = A\left(\frac{3}{n}H\right)^2$	$y_3 = \sqrt{A}\left(\frac{3}{n}H\right)$
\vdots	\vdots	\vdots
$x_{n-2} = \left(\frac{n-2}{n}\right)H$	$y_{n-2}^2 = A\left(\frac{n-2}{n}H\right)^2$	$y_{n-3} = \sqrt{A}\left(\frac{n-2}{n}H\right)$
$x_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)H$	$y_{n-1}^2 = A\left(\frac{n-1}{n}H\right)^2$	$y_{n-1} = \sqrt{A}\left(\frac{n-1}{n}H\right)$
$x_n = \left(\frac{n}{n}\right)H$	$y_n^2 = A\left(\frac{n}{n}H\right)^2$	$y_n = \sqrt{AH}$

La derivación de las fórmulas generales se obtiene de la sustitución en la ecuación de cono truncado [4.1.4] de los valores de los radios dados en la tabla 4.3.1.

$$V_{i+1,n}^{MCS-C} = \frac{1}{3n} \left[\left(\frac{i+1}{n} \right)^2 + \left(\frac{i+1}{n} \right) \left(\frac{i}{n} \right) + \left(\frac{i}{n} \right)^2 \right] \pi A H^3$$

Con esta fórmula se obtienen los resultados analíticos para cada segmento en particular para 5 y 10 segmentos respectivamente.

En forma similar, se obtienen las fórmulas generales de volumen de segmento para los métodos de Smalian y Huber. El método de Newton queda en función de los anteriores mediante la ecuación [2.9]. En la tabla 4.3.2, se encuentran las fórmulas generales obtenidas para cada uno de los métodos de aproximación.

Tabla 4.3.2. Fórmulas generales obtenidas para cada método de cubicación en un cono.

Método	Fórmula
MCS	$V_{i+1,n}^{MCS-C} = \frac{1}{3n^3} \left[(i+1)^2 + (i+1)i + i^2 \right]$
Smalian	$V_{i+1,n}^{S-C} = \frac{1}{2n^3} \left[(i+1)^2 + i^2 \right]$
Huber	$V_{i+1,n}^{H-C} = \frac{1}{4n^3} \left[(i+1)^2 \right]$
Newton	$V_{i+1,n}^{Nw-C} = \left(\frac{2}{3} \right) V_{i+1,n}^{H-C} + \left(\frac{1}{3} \right) V_{i+1,n}^{S-C}$

4.3.2. Resultados de la aplicación analítica del MCS para un cono con 5 segmentos

Aplicando el MCS a un cono con cinco segmentos, se ilustra la geometría a considerar en la figura 4.3.2, donde se muestran los cortes transversales que pasan por su centro, los cuales son calculados para la obtención del volumen total.

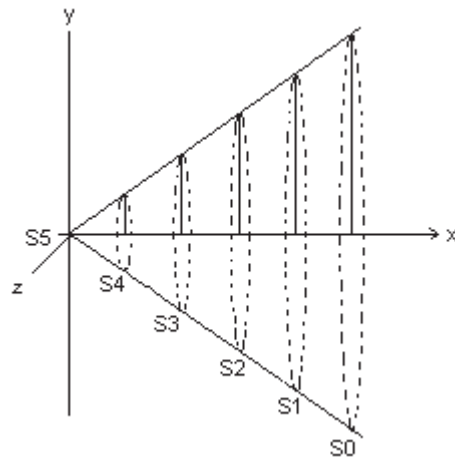


Figura 4.3.2. Aplicación del modelo cónico segmentado a cono con 5 segmentos.

Para el cálculo analítico, resulta más simple trabajar directamente con la ecuación de cono truncado correspondiente a cada segmento. Basta entonces, con sustituir los valores de y^2 dados en la tabla 4.3.1, en la ecuación [2.8].

Primer segmento, $i=0$, $k=1$, esta dado por

$$V_{1,5}^{MCS-C} = \left(\frac{S_0 + \sqrt{S_0 S_1} + S_1}{3} \right) \left(\frac{1}{5} H \right)$$

$$= \left[\frac{S_0 + \sqrt{S_0 \left[\left(\frac{4}{5} \right)^2 S_0 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 S_0 \right]}}{3} \right] \left(\frac{1}{5} H \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1 + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^2}{3} \right] S_0 \left(\frac{1}{5}H\right) \\
&= \left[\frac{1 + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^2}{15} \right] S_0 H \\
&= \left[\frac{1 + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)^2}{15} \right] \pi A H^3 \\
&= \left[\frac{1 + 0.8 + 0.64}{15} \right] \pi A H^3 \\
&= 0.162666666 \pi A H^3
\end{aligned}$$

Segundo segmento, $i=1$, $k=2$, esta dado por

$$\begin{aligned}
V_{2,5}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2}{3} \right) \left(\frac{1}{5}H \right) \\
&= \left[\frac{\pi \left(\frac{4}{5}\right)^2 A H^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{4}{5}\right)^2 A H^2 \cdot \pi \left(\frac{3}{5}\right)^2 A H^2} + \pi \left(\frac{3}{5}\right)^2 A H^2}{3} \right] \left(\frac{1}{5}H \right) \\
&= \left[\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2}{15} \right] \pi A H^3 \\
&= \left(\frac{0.64 + 0.48 + 0.36}{15} \right) \pi A H^3 \\
&= 0.098666666 \pi A H^3
\end{aligned}$$

Tercer segmento, $i=2$, $k=3$, esta dado por

$$\begin{aligned}
 V_{3,5}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_2 + \sqrt{S_2 S_3} + S_3}{3} \right) \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left[\frac{\pi \left(\frac{3}{5} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{3}{5} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{2}{5} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{2}{5} \right)^2 AH^2}{3} \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left[\frac{\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{2}{5} \right) + \left(\frac{2}{5} \right)^2}{15} \right] \pi AH^3 \\
 &= \left(\frac{0.36 + 0.24 + 0.16}{15} \right) \pi AH^3 \\
 &= 0.050666666 \pi AH^3
 \end{aligned}$$

Cuarto segmento, $i=3$, $k=4$, esta dado por

$$\begin{aligned}
 V_{4,5}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_3 + \sqrt{S_3 S_4} + S_4}{3} \right) \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left[\frac{\pi \left(\frac{2}{5} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{2}{5} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{1}{5} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{1}{5} \right)^2 AH^2}{3} \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left[\frac{\left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} \right)^2}{15} \right] \pi AH^3 \\
 &= \left(\frac{0.16 + 0.08 + 0.04}{15} \right) \pi AH^3 \\
 &= 0.018666666 \pi AH^3
 \end{aligned}$$

Quinto segmento, $i=4$, $k=5$, esta dado por

$$\begin{aligned}
 V_{5,5}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_4 + \sqrt{S_4 S_5} + S_5}{3} \right) \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left[\frac{\pi \left(\frac{1}{5} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{1}{5} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{0}{5} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{0}{5} \right)^2 AH^2}{3} \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left[\frac{\left(\frac{1}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right) \left(\frac{0}{5} \right) + \left(\frac{0}{5} \right)^2}{15} \right] \pi AH^3 \\
 &= \left(\frac{0.04}{15} \right) \pi AH^3 \\
 &= 0.002666666 \pi AH^3
 \end{aligned}$$

Se realiza la sumatoria del volumen de cada región,

$$\begin{aligned}
 V_5^{MCS-C} &= \left[V_{1,5}^{MCS-C} + V_{2,5}^{MCS-C} + V_{3,5}^{MCS-C} + V_{4,5}^{MCS-C} + V_{5,5}^{MCS-C} \right] \\
 &= 0.333333333 \pi AH^3
 \end{aligned}$$

4.3.3. Resultados para un cono con 5 segmentos mediante el método de Smalian

La fórmula general de Smalian para cada segmento, en función de las variables discretas i , n , queda como se muestra a continuación

$$V_{i+1,n}^{S-C} = \frac{1}{2n^3} \left[(k+1)^2 + i^2 \right]$$

Para el cálculo analítico, resulta más fácil utilizar directamente la ecuación Smalian para cada segmento. A continuación se muestran los resultados para 5 segmentos.

Para el primer segmento, $i=0$, $k=1$,

$$\begin{aligned} V_{1,5}^{S-C} &= \left(\frac{S_0 + S_1}{2} \right) \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left[\frac{\pi A H^2 + \pi \left(\frac{4}{5} \right)^2 A H^2}{2} \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left[\frac{1 + \left(\frac{4}{5} \right)^2}{10} \right] \pi A H^3 \\ &= 0.164 \pi A H^3 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$,

$$\begin{aligned} V_{2,5}^{S-C} &= \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right) \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left[\frac{\pi \left(\frac{4}{5} \right)^2 A H^2 + \pi \left(\frac{3}{5} \right)^2 A H^2}{2} \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left[\frac{\left(\frac{4}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{5} \right)^2}{10} \right] \pi A H^3 \\ &= 0.1 \pi A H^3 \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2$, $k=3$,

$$\begin{aligned}V_{3,5}^{S-C} &= \left(\frac{S_2 + S_3}{2} \right) \left(\frac{1}{5} H \right) \\&= \left[\frac{\pi \left(\frac{3}{5} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{2}{5} \right)^2 AH^2}{2} \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\&= \left[\frac{\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{2}{5} \right)^2}{10} \right] \pi AH^3 \\&= 0.052 \pi AH^3\end{aligned}$$

Para el cuarto segmento, $i=3$, $k=4$,

$$\begin{aligned}V_{4,5}^{S-C} &= \left(\frac{S_3 + S_4}{2} \right) \left(\frac{1}{5} H \right) \\&= \left[\frac{\pi \left(\frac{2}{5} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{1}{5} \right)^2 AH^2}{2} \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\&= \left[\frac{\left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^2}{10} \right] \pi AH^3 \\&= 0.02 \pi AH^3\end{aligned}$$

Para el quinto segmento, $i=4$, $k=5$,

$$\begin{aligned}
 V_{5,5}^{S-C} &= \left(\frac{S_4 + S_5}{2} \right) \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left[\frac{\pi \left(\frac{1}{5} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{0}{5} \right)^2 AH^2}{2} \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\
 &= \left[\frac{\left(\frac{1}{5} \right)^2 + \left(\frac{0}{5} \right)^2}{10} \right] \pi AH^3 \\
 &= 0.004 \pi AH^3
 \end{aligned}$$

Sumando el volumen de cada una de los segmentos se obtiene el volumen total,

$$\begin{aligned}
 V_5^{S-C} &= \left(V_{1,5}^{S-C} + V_{2,5}^{S-C} + V_{3,5}^{S-C} + V_{4,5}^{S-C} + V_{5,5}^{S-C} \right) \\
 &= 0.34 \pi AH^3
 \end{aligned}$$

4.3.4. Resultados para un cono con 5 segmentos mediante la fórmula general de Huber

La fórmula general de Huber [4.3.4] y los resultados para cada segmento se presentan a continuación.

[4.3.4]

$$\boxed{V_{i+1,n}^{H-C} = \frac{1}{4n^3} \left(i+1 \right)^2}$$

Para el cálculo analítico, resulta más fácil utilizar directamente la ecuación Huber para cada segmento. A continuación se muestran los resultados.

Primer segmento, $i=0$, $k=1$, esta dado por

$$\begin{aligned}V_{1,5}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{9}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left(\frac{9}{10} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right) \pi AH^3 \\ &= 0.162 \pi AH^3\end{aligned}$$

Segundo segmento, $i=1$, $k=2$, esta dado por

$$\begin{aligned}V_{2,5}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{7}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left(\frac{7}{10} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right) \pi AH^3 \\ &= 0.098 \pi AH^3\end{aligned}$$

Tercer segmento, $i=2$, $k=3$, esta dado por

$$\begin{aligned}V_{3,5}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{5}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left(\frac{5}{10} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right) \pi AH^3 \\ &= 0.05 \pi AH^3\end{aligned}$$

Cuarto segmento, $i=3$, $k=4$, esta dado por

$$\begin{aligned} V_{4,5}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{3}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left(\frac{3}{10} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right) \pi AH^3 \\ &= 0.018 \pi AH^3 \end{aligned}$$

Quinto segmento, $i=4$, $k=5$, esta dado por

$$\begin{aligned} V_{5,5}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{1}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{5} H \right) \\ &= \left(\frac{1}{10} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right) \pi AH^3 \\ &= 0.002 \pi AH^3 \end{aligned}$$

La suma del volumen de cada uno de los segmentos es la siguiente:

$$\begin{aligned} V_5^{H-C} &= V_{1,5}^{H-C} + V_{2,5}^{H-C} + V_{3,5}^{H-C} + V_{4,5}^{H-C} + V_{5,5}^{H-C} \\ &= 0.33 \pi AH^3 \end{aligned}$$

4.3.5. Resultados para un cono con 5 segmentos mediante la fórmula general de Newton

La fórmula general de Newton y los resultados para cada segmento se muestran a continuación.

[4.3.5]

$$V_{i+1,n}^{Nw-C} = \left(\frac{2}{3} \right) V_{i+1,n}^{H-C} + \left(\frac{1}{3} \right) V_{i+1,n}^{S-C}$$

Primer segmento, $i=0$, $k=1$, esta dado por

$$\begin{aligned} V_{1,5}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) \bullet 0.162 \overline{\pi}AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) \bullet 0.164 \overline{\pi}AH^3 \\ &= 0.162666666\pi AH^3 \end{aligned}$$

Segundo segmento, $i=1$, $k=2$, esta dado por

$$\begin{aligned} V_{2,5}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) \bullet 0.098 \overline{\pi}AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) \bullet 0.1 \overline{\pi}AH^3 \\ &= 0.098666666\pi AH^3 \end{aligned}$$

Tercer segmento, $i=2$, $k=3$, esta dado por

$$\begin{aligned} V_{3,5}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) \bullet 0.05 \overline{\pi}AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) \bullet 0.052 \overline{\pi}AH^3 \\ &= 0.050666666\pi AH^3 \end{aligned}$$

Cuarto segmento, $i=3$, $k=4$, esta dado por

$$\begin{aligned} V_{4,5}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) \bullet 0.018 \overline{\pi}AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) \bullet 0.02 \overline{\pi}AH^3 \\ &= 0.018666666\pi AH^3 \end{aligned}$$

Quinto segmento, $i=4$, $k=5$, esta dado por

$$\begin{aligned} V_{5,5}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) \bullet 0.002 \overline{\pi}AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) \bullet 0.004 \overline{\pi}AH^3 \\ &= 0.002666666\pi AH^3 \end{aligned}$$

El volumen total obtenido de la suma de cada uno de los segmentos es el siguiente,

$$\begin{aligned} V_5^{Nw-C} &= \left(V_{1,5}^{Nw-C} + V_{2,5}^{Nw-C} + V_{3,5}^{Nw-C} + V_{4,5}^{Nw-C} + V_{5,5}^{Nw-C} \right) \\ &= 0.333333333 \pi AH^3 \end{aligned}$$

En esta ocasión se realizaron los cálculos analíticos mediante la fórmula general de Newton, para comprobar la relación que se ha venido mencionando en capítulos previos, entre el volumen de Huber y Smalian.

En la tabla 4.3.3, se resumen los resultados obtenidos mediante cada método de cubicación para un cono con 5 segmentos. Del mismo modo fueron realizados los cálculos para 10 segmentos; los cuales se muestran de forma completa en el apéndice C.

Tabla 4.3.3. Volumen total y por segmento mediante los métodos de cubicación para un cono con 5 segmentos.

No. de Segmentos k	$V_{k,5}^{MCS-C}$ (unidades πAH^3)	$V_{k,5}^{S-C}$ (unidades πAH^3)	$V_{k,5}^{H-C}$ (unidades πAH^3)	$V_{k,5}^{Nw-C}$ (unidades πAH^3)
1	0.162666666	0.164	0.162	0.162666666
2	0.098666666	0.1	0.098	0.098666666
3	0.050666666	0.052	0.05	0.050666666
4	0.018666666	0.02	0.018	0.018666666
5	0.002666666	0.004	0.002	0.002666666
Vol. Total	0.333333333	0.34	0.33	0.333333333

Obsérvese que los resultados del MCS y el método de newton son iguales.

4.3.6. Estimación del volumen para un cono con 10 segmentos utilizando el MCS y los métodos estándar de cubicación

Como en el caso anterior, se realiza la aplicación del MCS para 10 segmentos. En la figura 4.3.3, se muestra la geométrica a considerar, donde se observan los segmentos con los que se obtendrá el volumen total del sólido de revolución.

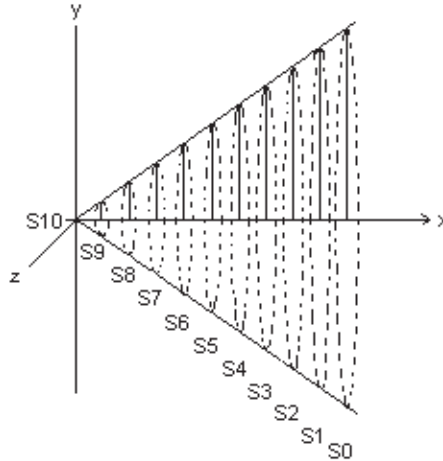


Figura 4.3.3. Aplicación del MCS a un cono con 10 segmentos.

En la tabla 4.3.4, se muestran los resultados obtenidos para un cono, mediante cada uno de los métodos de cubicación. El proceso completo de cálculo para 10 segmentos se muestra en el apéndice C.

Tabla 4.3.4. Volumen por segmento y volumen total de cada método de cubicación.

No. de Segmentos k	$V_{k,10}^{MCS-C}$ (unidades πAH^3)	$V_{k,10}^{S-C}$ (unidades πAH^3)	$V_{k,10}^{H-C}$ (unidades πAH^3)	$V_{k,10}^{Nw-C}$ (unidades πAH^3)
1	0.090333333	0.0905	0.09025	0.090333333
2	0.072333333	0.0725	0.07225	0.072333333
3	0.056333333	0.0565	0.05625	0.056333333
4	0.042333333	0.0425	0.04225	0.042333333
5	0.030333333	0.0305	0.03025	0.030333333
6	0.020333333	0.0205	0.02025	0.020333333
7	0.012333333	0.0125	0.01225	0.012333333
8	0.006333333	0.0065	0.00625	0.006333333
9	0.002333333	0.0025	0.00225	0.002333333
10	0.000333333	0.0005	0.00025	0.000333333
Vol. Total	0.333333327	0.335	0.3325	0.333333327

4.3.7. Resultados de los cálculos obtenidos mediante la aplicación del MCS para un cono con 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente por medio de Excel

Las fórmulas que se mostraron en la tabla 4.3.2, fueron introducidas en Excel para obtener los resultados para 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente; dichos resultados se muestran en la tabla 4.3.5.

Tabla 4.3.5. Volúmenes totales para los diferentes métodos como función del número de segmentos.

Número de Segmentos n	V_n^{MCS-C} (unidades πAH^3)	V_n^{S-C} (unidades πAH^3)	V_n^{H-C} (unidades πAH^3)	V_n^{Nw-C} (unidades πAH^3)
5	0.3333333	0.34	0.33	0.3333333
10	0.3333333	0.335	0.3325	0.3333333
20	0.3333333	0.33375	0.333125	0.3333333
100	0.3333333	0.33335	0.333325	0.3333333
500	0.3333333	0.333334	0.333333	0.3333333

4.3.8. Resumen de fórmulas generales para un cono

En la tabla 4.3.6, se muestran las fórmulas generales para estimar el volumen de n segmentos para un cono, que fueron obtenidas en este trabajo.

Tabla 4.3.6. Fórmulas generales para el volumen de segmentos obtenidas mediante cada método de cubicación para un cono.

Método	Fórmula
MCS	$V_{i+1,n}^{MCS-C} = \frac{1}{3n^3} [i+1]^2 + [i+1]i + i^2$
Smalian	$V_{i+1,n}^{S-C} = \frac{1}{2n^3} [i+1]^2 + i^2$
Huber	$V_{i+1,n}^{H-C} = \frac{1}{4n^3} [i+1]^2$
Newton	$V_{i+1,n}^{Nw-C} = \left(\frac{2}{3}\right)V_{i+1,n}^{H-C} + \left(\frac{1}{3}\right)V_{i+1,n}^{S-C}$

4.4. Aplicación del MCS a un neiloide como función del número de segmentos

En este capítulo se lleva a cabo la obtención de volumen mediante el MCS para un neiloide, aplicando el mismo procedimiento que en las secciones previas.

4.4.1. Obtención de fórmulas generales al aplicar el MCS a un neiloide

En la figura 4.4.1, se muestra el seccionamiento en función del número de segmentos de un neiloide aplicando el MCS.

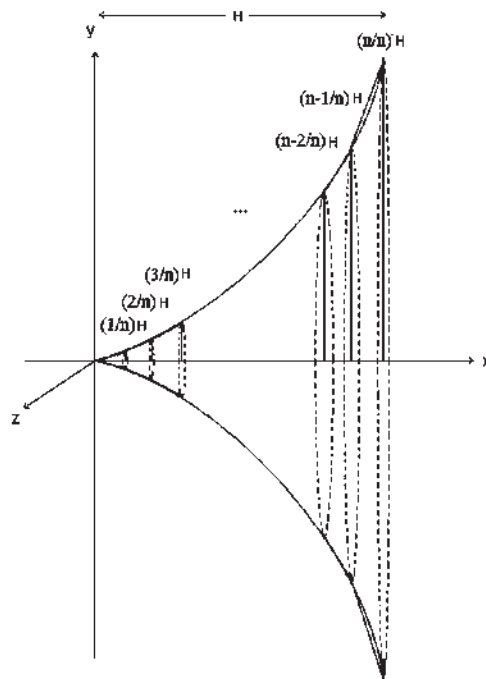


Figura 4.4.1. Diagrama general del MCS a un neiloide para n segmentos

La ecuación generatriz del neiloide es,

$$y^2 = Ax^3, \quad [4.4.1]$$

En la tabla 4.4.1, se muestran los valores de y^2 y y , evaluados en las coordenadas x , en los extremos de los segmentos. Los valores y de esta tabla corresponden a los radios de las secciones transversales.

Tabla 4.4.1. Valores asignados a la variable x de la función generatriz del neiloide.

x	$y^2 = Ax^3$	y
$x_1 = \left(\frac{1}{n}\right)H$	$y_1^2 = A\left(\frac{1}{n}H\right)^3$	$y_1 = \sqrt{A\frac{H^3}{n^3}}$
$x_2 = \left(\frac{2}{n}\right)H$	$y_2^2 = A\left(\frac{2}{n}H\right)^3$	$y_2 = \sqrt{2^3\frac{AH^3}{n^3}} = \sqrt{2^3}\sqrt{\frac{AH^3}{n^3}}$
$x_3 = \left(\frac{3}{n}\right)H$	$y_3^2 = A\left(\frac{3}{n}H\right)^3$	$y_3 = \sqrt{3^3\frac{AH^3}{n^3}} = \sqrt{3^3}\sqrt{\frac{AH^3}{n^3}}$
\vdots	\vdots	\vdots
$x_{n-2} = \left(\frac{n-2}{n}\right)H$	$y_{n-2}^2 = A\left(\frac{n-2}{n}H\right)^3$	$y_{n-2} = \sqrt{n-2^3\frac{AH^3}{n^3}} = \sqrt{n-2^3}\sqrt{\frac{AH^3}{n^3}}$
$x_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)H$	$y_{n-1}^2 = A\left(\frac{n-1}{n}H\right)^3$	$y_{n-1} = \sqrt{n-1^3\frac{AH^3}{n^3}} = \sqrt{n-1^3}\sqrt{\frac{AH^3}{n^3}}$
$x_n = \left(\frac{n}{n}\right)H$	$y_n^2 = A\left(\frac{n}{n}H\right)^3$	$y_n = \sqrt{AH^3}$

Con base en la ecuación del volumen de cono truncado [2.8], debido a la sustitución de los radios respectivos para el caso de un neiloide, la fórmula general para el volumen de segmento, en función de las variables i y n queda expresada como,

[4.4.2]

$$V_{i+1,n}^{MCS-N} = \frac{1}{3n^4} \left\{ (n+1) - i^3 + \sqrt{(n+1) - i^3} \right\} \pi A H^4$$

Similarmente, la fórmula para obtener el volumen exacto de un neiloide en función del número de segmentos queda expresada como

[4.4.3]

$$V_{i+1,n}^{EX-N} = \frac{1}{4n^4} \left\{ (n-i+1)^3 - i^3 \right\} \pi A H^4$$

Las fórmulas [4.4.2] y [4.4.3] se utilizan para los cálculos con Excel. Por simplicidad, los cálculos analíticos para 5 y 10 segmentos se realizan utilizando las áreas de las secciones transversales en las ecuaciones respectivas de cada método.

En la tabla 4.4.2, se encuentran las fórmulas generales obtenidas para cada método de aproximación.

Tabla 4.4.2. Fórmulas generales obtenidas para cada método de cubicación para un neiloide.

Método	Fórmula
Exacto	$V_{i+1,n}^{Ex-N} = \frac{1}{4n^4} \left[(i+1)^3 - i^3 \right] \pi A H^4$
MCS	$V_{i+1,n}^{MCS-N} = \frac{1}{3n^4} \left[(i+1)^3 + i^3 + \sqrt{(i+1)^3 i^3} \right] \pi A H^4$
Smalian	$V_{i+1,n}^{S-N} = \frac{1}{2n^4} \left[(i+1)^3 + i^3 \right] \pi A H^4$
Huber	$V_{i+1,n}^{H-N} = \frac{(n-2i-1)^3}{8n^4} \pi A H^4$
Newton	$V_{i+1,n}^{Nw-N} = \left(\frac{2}{3} \right) V_{i+1,n}^{H-N} + \left(\frac{1}{3} \right) V_{i+1,n}^{S-N}$

4.4.2. Resultados de la aplicación analítica del MCS a un neiloide con 5 segmentos

La geometría a considerar para un neiloide dividido en 5 segmentos, aplicando el MCS, se muestra en la figura 4.4.2.

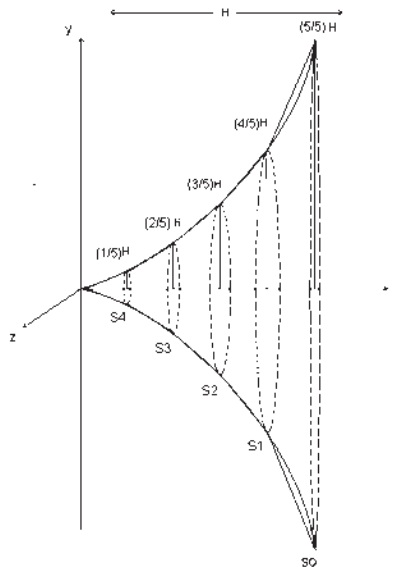


Figura 4.4.2. Aplicación del modelo cónico segmentado a un neiloide con 5 segmentos.

Los parámetros requeridos para la estimación del volumen para 5 segmentos, se muestran en la tabla 4.4.3.

Tabla 4.4.3. Valores dados a la ecuación generatriz de un neiloide.

x	$y^2 = Ax^3$	y
$x_1 = \frac{1}{5}H$	$y_1^2 = A\left(\frac{1}{5}H\right)^3$	$y_1 = \sqrt{A\frac{H^3}{5^3}}$
$x_2 = \frac{2}{5}H$	$y_2^2 = A\left(\frac{2}{5}H\right)^3$	$y_2 = \sqrt{2^3\frac{AH^3}{5^3}} = \sqrt{2^3}\sqrt{\frac{AH^3}{5^3}}$
$x_3 = \frac{3}{5}H$	$y_3^2 = A\left(\frac{3}{5}H\right)^3$	$y_3 = \sqrt{3^3\frac{AH^3}{5^3}} = \sqrt{3^3}\sqrt{\frac{AH^3}{5^3}}$
$x_4 = \frac{4}{5}H$	$y_4^2 = A\left(\frac{4}{5}H\right)^3$	$\sqrt{4^3\frac{AH^3}{5^3}} = \sqrt{4^3}\sqrt{\frac{AH^3}{5^3}}$
$x_5 = \frac{5}{5}H$	$y_5^2 = A\left(\frac{5}{5}H\right)^3$	$y_5 = \sqrt{AH^3}$

Para el cálculo analítico, resulta más simple trabajar directamente con la ecuación de cono truncado correspondiente a cada segmento. Basta entonces, con sustituir los valores de y^2 dados en la tabla 4.4.3, en la ecuación [2.8].

Para el primer segmento, $i=0, k=1$, el volumen esta dado por

$$\begin{aligned}
 V_{1,5}^{MCS-N} &= \frac{1}{3}\left(\frac{H}{5}\right) \left[S_0 + S_1 + \sqrt{S_0 S_1} \right] \\
 &= \frac{1}{3}\left(\frac{H}{5}\right) \left[\pi AH^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \pi AH^3 + \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^3 \pi AH^3 \cdot \pi AH^3} \right] \\
 &= \frac{1}{3}\left(\frac{H}{5}\right) \left[1 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^3} \right] \pi AH^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{15} \left[1 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.148502783 \pi A H^4
\end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$,

$$\begin{aligned}
V_{2,5}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5}\right) \left[S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5}\right) \left[\left(\frac{4}{5}\right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 5}\right)^3 \pi A H^3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5}\right) \left[\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \sqrt{\left(\frac{12}{25}\right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{15} \left[\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \sqrt{\left(\frac{12}{25}\right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.070703583 \pi A H^4
\end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2$, $k=3$,

$$\begin{aligned}
V_{3,5}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5}\right) \left[S_2 + S_3 + \sqrt{S_2 S_3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5}\right) \left[\left(\frac{3}{5}\right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 5}\right)^3 \pi A H^3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5}\right) \left[\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{15} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.026505033 \pi A H^4
\end{aligned}$$

Para el cuarto segmento, $i=3, k=4$,

$$\begin{aligned}
 V_{4,5}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[S_3 + S_4 + \sqrt{S_3 S_4} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\left(\frac{2}{5} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{1}{5} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{2.1}{5.5} \right)^3 \pi A H^3} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\left(\frac{2}{5} \right)^3 + \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{2}{25} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
 &= \frac{1}{15} \left[\left(\frac{2}{5} \right)^3 + \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{2}{25} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
 &= 0.006308494467 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

Para el quinto segmento, $i=4, k=5$,

$$\begin{aligned}
 V_{5,5}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{5} \right) \left[\left(\frac{1}{5} \right)^3 + \left(\frac{0}{5} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{1.0}{5.5} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
 &= \frac{1}{15} \left[\left(\frac{1}{5} \right)^3 + \left(\frac{0}{5} \right)^3 \right] \pi A H^4 \\
 &= \frac{1}{15} \left[0.008 + 0 \right] \pi A H^4 \\
 &= 0.0005333 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

El volumen total estimado, con 5 segmentos, para un neiloide mediante el MCS es,

$$\begin{aligned}
 V_5^{MCS-N} &= V_{1,5}^{MCS-N} + V_{2,5}^{MCS-N} + V_{3,5}^{MCS-N} + V_{4,5}^{MCS-N} + V_{5,5}^{MCS-N} \\
 &= 0.252553193 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

4.4.3. Resultados para un neiloide con 5 segmentos mediante el método exacto

Los cálculos analíticos para un segmento de neiloide, se obtienen de manera simple realizando una diferencia entre los volúmenes de los dos neilodes completos asociados a cada extremo del segmento de interés. Enseguida se resuelve el problema para 5 segmentos.

Para el primer segmento, $i=0$, $k=1$, el volumen esta dado por

$$V_{1,5}^{Ex-N} = \frac{S_0 H}{4} - \frac{S_1 \left(\frac{4}{5}H\right)}{4}$$

en donde,

$$S_0 = \pi A H^3; \quad S_1 = \pi A \left(\frac{4}{5}H\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{1,5}^{Ex-N} &= \left[S_0 - \frac{4}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^3 S_0 \right] \frac{H}{4} \\ &= \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\ &= \left[1 - 0.4096 \right] \frac{\pi A H^4}{4} \\ &= 0.5904 \frac{\pi A H^4}{4} \\ &= 0.1476 \pi A H^4 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$,

$$V_{2,5}^{Ex-N} = \frac{S_1 \left(\frac{4}{5}H\right)}{4} - \frac{S_2 \left(\frac{3}{5}H\right)}{4}$$

en donde,

$$S_2 = \pi A \left(\frac{3}{5} H \right)^3 = \left(\frac{3}{5} \right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{2,5}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{4}{5} \right)^3 S_0 \left(\frac{4}{5} H \right)}{4} - \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^3 S_0 \left(\frac{3}{5} H \right)}{4} \\ &= \left(\frac{4}{5} \right)^4 \frac{S_0 H}{4} - \left(\frac{3}{5} \right)^4 \frac{S_0 H}{4} \\ &= \left[\left(\frac{4}{5} \right)^4 - \left(\frac{3}{5} \right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\ &= \left(\frac{256 - 81}{625} \right) \frac{\pi A H^4}{4} \\ &= 0.28 \frac{\pi A H^4}{4} \\ &= 0.07 \pi A H^4 \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2$, $k=3$,

$$V_{3,5}^{Ex-N} = \frac{S_2 \left(\frac{3}{5} H \right)}{4} - \frac{S_3 \left(\frac{2}{5} H \right)}{4}$$

en donde,

$$S_3 = \pi A \left(\frac{2}{5} H \right)^3 = \left(\frac{2}{5} \right)^3 S_0 ,$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{3,5}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^3 S_0 \left(\frac{3}{5} H \right)}{4} - \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^3 S_0 \left(\frac{2}{5} H \right)}{4} \\ &= \left[\left(\frac{3}{5} \right)^4 - \left(\frac{2}{5} \right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{81-16}{625} \right) \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.104 \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.026 \pi A H^4
\end{aligned}$$

Para el cuarto segmento, $i=3$, $k=4$,

$$V_{4,5}^{Ex-N} = \frac{S_3 \left(\frac{2}{5} H \right)}{4} - \frac{S_4 \left(\frac{1}{5} H \right)}{4}$$

en donde,

$$S_4 = \pi A \left(\frac{1}{5} H \right)^3 = \left(\frac{1}{5} \right)^3 S_0,$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
V_{4,5}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^3 S_0 \left(\frac{2}{5} H \right)}{4} - \frac{\left(\frac{1}{5} \right)^3 S_0 \left(\frac{1}{5} H \right)}{4} \\
&= \left[\left(\frac{2}{5} \right)^4 - \left(\frac{1}{5} \right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\
&= \left(\frac{16-1}{625} \right) \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.024 \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.006 \pi A H^4
\end{aligned}$$

Para el quinto segmento, $i=4$, $k=5$,

$$\begin{aligned}
V_{5,5}^{Ex-N} &= \frac{S_4 \left(\frac{H}{5} \right)}{4} = \frac{\left[\pi A \left(\frac{1}{5} H \right)^3 \right] \left(\frac{H}{5} \right)}{4} \\
&= \left(\frac{1}{5} \right)^4 \frac{\pi A H^4}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{5}\right)^4 \frac{\pi AH^4}{4} \\
&= 0.0016 \frac{\pi AH^4}{4} \\
&= 0.0004 \pi AH^4
\end{aligned}$$

El volumen total exacto del neiloide estimado con 5 segmentos es,

$$\begin{aligned}
V_5^{Ex-N} &= V_{1,5}^{Ex-N} + V_{2,5}^{Ex-N} + V_{3,5}^{Ex-N} + V_{4,5}^{Ex-N} + V_{5,5}^{Ex-N} \\
&= 0.25 \pi AH^4
\end{aligned}$$

4.4.4. Resultados para un neiloide con 5 segmentos mediante la fórmula general de Smalian

La fórmula general de Smalian para el segmento de un neiloide como función del número de segmentos es,

[4.4.4]

$$V_{i+1,n}^{S-N} = \frac{1}{2n^4} \left[(i+1)^3 + (i+1)^2 + (i+1) + 1 \right]$$

Para el cálculo analítico, resulta más fácil utilizar directamente la ecuación Smalian para cada segmento. A continuación se muestran los resultados.

Para el primer segmento, $i=0$, $k=1$, el volumen está dado por

$$\begin{aligned}
 V_{1,5}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\pi A H^3 + \left(\frac{4}{5} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{4}{5} \right)^3 \right] \pi A H^3 \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{10} \left[1 + 0.512 \right] \pi A H^4 \\
 &= 0.1512 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$,

$$\begin{aligned}
 V_{2,5}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4}{5} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{3}{5} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{2} \left[0.512 + 0.216 \right] \pi A H^3 \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{10} \left[0.728 \right] \pi A H^4 \\
 &= 0.0728 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2$, $k=3$,

$$\begin{aligned}
 V_{3,5}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{5} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{2}{5} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{2} \left[0.216 + 0.064 \right] \pi A H^3 \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{10} \left[0.28 \right] \pi A H^4 \\
 &= 0.028 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

Para el cuarto segmento, $i=3, k=4$,

$$\begin{aligned}
 V_{4,5}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{5} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{1}{5} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{2} \left[.064 + 0.008 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{10} \left[.072 \pi A H^4 \right] \\
 &= 0.0072 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

Para el quinto segmento, $i=4, k=5$,

$$\begin{aligned}
 V_{5,5}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{5} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{0}{5} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{2} \left[.008 + 0 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\
 &= \frac{1}{10} \left[.008 \pi A H^4 \right] \\
 &= 0.0008 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

El volumen total del neiloide, con 5 segmentos, estimado con el método de Smalian es,

$$\begin{aligned}
 V_5^{S-N} &= \left(V_{1,5}^{S-N} + V_{2,5}^{S-N} + V_{3,5}^{S-N} + V_{4,5}^{S-N} + V_{5,5}^{S-N} \right) \\
 &= 0.26 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

4.4.5. Resultados para un neiloide con 5 segmentos mediante la fórmula general de Huber

La fórmula general de Huber para cada segmento, se muestra a continuación

[4.4.5].

$$V_{i+1,n}^{H-N} = \frac{\pi(n-2i-1)^3}{8n^4}$$

Para el cálculo analítico, resulta más fácil utilizar directamente la ecuación Huber para cada segmento. A continuación se muestran los resultados.

Para el primer segmento, $i=0$, $k=1$,

$$\begin{aligned} V_{1,5}^{H-S} &= \left[\left(\frac{9}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\ &= 0.729 \pi A H^3 \frac{1}{5} H \\ &= 0.1458 \pi A H^4 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1$, $k=2$,

$$\begin{aligned} V_{2,5}^{H-S} &= \left[\left(\frac{7}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\ &= 0.343 \pi A H^3 \frac{1}{5} H \\ &= 0.0686 \pi A H^4 \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2$, $k=3$,

$$\begin{aligned} V_{3,5}^{H-S} &= \left[\left(\frac{5}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\ &= 0.125 \pi A H^3 \frac{1}{5} H \\ &= 0.025 \pi A H^4 \end{aligned}$$

Para el cuarto segmento, $i=3, k=4$,

$$\begin{aligned} V_{4,5}^{H-S} &= \left[\left(\frac{3}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\ &= 0.027 \pi A H^3 \frac{1}{5} H \\ &= 0.0054 \pi A H^4 \end{aligned}$$

Para el quinto segmento, $i=4, k=5$,

$$\begin{aligned} V_{5,5}^{H-S} &= \left[\left(\frac{1}{10} \right) \pi A H^3 \right] \frac{1}{5} H \\ &= 0.001 \pi A H^3 \frac{1}{5} H \\ &= 0.0002 \pi A H^4 \end{aligned}$$

El volumen total de neiloide, con 5 segmentos, estimado con el método de Huber es,

$$\begin{aligned} V_5^{H-N} &= V_{1,5}^{H-N} + V_{2,5}^{H-N} + V_{3,5}^{H-N} + V_{4,5}^{H-N} + V_{5,5}^{H-N} \\ &= 0.245 \pi A H^4 \end{aligned}$$

4.4.6. Resultados para un neiloide con 5 segmentos mediante la fórmula general de Newton

La fórmula general de Newton para cada segmento, es la siguiente

[4.4.6].

$$V_{i+1,n}^{Nw-N} = \left(\frac{2}{3} \right) V_{i+1,n}^{H-N} + \left(\frac{1}{3} \right) V_{i+1,n}^{S-N}$$

Para el primer segmento, $i=0, k=1$,

$$\begin{aligned} V_{1,5}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.1458 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.1512 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.0972 + 0.0504 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.1476\pi AH^4 \end{aligned}$$

Para el segundo segmento, $i=1, k=2$,

$$\begin{aligned} V_{2,5}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0686 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.0728 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.045733333 + 0.024266666 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.069999999\pi AH^4 \end{aligned}$$

Para el tercer segmento, $i=2, k=3$,

$$\begin{aligned} V_{3,5}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.025 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.028 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.016666666 + 0.009333333 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.025999999\pi AH^4 \end{aligned}$$

Para el cuarto segmento, $i=3, k=4$,

$$\begin{aligned} V_{4,5}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0054 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.0072 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.0036 + 0.0024 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.006\pi AH^4 \end{aligned}$$

Para el quinto segmento, $i=4, k=5$,

$$\begin{aligned} V_{5,5}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0002 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.0008 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.000133333 + 0.000266666 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.000399999\pi AH^4 \end{aligned}$$

El volumen total de neiloide, con 5 segmentos, estimado con el método de Newton es,

$$V_5^{Nw-N} = \left(V_{1,5}^{Nw-N} + V_{2,5}^{Nw-N} + V_{3,5}^{Nw-N} + V_{4,5}^{Nw-N} + V_{5,5}^{Nw-N} \right)$$

$$= 0.249999997 \pi AH^4$$

En la tabla 4.4.4, se resumen los valores obtenidos para cada segmento y para cada método utilizado. Del mismo modo fueron realizados los cálculos para 10 segmentos; los cuales se muestran de forma completa en el apéndice D.

Tabla 4.4.4. Volumen de cada segmento y volumen total de cada método de cubicación según fórmulas generales obtenidas para un neiloide con 5 segmentos, en unidades de πAH^4 .

No. de Segmentos k	$V_{k,5}^{Ex-N}$ ($\times \pi AH^4$)	$V_{k,5}^{MCS-N}$ ($\times \pi AH^4$)	$V_{k,5}^{S-N}$ ($\times \pi AH^4$)	$V_{k,5}^{H-N}$ ($\times \pi AH^4$)	$V_{k,5}^{Nw-N}$ ($\times \pi AH^4$)
1	0.1476	0.148502783	0.1512	0.1458	0.1476
2	0.07	0.070703583	0.0728	0.0686	0.069999999
3	0.026	0.026505033	0.028	0.025	0.025999999
4	0.006	0.006308494	0.0072	0.0054	0.006
5	0.0004	0.0005333	0.0008	0.0002	0.000399999
Volumen Total	0.25	0.252553193	0.26	0.245	0.249999997

4.4.7. Estimación del volumen de un neiloide con 10 segmentos utilizando los diferentes métodos de cubicación

Como en el caso anterior, para la aplicación del modelo con 10 segmentos, se comienza por la geometría que ilustra los segmentos con los cuales se obtendrá el volumen del sólido de revolución, tal y como se observa en la figura 4.4.3.

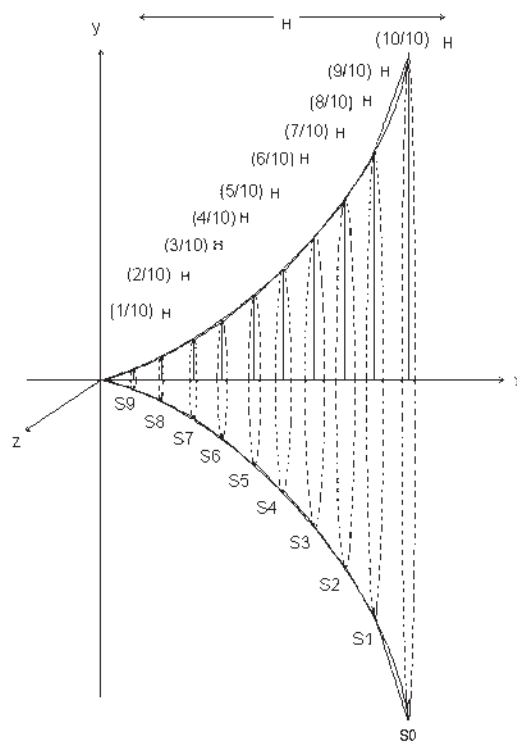


Figura 4.4.3. Aplicación del modelo cónico segmentado a un neiloide con 10 segmentos.

En la tabla 4.4.5 se resumen los resultados obtenidos para el volumen total de un neiloide mediante cada uno de los métodos de cubicación estándar, considerando que $l = 1/10$.

Tabla 4.4.5. Volumen por segmento y por método de cubicación para un neiloide con 10 segmentos.

No. de Segmentos k	$V_{k,10}^{Ex-N}$ ($\times \pi AH^4$)	$V_{k,10}^{MCS-N}$ ($\times \pi AH^4$)	$V_{k,10}^{S-N}$ ($\times \pi AH^4$)	$V_{k,10}^{H-N}$ ($\times \pi AH^4$)	$V_{k,10}^{Nw-N}$ ($\times \pi AH^4$)
1	0.085975	0.086093832	0.08645	0.0857375	0.085974999
2	0.061625	0.061731341	0.06205	0.0614125	0.061624999
3	0.042375	0.042468854	0.04275	0.0421875	0.042375
4	0.027625	0.02770637	0.02795	0.0274625	0.027624999
5	0.016775	0.016843892	0.01705	0.0166375	0.016774999
6	0.009225	0.00928142397	0.00945	0.0091125	0.009225
7	0.004375	0.004418973967	0.00455	0.0042875	0.004375
8	0.001625	0.001656564615	0.00175	0.0015625	0.001625
9	0.000375	0.0003942809042	0.00045	0.0003375	0.000375
10	0.000025	0.00003333	0.00005	0.0000125	0.000099996
Volumen Total	0.25	0.250628862	0.2525	0.2487495	0.250074992

4.4.8. Resultados de los cálculos obtenidos mediante la aplicación del MCS a un neiloide con 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos respectivamente por medio de Excel

Con las fórmulas mostradas en la tabla 4.4.2, las cuales fueron introducidas en Excel, se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 4.4.6.

Tabla 4.4.6. Volúmenes totales obtenidos en Excel para cualquier n a partir de las fórmulas generales.

Número de Segmentos n	V_n^{Ex-N} ($\times \pi AH^4$)	V_n^{MCS-N} ($\times \pi AH^4$)	V_n^{S-N} ($\times \pi AH^4$)	V_n^{H-N} ($\times \pi AH^4$)	V_n^{Nw-N} ($\times \pi AH^4$)
5	0.25	0.252553229	0.26	0.245	0.25
10	0.25	0.25062887	0.2525	0.24875	0.25
20	0.25	0.25015653	0.250625	0.2496875	0.25
100	0.25	0.25000625	0.250025	0.2499875	0.25
500	0.25	0.25000025	0.250001	0.2499995	0.25

4.4.9. Cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$

Finalmente habiendo obtenido los resultados calculados para cualquier n a partir de las fórmulas generales en Excel, se procedió a la realización del cálculo analítico del límite cuando $n \rightarrow \infty$ para el volumen total de un neiloide. Dichos cálculos se muestran a continuación:

La fórmula general para el volumen de segmento, como función del número n de segmentos, estimado mediante el MCS, esta dada por la siguiente ecuación

[4.4.7]

$$V_{i+1,n}^{MCS-N} = \frac{1}{3n^4} \left\{ (i+1)^3 + (n-i)^3 + \sqrt{(i+1)^3 + (n-i)^3} \right\} \pi A H^4$$

El volumen total esta dado por

$$V_n^{MCS-N} = \sum_{i=0}^{n-1} V_{i+1,n}^{MCS-N}$$

Si se sustituye la ecuación [4.4.7] en [4.4.8], el volumen total queda expresado como

[4.4.8]

$$V_n^{MCS-N} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3n^4} \left\{ (i+1)^3 + (n-i)^3 + \sqrt{(i+1)^3 + (n-i)^3} \right\} \pi A H^4.$$

En la aproximación de números grandes, $n \gg 1$, se tiene que

[4.4.9]

$$\begin{aligned} V_{i+1,n}^{MCS-N} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3n^4} \left\{ (n-i)^3 \right\} \pi A H^4 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^4} (n-i)^3 \pi A H^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^4} (n^3 - 3n^2i + 3ni^2 + i^3) \pi A H^4 \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 - \frac{3}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \right) \pi A H^4
\end{aligned}$$

El término, $\sum_{i=1}^n i^3$, dado por (Stewart, 2002) como

[4.4.10]

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Sustituyendo [4.1.19], [4.2.14] y [4.4.10], en [4.4.9] y realizando el algebra correspondiente, se obtiene la expresión

[4.4.11]

$$V_{i+1, n \gg 1}^{MCS-N} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \pi A H^4$$

Finalmente, aplicando el límite matemático cuando n tiende a infinito en la expresión [4.4.11], se encuentra que,

[4.4.12]

$$\boxed{V_{n \rightarrow \infty}^{MCS-N} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_{i+1, n \gg 1}^{MCS-N} = \frac{\pi A H^4}{4}}$$

que no es otra cosa que el volumen exacto de un neiloide. De esta manera, queda probado que la aproximación mediante el MCS para un neiloide reproduce el volumen exacto en el límite cuando el número de segmentos tiende a infinito, como lo requieren los principios del cálculo.

4.4.10. Resumen de fórmulas generales para un neiloide

En la tabla 4.4.7, se muestran las fórmulas generales para estimar el volumen de segmento en función de las variables i y n para un neiloide.

Tabla 4.4.7. Fórmulas generales obtenidas para cada método de cubicación aplicado a un neiloide.

Método	Fórmula (unidades πAH^4)
Exacto	$V_{i+1,n}^{E-N} = \frac{1}{4n^4} \left[(i+1)^4 - i^4 \right]$
MCS	$V_{i+1,n}^{MCS-N} = \frac{1}{3n^4} \left[(i+1)^3 + i^3 + \sqrt{(i+1)^3 i^3} \right]$
Smalian	$V_{i+1,n}^{S-N} = \frac{1}{2n^4} \left[(i+1)^3 + i^3 \right]$
Huber	$V_{i+1,n}^{H-N} = \frac{(n-2i-1)^3}{8n^4}$
Newton	$V_{i+1,n}^{Nw-N} = \left(\frac{2}{3} \right) V_{i+1,n}^{H-N} + \left(\frac{1}{3} \right) V_{i+1,n}^{S-N}$

5. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Se ha llevado a cabo exitosamente la primera aplicación formal del MCS a un sólido de revolución específico como función del número de segmentos. La geometría elegida como prueba fue una esfera de radio unitario. Los resultados correspondientes, que se presentan en el capítulo 4.1, demuestran que el MCS cumple con los requisitos que exige el cálculo a los métodos de aproximación de volúmenes. Se realizaron cálculos analíticos para 6 y 10 segmentos. Analizando el problema de manera general, se logró determinar la fórmula para estimar el volumen de cualquier segmento como función del número de segmentos. Utilizando dicha fórmula, mediante Excel, se estimaron los volúmenes correspondientes a 6, 10, 12, 20, 100 y 500 segmentos. En los casos de 6 y 10 segmentos se reprodujeron exactamente los mismos resultados que se habían obtenido previamente mediante cálculos analíticos, lo que sirvió como referencia para verificar la escritura correcta de la fórmula general en Excel. Se observa claramente que conforme aumenta el número de segmentos, el resultado estimado se aproxima mejor al valor exacto del volumen. La fuente de error más notoria del método se origina porque en los segmentos extremos de la esfera el volumen se aproxima mediante conos. Finalmente, a partir de la fórmula general para el volumen total como función del número de segmentos, se realizó analíticamente el cálculo del volumen cuando dicho número tiende a infinito, recuperándose el volumen exacto de la esfera de radio unitario, como lo exige el cálculo para cualquier método de aproximación. Se añadió un ingrediente importante al estudio anterior. Observando que los métodos estándar de cubicación, Smalian, Huber y Newton, no son otra cosa que métodos particulares de aproximación del cálculo, como se verificó en Alfaro-Trujillo (2008), también se aplicaron dichos métodos al caso de la esfera de radio unitario como función del número de segmentos. Hasta donde se tiene conocimiento, esta es la primera ocasión en que se considera tal aplicación fuera del campo de las mediciones forestales. Los resultados muestran que para esta geometría, el método de Newton proporciona los valores exactos del volumen para cualquier número de segmentos. El método de Smalian sub-estima el volumen mientras que el método de Huber lo sobre-estima. El MCS sub-estima el volumen un poco más que Smalian, hasta 20 segmentos. Considerando un redondeo hasta la

segunda cifra decimal, de 100 segmentos en adelante, las diferencias entre métodos ya no son apreciables.

El ejercicio de la esfera indica claramente la factibilidad de aplicación del MCS a cualquier sólido de revolución y muestra con detalle el método para llevarlo a cabo. De esta forma, se estuvo ya en condiciones de realizar la primera aplicación al campo de las mediciones forestales. Se decidió por abordar una fase teórica inicial, eligiendo como sólidos de revolución a los tipos dendrométricos clásicos, cilindro, paraboloides, cono y neiloide. De igual forma al caso de la esfera, la aplicación formal del MCS al caso de los tipos dendrométricos clásicos como función del número de segmentos fue llevada a cabo con éxito. Se obtuvieron resultados analíticos para 5 y 10 segmentos. Se derivaron fórmulas generales para el volumen de segmento como función del número de segmentos y mediante Excel se realizaron los cálculos para 5, 10, 20, 100 y 500 segmentos. Se calculó analíticamente el límite cuando el número de segmentos tiende a infinito para cada geometría y se comprobó en cada caso que el MCS reproduce el volumen total exacto. También se realizaron los estudios correspondientes aplicando los métodos de cubicación estándar a los tipos dendrométricos clásicos como función del número de segmentos. Nuevamente, cabe señalar aquí que no se tiene conocimiento de que este tipo de estudios formales haya sido realizado previamente.

En la tabla 4.2.1, se resumen las fórmulas generales obtenidas para el volumen de segmento como función del número de segmento y del número total de segmentos, para los tipos dendrométricos clásicos y para los métodos de cubicación del MCS, Smalian, Huber y Newton. Dichas fórmulas constituyen la base fundamental del cálculo para llevar a cabo la tarea que se propuso en el presente trabajo.

5.1 Resumen de fórmulas generales para el volumen de segmento como función del número de segmento y del número total de segmentos, para los métodos MCS, Smalian, Huber y Newton.

$V_{i+1,n}^{Met-Geo}$	Paraboloide (unidades πAH^2) $V_{i+1,n}^{Met-P}$	Cono (unidades πAH^3) $V_{i+1,n}^{Met-C}$	Neiloide (unidades πAH^4) $V_{i+1,n}^{Met-N}$
$V_{i+1,n}^{Ex-Geo}$	$V_{i+1,n}^{Ex-P} = \frac{2(i-1)}{2n^2}$	$V_{i+1,n}^{Ex-C} = \frac{1}{3n^3} (i+1)^2 + (i+1)i + i^2$	$V_{i+1,n}^{Ex-N} = \frac{1}{4n^4} (i+1-i)^3 - (i-i)^3$
$V_{i+1,n}^{MCS-Geo}$	$V_{i+1,n}^{MCS-P} = \frac{2(i-1) + \sqrt{(i-1)^2 - (i-1)}}{3n^2}$		$V_{i+1,n}^{MCS-N} = \frac{1}{3n^4} (i+1-i)^3 + (i-i)^3 + \sqrt{(i+1-i)^3 - (i-i)^3}$
$V_{i+1,n}^{S-Geo}$		$V_{i+1,n}^{S-C} = \frac{1}{2n^3} (i+1)^2 + i^2$	$V_{i+1,n}^{S-N} = \frac{1}{2n^4} (i-i)^3 + (i-1)^3$
$V_{i+1,n}^{H-Geo}$	$= V_{i+1,n}^{Ex-P}$	$V_{i+1,n}^{H-C} = \frac{1}{4n^3} (i+1)^2$	$V_{i+1,n}^{H-N} = \frac{(n-2i-1)^3}{8n^4}$
$V_{i+1,n}^{Nw-Geo}$		$= V_{i+1,n}^{Ex-C} = V_{i+1,n}^{MCS-C}$	$= V_{i+1,n}^{Ex-N}$

Llevaría demasiado espacio analizar y discutir con detalle todos los resultados obtenidos para los tipos dendrométricos clásicos. A continuación, se hace un breve análisis general que intenta rescatar las características más sobresalientes que se observan en tales resultados.

Para el cilindro, todos los métodos, Smalian, Huber, Newton y MCS, proporcionan el volumen exacto, de manera que los casos de mayor interés son paraboloides, cono y neiloide. Los resultados para estas geometrías se presentan en las secciones 4.2, 4.3 y 4.4, respectivamente.

En el paraboloides, los métodos de Smalian, Huber y Newton son exactos, mientras que el MCS sub-estima el volumen, pero es próximo al valor exacto incluso para un número pequeño, 5 y 10, de segmentos. Si al igual que en la esfera, se considera un redondeo en donde se mantenga hasta la segunda cifra decimal, de 10 segmentos en adelante la diferencia entre el volumen total estimado por el MCS y el valor exacto no es considerable.

Para el cono, el método de Newton y MCS, proporcionan el volumen total exacto, mientras que el de Smalian lo sobre-estima y el de Huber lo sub-estima. De igual forma, hasta la segunda cifra decimal, la diferencia entre ambos métodos, y con respecto al valor exacto, no es considerable de 10 segmentos en adelante.

En el neiloide, el método de Newton proporciona el volumen exacto, el de Smalian sobre-estima y el de Huber sub-estima el volumen, mientras que el MCS sobre-estima el volumen, pero proporciona un valor intermedio muy próximo al valor exacto. A partir de 5 segmentos en adelante el MCS coincide con el valor exacto al redondear hasta la segunda cifra decimal. De 10 segmentos en adelante, hasta la misma cifra decimal, ya no hay diferencias apreciables entre los valores de volumen proporcionados por los distintos métodos.

Si suponemos que las diferentes regiones de un tronco de árbol pueden modelarse aproximadamente mediante los tipos dendrométricos clásicos como muestran las figuras 2.5 y 2.6, entonces, la mejor aproximación al volumen real se obtendrá con el método de Newton para todas las geometrías involucradas y el problema estaría satisfactoriamente resuelto.

Sin embargo, aún cuando el método de Newton proporcionaría las mejores estimaciones, en la práctica, no se utiliza porque los estudios de campo e inventarios involucran un gran número de mediciones. Requiere de un trabajo considerablemente mayor que los métodos de Smalian y Huber. Se requiere medir los diámetros en los extremos y en el centro, de cada segmento o troza. De acuerdo con la ecuación [2.9], el método de Newton equivale al uso simultáneo de los métodos de Smalian y Huber.

Los métodos utilizados en la práctica son Smalian y Huber. Una vez descartado el método de Newton, la solución inmediata sería elegir para cada región, de acuerdo a su geometría, el mejor método. Sin embargo esta solución tampoco es práctica y se utiliza uno solo de ellos para estimar el volumen total de un tronco por secciones. En general, se conoce que si uno sobre-estima, el otro sub-estima el volumen. Lo anterior se puede determinar cuantitativamente con detalle a partir de los resultados de este trabajo, al aplicar los métodos de Smalian y Huber a los tipos dendrométricos clásicos como función del número de segmentos.

En la literatura tradicional se menciona que al aumentar el número de secciones o segmentos mejora la aproximación al estimar un volumen, mediante cualquier método estándar de cubicación, pero no se realizan estudios para cuantificar dicha mejora ni se proponen criterios para el seccionamiento. El presente trabajo resuelve con detalle este problema para el caso de los tipos dendrométricos clásicos, como ejemplo, hasta 500 segmentos, pero se puede llevar a cabo para cualquier número de ellos. Sin embargo, un número grande de seccionamientos esta fuera de la realidad en el sector forestal, carece de interés práctico y solo tiene un valor académico.

Bajo la suposición de que las diferentes regiones de un tronco de árbol pueden modelarse aproximadamente mediante los tipos dendrométricos clásicos, el análisis de resultados en los párrafos previos sugiere un primer criterio de seccionamiento. Considerando una división para cada región en 10 segmentos de igual longitud, se garantiza una precisión hasta la segunda cifra decimal, con respecto al valor exacto, cualquiera que sea el método utilizado. Sin embargo, ello requiere todavía de un considerable número de seccionamientos.

El interés real de cubicación radica en el seccionamiento de un tronco en un número pequeño de segmentos. Se requiere entonces, de una solución simple, de un único método que se desempeñe bien para todas las geometrías y es aquí donde adquiere sentido la propuesta de MCS.

Los resultados de este trabajo indican que el MCS podría representar un método alternativo intermedio. *En la única geometría que el MCS presenta desventaja con respecto a Smalian y Huber es en el paraboloides y no es tan apreciable aún para un número pequeño de segmentos.* Lo anterior es congruente con la referencia (Bruce, 1982) en donde se menciona que, en una región de USA, oficialmente se cubica mediante la ecuación de cono truncado para compensar el error, ya que cualquiera de los otros métodos sobre-estima en unas zonas del tronco y sub-estima en otras. Cabe mencionar que la referencia anterior se encontró en la fase final de este trabajo de manera que no influyó el desarrollo del mismo y solo confirmó sus resultados.

En forma similar al caso de la semiesfera, el mayor error del MCS puede ocurrir en la estimación del volumen en la punta de un tronco debido a su aproximación mediante un cono. De acuerdo con las figuras 2.5-2.7, la punta de un tronco puede ser aproximadamente cónica o paraboloides. En general el error al utilizar el MCS sería pequeño. Por otro lado, aún cuando la punta del tronco tuviera cualquier otra geometría, regularmente se trata de una zona del tronco sin interés comercial.

Por lo tanto, el MCS apunta como un método conveniente de cubicación para estimar el volumen comercial de cualquier tronco de árbol, segmento o troza, en aplicaciones reales. Al igual que el método de Smalian, solo involucra la medición de los diámetros en los extremos del segmento o troza de interés. El problema sobre si el MCS podría o no representar un método general aceptable en mediciones forestales reales, se recomienda para futuras investigaciones. El desempeño del MCS se podría comparar tanto con el de los métodos de cubicación estándar como con los de otros métodos más sofisticados, como son los que se basan en ecuaciones de volumen, funciones de perfil y el de referencia, xylometría.

En la referencia Cruz de León y Cruz de León (2006) se conjetura que MCS es aplicable a cualquier tronco de árbol cuya geometría esté dada por un sólido de revolución. En este trabajo, se ha probado formalmente dicha conjetura para el caso concreto de los tipos dendrométricos clásicos.

La consideración de los diámetros dendrométricos definidos en las secciones 2.9 y 2.10, para secciones transversales asimétricas y zonas irregulares a la altura del pecho, juega un papel muy relevante. Si se toma en cuenta la definición dichos diámetros medios para el caso en que un tronco tiene una zona muy irregular exactamente a la altura del pecho, como se indica en la sección 2.10, y se extiende esa misma definición para cualquier troza o segmento de tronco, la aplicación del MCS puede también extenderse a cualquier tronco de árbol, aún con geometrías irregulares.

Tal generalización en la definición de los diámetros dendrométricos permite una interpretación de la ecuación de volumen de un cono truncado que no se había identificado con anterioridad y que se presenta aquí por vez primera. En la ecuación de volumen de cono truncado, [2.8], que queda en términos de las áreas de las secciones transversales S y S' , correspondientes a los diámetros extremos d y d' , interviene también el término $\sqrt{SS'}$. Este término, no es otra cosa que el área de la sección transversal correspondiente al diámetro medio geométrico $\sqrt{dd'}$. La ecuación de cono truncado, queda entonces expresada como la suma de las áreas de las secciones transversales de los extremos y el área media geométrica, dividida entre tres y multiplicada por la longitud del cono truncado. La suma de esas tres áreas dividida entre tres, representa el promedio aritmético de las áreas de las secciones transversales extremas y el área media geométrica. Con esto, el MCS cumple con la afirmación de la referencia Avery y Burkhart (2002), de que cualquier método de cubicación por secciones o segmentos puede expresarse como el producto del área de una sección transversal promedio y la longitud del segmento o sección.

La observación del importante papel que desempeñan los diámetros dendrométricos generalizados para el MCS en el transcurso de este trabajo, fue una de las causas principales que motivaron y dieron lugar a un trabajo independiente de unificación entre los métodos de

aproximación del cálculo y los métodos de cubicación forestal (Alfaro-Trujillo, 2008), en donde se extendió y se entendió su importancia para otros métodos. La referencia anterior, a su vez, retroalimentó a este trabajo.

Apéndice A. Cálculos de volumen en esfera, $n \geq 10$

A.1. Resultados de la aplicación analítica del MCS a una esfera de radio unitario con 10 segmentos

Utilizando la misma secuencia matemática con la que se obtuvo el volumen total para una esfera de radio unitario con 6 segmentos, aplicando el MCS, se calculó el volumen de la esfera para 10 segmentos. En la figura A.1 se ilustra la manera en la que la esfera es seccionada en 10 partes.

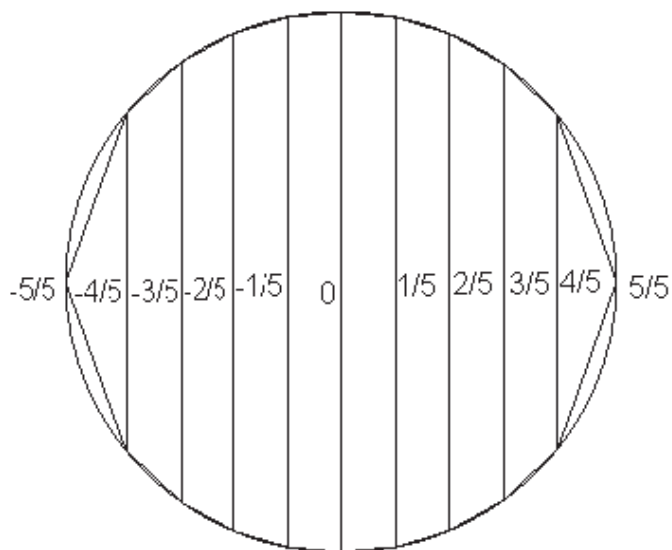


Figura A.1. Corte transversal que muestra la aproximación al volumen de una esfera de radio unitario con 10 segmentos mediante la aplicación de MCS.

La fórmula general del MCS para cada segmento, en la semi-esfera con 5 segmentos, está dada por la ecuación [4.1.7] con la cual, se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
V_{1,5}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{15} [1 + 0.96 + 0.979795897] \\
&= \frac{\pi}{15} [2.939795897] \\
&= \frac{\pi}{15} [0.939795897] \\
&= 0.615709412
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,5}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{15} [0.96 + 0.84 + 0.979795897 + 0.916515139] \\
&= \frac{\pi}{15} [3.696307033] \\
&= \frac{\pi}{15} [0.697997773] \\
&= 0.565067332
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,5}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{15} [0.84 + 0.64 + 0.916515139 + 0.8] \\
&= \frac{\pi}{15} [3.196515139] \\
&= \frac{\pi}{15} [0.213212111] \\
&= 0.46353406
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,5}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{15} [0.64 + 0.36 + 0.8 + 0.6] \\
&= \frac{\pi}{15} [2.4] \\
&= \frac{\pi}{15} [0.48] \\
&= 0.309970475
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,5}^{MCS-SE} &= \frac{\pi}{15} [0.36 + 0.6] \\
&= \frac{\pi}{15} [0.36] \\
&= 0.075398223
\end{aligned}$$

Se suman los resultados del volumen de cada uno de los segmentos, posteriormente se multiplica por 2, y se obtiene el volumen total estimado con el MCS para la esfera con 10 segmentos, el cual es:

$$\begin{aligned}
V_{10}^{MCS-E} &= (V_{1,5}^{MCS-SE} + V_{2,5}^{MCS-SE} + V_{3,5}^{MCS-SE} + V_{4,5}^{MCS-SE} + V_{5,5}^{MCS-SE}) \times 2 \\
&= [0.075398223] \times 2 = (2.029679503) \times 2 \\
&= 4.059359005
\end{aligned}$$

A.2. Resultados para una esfera de radio unitario con 10 segmentos mediante el método exacto

La fórmula general del volumen exacto para 10 segmentos de semi-esfera, está dada por la ecuación [4.1.11], con la que se obtienen los siguientes resultados.

$$\begin{aligned}
V_{1,5}^{Ex-SE} &= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{0+1}{5} \right)^3 - \left(\frac{0}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 \right] \\
&= 0.61994095
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,5}^{Ex-SE} &= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1+1}{5} \right)^3 - \left(\frac{1}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{5} \right)^3 - \left(\frac{1}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \bullet 0.056 \right] \\
&= 0.569675467
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,5}^{Ex-SE} &= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2+1}{5} \right)^3 - \left(\frac{2}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3}{5} \right)^3 - \left(\frac{2}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \bullet 0.152 \right] \\
&= 0.469144502
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,5}^{Ex-SE} &= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3+1}{5} \right)^3 - \left(\frac{3}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4}{5} \right)^3 - \left(\frac{3}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \bullet 0.296 \right] \\
&= 0.318348055
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,5}^{Ex-SE} &= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4+1}{5} \right)^3 - \left(\frac{4}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{5}{5} \right)^3 - \left(\frac{4}{5} \right)^3 \right] \right\} \\
&= \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot 0.488 \right] \\
&= 0.117286125
\end{aligned}$$

El volumen total exacto para la esfera es entonces,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{Ex-E} &= (V_{1,5}^{Ex-SE} + V_{2,5}^{Ex-SE} + V_{3,5}^{Ex-SE} + V_{4,5}^{Ex-SE} + V_{5,5}^{Ex-SE}) \times 2 \\
&= (2.094395099) \times 2 \\
&= 4.188790198
\end{aligned}$$

A.3. Resultados para una esfera de radio unitario con 10 segmentos mediante el método de Smalian

Para una esfera de radio unitario, con 10 segmentos, la fórmula para el volumen de segmento como función del número de segmentos, para el método de Smalian, está dada por la ecuación [4.1.24]. Los volúmenes de segmento son los siguientes:

$$\begin{aligned}
V_{1,5}^{S-SE} &= \frac{\pi}{2(5)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{0}{5} \right)^2 \right] + \left[1 - \left| \frac{0+1}{5} \right|^2 \right] \right\} \\
&= \frac{\pi}{10} \left[1 + 0.96 \right] \\
&= \frac{\pi}{10} \cdot 1.96 \\
&= 0.61575216
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,5}^{S-SE} &= \frac{\pi}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{1+1}{5} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{\pi}{10} [0.96 + 0.84] \\
&= \frac{\pi}{10} [1.8] \\
&= 0.565486677
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,5}^{S-SE} &= \frac{\pi}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{2+1}{5} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{\pi}{10} [0.84 + 0.64] \\
&= \frac{\pi}{10} [1.48] \\
&= 0.464955712
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,5}^{S-SE} &= \frac{\pi}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{3+1}{5} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{\pi}{10} [0.64 + 0.36] \\
&= \frac{\pi}{10} [1] \\
&= 0.314159265
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,5}^{S-SE} &= \frac{\pi}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{4+1}{5} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{\pi}{10} [0.36 + 0] \\
&= \frac{\pi}{10} [0.36] \\
&= 0.113097335
\end{aligned}$$

El volumen total mediante el método de Smalian para la esfera con 10 segmentos, es

$$\begin{aligned}
V_{10}^{S-E} &= (V_{1,5}^{S-SE} + V_{2,5}^{S-SE} + V_{3,5}^{S-SE} + V_{4,5}^{S-SE} + V_{5,5}^{S-SE}) \times 2 \\
&= (2.073451149) \times 2 \\
&= 4.146902298
\end{aligned}$$

A.4. Resultados para una esfera de radio unitario con 10 segmentos mediante el método de Huber

Para la obtención de resultados para una esfera de radio unitario con 10 segmentos, mediante el método de Huber, se utilizó la fórmula [4.1.27]. Dichos resultados se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}
V_{1,5}^{H-SE} &= \pi \left(\frac{1}{5} \right) \left[1 - \left(\frac{2 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 1} \right)^2 \right] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [1 - 0.01] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [0.99] \\
&= 0.622035345
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,5}^{H-SE} &= \pi \left(\frac{1}{5} \right) \left[1 - \left(\frac{2 \cdot 0.09 + 1}{2 \cdot 0.09} \right)^2 \right] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [1 - 0.09] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [0.91] \\
&= 0.571769863
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,5}^{H-SE} &= \pi \left(\frac{1}{5} \right) \left[1 - \left(\frac{2 \cdot 0.25 + 1}{2 \cdot 0.25} \right)^2 \right] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [1 - 0.25] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [0.75] \\
&= 0.471238898
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,5}^{H-SE} &= \pi \left(\frac{1}{5} \right) \left[1 - \left(\frac{2 \cdot 0.49 + 1}{2 \cdot 0.49} \right)^2 \right] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [1 - 0.49] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [0.51] \\
&= 0.32044245
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,5}^{H-SE} &= \pi \left(\frac{1}{5} \right) \left[1 - \left(\frac{2 \cdot 4 + 1}{2 \cdot 5} \right)^2 \right] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) [1 - 0.81] \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} \right) 0.19 \\
&= 0.11938052
\end{aligned}$$

El volumen total mediante el método de Huber para la esfera con 10 segmentos, es

$$\begin{aligned}
V_{10}^{H-E} &= (V_{1,5}^{H-SE} + V_{2,5}^{H-SE} + V_{3,5}^{H-SE} + V_{4,5}^{H-SE} + V_{5,5}^{H-SE}) \times 2 \\
&= (2.104867077) \times 2 \\
&= 4.209734154
\end{aligned}$$

A.5. Resultados para una esfera de radio unitario con 10 segmentos mediante el método de Newton

Para la obtención de resultados para una esfera de radio unitario con 10 segmentos, mediante el método de Newton, se utilizó la fórmula [4.1.28]. Dichos resultados se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}
V_{1,5}^{Nw-SE} &= \left(\frac{2}{3} \right) 0.622035345 + \left(\frac{1}{3} \right) 0.61575216 \\
&= 0.41469023 + 0.20525072 \\
&= 0.61994095
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,5}^{Nw-SE} &= \left(\frac{2}{3} \right) 0.571769863 + \left(\frac{1}{3} \right) 0.565486677 \\
&= 0.381179908 + 0.188495559 \\
&= 0.569675467
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,5}^{Nw-SE} &= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot 0.471238898 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 0.464955712 \\
&= 0.314159265 + 0.154985237 \\
&= 0.469144502
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,5}^{Nw-SE} &= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot 0.32044245 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 0.314159265 \\
&= 0.2136283 + 0.104719755 \\
&= 0.318348055
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,5}^{Nw-SE} &= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot 0.11938052 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 0.113097335 \\
&= 0.079587013 + 0.03769911 \\
&= 0.117286124
\end{aligned}$$

El volumen total mediante el método de Newton para la esfera con 10 segmentos, es

$$\begin{aligned}
V_{10}^{Nw-E} &= (V_{1,5}^{Nw-SE} + V_{2,5}^{Nw-SE} + V_{3,5}^{Nw-SE} + V_{4,5}^{Nw-SE} + V_{5,5}^{Nw-SE}) \times 2 \\
&= (2.094395098) \times 2 \\
&= 4.188790196.
\end{aligned}$$

En la tabla 4.1.6 se resumen los resultados para la esfera con 10 segmentos con todos los métodos utilizados.

En la imagen de pantalla que se muestra en la figura A.2, se ilustra la forma en que se trabajó mediante Excel. La columna A corresponde al número de segmento. El número total de segmentos se determinó manualmente. Y las columnas sucesivas corresponden a las fórmulas generales obtenidas en la sección 4.1. En la columna B, se tiene la fórmula general del volumen exacto (E. Exacto); en C, la del MCS (E. Conos); en D se incluye la razón entre las dos anteriores; en E la de Smalian (VS), en F la de Huber (VH), y en G la de Newton (VN).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		E. Exacto	E. Conos	EC/EE	VS	VH	VN				
2	0	0.06282348	0.06281929	0.99993332	0.06281929	0.06282557	0.06282348				
3	1	0.06277321	0.06276902	0.99993321	0.06276902	0.0627753	0.06277321				
4	2	0.06267268	0.06266848	0.999933	0.06266848	0.06267477	0.06267268				
5	3	0.06252188	0.06251767	0.99993267	0.06251769	0.06252398	0.06252188				
6	4	0.06232082	0.0623166	0.99993224	0.06231663	0.06232292	0.06232082				
7	5	0.06206949	0.06206525	0.99993169	0.0620653	0.06207159	0.06206949				
8	6	0.0617679	0.06176364	0.99993102	0.06176371	0.06176999	0.0617679				
9	7	0.06141604	0.06141176	0.99993023	0.06141185	0.06141814	0.06141604				
10	8	0.06101392	0.0610096	0.9999293	0.06100973	0.06101601	0.06101392				
11	9	0.06056153	0.06055718	0.99992824	0.06055734	0.06056362	0.06056153				
12	10	0.06005887	0.06005449	0.99992704	0.06005469	0.06006097	0.06005887				
13	11	0.05950595	0.05950153	0.99992568	0.05950176	0.05950805	0.05950595				
14	12	0.05890277	0.0588983	0.99992414	0.05889858	0.05890486	0.05890277				
15	13	0.05824932	0.0582448	0.99992243	0.05824513	0.05825141	0.05824932				
16	14	0.05754566	0.05754103	0.99992052	0.05754141	0.05754769	0.05754566				
17	15	0.05679162	0.05678698	0.9999184	0.05678743	0.05679371	0.05679162				
18	16	0.05598737	0.05598267	0.99991604	0.05598318	0.05598946	0.05598737				
19	17	0.05513286	0.05512808	0.99991342	0.05512867	0.05513495	0.05513286				
20	18	0.05422808	0.05422322	0.9999105	0.05422389	0.05423017	0.05422808				
21	19	0.05327303	0.05326809	0.99990726	0.05326885	0.05327513	0.05327303				
22	20	0.05226772	0.05226269	0.99990366	0.05226354	0.05226982	0.05226772				
23	21	0.05121215	0.05120701	0.99989965	0.05120796	0.05121424	0.05121215				
24	22	0.05010631	0.05010106	0.99989517	0.05010212	0.0501084	0.05010631				
25	23	0.0489502	0.04894483	0.99989016	0.04894601	0.0489523	0.0489502				
26	24	0.04774383	0.04773832	0.99988454	0.04773964	0.04774593	0.04774383				
27	25	0.04648719	0.04648153	0.99987821	0.046483	0.04648929	0.04648719				
28	26	0.04518029	0.04517447	0.99987106	0.0451761	0.04518239	0.04518029				
29	27	0.04382312	0.04381712	0.99986295	0.04381893	0.04382522	0.04382312				
30	28	0.04241569	0.04240948	0.99985371	0.0424115	0.04241778	0.04241569				
31	29	0.04095799	0.04095156	0.99984311	0.0409538	0.04096009	0.04095799				
32	30	0.03945003	0.03944335	0.99983088	0.03944584	0.03945212	0.03945003				
33	31	0.0378918	0.03788485	0.99981668	0.03788761	0.03789389	0.0378918				
34	32	0.0362833	0.03627605	0.99980007	0.03627911	0.0362854	0.0362833				
35	33	0.03462454	0.03461694	0.99978045	0.03462035	0.03462663	0.03462454				
36	34	0.03291551	0.03290752	0.99975705	0.03291132	0.03291761	0.03291551				
37	35	0.03114777	0.03113977	0.99973282	0.03114503	0.03115132	0.03114777				

Fig. A.2. Imagen de pantalla de la hoja de cálculo de Excel, para una esfera de radio unitario con 100 segmentos.

En la tablas A.1, A.2 y A.3, se muestran cálculos realizados mediante Excel para una semiesfera con 6, 10 y 50 segmentos, o bien, para una esfera con 12, 20 y 100 segmentos, respectivamente. Por motivos de espacio, no se presentan en este trabajo los resultados por segmento para el caso de 500 segmentos para ninguna de las geometrías en estudio. Por uniformidad, se mantiene la notación simple de la hoja de Excel mostrada en la figura A.2, excepto que se cambia E. Conos por MCS y E. Exacto simplemente por Exacto.

Tabla A.1. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para una semi-esfera con 6 segmentos, o bien, una esfera con 12 segmentos.

Segmento	Exacto	MCS	MCS/Exacto	VS	VH	VN
0	0.51875064		0.9953271	0.51632657	0.51996267	0.51875064
1	0.48966182	0.48707486	0.99471684	0.48723775	0.49087385	0.48966182
2	0.43148418	0.42854561	0.99318963	0.42906011	0.43269621	0.43148418
3	0.34421771	0.34052295	0.9892662	0.34179365	0.34542975	0.34421771
4	0.22786243	0.22220173	0.97515738	0.22543836	0.22907446	0.22786243
5	0.08241833	0.0533295	0.64705882	0.07999426	0.08363036	0.08241833
Sumatoria	2.0943951	1.53167465		2.07985069	2.10166731	2.0943951
Sumatoria X2	4.1887902	3.0633493		4.15970138	4.20333462	4.1887902

Tabla A.2. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para una semi-esfera con 10 segmentos, o bien, una esfera con 20 segmentos.

Segmento	Exacto	MCS	MCS/Exacto	VS	VH	VN
0	0.313112068	0.312587153	0.99832356	0.31258847	0.31337387	0.31311207
1	0.306828883	0.3062932	0.99825413	0.30630528	0.30709068	0.30682888
2	0.294262512	0.293703907	0.99810168	0.29373891	0.29452431	0.29426251
3	0.275412956	0.274816024	0.99783259	0.27488936	0.27567476	0.27541296
4	0.250280215	0.249623139	0.99737464	0.24975662	0.25054201	0.25028021
5	0.218864288	0.218112434	0.99656475	0.21834069	0.21912609	0.21886429
6	0.181165176	0.180255609	0.99497935	0.18064158	0.18142698	0.18116518
7	0.137182879	0.135977105	0.99121046	0.13665928	0.13744468	0.13718288
8	0.086917397	0.084983635	0.97775173	0.0863938	0.0871792	0.0869174
9	0.030368729	0.019896753	0.65517241	0.02984513	0.03063053	0.03036873
Sumatoria	2.094395102	2.076248961		2.08915911	2.0970131	2.0943951
Sumatoria x2	4.188790205	4.152497922		4.17831823	4.19402619	4.1887902

Tabla A.3. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para una semi-esfera con 50 segmentos, o bien, una esfera con 100 segmentos.

Segmento	Exacto	MCS	MCS/Exacto	Smalian	Huber	Newton
0	0.06282348	0.06281929	0.99993332	0.06281929	0.06282557	0.06282348
1	0.06277321	0.06276902	0.99993321	0.06276902	0.0627753	0.06277321
2	0.06267268	0.06266848	0.999933	0.06266849	0.06267477	0.06267268
3	0.06252188	0.06251767	0.99993267	0.06251769	0.06252398	0.06252188
4	0.06232082	0.0623166	0.99993224	0.06231663	0.06232292	0.06232082
5	0.06206949	0.06206525	0.99993169	0.0620653	0.06207159	0.06206949
6	0.0617679	0.06176364	0.99993102	0.06176371	0.06176999	0.0617679
7	0.06141604	0.06141176	0.99993023	0.06141185	0.06141814	0.06141604
8	0.06101392	0.0610096	0.9999293	0.06100973	0.06101601	0.06101392
9	0.06056153	0.06055718	0.99992824	0.06055734	0.06056362	0.06056153
10	0.06005887	0.06005449	0.99992704	0.06005469	0.06006097	0.06005887
11	0.05950595	0.05950153	0.99992568	0.05950176	0.05950805	0.05950595
12	0.05890277	0.0588983	0.99992414	0.05889858	0.05890486	0.05890277
13	0.05824932	0.0582448	0.99992243	0.05824513	0.05825141	0.05824932
14	0.0575456	0.05754103	0.99992052	0.05754141	0.05754769	0.0575456
15	0.05679162	0.05678698	0.9999184	0.05678743	0.05679371	0.05679162
16	0.05598737	0.05598267	0.99991604	0.05598318	0.05598946	0.05598737
17	0.05513286	0.05512808	0.99991342	0.05512867	0.05513495	0.05513286
18	0.05422808	0.05422322	0.9999105	0.05422389	0.05423017	0.05422808
19	0.05327303	0.05326809	0.99990726	0.05326885	0.05327513	0.05327303
20	0.05226772	0.05226269	0.99990366	0.05226354	0.05226982	0.05226772
21	0.05121215	0.05120701	0.99989965	0.05120796	0.05121424	0.05121215
22	0.05010631	0.05010106	0.99989517	0.05010212	0.0501084	0.05010631
23	0.0489502	0.04894483	0.99989016	0.04894601	0.0489523	0.0489502
24	0.04774383	0.04773832	0.99988454	0.04773964	0.04774593	0.04774383
25	0.04648719	0.04648153	0.99987821	0.046483	0.04648929	0.04648719
26	0.04518029	0.04517447	0.99987106	0.0451761	0.04518239	0.04518029
27	0.04382312	0.04381712	0.99986295	0.04381893	0.04382522	0.04382312
28	0.04241569	0.04240948	0.99985371	0.0424115	0.04241778	0.04241569
29	0.04095799	0.04095156	0.99984311	0.0409538	0.04096009	0.04095799
30	0.03945003	0.03944335	0.99983088	0.03944584	0.03945212	0.03945003
31	0.0378918	0.03788485	0.99981668	0.03788761	0.03789389	0.0378918
32	0.0362833	0.03627605	0.99980007	0.03627911	0.0362854	0.0362833
33	0.03462454	0.03461694	0.99978045	0.03462035	0.03462663	0.03462454
34	0.03291551	0.03290752	0.99975705	0.03291132	0.03291761	0.03291551
35	0.03115622	0.03114777	0.99972883	0.03115203	0.03115832	0.03115622
36	0.02934666	0.02933769	0.99969435	0.02934248	0.02934876	0.02934666
37	0.02748684	0.02747726	0.99965157	0.02748265	0.02748894	0.02748684
38	0.02557675	0.02556646	0.99959756	0.02557256	0.02557885	0.02557675
39	0.0236164	0.02360525	0.99952794	0.02361221	0.02361849	0.0236164
40	0.02160578	0.02159359	0.99943594	0.02160159	0.02160787	0.02160578
41	0.0195449	0.01953142	0.99931061	0.01954071	0.01954699	0.0195449
42	0.01743374	0.01741864	0.99913335	0.01742956	0.01743584	0.01743374
43	0.01527233	0.01525508	0.99887032	0.01526814	0.01527442	0.01527233
44	0.01306065	0.01304046	0.9984545	0.01305646	0.01306274	0.01306065
45	0.0107987	0.01077426	0.99773711	0.01079451	0.0108008	0.0107987
46	0.00848649	0.00845534	0.99632904	0.0084823	0.00848858	0.00848649
47	0.00612401	0.00608063	0.9929167	0.00611982	0.00612611	0.00612401
48	0.00371127	0.00363837	0.9803572	0.00370708	0.00371336	0.00371127
49	0.00124826	0.00082938	0.66442953	0.00124407	0.00125035	0.00124826
Sumatoria	2.0943951	2.09349607		2.09418566	2.09449982	2.0943951
Sumatoriax2	4.1887902	4.18699215		4.18837133	4.18899964	4.1887902

La notación simple utilizada en las tablas A.1-A.3, se utilizará también en los apéndices restantes.

Apéndice B. Cálculos de volumen paraboloides, $n \geq 10$

B.1. Cálculo analítico de la aplicación del MCS a un paraboloides con 10 segmentos

En la figura B.1, se ilustra un paraboloides dividido en 10 segmentos.

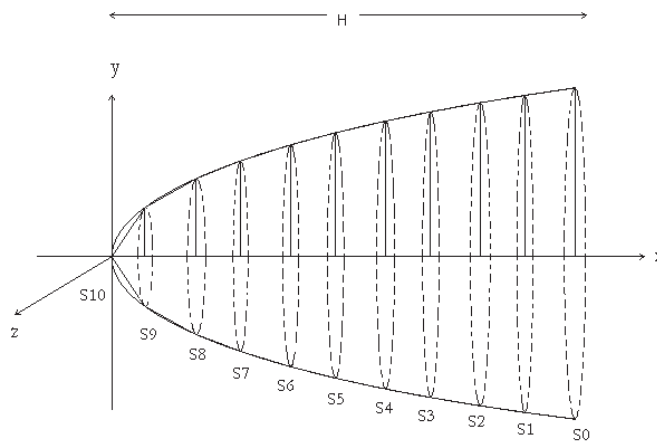


Figura B.1. Aplicación del modelo cónico segmentado a un paraboloides con 5 segmentos.

Calculando el volumen de cada uno de los segmentos y sumándolos, se obtendrá el volumen total del paraboloides aplicando el MCS; según la fórmula [4.2.2]. Los resultados son:

$$\begin{aligned}
 V_{1,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(0 + S_1 + \sqrt{S_0 S_1} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{1}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{9}{10} AH \right) + \sqrt{\pi AH \left(\frac{9}{10} AH \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{30} \left[\frac{19}{10} + \frac{\sqrt{90}}{10} \right] \pi AH^2 \\
 &= 0.094956109 \left[\pi AH^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \mathbb{I}_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{9}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{8}{10} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{9}{5} AH \right) \left(\pi \frac{8}{5} AH \right)} \right] \\
&= \frac{1}{30} \left[\frac{17}{10} + \frac{\sqrt{72}}{10} \right] AH^2 \\
&= 0.084950937 AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \mathbb{I}_2 + S_3 + \sqrt{S_2 S_3} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{8}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{7}{10} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{8}{5} AH \right) \left(\pi \frac{7}{5} AH \right)} \right] \\
&= \frac{1}{30} \left[\frac{15}{10} + \frac{\sqrt{56}}{10} \right] AH^2 \\
&= 0.074944382 AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \mathbb{I}_3 + S_4 + \sqrt{S_3 S_4} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{7}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{6}{10} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{7}{5} AH \right) \left(\pi \frac{6}{5} AH \right)} \right] \\
&= \frac{1}{30} \left[\frac{13}{10} + \frac{\sqrt{42}}{10} \right] AH^2 \\
&= 0.064935802 AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \mathbb{I}_4 + S_5 + \sqrt{S_4 S_5} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{6}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{5}{10} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{6}{5} AH \right) \left(\pi \frac{5}{5} AH \right)} \right] \\
&= \frac{1}{30} \left[\frac{11}{10} + \frac{\sqrt{30}}{10} \right] AH^2 \\
&= 0.054924085 AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \mathbb{I}_5 + S_6 + \sqrt{S_5 S_6} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{5}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{4}{10} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{5}{5} AH \right) \left(\pi \frac{4}{5} AH \right)} \right] \\
&= \frac{1}{30} \left[\frac{9}{10} + \frac{\sqrt{20}}{10} \right] AH^2 \\
&= 0.044907119 AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \mathbb{I}_6 + S_7 + \sqrt{S_6 S_7} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{4}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{3}{10} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{4}{5} AH \right) \left(\pi \frac{3}{5} AH \right)} \right] \\
&= \frac{1}{30} \left[\frac{7}{10} + \frac{\sqrt{12}}{10} \right] AH^2 \\
&= 0.034880338 AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8-10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[S_7 + S_8 + \sqrt{S_7 S_8} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{3}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{2}{10} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{3}{5} AH \right) \left(\pi \frac{2}{5} AH \right)} \right] \\
&= \frac{1}{30} \left[\frac{5}{10} + \frac{\sqrt{6}}{10} \right] \pi AH^2 \\
&= 0.024831632 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[S_8 + S_9 + \sqrt{S_8 S_9} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{2}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{1}{10} AH \right) + \sqrt{\left(\pi \frac{2}{5} AH \right) \left(\pi \frac{1}{5} AH \right)} \right] \\
&= \frac{1}{30} \left[\frac{3}{10} + \frac{\sqrt{2}}{10} \right] \pi AH^2 \\
&= 0.014714045 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{MCS-P} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) S_9 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi \left(\frac{AH}{10} \right) \right] \\
&= \frac{1}{300} \pi AH^2 \\
&= 0.0033333 \pi AH^2
\end{aligned}$$

El volumen total de paraboloides estimado con el MCS, para 10 segmentos es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{MCS-P} &= (V_{1,10}^{MCS-P} + V_{2,10}^{MCS-P} + V_{3,10}^{MCS-P} + V_{4,10}^{MCS-P} + V_{5,10}^{MCS-P} + \\
&\quad V_{6,10}^{MCS-P} + V_{7,10}^{MCS-P} + V_{8,10}^{MCS-P} + V_{9,10}^{MCS-P} + V_{10,10}^{MCS-P}) \\
&= 0.497377779 \pi AH^2
\end{aligned}$$

B.2. Cálculo analítico completo mediante el método exacto para un paraboloides con 10 segmentos

La fórmula general de volumen exacto para cada segmento, esta dada por la fórmula [4.2.7].

Los resultados son:

$$\begin{aligned}V_{1,10}^{Ex-P} &= \frac{S_0 + S_1}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\&= \frac{1}{2} \left[\pi A H + \pi \left(\frac{9}{10} A H \right) \right] \frac{1}{10} H \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{19}{10} \pi A H \right] \frac{1}{10} H \\&= \left(\frac{19}{200} \pi \right) A H^2 \\&= 0.095 \pi A H^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{2,10}^{Ex-P} &= \frac{S_1 + S_2}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{9}{10} A H \right) + \pi \left(\frac{8}{10} A H \right) \right] \frac{1}{10} H \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{17}{10} \pi A H \right] \frac{1}{10} H \\&= \left(\frac{17}{200} \pi \right) A H^2 \\&= 0.085 \pi A H^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,10}^{Ex-P} &= \frac{S_2 + S_3}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{8}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{7}{10} AH \right) \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{15}{10} \pi AH \right] \frac{1}{10} H \\
&= \left(\frac{15}{200} \pi \right) AH^2 \\
&= 0.075 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,10}^{Ex-P} &= \frac{S_3 + S_4}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{7}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{6}{10} AH \right) \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{13}{10} \pi AH \right] \frac{1}{10} H \\
&= \left(\frac{13}{200} \pi \right) AH^2 \\
&= 0.065 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,10}^{Ex-P} &= \frac{S_4 + S_5}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{6}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{5}{10} AH \right) \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{11}{10} \pi AH \right] \frac{1}{10} H \\
&= \left(\frac{11}{200} \pi \right) AH^2 \\
&= 0.055 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{Ex-P} &= \frac{S_5 + S_6}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{5}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{4}{10} AH \right) \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{9}{10} \pi AH \right] \frac{1}{10} H \\
&= \left(\frac{9}{200} \pi \right) AH^2 \\
&= 0.045 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{Ex-P} &= \frac{S_6 + S_7}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{4}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{3}{10} AH \right) \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{7}{10} \pi AH \right] \frac{1}{10} H \\
&= \left(\frac{7}{200} \pi \right) AH^2 \\
&= 0.035 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8,10}^{Ex-P} &= \frac{S_7 + S_8}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{3}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{2}{10} AH \right) \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{5}{10} \pi AH \right] \frac{1}{10} H \\
&= \left(\frac{5}{200} \pi \right) AH^2 \\
&= 0.025 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{Ex-P} &= \frac{S_8 + S_9}{2} \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{2}{10} AH \right) + \pi \left(\frac{1}{10} AH \right) \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{10} \pi AH \right] \frac{1}{10} H \\
&= \left(\frac{3}{200} \pi \right) AH^2 \\
&= 0.015 \pi AH^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{Ex-P} &= \frac{S_9}{2} \left(\frac{H}{10} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{AH}{10} \right) \right] \frac{H}{10} \\
&= \frac{1}{200} \pi AH^2 \\
&= 0.005 \pi AH^2
\end{aligned}$$

El volumen total exacto para el paraboloides es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{Ex-P} &= (V_{1,10}^{Ex-P} + V_{2,10}^{Ex-P} + V_{3,10}^{Ex-P} + V_{4,10}^{Ex-P} + V_{5,10}^{Ex-P} + \\
&\quad V_{6,10}^{Ex-P} + V_{7,10}^{Ex-P} + V_{8,10}^{Ex-P} + V_{9,10}^{Ex-P} + V_{10,10}^{Ex-P}) \\
&= 0.5 \pi AH^2.
\end{aligned}$$

En la tabla 4.2.3, se resumen los resultados de los volúmenes por segmento y totales, para el método exacto y el MCS.

En la figura B.2, se muestra la forma en que se trabajó en una hoja de Excel. La columna A corresponde al número de segmento. El número total de segmentos se determina manualmente. La columna B, corresponde a la fórmula general del volumen exacto, y C, a la del MCS. Como ya se mencionó, los cálculos para los métodos estándar de cubicación son los mismos resultados que los obtenidos por la fórmula del volumen exacto. En la columna D (se repite en E por error) se muestra la razón de los resultados entre el MCS y el volumen exacto.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Segmentos	P Exacto	P Conos	P CIPE	FG = P CIPE										
1	0	0.001998	0.001998	0.99999983	0.99999983									
2	1	0.001994	0.001994	0.99999983	0.99999983									
3	2	0.00199	0.00199	0.99999983	0.99999983									
4	3	0.001986	0.001986	0.99999983	0.99999983									
5	4	0.001982	0.001982	0.99999983	0.99999983									
6	5	0.001978	0.001978	0.99999983	0.99999983									
7	6	0.001974	0.001974	0.99999983	0.99999983									
8	7	0.00197	0.00197	0.99999983	0.99999983									
9	8	0.001966	0.001966	0.99999983	0.99999983									
10	9	0.001962	0.001962	0.99999983	0.99999983									
11	10	0.001958	0.001958	0.99999983	0.99999983									
12	11	0.001954	0.001954	0.99999983	0.99999983									
13	12	0.00195	0.00195	0.99999982	0.99999982									
14	13	0.001946	0.001946	0.99999982	0.99999982									
15	14	0.001942	0.001942	0.99999982	0.99999982									
16	15	0.001938	0.001938	0.99999982	0.99999982									
17	16	0.001934	0.001934	0.99999982	0.99999982									
18	17	0.00193	0.00193	0.99999982	0.99999982									
19	18	0.001926	0.001926	0.99999982	0.99999982									
20	19	0.001922	0.001922	0.99999982	0.99999982									
21	20	0.001918	0.001918	0.99999982	0.99999982									
22	21	0.001914	0.001914	0.99999982	0.99999982									
23	22	0.00191	0.00191	0.99999982	0.99999982									
24	23	0.001906	0.001906	0.99999982	0.99999982									
25	24	0.001902	0.001902	0.99999982	0.99999982									
26	25	0.001898	0.001898	0.99999981	0.99999981									
27	26	0.001894	0.001894	0.99999981	0.99999981									
28	27	0.00189	0.00189	0.99999981	0.99999981									
29	28	0.001886	0.001886	0.99999981	0.99999981									
30	29	0.001882	0.001882	0.99999981	0.99999981									
31	30	0.001878	0.001878	0.99999981	0.99999981									
32	31	0.001874	0.001874	0.99999981	0.99999981									
33	32	0.00187	0.00187	0.99999981	0.99999981									
34	33	0.001866	0.001866	0.99999981	0.99999981									
35	34	0.001862	0.001862	0.99999981	0.99999981									
36	35	0.001858	0.001858	0.99999981	0.99999981									
37	36	0.001854	0.001854	0.99999981	0.99999981									

Fig. B.2. Muestra de la hoja de cálculo, para el caso de un paraboloides con 100 segmentos.

En las tablas B.1 y B.2, se muestran los cálculos obtenidos mediante Excel para un paraboloides con 20 y 100 segmentos, respectivamente. Se mantiene la notación simple del apéndice A.

Tabla B.1. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un paraboloides con 20 segmentos.

Segmentos	Exacto	MCS	MCS/Exacto
0	0.04875	0.04874466	0.9998904
1	0.04625	0.04624437	0.99987823
2	0.04375	0.04374405	0.99986392
3	0.04125	0.04124369	0.99984692
4	0.03875	0.03874328	0.99982652
5	0.03625	0.03624281	0.99980176
6	0.03375	0.03374228	0.9997713
7	0.03125	0.03124166	0.99973323
8	0.02875	0.02874094	0.99968479
9	0.02625	0.02624007	0.99962186
10	0.02375	0.02373903	0.999538
11	0.02125	0.02123773	0.9994228
12	0.01875	0.0187361	0.99925843
13	0.01625	0.01623395	0.99901234
14	0.01375	0.01373102	0.99861973
15	0.01125	0.01122678	0.997936
16	0.00875	0.00872008	0.99658111
17	0.00625	0.00620791	0.9932653
18	0.00375	0.00367851	0.98093635
19	0.00125	0.00083333	0.66666667
Sumatoria	0.5	0.49927225	

Tabla B.2. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un paraboloides con 100 segmentos.

Segmentos	Exacto	MCS	MCS/Exacto
0	0.00995	0.00994996	0.99999579
1	0.00985	0.00984996	0.99999571
2	0.00975	0.00974996	0.99999562
3	0.00965	0.00964996	0.99999553
4	0.00955	0.00954996	0.99999543
5	0.00945	0.00944996	0.99999533
6	0.00935	0.00934996	0.99999523
7	0.00925	0.00924995	0.99999513
8	0.00915	0.00914995	0.99999502
9	0.00905	0.00904995	0.99999491
10	0.00895	0.00894995	0.9999948
11	0.00885	0.00884995	0.99999468
12	0.00875	0.00874995	0.99999456
13	0.00865	0.00864995	0.99999443
14	0.00855	0.00854995	0.9999943
15	0.00845	0.00844995	0.99999416
16	0.00835	0.00834995	0.99999402
17	0.00825	0.00824995	0.99999388

18	0.00815	0.00814995	0.99999373
19	0.00805	0.00804995	0.99999357
20	0.00795	0.00794995	0.99999341
21	0.00785	0.00784995	0.99999324
22	0.00775	0.00774995	0.99999306
23	0.00765	0.00764995	0.99999288
24	0.00755	0.00754994	0.99999269
25	0.00745	0.00744994	0.99999249
26	0.00735	0.00734994	0.99999229
27	0.00725	0.00724994	0.99999207
28	0.00715	0.00714994	0.99999185
29	0.00705	0.00704994	0.99999162
30	0.00695	0.00694994	0.99999137
31	0.00685	0.00684994	0.99999112
32	0.00675	0.00674994	0.99999085
33	0.00665	0.00664994	0.99999058
34	0.00655	0.00654994	0.99999029
35	0.00645	0.00644994	0.99998998
36	0.00635	0.00634993	0.99998967
37	0.00625	0.00624993	0.99998933
38	0.00615	0.00614993	0.99998898
39	0.00605	0.00604993	0.99998862
40	0.00595	0.00594993	0.99998823
41	0.00585	0.00584993	0.99998782
42	0.00575	0.00574993	0.9999874
43	0.00565	0.00564993	0.99998695
44	0.00555	0.00554992	0.99998647
45	0.00545	0.00544992	0.99998597
46	0.00535	0.00534992	0.99998544
47	0.00525	0.00524992	0.99998488
48	0.00515	0.00514992	0.99998429
49	0.00505	0.00504992	0.99998366
50	0.00495	0.00494992	0.99998299
51	0.00485	0.00484991	0.99998229
52	0.00475	0.00474991	0.99998153
53	0.00465	0.00464991	0.99998073
54	0.00455	0.00454991	0.99997987
55	0.00445	0.00444991	0.99997896
56	0.00435	0.0043499	0.99997798
57	0.00425	0.0042499	0.99997693
58	0.00415	0.0041499	0.99997581
59	0.00405	0.0040499	0.9999746

60	0.00395	0.00394989	0.99997329
61	0.00385	0.00384989	0.99997189
62	0.00375	0.00374989	0.99997037
63	0.00365	0.00364989	0.99996872
64	0.00355	0.00354988	0.99996694
65	0.00345	0.00344988	0.99996499
66	0.00335	0.00334988	0.99996287
67	0.00325	0.00324987	0.99996055
68	0.00315	0.00314987	0.99995801
69	0.00305	0.00304986	0.99995521
70	0.00295	0.00294986	0.99995212
71	0.00285	0.00284985	0.9999487
72	0.00275	0.00274985	0.9999449
73	0.00265	0.00264984	0.99994066
74	0.00255	0.00254984	0.99993592
75	0.00245	0.00244983	0.99993058
76	0.00235	0.00234982	0.99992454
77	0.00225	0.00224981	0.99991769
78	0.00215	0.00214981	0.99990985
79	0.00205	0.0020498	0.99990084
80	0.00195	0.00194979	0.9998904
81	0.00185	0.00184977	0.99987823
82	0.00175	0.00174976	0.99986392
83	0.00165	0.00164975	0.99984692
84	0.00155	0.00154973	0.99982652
85	0.00145	0.00144971	0.99980176
86	0.00135	0.00134969	0.9997713
87	0.00125	0.00124967	0.99973323
88	0.00115	0.00114964	0.99968479
89	0.00105	0.0010496	0.99962186
90	0.00095	0.00094956	0.999538
91	0.00085	0.00084951	0.9994228
92	0.00075	0.00074944	0.99925843
93	0.00065	0.00064936	0.99901234
94	0.00055	0.00054924	0.99861973
95	0.00045	0.00044907	0.997936
96	0.00035	0.0003488	0.99658111
97	0.00025	0.00024832	0.9932653
98	0.00015	0.00014714	0.98093635
99	0.00005	3.3333E-05	0.66666667
Sumatoria	0.5	0.49996418	

Apéndice C. Cálculos de volumen en cono, $n \geq 10$

C.1. Resultados de la aplicación analítica del MCS a un cono con 10 segmentos

En la figura C.1, Se ilustra un cono dividido en 10 segmentos.

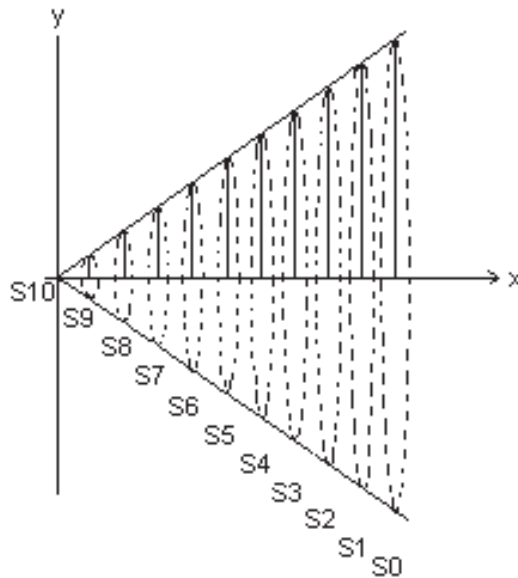


Figura C.1. Aplicación del modelo cónico segmentado a un cono de 10 segmentos.

El cálculo analítico de volumen con el MCS para cada segmento, se realiza de manera más simple, utilizando directamente la ecuación de cono truncado correspondiente. Los resultados para un cono con 10 segmentos son:

$$\begin{aligned}
V_{1,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_0 + \sqrt{S_0 S_1} + S_1}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi A H^2 + \sqrt{\pi A H^2 \cdot \pi \left(\frac{9}{10} \right)^2 A H^2} + \pi \left(\frac{9}{10} \right)^2 A H^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[1 + \left(\frac{9}{10} \right) + \left(\frac{9}{10} \right)^2 \right] \pi A H^3 \\
&= 0.090333333 \pi A H^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{9}{10} \right)^2 A H^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{9}{10} \right)^2 A H^2 \cdot \pi \left(\frac{8}{10} \right)^2 A H^2} + \pi \left(\frac{8}{10} \right)^2 A H^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{9}{10} \right)^2 + \left(\frac{9}{10} \right) \left(\frac{8}{10} \right) + \left(\frac{8}{10} \right)^2 \right] \pi A H^3 \\
&= \left(\frac{0.81 + 0.72 + 0.64}{30} \right) \pi A H^3 \\
&= 0.072333333 \pi A H^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_2 + \sqrt{S_2 S_3} + S_3}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{8}{10} \right)^2 A H^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{8}{10} \right)^2 A H^2 \cdot \pi \left(\frac{7}{10} \right)^2 A H^2} + \pi \left(\frac{7}{10} \right)^2 A H^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{8}{10} \right)^2 + \left(\frac{8}{10} \right) \left(\frac{7}{10} \right) + \left(\frac{7}{10} \right)^2 \right] \pi A H^3 \\
&= \left(\frac{0.64 + 0.56 + 0.49}{30} \right) \pi A H^3 \\
&= 0.056333333 \pi A H^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_3 + \sqrt{S_3 S_4} + S_4}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{7}{10} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{7}{10} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{6}{10} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{6}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{7}{10} \right)^2 + \left(\frac{7}{10} \right) \left(\frac{6}{10} \right) + \left(\frac{6}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= \left(\frac{0.49 + 0.42 + 0.36}{30} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.042333333 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_4 + \sqrt{S_4 S_5} + S_5}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{6}{10} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{6}{10} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{5}{10} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{5}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{6}{10} \right)^2 + \left(\frac{6}{10} \right) \left(\frac{5}{10} \right) + \left(\frac{5}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= \left(\frac{0.36 + 0.3 + 0.25}{30} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.030333333 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_5 + \sqrt{S_5 S_6} + S_6}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{5}{10} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{5}{10} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{4}{10} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{4}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{5}{10} \right)^2 + \left(\frac{5}{10} \right) \left(\frac{4}{10} \right) + \left(\frac{4}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= \left(\frac{0.25 + 0.2 + 0.16}{30} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.020333333 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_6 + \sqrt{S_6 S_7} + S_7}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{4}{10} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{4}{10} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{3}{10} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{3}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{4}{10} \right)^2 + \left(\frac{4}{10} \right) \left(\frac{3}{10} \right) + \left(\frac{3}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= \left(\frac{0.16 + 0.12 + 0.09}{30} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.012333333 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_7 + \sqrt{S_7 S_8} + S_8}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{3}{10} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{3}{10} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{2}{10} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{2}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{3}{10} \right)^2 + \left(\frac{3}{10} \right) \left(\frac{2}{10} \right) + \left(\frac{2}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= \left(\frac{0.09 + 0.06 + 0.04}{30} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.006333333 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_8 + \sqrt{S_8 S_9} + S_9}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{2}{10} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{2}{10} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{1}{10} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{1}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{2}{10} \right)^2 + \left(\frac{2}{10} \right) \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= \left(\frac{0.04 + 0.02 + 0.01}{30} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.002333333 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{MCS-C} &= \left(\frac{S_9 + \sqrt{S_9 S_{10}} + S_{10}}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{3} \left[\pi \left(\frac{1}{10} \right)^2 AH^2 + \sqrt{\pi \left(\frac{1}{10} \right)^2 AH^2 \cdot \pi \left(\frac{0}{10} \right)^2 AH^2} + \pi \left(\frac{0}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{1}{10} \right)^2 + \left(\frac{1}{10} \right) \left(\frac{0}{10} \right) + \left(\frac{0}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= \left(\frac{0.01}{30} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.000333333 \pi AH^3
\end{aligned}$$

El volumen total del cono, calculado con el MCS, es

$$\begin{aligned}
V_{10}^{MCS-C} &= \left(V_{1,10}^{MCS-C} + V_{2,10}^{MCS-C} + V_{3,10}^{MCS-C} + V_{4,10}^{MCS-C} + V_{5,10}^{MCS-C} \right. \\
&\quad \left. + V_{6,10}^{MCS-C} + V_{7,10}^{MCS-C} + V_{8,10}^{MCS-C} + V_{9,10}^{MCS-C} + V_{10,10}^{MCS-C} \right) \\
&= 0.333333327 \pi AH^3
\end{aligned}$$

C.2. Resultados para un cono con 10 segmentos mediante el método de Smalian

Para el cálculo analítico, resulta más fácil utilizar directamente la ecuación Smalian para cada segmento. A continuación se muestran los resultados

$$\begin{aligned}
V_{1,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_0 + S_1}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi A H^2 + \pi \left(\frac{9}{10} \right)^2 A H^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[1 + \left(\frac{9}{10} \right)^2 \right] \pi A H^3 \\
&= 0.0905 \pi A H^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{9}{10} \right)^2 A H^2 + \pi \left(\frac{8}{10} \right)^2 A H^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{9}{10} \right)^2 + \left(\frac{8}{10} \right)^2 \right] \pi A H^3 \\
&= 0.0725 \pi A H^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_2 + S_3}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{8}{10} \right)^2 A H^2 + \pi \left(\frac{7}{10} \right)^2 A H^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{8}{10} \right)^2 + \left(\frac{7}{10} \right)^2 \right] \pi A H^3 \\
&= 0.0565 \pi A H^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_3 + S_4}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{7}{10} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{6}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{7}{10} \right)^2 + \left(\frac{6}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= 0.0425 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_4 + S_5}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{6}{10} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{5}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{6}{10} \right)^2 + \left(\frac{5}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= 0.0305 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_5 + S_6}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{5}{10} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{4}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{5}{10} \right)^2 + \left(\frac{4}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= 0.0205 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_6 + S_7}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{4}{10} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{3}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{4}{10} \right)^2 + \left(\frac{3}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= 0.0125\pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_7 + S_8}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{3}{10} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{2}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{3}{10} \right)^2 + \left(\frac{2}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= 0.0065\pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_8 + S_9}{2} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{2}{10} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{1}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{2}{10} \right)^2 + \left(\frac{1}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= 0.0025\pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{S-C} &= \left(\frac{S_9 + \sqrt{S_9 S_{10}} + S_{10}}{3} \right) \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi \left(\frac{1}{10} \right)^2 AH^2 + \pi \left(\frac{0}{10} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \frac{1}{20} \left[\left(\frac{1}{10} \right)^2 + \left(\frac{0}{10} \right)^2 \right] \pi AH^3 \\
&= 0.0005 \pi AH^3
\end{aligned}$$

El volumen total del cono, estimado mediante el método de Smalian con 10 segmentos es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{S-C} &= \left(V_{1,10}^{S-C} + V_{2,10}^{S-C} + V_{3,10}^{S-C} + V_{4,10}^{S-C} + V_{5,10}^{S-C} + V_{6,10}^{S-C} + V_{7,10}^{S-C} + V_{8,10}^{S-C} + V_{9,10}^{S-C} + V_{10,10}^{S-C} \right) \\
&= 0.335 \pi AH^3
\end{aligned}$$

C.3. Resultados para un cono con 10 segmentos mediante el método de Huber

Para el cálculo analítico, resulta más fácil utilizar directamente la ecuación Huber para cada segmento. A continuación se muestran los resultados

$$\begin{aligned}
V_{1,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{19}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{19}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.09025 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{17}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{17}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.07225 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{15}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{15}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.05625 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{13}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{13}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.04225 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{11}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{11}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.03025 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{9}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{9}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.02025 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{7}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{7}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.01225 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{5}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{5}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.00625 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{3}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{3}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.00225 \pi AH^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{H-C} &= \pi \left[\left(\frac{1}{20} \right)^2 AH^2 \right] \left(\frac{1}{10} H \right) \\
&= \left(\frac{1}{20} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \pi AH^3 \\
&= 0.00025 \pi AH^3
\end{aligned}$$

El volumen total del cono, estimado mediante el método de Huber, con 10 segmentos, es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{H-C} &= \left(V_{1,10}^{H-C} + V_{2,10}^{H-C} + V_{3,10}^{H-C} + V_{4,10}^{H-C} + V_{5,10}^{H-C} \right) \\
&\quad \left(+ V_{6,10}^{H-C} + V_{7,10}^{H-C} + V_{8,10}^{H-C} + V_{9,10}^{H-C} + V_{10,10}^{H-C} \right) \\
&= 0.3325 \pi AH^3
\end{aligned}$$

C.4. Resultados para un cono con 10 segmentos mediante el método de Newton

Con la fórmula general de Newton [4.3.5] se obtuvieron los siguientes resultados para cada segmento uno de los segmentos.

$$\begin{aligned}V_{1,10}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) 0.09025 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0905 \pi AH^3 \\ &= 0.090333333\pi AH^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{2,10}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) 0.07225 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0725 \pi AH^3 \\ &= 0.072333333\pi AH^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{3,10}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) 0.05625 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0565 \pi AH^3 \\ &= 0.056333333\pi AH^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{4,10}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) 0.04225 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0425 \pi AH^3 \\ &= 0.042333333\pi AH^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{5,10}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) 0.03025 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0305 \pi AH^3 \\ &= 0.030333333\pi AH^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{6,10}^{Nw-C} &= \left(\frac{2}{3}\right) 0.02025 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0205 \pi AH^3 \\ &= 0.020333333\pi AH^3\end{aligned}$$

$$V_{7,10}^{Nw-C} = \left(\frac{2}{3}\right) 0.01225 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0125 \pi AH^3$$

$$= 0.012333333 \pi AH^3$$

$$V_{8,10}^{Nw-C} = \left(\frac{2}{3}\right) 0.00625 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0065 \pi AH^3$$

$$= 0.006333333 \pi AH^3$$

$$V_{9,10}^{Nw-C} = \left(\frac{2}{3}\right) 0.00225 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0025 \pi AH^3$$

$$= 0.002333333 \pi AH^3$$

$$V_{10,10}^{Nw-C} = \left(\frac{2}{3}\right) 0.00025 \pi AH^3 + \left(\frac{1}{3}\right) 0.0005 \pi AH^3$$

$$= 0.000333333 \pi AH^3$$

El volumen total del cono, estimado mediante el método de Newton con 10 segmentos es,

$$V_{10}^{Nw-C} = \left(\begin{array}{l} V_{1,10}^{Nw-C} + V_{2,10}^{Nw-C} + V_{3,10}^{Nw-C} + V_{4,10}^{Nw-C} + V_{5,10}^{Nw-C} \\ + V_{6,10}^{Nw-C} + V_{7,10}^{Nw-C} + V_{8,10}^{Nw-C} + V_{9,10}^{Nw-C} + V_{10,10}^{Nw-C} \end{array} \right)$$

$$= 0.333333327 \pi AH^3.$$

En la tabla 4.3.4, se muestran los resultados obtenidos para el volumen total de un cono mediante cada uno de los métodos de cubicación y para cada uno de los 10 segmentos.

En la figura C.2, se muestra como ejemplo una impresión de pantalla de la hoja de Excel para el cálculo del cono con 100 segmentos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Segmento	MCS	VS	VH	VN							
2	0	2.66667E-09	0.000000004	0.000000002	2.66667E-09							
3	1	1.86667E-08	0.000000002	0.000000018	1.86667E-08							
4	2	5.06667E-08	0.000000052	0.000000005	5.06667E-08							
5	3	9.86667E-08	0.00000001	0.000000098	9.86667E-08							
6	4	1.62667E-07	0.000000164	0.000000162	1.62667E-07							
7	5	2.42667E-07	0.000000244	0.000000242	2.42667E-07							
8	6	3.38667E-07	0.00000034	0.000000338	3.38667E-07							
9	7	4.50667E-07	0.000000452	0.00000045	4.50667E-07							
10	8	5.78667E-07	0.00000058	0.000000578	5.78667E-07							
11	9	7.22667E-07	0.000000724	0.000000722	7.22667E-07							
12	10	8.82667E-07	0.000000884	0.000000882	8.82667E-07							
13	11	1.05867E-06	0.00000106	0.000001058	1.05867E-06							
14	12	1.25067E-06	0.000001252	0.00000125	1.25067E-06							
15	13	1.45867E-06	0.00000146	0.000001458	1.45867E-06							
16	14	1.68267E-06	0.000001684	0.000001682	1.68267E-06							
17	15	1.92267E-06	0.000001924	0.000001922	1.92267E-06							
18	16	2.17867E-06	0.00000218	0.000002178	2.17867E-06							
19	17	2.45067E-06	0.000002452	0.00000245	2.45067E-06							
20	18	2.73867E-06	0.00000274	0.000002738	2.73867E-06							
21	19	3.04267E-06	0.000003044	0.000003042	3.04267E-06							
22	20	3.36267E-06	0.000003364	0.000003362	3.36267E-06							
23	21	3.69867E-06	0.0000037	0.000003698	3.69867E-06							
24	22	4.05067E-06	0.000004052	0.00000405	4.05067E-06							
25	23	4.41867E-06	0.00000442	0.000004418	4.41867E-06							
26	24	4.80267E-06	0.000004804	0.000004802	4.80267E-06							
27	25	5.20267E-06	0.000005204	0.000005202	5.20267E-06							
28	26	5.61867E-06	0.00000562	0.000005618	5.61867E-06							
29	27	6.05067E-06	0.000006052	0.00000605	6.05067E-06							
30	28	6.49867E-06	0.0000065	0.000006498	6.49867E-06							
31	29	6.96267E-06	0.000006964	0.000006962	6.96267E-06							
32	30	7.44267E-06	0.000007444	0.000007442	7.44267E-06							
33	31	7.93867E-06	0.00000794	0.000007938	7.93867E-06							
34	32	8.45067E-06	0.000008452	0.00000845	8.45067E-06							

Fig. C.2. Muestra de la hoja de calculo para el caso de un cono con 100 segmentos.

En las tablas C.1 y C.2, se muestran los cálculos obtenidos mediante Excel para un cono dividido en 20 y 100 segmentos, respectivamente para cada uno de los métodos de cubicación por secciones. Recuérdese que para este caso el MCS y Newton son exactos. Se mantiene la notación simple del apéndice A.

Tabla C.1. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un cono con 20 segmentos.

Segmento	MCS	Smalian	Huber	Newton
0	4.1667E-05	0.0000625	0.00003125	4.16667E-05
1	0.00029167	0.0003125	0.00028125	0.000291667
2	0.00079167	0.0008125	0.00078125	0.000791667
3	0.00154167	0.0015625	0.00153125	0.001541667
4	0.00254167	0.0025625	0.00253125	0.002541667
5	0.00379167	0.0038125	0.00378125	0.003791667
6	0.00529167	0.0053125	0.00528125	0.005291667
7	0.00704167	0.0070625	0.00703125	0.007041667
8	0.00904167	0.0090625	0.00903125	0.009041667
9	0.01129167	0.0113125	0.01128125	0.011291667
10	0.01379167	0.0138125	0.01378125	0.013791667
11	0.01654167	0.0165625	0.01653125	0.016541667
12	0.01954167	0.0195625	0.01953125	0.019541667
13	0.02279167	0.0228125	0.02278125	0.022791667
14	0.02629167	0.0263125	0.02628125	0.026291667
15	0.03004167	0.0300625	0.03003125	0.030041667
16	0.03404167	0.0340625	0.03403125	0.034041667
17	0.03829167	0.0383125	0.03828125	0.038291667
18	0.04279167	0.0428125	0.04278125	0.042791667
19	0.04754167	0.0475625	0.04753125	0.047541667
Sumatoria	0.33333333	0.33375	0.333125	0.333333333

Tabla C.2. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un cono con 100 segmentos.

Segmento	MCS	Smalian	Huber	Newton
0	3.33333E-07	0.0000005	0.00000025	3.3333E-07
1	2.33333E-06	0.0000025	0.00000225	2.3333E-06
2	6.33333E-06	0.0000065	0.00000625	6.3333E-06
3	1.23333E-05	0.0000125	0.00001225	1.2333E-05
4	2.03333E-05	0.0000205	0.00002025	2.0333E-05
5	3.03333E-05	0.0000305	0.00003025	3.0333E-05
6	4.23333E-05	0.0000425	0.00004225	4.2333E-05
7	5.63333E-05	0.0000565	0.00005625	5.6333E-05
8	7.23333E-05	0.0000725	0.00007225	7.2333E-05
9	9.03333E-05	0.0000905	0.00009025	9.0333E-05
10	0.000110333	0.0001105	0.00011025	0.00011033
11	0.000132333	0.0001325	0.00013225	0.00013233
12	0.000156333	0.0001565	0.00015625	0.00015633

13	0.000182333	0.0001825	0.00018225	0.00018233
14	0.000210333	0.0002105	0.00021025	0.00021033
15	0.000240333	0.0002405	0.00024025	0.00024033
16	0.000272333	0.0002725	0.00027225	0.00027233
17	0.000306333	0.0003065	0.00030625	0.00030633
18	0.000342333	0.0003425	0.00034225	0.00034233
19	0.000380333	0.0003805	0.00038025	0.00038033
20	0.000420333	0.0004205	0.00042025	0.00042033
21	0.000462333	0.0004625	0.00046225	0.00046233
22	0.000506333	0.0005065	0.00050625	0.00050633
23	0.000552333	0.0005525	0.00055225	0.00055233
24	0.000600333	0.0006005	0.00060025	0.00060033
25	0.000650333	0.0006505	0.00065025	0.00065033
26	0.000702333	0.0007025	0.00070225	0.00070233
27	0.000756333	0.0007565	0.00075625	0.00075633
28	0.000812333	0.0008125	0.00081225	0.00081233
29	0.000870333	0.0008705	0.00087025	0.00087033
30	0.000930333	0.0009305	0.00093025	0.00093033
31	0.000992333	0.0009925	0.00099225	0.00099233
32	0.001056333	0.0010565	0.00105625	0.00105633
33	0.001122333	0.0011225	0.00112225	0.00112233
34	0.001190333	0.0011905	0.00119025	0.00119033
35	0.001260333	0.0012605	0.00126025	0.00126033
36	0.001332333	0.0013325	0.00133225	0.00133233
37	0.001406333	0.0014065	0.00140625	0.00140633
38	0.001482333	0.0014825	0.00148225	0.00148233
39	0.001560333	0.0015605	0.00156025	0.00156033
40	0.001640333	0.0016405	0.00164025	0.00164033
41	0.001722333	0.0017225	0.00172225	0.00172233
42	0.001806333	0.0018065	0.00180625	0.00180633
43	0.001892333	0.0018925	0.00189225	0.00189233
44	0.001980333	0.0019805	0.00198025	0.00198033
45	0.002070333	0.0020705	0.00207025	0.00207033
46	0.002162333	0.0021625	0.00216225	0.00216233
47	0.002256333	0.0022565	0.00225625	0.00225633
48	0.002352333	0.0023525	0.00235225	0.00235233
49	0.002450333	0.0024505	0.00245025	0.00245033
50	0.002550333	0.0025505	0.00255025	0.00255033
51	0.002652333	0.0026525	0.00265225	0.00265233
52	0.002756333	0.0027565	0.00275625	0.00275633
53	0.002862333	0.0028625	0.00286225	0.00286233
54	0.002970333	0.0029705	0.00297025	0.00297033
55	0.003080333	0.0030805	0.00308025	0.00308033
56	0.003192333	0.0031925	0.00319225	0.00319233
57	0.003306333	0.0033065	0.00330625	0.00330633
58	0.003422333	0.0034225	0.00342225	0.00342233
59	0.003540333	0.0035405	0.00354025	0.00354033
60	0.003660333	0.0036605	0.00366025	0.00366033
61	0.003782333	0.0037825	0.00378225	0.00378233

62	0.003906333	0.0039065	0.00390625	0.00390633
63	0.004032333	0.0040325	0.00403225	0.00403233
64	0.004160333	0.0041605	0.00416025	0.00416033
65	0.004290333	0.0042905	0.00429025	0.00429033
66	0.004422333	0.0044225	0.00442225	0.00442233
67	0.004556333	0.0045565	0.00455625	0.00455633
68	0.004692333	0.0046925	0.00469225	0.00469233
69	0.004830333	0.0048305	0.00483025	0.00483033
70	0.004970333	0.0049705	0.00497025	0.00497033
71	0.005112333	0.0051125	0.00511225	0.00511233
72	0.005256333	0.0052565	0.00525625	0.00525633
73	0.005402333	0.0054025	0.00540225	0.00540233
74	0.005550333	0.0055505	0.00555025	0.00555033
75	0.005700333	0.0057005	0.00570025	0.00570033
76	0.005852333	0.0058525	0.00585225	0.00585233
77	0.006006333	0.0060065	0.00600625	0.00600633
78	0.006162333	0.0061625	0.00616225	0.00616233
79	0.006320333	0.0063205	0.00632025	0.00632033
80	0.006480333	0.0064805	0.00648025	0.00648033
81	0.006642333	0.0066425	0.00664225	0.00664233
82	0.006806333	0.0068065	0.00680625	0.00680633
83	0.006972333	0.0069725	0.00697225	0.00697233
84	0.007140333	0.0071405	0.00714025	0.00714033
85	0.007310333	0.0073105	0.00731025	0.00731033
86	0.007482333	0.0074825	0.00748225	0.00748233
87	0.007656333	0.0076565	0.00765625	0.00765633
88	0.007832333	0.0078325	0.00783225	0.00783233
89	0.008010333	0.0080105	0.00801025	0.00801033
90	0.008190333	0.0081905	0.00819025	0.00819033
91	0.008372333	0.0083725	0.00837225	0.00837233
92	0.008556333	0.0085565	0.00855625	0.00855633
93	0.008742333	0.0087425	0.00874225	0.00874233
94	0.008930333	0.0089305	0.00893025	0.00893033
95	0.009120333	0.0091205	0.00912025	0.00912033
96	0.009312333	0.0093125	0.00931225	0.00931233
97	0.009506333	0.0095065	0.00950625	0.00950633
98	0.009702333	0.0097025	0.00970225	0.00970233
99	0.009900333	0.0099005	0.00990025	0.00990033
Sumatoria	0.333333333	0.33335	0.333325	0.33333333

Apéndice D. Cálculos de volumen en neiloide, $n \geq 10$

D.1. Resultados de la aplicación analítica del MCS a un paraboloide con 10 segmentos

En la figura D.1, se ilustra un neiloide dividido en 10 segmentos.

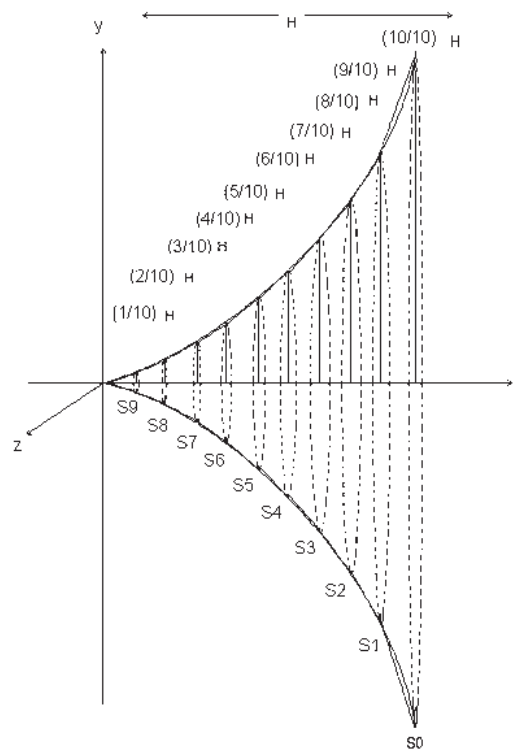


Figura D.1. Aplicación del modelo cónico segmentado a un neiloide con 10 segmentos.

El cálculo analítico de volumen con el MCS para cada segmento, se realiza de manera más simple, utilizando directamente la ecuación de cono truncado correspondiente. Los resultados para un neiloide con 10 segmentos son:

$$\begin{aligned}
V_{1,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[I_0 + S_1 + \sqrt{S_0 S_1} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\pi A H^3 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{9}{10} \right)^3} \pi A H^3 \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[1 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{9}{10} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[1 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{9}{10} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.086093832 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[I_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{9}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{8}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{9.8}{10.10} \right)^3} \pi A H^3 \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{9}{10} \right)^3 + \left(\frac{8}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{72}{100} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{9}{10} \right)^3 + \left(\frac{8}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{72}{100} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.061731341 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\mathbb{I}_2 + S_3 + \sqrt{S_2 S_3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{8}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{7}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{8.7}{10.10} \right)^3 \pi A H^3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{8}{10} \right)^3 + \left(\frac{7}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{56}{100} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{8}{10} \right)^3 + \left(\frac{7}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{56}{100} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.042468854 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\mathbb{I}_3 + S_4 + \sqrt{S_3 S_4} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{7}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{6}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{7.6}{10.10} \right)^3 \pi A H^3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{7}{10} \right)^3 + \left(\frac{6}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{42}{100} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{7}{10} \right)^3 + \left(\frac{6}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{42}{100} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.02770637 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[S_4 + S_5 + \sqrt{S_4 S_5} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{6}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{5}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{6.5}{10.10} \right)^3 \pi A H^3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{6}{10} \right)^3 + \left(\frac{5}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{30}{100} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{6}{10} \right)^3 + \left(\frac{5}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{30}{100} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.016843892 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[S_5 + S_6 + \sqrt{S_5 S_6} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{5}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{4}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{5.4}{10.10} \right)^3 \pi A H^3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{5}{10} \right)^3 + \left(\frac{4}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{20}{100} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{5}{10} \right)^3 + \left(\frac{4}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{20}{100} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.00928142397 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\mathbf{I}_6 + S_7 + \sqrt{S_6 S_7} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{4}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{3}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{4.3}{10.10} \right)^3 \pi A H^3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{4}{10} \right)^3 + \left(\frac{3}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{12}{100} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{4}{10} \right)^3 + \left(\frac{3}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{12}{100} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.004418973967 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\mathbf{I}_7 + S_8 + \sqrt{S_7 S_8} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{3}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{2}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \sqrt{\left(\frac{3.2}{10.10} \right)^3 \pi A H^3} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{3}{10} \right)^3 + \left(\frac{2}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{6}{100} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{3}{10} \right)^3 + \left(\frac{2}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{6}{100} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.001656564615 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{2}{10} \right)^3 + \left(\frac{1}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{2}{10} \right)^3 + \left(\frac{1}{10} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{2}{10} \right)^3 + \left(\frac{1}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{2}{10} \right)^3 + \left(\frac{1}{10} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{2}{10} \right)^3 + \left(\frac{1}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{2}{10} \right)^3 + \left(\frac{1}{10} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= 0.0003942809042 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{MCS-N} &= \frac{1}{3} \left(\frac{H}{10} \right) \left[\left(\frac{1}{10} \right)^3 + \left(\frac{0}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{1}{10} \right)^3 + \left(\frac{0}{10} \right)^3} \right] \pi A H^3 \\
&= \frac{1}{30} \left[\left(\frac{1}{10} \right)^3 + \left(\frac{0}{10} \right)^3 + \sqrt{\left(\frac{1}{10} \right)^3 + \left(\frac{0}{10} \right)^3} \right] \pi A H^4 \\
&= \frac{1}{30} [0.001 + 0] \pi A H^4 \\
&= 0.00003333 \pi A H^4
\end{aligned}$$

El volumen total de neiloide, estimado mediante el MCS con 10 segmentos, es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{MCS-N} &= (V_{1,10}^{MCS-N} + V_{2,10}^{MCS-N} + V_{3,10}^{MCS-N} + V_{4,10}^{MCS-N} + V_{5,10}^{MCS-N} \\
&\quad + V_{6,10}^{MCS-N} + V_{7,10}^{MCS-N} + V_{8,10}^{MCS-N} + V_{9,10}^{MCS-N} + V_{10,10}^{MCS-N}) \\
&= 0.250628862 \pi A H^4
\end{aligned}$$

D.2. Resultados para un neiloide con 10 segmentos mediante el método exacto

Los cálculos analíticos para un segmento de neiloide, se obtienen realizando una diferencia entre los volúmenes de los dos neilodes completos asociados a cada extremo del segmento de interés. Para el caso de 10 segmentos, los resultados son:

$$V_{1,10}^{Ex-N} = \frac{S_0 H}{4} - \frac{S_1 \left(\frac{9}{10} H \right)}{4}$$

en donde,

$$S_0 = \pi A H^3; \quad S_1 = \pi A \left(\frac{9}{10} H \right)^3 = \left(\frac{9}{10} \right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{1,10}^{Ex-N} &= \left[S_0 - \frac{9}{10} \left(\frac{9}{10} \right)^3 S_0 \right] \frac{H}{4} \\ &= \left[1 - \left(\frac{9}{10} \right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\ &= \left[1 - 0.6561 \right] \frac{\pi A H^4}{4} \\ &= 0.3439 \frac{\pi A H^4}{4} \\ &= 0.085975 \pi A H^4 \end{aligned}$$

$$V_{2,10}^{Ex-N} = \frac{S_1 \left(\frac{9}{10} H \right)}{4} - \frac{S_2 \left(\frac{8}{10} H \right)}{4}$$

en donde,

$$S_2 = \pi A \left(\frac{8}{10} H \right)^3 = \left(\frac{8}{10} \right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 V_{2,10}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{9}{10} H\right)}{4} - \frac{\left(\frac{8}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{8}{10} H\right)}{4} \\
 &= \left(\frac{9}{10}\right)^4 \frac{S_0 H}{4} - \left(\frac{8}{10}\right)^4 \frac{S_0 H}{4} \\
 &= \left[\left(\frac{9}{10}\right)^4 - \left(\frac{8}{10}\right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\
 &= \left(\frac{6561 - 4096}{10000} \right) \frac{\pi A H^4}{4} \\
 &= 0.2465 \frac{\pi A H^4}{4} \\
 &= 0.061625 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

$$V_{3,10}^{Ex-N} = \frac{S_2 \left(\frac{8}{10} H\right)}{4} - \frac{S_3 \left(\frac{7}{10} H\right)}{4}$$

en donde:

$$S_3 = \pi A \left(\frac{7}{10} H\right)^3 = \left(\frac{7}{10}\right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 V_{3,10}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{8}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{8}{10} H\right)}{4} - \frac{\left(\frac{7}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{7}{10} H\right)}{4} \\
 &= \left[\left(\frac{8}{10}\right)^4 - \left(\frac{7}{10}\right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\
 &= \left(\frac{4096 - 2401}{10000} \right) \frac{\pi A H^4}{4}
 \end{aligned}$$

$$= 0.1695 \frac{\pi A H^4}{4}$$

$$= 0.042375 \pi A H^4$$

$$V_{4,10}^{Ex-N} = \frac{S_3 \left(\frac{7}{10} H \right)}{4} - \frac{S_4 \left(\frac{6}{10} H \right)}{4}$$

en donde,

$$S_4 = \pi A \left(\frac{6}{10} H \right)^3 = \left(\frac{6}{10} \right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$V_{4,10}^{Ex-N} = \frac{\left(\frac{7}{10} \right)^3 S_0 \left(\frac{7}{10} H \right)}{4} - \frac{\left(\frac{6}{10} \right)^3 S_0 \left(\frac{6}{10} H \right)}{4}$$

$$= \left[\left(\frac{7}{10} \right)^4 - \left(\frac{6}{10} \right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4}$$

$$= \left(\frac{2401 - 1296}{10000} \right) \frac{\pi A H^4}{4}$$

$$= 0.1105 \frac{\pi A H^4}{4}$$

$$= 0.027625 \pi A H^4$$

$$V_{5,10}^{Ex-N} = \frac{S_4 \left(\frac{6}{10} H \right)}{4} - \frac{S_5 \left(\frac{5}{10} H \right)}{4}$$

en donde,

$$S_5 = \pi A \left(\frac{5}{10} H \right)^3 = \left(\frac{5}{10} \right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 V_{5,10}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{6}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{6}{10} H\right)}{4} - \frac{\left(\frac{5}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{5}{10} H\right)}{4} \\
 &= \left[\left(\frac{6}{10}\right)^4 - \left(\frac{5}{10}\right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\
 &= \left(\frac{1296 - 625}{10000} \right) \frac{\pi A H^4}{4} \\
 &= 0.0671 \frac{\pi A H^4}{4} \\
 &= 0.016775 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

$$V_{6,10}^{Ex-N} = \frac{S_5 \left(\frac{5}{10} H\right)}{4} - \frac{S_6 \left(\frac{4}{10} H\right)}{4}$$

en donde,

$$S_6 = \pi A \left(\frac{4}{10} H\right)^3 = \left(\frac{4}{10}\right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 V_{6,10}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{5}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{5}{10} H\right)}{4} - \frac{\left(\frac{4}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{4}{10} H\right)}{4} \\
 &= \left[\left(\frac{5}{10}\right)^4 - \left(\frac{4}{10}\right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\
 &= \left(\frac{625 - 256}{10000} \right) \frac{\pi A H^4}{4} \\
 &= 0.0369 \frac{\pi A H^4}{4} \\
 &= 0.009225 \pi A H^4
 \end{aligned}$$

$$V_{7,10}^{Ex-N} = \frac{S_6\left(\frac{4}{10}H\right)}{4} - \frac{S_7\left(\frac{3}{10}H\right)}{4}$$

en donde:

$$S_7 = \pi A \left(\frac{3}{10}H\right)^3 = \left(\frac{3}{10}\right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{7,10}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{4}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{4}{10}H\right)}{4} - \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{3}{10}H\right)}{4} \\ &= \left[\left(\frac{4}{10}\right)^4 - \left(\frac{3}{10}\right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\ &= \left(\frac{256 - 81}{10000}\right) \frac{\pi A H^4}{4} \\ &= 0.0175 \frac{\pi A H^4}{4} \\ &= 0.004375 \pi A H^4 \end{aligned}$$

$$V_{8,10}^{Ex-N} = \frac{S_7\left(\frac{3}{10}H\right)}{4} - \frac{S_8\left(\frac{2}{10}H\right)}{4}$$

en donde:

$$S_8 = \pi A \left(\frac{2}{10}H\right)^3 = \left(\frac{2}{10}\right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$V_{8,10}^{Ex-N} = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{3}{10}H\right)}{4} - \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^3 S_0 \left(\frac{2}{10}H\right)}{4}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{3}{10} \right)^4 - \left(\frac{2}{10} \right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\
&= \left(\frac{81-16}{10000} \right) \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.0065 \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.001625 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$V_{9,10}^{Ex-N} = \frac{S_8 \left(\frac{2}{10} H \right)}{4} - \frac{S_9 \left(\frac{1}{10} H \right)}{4}$$

en donde,

$$S_9 = \pi A \left(\frac{1}{10} H \right)^3 = \left(\frac{1}{10} \right)^3 S_0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{Ex-N} &= \frac{\left(\frac{2}{10} \right)^3 S_0 \left(\frac{2}{10} H \right)}{4} - \frac{\left(\frac{1}{10} \right)^3 S_0 \left(\frac{1}{10} H \right)}{4} \\
&= \left[\left(\frac{2}{10} \right)^4 - \left(\frac{1}{10} \right)^4 \right] \frac{S_0 H}{4} \\
&= \left(\frac{16-1}{10000} \right) \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.0015 \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.000375 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{Ex-N} &= \frac{S_9 \left(\frac{H}{10} \right)}{4} = \frac{\left[\pi A \left(\frac{1}{10} H \right)^3 \right] \left(\frac{H}{10} \right)}{4} \\
&= \left(\frac{1}{10} \right)^4 \frac{\pi A h^3 H}{4} \\
&= \left(\frac{1}{10} \right)^4 \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.0001 \frac{\pi A H^4}{4} \\
&= 0.000025 \pi A H^4
\end{aligned}$$

El volumen total exacto para el neiloide es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{Ex-N} &= V_{1,10}^{Ex-N} + V_{2,10}^{Ex-N} + V_{3,10}^{Ex-N} + V_{4,10}^{Ex-N} + V_{5,10}^{Ex-N} + V_{6,10}^{Ex-N} + V_{7,10}^{Ex-N} + V_{8,10}^{Ex-N} + V_{9,10}^{Ex-N} + V_{10,10}^{Ex-N} \\
&= 0.25 \pi A H^4
\end{aligned}$$

D.3. Resultados para un neiloide con 10 segmentos mediante el método de Smalian

La fórmula general de Smalian [4.4.4] para cada segmento, es la ya conocida en la literatura forestal, con la cual se obtienen los siguientes volúmenes.

$$\begin{aligned}
V_{1,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\pi A H^3 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[\pi A H^3 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \cdot 729 \pi A H^4 \\
&= 0.08645 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{9}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{8}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.729 + 0.512 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.241 \pi A H^4 \right] \\
&= 0.06205 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{8}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{7}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.512 + 0.343 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.855 \pi A H^4 \right] \\
&= 0.04275 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{7}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{6}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.343 + 0.216 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.559 \pi A H^4 \right] \\
&= 0.02795 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{6}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{5}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.216 + 0.125 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.341 \pi A H^4 \right] \\
&= 0.01705 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{5}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{4}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.125 + 0.064 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.189 \pi A H^3 \right] \\
&= 0.00945 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{3}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.064 + 0.027 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.091 \pi A H^3 \right] \\
&= 0.00455 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{2}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.027 + 0.008 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.035 \pi A H^3 \right] \\
&= 0.00175 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{1}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.008 + 0.001 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.009 \pi A H^3 \right] \\
&= 0.00045 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{S-N} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{10} \right)^3 \pi A H^3 + \left(\frac{0}{10} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{2} \left[.001 + 0 \right] \pi A H^3 \frac{1}{10} H \\
&= \frac{1}{20} \left[.001 \right] \pi A H^4 \\
&= 0.00005 \pi A H^4
\end{aligned}$$

El volumen total de neiloide estimado mediante el método de Smalian, con 10 segmentos, es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{S-N} &= \left(V_{1,10}^{S-N} + V_{2,10}^{S-N} + V_{3,10}^{S-N} + V_{4,10}^{S-N} + V_{5,10}^{S-N} + V_{6,10}^{S-N} + V_{7,10}^{S-N} + V_{8,10}^{S-N} + V_{9,10}^{S-N} + V_{10,10}^{S-N} \right) \\
&= 0.2525 \pi A H^4
\end{aligned}$$

D.4. Resultados para un neiloide con 10 segmentos mediante el método de Huber

Con la fórmula general de Huber [4.4.5], fueron obtenidos los siguientes volúmenes para cada uno de los segmentos.

$$\begin{aligned}
V_{1,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{19}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \left[.857375 \right] \pi A H^3 \frac{1}{10} H \\
&= 0.0857375 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{17}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \mathbf{0.614125} \pi A H^3 \frac{-1}{10} H \\
&= 0.0614125 \pi A H^4 \\
&= 0.0614125 S_1 H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{3,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{15}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \mathbf{0.421875} \pi A H^3 \frac{-1}{10} H \\
&= 0.0421875 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{4,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{13}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \mathbf{0.274625} \pi A H^3 \frac{-1}{10} H \\
&= 0.0274625 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{5,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{11}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \mathbf{0.166375} \pi A H^3 \frac{-1}{10} H \\
&= 0.0166375 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{9}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= \mathbf{0.091125} \pi A H^3 \frac{-1}{10} H \\
&= 0.0091125 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{7}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= 0.042875 \pi A H^3 \frac{1}{10} H \\
&= 0.0042875 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{5}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= 0.015625 \pi A H^3 \frac{1}{10} H \\
&= 0.0015625 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{3}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= 0.003375 \pi A H^3 \frac{1}{10} H \\
&= 0.0003375 \pi A H^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{H-N} &= \left[\left(\frac{1}{20} \right)^3 \pi A H^3 \right] \frac{1}{10} H \\
&= 0.000125 \pi A H^3 \frac{1}{10} H \\
&= 0.0000125 \pi A H^4
\end{aligned}$$

El volumen total de neiloide estimado mediante el método de Huber, con 10 segmentos, es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{H-N} &= V_{1,10}^{H-N} + V_{2,10}^{H-N} + V_{3,10}^{H-N} + V_{4,10}^{H-N} + V_{5,10}^{H-N} + V_{6,10}^{H-N} + V_{7,10}^{H-N} + V_{8,10}^{H-N} + V_{9,10}^{H-N} + V_{10,10}^{H-N} \\
&= 0.2487495 \pi A H^4 .
\end{aligned}$$

D.5. Resultados para un neiloide con 10 segmentos mediante el método de Newton

Con la fórmula general de Newton [4.4.6], fueron obtenidos los siguientes volúmenes para cada uno de los segmentos.

$$\begin{aligned}V_{1,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0857375 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.08645 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.057158333 + 0.028816666 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.085974999\pi AH^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{2,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0614125 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.06205 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.040941666 + 0.020683333 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.061624999\pi AH^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{3,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0421875 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.04275 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.028125 + 0.01425 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.042375\pi AH^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{4,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0274625 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.02795 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.018308333 + 0.009316666667 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.027624999\pi AH^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{5,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0166375 \overline{\pi}AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.01705 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.011091666 + 0.005683333333 \overline{\pi}AH^4 \\ &= 0.016774999\pi AH^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{6,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0091125 \pi AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.00945 \pi AH^4 \\
&= 0.006075 + 0.00315 \pi AH^4 \\
&= 0.009225 \pi AH^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{7,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0042875 \pi AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.00455 \pi AH^4 \\
&= 0.00285833333333 + 0.001516666667 \pi AH^4 \\
&= 0.004375 \pi AH^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{8,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0015625 \pi AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.00175 \pi AH^4 \\
&= 0.001041666667 + 0.00058333333333 \pi AH^4 \\
&= 0.001625 \pi AH^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{9,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0003375 \pi AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.00045 \pi AH^4 \\
&= 0.000225 + 0.00015 \pi AH^4 \\
&= 0.000375 \pi AH^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10,10}^{Nw-N} &= \frac{2}{3} \cdot 0.0000125 \pi AH^4 + \frac{1}{3} \cdot 0.00005 \pi AH^4 \\
&= 0.000008333 + 0.000016666 \pi AH^4 \\
&= 0.000099996 \pi AH^4
\end{aligned}$$

El volumen total de neiloide estimado mediante el método de Newton, con 10 segmentos, es,

$$\begin{aligned}
V_{10}^{Nw-N} &= V_{1,10}^{Nw-N} + V_{2,10}^{Nw-N} + V_{3,10}^{Nw-N} + V_{4,10}^{Nw-N} + V_{5,10}^{Nw-N} + V_{6,10}^{Nw-N} + V_{7,10}^{Nw-N} + V_{8,10}^{Nw-N} + V_{9,10}^{Nw-N} + V_{10,10}^{Nw-N} \\
&= 0.250074992 \pi AH^4.
\end{aligned}$$

En la tabla 4.4.5, se muestran los resultados obtenidos para el volumen total de un neiloide mediante cada uno de los métodos de cubicación y para cada uno de los 10 segmentos.

En la figura D.2, al igual que en los apéndices previos, se muestra como ejemplo una impresión de pantalla de una hoja de Excel para el caso de un neiloide dividido en 100 segmentos.

Segmento	N. Exacto	N. Conos	NC/NE	VS	VH	VN
1	0.00199401	0.00199401	1.0000005	0.00199401	0.00199401	0.00199401
2	0.00198206	0.00198206	1.0000005	0.00198206	0.00198206	0.00198206
3	0.00197015	0.00197015	1.00000051	0.00197015	0.00197015	0.00197015
4	0.0019583	0.0019583	1.00000051	0.0019583	0.00195829	0.0019583
5	0.00194649	0.00194649	1.00000051	0.00194649	0.00194648	0.00194649
6	0.00193473	0.00193473	1.00000051	0.00193473	0.00193472	0.00193473
7	0.00192301	0.00192301	1.00000051	0.00192302	0.00192301	0.00192301
8	0.00191135	0.00191135	1.00000052	0.00191135	0.00191134	0.00191135
9	0.00189973	0.00189973	1.00000052	0.00189973	0.00189972	0.00189973
10	0.00188815	0.00188816	1.00000052	0.00188816	0.00188815	0.00188815
11	0.00187663	0.00187663	1.00000052	0.00187663	0.00187663	0.00187663
12	0.00186515	0.00186515	1.00000052	0.00186516	0.00186515	0.00186515
13	0.00185372	0.00185372	1.00000053	0.00185372	0.00185372	0.00185372
14	0.00184234	0.00184234	1.00000053	0.00184234	0.00184233	0.00184234
15	0.001831	0.001831	1.00000053	0.001831	0.001831	0.001831
16	0.00181971	0.00181971	1.00000053	0.00181971	0.00181971	0.00181971
17	0.00180846	0.00180847	1.00000053	0.00180847	0.00180846	0.00180846
18	0.00179727	0.00179727	1.00000054	0.00179727	0.00179726	0.00179727
19	0.00178611	0.00178612	1.00000054	0.00178612	0.00178611	0.00178611
20	0.00177501	0.00177501	1.00000054	0.00177501	0.00177501	0.00177501
21	0.00176395	0.00176395	1.00000054	0.00176395	0.00176395	0.00176395
22	0.00175294	0.00175294	1.00000055	0.00175294	0.00175293	0.00175294
23	0.00174197	0.00174197	1.00000055	0.00174197	0.00174197	0.00174197
24	0.00173105	0.00173105	1.00000055	0.00173105	0.00173105	0.00173105
25	0.00172017	0.00172017	1.00000055	0.00172019	0.00172017	0.00172017
26	0.00170934	0.00170934	1.00000056	0.00170935	0.00170934	0.00170934
27	0.00169856	0.00169856	1.00000056	0.00169856	0.00169856	0.00169856
28	0.00168782	0.00168782	1.00000056	0.00168782	0.00168782	0.00168782
29	0.00167713	0.00167713	1.00000056	0.00167713	0.00167712	0.00167713
30	0.00166648	0.00166648	1.00000056	0.00166648	0.00166648	0.00166648
31	0.00165587	0.00165587	1.00000057	0.00165588	0.00165587	0.00165587
32	0.00164532	0.00164532	1.00000057	0.00164532	0.00164531	0.00164532
33	0.0016348	0.0016348	1.00000057	0.00163481	0.0016348	0.0016348
34	0.00162433	0.00162434	1.00000057	0.00162434	0.00162433	0.00162433
35	0.00161391	0.00161391	1.00000058	0.00161391	0.00161391	0.00161391
36	0.00160353	0.00160353	1.00000058	0.00160354	0.00160353	0.00160353

Fig. D.2. Muestra de la hoja de calculo para el caso de un cono con 100 segmentos.

En las tablas D.1 y D.2, se muestran los cálculos realizados en Excel para un neiloide con 20 y 100 segmentos, respectivamente, para cada uno de los métodos de cubicación por secciones. Se mantiene la notación simple del apéndice A.

Tabla D.1. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un neiloide con 20 segmentos.

Segmento	Exacto	MCS	MCS/Exacto	VS	VH	VN
1	0.04637344	0.04638867	1.00032857	0.04643438	0.04634297	0.04637344
2	0.03960156	0.03961602	1.00036503	0.03965938	0.03957266	0.03960156
3	0.03352344	0.03353711	1.00040791	0.03357813	0.03349609	0.03352344
4	0.02810156	0.02811446	1.00045882	0.02815313	0.02807578	0.02810156
5	0.02329844	0.02331055	1.00051989	0.02334688	0.02327422	0.02329844
6	0.01907656	0.01908789	1.000594	0.01912188	0.01905391	0.01907656
7	0.01539844	0.01540899	1.00068517	0.01544063	0.01537734	0.01539844
8	0.01222656	0.01223633	1.00079904	0.01226563	0.01220703	0.01222656
9	0.00952344	0.00953243	1.00094384	0.00955938	0.00950547	0.00952344
10	0.00725156	0.00725977	1.00113186	0.00728438	0.00723516	0.00725156
11	0.00537344	0.00538086	1.00138217	0.00540313	0.00535859	0.00537344
12	0.00385156	0.00385821	1.00172563	0.00387813	0.00383828	0.00385156
13	0.00264844	0.0026543	1.00221485	0.00267188	0.00263672	0.00264844
14	0.00172656	0.00173165	1.00294553	0.00174688	0.00171641	0.00172656
15	0.00104844	0.00105274	1.00410684	0.00106563	0.00103984	0.00104844
16	0.00057656	0.00058009	1.00611642	0.00059063	0.00056953	0.00057656
17	0.00027344	0.00027619	1.0100512	0.00028438	0.00026797	0.00027344
18	0.00010156	0.00010354	1.01942438	0.00010938	9.7656E-05	0.00010156
19	2.3438E-05	2.4643E-05	1.05141574	2.8125E-05	2.1094E-05	2.3438E-05
20	1.5625E-06	2.0833E-06	1.33333333	3.125E-06	7.8125E-07	1.5625E-06
Sumatoria	0.25	0.25015653		0.250625	0.2496875	0.25

Tabla D.2. Resultados para volumen de segmento y volumen total obtenidos mediante Excel para un neiloide con 100 segmentos.

Segmento	Exacto	MCS	MCS/Exacto	VS	VH	VN
1	0.009851	0.00985112	1.00001263	0.0098515	0.00985075	0.009851
2	0.00955696	0.00955709	1.00001288	0.00955746	0.00955672	0.00955696
3	0.00926884	0.00926896	1.00001315	0.00926933	0.00926859	0.00926884
4	0.00898656	0.00898668	1.00001342	0.00898705	0.00898632	0.00898656
5	0.00871008	0.0087102	1.00001371	0.00871056	0.00870984	0.00871008
6	0.00843932	0.00843944	1.000014	0.0084398	0.00843909	0.00843932
7	0.00817424	0.00817435	1.0000143	0.00817471	0.008174	0.00817424
8	0.00791476	0.00791488	1.00001461	0.00791523	0.00791453	0.00791476
9	0.00766084	0.00766095	1.00001493	0.0076613	0.00766061	0.00766084
10	0.0074124	0.00741252	1.00001526	0.00741286	0.00741218	0.0074124
11	0.0071694	0.00716951	1.0000156	0.00716985	0.00716917	0.0071694
12	0.00693176	0.00693187	1.00001596	0.00693221	0.00693154	0.00693176
13	0.00669944	0.00669955	1.00001633	0.00669988	0.00669922	0.00669944

14	0.00647236	0.00647247	1.00001671	0.0064728	0.00647215	0.00647236
15	0.00625048	0.00625058	1.0000171	0.00625091	0.00625026	0.00625048
16	0.00603372	0.00603383	1.00001751	0.00603415	0.00603351	0.00603372
17	0.00582204	0.00582214	1.00001793	0.00582246	0.00582183	0.00582204
18	0.00561536	0.00561547	1.00001836	0.00561578	0.00561516	0.00561536
19	0.00541364	0.00541374	1.00001882	0.00541405	0.00541343	0.00541364
20	0.0052168	0.0052169	1.00001929	0.00521721	0.0052166	0.0052168
21	0.0050248	0.0050249	1.00001978	0.0050252	0.0050246	0.0050248
22	0.00483756	0.00483766	1.00002028	0.00483796	0.00483737	0.00483756
23	0.00465504	0.00465513	1.00002081	0.00465543	0.00465484	0.00465504
24	0.00447716	0.00447726	1.00002136	0.00447755	0.00447697	0.00447716
25	0.00430388	0.00430397	1.00002193	0.00430426	0.00430369	0.00430388
26	0.00413512	0.00413522	1.00002252	0.0041355	0.00413494	0.00413512
27	0.00397084	0.00397093	1.00002314	0.00397121	0.00397065	0.00397084
28	0.00381096	0.00381105	1.00002378	0.00381133	0.00381078	0.00381096
29	0.00365544	0.00365553	1.00002445	0.0036558	0.00365526	0.00365544
30	0.0035042	0.00350429	1.00002515	0.00350456	0.00350403	0.0035042
31	0.0033572	0.00335728	1.00002588	0.00335755	0.00335702	0.0033572
32	0.00321436	0.00321445	1.00002664	0.00321471	0.00321419	0.00321436
33	0.00307564	0.00307572	1.00002743	0.00307598	0.00307547	0.00307564
34	0.00294096	0.00294105	1.00002826	0.0029413	0.0029408	0.00294096
35	0.00281028	0.00281036	1.00002913	0.00281061	0.00281011	0.00281028
36	0.00268352	0.0026836	1.00003004	0.00268385	0.00268336	0.00268352
37	0.00256064	0.00256072	1.000031	0.00256096	0.00256048	0.00256064
38	0.00244156	0.00244164	1.000032	0.00244188	0.00244141	0.00244156
39	0.00232624	0.00232631	1.00003305	0.00232655	0.00232608	0.00232624
40	0.0022146	0.00221468	1.00003415	0.00221491	0.00221445	0.0022146
41	0.0021066	0.00210667	1.00003531	0.0021069	0.00210645	0.0021066
42	0.00200216	0.00200224	1.00003652	0.00200246	0.00200202	0.00200216
43	0.00190124	0.00190131	1.00003781	0.00190153	0.00190109	0.00190124
44	0.00180376	0.00180383	1.00003916	0.00180405	0.00180362	0.00180376
45	0.00170968	0.00170975	1.00004058	0.00170996	0.00170954	0.00170968
46	0.00161892	0.00161899	1.00004208	0.0016192	0.00161879	0.00161892
47	0.00153144	0.0015315	1.00004367	0.00153171	0.0015313	0.00153144
48	0.00144716	0.00144723	1.00004535	0.00144743	0.00144703	0.00144716
49	0.00136604	0.0013661	1.00004713	0.0013663	0.00136591	0.00136604
50	0.001288	0.00128807	1.00004901	0.00128826	0.00128788	0.001288
51	0.001213	0.00121306	1.00005101	0.00121325	0.00121287	0.001213
52	0.00114096	0.00114102	1.00005314	0.00114121	0.00114084	0.00114096
53	0.00107184	0.0010719	1.0000554	0.00107208	0.00107172	0.00107184
54	0.00100556	0.00100562	1.00005781	0.0010058	0.00100545	0.00100556
55	0.00094208	0.00094213	1.00006037	0.00094231	0.00094196	0.00094208
56	0.00088132	0.00088138	1.00006312	0.00088155	0.00088121	0.00088132
57	0.00082324	0.00082329	1.00006605	0.00082346	0.00082313	0.00082324
58	0.00076776	0.00076782	1.0000692	0.00076798	0.00076766	0.00076776
59	0.00071484	0.00071489	1.00007257	0.00071505	0.00071473	0.00071484
60	0.0006644	0.00066445	1.0000762	0.00066461	0.0006643	0.0006644
61	0.0006164	0.00061645	1.00008011	0.0006166	0.0006163	0.0006164
62	0.00057076	0.00057081	1.00008432	0.00057096	0.00057067	0.00057076

63	0.00052744	0.00052748	1.00008888	0.00052763	0.00052734	0.00052744
64	0.00048636	0.00048641	1.00009381	0.00048655	0.00048627	0.00048636
65	0.00044748	0.00044752	1.00009917	0.00044766	0.00044739	0.00044748
66	0.00041072	0.00041077	1.000105	0.0004109	0.00041064	0.00041072
67	0.00037604	0.00037608	1.00011136	0.00037621	0.00037595	0.00037604
68	0.00034336	0.0003434	1.00011832	0.00034353	0.00034328	0.00034336
69	0.00031264	0.00031268	1.00012595	0.0003128	0.00031256	0.00031264
70	0.0002838	0.00028384	1.00013435	0.00028396	0.00028373	0.0002838
71	0.0002568	0.00025683	1.00014361	0.00025695	0.00025672	0.0002568
72	0.00023156	0.0002316	1.00015386	0.00023171	0.00023149	0.00023156
73	0.00020804	0.00020807	1.00016525	0.00020818	0.00020797	0.00020804
74	0.00018616	0.0001862	1.00017795	0.0001863	0.0001861	0.00018616
75	0.00016588	0.00016591	1.00019218	0.00016601	0.00016581	0.00016588
76	0.00014712	0.00014715	1.00020818	0.00014725	0.00014706	0.00014712
77	0.00012984	0.00012987	1.00022627	0.00012996	0.00012978	0.00012984
78	0.00011396	0.00011399	1.00024682	0.00011408	0.00011391	0.00011396
79	9.9438E-05	9.9464E-05	1.00027031	9.9545E-05	9.9384E-05	9.9438E-05
80	8.6203E-05	8.6228E-05	1.00029731	8.6305E-05	8.6151E-05	8.6203E-05
81	7.4198E-05	7.4222E-05	1.00032857	7.4295E-05	7.4149E-05	7.4198E-05
82	6.3363E-05	6.3386E-05	1.00036503	6.3455E-05	6.3316E-05	6.3363E-05
83	5.3638E-05	5.3659E-05	1.00040791	5.3725E-05	5.3594E-05	5.3638E-05
84	4.4963E-05	4.4983E-05	1.00045882	4.5045E-05	4.4921E-05	4.4963E-05
85	3.7278E-05	3.7297E-05	1.00051989	3.7355E-05	3.7239E-05	3.7278E-05
86	3.0523E-05	3.0541E-05	1.000594	3.0595E-05	3.0486E-05	3.0523E-05
87	2.4638E-05	2.4654E-05	1.00068517	2.4705E-05	2.4604E-05	2.4638E-05
88	1.9563E-05	1.9578E-05	1.00079904	1.9625E-05	1.9531E-05	1.9563E-05
89	1.5238E-05	1.5252E-05	1.00094384	1.5295E-05	1.5209E-05	1.5238E-05
90	1.1603E-05	1.1616E-05	1.00113186	1.1655E-05	1.1576E-05	1.1603E-05
91	8.5975E-06	8.6094E-06	1.00138217	8.645E-06	8.5738E-06	8.5975E-06
92	6.1625E-06	6.1731E-06	1.00172563	6.205E-06	6.1413E-06	6.1625E-06
93	4.2375E-06	4.2469E-06	1.00221485	4.275E-06	4.2188E-06	4.2375E-06
94	2.7625E-06	2.7706E-06	1.00294553	2.795E-06	2.7463E-06	2.7625E-06
95	1.6775E-06	1.6844E-06	1.00410684	1.705E-06	1.6638E-06	1.6775E-06
96	9.225E-07	9.2814E-07	1.00611642	9.45E-07	9.1125E-07	9.225E-07
97	4.375E-07	4.419E-07	1.0100512	4.55E-07	4.2875E-07	4.375E-07
98	1.625E-07	1.6566E-07	1.01942438	1.75E-07	1.5625E-07	1.625E-07
99	3.75E-08	3.9428E-08	1.05141574	4.5E-08	3.375E-08	3.75E-08
100	2.5E-09	3.3333E-09	1.33333333	5E-09	1.25E-09	2.5E-09
Sumatoria	0.25	0.25000625		0.250025	0.2499875	0.25

BIBLIOGRAFÍA

- Alfaro-Trujillo, I. 2008. Unificación entre los métodos de aproximación del cálculo y los métodos de cubicación forestal. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ingeniería en Tecnología de la Madera. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Mich., México.
- Avery, T.E. and Burkhart, H.E. 2002. Forest Measurements. Mc Graw Hill. New York.
- Brack, C. 1999. Forest mensuration. Measuring trees, stands and forests for effective forest management. Computer-based course resources for forest mensuration at the Australian National University. Publicado en internet, disponible en <http://sres-associated.anu.edu.au/mensuration/volume.htm>.
- Bruce, D. 1982. Butt Log Volume Estimators. Forest Sci. 28(3):489-503.
- Bruce, D. and Shumacher, F. 1965. Medición Forestal. Editorial Herrero. México.
- Castro, F. 1955. Curso de dasimetría. ENA Chapingo. México.
- Chapman, H.H. 1921. Forest Mensuration. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Courant, R. and John, F. 1965. Introduction to Calculus and Analysis. Volume I. Wiley Internacional Edition. USA.
- Cruz-Cobos, F., De los Santos-Posadas, H.M., Valdéz-Lazalde, J.R. 2005. Un sistema compatible de ahusamiento y volumen para *Pinus cooperi* blanco en Durango, México. Memorias del VII Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Chihuahua, Chih., México.
- Cruz de León, G. 2008. Comunicación personal.
- Cruz de León, G. y Cruz de León, J. 2006. The Segmental Conic Model for Forest Measurements. Madera y Bosques 12(2):91-96.
- Diéguez-Aranda, U., Barrio-Anta, M., Castedo-Dorado, F., Ruíz-González, A.D., Álvarez-González, M.F., y Rojo-Albarez, A. 2003. Dendrometría. Mundi-Prensa. Madrid, España.
- Doruska, P.F. and Patterson, D.W. 2004. A new and improved modification to Smalian's equation for butt logs. Forest Prod. J. 54(4):69-72.
- Figueiredo-Filho, A., Machado, A., and Araújo-Carneiro, M.R. 1999. Testing accuracy of log volume calculation procedures against water displacement techniques (xylometer). Can. J. For. Res. 30:990-997 (2000).
- Hernández, F.J. y Soto-Soto, M.G. 2005. Funciones para estimar volumen fustal y ahusamiento de *Pinus douglasiana*. Memorias del VII Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Chihuahua, Chih., México.
- Larson, P.R. 1963. Stem Form Development of Forest Trees. For. Sci. Mon. 5.
- Patterson, D.W., Doruska, P.F., Hartley, J. and Hurd, M. 2007. Validating the Patterson and Doruska equation for estimating the volume of hardwood butt logs. Forest Prod. J. 57(1):67-70.
- Plank, M.E. and Cahill, J.M. 1984. Estimating Cubic Volume of Small Diameter Tree-Length Logs From Ponderosa and Lodgepole Pine. United States Department of Agriculture. Forest Service Research Note PNW-417.
- Romahn de la Vega, C.F., Ramírez-Maldonado, H. y Treviño-García, J.L. 1994. Dendrometría. Universidad Autónoma Chapingo. México.
- Stewart, J. 2002. Cálculo. Trascendentes tempranas. Thompson Learning. México.
- West, P.W. 2004. Tree and Forest Measurement. Springer-Verlag. Berlín.