



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**LA ESTRATEGIA DE REFINAMIENTO ADAPTATIVO DE MALLAS  
APLICADA A LAS SIMULACIONES DE FÍSICA SOLAR.**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

**RICARDO OCHOA ARMENTA**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. FRANCISCO SHIDARTHA GUZMÁN MURILLO**



MORELIA MICH. MARZO DE 2024



*A mi familia.*



# AGRADECIMIENTOS

La realización de este trabajo ha requerido esfuerzo, dedicación y constancia, pero hubiera sido imposible de realizar sin el apoyo de las personas en mi entorno, las cuales se involucraron ampliamente en este trabajo.

A mi asesor, el Dr. Francisco S. Guzmán, le agradezco sinceramente el apoyo, orientación y motivación que ha sido una constante desde el inicio hasta el final de este trabajo. A los miembros de mi comité tutorial, el Dr. Umberto Cotti, el Dr. José Antonio González y el Dr. Ricardo González, les agradezco por los comentarios hechos a lo largo de esta investigación que hicieron el trabajo más profundo y robusto. En particular agradezco al Dr. José Juan González por el compromiso, e involucramiento. Gracias a este equipo es que se ha llevado a buen término este trabajo.

Quiero agradecer principalmente a mi familia, la cual ha sido un gran apoyo en todo este proceso. Agradezco a Ana por compartir este tiempo en el cuál hemos crecido juntos, y finalmente a mis compañeros y amigos del doctorado y del tango, los cuales han sido un ejemplo de disciplina, constancia y resistencia.

*Morelia MEX., 8 de marzo de 2024*



# Índice general

<b>Resumen</b>	v
<b>Abstract</b>	vii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Magnetohidrodinámica</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Leyes de conservación . . . . .	8
2.3. Ecuaciones de la MHD . . . . .	9
2.3.1. Ley de inducción magnética . . . . .	10
2.3.2. Ley de conservación de la masa . . . . .	11
2.3.3. Ley de conservación del momento . . . . .	11
2.3.4. Conservación de la energía . . . . .	12
2.4. Teorema del campo congelado y los tubos de flujo . . . . .	13
2.5. Análisis perturbativo de las ecuaciones MHD . . . . .	14
2.5.1. Ondas magnetohidrodinámicas . . . . .	14
2.5.2. Choques MHD . . . . .	17
<b>3. Métodos numéricos</b>	<b>21</b>
3.1. Introducción . . . . .	21
3.2. Volúmenes finitos . . . . .	22
3.2.1. Discretización del problema . . . . .	23
3.2.2. Método de Godunov . . . . .	24
3.2.3. Implementación en 3 dimensiones . . . . .	25
3.3. Implementación para la MHD . . . . .	26
3.3.1. Resolvedores de Riemann . . . . .	26
3.3.2. Limpieza hiperbólica de la divergencia . . . . .	29
3.4. Condiciones de Frontera . . . . .	31
3.5. Evolución temporal . . . . .	32
3.5.1. Métodos TVD . . . . .	32
3.5.2. Implementación del metodo de Heun . . . . .	32
3.5.3. Integración CTU . . . . .	33

<b>4. Estrategia de refinamiento de malla adaptativo y paralelización</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción . . . . .	43
4.2. Estrategia AMR . . . . .	44
4.3. Descripción del algoritmo de Berger-Oliger . . . . .	45
4.3.1. Seleccionar una región para refinar . . . . .	45
4.3.2. Generando una nueva malla de refinamiento . . . . .	47
4.3.3. Interpolación de los datos de una malla gruesa a una de refinamiento . . . . .	47
4.3.4. Evolución temporal y sincronización . . . . .	48
4.3.5. Inyección de datos refinados dentro de la malla gruesa . . . . .	52
4.3.6. Corrección de flujos numéricos . . . . .	52
4.4. Estructura del código CAFE-AMR . . . . .	54
4.4.1. Estructura de datos . . . . .	54
4.4.2. Evolución temporal . . . . .	56
4.5. Paralelización . . . . .	57
4.5.1. Paralelizar desde lo serial . . . . .	58
4.5.2. Control de Flujo . . . . .	58
4.5.3. Comunicación entre procesadores . . . . .	59
4.5.4. Tareas del código . . . . .	62
<b>5. Pruebas magnetohidrodinámicas.</b>	<b>65</b>
5.1. Onda expansiva bidimensional . . . . .	65
5.2. Vórtice de Orszag-Tang . . . . .	66
5.3. Rotor 2D . . . . .	69
5.4. Tubo de Choque 3D Rotado . . . . .	70
5.4.1. Interacción nube-viento supersónico 3D . . . . .	73
5.5. Discusión de resultados y comentarios finales . . . . .	77
<b>6. Inestabilidades magnetohidrodinámicas</b>	<b>79</b>
6.1. Introducción . . . . .	79
6.2. Especificaciones de la simulación . . . . .	81
6.2.1. Inestabilidad Kelvin-Helmholtz . . . . .	81
6.2.2. Inestabilidad Rayleigh-Taylor . . . . .	82
6.3. Resultados . . . . .	84
6.3.1. Inestabilidad Kelvin-Helmholtz . . . . .	84
6.3.2. Inestabilidad Rayleigh-Taylor . . . . .	84
6.4. Discusión de resultados y comentarios finales . . . . .	87
<b>7. Fulguración solar</b>	<b>93</b>
7.1. Introducción . . . . .	93
7.2. Reconexión magnética y modelo de fulguración CHSKP . . . . .	97
7.2.1. Hojas de corriente . . . . .	98
7.2.2. Modelo de Fulguración Carmichael-Sturrock-Hirayama-Kopp-Pneuman . . . . .	101
7.3. Especificaciones de las simulaciones . . . . .	101
7.3.1. Hoja de corriente bidimensional . . . . .	102

7.3.2.	Hoja de corriente de Harris . . . . .	103
7.3.3.	Fulguración por resistividad anómala localizada . . . . .	104
7.4.	Resultados . . . . .	105
7.4.1.	Hoja de corriente bidimensional . . . . .	105
7.4.2.	Hoja de corriente de Harris . . . . .	105
7.4.3.	Fulguración por resistividad anómala localizada . . . . .	105
7.5.	Discusión de resultados y comentarios finales . . . . .	111
<b>8.</b>	<b>Viento solar</b>	<b>115</b>
8.1.	Introducción . . . . .	115
8.2.	Modelos analíticos del viento solar . . . . .	116
8.2.1.	Solución de Parker . . . . .	117
8.2.2.	Efectos de la rotación y el campo magnético: espirales de Parker . . . . .	118
8.3.	Modelo numérico del viento solar. . . . .	121
8.3.1.	Dominio numérico y frontera interna . . . . .	121
8.3.2.	Viento solar hidrodinámico . . . . .	123
8.3.3.	Viento solar magnetizado. . . . .	125
8.4.	Resultados . . . . .	130
8.4.1.	Viento solar hidrodinámico . . . . .	130
8.4.2.	Viento solar magnetizado . . . . .	132
8.5.	Discusión de Resultados . . . . .	133
<b>9.</b>	<b>Comentarios finales</b>	<b>139</b>
<b>A.</b>	<b>Descomposición característica</b>	<b>141</b>
A.1.	Descomposición característica para los flujos numéricos . . . . .	141
A.2.	Descomposición característica para la integración temporal CTU . . . . .	144
<b>B.</b>	<b>Limitadores de pendiente</b>	<b>147</b>
B.1.	Godunov . . . . .	147
B.2.	Minmod . . . . .	147
B.3.	MC (Monotonized Central) . . . . .	148



# Resumen

En este trabajo se desarrolló la implementación de la estrategia de refinamiento adaptativo de mallas para simulaciones de la física solar culminando en el código numérico CAFE-AMR. Éste código utiliza métodos estándar de la dinámica de fluidos computacional, incluyendo discretizaciones de volúmenes finitos, fórmulas de flujo HLL y Roe, reconstructores lineales e integradores temporales de segundo orden.

CAFE-AMR resuelve las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en los regímenes ideal y resistivo. Para validar la aplicación en el contexto de la física solar, se presentan simulaciones de las inestabilidades tipo Rayleigh-Taylor y Kelvin-Helmholtz; la simulación de una fulguración solar basada en el modelo Carmichael-Sturrock-Hirayama-Kopp-Pneuman; una simulación del viento solar en el caso hidrodinámico en donde se propaga una eyección de masa coronal no magnetizada y otra simulación un viento solar inmerso en un campo magnético dipolar centrado en el sol.

Se argumenta que la aplicación de la estrategia AMR permite hacer simulaciones solares a diversas escalas, captura mejor las estructuras localizadas y distribuye mejor los recursos computacionales.

**Palabras Clave:** Estrategia AMR, Magnetohidrodinámica, Física Solar, Física Computacional, Métodos de Volúmenes finitos.



# Abstract

In this thesis, the implementation of the adaptive mesh refinement strategy for solar physics simulations was developed, culminating in the CAFE-AMR numerical code. This code uses standard computational fluid dynamics methods, including finite volume discretizations, HLL and Roe flow formulas, linear reconstructors, and second-order temporal integrators.

CAFE-AMR solves the equations of magnetohydrodynamics in the ideal and resistive regimes. To validate the application in the context of solar physics, simulations of Rayleigh-Taylor and Kelvin-Helmholtz type instabilities are presented; the simulation of a solar flare based on the Carmichael-Sturrock-Hirayama-Kopp-Pneuman model; one simulations of a solar wind in the hydrodynamic case where a non-magnetized coronal mass ejection propagates and another simulation of a solar wind immersed in a dipolar magnetic field centered on the Sun.

It is argued that the application of the AMR strategy allows solar simulations to be carried out at various scales, better captures localized structures and better distributes computational resources.

**Keywords:** AMR Strategy, Magnetohydrodynamics, Solar Physics, Computational Physics, Finite Volume Methods.



# Capítulo 1

## Introducción

El Sol, la estrella más cercana a nosotros, es un ente masivo y enorme, que presenta fenómenos altamente energéticos y violentos, lo cual lo hace fascinante. Algunas culturas antiguas lo consideraban como un dios; simbólicamente la bondad, la esperanza o la sabiduría se asocian con la luz solar; y la historia de Ícaro como referencia a lo pequeños que somos en comparación con él, son ejemplos que indican que la suprema importancia y respeto que le tenemos al Sol, es y será una constante en nuestra historia.

El clima espacial engloba los matices contemporáneos del respeto y curiosidad que se le tiene. Constantemente se monitorea al Sol y se predice qué tanto influirá una fluctuación solar local, a minutos, horas y días de que se generó, no solo en la tierra sino en el resto del sistema solar.

En este contexto, las simulaciones numéricas sofisticadas son de vital importancia, y su uso adecuado en la descripción solar requiere un acercamiento cuidadoso. Con esto en mente se plantean las siguientes dificultades.

### 1. El Sol presenta fenómenos multi-escala

Desde el enfoque del clima espacial se plantean diversas escalas temporales para apreciar la dinámica de los fenómenos solares. La rotación solar tiene un periodo de 27 días; las erupciones del Sol que llegan a la tierra se contemplan en horas; y los desequilibrios que generan las fulguraciones duran minutos, por mencionar algunos. Estas escalas no son fáciles de apreciar; poniéndolo en perspectiva, una persona completa un ciclo de respiración más o menos una vez cada tres segundos, y los ciclos máximos y mínimos del Sol tienen un periodo de once años; un investigador del Sol presenciara, a lo más, tres ciclos solares a lo largo de su vida académica.

Por otra parte, el Sol tiene una estructura estratificada. En el núcleo se dan los fenómenos de fusión de los átomos de hidrógeno, en la zona de radiativa se transporta la luz altamente energética del núcleo hacia afuera, la zona convectiva está dominada por el flujo de la masa de plasma solar transportando calor desde la zona radiativa en la fotosfera, que es la parte visible en luz blanca, es donde comienza la atmósfera solar.

La estructura atmosférica del Sol se había inferido a partir de los eclipses y hoy en día se sabe que se compone de dos subcapas, la cromosfera y la corona solar, y de su zona de transición. Ésto se esquematiza en la Figura 1.1. Uno de los principales avances en el estudio del Sol fue

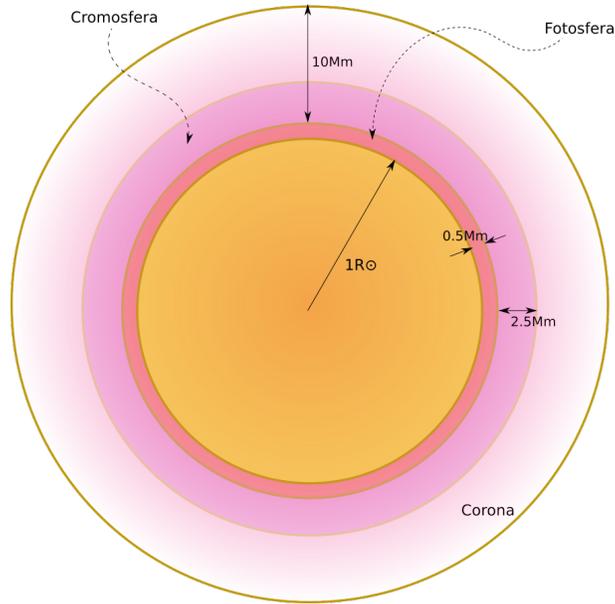


Figura 1.1: Esquematación de la estructura estratificada del Sol. Las dimensiones de referencia fueron tomadas de [Priest, 2014], en donde  $1R_{\odot} \approx 695.5\text{Mm}$ .

el descubrimiento de que, estrictamente hablando, éste no tiene una estructura compacta. Hay una extensión de la corona que permea todo el medio interplanetario. Esta extensión de la corona es debida a un viento solar que expulsan partículas cargadas a altísimas velocidades, las cuales generan una estructura supersónica y rarificada conocida como la heliosfera que se extiende hasta distancias cientos de radios solares.

Ahora bien, los eventos solares mayores dejan rastros centelleantes y luminosos en la fotosfera, se calientan y aceleran en la cromosfera, son expulsados desde la corona y se propagan por la heliosfera, en el medio interplanetario. Es así que este tipo de fenómenos se manifiestan a diferentes escalas espaciales.

Con todo, la primera problemática que se presenta es: *Los fenómenos solares se presentan en múltiples escalas.*

## 2. Los métodos numéricos de las simulaciones difuminan las estructuras locales

El estudio de la física solar se ha desarrollado en una constante dirección: las estructuras solares y su dinámica deben su comportamiento al campo magnético. En cada capa de la atmósfera solar, hay muchas preguntas relativas a la relación entre el plasma que la compone y el campo magnético.

La aproximación magnetohidrodinámica (MHD) describe bien una gran cantidad de los rasgos dinámicos de este campo. Es uno de los principales modelos que se utilizan en las simulaciones solares. La MHD se presenta como un conjunto de ecuaciones que expresan leyes de conservación y que, en general, describen la dinámica de un plasma.

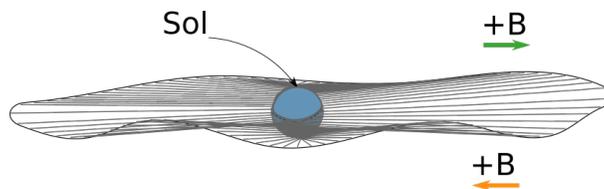


Figura 1.2: Esquematización de la hoja de corriente heliosférica.

Ahora, los métodos numéricos que permiten resolver las ecuaciones MHD aplicados a las simulaciones solares se basan en técnicas que capturan las ondas de choque y las discontinuidades; pero tienen la desventaja de que aumentar su precisión es difícil, de manera que tienden a difuminar los gradientes en las cantidades que describen al plasma.

La segunda problemática es que de no atender esta difuminación, *ciertas estructuras se pierden en las simulaciones*.

### 3. El uso apropiado de recursos computacionales

Esto no es solo propio del estudio del Sol, sino de las simulaciones en general. Dado que los recursos son limitados, es necesario, por una parte, discriminar cuál es la información relevante con la cual trabajar y, por otra, cuál requiere mayor atención.

Un ejemplo de esto sucede al simular la hoja de corriente heliosférica. Esta es una sábana de plasma que sale desde las latitudes ecuatoriales del Sol y se extiende en la heliosfera. Se caracteriza por presentar un cambio de polaridad del campo magnético encima y debajo de ella, lo cual se esquematiza en la Figura 1.2. Evidentemente esta es una estructura localizada que no requiere la totalidad de los recursos numéricos disponibles para realizar la simulación.

Se presenta entonces una tercera problemática: *Cómo administrar adecuadamente los recursos computacionales*.

La estrategia de *Refinamiento adaptativo de mallas* (AMR por sus siglas en inglés), presentado inicialmente para simulaciones hidrodinámicas en los célebres trabajos [Berger and Olinger, 1984, Berger et al., 1989], es un método que optimiza el uso de recursos computacionales en la solución de problemas de valores iniciales que involucren la dinámica de fluidos.

En síntesis, la estrategia AMR consiste en utilizar mayor cantidad de recursos sólo en las regiones donde las funciones matemáticas relativas al problema demanden mayor precisión. Físicamente, la estrategia AMR es una herramienta potente que evoluciona adecuadamente un fluido cuando grandes diferencias en las escalas espaciales y temporales ocurran simultáneamente, es decir, cuando la dinámica del fluido tenga rasgos muy locales.

Existe una gran variedad de códigos numéricos que emplean la estrategia AMR para resolver las ecuaciones MHD. Algunos ejemplos son los siguientes: MPI-AMRVAC [Porth et al., 2014]: Este código está específicamente diseñado para resolver las ecuaciones MHD y Hall MHD, utiliza métodos de volúmenes finitos o de diferencias finitas y también puede manejar la evolución de polvo acoplado a un fluido hidrodinámico. Se cuenta con una segunda [Xia et al., 2018] y tercera versión [Keppens et al., 2023]; PLUTO [Mignone et al., 2007]: Código que se ha utilizado principalmente en simulaciones astrofísicas y que ha ganado atracción en el campo de la física solar

en los últimos años; FLASH [Fryxell et al., 2000]: Un código astrofísico de amplio uso; los códigos AstroBEAR [Cunningham et al., 2009], RAMSES [Teyssier, 2002]; NIRVANA [Ziegler, 2008]; ATHENA [Stone et al., 2008]; ENZO [ENZ, 2019] and BATS-R-US [Tóth et al., 2012] son conocidos por su orientación hacia el cómputo de alto rendimiento y que han sido extensamente utilizados en varias disciplinas científicas, las cuales incluyen a la astrofísica y las simulaciones MHD. Algunos de estos códigos se apoyan en bibliotecas especializadas tales como PARAMESH [MacNeice et al., 2000] y CHOMBO [LBNL, 2019], las cuales proveen motores AMR paralelizados que pueden ser adaptados para resolver problemas de valores iniciales. En el reino de las simulaciones de física solar, códigos notables incluyen AMR-CESE-MHD [Feng et al., 2012], ICARUS [Verbeke et al., 2022], los cuales pueden utilizar mallas no rectangulares, y SFUMATO [Matsumoto et al., 2019], todos siendo exitosamente utilizados en las simulaciones de viento solar.

La estrategia AMR, cuando es integrada con esquemas de paralelización, significativamente mejora la eficiencia computacional. Sistemas computacionales del estado del arte frecuentemente adoptan una combinación sofisticada de tecnologías. Por ejemplo el uso de OpenMP-MPI, como fue demostrado en el código BHAC GR-MHD [Cielo et al., 2022]. También, la creciente adopción de unidades de procesamiento gráfico amplificará la capacidad de procesar enormes conjuntos de datos de las simulaciones; un ejemplo notable de esta tendencia se encuentra en el código H-AMR code [Liska et al., 2022].

Aunque la mayoría de estos códigos son de acceso abierto, la complejidad de su estructura modular y su intrincada arquitectura los hace frecuentemente inaccesibles. Es así que se presenta una **cuarta problemática**: *Los metodos de las simulaciones deben ser accesibles y controlables.*

Como alternativa, el desarrollo de un código original basado en esquemas numéricos estándar, permite a uno tener una herramienta independiente que puede servir como laboratorio teórico que puede corroborar resultados de otras simulaciones y también para implementar soluciones de nuevos problemas que serían difíciles de definir en la disposición de los códigos existentes que, debido a su grado de sofisticación, proveen ajustes simples.

Para abordar las cuatro problemáticas planteadas anteriormente, se ha creado el código numérico CAFE-AMR [Ochoa-Armenta and Guzmán, 2023] el cual es presentado en esta tesis. El código CAFE-AMR, construido desde cero, utiliza métodos estándar de la dinámica de fluidos computacional, incluyendo discretizaciones de volúmenes finitos, fórmulas de flujo HLL y Roe, reconstructores lineales e integradores temporales de segundo orden.

Esta tesis está dividida en dos partes.

La primera parte consiste en elaborar sobre el núcleo metodológico del código CAFE-AMR y su validación. Los capítulos que comprenden esta parte son:

- Capítulo 2: En este capítulo se enuncian las ecuaciones de la aproximación MHD y se desarrolla sobre ellas.
- Capítulo 3: En este capítulo se describen los métodos numéricos utilizados para construir las soluciones a las ecuaciones MHD.
- Capítulo 4: En este capítulo se describe el núcleo de la implementación de la estrategia de refinamiento en el código CAFE-AMR.

- Capítulo 5: En este capítulo se muestran pruebas numéricas estándar que permiten evaluar su rendimiento y contrastar con otros códigos.

La segunda parte de esta tesis consiste en simulaciones numéricas que corresponden a escenarios de física solar. Los capítulos que comprenden esta parte son:

- Capítulo 6: En este capítulo se comenta sobre las inestabilidades, siendo estas ubicuas en las simulaciones solares. Se presentan 2 simulaciones de inestabilidades en regímenes no lineales.
- Capítulo 7: En este capítulo se estudia sobre las fulguraciones solares eruptivas y se muestran simulaciones referentes a las hojas de corriente, terminando con el modelo de una fulguración CSHKP.
- Capítulo 8: En este capítulo se desarrolla sobre los vientos solares. Se presentan dos simulaciones; en la primera se simula un viento solar hidrodinámico, el cual interactúa después con un modelo no magnético de una eyección de masa coronal; después, se simula un viento solar magnetizado por un dipolo magnético centrado en el Sol y que rota con éste.



## Capítulo 2

# Magnetohidrodinámica

### Resumen

En este capítulo se exponen las ecuaciones de la MHD. En la introducción se delimita el enfoque de la MHD en la descripción de plasmas. En la sección 2.2 se expone el comportamiento conservativo de estas ecuaciones. En la sección 2.3 se manifiestan explícitamente las ecuaciones de la MHD, sus deducciones a partir de argumentos macroscópicos y algunos datos importantes. En la sección 2.4 se enuncia el teorema del campo congelado y la implicación que tiene para la descripción de los tubos de flujo. En la sección 2.5 se hace un análisis perturbativo de las ecuaciones MHD y se encuentran los principales modos de propagación para las ecuaciones MHD, encontrando las velocidades alfvénicas y magnetosónicas, para después describir los tipos de choques MHD; siendo esta información relevante para los métodos numéricos que resuelven estas ecuaciones.

### 2.1. Introducción

Para la descripción teórica de un plasma existen diversos acercamientos, con diferentes aproximaciones y cada uno modelando circunstancias distintas. Aún con esta variabilidad, puesto que un plasma consiste de un gran número de partículas interactuantes, se puede otorgar una descripción macroscópica utilizando un enfoque estadístico, del cual se derivan dos principales modelos teóricos.

En circunstancias en las cuales las colisiones entre las partículas del plasma son frecuentes, se tienen descripciones separadas para las diversas especies de partículas que constituyen al plasma, se obtienen de esta manera, por ejemplo, descripciones para los electrones, iones y partículas neutras. A estos acercamientos se les conoce como multi-fluido. Análisis potentes pueden realizarse desde esta perspectiva para fenómenos ondulatorios de alta frecuencia y aspectos de los plasmas de escala microscópica.

Otro acercamiento derivado de éste anterior consiste en tratar todo el plasma como un sólo fluido conductor el cual tiene variables macroscópicas que describen simultáneamente las especies de partículas del plasma. Esta teoría simplificada puede aplicarse apropiadamente al estudio de fenómenos de baja frecuencia en fluidos altamente conductores inmersos en campos magnéticos y

también en el caso de que las colisiones entre partículas es poco frecuente. A esta teoría se le conoce como la aproximación MHD.

Las ecuaciones que describen la MHD fueron planteadas a partir de la mecánica de fluidos para poder considerar apropiadamente las fuerzas de Lorentz. Para realizar esto fue necesario especificar la corriente eléctrica como una función del campo eléctrico aplicado. Esto fue logrado a partir de la ley de Ohm, la cual es utilizada para describir medios conductores.

Este bagaje determina dos aspectos para los sistemas descritos por la MHD, es decir para los plasmas, y en particular para el Sol. El primer aspecto tiene que ver con que las ecuaciones que describen al fluido se pueden presentar como relaciones de balance de flujos las cuales a su vez pueden expresar leyes de conservación, por ejemplo la continuidad de masa y de la energía; el segundo aspecto tiene que ver con la conductividad eléctrica.

Por definición los plasmas son cuasi neutros, es decir que la densidad de carga ( $\rho_q$ ) es despreciable a escalas macroscópicas; y esta característica ya está presente en el desarrollo de la MHD dando como resultado que el campo eléctrico esté implícito en términos del campo magnético y de la velocidad en el marco de referencia del fluido.

En este capítulo, se presentan las ecuaciones de la MHD. En primer lugar, se discutirá el carácter conservativo de estas ecuaciones. Después, se presentarán los argumentos macroscópicos que sustentan su formulación. Por último, se discutirá el teorema del campo congelado y los fenómenos ondulatorios que se modelan con estas ecuaciones.

## 2.2. Leyes de conservación

Las ecuaciones de la MHD se pueden expresar en términos de leyes de conservación las cuales operan de la siguiente manera.

Considérese una función escalar  $\Phi(x, y, z, t)$ . La razón de cambio de  $\Phi$  según un observador que se mueve con la velocidad  $\mathbf{v}$  del fluido, es decir la derivada total con respecto al tiempo, está dada por

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi; \quad (2.1)$$

ahora, sea  $\Psi$  una función definida como

$$\Psi(t) = \iiint_V \Phi(x, y, z, t) dx^3,$$

tal que

$$\frac{D\Psi(t)}{Dt} = 0,$$

donde el volumen  $V$  está definido como el interior de una superficie suave a trozos  $\partial V$  que se mueve con el material en consideración y  $\Phi$  representa una densidad de cierta cantidad. Evidentemente se tiene que dentro de este volumen, la cantidad  $\Psi$  se conserva.

Se tiene entonces que

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial\Phi}{\partial t} dx^3 + \iint_{\partial V} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \Phi\mathbf{v}) da = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario normal a la superficie  $da$  y que apunta hacia afuera de  $V$ . Nótese que si  $\Phi$  y  $\Psi$  fuesen campos vectoriales, la ecuación seguiría siendo la misma<sup>1</sup>.

Usando el teorema de la divergencia de Gauss, se cambia la segunda integral de la parte izquierda de (2.2). Se tiene entonces que

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \right) dx^3 = 0. \quad (2.3)$$

Dado que esto es para un volumen  $V$  arbitrario, entonces se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.4)$$

Dando así la *estructura conservativa* de las ecuaciones en el marco de referencia del fluido.

### 2.3. Ecuaciones de la MHD

Las ecuaciones de la MHD describen un plasma como un fluido compresible que interactúa con un campo electromagnético externo. Matemáticamente, estas ecuaciones describen la evolución temporal de las densidades de ciertas variables macroscópicas que describen al plasma, es decir la densidad  $\rho$ ; la densidad momento  $\rho \mathbf{v}$ ; la densidad de energía total  $E$ ; y el campo magnético  $\mathbf{B}$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left( P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( E + P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v}] = \nabla \times [\eta \cdot \mathbf{J}], \quad (2.8)$$

donde  $P$  es la presión hidrodinámica,  $\eta$  es el tensor de resistividad y  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente eléctrica. Estas ecuaciones tienen el nombre de *Conservación de masa* ec. (2.5), *Conservación de momento* ec. (2.6), *Conservación de la densidad energía total* ec. (2.7) y la *Inducción magnética* ec. (2.8).

El sistema de ecuaciones (2.5-2.8) puede obtenerse de los momentos de la ecuación de Boltzmann; y por lo tanto se necesita una cerradura expresada con una ecuación de estado. Desde la atmósfera baja del Sol hasta la heliosfera interplanetaria, el plasma está lo suficientemente *rarificado* de manera que se puede utilizar la ecuación de gas ideal:

$$\epsilon = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (2.9)$$

donde  $\gamma$  es el índice adiabático que tiene un valor, salvo que se exprese lo contrario, de 5/3 y  $\epsilon$  es la densidad de energía interna. Por otra parte, de las ecuaciones de Maxwell para la electrodinámica

<sup>1</sup>En este caso el producto  $\Phi \mathbf{v}$  se referiría al producto tensorial

se tiene la constricción solenoidal del campo magnético, esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.10)$$

A continuación se presenta una descripción macroscópica de las ecuaciones MHD.

### 2.3.1. Ley de inducción magnética

En un plasma se pueden producir corrientes eléctricas que están descritas por la *Ley de Ohm*:

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot [\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la corriente eléctrica,  $\mathbf{B}$  el campo magnético,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  el campo eléctrico y  $\sigma$  el tensor de conductividad.

Debido a que el plasma es cuasi-neutro, es decir que la densidad de carga  $\rho_q$  es despreciable a las escalas características del sistema <sup>2</sup>, no es posible obtener el campo eléctrico partiendo de la ley de Gauss, ya que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_q,$$

así que para obtener el campo eléctrico, éste se despeja de (2.11)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \eta \cdot \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.12)$$

donde  $\eta = \sigma^{-1}$  es el tensor de resistividad.

Así, de la ley de inducción de Faraday,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.13)$$

se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [\eta \cdot \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (2.14)$$

Es posible reescribir (2.14) en forma conservativa utilizando el producto tensorial ( $\otimes$ ), de manera que se obtenga *la ecuación de la inducción* de las ecuaciones MHD, expresada en la ecuación (2.8).

Es importante mencionar que la Ley de Ohm utilizada desprecia muchos tipos de fenómenos asociados con el flujo y la temperatura de los electrones en un plasma, la justificación principal al porqué de este criterio es que la masa de los iones es mucho mayor que la de los electrones (vease [Bittencourt, 2004]).

La ecuación (2.8) define dos regímenes en los que se analiza un plasma desde la perspectiva MHD; estos son:

- MHD ideal: En este caso, la contribución de la resistividad del plasma es despreciable ( $\eta \rightarrow 0$ ) y se habla de un plasma *completamente ionizado*; es decir que la densidad de número de

<sup>2</sup>Con escalas características se hace referencia a las dimensiones espaciales y temporales de los fenómenos a estudiar; por ejemplo en la heliofísica puede hablarse de escalas espaciales de  $10^6$ m para la cromosfera y la corona y unidades astronómicas ( $\sim 10^{11}$ m) para el medio interplanetario

partículas neutras es despreciable. En particular, el estudio de la heliosfera y la corona se considera apto para este tipo de análisis.

- MHD resistiva: En este caso, la contribución de la resistividad no es despreciable y por lo tanto existen procesos de disipación de energía magnética, por ejemplo la disipación óhmica, que convierte la energía magnética en energía calorífica y cinética.

Este tipo de plasmas se asocia con plasmas *parcialmente ionizados* y la resistividad está asociada a que se generan corrientes eléctricas generadas por la pérdida local de la neutralidad causada por colisiones entre partículas cargadas y neutras. Este enfoque es utilizado en el estudio de la cromosfera.

### 2.3.2. Ley de conservación de la masa

La ecuación (2.5) expresa el hecho de que la densidad en un punto incrementa si hay un flujo de masa dentro de la región que la rodea y decrece si hay un flujo hacia afuera.

Para obtener esta ecuación se toma a  $\Psi(t)$  de la ecuación (2.2) como la masa total en un elemento de volumen  $V$  que se mueve con el fluido y a  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  como la densidad de masa  $\rho$ .

Un aspecto interesante de esta ecuación es que en ciertos análisis es conveniente relajar la condición de la compresibilidad, es decir hacer  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , lo cual permite encontrar soluciones analíticas, por ejemplo la inestabilidad de desgarre presentada en [Furth et al., 1963].

### 2.3.3. Ley de conservación del momento

La ecuación de la ley de conservación del momento es similar al caso hidrodinámico, al que se le añaden los efectos de la fuerza electromagnética. Esto es que aunado a las fuerzas causadas por las diferencias en presión, se sumen las componentes electromagnéticas.

Macroscópicamente esto se obtiene de la segunda *ley de Newton*, que queda expresada para los elementos de volumen  $V$  como

$$\frac{d\rho\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \cdot [\mathbf{P}] + \rho_q\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.15)$$

Debido a que el plasma es cuasi-neutro,  $\rho_q = 0$ . Utilizando la *ley de Ampère*,  $\mathbf{J} = \mu_0^{-1}\nabla \times \mathbf{B}$ , y reescalando las unidades de manera que  $\mu_0 = 1$ , es posible reescribir la ecuación (2.15) como

$$\frac{d\rho\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \cdot [\mathbf{P}] + [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}, \quad (2.16)$$

el segundo término de la derecha puede reescribirse en términos de la identidad vectorial siguiente:

$$[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \nabla \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right)$$

de manera que

$$[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \left( \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}^2}{2}\mathbf{I} \right) - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B},$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

Con todo, desarrollando la derivada total, se obtiene la ecuación de conservación de momento

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \left( P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}, \quad (2.17)$$

y, puesto que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , se llega a la ecuación (2.6).

Puede observarse en esta ecuación que el campo magnético tiene un efecto que opera matemáticamente similar a la presión  $P$  que corresponde a la presión magnética. En este sentido, surge una cantidad relevante para caracterizar las fuerzas del plasma, la cual se le llama *beta del plasma* que está definida como

$$\beta = \frac{2P}{\mathbf{B}^2}, \quad (2.18)$$

donde se utiliza un sistema de unidades tal que la susceptibilidad magnética es  $\mu_0 = 1$ . La beta del plasma permite determinar qué tipo de presión domina en la dinámica del plasma.

### 2.3.4. Conservación de la energía

La conservación de la densidad de energía en las ecuaciones MHD se obtiene al analizar el comportamiento del trabajo  $W$  por unidad de tiempo. Este análisis temporal comienza haciendo un producto escalar con la velocidad ( $\cdot \mathbf{v}$ ) con todos los términos de la ecuación (2.6). Despreciando fuerzas externas y efectos de viscosidad,  $W$  está producido por la presión hidrostática y por la fuerza electromagnética. Puesto que el campo magnético no produce trabajo, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \iiint_V \rho_q \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v} dx^3 - \iint_{\partial V} P(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da \\ &= \iiint_V \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dx^3 - \iint_{\partial V} P(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se puede reescribir la primer integral de la parte derecha de la igualdad utilizando la ley de Ampère, ley de Faraday, ley de Ohm y una identidad vectorial, pues

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot ((\eta \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot [(\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{B}^2}{2} + \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \mathbf{v}] - \nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por otra parte, despreciando los flujo de calor, el trabajo por unidad de tiempo está dado como la densidad energía total  $E$  por unidad de tiempo menos la presión magnética (que no realiza trabajo), por lo tanto

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \frac{d}{dt} \left( E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) dx^3 \quad (2.21)$$

Desarrollando la derivada total para  $E - B^2/2$ , se tiene que

$$\iiint_V \frac{d}{dt} \left( E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) dx^3 = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) dx^3 + \iint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} da. \quad (2.22)$$

Sustituyendo (2.22) y (2.20) en (2.19) se obtiene

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left( E - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) dx^3 &= \iiint_V \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{B}^2}{2} + \nabla \cdot \left[ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \mathbf{v} \right] - \nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \right] dx^3 \\ &\quad - \iint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( E + P - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} da, \end{aligned}$$

que usando el teorema de la divergencia de Gauss y agrupando los términos correspondientes resulta en la ecuación (2.7) en su forma integral:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( E + P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \right] \right) dx^3 = 0. \quad (2.23)$$

## 2.4. Teorema del campo congelado y los tubos de flujo

Para plasmas en los cuales la resistividad es despreciable,  $\eta = 0$ , se tiene que la ecuación (2.8) se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.24)$$

Luego, si se considera una curva cerrada que se mueve con el plasma  $C$ , que acota la superficie  $S$ ; en un tiempo  $dt$  un segmento infinitesimal  $d\mathbf{l}$  de  $C$  barre un elemento de área dado por  $\mathbf{v} \times d\mathbf{l}dt$ . Y la tasa de cambio del flujo magnético a través de  $C$  es

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \int_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l}, \quad (2.25)$$

donde  $d\mathbf{A}$  es un elemento diferencial de área. Al usar que  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  y aplicando el teorema de Stokes al segundo término se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.26)$$

lo cual implica, usando la ecuación (2.24), que

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (2.27)$$

Este es el resultado que se conoce como *teorema del campo congelado* (frozen field theorem) el cual dice que el flujo de campo magnético delimitado en una curva cerrada que se mueve con el plasma es constante.

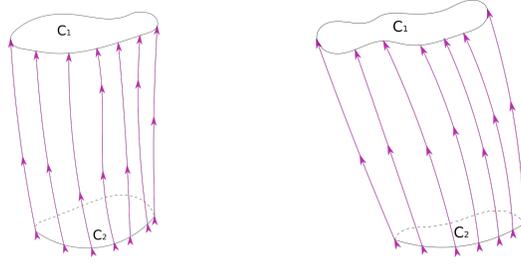


Figura 2.1: Tubos de flujo magnético a tiempos  $t$  (izquierda) y  $t'$  (derecha)

Este teorema tiene una consecuencia principal. Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas cerradas conectadas por líneas de campo magnético a tiempo  $t$ , como se muestra en la Figura 2.1 (izquierda). Las líneas de campo magnético forman un tubo de flujo como flujo total magnético. Mientras el fluido se mueve las curvas  $C_1$  y  $C_2$  se deforman pero el flujo de campo magnético se conserva en las superficies que forman el tubo en un tiempo posterior  $t'$  (derecha). Al tomar entonces  $C_1$  y  $C_2$  infinitesimales, el tubo de flujo se convierte en la línea de campo magnético, lo cual justifica que las líneas de campo magnético estén *congeladas* con el fluido.

## 2.5. Análisis perturbativo de las ecuaciones MHD

El análisis perturbativo en la MHD permite linealizar las ecuaciones y encontrar los modos de propagación; en el caso hidrodinámico este método permite, por ejemplo, definir la velocidad del sonido. En las ecuaciones MHD se encuentran los modos de propagación, de los cuales 5 son necesarios para los métodos numéricos usados en este trabajo.

En esta sección las perturbaciones que se estudian son del tipo onda; éstas son de una longitud mucho mayor que las longitudes características del plasma y, por lo tanto el número de onda es pequeño.

### 2.5.1. Ondas magnetohidrodinámicas

Se considerarán las ondas de pequeña amplitud en un fluido MHD ideal ( $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ). Para este caso se asumirá que  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\rho$  y  $P$  están compuestas por una cantidad homogénea espacialmente uniforme e independiente del tiempo más una perturbación pequeña de primer orden, esto es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1,$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1,$$

$$P = P_0 + P_1.$$

Usando el sistema de referencia en el cual  $\mathbf{v}_0 = 0$  entonces se tiene que, a primer orden, las ecuaciones MHD (2.5-2.8) son

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (2.28)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 - \nabla P_1, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0), \quad (2.30)$$

y la presión está dada por

$$P_1 = \gamma \left( \frac{P_0}{\rho_0} \right) \rho_1. \quad (2.31)$$

Es conveniente descomponer las soluciones a las ecuaciones (2.28-2.30) utilizando la *transformada de Fourier*.

La descomposición de una función arbitraria  $f(\mathbf{r}, t)$ , utilizando la transformada de Fourier está dada por

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 k d\omega. \quad (2.32)$$

Por otra parte, aplicando los operadores  $\frac{\partial}{\partial t}$  y  $\nabla$  a  $f$  se obtiene

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \tilde{f} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 k d\omega,$$

$$\nabla f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (i\mathbf{k}) \tilde{f} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d^3 k d\omega,$$

es así que hay una transformación para los operadores diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega \\ \nabla &\rightarrow i\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

y de esta manera es posible transformar una ecuación diferencial lineal

$$\mathcal{D}(\nabla, \partial/\partial t) f = 0,$$

en una matriz aplicada a  $\tilde{f}$

$$\tilde{\mathcal{D}}(i\mathbf{k}, i\omega) \tilde{f} = 0.$$

Esta forma de la ecuación diferencial nos revela que para tener una solución no trivial, se debe satisfacer que

$$\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (2.34)$$

que se conoce como la *relación de dispersión*, ésta relación de dispersión para muchos casos tiene raíces discretas para  $\omega$ , representadas por  $\omega_\alpha$ , con  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ . Estas raíces representan los *modos normales de oscilación* de las ondas presentes. Con excepción de casos degenerados, el número de modos normales es igual al orden de la ecuación diferencial.

En el caso de las ecuaciones (2.29-2.30) el objetivo es obtener sus correspondientes relaciones de dispersión y los modos normales de oscilación definirán el tipo de onda presente. Además se

podrá decir algo con respecto a la propagación de las ondas con respecto a las líneas de campo magnético.

Las ecuaciones resultantes de aplicar la transformada de Fourier son

$$-i\omega\tilde{\rho} + i\rho_0\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (2.35)$$

$$-i\omega\rho_0\tilde{\mathbf{v}} = i(\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}_0 - i\mathbf{k}\tilde{P}, \quad (2.36)$$

$$-i\omega\tilde{\mathbf{B}} = i\mathbf{k} \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}}_0), \quad (2.37)$$

$$\tilde{P} = V_s^2\tilde{\rho}, \quad (2.38)$$

donde  $V_s^2 = \gamma \left( \frac{P_0}{\rho_0} \right)$  se define como la velocidad del sonido y donde se ha dejado de usar un subíndice para describir la perturbación a primer orden.

Utilizando (2.35) para eliminar  $\tilde{\rho}$  de (2.38) se obtiene una ecuación para la perturbación de la presión a primer orden

$$\tilde{P} = V_s^2 \frac{\rho_0}{\omega} \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (2.39)$$

La ecuación (2.39) es útil para eliminar  $\tilde{P}$  de la ecuación (2.36), es así que, multiplicando por  $i\omega/\rho_0$  se obtiene

$$\omega^2\tilde{\mathbf{v}} = \frac{-\omega}{\rho_0}(\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}) \times \tilde{\mathbf{B}}_0 + V_s^2\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}), \quad (2.40)$$

y finalmente se puede eliminar la perturbación del campo magnético  $\tilde{\mathbf{B}}$  usando (2.37), que resulta en

$$\omega^2\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho_0} \{ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}_0)] \} \times \mathbf{B}_0 + V_s^2\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}). \quad (2.41)$$

Sin pérdida de generalidad, se escogerán coordenadas en las cuales

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$$

$$\mathbf{k} = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta).$$

Desarrollando (2.41) se obtiene

$$v_p^2 \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \\ \tilde{v}_z \end{bmatrix} = V_A^2 \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \cos^2 \theta \\ 0 \end{bmatrix} + V_s^2 \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \sin^2 \theta + \tilde{v}_z \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ \tilde{v}_x \sin \theta \cos \theta + \tilde{v}_z \cos^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

donde la cantidad

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0}},$$

tiene unidades de velocidad (recordando que se está considerando una escala en la cual  $\mu_0 = 1$ ) y se le conoce como **velocidad de Alfvén**. A la cantidad  $v_p = \omega/k$  se le conoce como *velocidad fase* y es la que describe la velocidad con la que se propaga una onda con frecuencia  $\omega$  y número de onda

*k.*

Escribiendo la ecuación (2.42) en forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_p^2 - V_s^2 \sin^2 \theta - V_A^2 & 0 & -V_s^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & v_p^2 - V_A^2 \cos^2 \theta & 0 \\ -V_s^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & v_p^2 - V_s^2 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \\ \tilde{v}_z \end{bmatrix} = 0, \quad (2.43)$$

se entiende que (2.43) tiene solución no trivial para  $\tilde{v}$  si el determinante de la matriz es distinto de cero, lo cual implica una relación de dispersión:

$$\tilde{D}(k, \omega) = (v_p^2 - V_A^2 \cos^2 \theta)[v_p^4 - v_p^2(V_A^2 + V_s^2) + V_A^2 V_s^2 \cos^2 \theta] = 0, \quad (2.44)$$

que tiene tres raíces

$$v_p^2 = \frac{1}{2}(V_A^2 + V_s^2) - \frac{1}{2}[(V_A^2 - V_s^2)^2 + 4V_A^2 V_s^2 \sin^2 \theta]^{1/2}, \quad (2.45)$$

$$v_p^2 = V_A^2 \cos^2 \theta, \quad (2.46)$$

$$v_p^2 = \frac{1}{2}(V_A^2 + V_s^2) + \frac{1}{2}[(V_A^2 - V_s^2)^2 + 4V_A^2 V_s^2 \sin^2 \theta]^{1/2}. \quad (2.47)$$

La raíz (2.45) es el modo normal de oscilación de la onda que tiene por nombre **magnetosónica lenta**, (2.47) es el modo de la **magnetosónica rápida** y (2.46) es el **modo transversal de Alfvén** (también conocido como modo de Alfvén de corte).

En el caso en el que la perturbación tenga una propagación perpendicular al campo magnético, es decir,  $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$  ( $\cos \theta = 0$ ), se obtienen las velocidades características para los métodos numéricos utilizados en este trabajo.

### 2.5.2. Choques MHD

Al igual que las ondas sonoras en medios no magnétizados, los tres tipos de modos de propagación pueden generar choques. Siguiendo el análisis presentado en [Priest and Forbes, 2007] se muestra el análisis de las condiciones de discontinuidad en los choques. Primero se describirán los choques perpendiculares a la velocidad de propagación y después los que tienen una dirección oblicua.

#### Choques perpendiculares

Considerese un choque perpendicular en el cual  $\mathbf{B}$  es paralelo al frente de choque y  $\mathbf{v}$  es normal a este. Las variables delante y detrás del choque se etiquetan con los subíndices 1 y 2 respectivamente, como se esquematiza en la Figura 2.2. La estructura conservativa de las ecuaciones MHD da unas relaciones de salto para la masa, momento, energía y flujo magnético a través del frente de choque, éstas son

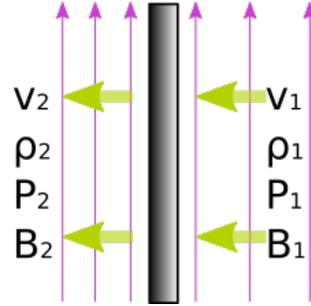


Figura 2.2: Esquemmatización de un choque perpendicular. El frente de choque está representado por el rectángulo sombreado. Las líneas de campo magnético son paralelas al frente de choque mientras que la velocidad es perpendicular a este. La región que no ha sido barrida por el frente de choque se le etiqueta con el número 2, mientras que la región que ya fue barrida se le etiqueta con el número 1, como lo indican los subíndices para los valores de las cantidades del plasma.

$$\begin{aligned}
 \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 \\
 P_1 + \rho_1 v_1^2 + \frac{B_1^2}{2} &= P_2 + \rho_2 v_2^2 + \frac{B_2^2}{2} \\
 \left(P_1 + \frac{B_1^2}{2}\right) v_1 + \left(\rho_1 e_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \frac{B_1^2}{2}\right) v_1 &= \\
 \left(P_2 + \frac{B_2^2}{2}\right) v_2 + \left(\rho_2 e_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \frac{B_2^2}{2}\right) v_2 & \\
 B_1 v_1 &= B_2 v_2,
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde  $e$  es la energía interna. Las ecuaciones (2.48) implican que

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{X}, \quad \frac{B_2}{B_1} = X, \quad \frac{P_2}{P_1} = \gamma \bar{M}_1^2 \left(1 - \frac{1}{X}\right) - \frac{1-X^2}{\beta_1},$$

donde  $\beta_1 = 2P_1/B_1^2$ ,  $\bar{M}_1 = v_1/c_{s1}$ ,  $c_{s1} = \sqrt{\gamma P_1/\rho_1}$  y  $X = \rho_2/\rho_1$  es la razón entre las densidades, la cual es la solución positiva a

$$2(2 - \gamma)X^2 + \left[2\beta_1 + (\gamma - 1)\beta_1 \bar{M}_1^2 + 2\right] \gamma X \gamma (\gamma + 1) \beta_1 \bar{M}_1^2 = 0 \tag{2.49}$$

Las consecuencias de estas relaciones de brinco son:

1. La ecuación (2.49) tiene sólo una solución real puesto que  $1 < \gamma < 2$ .
2. El efecto del campo magnético es reducir  $X$  debajo de su valor hidrodinámico.
3. El choque es compresivo si  $X \geq 1$ .
4. La velocidad del choque ( $v_1$ ) debe exceder la velocidad magnetosónica rápida  $\sqrt{c_{s1}^2 + v_{A1}^2}$  delante del choque; donde  $v_{A1}$  es la velocidad alfvénica.

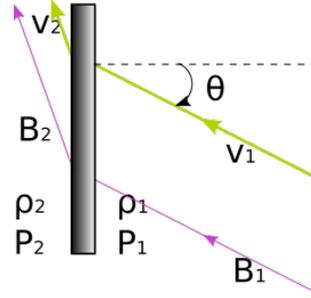


Figura 2.3: Esquemización de un choque oblicuo. El frente de choque está representado por el rectángulo sombreado. La región que no ha sido barrida por el frente de choque se le etiqueta con el número 2, mientras que la región que ya fue barrida se le etiqueta con el número 1, como lo indican los subíndices para los valores de las cantidades del plasma. La velocidad en la región 1 y la normal del frente de choque tienen un ángulo de intersección  $\theta$ .

5. La compresión magnética está limitada al rango

$$1 < B_1/B_2 < \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1},$$

donde para  $\gamma = 5/3$  la cota superior es 4

### Choques oblicuos

Para este caso se fija el sistema de referencia con los ejes moviéndose con el choque y asumiendo  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{B}$  se encuentran en el plano  $x, y$ , como se esquematiza en la Figura 2.3. Las condiciones de brinco en este sistema son

$$\begin{aligned}
 \rho_1 v_{x1} &= \rho_2 v_{x2} \\
 P_1 + \rho_1 v_{x1}^2 + \frac{B_1^2}{2} + \frac{B_{1y}^2}{2} &= P_2 + \rho_2 v_{x2}^2 + \frac{B_2^2}{2} + \frac{B_{2y}^2}{2} \\
 \rho_1 v_{1x} v_{1y} - B_{1x} B_{1y} &= \rho_2 v_{2x} v_{2y} - B_{2x} B_{2y} \\
 \left( P_1 + \frac{B_1^2}{2} \right) v_{1x} - B_{1x} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + \left( \rho_1 e_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \frac{B_1^2}{2} \right) v_{1x} &= \\
 \left( P_2 + \frac{B_2^2}{2} \right) v_{2x} - B_{2x} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{v}_2) + \left( \rho_2 e_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \frac{B_2^2}{2} \right) v_{2x} & \\
 B_{2x} &= B_{1x} \\
 B_{1x} v_{1x} &= B_{2x} v_{2x}, \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

Escogiendo los ejes del sistema de coordenadas para que se desplacen paralelamente al choque a tal velocidad que

$$v_{1y} = v_{1x} \frac{B_{1y}}{B_{1x}},$$

de tal manera que  $\mathbf{v}$  es paralelo a  $\mathbf{B}$ , entonces las ecuaciones se simplifican bastante y pueden ser

resueltas, dando

$$\frac{v_{2x}}{v_{1x}} = \frac{1}{X}, \quad \frac{v_{2y}}{v_{1y}} = \frac{v_1^2 - v_{A1}^2}{v_1^2 - Xv_{A1}^2}, \quad \frac{B_{2x}}{B_{1x}} = 1,$$

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \frac{(v_1^2 - v_{A1}^2)X}{v_1^2 - Xv_{A1}^2}, \quad \frac{P_2}{P_1} = X + \frac{(\gamma-1)Xv_1^2}{2c_{s1}^2} \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right),$$

donde

$$X = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad c_{s1}^2 = \frac{\gamma P_1}{\rho_1}, \quad v_{A1}^2 = \frac{B_1^2}{\rho_1}, \quad \frac{v_{1x}}{v_1} = \cos \theta,$$

y la componente  $X$  es una solución a

$$\begin{aligned} & \left(v_1^2 - Xv_{A1}^2\right)^2 \left(Xc_{s1}^2 + \frac{1}{2}v_1^2 \cos^2 \theta [X(\gamma-1) - (\gamma+1)]\right) \\ & + \frac{1}{2}v_{A1}^2 v_1^2 \sin^2 \theta X \left([\gamma + X(2-\gamma)]v_1^2 - Xv_{A1}^2 [(\gamma+1) - X(\gamma-1)]\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

La ecuación (2.51) tiene tres soluciones, las cuales dan el **choque de modo lento**, el **choque de modo rápido** y la **onda de alfvén**. Los choques rápido y lento tienen, entre otras, las siguientes propiedades

1. Son compresivos con  $X > 1$  y  $P_2 > P_1$ .
2. Preservan el signo de  $B_y$  de manera que  $B_{2y}/B_{1y} > 0$ .
3. Para el choque de modo lento  $B_2 < B_1$ , así que **B refracta hacia la normal del choque** y  $B$  decrece con el paso del choque.
4. Para el choque de modo rápido  $B_2 > B_1$ , así que **B refracta lejos de la normal del choque** y  $B$  crece con el paso del choque.
5. En el límite  $B_x \rightarrow 0$ , el choque de modo rápido se convierte en un choque perpendicular, mientras que el choque de modo lento se convierte en una *discontinuidad tangencial*, para la cual  $v_x$  y  $B_x$  son despreciables y hay brincos arbitrarios en  $B_y$  y  $v_y$ , sujetos sólo a un balance total de la presión  $[P_2 + B_2^2/2 = P_1 + B_1^2/2]$ .

En el límite cuando  $v_1 = v_{A1}$ , con  $X \neq 1$ , se tiene que  $B_{2y}=0$  y se tiene entonces lo que se conoce como un **choque de desconexión** (switch-off en inglés).

## Capítulo 3

# Métodos numéricos

### Resumen

En este capítulo se describe y expande sobre la aplicación de los métodos de volúmenes finitos en la construcción de la solución de las ecuaciones MHD.

En la sección 3.2 se explica la discretización de un problema, el funcionamiento del método Godunov para aproximar las soluciones y su aplicación en 3 dimensiones. En la sección 3.3 se muestra la aplicación del método Godunov para la MHD a través de las tres maneras de construir flujos numéricos, esto es con los resolvedores de Riemann aproximados HLLC, HLLC, y los flujos numéricos tipo Roe; además se describe la implementación de la limpieza hiperbólica de la divergencia, la cual se utiliza para mantener la constricción solenoidal del campo magnético. En la sección 3.4 se describen las estrategias de implementación de las condiciones de frontera. Finalmente, en la sección 3.5 se habla de los métodos TVD que ayudan en la estabilidad de las simulaciones y después se describen las dos estrategias de evolución temporal que se han implementado en este trabajo, por una parte el método de Heun y por otra la integración del método *Corner Transport Upwind*.

### 3.1. Introducción

Las ecuaciones de la MHD son un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de los plasmas conductores, como el que se encuentra en el Sol. Estas ecuaciones son muy complejas y no pueden ser resueltas analíticamente para la mayoría de los casos de interés. Por lo tanto, se necesitan métodos numéricos para realizar simulaciones computacionales de los sistemas MHD.

Como se vio en el capítulo 2, la MHD expresa la conservación de ciertas cantidades macroscópicas del plasma. Es en este sentido que hay una gran tradición en la aplicación de métodos numéricos conservativos para las simulaciones MHD, incluyendo las que son relativas a nuestro Sol. El paradigma predilecto es el de volúmenes finitos.

En este capítulo, se presenta una introducción a los métodos numéricos utilizados para resolver las ecuaciones de la MHD. El capítulo se divide en tres partes:

1. Métodos de volúmenes finitos: Se presenta una descripción de los métodos aplicados a los

sistemas conservativos.

2. Implementación para la MHD: Se describen aspectos técnicos en la implementación.
3. Evolución temporal: Se discuten los diferentes esquemas de integración temporal y su estabilidad.

Los métodos de volúmenes finitos están íntimamente relacionados con la estrategia de refinamiento adaptativo de mallas, la cual será descrita en el capítulo siguiente.

### 3.2. Volúmenes finitos

El esquema de volúmenes finitos es que se clasifica dentro de los *Métodos Conservativos*, dichos métodos toman de base la forma integral de las leyes de conservación.

Para ilustrar esto, considérese una ley de conservación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Ahora, para encontrar una aproximación de la solución a (3.1), hay que incluir las *soluciones débiles* a esta ecuación. Éstas están definidas como todas las funciones  $u(x, t)$  que satisfacen la forma integral de (3.1), es decir, todas aquellas en las cuales, para cualquier volumen rectangular  $[t_1, t_2] \times [x_1, x_2]$  que esté contenido en el dominio del problema, se satisface que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right] dx dt = 0. \quad (3.2)$$

Distribuyendo y agrupando (3.2), se obtiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx - \left[ \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_1, t)) dt \right], \quad (3.3)$$

se sigue de esta ecuación que

$$\bar{u}(t_2) = \bar{u}(t_1) + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\bar{f}_1 - \bar{f}_2], \quad (3.4)$$

donde  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ ;  $\bar{u}$  es el promedio espacial de la variable  $u$  y  $\bar{f}_1$ ,  $\bar{f}_2$  son el promedio temporal de los flujos en  $x_1$  y en  $x_2$ , respectivamente. Notablemente, las soluciones débiles admiten funciones discontinuas a trozos y esto es fuertemente utilizado en el método.

La forma en la que se plantean los métodos numéricos para resolver el problema (3.1) parte de la ecuación (3.4), como se verá a continuación.

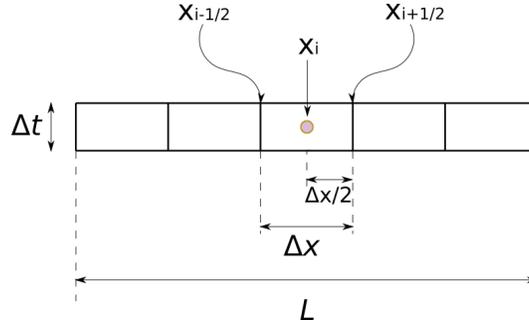


Figura 3.1: Esquematación de la discretización del dominio numérico.

### 3.2.1. Discretización del problema

En el caso del problema unidimensional definido en una región  $L$ , se comienza dividiéndolo en  $N$  zonas, de manera que cada zona tiene tamaño

$$\Delta x = \frac{L}{N},$$

definiendo de esta manera *Celdas* numéricas las cuales se etiquetan con la ubicación del centro, como puede observarse en la Figura 3.1. En este caso la distancia entre celdas es de  $\Delta x$  y entre cada celda se encuentra una frontera ubicada en una distancia  $x_i \pm \Delta x/2$ . Se tiene entonces que para la celda ubicada en  $x_i$  sus fronteras se ubican en  $x_{i\pm 1/2}$ . Ahora bien, la evolución temporal también se discretiza de manera que la separación entre un tiempo  $t^n$  y  $t^{n+1}$  es tal que

$$t^{n+1} - t^n = \Delta t.$$

Con todo esto, aplicando la operación de la ecuación (3.4) al dominio de una celda numérica en un intervalo  $\Delta t$  se tiene

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i+1/2} - f_{i-1/2}], \quad (3.5)$$

donde

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx$$

$$f_{x_{i\pm 1/2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2}, t)) dt.$$

La ecuación (3.5) sirve como estencil del método numérico de volúmenes finitos al definirse aproximaciones a los flujos numéricos en un tiempo  $t^n$ ,

$$f_{i+1/2} = f_{i+1/2}(u_{i-l}^n, u_{i-l+1}^n, \dots, u_{i+r-1}^n, u_{i+r}^n),$$

como funciones que dependan de los valores de  $u$  en las celdas contiguas a la celda en  $x_i$ . A los valores de  $f_{i+1/2}$  se les conoce como *flujos numéricos* y el método numérico recibe el nombre de

volúmenes finitos porque se calculan evoluciones en los “volúmenes” de cada celda.

Ahora, considérese un sistema conservativo de varias cantidades, por ejemplo, un problema del tipo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x),$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{pmatrix}.$$

Es posible aplicar el método de volúmenes finitos siempre y cuando la matriz jacobiana

$$\mathbf{A}^x = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (3.7)$$

tenga eigen-valores reales.

Los eigen-valores  $\lambda^\mu$  de la matriz  $\mathbf{A}^x$  funcionan como velocidades de propagación de los datos iniciales en un método llamado *descomposición característica* del problema (3.6) y a los eigen-valores se les llama también *velocidades características*.

### 3.2.2. Método de Godunov

A continuación se describe el método de Godunov utilizado para construir los flujos numéricos.

Primero hay que encontrar la solución al problema de Riemann de la ecuación (3.6), el cual consiste en tener condiciones iniciales dadas por

$$\mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } x < x_0 \\ \mathbf{U}_R & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$  son constantes y distintos.

Usando la descomposición característica y suponiendo que se tienen  $m$  eigen-valores distintos ordenados de mayor a menor, se tiene que la solución al problema de Riemann está dada por

$$\mathbf{U}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } \frac{x-x_0}{t} < \lambda^0 \\ \mathbf{U}^{*1} & \text{si } \lambda^0 < \frac{x-x_0}{t} < \lambda^1 \\ \mathbf{U}^{*2} & \text{si } \lambda^1 < \frac{x-x_0}{t} < \lambda^2 \\ \vdots & \\ \mathbf{U}_R & \text{si } \lambda^{m-1} < \frac{x-x_0}{t} < \lambda^m, \end{cases}, \quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{U}^{*1}, \dots, \mathbf{U}^{*m-1}$  son estados compuestos por la información entre  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$ , de manera que entre  $\mathbf{U}^{*n}$  y  $\mathbf{U}^{*(n-1)}$  al menos una de las cantidades  $u_m$  tiene un salto, es decir una discontinuidad. Por ejemplo en las ondas de choque sonoras, la presión, densidad y velocidad del gas son discontinuas

detrás y delante del choque.

Con la solución exacta al problema de Riemann se pueden calcular los promedios temporales de  $\mathbf{F}$ , pues es claro que será una combinación de los estados  $\mathbf{F}_L$  y  $\mathbf{F}_R$ .

Con todo, el método Godunov consiste en aproximar los flujos numéricos para las fronteras intercelda resolviendo el problema de Riemann centrado en las fronteras intercelda, es decir,  $x_0 = x_{i-1/2}$  en la ecuación (3.8). Se tienen entonces dos pasos

1. **Reconstruir** los estados  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$  de la frontera intercelda.
2. **Resolver el problema de Riemann** y construir la aproximación numérica de los flujos numéricos intercelda.

Finalmente, es necesario establecer una restricción para que la evolución sea estable, dado el criterio de estabilidad  $CFL$ . En este trabajo se implementa con un parámetro  $CFL$  que vincula  $\Delta t$  con  $\Delta x$  de manera que

$$\Delta t = CFL \times \Delta x; \quad (3.10)$$

y se debe cumplir que

$$CFL \times \lambda^m < 1, \quad (3.11)$$

donde  $\lambda^m$  es la velocidad característica de mayor magnitud posible de la matriz  $\mathbf{A}^x$  evaluado en todo el dominio numérico.

### 3.2.3. Implementación en 3 dimensiones

En el caso de sistemas conservativos tridimensionales en coordenadas cartesianas, se tienen problemas del tipo

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$$

Donde  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  representan los flujos en la dirección  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente y  $\mathbf{S}$  es un término de una fuente de perturbación de las leyes conservativas, que se le llamará simplemente término fuente.

Para aplicar los métodos de volúmenes finitos en tres dimensiones, primero debe discretizarse el dominio espacial en cada dirección. Si el problema original está definido en el volumen  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$ , entonces el problema numérico se debe resolver sobre la malla

$$\begin{aligned} x_i &:= x_{min} + \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x & i &= 1, \dots, N_x \\ y_j &:= y_{min} + \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta y & j &= 1, \dots, N_y \\ z_k &:= z_{min} + \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta z & k &= 1, \dots, N_z, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{x_{max} - x_{min}}{N_x} \\ \Delta y &= \frac{y_{max} - y_{min}}{N_y} \\ \Delta z &= \frac{z_{max} - z_{min}}{N_z}. \end{aligned}$$

Las variables conservativas quedan definidas en cada punto de la malla como

$$\mathbf{U}_{i,j,k}^n := \mathbf{U}(x_i, y_j, z_k, t^n).$$

Al aplicar el método de volúmenes finitos en tres dimensiones, la versión discretizada del problema es

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j,k}^n &+ \Delta t \left[ \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i-1/2,j,k} - \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}) + \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i,j-1/2,k} - \mathbf{G}_{i,j+1/2,k}) \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta z} (\mathbf{H}_{i,j,k-1/2} - \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}) + \mathbf{S}_{i,j,k}^n \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

en donde los flujos numéricos en las direcciones  $x, y, z$  se obtienen de la misma manera que en el caso unidimensional. En este trabajo se utiliza este acercamiento de construcción llamado *operadores no separados* a causa de que los flujos se calculan al mismo tiempo.

En tres dimensiones el criterio de estabilidad  $CFL$  se impone al relacionar el paso temporal con los pasos espaciales según

$$\Delta t = CFL \times \text{mín} [\Delta x, \Delta y, \Delta z] \quad (3.14)$$

con

$$CFL \times \text{máx} [\lambda_x^m, \lambda_y^m, \lambda_z^m] < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (3.15)$$

con  $\lambda_n^m$  el máximo eigen-valor de la matriz jacobiana  $\mathbf{A}^n$  del flujo en dirección  $\hat{n}$ ; evaluado en la totalidad del dominio numérico.

### 3.3. Implementación para la MHD

#### 3.3.1. Resolvedores de Riemann

En los tres resolvedores de Riemann aquí presentados se utilizan las mismas velocidades características, las cuales se muestran en el Apéndice A

#### Aproximación HLLE

Éste es el resolvedor de Riemann más simple de implementar, su nombre viene de sus autores Harten Lax, van Leer y Einfeldt, fue propuesto por primera vez en 1983 y descrito en [Einfeldt et al., 1991]. En este caso sólo se considera el máximo y el mínimo de las velocidades características. El método consiste no en resolver el problema de Riemann sino en aproximar el promedio temporal del flujo numérico en la frontera intercelda.

Los flujos numéricos se construyen según la fórmula

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{HLLE} = \frac{\lambda^+ \mathbf{F}_{L,i-1/2} - \lambda^- \mathbf{F}_{R,i-1/2}}{\lambda^+ - \lambda^-} + \frac{\lambda^+ \lambda^-}{\lambda^+ - \lambda^-} (\mathbf{U}_{R,i-1/2} - \mathbf{U}_{L,i-1/2}), \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{F}_{L,i-1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{L,i-1/2})$ ,  $\mathbf{F}_{R,i-1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{R,i-1/2})$ ; y  $\lambda^+$  y  $\lambda^-$  son el máximo y el mínimo de las velocidades características, respectivamente, calculados tanto en los estados  $L$  como en los estados  $R$ . Las velocidades características se encuentran descritas en el apéndice A

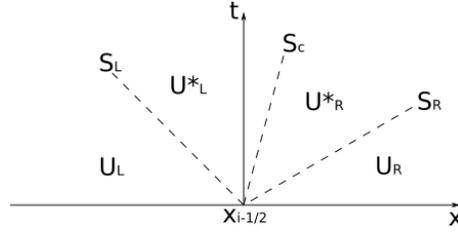


Figura 3.2: Estructura característica de la aproximación HLLC. Además de los estados  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$ , se encuentran los estados  $\mathbf{U}^*_L$  y  $\mathbf{U}^*_R$

### Aproximación HLLC

Similar a los flujos HLLC, solo que considera una tercera velocidad característica intermedia, que en el caso hidrodinámico corresponde a la discontinuidad de contacto.

El método consiste en

1. Calcular las velocidades características máxima  $S_R$  y mínima  $S_L$
2. Construir la velocidad intermedia  $S_c$ .
3. Construir las soluciones el problema de Riemann, es decir las cantidades  $\mathbf{U}^*_L$  y  $\mathbf{U}^*_R$ ; como en la Figura 3.2
4. Calcular el flujo numérico.

La implementación de la aproximación HLLC en la MHD se realizó en [Li, 2005] y fue la versión que se ha implementado en este trabajo. A continuación se muestran los valores de las cantidades necesarias para el método, construyendo en dirección  $\hat{x}$ ; el resto de las direcciones se construyen de manera análoga.

- Para la velocidad intermedia:

$$S_c = \frac{\rho_R v_{xR}(S_R - v_{xR}) - \rho_L v_{xL}(S_L - v_{xL}) + P_L - P_R - B_{xL}^2 + B_{xR}^2}{\rho_L(S_R - v_{xR}) - \rho_L(S_R - v_{xR})} := v^*_{xL} = v^*_{xR} \quad (3.17)$$

- Para las componentes del campo magnético (constantes en las regiones  $^*_L$  y  $^*_R$ )

$$B^*_x = \frac{S_R B_{xR} - S_L B_{xL}}{S_R - S_L} \quad (3.18)$$

$$B^*_y = \frac{\left(S_L - v_{xL} - \frac{B^*_x B_{xL}}{\rho_L(S_L - v_{xL})}\right) B_{yL} - (B^*_x - B_{xL}) v_{yL}}{S_L - S_c - \frac{(B^*_x)^2}{\rho_L(S_L - v_{xL})}} \quad (3.19)$$

$$B^*_z = \frac{\left(S_L - v_{xL} - \frac{B^*_x B_{xL}}{\rho_L(S_L - v_{xL})}\right) B_{zL} - (B^*_x - B_{xL}) v_{zL}}{S_L - S_c - \frac{(B^*_x)^2}{\rho_L(S_L - v_{xL})}} \quad (3.20)$$

- Para la presión hidrodinámica  $P^*$  (constante en las regiones  $*_L$  y  $*_R$ )

$$P^* = \rho_L(S_L - v_{xL})(S_c - v_{xL}) + P_L - B_{xL}^2 + (B^*_{*x})^2 \quad (3.21)$$

- Para el resto de las variables conservativas

$$\begin{aligned} \rho^*_{*L} &= \rho \frac{S_L - v_{xL}}{S_L - S_c}, \\ (\rho v_x)^*_{*L} &= \rho^*_{*L} S_c, \\ (\rho v_y)^*_{*L} &= (\rho_L v_{yL}) \frac{S_L - v_{xL}}{S_L - S_c} - \frac{B^*_{*x} B^*_{*y} - B_{xL} B_{yL}}{S_L - S_c}, \\ (\rho v_z)^*_{*L} &= (\rho_L v_{zL}) \frac{S_L - v_{xL}}{S_L - S_c} - \frac{B^*_{*x} B^*_{*z} - B_{xL} B_{zL}}{S_L - S_c}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$E^*_{*L} = E_L \frac{S_L - v_{xL}}{S_L - S_c} + \frac{(P^* S_c - P_L v_{xL}) - (B^*_{*x} (\mathbf{B}^{HLL E} \cdot \mathbf{u}^{HLL E})) - B_{xL} (\mathbf{B}_L \cdot \mathbf{v}_L)}{S_L - S_c} \quad (3.23)$$

donde, para cierta cantidad  $q$ , se define la aproximación HLL E como

$$q^{HLL E} = \frac{S_R B_{XR} - S_L B_{XL}}{S_R - S_L}$$

y la construcción de los estados  $\mathbf{U}^*_{*R}$  se realiza de manera análoga, haciendo el intercambio en las ecuaciones (3.22-3.23) de  $L \leftarrow R$ .

Con todo, los flujos numéricos HLLC tienen la forma de

$$\mathbf{F}^{HLLC}_{i-1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ \mathbf{F}^*_{*L} = \mathbf{F}_L + S_L (\mathbf{U}^*_{*L} - \mathbf{U}_L) & \text{si } S_L \leq S_c \\ \mathbf{F}^*_{*R} = \mathbf{F}_R + S_R (\mathbf{U}^*_{*R} - \mathbf{U}_R) & \text{si } S_c \leq S_R \\ \mathbf{F}_R & \text{si } S_R \leq 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

### Flujos tipo Roe

El resolvidor de Riemann de Roe busca encontrar la *solución exacta* al problema aproximado de la MHD, a diferencia de los flujos HLL que buscan encontrar la solución aproximada al problema exacto. Por ejemplo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{A}^x(\bar{\mathbf{U}}) \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (3.25)$$

donde la matriz jacobiana  $\mathbf{A}^x$  está evaluada en un estado promedio  $\bar{\mathbf{U}}$  apropiado, de manera que las ecuaciones MHD son lineales.

Siguiendo el esquema propuesto por [Roe, 1981] y que fue extendido en [Cargo and Gallice, 1997]. Se evalúa la matriz jacobiana para los flujos numéricos  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  en los estados

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} &= \sqrt{\rho_L} \sqrt{\rho_R}, \\
\bar{\mathbf{v}} &= (\sqrt{\rho_L} \mathbf{v}_L + \sqrt{\rho_R} \mathbf{v}_R) / (\sqrt{\rho_L} \sqrt{\rho_R}), \\
\bar{H} &= (\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R) / (\sqrt{\rho_L} \sqrt{\rho_R}), \\
\bar{\mathbf{B}} &= (\sqrt{\rho_L} \mathbf{B}_L + \sqrt{\rho_R} \mathbf{B}_R) / (\sqrt{\rho_L} \sqrt{\rho_R})
\end{aligned} \tag{3.26}$$

donde los subíndices  $L$  y  $R$  corresponden a los estados izquierdo y derecho de las fronteras intercelda y  $H$  es la entalpía dada por

$$H = \frac{E + P + \frac{B^2}{2}}{\rho}$$

La construcción de la matriz jacobiana, sus eigen-valores y eigen-vectores se encuentran en el Apéndice A.

Dados los eigen-valores  $\lambda^y$  y las matrices de eigen-vectores  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$ , respectivamente, los flujos tipo Roe son

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{Roe} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}_{L,i-1/2} + \mathbf{F}_{R,i-1/2} + \sum_y a^y |\lambda^y| \mathbf{R}^y \right), \tag{3.27}$$

donde

$$a^n u = \mathbf{L}^y \cdot \delta \mathbf{U}_{i-1/2},$$

$$\delta \mathbf{U}_{i-1/2} = \mathbf{U}_{R,i-1/2} - \mathbf{U}_{L,i-1/2}$$

con  $\mathbf{L}^y$  y  $\mathbf{R}^y$  las filas y las columnas de las matrices izquierda y derecha, respectivamente, correspondientes al eigen-valor  $\lambda^y$

### 3.3.2. Limpieza hiperbólica de la divergencia

Siguiendo lo que se presenta en [Dedner et al., 2002] para la limpieza hiperbólica de la divergencia, se utiliza una función escalar  $\Psi$  que funciona como multiplicador de Lagrange generalizado (GLM por sus siglas en inglés) el cual modifica la ecuaciones de la MHD de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\
\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} + \left( P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{I} \right] &= 0, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( E + P + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v}] + \nabla \Psi &= 0, \\
\frac{\partial \Psi}{\partial t} + C_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{-C_h^2}{C_p^2} \Psi.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Añadir ésta versión modificada de la MHD al esquema numérico advecta  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  con el fluido y lo hace decaer, lo cual es controlado por los coeficientes constantes  $C_h$  y  $C_p$ , respectivamente.

En [Dedner et al., 2002], el sistema (3.28) tiene una extensión en la cual el término de la fuerza de Lorentz se deriva directamente de las ecuaciones GLM. En este caso el sistema se extiende por un término fuente adicional  $\mathbf{S}_{EGLM}$  dado por

$$\mathbf{S}_{EGLM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Ahora bien la evolución temporal de la parte hiperbólica de la limpieza está separada del resto de las variables pues la evolución está definida, por ejemplo en la dirección  $\hat{x}$ , como

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -C_h^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (3.30)$$

El sistema (3.30) tiene solución exacta para el problema de Riemann, de manera que se pueden calcular los flujos numéricos utilizando el valor exacto para  $B_{x,i\pm 1/2}$  y para  $\Psi_{i\pm 1/2}$ ; donde

$$B_{x,i\pm 1/2} = \frac{B_{x,L} + B_{x,R}}{2} - \frac{1}{2C_h}(\Psi_R - \Psi_L),$$

$$\Psi_{i\pm 1/2} = \frac{\Psi_L + \Psi_R}{2} - \frac{C_h}{2}(B_{x,L} + B_{x,R}).$$

Por otra parte, el decaimiento, que sigue la ecuación

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{C_h^2}{C_p^2} \Psi, \quad (3.31)$$

tiene solución exacta, la cual es, dado un paso temporal  $\Delta t$

$$\Psi^{n+1} = \exp\left[-\frac{C_h}{C_p} \Delta t\right] \Psi^n. \quad (3.32)$$

En este trabajo se define el coeficiente  $C_p$  de manera que

$$\frac{C_h}{C_p} < 1.$$

Con base en lo antes expuesto, no es necesario modificar los esquemas para construir las soluciones al problema de Riemann para calcular los flujos numéricos.

### 3.4. Condiciones de Frontera

Numéricamente es necesario definir el comportamiento de la función en las caras del cubo donde se define el dominio del problema. Las condiciones de frontera utilizadas en esta tesis son de flujo saliente, periódicas y fijas en el tiempo.

Para implementar las condiciones de frontera se utilizan las *celdas fantasmas*, que son celdas virtuales que extienden el dominio numérico. Para este trabajo se establecieron 2 celdas fantasmas.

#### Flujo saliente

Este tipo de condiciones evita que el flujo que sale del dominio numérico regrese y contamine la evolución del sistema. Para satisfacer este comportamiento se define el valor de las variables en las fronteras con el mismo valor que sus vecinos próximos, por ejemplo, para las caras  $x = x_{min}$  y  $x = x_{max}$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{Nx+l,j,k}^n &= \mathbf{U}_{Nx,j,k}^n \\ \mathbf{U}_{1-l,j,k}^n &= \mathbf{U}_{1,j,k}^n \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde  $l = 1, 2$ .

#### Condiciones periódicas

Estas condiciones consisten en identificar las caras del dominio para que los flujos fluyan periódicamente. Una analogía que se puede entender es que lo que sale por una cara, entra por la otra. Para las fronteras en  $x = x_{min}$  y  $x = x_{max}$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{Nx+l,j,k}^n &= \mathbf{U}_{1+l-1,j,k}^n \\ \mathbf{U}_{1-l,j,k}^n &= \mathbf{U}_{Nx-l-1,j,k}^n \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde  $l = 1, 2$ .

Este tipo de condiciones de frontera es conveniente en sistemas que presenten cierto tipo de simetría.

#### Condiciones fijas

Útiles para simulaciones en las cuales la información es propagada desde una región de manera constante. Se implementan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{Nx+l,j,k}^n &= \mathbf{U}_{Nx+l,j,k}^0 \\ \mathbf{U}_{1-l,j,k}^n &= \mathbf{U}_{1-l,j,k}^0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde  $l = 1, 2$  y los valores  $\mathbf{U}^0$  se especifican al inicio de la simulación.

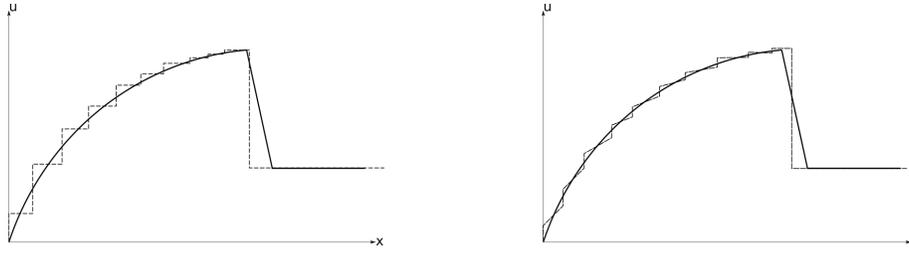


Figura 3.3: Esquemización de la reconstrucción de las variables en las fronteras intercelda con el reconstructor Godunov (izquierda) y Minmod (derecha). La gráfica de la línea continua representa la función exacta y la gráfica de la línea punteada la aproximación.

### 3.5. Evolución temporal

A continuación se presentan los esquemas de evolución temporal utilizados en este trabajo.

#### 3.5.1. Métodos TVD

En los métodos de volúmenes finitos, es importante para la evolución temporal controlar la solución aproximada de manera que no se produzcan, o al menos se controlen, las oscilaciones espurias cerca de regiones de gradientes altos. Para hacer esto se utilizan los métodos de *disminución de la variación total* (TVD por sus siglas en inglés).

En este trabajo se implementan las estrategias TVD teniendo especial cuidado a la hora de construir los estados  $L$  y  $R$  por medio de aproximaciones lineales. Para esto se utilizan los *limitadores de pendientes* que constriñen las aproximaciones por diferencias finitas a las derivadas espaciales en las regiones de gradientes pronunciados, de manera que las aproximaciones preserven las verdaderas discontinuidades.

Por ejemplo, en la Figura 3.3 se presenta una comparación de cómo se reconstruye una función en las fronteras intercelda para cierta discretización usando la reconstrucción constante a trozos Godunov, y la reconstrucción Minmod, que es una aproximación lineal que sí tiene limitador. Puede observarse que ambos esquemas tienen un buen comportamiento en la discontinuidad verdadera de la función, mientras que la reconstrucción Minmod permite tener una mayor aproximación en las partes suaves de la función.

La lista completa de los limitadores de pendiente utilizados en este trabajo se encuentra en el Apéndice B

#### 3.5.2. Implementación del método de Heun

En este trabajo se ha implementado, entre otras estrategias, el método de Heun para los problemas de valores iniciales que dependen del tiempo, con un orden de precisión de  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ .

Las principales ventajas de este método es que preserva la estabilidad dada por las estrategias TVD y que es de fácil implementación. En este trabajo se sigue el esquema:

$$\mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{U}_{i,j,k}^n + \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{n+1} + \Delta t \times \text{Rhs} \left( \bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{n+1} \right) \right), \quad (3.36)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j,k}^n + \Delta t \times \text{Rhs}(\mathbf{U}_{i,j,k}^n) \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned} \text{Rhs}(\mathbf{U}_{i,j,k}^n) &= \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i-1/2,j,k}^n - \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^n) + \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i,j-1/2,k}^n - \mathbf{G}_{i,j+1/2,k}^n), \\ &+ \frac{1}{\Delta z} (\mathbf{H}_{i,j,k-1/2}^n - \mathbf{H}_{i,j,k+1/2}^n) + \mathbf{S}_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (3.38)$$

### 3.5.3. Integración CTU

El método CTU es una extensión del método de discretización tipo Godunov para construir los estados  $L$  y  $R$  manteniendo la estrategia TVD y con un orden de precisión de  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ . Este método utiliza la estructura característica de las ecuaciones en una dimensión para obtener un método integrador que no dependa en la separación de operadores.

Siguiendo el trabajo de [Colella, 1990] para describir el algoritmo se hablará del caso de la ecuación de advección, el cual tiene una estructura característica sencilla.

#### Ecuación de advección

Considérese la ecuación de advección escalar en dos dimensiones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x, y), \quad \varphi = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \mathbf{v} &= (u, v), \quad u, v > 0 \end{aligned}$$

Sea  $\Delta x, \Delta y$  el tamaño de los incrementos espaciales y  $\Delta t$  el incremento temporal. Se asume que se conoce el promedio  $\varphi_{i,j}^n$  definido como

$$\varphi_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_{i,j}} \varphi(\mathbf{x}, t^n) dx,$$

aquí  $C_{i,j}$  es una celda de la malla que discretiza el dominio y cubre un área de tamaño  $\Delta x \Delta y$ .

Un algoritmo para obtener  $\varphi_{i,j}^{n+1}$ , la solución discretizada a (3.39), puede obtenerse al rastrear hacia atrás en el tiempo desde  $t^n + \Delta t$  el conjunto de puntos en  $C_{i,j}$  sobre las características de la ecuación (3.39), de donde se obtiene el dominio  $C'_{i,j}$  como se muestra en la Figura 3.4

Explícitamente se tiene que

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + \frac{u \Delta t}{\Delta x} (\varphi_{i-1/2,j}^{n+1/2} - \varphi_{i+1/2,j}^{n+1/2}) + \frac{v \Delta t}{\Delta y} (\varphi_{i,j-1/2}^{n+1/2} - \varphi_{i,j+1/2}^{n+1/2}), \quad (3.40)$$

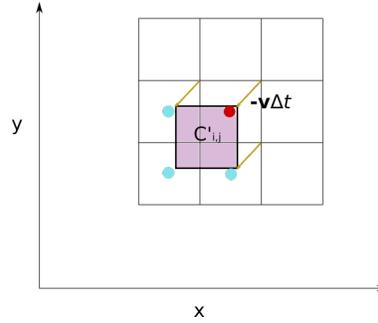


Figura 3.4: La celda  $i, j$  está etiquetada con un punto rojo central. La región  $C'_{i,j}$ , de donde se obtiene la información para la variable  $\varphi$  en  $C_{i,j}$  se encuentra en las celdas contiguas etiquetadas con puntos azules.

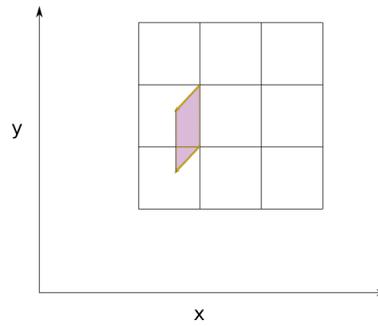


Figura 3.5: La Figura barrida por las velocidades características partiendo del borde  $i - 1/2, j$ .

donde

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j+1/2}^{n+1/2} &= \varphi_{i,j}^n + \frac{u\Delta t}{2\Delta x} (\varphi_{i-1,j}^n - \varphi_{i+1,j}^n) \\ \varphi_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= \varphi_{i,j}^n + \frac{v\Delta t}{2\Delta y} (\varphi_{i,j-1}^n - \varphi_{i,j+1}^n)\end{aligned}\quad (3.41)$$

Una manera de derivar las fórmulas para  $\varphi_{i,j+1/2}^{n+1/2}$  y  $\varphi_{i+1/2,j}^{n+1/2}$  es notando que son los promedios sobre las regiones barridas por las características a través de los bordes de la celda, respectivamente en  $(i + 1/2)$  y  $(i, j + 1/2)$ , como puede verse en la Figura 3.5

Los esquemas anteriores reciben el nombre de *Corner Transport Upwind* (CTU), puesto que toma en consideración el efecto de propagación a través de las zonas en las esquinas para calcular los flujos.

Los esquemas de las ecuaciones (3.40) y (3.41) son de la clase *predictor* y *corrector*. El cálculo de  $\varphi_{i,j+1/2}^{n+1/2}$  y  $\varphi_{i+1/2,j}^{n+1/2}$  corresponde a la fase predictiva, con la diferenciación conservativa siendo el paso corrector.

Si se calculara  $\varphi_{i+1/2,j}^{n+1/2}$  a segundo orden de precisión entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_{i+1/2,j}^{n+1} &= \varphi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\
&= \varphi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\
&= \varphi_{i,j}^n + \left( \frac{\Delta x}{2} - u \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Comparando la ecuación (3.40) con la ecuación (3.42) se tiene que para que el flujo CTU sea de segundo orden es necesario agregar una aproximación a  $\partial_x \varphi$ , de manera que

$$\varphi_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \varphi_{i,j}^n + \left( \frac{\Delta x}{2} - u \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{\Delta^x \varphi_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v \Delta t}{2 \Delta y} \left( \varphi_{i,j-1/2}^n - \varphi_{i,j+1/2}^n \right), \tag{3.43}$$

donde el operador  $\Delta^x / \Delta x$  debe representar una diferencia tal que limite las oscilaciones; por ejemplo acotado con los reconstructores tipo Minmod. Esta construcción de los valores en la frontera intercelda aprovecha el comportamiento lineal del sistema de advección, por eso es que recibe el nombre de *reconstrucción lineal*.

Ahora se definen los flujos numéricos,  $F$  en dirección  $\hat{x}$  y  $G$  en dirección  $\hat{y}$  para la ecuación de advección de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F(\varphi) &= u\varphi, \\
G(\varphi) &= v\varphi,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

se tiene que la ecuación (3.40), puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i-1/2,j}^{n+1/2} - F_{i+1/2,j}^{n+1/2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( G_{i-1/2,j}^{n+1/2} - G_{i+1/2,j}^{n+1/2} \right), \tag{3.45}$$

donde los flujos numéricos se construyen en las fronteras interceldas según (3.44).

Puede observarse que la reconstrucción lineal de los valores para  $\varphi$  en las fronteras intercelda puede realizarse partiendo de dos valores; por ejemplo para la frontera  $i+1/2, j$  puede partir la aproximación tanto desde la celda  $C_{i,j}$  como los valores de la celda  $C_{i+1,j}$  definiendo dos aproximaciones las cuales se etiquetan en este trabajo con los subíndices  $L$  y  $R$ . Explícitamente esto es

$$\begin{aligned}
\varphi_{L,i+1/2,j}^{n+1/2} &= \varphi_{i,j}^n + \frac{1}{2} \left( 1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta^x \varphi_{i,j} + \frac{\Delta t}{2 \Delta y} \left( G_{i,j-1/2}^n - G_{i,j+1/2}^n \right), \\
\varphi_{R,i+1/2,j}^{n+1/2} &= \varphi_{i+1,j}^n - \frac{1}{2} \left( 1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta^x \varphi_{i+1,j} + \frac{\Delta t}{2 \Delta y} \left( G_{i+1,j-1/2}^n - G_{i+1,j+1/2}^n \right).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Las ecuaciones (3.45) y (3.46) sirven como estencil para la aplicación de este método a sistemas conservativos de varias variables

### Método CTU aplicado a leyes de conservación

Considérese un problema bidimensional de valores iniciales dado por

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}).$$

El esquema numérico para resolver esta ecuación está dado por

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i+1/2,j}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i,j-1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j+1/2}^n). \quad (3.48)$$

Similar a la ecuación de advección, se tiene que la construcción de los flujos numéricos requiere de la reconstrucción de los valores en las fronteras intercelda, es así que se utiliza una *reconstrucción lineal*, por ejemplo para la zona  $i + 1/2, j$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1} &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \\ &= \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \\ &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \left( \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}^x \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde se ha utilizado la regla de la cadena para obtener la matriz  $\mathbf{A}^x$

$$\mathbf{A}^x = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}.$$

Es conveniente ver la ecuación (3.49) como una secuencia de dos pasos, el primero involucra una aproximación de diferencias finitas para el término  $\partial_x \mathbf{U}$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \left( \frac{\Delta x}{2} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}^x \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}; \quad (3.50)$$

y un segundo paso que involucra las derivadas transversales

$$\mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}; \quad (3.51)$$

y cada paso se desarrolla a a continuación:

1. En el caso de la ecuación (3.50) se pueden descargar los componentes a  $\partial_x \mathbf{U}$  que corresponden a las características que no se propagan hacia la frontera inter refinamiento. Por otra parte se puede proyectar la diferencia  $\Delta^x \mathbf{U}_{i,j}$  a los eigen-vectores de la matriz  $\mathbf{A}^x$ .
2. Para la parte transversal las aproximaciones de la ecuación (3.50) en las regiones transversales

deben utilizarse para manejar apropiadamente las discontinuidades oblicuas. Es así que

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \approx (\mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2}). \quad (3.52)$$

En particular para los sistemas que presenten discontinuidades se tiene un esquema de evolución para los estados izquierdo y derecho similar al estencil de la ecuación de advección la ecuación (3.46) dado por la siguiente ecuación

$$\tilde{\mathbf{U}}_{L,i+1/2,j}^{n+1/2} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{2} \sum_{v:\lambda_{i,j}^v > 0} \left(1 - \lambda_{i,j}^v \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \Delta^x \mathbf{U}_{i,j}, \quad (3.53)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{R,i+1/2,j}^{n+1/2} = \mathbf{U}_{i+1,j}^n - \frac{1}{2} \sum_{v:\lambda_{i,j}^v < 0} \left(1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \Delta^x \mathbf{U}_{i+1,j}, \quad (3.54)$$

donde la variación  $\Delta^x \mathbf{U}$  de la ecuación (3.50) se ha proyectado sobre los eigen-vectores de la matriz  $\mathbf{A}^x$  de la siguiente manera

$$\Delta^x \mathbf{U}_{i,j}^v = \Delta \omega_{i,j}^v \mathbf{R}_{i,j}^v, \quad (3.55)$$

donde  $\mathbf{R}^v$  es el eigen-vector derecho correspondiente al eigen-valor  $\lambda^v$  y

$$\Delta \omega_{i,j}^v = \text{Lim}(\mathbf{L}_{i,j}^v \cdot \Delta \mathbf{U}_{i+1/2,j}, \mathbf{L}_{i,j}^v \cdot \Delta \mathbf{U}_{i-1/2,j}), \quad (3.56)$$

con  $\mathbf{L}^v$  siendo el eigen-vector izquierdo;  $\text{Lim}(\cdot, \cdot)$  es un limitador de pendiente, por ejemplo minmod; y

$$\Delta \mathbf{U}_{i+1/2,j} = \mathbf{U}_{i+1,j} - \mathbf{U}_{i,j}.$$

Para el segundo paso se calculan los flujos numéricos transversales utilizando la solución del problema de Riemann en  $i + 1/2, j$ , es decir, si  $\mathcal{R}(u_L, u_R)$  es la solución del problema de Riemann, entonces

$$\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{n+1/2} = \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{U}}_{L,i+1/2,j}^{n+1/2}, \tilde{\mathbf{U}}_{R,i+1/2,j}^{n+1/2}) \quad (3.57)$$

Se tiene entonces el esquema de construcción de los estados  $L, R$  dado por

$$\mathbf{U}_{L,i+1/2,j}^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{U}}_{L,i+1/2,j}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2\Delta y} (\tilde{\mathbf{G}}_{i,j-1/2}^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{G}}_{i,j+1/2}^{n+1/2}), \quad (3.58)$$

$$\mathbf{U}_{R,i+1/2,j}^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{U}}_{R,i+1/2,j}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2\Delta y} (\tilde{\mathbf{G}}_{i+1,j-1/2}^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{G}}_{i+1,j+1/2}^{n+1/2}).$$

La construcción de los estados  $L$  y  $R$  se realiza en dos tiempos como se esquematiza en la Figura 3.6. Primero se calculan los estados usando las celdas contiguas a la frontera intercelda y después se le añade la contribución transversal.

En el caso de la MHD, la construcción de los estados debe hacerse en las variables primitivas,

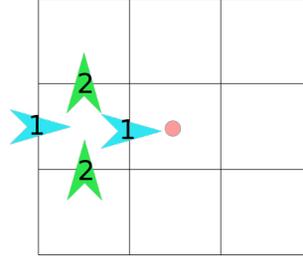


Figura 3.6: Esquemmatización de en qué momento se involucran las celdas cercanas a la frontera intercelda a la hora de calcular los estados  $L$  y  $R$ . Para la celda central resaltada se muestra como se transmite la información para construir el estado  $L$ .

es decir en el vector de cantidades

$$\mathbf{W} = [\rho, v_x, v_y, v_z, P, B_x, B_y, B_z, \Psi];$$

donde  $\Psi$  es la función escalar de la limpieza hiperbólica de la divergencia. Además, según [Powell, 1994], es necesario añadir un término extra an al primer paso de la construcción de los estados en la región intercelda y es debido a que numéricamente  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  no es siempre cero, esto introduce comportamientos inestables en la solución. Visto desde otra perspectiva, la nulidad de la divergencia se fija en otra sección de la evolución, en CAFE-AMR esto se hace por medio de la limpieza hiperbólica después de que se han construido los estados  $L$  y  $R$ .

En nuestro caso, siguiendo lo propuesto en [Mignone and Tzeferacos, 2010], en donde se aplica el esquema CTU junto con la limpieza hiperbólica de la divergencia, en el caso tridimensional se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{L,i+1/2,j,k}^{n+1/2} = & \mathbf{W}_{i,j,k}^n + \frac{1}{2} \sum_{v:\lambda_{i,j,k}^v > 0} \left(1 - \lambda_{i,j,k}^v \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \Delta^x \mathbf{W}_{i,j,k}, \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathbf{S}_{B_x,i,j,k} \Delta B_{x,i,j,k} + \mathbf{S}_{\Psi,i,j,k} \Delta \Psi_{i,j,k}\right), \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{R,i+1/2,j,k}^{n+1/2} = & \mathbf{W}_{i+1,j,k}^n - \frac{1}{2} \sum_{v:\lambda_{i+1,j,k}^v < 0} \left(1 - \lambda_{i+1,j,k}^v \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \Delta^x \mathbf{W}_{i+1,j,k}, \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathbf{S}_{B_x,i+1,j,k} \Delta B_{x,i+1,j,k} + \mathbf{S}_{\Psi,i,j,k} \Delta \Psi_{i,j,k}\right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde

y  $\Delta B_{x,i,j,k}$  y  $\Delta \Psi_{i,j,k}$  son aproximaciones de diferencias finitas centradas en la celda  $C_{i,j,k}$  y los términos fuente  $\mathbf{S}$  son los siguientes:

- Para el caso GLM

$$\mathbf{S}_{B_x} = \left[ 0, \frac{B_x}{\rho}, \frac{B_y}{\rho}, \frac{B_z}{\rho}, -(\gamma - 1)\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}, 0, v_y, v_z, 0 \right]$$

$$\mathbf{S}_\Psi = [0, 0, 0, 0, (\gamma - 1)B_x, 0, 0, 0, 0]$$

- Para el caso EGLM

$$\mathbf{S}_{B_x} = [0, 0, 0, 0, -(\gamma - 1)\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}, 0, 0, 0, 0]$$

$$\mathbf{S}_\Psi = \mathbf{0}$$

Los eigen-vectores y eigen-valores están dados en el apéndice A

### Calcular los estados $L$ y $R$

El algoritmo para construir los estados izquierdo y derecho de las fronteras intercelda que se ha implementado sigue la misma secuencia propuesta en [Stone et al., 2008]. Esto es<sup>1</sup>:

1. Construir el vector de variables primitivas  $\mathbf{W}$
2. Computar los eigen-valores  $\lambda^y$ ,  $\mathbf{L}^y$  y  $\mathbf{R}^y$  de la matriz  $\mathbf{A}$
3. Calcular las diferencias hacia la derecha ( $R$ ), izquierda ( $L$ ) y centrada ( $C$ ), esto por ejemplo en la dirección  $\hat{x}$  es

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{W}_{L,i} &= \mathbf{W}_i - \mathbf{W}_{i-1}, \\ \Delta \mathbf{W}_{R,i} &= \mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_i, \\ \Delta \mathbf{W}_{C,i} &= \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_{i-1})\end{aligned}\tag{3.61}$$

4. Proyectar las diferencias en los eigen-vectores de los eigen-valores de la matriz  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{a}_{L,\lambda^y} &= \mathbf{L}_{\lambda^y, \mathbf{W}_i} \cdot \Delta \mathbf{W}_{L,i}, \\ \delta \mathbf{a}_{R,\lambda^y} &= \mathbf{L}_{\lambda^y, \mathbf{W}_i} \cdot \Delta \mathbf{W}_{R,i}, \\ \delta \mathbf{a}_{C,\lambda^y} &= \mathbf{L}_{\lambda^y, \mathbf{W}_i} \cdot \Delta \mathbf{W}_{C,i},\end{aligned}\tag{3.62}$$

Donde la matriz  $\mathbf{L}_{\lambda^y, \mathbf{W}_i}$  es la matriz construida poniendo los eigen-vectores  $\mathbf{L}^y$  como filas.

5. Aplicar límites de pendiente para forzar la monotonización de las diferencias proyectadas, creando una proyección de las diferencias que sea TVD  $\delta \mathbf{a}$ . Por ejemplo se puede usar la función Minmod de la siguiente manera

$$\delta \mathbf{a}_i = \text{Minmod} [\text{Minmod} (\delta \mathbf{a}_{L,i}, \delta \mathbf{a}_{R,i}), \delta \mathbf{a}_{C,i}].\tag{3.63}$$

6. Proyectar las diferencias monotonas de regreso a las variables primitivas

<sup>1</sup>Por síntesis se describirá el modo de construir la frontera intercelda en dirección  $\hat{x}$ , de manera que para los primeros pasos sólo se utilizará la etiqueta  $i$ , sin embargo este procedimiento es análogo para las tres direcciones.

$$\delta \mathbf{W}_i = \delta \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{W}_i, \lambda^y}, \quad (3.64)$$

donde  $\mathbf{R}_{\mathbf{W}_i, \lambda^y}$  es la matriz constuida poniendo a los eigen-vectores  $\mathbf{R}^y$  como columnas.

7. Calcular una primera versión los estados  $L$  y  $R$  de las fronteras intercelda según

$$\hat{\mathbf{W}}_{L,i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{W}_i^n + \left[ \frac{1}{2} - \text{máx}(\lambda_i^M, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right] \delta \mathbf{W}_i, \quad (3.65)$$

$$\hat{\mathbf{W}}_{R,i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{W}_{i+1}^n - \left[ \frac{1}{2} - \text{mín}(\lambda_{i+1}^0, 0) \frac{\Delta t}{2\Delta x} \right] \delta \mathbf{W}_{i+1}, \quad (3.66)$$

donde  $\lambda^M$  y  $\lambda^0$  son los eigen-valores de mayor y menor magnitud, respectivamente, calculados en la celda  $C_i$  para el estado  $L$  y en la celda  $C_{i+1}$  para el estado  $R$ .

8. Hacer el *rastreo de características*, es decir, restar de la ecuación (3.65) la parte de cada familia de ondas que no llega la frontera intercelda en un tiempo  $\Delta t/2$ , usando el esquema de [Colella, 1990]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{L,i+1/2}^{n+1/2} &= \hat{\mathbf{W}}_{L,i+1/2}^{n+1/2} \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\lambda^y > 0} [(\lambda_i^M - \lambda_i^y) \mathbf{L}_i^y \cdot \delta \mathbf{W}_i] \mathbf{R}_i^y, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{R,i+1/2}^{n+1/2} &= \hat{\mathbf{W}}_{R,i+1/2}^{n+1/2} \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sum_{\lambda^y < 0} [(\lambda_{i+1}^0 - \lambda_{i+1}^y) \mathbf{L}_{i+1}^y \cdot \delta \mathbf{W}_{i+1}] \mathbf{R}_{i+1}^y, \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde las sumas se hacen solo sobre las ondas que se propagan hacia la frontera intercelda;  $\mathbf{L}^y$  y  $\mathbf{R}^y$  son las filas y las columnas de las matrices izquierda y derecha, respectivamente que correspondan al eigen-valor  $\lambda^y$ . En el caso de las aproximaciones tipo HLL es necesario sumar sobre todas los eigenvalores.

A estos estados es a los que se les debe aplicar las sumas de los términos fuente de las ecuaciones (3.59) y (3.60).

9. Reconstruir los estados  $L$  y  $R$  de los vectores de variables conservativas  $\tilde{U}$  a partir de las ecuaciones (3.67), (3.68). Utilizar esto para calcular los flujos transversales.

Es así que los estados  $L$  y  $R$  tienen explícitamente la fórmula

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{L,i+1/2,j,k}^{n+1/2} &= \tilde{\mathbf{U}}_{L,i+1/2,j,k}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2\Delta y} [\tilde{\mathbf{G}}_{i,j-1/2,k}^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{G}}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}], \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta z} [\tilde{\mathbf{H}}_{i,j,k-1/2}^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{H}}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}], \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{R,i+1/2,j,k}^{n+1/2} &= \tilde{\mathbf{U}}_{R,i+1/2,j,k}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2\Delta y} [\tilde{\mathbf{G}}_{i+1,j-1/2,k}^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{G}}_{i+1,j+1/2,k}^{n+1/2}], \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta z} [\tilde{\mathbf{H}}_{i+1,j,k-1/2}^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{H}}_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2}], \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde  $\tilde{\mathbf{G}}$  y  $\tilde{\mathbf{H}}$  son los flujos numéricos transversales calculados utilizando los estados de las ecuaciones (3.67) y (3.68) en las direcciones  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  respectivamente.

Notablemente para realizar el esquema CTU es necesario resolver 6 problemas de Riemann para cada frontera intercelda, que es un número similar de integraciones que se realizan al usar el método de Heun.



## Capítulo 4

# Estrategia de refinamiento de malla adaptativo y paralelización

### Resumen

En este capítulo se hace una descripción detallada de la estrategia de refinamiento adaptativo de mallas. En la introducción se expresa que la motivación de la estrategia AMR es resolver tres dificultades del método con el que se resuelven las ecuaciones MHD: El uso adecuado de recursos computacionales; la mitigación de disipación del método numérico; y abordar problemas multiescala. En las secciones 4.2 y 4.3 se describe la estrategia AMR y su implementación. En la sección 4.4 se habla de la estructura del código CAFE-AMR, es decir, las estructuras de datos, la jerarquización y el control de los procesos. En la sección 4.5 se describe cómo fue implementada la versión paralelizada del código CAFE-AMR.

### 4.1. Introducción

Una de las dificultades que se presenta al momento de hacer simulaciones numéricas es el manejo adecuado de los recursos computacionales. Desde que se inició el cómputo científico, la correcta gestión de la memoria, así como de los espacios de almacenamiento ha estado íntimamente ligado a la planeación de los métodos numéricos. Quizás como muestra de esto es que los lenguajes antiguos de alto nivel, como FORTRAN y C, que necesitan una gestión explícita de la memoria, siguen siendo ampliamente utilizados en aplicaciones científicas y de ingeniería.

Por otra parte, la comunidad científica busca generalmente de manera exhaustiva encontrar las soluciones analíticas a los sistemas de ecuaciones, de manera que se termina delimitando los escenarios en los cuales los métodos numéricos son indispensables; a su vez los métodos numéricos promueven cierto tipo de algoritmos y esquemas que sean más orgánicos con ellos.

En el caso de los sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales, el paradigma es, al día de hoy, bien definido: los métodos numéricos que permiten tener un alto nivel de precisión, como los de diferencias finitas, tienen la complejidad de que no pueden lidiar con soluciones de tipo choque; los métodos numéricos que permiten lidiar con soluciones de choques, como los de

volúmenes finitos, tienden a ser disipativos y tener un bajo nivel de precisión<sup>1</sup>.

Aunado a estas dos problemáticas, se encuentra que los mismos sistemas reales que se simulan imponen a su vez ciertas complejidades. En el caso del Sol, un evento eruptivo tiene diferentes facetas que van desde centelleos en la fotosfera, chorros que se generan en la cromosfera, erupciones de prominencias coronales y eyecciones de masa coronal; todo este evento está estructurado por una gran cantidad de fenómenos de alta variación de escalas temporales y espaciales.

Con todo, la estrategia de refinamiento adaptativo de mallas se encarga de las tres problemáticas atrás mencionadas. Esta estrategia, desarrollada en la década de los ochenta para problemas hidrodinámicos [Berger and Olinger, 1984, Berger et al., 1989], consiste en implementar esquemas de solución que capturen choques y, para aumentar la precisión, aumentar tanto espacial como temporalmente la resolución que cubre las regiones que presentan mayor estructura y dinámica, lo cual permite abordar sistemas multiescala; esta estrategia naturalmente gestiona de manera mejor el uso de recursos que en el caso de tener una malla homogénea con la misma resolución equivalente. Esto ha fundamentado la realización del código numérico de este trabajo.

En este capítulo se presentan los algoritmos y métodos que se utilizaron para implementar la estrategia AMR en métodos numéricos que resuelven las ecuaciones MHD en los regímenes ideal y resistivo.

## 4.2. Estrategia AMR

La estrategia AMR para resolver ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo en mallas rectangulares consiste en cubrir el total del dominio espacial ( $D$ ) con una malla *gruesa*, y parches rectangulares que cubran ciertas regiones con mallas cuyas celdas son de dimensiones espaciales menores; de manera que se define una malla *fin*a en cada parche. Con esta estrategia, el esquema de integración temporal puede ser aplicado indiscriminadamente a todos los parches, junto con la malla gruesa global, tal que la evolución de cada subdominio pueda hacerse independientemente. Notablemente esta estrategia tiene un carácter recursivo.

La implementación de este trabajo utiliza el algoritmo estándar de Berger-Olinger [Berger and Olinger, 1984] y consiste de los siguientes pasos:

1. Seleccionar las regiones de  $D$  por refinar.
2. Generar las mallas refinadas y adecuadamente anidadas en estas regiones.
3. Interpolan los valores numéricos de las variables conservativas en cada celda de las regiones refinadas.
4. Una vez que todas las mallas refinadas han sido generadas, avanzar temporalmente el dominio grueso  $D$  y las mallas refinadas anidadas de forma independiente hasta que todas las mallas estén sincronizadas.
5. Inyectar los valores de las variables calculadas en los dominios refinados en las celdas de la malla gruesa.

---

<sup>1</sup>Para una descripción más detallada de esto puede consultarse [Gustafsson et al., 2013].

6. Para mantener el balance de flujos, corregir los flujos en las fronteras entre las regiones gruesas y finas.

Esta secuencia puede usarse recursivamente, todos los parches de refinamiento pueden ser refinados. Esto define naturalmente los *niveles de refinamiento*, de tal manera que el nivel 0 corresponda a la malla gruesa y los niveles de refinamiento superiores tengan mayor resolución y, a su vez, celdas de menor volumen. En este trabajo se utilizará la etiqueta  $\ell$  como el superíndice para denotar los niveles de refinamiento. Otra cantidad importante es la *razón de resolución*,  $r$ , la cual se calcula entre niveles de refinamiento consecutivos  $\ell$  y  $\ell + 1$ ; y establece que por cada celda de la malla gruesa hay  $r^{n_d}$  mallas refinadas que cubren el mismo volumen, donde  $n_d$  es el número de dimensiones del sistema. En el código que se desarrolló para este trabajo se ha fijado  $r = 2$ , de manera que por cada celda de la malla gruesa, habrá cuatro celdas u ocho celdas de la malla fina para los problemas bidimensionales y tridimensionales, respectivamente.

En este capítulo, al vector de variables conservativas se le asocia el vector  $\mathbf{U}$ , de manera que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ E \\ \mathbf{B} \\ \Psi \end{pmatrix},$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $\mathbf{v}$  es el vector de velocidades,  $E$  es la energía total del sistema,  $\mathbf{B}$  es el campo magnético y  $\Psi$  es la función escalar asociada a la limpieza hiperbólica de la divergencia.

En el resto del capítulo para identificar una celda se utilizarán los subíndices  $i, j, k$ , tales que  $i \in 1, \dots, n_x, j \in 1, \dots, n_y, k \in 1, \dots, n_z$ ; donde  $n_x, n_y, n_z$  fijan el volumen de una celda  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ , a través de

$$\Delta x = \frac{L_x}{n_x},$$

$$\Delta y = \frac{L_y}{n_y},$$

$$\Delta z = \frac{L_z}{n_z},$$

donde  $L_x \times L_y \times L_z$  es el volumen del dominio numérico. Finalmente una cantidad cualquiera  $\phi$  tendrá un valor específico  $\phi_{i,j,k}^\ell$  en la celda de nivel de refinamiento  $\ell$ .

### 4.3. Descripción del algoritmo de Berger-Oliger

A continuación se presenta una descripción detallada de la implementación del algoritmo de la sección 4.2.

#### 4.3.1. Seleccionar una región para refinar

La elección de sectores dentro del dominio numérico a ser refinado necesita un *criterio de refinamiento*. Existe cierta libertad para definir este criterio convenientemente, en particular acorde

con los escenarios físicos a ser simulados. Típicamente, un número arbitrario de funciones escalares positivas definidas y finitas,  $\chi(\mathbf{U}^\ell)$ , se definen en cada celda de la malla gruesa, luego cada celda  $i, j, k$  recibe una bandera lógica que marca si será refinada si esta función escalar supera cierto valor umbral  $\chi_r$ :

$$\chi_{i,j,k} > \chi_r. \quad (4.1)$$

En el código desarrollado en este trabajo, se implementan dos principales criterios de refinamiento:

- Escoger como funciones evaluadoras la misma aproximación numérica del gradiente,  $\bar{\nabla}$ , de las funciones para todas y cada una de las variables conservativas, que la que es usada para interpolar linealmente los valores hacia nuevas mallas de refinamiento; esto es:

$$\chi_m = \bar{\nabla}(U_m), \quad (4.2)$$

donde  $U_m$  es la  $m$ -ésima variable conservativa.

- El criterio de refinamiento usado en [Mignone et al., 2011], basado en la segunda derivada de la norma del error definido en [Löhner, 1987], donde

$$\chi(\mathbf{U}) = \sqrt{\frac{\sum_{d \in \{x,y,z\}} |\Delta_{d,+1/2}\sigma - \Delta_{d,-1/2}\sigma|^2}{\sum_{d \in \{x,y,z\}} (|\Delta_{d,+1/2}\sigma| + |\Delta_{d,-1/2}\sigma| + \epsilon\sigma_{d,ref})^2}}, \quad (4.3)$$

y  $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{U})$  es una función de las variables conservativas,  $\Delta_{d,\pm 1/2}\sigma$  son las diferencias finitas indivisibles hacia adelante y hacia atrás a lo largo de la dirección  $d$ , por ejemplo

$$\Delta_{x,\pm 1/2}\sigma = \pm(\sigma_{i\pm 1} - \sigma_i).$$

El último término que aparece en el denominador está dado por :

$$\sigma_{x,ref} = |\sigma_{i+1}| + 2|\sigma_i| + |\sigma_{i-1}|,$$

$$\sigma_{y,ref} = |\sigma_{j+1}| + 2|\sigma_j| + |\sigma_{j-1}|,$$

$$\sigma_{z,ref} = |\sigma_{k+1}| + 2|\sigma_k| + |\sigma_{k-1}|,$$

sumar el término  $\sigma_{d,ref}$  multiplicado por el factor  $\epsilon < 1$  previene el refinamiento de regiones donde pequeñas arrugaduras u ondas se generen.

Adicionalmente, cuando una simulación usa más niveles de refinamiento, es necesario anidar correctamente los refinamientos finos, de manera que las fronteras entre mallas de diferente refinamiento solo sucedan entre, por ejemplo, niveles  $\ell$  y  $\ell + 1$  o niveles  $\ell$  y  $\ell - 1$  pero nunca entre niveles  $\ell - 1$  y  $\ell + 1$ . Para hacer esto, después de que las celdas sean marcadas acorde con el criterio de refinamiento, las celdas en el nivel  $\ell + 1$  que contengan a su vez celdas de nivel  $\ell + 2$  también son marcadas y, por último, las celdas de nivel  $\ell$  que tengan celdas vecinas que serán refinadas también deberán marcarse para refinarse. Este proceso debe realizarse de manera recursiva del nivel de refinamiento máximo hasta el nivel 0.

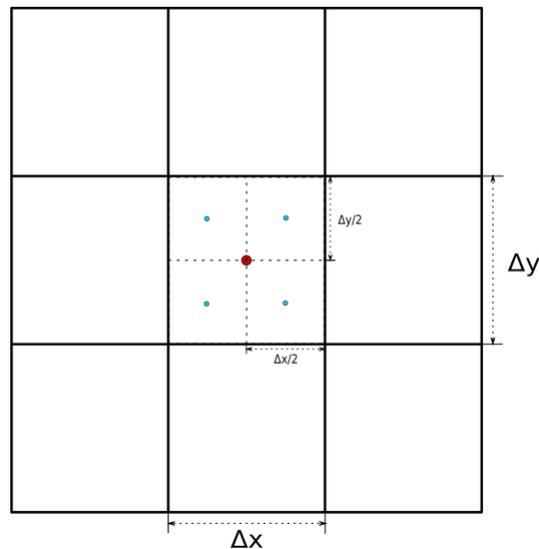


Figura 4.1: Esquema de cómo el volumen de una celda de nivel de refinamiento  $\ell + 1$ , es decir  $V^{\ell+1} = \Delta x/2 \times \Delta y/2$ , es un cuarto del de una celda de nivel  $\ell$ , a saber  $V^\ell = \Delta x \Delta y$ , para una razón de refinamiento de  $r = 2$  y la dimensión del dominio de  $d = 2$ .

### 4.3.2. Generando una nueva malla de refinamiento

Como se ha mencionado, la razón de refinamiento que se ha escogido es  $r = 2$ , tal que una celda gruesa será cubierta con  $2^d$  celdas refinadas, donde  $d$  es la dimensión del dominio. En la Figura 4.1 se muestra cómo el volumen de la celda de nivel de refinamiento  $\ell + 1$  es  $1/2^d$  del de una celda de nivel  $\ell$ . Las celdas refinadas estarán centradas en posiciones tales que la región cubierta por ellas tenga las mismas fronteras que la celda gruesa. Por ejemplo, en dos dimensiones, las cuatro celdas refinadas que cubran una gruesa deberán tener sus centros en las posiciones:

$$\mathbf{r}_{I \pm i, J \pm j}^{\ell+1} = \mathbf{r}_{I, J}^\ell \pm \frac{\Delta x}{4} \hat{x} \pm \frac{\Delta y}{4} \hat{y}, \quad (4.4)$$

donde  $\mathbf{r}_{I, J}^\ell$  es el centro de la celda gruesa. En lo que resta del capítulo, se usará  $D^\ell$  para denotar el dominio cubierto con la malla de nivel de refinamiento  $\ell$ .

### 4.3.3. Interpolación de los datos de una malla gruesa a una de refinamiento

De la misma forma que en [Porth et al., 2014] y en [Matsumoto, 2007], la reconstrucción de los datos en las mallas de refinamiento se hace por interpolación lineal, la cual disminuye la difusión numérica de las discontinuidades de choque, a la vez que previene la generación de oscilaciones espurias en las celdas que colindan con otras más gruesas. Explícitamente, las variables conservativas  $\mathbf{U}$  en el dominio  $D^{\ell+1}$  son:

$$\mathbf{U}_{i, j, k}^{\ell+1} = \mathbf{U}_{I, J, K}^\ell + \bar{\nabla}(\mathbf{U}_{I, J, K}^\ell) \cdot (\mathbf{r}_{I, J, K}^\ell - \mathbf{r}_{i, j, k}^{\ell+1}), \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{r}_{i,j,k}^{\ell+1}$  son las posiciones de las celdas de  $D^{\ell+1}$ , y  $\mathbf{r}_{I,J,K}^{\ell}$  es la posición de la celda en  $D^{\ell}$ ; las variables conservativas toman los valores  $U_{I,J,K}^{\ell}$ . La aproximación del operador gradiente  $\bar{\nabla}$  que actúa en una función escalar arbitraria  $\varphi$ , es el que se presenta en [Matsumoto, 2007], y está dado por:

$$\bar{\nabla}(\varphi) = \begin{pmatrix} \text{Minmod}(\partial_{x+1/2}\varphi, \partial_{x-1/2}\varphi) \\ \text{Minmod}(\partial_{y+1/2}\varphi, \partial_{y-1/2}\varphi) \\ \text{Minmod}(\partial_{z+1/2}\varphi, \partial_{z-1/2}\varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

y el operador derivada sigue una aproximación de diferencias finitas de segundo orden de precisión centrada dado por:

$$\partial_{x+1/2}\varphi_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x}(\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j,k}), \quad (4.7)$$

y la función Minmod que se encuentra en el apéndice B. El tratamiento para las derivadas parciales a lo largo de las direcciones  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  es a través de fórmulas similares.

Es posible utilizar fórmulas de reconstrucción lineal más robustas<sup>2</sup>, siempre y cuando tengan la propiedad TVD<sup>3</sup> lo cual en suma no debe afectar la estructura modular de la implementación de la estrategia AMR. No obstante, en este trabajo se ha decidido utilizar solamente el reconstructor Minmod dado que es suficientemente preciso en las regiones de discontinuidades grandes, mientras que es lo suficientemente difusivo. Esto ayuda a prevenir el crecimiento de perturbaciones creadas por la generación de fronteras entre mallas de diferentes niveles de refinamiento.

#### 4.3.4. Evolución temporal y sincronización

La estrategia AMR que se ha implementado genera múltiples mallas auto-similares, cada una de ellas evoluciona independientemente en el tiempo por el esquema del método de líneas y sólo comparte información a través de sus fronteras al inicio de la evolución del tiempo  $t^n$  al tiempo  $t^{n+1}$ . La evolución temporal de volúmenes finitos tipo Godunov usa para cada malla la condición de estabilidad (*CFL*) que relaciona el paso temporal  $\Delta t$  con la resolución de la malla a través de

$$\Delta t = CFL \times \frac{\text{mín}[\Delta x, \Delta y, \Delta z]}{\lambda_{max}}, \quad (4.8)$$

donde  $\lambda_{max}$  se define como el máximo de las velocidades características de la versión linealizada de las ecuaciones MHD calculadas en todo el dominio; la definición de esta velocidad en problemas tridimensionales se lee como:

$$\lambda_{m\acute{a}x} = \text{máx}[|v_x| + C_{fx}, |v_y| + C_{fy}, |v_z| + C_{fz}]_{i,j,k} \quad (4.9)$$

<sup>2</sup>Fórmulas de construcción de pendientes con límites pueden encontrarse en los libros de [Toro, 2013, Gustafsson et al., 2013, LeVeque et al., 2002].

<sup>3</sup>La propiedad TVD (disminución de la variación total en sus siglas en inglés) permite, entre otras cosas, prevenir el surgimiento de oscilaciones espurias y satisfacer la estabilidad y convergencia de las soluciones, vease [Toro, 2013].

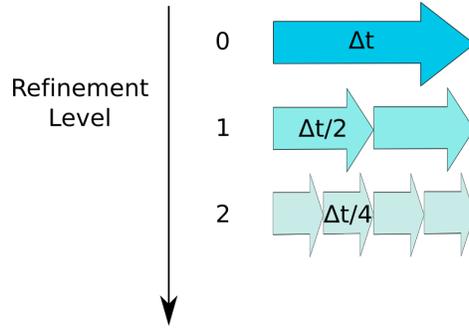


Figura 4.2: Ilustración esquemática de los pasos temporales aplicados a cada malla de nivel de refinamiento  $\ell = 0, 1, 2$  para avanzar de  $t^n$  a  $t^{n+1}$ . La misma esquematización puede aplicarse a un número de niveles de refinamiento mayor.

donde  $C_{fx}$ ,  $C_{fy}$  y  $C_{fz}$  son las velocidades magnétosónicas rápidas en las direcciones  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ , respectivamente; y

$$C_{fs} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 4ab_s} \right]}, \quad (4.10)$$

con  $a = \gamma P/\rho$ ,  $b = B^2/\rho$ ,  $b_s = B_s^2/\rho$ , and  $s = x, y, z$ . Como se expresa en [Toro, 2013], la condición  $CFL < 1.0$  se necesita para preservar la estabilidad.

Siguiendo las indicaciones de [Berger and Oliger, 1984, Berger et al., 1989], el tamaño de los pasos temporales  $\Delta t^{\ell+1}$  de los niveles de refinamiento  $\ell + 1$  se relaciona con el paso temporal  $\Delta t^\ell$  del nivel de refinamiento  $\ell$  a través de:

$$\Delta t^{\ell+1} = \frac{1}{r} \Delta t^\ell; \quad (4.11)$$

donde  $r$  es la razón de refinamiento que en este trabajo se ha escogido como  $r = 2$ . Para obtener (4.11) usando (4.8) se obtiene  $\lambda_{max}$  entre todas las submallas y se selecciona el máximo de ellas. También en este paso, siguiendo a [Dedner et al., 2002] se define el coeficiente  $C_h = \lambda_{max}$  usado en las ecuaciones (3.28) del método de limpieza hiperbólico de la divergencia.

Un ciclo de evolución del sistema del tiempo  $t^n$  al tiempo  $t^{n+1}$  se considera terminado una vez que todas las mallas estén sincronizadas al tiempo  $t^{n+1}$ . Esto requiere que el dominio  $D^\ell$  se evolucione  $2^\ell$  veces para alcanzar al dominio de nivel de refinamiento 0. En la Figura 4.2 se muestra cómo mallas de múltiples niveles de refinamiento avanzan varias veces para lograr esto.

En [Keppens et al., 2003], se encontró que escoger una razón de refinamiento heterogénea independiente del esquema de evolución puede optimizar ciertos aspectos de la simulación, lo cual lleva a tiempos de cómputo menores. Sin embargo, se decidió que la ganancia de una razón de refinamiento mayor que 2, no vale la pena en comparación con los beneficios de utilizar una estructura recursiva a la hora de escribir el código. El enfoque recursivo facilita el control de anidar apropiadamente los refinamientos y también de tener un esquema de evolución temporal jerárquico. Muchos códigos que utilizan la estrategia AMR prueban que en varias simulaciones físicas, tener un paso de tiempo homogéneo se prefiere, como puede verse en el código NIRVANA [Ziegler, 2008], el cual emplea un solo paso temporal, no solo para manejar mejor las simulaciones en las cuales los

términos difusivos no son despreciables, pero también para lograr esquemas de paralelización de alta velocidad. Sin embargo, en este trabajo el uso de pasos temporales jerarquizado ha dado buenos resultados.

Con excepción de las fronteras físicas del dominio numérico, la evolución de los dominios refinados  $D^\ell$  comienza con la implementación de condiciones de frontera. Esto se hace llenando *celdas fantasma* las cuales extienden el dominio  $D^\ell$ , y se llenan con valores de flujos apropiados, véase [LeVeque et al., 2002].

El llenado de las celdas fantasma depende del tipo de frontera que está siendo extendida. Como se muestra en la Figura 4.3, se identifican tres tipos de fronteras en el dominio refinado  $D^\ell$ :

- Fronteras compartidas con otro dominio cuyo nivel de refinamiento,  $\ell$ , es el mismo.
- Fronteras compartidas con otro dominio cuyo nivel de refinamiento es menor,  $\ell - 1$ ; esta estructura es causada por la manera en la que se generan los refinamientos.
- Fronteras que comparten la frontera física.

De acuerdo al tipo de frontera, las celdas fantasma son rellenadas de la siguiente manera:

- Si las celdas fantasma tienen la misma posición que las celdas contenidas en otra malla del mismo nivel de refinamiento, simplemente copiar los valores de los datos contenidos en esas celdas.
- Si las celdas fantasma de un dominio  $D^\ell$  están contenidas en una celda gruesa de un dominio  $D^{\ell-1}$  interpolar linealmente los valores de los datos.
- Si las celdas fantasma corresponden a fronteras físicas, implementar las condiciones de frontera apropiadas, tales como de flujo saliente o fijas, por mencionar algunas.

En el caso de fronteras entre niveles de refinamiento consecutivos, los valores de las variables en las celdas fantasma de  $D^\ell$  son construidos usando una interpolación lineal de los valores de las celdas en  $D^{\ell-1}$  de la misma manera que en la ecuación (4.5), es decir

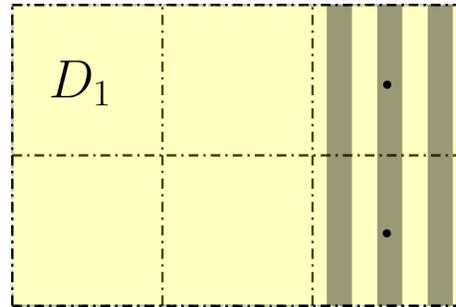
$$\mathbf{U}_{i,j,k}^\ell = \mathbf{U}_{I,J,K}^{*\ell} + \hat{\nabla}(\mathbf{U}_{I,J,K}^{*\ell-1}) \cdot (\mathbf{r}_{I,J,K}^{\ell-1} - \mathbf{r}_{i,j,k}^\ell), \quad (4.12)$$

donde es necesario definir los valores de la malla gruesa  $\mathbf{U}^{*\ell}$ , como

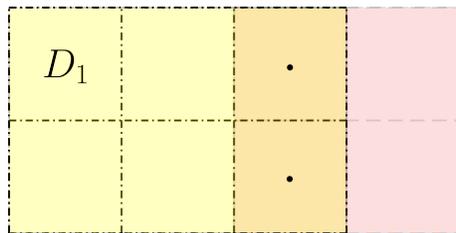
$$\mathbf{U}^{*\ell} = \begin{cases} \mathbf{U}^\ell(t) & \text{si sincronizada,} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{U}^\ell(t + \Delta t^\ell) + \mathbf{U}^\ell(t)) & \text{si desfasada} \end{cases}, \quad (4.13)$$

y donde los gradientes numéricos  $\hat{\nabla}$  son aproximaciones de diferencias finitas hacia adelante o hacia atrás dependiendo de cual cara de la malla del dominio grueso  $\ell - 1$  colinda con una refinada  $\ell$ . Por ejemplo, si la frontera perpendicular a la dirección  $+\hat{x}$  del dominio  $D^{\ell-1}$  es compartida con el dominio  $D^\ell$ , entonces

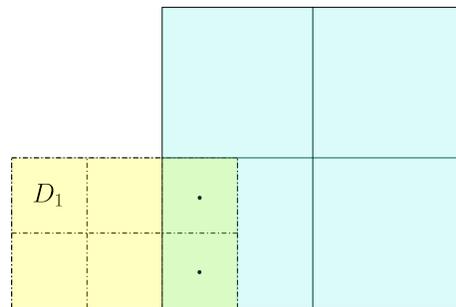
$$\hat{\nabla}(\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_{x-1/2}\varphi \\ \text{Minmod}(\partial_{y+1/2}\varphi, \partial_{y-1/2}\varphi) \\ \text{Minmod}(\partial_{z+1/2}\varphi, \partial_{z-1/2}\varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$



(a) Frontera física.



(b) Frontera compartida con dominios del mismo nivel de refinamiento.



(c) Frontera compartida con dominios de diferente nivel de refinamiento.

Figura 4.3: Esquematización bidimensional de la localización de las celdas fantasma de un dominio arbitrario  $D_1$  acorde con el tipo de frontera que comparte. Las celdas fantasma están marcadas con  $\cdot$  en cada caso.

donde  $\varphi$  es una función escalar arbitraria; si la frontera perpendicular a la dirección  $-\hat{x}$  es la que es compartida, entonces  $\partial_{x+1/2}$  se usa en su lugar. Fórmulas similares se utilizan cuando las caras son perpendiculares a las direcciones  $\pm\hat{y}$ ,  $\pm\hat{z}$ .

#### 4.3.5. Inyección de datos refinados dentro de la malla gruesa

Una vez que las variables en la malla gruesa y su refinamiento están sincronizadas, los valores de las variables conservativas en la malla refinada deben ser inyectados dentro de la malla gruesa. Esto se hace sobrescribiendo los valores de los datos contenidos en las celdas gruesas con el promedio de los valores de los datos en las celdas refinadas que la cubren. En tres dimensiones esto se hace utilizando la fórmula

$$\mathbf{U}_{I,J,K}^\ell = \frac{1}{2^3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{U}_{i,j,k}^{\ell+1}, \quad (4.15)$$

donde  $\mathbf{U}_{i,j,k}^{\ell+1}$  son los valores para los datos de las celdas refinadas que cubren a la celda gruesa en la posición  $\mathbf{r}_{I,J,K}$ .

#### 4.3.6. Corrección de flujos numéricos

Los métodos de volúmenes finitos se basan en la conservación de cantidades en una celda dada. Por ejemplo, de la ecuación de conservación de la masa en su fórmula integral de volúmenes finitos, en la celda  $(i, j, k)$  puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \delta m_{i,j,k} = \Delta V \times & \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-1/2,j,k}^n - F_{i+1/2,j,k}^n) \right. \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i,j-1/2,k}^n - G_{i,j+1/2,k}^n) \\ & \left. + \frac{\Delta t}{\Delta z} (H_{i,j,k-1/2}^n - H_{i,j,k+1/2}^n) \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  es el volumen de la celda,  $\delta m_{i,j,k} = \Delta V (\rho_{i,j,k}(t + \Delta t) - \rho_{i,j,k}(t))$  es la ganancia total de masa en un paso temporal  $\Delta t$  y  $F = \rho v^x$ ,  $G = \rho v^y$ ,  $H = \rho v^z$  son los flujos numéricos a través de las caras de la celda cuyas direcciones normales son respectivamente  $\pm\hat{x}$ ,  $\pm\hat{y}$ ,  $\pm\hat{z}$ .

La ecuación (4.16) establecen que cada uno de los flujos numéricos introducen una ganancia o pérdida de masa a través de las caras de una celda. Ahora, al enfocarse en la superficie de la frontera en  $x = x_{i+1/2}$  puede verse que la ganancia de masa es

$$\delta m_{i+1/2,j,k}(t + \Delta t) = -\Delta t \times \Delta y \Delta z F_{i+1/2,j,k}(t). \quad (4.17)$$

Ahora bien, considerando la frontera entre dos dominios de distinto nivel de refinamiento. Cuando una celda perteneciente a una malla gruesa colinda con celdas pertenecientes a mallas refinadas por la derecha, a lo largo de la dirección  $\hat{x}$ , la variación de masa de la ecuación (4.17) debe ser igual en ambos lados de la frontera, como se esquematiza en la Figura 4.4; es así que la siguiente relación debe cumplirse:

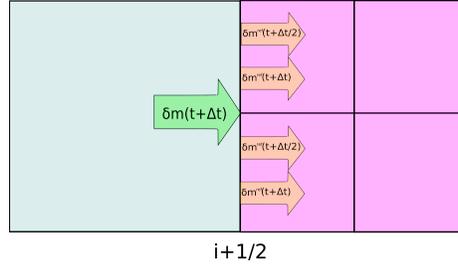


Figura 4.4: La ilustración de la frontera entre los niveles de refinamiento y la transferencia de masa de una celda de  $D^\ell$  a través de su cara ubicada en  $x = x_{i+1/2}$ , hacia su celda vecina de  $D^{\ell+1}$  durante un paso temporal. Nótese que  $\delta m_{i+1/2,j,k}$  tiene que ser computada en tiempos  $t + \Delta t/2$  y a tiempos  $t + \Delta t$ .

$$\delta m_{i+1/2,j,k}(t + \Delta t) = \sum_q \sum_r \left( \delta m_{p-1/2,q,r}(t + \Delta t/2) + \delta m_{p-1/2,q,r}(t + \Delta t) \right), \quad (4.18)$$

donde los subíndices  $(i, j, k)$  etiquetan la celda de  $D^\ell$  y  $(p, q, r)$  las celdas de  $D^{\ell+1}$  que colindan con la celda gruesa por la derecha.

Al expresar la ecuación (4.18) en términos de (4.17), se expone una equivalencia de los flujos numéricos de las celdas en el nivel de refinamiento  $\ell - 1$  y las celdas del nivel de refinamiento  $\ell$  a través de la frontera compartida

$$-F_{i+1/2,j,k}^{\ell-1}(t) = +\frac{1}{8} \sum_m \sum_n \left( F_{l-1/2,m,n}^\ell(t) + F_{l-1/2,m,n}^\ell(t + \Delta t/2) \right). \quad (4.19)$$

Este argumento debe cumplirse no solo para todas las caras de la celda que colindan con mallas refinadas, pero también para los flujos numéricos de cada variable conservativa en estas caras.

Para aplicar la ecuación (4.19) se define una *corrección de flujo*, dada por

$$\delta \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^{\ell-1}(t + \Delta t) = \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^{\ell-1}(t) - \frac{1}{8} \sum_m \sum_n \left( \mathbf{F}_{l-1/2,m,n}^\ell(t) + \mathbf{F}_{l-1/2,m,n}^\ell(t + \Delta t/2) \right), \quad (4.20)$$

la cual es sustraída o sumada, dependiendo de cuál es el lado de la frontera compartida en el que se encuentran las celdas del refinamiento, una vez que las variables conservativas de la celda gruesa han sido actualizados, esto es:

$$\mathbf{U}_{i,j,k}^{\ell-1}(t + \Delta t) \rightarrow \mathbf{U}_{i,j,k}^{\ell-1}(t + \Delta t) - \Delta t \Delta y \Delta z \delta \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^{\ell-1}(t + \Delta t). \quad (4.21)$$

Evidentemente, las correcciones de flujos a lo largo de las direcciones  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  se implementan de

forma análoga.

## 4.4. Estructura del código CAFE-AMR

En esta sección se presenta una vista general del diagrama de flujo del código numérico desarrollado en este trabajo, CAFE-AMR. Este código fue escrito en el lenguaje de programación FORTRAN usando el estándar f90; utiliza la biblioteca mpich para la paralelización y la biblioteca hdf5 para guardar datos; fuera de estos aspectos, CAFE-AMR contiene sus propias bibliotecas y métodos.

### 4.4.1. Estructura de datos

CAFE-AMR funciona con una estructura de datos de bloques autosimilares; lo cual está esquematizado en la Figura 4.5, donde cada bloque posee los siguientes datos:

- Una malla discretizada con un espaciado regular usando  $N_x \times N_y \times N_z$  celdas más las celdas fantasma usadas para las fronteras.
- La ubicación física del centro del bloque de datos.
- Arreglos de memoria dinámica. Estos pueden contener los valores de las variables conservativas, o las correcciones de flujos dadas en (4.21) para las celdas que colindan con las fronteras del bloque.
- Una bandera que determina el nivel de refinamiento  $\ell$ . Esto permite deducir el volumen físico de las celdas contenidas en el bloque de datos junto con el correspondiente paso temporal  $\Delta t^\ell$ .
- Apuntadores a otros bloques que compartan fronteras físicas los cuales tengan el mismo nivel de refinamiento. Estos bloques reciben el nombre de vecinos, *neighbors*.
- Apuntadores a otros bloques que se conocen como hijos, *children*. Estos bloques en específico cubren un cuadrante, en dos dimensiones, o un octante, entres dimensiones, contenido en el bloque de datos original.
- Apuntador a otro bloque, al cual se le refiere como padre *father*, el cual tiene una porción de su dominio cubierta por este bloque.
- Muchas banderas lógicas, las cuales tienen varios usos, tales como definir condiciones de frontera y decidir si la memoria será utilizada para los arreglos; por mencionar algunos usos.

Todos los bloques están ordenados jerárquicamente en una estructura QuadTree, en simulaciones de dos dimensiones y OcTree en simulaciones tridimensionales. En la Figura 4.6 se presenta una estructura tipo QuadTree. Para esta jerarquización de datos, los refinamientos del dominio se generan de la siguiente manera. Primero, los bloques se analizan por cuadrantes:

1. Cada vez que una celda de cierto cuadrante satisfaga el criterio de refinamiento (4.1), el cuadrante total se marca para ser refinado.

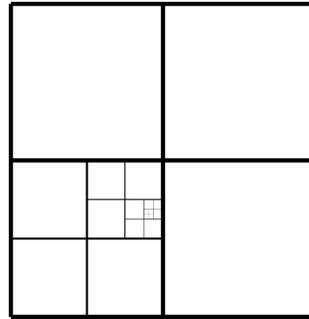


Figura 4.5: Estructura auto-similar de los bloques. En esta Figura, cualquier cuadrante de un subdominio puede ser cubierto por un bloque que tenga la misma forma y estructura de datos.

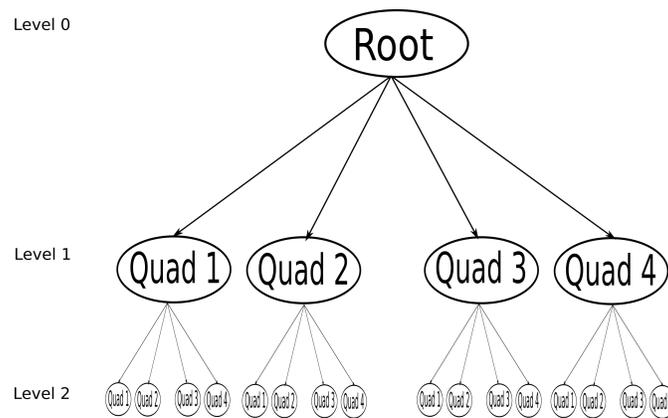


Figura 4.6: Estructura de datos QuadTree usada para ordenar los bloques de datos en un problema bidimensional con dos niveles de refinamiento. Cada hoja del árbol representa un bloque de datos.

2. Si el bloque hijo asociado a un determinado cuadrante del bloque tiene hijos de refinamiento, el cuadrante se marca como que debe ser refinado.
3. Si un cuadrante se marca para ser refinado, todos sus vecinos son refinados, incluso si corresponden a bloques diferentes.

Después, todos los cuadrantes marcados se cubren por bloques de datos nuevos los cuales se unen a la jerarquización Quadtree como hijos de los bloques que cubren. Más tarde, todos los cuadrantes que no fueron marcados para refinarse tendrán a sus respectivos hijos suprimidos, es decir que se les desalojará la memoria. Todo este proceso debe realizarse del nivel de refinamiento más alto hasta el nivel de refinamiento base, de manera que los bloques de datos estén apropiadamente anidados, acorde con el esquema mostrado en la subsección 4.3.1. Una vez que el proceso de refinamiento ha terminado y que todos los datos han sido interpolados, toda la estructura de los apuntadores hacia los vecinos se actualiza. El tratamiento de la jerarquización Octree es análogo.

Finalmente, si un bloque de datos se marca por colindar con uno de nivel de refinamiento inferior, se alberga memoria para un arreglo de corrección de flujos. Este arreglo acumula las correcciones

para poder calcular los términos de la ecuación (4.21). Marcas que indican si los datos serán utilizados para rellenar por interpolación las celdas fantasmas de los bloques hijos también son activadas al final.

#### 4.4.2. Evolución temporal

Como es sugerido por la estructura de datos, la evolución temporal se efectúa de manera recursiva comenzando en todos los bloques de un nivel de refinamiento base<sup>4</sup> hasta un nivel de refinamiento especificados por el usuario. El flujo de control de la evolución temporal, el cual sostiene la sincronización de todos los bloques es la siguiente:

1. Aplicar condiciones de frontera físicas en el nivel de refinamiento  $\ell$ .
2. Copiar los valores de los datos provenientes de los vecinos del mismo nivel de refinamiento y pegar esta información en las celdas fantasmas.
3. Rellenar las celdas fantasma de los bloques de nivel de refinamiento  $\ell + 1$  que linden con los cuadrantes (u octantes) de los bloques de nivel de refinamiento  $\ell$  por medio de la interpolación en una manera sincrónica, es decir siguiendo la ecuación (4.13).
4. Avanzar los bloques de nivel de refinamiento  $\ell$  un paso temporal  $\Delta t^\ell$ .
5. Avanzar *recursivamente* los bloques de nivel de refinamiento  $\ell + 1$  un paso temporal  $\Delta t^\ell/2$ .
6. Rellenar las celdas fantasma de los bloques de nivel de refinamiento  $\ell + 1$  que linden con los cuadrantes (u octantes) de los bloques de nivel de refinamiento  $\ell$  por medio de la interpolación en una manera sincrónica, es decir siguiendo la ecuación (4.13).
7. Avanzar *recursivamente* los bloques de nivel de refinamiento  $\ell + 1$  un paso temporal  $\Delta t^\ell/2$ .
8. Inyectar los valores de los bloques hijo en las correspondientes celdas gruesas de nivel de refinamiento  $\ell$  y que cubren la misma región numérica usando la ecuación (4.15).
9. Aplicar correcciones de flujos numéricos en bloques de nivel de refinamiento  $\ell$  siguiendo la ecuación (4.21).

Las correcciones de flujo son implementadas primero recolectando en arreglos de memoria dinámica, tanto la información contenida en las celdas que colindan con bloques de nivel de refinamiento  $\ell - 1$  y las correspondiente información contenida en las celdas gruesas de esos bloques; después de esto, estos datos son usados para construir los términos  $\delta F^{\ell-1}$  de la ecuación (4.20).

---

<sup>4</sup>El nivel de refinamiento base nos permite determinar una resolución inicial dada en una profundidad mayor en el árbol de jerarquización. Por ejemplo, un nivel inicial de 2 permite dividir inicialmente en 16 sectores un dominio numérico bidimensional y en 64 uno volumétrico.

## 4.5. Paralelización

La programación en paralelo involucra fragmentar un programa en partes que se puedan resolver de manera concurrente. En ese sentido, se buscó que el nuevo código tuviera una estructura fundamentalmente similar a la versión serial y que minimizara la fracción de código correspondiente a la distribución y comunicación entre procesos. Esto en beneficio tanto de la escritura del código como de velocidad de cómputo.

Ahora bien, es cierto que tanto las bibliotecas CHOMBO [LBNL, 2019] como PARAMESH [MacNeice et al., 2000] permiten paralelizar un código ya escrito; se asumió como acercamiento más eficaz diseñar estrategias, funciones y subrutinas propias, y no tener que aprender las rutinas de estas bibliotecas. Por lo tanto, aunque en un sentido no tan estricto, buena parte de las subrutinas son creaciones originales. Al inicio del diseño de la paralelización del código, iniciamos con la búsqueda de la estrategia más natural posible. En el lenguaje de programación FORTRAN, existen tres herramientas para diseñar programas con paralelización:

- Open MP. De licencia gratuita y memoria compartida entre todos los procesadores. Es útil para distribuir operaciones sobre arreglos definidos dentro de ciclos.
- COARRAY FORTRAN. También de licencia gratuita, memoria compartida. Se sirve de la estructura nueva COARRAY implementada a partir del estándar del 2008 de FORTRAN.
- MPI. Tiene versiones comerciales como *open source*. La versión utilizada es Open MPI que es open source y mantenida por diferentes instituciones académicas. La memoria no es compartida entre procesadores y debe definirse cómo y cuándo compartir la información entre ellos.

Se ha decidido utilizar *MPI* debido a que es la biblioteca dominante para paralelización en FORTRAN. Todos los códigos estudiados que implementan paralelización así como las bibliotecas CHOMBO y PARAMESH utilizan MPI; lo cual facilitó la selección y adaptación de estrategias para la confección de la paralelización.

La paralelización se implementa utilizando la biblioteca MPI, donde la comunicación entre hilos se realiza de manera explícita. Y las funciones y los métodos utilizados se encuentran explicados en las referencias [Chivers and Sleightholme, 2018, Ray, 2019].

Cada hilo tiene una copia entera de la estructura de árbol, y no todas las hojas contienen datos. Un bloque de datos tiene una bandera que especifica cuál hilo se encargará de su evolución temporal. Todos los hijos de este bloque heredarán el hilo que manejará a su vez la evolución temporal. Cada vez que un refinamiento es construido, todos los árboles de todos los hilos son actualizados.

La evolución de los bloques de datos se realiza de manera casi independiente, pero ciertos bloques deben ser compartidos entre hilos. Esto se hace mandando un arreglo unidimensional que contiene toda la información del bloque que necesita ser compartida y luego estos bloques son reconstruidos en el hilo que solicitó la información.

Después de que la información ha sido compartida, y utilizada la memoria de los bloques reconstruidos es desalojada. Este algoritmo se describe a continuación.

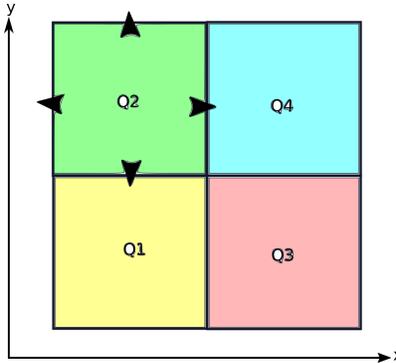


Figura 4.7: Distribución del dominio en 4 procesadores, cada color representa un procesador diferente.

#### 4.5.1. Paralelizar desde lo serial

El estándar de MPI segmenta y restringe el acceso a la memoria disponible del sistema de manera que cada procesador tenga una parcela propia y realice cálculos con los datos proporcionados en ésta. Por otra parte, la estructura de datos que se ha utilizado en el esquema AMR divide el dominio numérico en regiones independientes, y auto similares, cuyos datos evolucionan por separado y solo se comparten información a través de las fronteras; esta división se presenta en la Figura 4.5. Con todo esto, existe una manera para paralelizar el código casi directa y consiste en asignar a cada procesador regiones autosimilares del dominio numérico. Esquemáticamente esto es representado en la Figura 4.7. De esta manera, la evolución de los datos en cada procesador y el refinamiento de las regiones se produce de manera independiente, casi serial, y sólo es necesario que se comparta la información de sus fronteras correspondientes, junto con la información de qué regiones están siendo refinadas.

Actualmente se ha podido definir la división de trabajo para cualquier número par de procesadores<sup>5</sup> y es de notarse que la distribución de trabajo es fija<sup>6</sup>.

#### 4.5.2. Control de Flujo

La manera como MPI funciona es generando una copia del programa en cada uno de los procesadores que participarán en el procesamiento de datos; así que para tener un control del flujo y para definir la transferencia de datos entre procesadores, se etiqueta a cada procesador según un contexto que el usuario puede definir. En el código, los procesadores corren casi todas las instrucciones de manera independiente excepto en lo concerniente a:

- Compartir información entre fronteras de bloques de datos que pertenezcan a procesadores diferentes.

<sup>5</sup>La distribución dinámica de trabajo se vuelve relevante cuando la cantidad de procesadores es mucho mayor a la que se podrán utilizar en los equipos donde realizaremos las simulaciones, por ejemplo en clusters cuya cantidad de nodos es del orden de  $10^5$ ; este tema es debatible y actual en la disciplina de ciencias computacionales.

<sup>6</sup>Gracias a la estructura modular del código, es posible actualizarlo para tener una versión que distribuya el trabajo dinámicamente.

- Compartir el estado de la porción del árbol de meta datos, es decir, qué regiones se refinan o dejan de refinarse en cada procesador.
- Producir Output en un sólo archivo.

Para mantener un orden en flujo se utiliza la herramienta `mpi_barrier` que pone en pausa a los procesadores hasta que todos *concurran* al mismo punto del flujo de instrucciones. De esta manera se garantiza que antes de que inicie la transferencia de datos, o las partes secuenciales, los procesadores estén sincronizados.

### 4.5.3. Comunicación entre procesadores

Para compartir la información entre procesadores, se utilizaron dos entornos: comunicación por pares y *broadcasting*.

#### Comunicación por pares

En MPI, la transferencia de datos entre dos procesadores se puede dar de manera

- Sincrónica: la transferencia termina cuando el destinatario recibe el mensaje.
- En *Buffer*: la transferencia termina cuando el remitente envía la información a un *buffer*, es decir a una caja de datos de la cual el destinatario copiará la información en otro momento.
- Estándar: independiente de si la información le llega o no al destinatario.
- Tipo envío *Ready*: Similar al envío de datos tipo *buffer* pero el remitente recibe una bandera lógica cuando el destinatario reciba el mensaje.

La ventaja de la manera sincrónica de la transferencia de datos es que es estable y explícita, por lo tanto disminuye la cantidad de errores, la desventaja es que bloquea el flujo de instrucciones en ambos procesadores de manera que si la comunicación no finaliza, el programa queda colgado y nunca termina. A este término en el que dos procesadores no pueden continuar con el flujo de instrucciones por este problema de comunicación se le conoce como *Deadlock* y se tienen algunas estrategias para evitarlo. En las versiones estables del código el *Deadlock* no se produce.

En el código la transferencia de datos entre fronteras se realiza de manera sincrónica, enviando una copia de los bloques de datos que rocen bloques del procesador con el que están comunicándose. Esto se puede contemplar en la Figura 4.8: las imágenes presentan la evolución de una onda expansiva en la versión sin refinamientos del código; primero se muestran los datos que posee cada procesador; el segundo bloque de imágenes muestra cuáles bloques de datos han sido copiados de los diferentes procesadores. Para mandar los bloques de datos de un procesador a otro, se siguen las siguientes instrucciones:

1. Se analiza el árbol de meta datos en cada procesador; se genera una lista de nodos que serán enviados, en el nodo remitente, y una lista de los que se recibirán, en el nodo destinatario. Estas listas deben ser exactamente iguales en miembros y en su ordenamiento. Los nodos enviados forzosamente deben tener datos y además tener vecinos que se evolucionan en el

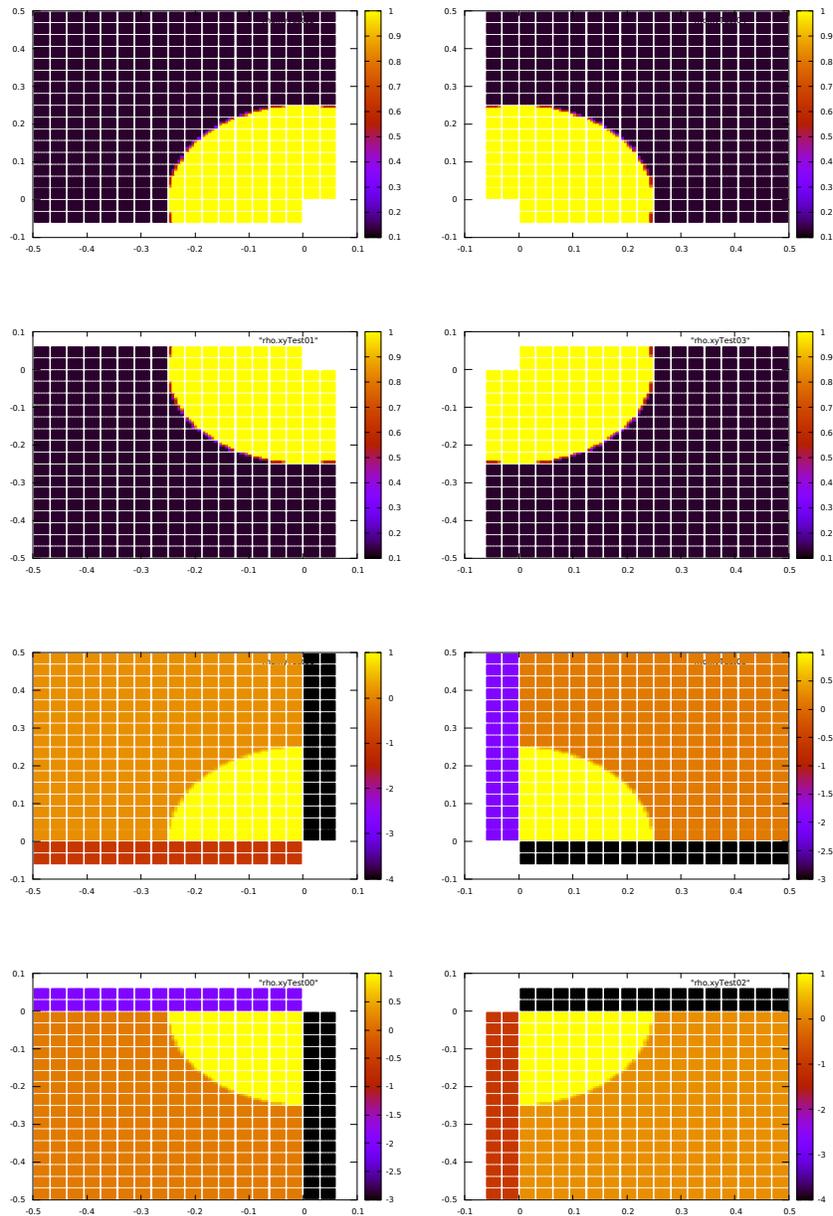


Figura 4.8: Densidad en una Onda expansiva. Comunicación en una evolución para cuatro procesadores; los procesadores en MPI se enlistan a partir del 0, en este caso el procesador 0 se conecta con el procesador 1 y el 3, y así sucesivamente.

procesador destinatario, los nodos recibidos no deben de tener datos y deben de tener la bandera que indica que se evolucionan en el procesador remitente y ser vecinos de nodos del destinatario.

2. En ambos procesadores se crea un arreglo de tamaño  $N \times Bsize$ , donde  $N$  es el número de elementos de la lista y  $Bsize$  el tamaño del bloque de datos que se envía<sup>7</sup>, este tamaño varía dependiendo de la información que se enviará.
3. En el procesador remitente, se llena este arreglo con los datos de cada miembro de la lista, esto desdobla cada bloque de datos y genera un arreglo unidimensional con toda la información.
4. Se envía y recibe el arreglo con la información según corresponda.
5. En el procesador destinatario, se visita cada nodo de la lista y se le vierte la información del arreglo recibido de manera recíproca a cómo fue llenado antes de enviarse.
6. Se eliminan las listas y los arreglos en ambos procesadores.

Para optimizar el uso de memoria, una vez que se ha terminado la operación que requería información de otros procesadores —por ejemplo aplicar condiciones de frontera—, los nodos que posean datos y que no se evolucionen en el procesador correspondiente son vaciados.

Ahora bien, surge la discusión de cómo definir de manera óptima qué pareja de procesadores van a comunicarse. Esto se ha resuelto de forma similar a como se define un torneo largo de varios equipos. Por ejemplo, si se tienen 20 equipos, habrá 19 jornadas de enfrentamiento, y en cada jornada se enfrentarán todos los equipos de manera que cada equipo (procesador) se enfrente (envíe datos) con cada uno de los demás equipos (procesadores).

En el código las jornadas de comunicación se definen llenando una matriz de  $N \times N$  donde  $N$  es el número de procesadores, de manera que cada entrada define en cual “jornada” se enfrentarán los procesadores. En la tabla 4.9 se presenta, como ejemplo, la matriz para 10 procesadores.

Procesadores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	-1	3	4	5	6	7	8	9	2
3	2	3	-1	5	6	7	8	9	1	4
4	3	4	5	-1	7	8	9	1	2	6
5	4	5	6	7	-1	9	1	2	3	8
6	5	6	7	8	9	-1	2	3	4	1
7	6	7	8	9	1	2	-1	4	5	3
8	7	8	9	1	2	3	4	-1	6	5
9	8	9	1	2	3	4	5	6	-1	7
10	9	2	4	6	8	1	3	5	7	-1

Figura 4.9: Tabla de comunicación por pares para 10 procesadores.

<sup>7</sup>En el caso en el que se envíen todas las variables conservativas  $Bsize = 9 \times N_x + gpts \times N_y + gpts$

Todo esto se refleja en que habrá un ciclo de  $N - 1$  iteraciones, en el que se envían y reciben datos. También esto causa la restricción de que el número de procesadores que participen en la simulación sea par.

### Broadcasting

Dentro de las herramientas que se tienen en la biblioteca MPI, existe una para mandar un mensaje desde un procesador a todos los demás al mismo tiempo, diferente a la comunicación por pares, esto se conoce como *Broadcast* y se hace mediante la instrucción `mpi_bcast`. Esta herramienta se utiliza para compartir la información de los metadatos de la siguiente manera:

1. Se crea un arreglo de tamaño  $N$  de variables lógicas, donde  $N$  es el número de nodos que se evolucionan en el procesador.
2. Se llena el arreglo visitando cada nodo del procesador y guardando el estado de la bandera de interés.
3. Se ejecuta el *broadcast* de este arreglo y todos los demás procesadores reciben esta información.
4. En cada procesador se recorre el árbol de metadatos de la misma manera que en el procesador emisor y se vacía la información de las banderas en cada nodo de manera recíproca a como se llenó el arreglo.
5. El arreglo con la información de las banderas se elimina.

En el código, la rutina que hace el *broadcast* genera una matriz de tamaño  $N_p \times N_{B_p}$ , donde  $N_p$  es el número de procesadores y  $N_{B_p}$  es el número de nodos pertenecientes al procesador, esta matriz llena primero la fila que corresponde al procesador correspondiente y el resto de filas se llena por medio de los pasos atrás descritos. Una vez llena la matriz, todo el árbol de metadatos se actualiza.

#### 4.5.4. Tareas del código

A continuación se presentan las tareas que realiza el programa AMR versión paralela:

1. Evolucionar las variables. Se realiza del nivel de refinamiento inicial al nivel de refinamiento máximo.
  - a) **Condiciones de frontera a vecinos con dominio refinado.**
  - b) Condiciones de frontera físicas.
  - c) **Condiciones de frontera vecinos mismo nivel de refinamiento  $l$ .**
  - d) Metodo de Líneas para avanzar los datos  $\Delta t$ .
  - e) Evolucionar recursivamente nivel  $l + 1$ .
  - f) **Condiciones de frontera a vecinos con dominio refinado.**
  - g) Evolucionar recursivamente nivel  $l + 1$ .

- h)* Inyectar datos del dominio refinado al dominio grueso.
  - i)* **Implementar corrección de flujos.**
- 2. Refinar Dominio. Se realiza del nivel máximo de refinamiento en orden descendente hasta el nivel de refinamiento inicial.
  - a)* Limpiar las marcas de refinamiento.
  - b)* Desalojar memoria de donde se guardan las correcciones de flujos.
  - c)* Marcar bloques de datos según cierto criterio de refinamiento.
  - d)* **Hacer *broadcast* de esta marcas.**
  - e)* Marcar bloques de datos si los vecinos estan marcados.
  - f)* Marcar bloques de datos si contienen hijos que contienen dominios refinados.
  - g)* Activar y desactivar bloques de datos si poseen o no marcas.
  - h)* Rellenar los nodos con bloques de datos nuevos (sólo si pertenecen procesador que realiza los cálculos).
  - i)* Alojara memoria para las correcciones de flujos interrefinamiento.
- 3. Guardar datos de manera secuencial, es decir, proceso por proceso.

Las instrucciones marcadas en negrita son las únicas en los cuales se necesita establecer comunicación entre procesos. En todas las demás, el código es análogo a la versión serial.



## Capítulo 5

# Pruebas magnetohidrodinámicas.

### Resumen

En este capítulo se presentan algunos resultados obtenidos al utilizar el código CAFE-AMR para las pruebas estándar de la MHD siguientes: Onda expansiva bidimensional; Vórtice de Orszag-Tang; Rotor 2D; Tubo de choque 3D rotado; Interacción nube-viento supersónico 3D. Aunque no todas las pruebas son adecuadas para probar la estrategia AMR, éstas ayudan a contrastar los resultados obtenidos con los de trabajos paralelos. Se argumenta al final de este capítulo que la herramienta numérica es adecuada para realizar simulaciones robustas.

### 5.1. Onda expansiva bidimensional

Ésta es una de las pruebas básicas de un código hidrodinámico y se usó aquí para mostrar qué también persigue la estrategia AMR de este trabajo a la geometría de una onda de choque esférica expansiva, así como las estructuras que deja detrás de ella. Para esta prueba se ha utilizado el criterio dado por la ecuación 4.2 para activar el proceso de refinamiento. El dominio numérico está dado por  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  usando las siguientes condiciones iniciales para la densidad, presión y velocidad del tubo de choque de Sod [Sod, 1978]:

$$(\rho, p, v^x, v^y) = \begin{cases} (1, 1, 0, 0), & x^2 + y^2 \leq 0.5^2 \\ (0.125, 0.1, 0, 0), & x^2 + y^2 > 0.5^2, \end{cases} \quad (5.1)$$

considerando un valor para el índice adiabático  $\gamma = 1.4$ . Se ha fijado una resolución base de dominio discreto de  $32 \times 32$  celdas con dos niveles de refinamiento resultado en una resolución equivalente de  $128 \times 128$  celdas. El factor CFL se fija a 0.125 y se emplean condiciones de frontera de flujo saliente. Los flujos numéricos se construyen con la fórmula HLLE junto con el reconstructor lineal Minmod.

Los resultados para la densidad y la estrategia de refinamiento en un tiempo  $t = 0.2$  se muestran en la Figura 5.1. Se usaron dos diferentes valores para el umbral de refinamiento  $\chi_r = 5, 10$  en la ecuación 4.1. La Figura ilustra qué tan bien es capturada la onda de choque por un cascarón de celdas de alta resolución, mientras que otro cascarón cubre estructuras dejadas detrás de éste. Los

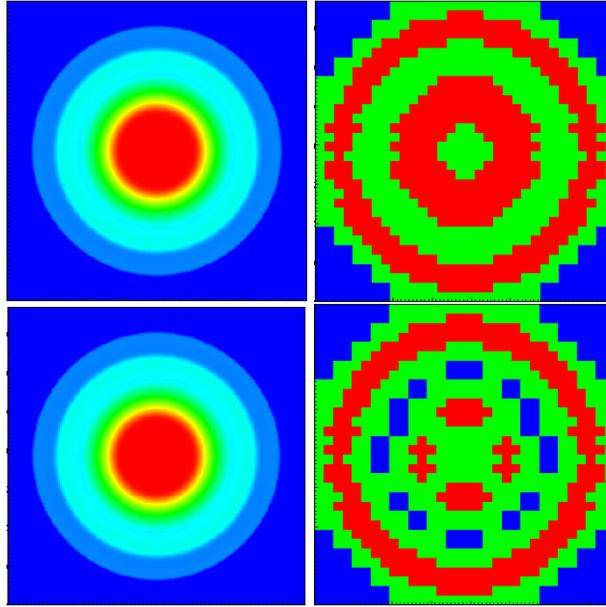


Figura 5.1: Perfil de densidad (izquierda) y cobertura del refinamiento (derecha) de la onda expansiva bidimensional, usando  $\chi_r = 5$  (parte superior), 10 (parte inferior) con el criterio (4.2) en un tiempo  $t = 0.2$ . El gradiente de colores para la densidad va del rojo para  $\rho = 1$  al azul para  $\rho = 0.125$ , mientras que el gradiente de colores para la estructura de refinamiento va de azul para la resolución base al rojo para la resolución mas alta.

resultados para los dos valores de  $\chi_r$  indican como ajustar este parámetro para poder manejar la carga de las celdas refinadas y qué tan costoso sería en términos de la memoria. También se muestra que los esquemas de refinamiento apropiadamente anidan cada nivel de refinamiento, de manera que los dominios de nivel  $\ell$  nunca lindan con dominios de nivel mayor que  $\ell + 1$ .

En la Figura 5.2 se muestra el tiempo de cómputo para la simulación de la onda expansiva bidimensional en función de los procesadores utilizados. Se notan dos cosas: aumentar los niveles de refinamiento incrementa el tiempo de cómputo, y que para este problema de simetría esférica, 16 procesadores tienden a reducir el tiempo de cómputo.

## 5.2. Vórtice de Orszag-Tang

Este problema fue presentado en [Orszag and Tang, 1979]. Sirve para medir la robustez del código en el manejo de la formación de choques y la transición para la turbulencia supersónica en la MHD de dos dimensiones. Con esta prueba se pueden hacer estimaciones de la contribución de los monopolos magnéticos en la simulación, ya que se manifiestan regiones en las cuales  $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ .

Para construir el test se utilizan las siguientes especificaciones: Las dimensiones del dominio numérico son de  $[0, 1] \times [0, 1]$ ; con una resolución inicial de  $64 \times 64$  celdas y tres niveles de refinamiento dando como resolución equivalente de  $512 \times 512$  celdas; el criterio de refinamiento utilizado es el de 4.3 con la densidad  $\rho$  como función escalar para evaluar y un umbral de refinamiento de

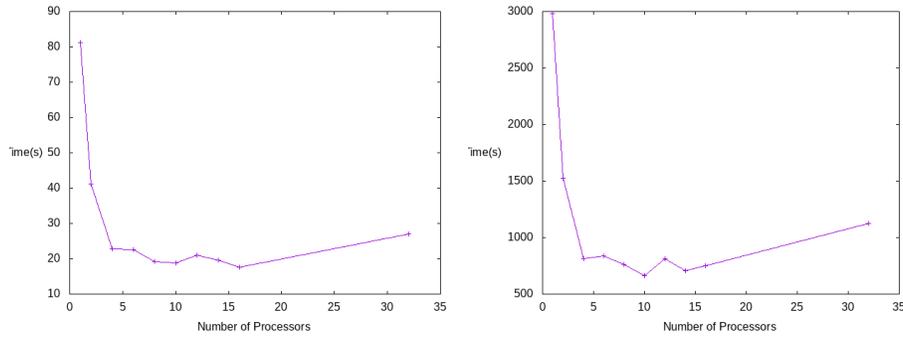


Figura 5.2: Tiempo computacional utilizado para dos niveles de refinamiento (izquierda) y para tres niveles de refinamiento (derecha), usando como umbral de refinamiento  $\chi_r = 5$  con el criterio (4.2) en un tiempo  $t = 0.06$ .

$\chi_r = 0.1$ ; el factor de estabilidad tiene un valor de  $CFL = 0.5$ ; los flujos numéricos se construyeron utilizando la fórmula de Roe junto con el reconstructor lineal Minmod; las condiciones de frontera son periódicas.

Para los valores iniciales se utilizan componentes periódicas dadas por la siguiente tabla

$\rho_0$	$25/36\pi$
$P_0$	$5/12\pi$
$v_x$	$-v_0 \sin[2\pi y]$
$v_y$	$v_0 \sin[2\pi x]$
$B_x$	$-B_0 \sin[2\pi y]$
$B_y$	$B_0 \sin[4\pi x]$

donde  $v_0 = 1$  y  $B_0 = 1/\sqrt{4\pi}$  y el índice adiabático tiene un valor de  $5/3$ .

Los datos iniciales para  $\rho$  y  $P$  se calculan usando  $\beta = 10/3$  y el número Mach  $M = 1$ , se obtienen de la siguiente forma:

$$\beta_0 = 8\pi P_0$$

$$M = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}$$

El campo magnético se calcula a través de un potencial vectorial  $\mathbf{A}$  definido en dos dimensiones como

$$\mathbf{A} = B_0 \left( \frac{\cos(4\pi x)}{4\pi} + \frac{\cos(2\pi y)}{2\pi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

De manera que  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Esto garantiza que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$  inicialmente.

En la Figura 5.3 se presentan las gráficas de la densidad,  $\rho$ , y de la divergencia del campo magnético,  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ , a un tiempo  $t = 0.5$ . Se aprecia que el perfil de la densidad es altamente estructurado y posee varias regiones discontinuas y es precisamente en estas regiones donde la variación de la divergencia del campo magnético es no nula. No obstante puede verse que en la mayor parte del dominio numérico la divergencia es cercana a cero.

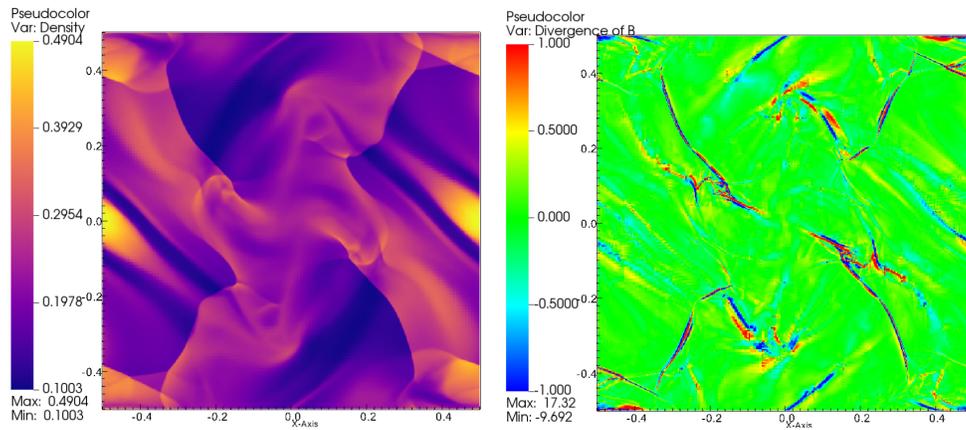


Figura 5.3: Perfil de la densidad (izquierda) y de la divergencia del campo magnético (derecha) de la prueba del vórtice de Orszag-Tang al tiempo  $t = 0.5$ . Los valores de  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  han sido restringidos de -1 a 1 para facilidad de observación.

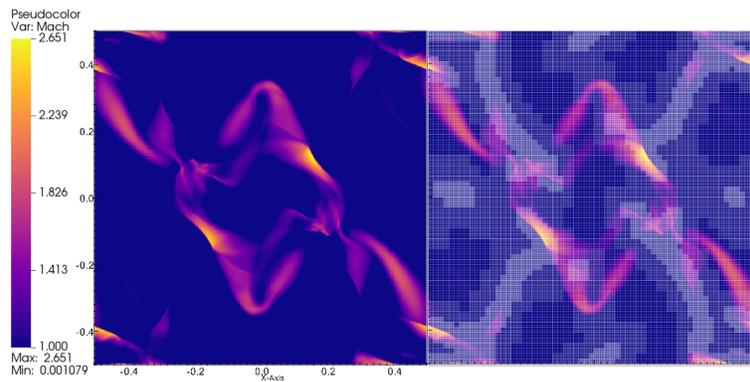


Figura 5.4: Perfil de la magnitud de la velocidad normalizado con respecto a la velocidad del sonido para la prueba del vórtice de Orszag-Tang al tiempo  $t = 0.5$ . Del lado izquierdo se muestran sólo las regiones que poseen velocidades supersónicas (valores  $> 1$  en la gráfica); del lado derecho se muestra cómo la estrategia AMR asigna la mayor resolución a ciertas regiones.

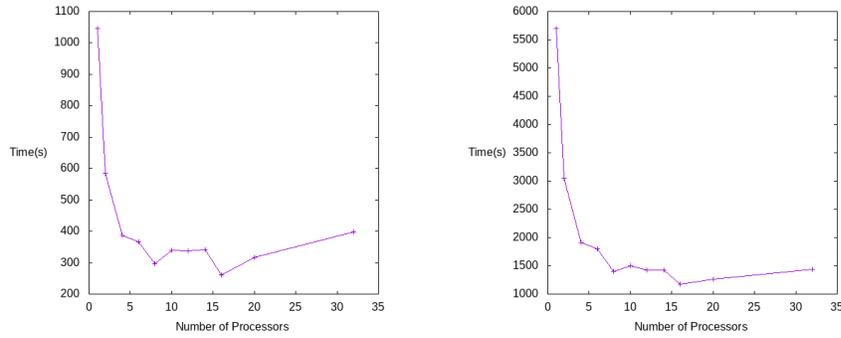


Figura 5.5: Tiempo computacional utilizado en función del número de procesadores para dos niveles de refinamiento (izquierda) y para tres niveles de refinamiento (derecha), en un tiempo  $t = 0.5$

En la Figura 5.4 se puede observar que la velocidad del fluido es supersónica en regiones cercanas a ciertas discontinuidades. Es en estas zonas donde se podría desarrollar turbulencia. Por otra parte se observa que la estrategia de refinamiento implementada cubre las regiones de mayor magnitud de la velocidad, no obstante existen algunas zonas que no fueron cubiertas con la mayor resolución. El escoger la densidad como función escalar evaluadora del refinamiento permite observar que ciertas cantidades no serán cubiertas de la mejor manera. Por otra parte, ésta prueba tiene muchas subestructuras finas a lo largo de todo el dominio lo cual lo convierte en un sistema poco apropiado para resolverlo utilizando la estrategia AMR.

En la Figura 5.5 se muestra el tiempo de cómputo para la simulación del vórtice de Orszag-Tang en función de los procesadores utilizados. Al aumentar los niveles de refinamiento crece el tiempo de cómputo, para este problema dada la naturaleza periódica y ubicua de las subestructuras complejas que componen a la simulación, el número que parece reducir el tiempo de cómputo es de 16 procesadores, al igual que en el caso esférico de la onda expansiva.

### 5.3. Rotor 2D

Esta inestabilidad sirve para probar al código CAFE-AMR en un escenario donde fuertes ondas alfvénicas torcionales se generen y propaguen en el dominio numérico. Se define el problema en el dominio  $[0, 1] \times [0, 1]$  el cual es cubierto con  $128 \times 128$  celdas y utilizando un factor de estabilidad de  $CFL = 0.125$ . Las simulaciones utilizan al fórmula de flujos HLLC y el reconstructor lineal Minmod. Las condiciones iniciales que disparan la simulación para la densidad y la velocidad están dadas según el trabajo de [Balsara and Spicer, 1999]):

$$(\rho, v_x, v_y) = \begin{cases} (10, -fu_0(y-0.5)/r_0, -fu_0(x-0.5)/r_0) & r \leq r_0 \\ (1 + 9f(r), -fu_0(y-0.5)/r, fu_0(x-0.5)/r) & r_0 < r < r_1 \\ (1, 0, 0) & r \geq r_1 \end{cases}$$

donde los parámetros numéricos se fijan como  $r_0 = 0.1$ ,  $r_1 = 0.115$ . Las coordenadas radiales se miden del centro de simetría  $r = \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}$  y usando la función  $f(r) = \frac{r_1-r}{r-r_0}$  y  $u_0 = 1$ . El campo magnético es horizontal inicialmente y se define como  $(B_x, B_y) = (5/\sqrt{4\pi}, 0)$ . En todo el dominio se fija la presión como  $p(x, y) = 1$ , y la prueba se calcula asumiendo un índice adiabático

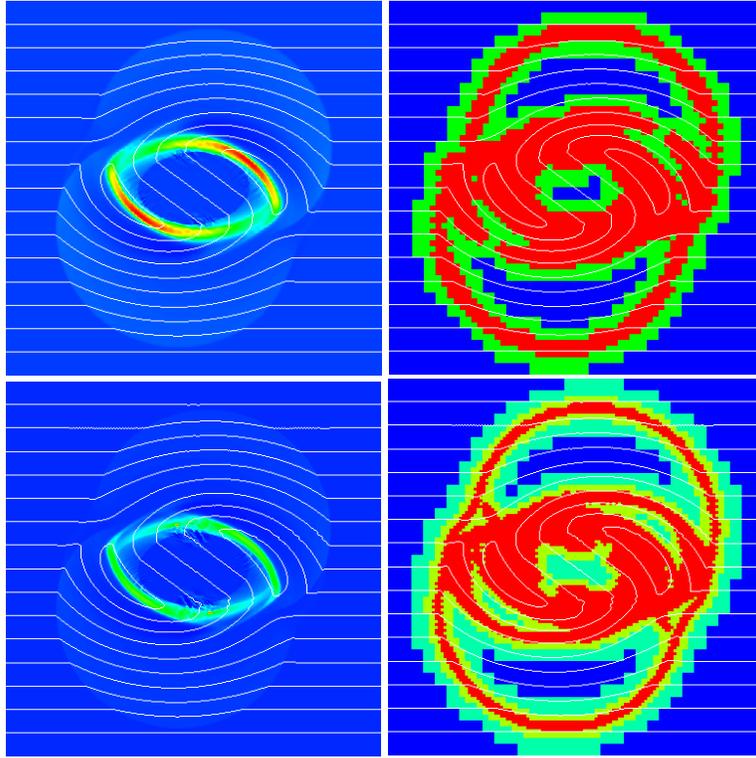


Figura 5.6: Instantáneas de la densidad (izquierda) y de la estructura de refinamiento(derecha) de la prueba del Rotor 2D en un tiempo  $t = 0.15$  usando el criterio de refinamiento (4.2) y con un umbral de  $\chi_r = 20$ . En la parte superior e inferior se muestran los resultados para dos y tres niveles de refinamiento, respectivamente. Las líneas blancas representan un muestreo de las líneas de campo magnético.

de  $\gamma = 1.4$ . En esta prueba, el campo magnético desacelera la velocidad de rotación al impedir la torsión de las líneas de campo magnético. Instantáneas de la evolución aparecen en la Figura 5.6, donde se usa el criterio de refinamiento (4.2) con un umbral de  $\chi_r = 20$ . La Figura muestra las comparaciones para simulaciones con dos y tres niveles de refinamiento.

#### 5.4. Tubo de Choque 3D Rotado

La versión de una dimensión de esta prueba fue propuesta por [Ryu and Jones, 1994] para evaluar los esquemas numéricos para métodos que capturen [Gardiner and Stone, 2008] al conjunto de valores iniciales se le implementó una transformación para poder producir una onda de choque que se desplazara a lo largo de un plano no preferencial para un código tres dimensional descrito en coordenadas cartesianas. Esta prueba consisten en mostrar la invariancia traslacional de la solución. Por ejemplo, en [Mignone et al., 2011] esta prueba es usada para ponderar el rastreo de los diferentes tipos de discontinuidades, así como de su adecuada evolución, usando la estrategia AMR.

Las condiciones iniciales consisten en un problema de Riemann con la discontinuidad definida

en un plano oblicuo al dominio numérico. Esto se hace al escoger un sistema referencial cartesiano apropiado,  $(x_1, y_1, z_1)$ , con la interfaz ubicada en  $x_1 = 0$ ; se definen, entonces, los estados izquierdo ( $x_1 < 0$ ) y derecho ( $x_1 > 0$ ) para la discontinuidad. Estas condiciones iniciales son luego mapeadas al dominio computacional a través de transformaciones de rotación dadas por

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \alpha \cos \beta - y_1 \sin \beta - z_1 \sin \alpha \cos \beta \\ y &= x_1 \cos \alpha \sin \beta + y_1 \cos \beta - z_1 \sin \alpha \sin \beta \\ z &= x_1 \sin \alpha + z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos de rotación alrededor de los ejes  $y$  y  $z$ , respectivamente. Al tener celdas cúbicas, estos ángulos se escogen de tal manera que se logra tener un desplazamiento entero de las celdas  $(n_x, n_y, n_z)$ , a partir de la disposición en una dimensión, donde

$$n_x + n_y \tan \beta + n_z \frac{\tan \alpha}{\cos \beta} = 0. \quad (5.3)$$

Las condiciones iniciales específicas están dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{V}_L = (1.08, 1.2, 0.01, 0.5, \frac{2}{\sqrt{4\pi}}, \frac{3.6}{\sqrt{4\pi}}, \frac{2}{\sqrt{4\pi}}, 0.95)^T \\ \mathbf{V}_R = (1, 0, 0, 0, \frac{2}{\sqrt{4\pi}}, \frac{4}{\sqrt{4\pi}}, \frac{2}{\sqrt{4\pi}}, 1)^T, \end{cases} \quad (5.4)$$

donde los subíndices  $L$  y  $R$  implican los estados iniciales izquierdo y derecho, respectivamente, y  $\mathbf{V} = (\rho, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z, p)$  es el vector de variables primitivas. El dominio numérico es una caja de tamaño  $[-0.75, 0.75] \times [-0.9375, 0.9375] \times [-0.9375, 0.9375]$ , que se ha discretizado con una resolución base de  $192 \times 24 \times 24$  celdas, y tres niveles de refinamiento para lograr una resolución equivalente de  $3048 \times 384 \times 384$  celdas. Para la evolución se usó un factor de estabilidad de  $CFL = 0.125$  y condiciones de frontera de flujo saliente. El criterio de refinamiento es (4.2) con un umbral de refinamiento de  $\chi_r = 1.0$ . Los flujos numéricos están construidos utilizando la fórmula de flujos HLLC con el reconstructor lineal Minmod. Los ángulos de rotación para el problema de Riemann, ver la ecuación (5.3), fueron escogidos para  $\tan \alpha = -0.05$ ,  $\tan \beta / \cos \alpha = 0.025$ .

La Figura 5.7 presenta la solución a lo largo del eje  $x_1$  del sistema de referencia no rotado con  $y_1 = z_1 = 0$  en  $t = 0.1875$ . Para producir las gráficas, se ha aplicado la rotación inversa a la planteada en la ecuación (5.2). La solución consiste de dos ondas de choque de modo rápido separadas por una discontinuidad rotacional y una discontinuidad de contacto, lo cual es conforme con la prueba de una dimensión de [Ryu and Jones, 1994]. La solución tiene una onda de baja amplitud y alta frecuencia en  $B_x$ , ubicada en la discontinuidad de contacto y capturada por la fórmula de flujos HLLC, la cual puede ser producida por el error de aproximar el problema con un esquema de tres ondas cuando el problema linealizado de las ecuaciones MHD corresponde a una solución de 7 ondas. Se requiere en ese sentido análisis posteriores con los métodos de flujos tipo Roe, lo cual se realizará en trabajos posteriores.

En la Figura 5.8 se muestra como la estrategia de refinamiento persigue las regiones del dominio numérico que presentan mayor estructura, lo cual permite rastrear las ondas MHD con una mayor resolución

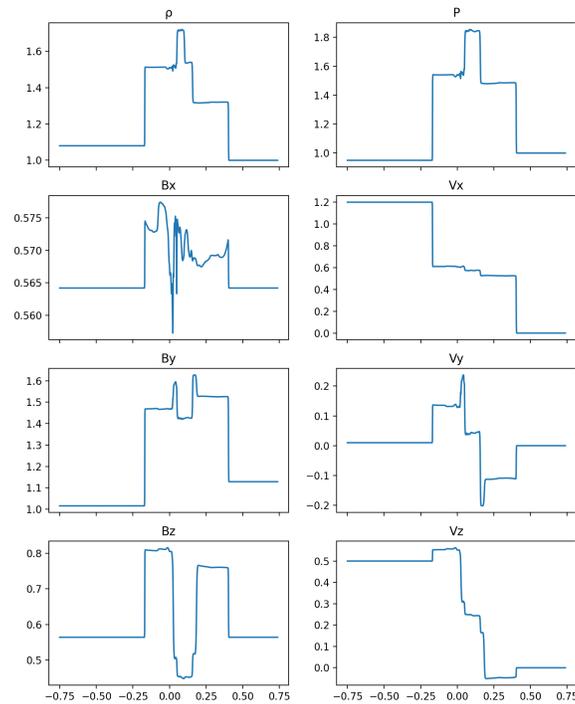


Figura 5.7: Densidad, Presión, Campo magnético, y componentes de la velocidad de la prueba del tubo de choque 3D rotado al tiempo  $t = 0.1875$ . Las mediciones son realizadas a lo largo del eje  $x_1$  perteneciente al sistema no rotado.

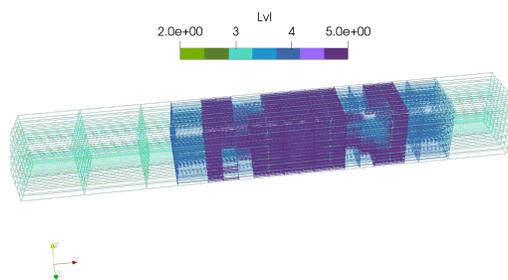


Figura 5.8: Estructura de refinamiento de la prueba del tubo de choque 3D Rotado al tiempo  $t = 0.1875$ . La región en púrpura tiene la resolución más alta, mientras que las regiones más verdes son de celdas más voluminosas.

### 5.4.1. Interacción nube-viento supersónico 3D .

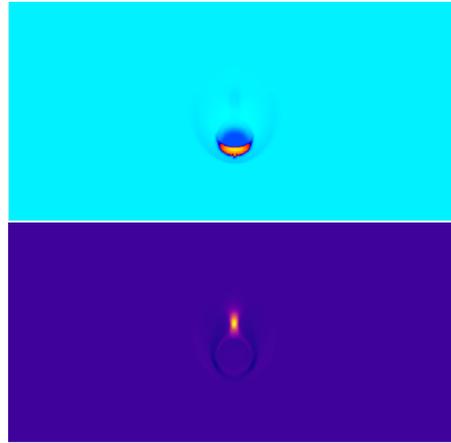
Esta prueba ha sido presentada en [Agertz et al., 2007] con la motivación de conocer si una implementación de la estrategia AMR es capaz de capturar estructuras hidrodinámicas altamente localizadas, cuyos altos gradientes de presión generen estructuras magnética en localizadas. Esta prueba presenta procesos típicamente astrofísicos importantes para un sistema multifase, tales como el arrancamiento por la presión de choque y la fragmentación a través de inestabilidades tipo Rayleigh-Taylor (RT) y Kelvin-Helmholtz (KH). En el contexto de la estrategia AMR, este problema se ha usado para validar qué tan bien se rastrean estructuras localizadas, como fue mostrado en [Ziegler, 2008]. Esta prueba simula la interacción entre un fluido, caliente y supersónico, con una nube de gas esférica de mayor densidad, fría y en reposo. Todo el sistema tiene una presión inicial constante, y un campo magnético constante el cual tiene la misma dirección que la velocidad del viento.

La disposición de la prueba presenta varios procesos localizados, y cada uno posee su propia escala temporal. Por ejemplo, la velocidad a la cual el viento es advechado, la formación y propagación del arco de choque o también las velocidades alfvénicas del campo magnético inicial definen escalas temporales; detrás del arco de choque, los procesos que están involucrados en la deformación de la nube y su subsecuente destrucción incluyen la propagación de choques internos, fuera de la nube la velocidad hacia abajo tiene una velocidad subsónica que produce inestabilidades tipo KH y también, a causa de la aceleración repentina de la nube estacionaria, inestabilidades RT son formadas, cada una teniendo su tasa de crecimiento. Esta prueba muestra qué tan bien son capturados estos procesos.

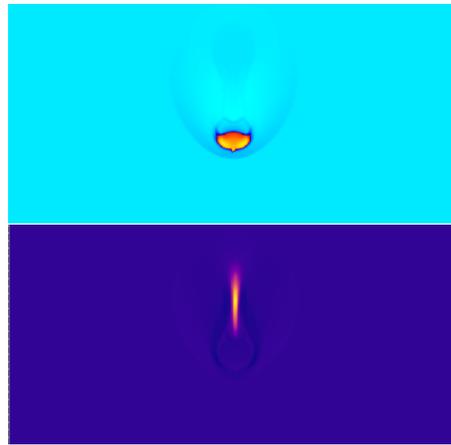
Se utilizó un dominio numérico dado por  $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ , donde  $L_x = 10$ ,  $L_y = 10$ ,  $L_z = 40$ , condiciones de frontera periódicas, cinco niveles de refinamiento con el criterio dado por (4.3) usando la densidad y la presión hidrodinámica como funciones de evaluación y un umbral de refinamiento de  $\chi_r=0.1$ ; se ha utilizado una resolución base de  $32 \times 32 \times 128$  celdas y una resolución equivalente de  $1024 \times 1024 \times 4096$  celdas. La densidad del viento tiene un valor de  $\rho = 1.67 \times 10^{-21} \text{Kgm}^{-3}$ , la temperatura  $T = 2621\text{K}$ , la velocidad inicial de  $v_z = 2.7C_s$ , donde  $C_s = \sqrt{\gamma k_B T / m_u}$  es la velocidad del sonido; el índice adiabático tiene un valor de  $\gamma = 5/3$ ,  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $m_u$  la unidad de masa atómica. La nube esférica tiene un radio de  $R_{cl} = 0.25$ , una densidad de  $\rho_{cl} = 10 \times \rho$ , y una temperatura de  $T_{cl} = T/10$ . El campo magnético homogéneo tiene una magnitud de  $B_z = 10^{-12}$  Tesla, lo cual resulta en una beta del plasma del orden de  $\beta \approx 10^5$ . Para mantener la inyección del viento y el campo magnético externo, se utilizaron condiciones de frontera periódicas.

La Figura 5.9 muestra cortes de la densidad y de la componente del campo magnético  $B_z$  en  $y = 0$ . Por encima de todo se presenta un estructura tipo filamento del campo magnético la cual crece en dirección del flujo supersónico y que es causada por la compresión del gas que la rodea. En el tiempo  $t = 0.23$ , la presencia del arco de choque junto con el choque interno de la nube pueden observarse; a  $t = 0.42$  hay un aplanamiento de la nube que es producido por la diferencia de presiones al frente del choque y a los lados de la nube; al tiempo  $t = 0.70$ , una inestabilidad RT comienza a formarse al mismo tiempo que las inestabilidades KH se presentan a los lados de la nube.

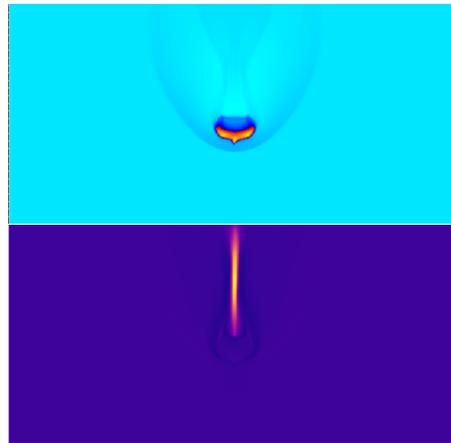
La Figura 5.10 muestra una ampliación de la densidad y de la componente  $B_z$  del campo magnético junto con la malla adaptativa al tiempo  $t = 1.17$ , donde la inestabilidad RT ha creci-



(a)



(b)



(c)

Figura 5.9: Instantáneas en el plano  $y = 0$  de la densidad (parte superior), y en la componente  $B_z$  del campo magnético (parte inferior), en tiempos  $t = 0.23, 0.42, 0.70$ , para la prueba de la interacción nube-viento supersónico 3D.

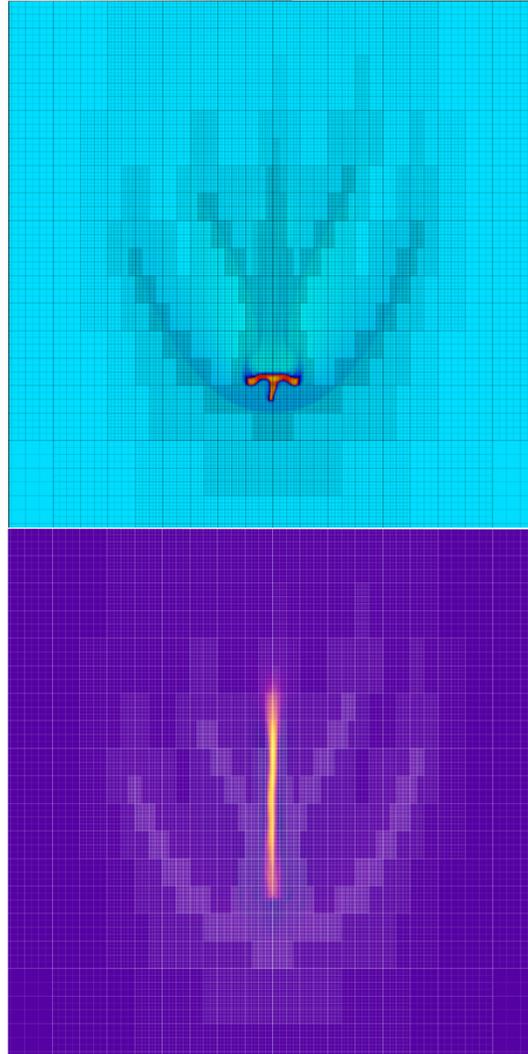


Figura 5.10: Ampliación de la densidad y campo magnético al tiempo  $t = 1.17$  de la interacción of nube-viento supersónico 3D, junto con la malla adaptada a la estructura de choque de los procesos.

do lo suficiente para destruir a la nube. La malla recubre adecuadamente la estructura del arco de choque, los choques internos de la nube y también la estructura de filamento del campo magnético.

## 5.5. Discusión de resultados y comentarios finales

En la jerga de ciencias computacionales se utiliza el término *speedup* como medida del rendimiento [Banerjee, 1979]. Según [Chivers and Sleightholme, 2018], existen dos criterios principales para definir el speedup. Por una parte se tiene la *ley de Amdahl*, [Amdahl, 1967], la cual asume que el problema no crece al paralelizarlo y por otra parte se tiene la *Ley de Gustaffson* [Gustafson, 1988], la cual asume que se pueden resolver problemas más grandes al paralelizar. Estos dos términos son empíricos y tienen esta forma:

	Gustaffson	Amdahl
Speedup	$N - S(N - 1)$	$\frac{1}{(1-P)+P/N}$

donde  $N$  representa el número de procesadores,  $S$  es la fracción del programa que permanece serial,  $P$  la fracción del programa que se paraleliza.

La forma de estas medidas permite ver que el aumento de *speedup* no es lineal con el aumento de procesadores y se llega, inclusive en un caso idealizado, a una cota. Por ejemplo en el caso del código NIRVANA [Stone et al., 2008], en las primeras versiones presentadas de paralelización, al aumentar de 128 a 256 procesadores aumenta el tiempo de cómputo para cierto tipo de simulaciones.

Con esto en mente, se tiene que el *medir qué tanto mejora* un código al paralelizar sus procesos resulta un poco complicado de definir; y el comportamiento a primera vista patológico del tiempo de cómputo para las pruebas de onda expansiva y la prueba MHD de Orszag-Tang, es decir que a partir de cierto punto el requerimiento crece, puede entenderse como algo normal. No obstante el código CAFE-AMR puede implementar en trabajos futuros esquemas de distribución dinámica de trabajo, los cuales están siendo utilizados en la comunidad.

Ahora bien, con respecto a los demás aspectos de las pruebas numéricas presentadas en este capítulo, podemos afirmar que los resultados obtenidos son consistentes con los presentados en las referencias de manera cualitativa.

Con todo, en los capítulos siguientes se muestra cómo el código CAFE-AMR ha sido utilizado efectivamente para hacer simulaciones pertenecientes a la física solar utilizando la estrategia AMR.



## Capítulo 6

# Inestabilidades magnetohidrodinámicas

### Resumen

En este capítulo se realizan simulaciones para inestabilidades tipo Kelvin-Helmholtz y del tipo Rayleigh-Taylor las cuales modelan la dinámica de la interfaz entre dos fases de un fluido. Se observa que la interfaz tiene una estructura compleja la cuál es mejor capturada al utilizar la implementación de la estrategia AMR de este trabajo. En la introducción se discute acerca de las inestabilidades desde el punto de vista de las ecuaciones MHD. En la sección de especificaciones se establecen los parámetros para realizar las simulaciones. En la sección de resultados se muestran algunas instantáneas de los resultados de las simulaciones. En la sección de discusión de resultados y comentarios finales se argumenta la pertinencia de utilizar la estrategia AMR para el análisis de las inestabilidades.

### 6.1. Introducción

El análisis de un plasma en equilibrio y de su estabilidad es de gran interés no sólo para contextos relevantes a la física solar; sino que se extienden a aplicaciones de escalas astrofísicas mayores <sup>1</sup> también para sistemas de laboratorio<sup>2</sup>.

Como se aborda en [Gurnett and Bhattacharjee, 2005], cuando un plasma se encuentra en una configuración en equilibrio, se refiere a que dicha configuración es estacionaria, es decir que no varía en el tiempo; pero, los equilibrios se clasifican conforme a cómo se desarrollan en el tiempo después de sufrir perturbaciones en alguna de las cantidades macroscópicas, es así que hay dos categorías, equilibrios estables y equilibrios inestables. Los equilibrios estables oscilan alrededor de la configuración inicial y pueden presentar amortiguación que desvanece exponencialmente la perturbación hasta retornar a la configuración no perturbada; los equilibrios inestables o *inestabilidades* magnifican la perturbación exponencialmente hasta que el sistema sale de su configuración en equilibrio.

Además, para los plasmas, los equilibrios presentan otra clasificación particular:

---

<sup>1</sup>Por ejemplo las inestabilidades magneto rotacionales han sido utilizadas para describir los discos de acreción de los hoyos negros y [Yokosawa and Inui, 2005].

<sup>2</sup>El confinamiento estacionario del plasma es fundamental para los dispositivos de fusión.

1. Equilibrio magnetostático: Donde la velocidad de bulto del plasma puede anularse bajo transformaciones galileanas.

Existen algunos aspectos interesantes de los equilibrios magnetostáticos. De la ecuación de conservación del momento puede verse que en estas configuraciones tanto el campo magnético como la corriente eléctrica deben ser tangentes a superficies isobáricas, pues

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla P \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B} \cdot \nabla P = 0, \\ \mathbf{J} \cdot \nabla P = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la corriente eléctrica y  $\mathbf{B}$  el campo magnético. Otro aspecto interesante es que el teorema del virial asociado al plasma nos permite afirmar que es imposible tener confinamiento de plasma, por ejemplo en el caso de plasmoides, a menos de que actúen fuerzas externas. En ese sentido, en los libros de fundamentos de física de plasma (vease por ejemplo [Bittencourt, 2004]), en las configuraciones magnetostáticas compactas se aborda siempre cómo pueden generarse en el laboratorio.

Los equilibrios magnetostáticos a su vez pueden clasificarse en dos tipos:

- a) Libres de fuerza: Equilibrios en los cuales la fuerza de Lorentz es nula, es decir  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ .
- b) Balance de fuerza: Equilibrios en los cuales la fuerza de Lorentz no es nula, es decir  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} \neq 0$ .

2. Equilibrio MHD: El perfil de velocidades del plasma es heterogéneo y no nulo.

Con respecto al Sol, algunos fenómenos tanto de la atmósfera baja del sol como la heliosfera están constituidos por estructuras de muy larga duración, las cuales se pueden modelar como equilibrios magnetostáticos. Tal es el caso de las cuerdas de flujo y los campos toroidales, los cuales pueden modelar las líneas de campo abiertas, vease por ejemplo [Hu et al., 2015], y los bucles de fulguración, vease por ejemplo [Kliem et al., 2004], respectivamente.

Estudiar las configuraciones en equilibrio, desde el punto de vista de las ecuaciones MHD, permite comprender que escenarios estacionarios son físicamente posibles y entender la naturaleza de su estabilidad.

Por ejemplo, el *operador de fuerza lineal* para equilibrios magnetostáticos se utiliza para este fin. Este operador funciona de la siguiente manera:

Suponiendo que las variaciones de las cantidades macroscópicas del plasma son pequeñas, puede escribirse

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (6.2)$$

$$P = P_0 + P_1 \quad (6.3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \quad (6.4)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \quad (6.5)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $P$  es la presión hidrodinámica y  $\mathbf{v}$  es la velocidad; los subíndices 0 indican que son las cantidades para el sistema en equilibrio, mientras que los subíndices 1 corresponden a

los valores de la perturbación. Sustituyendo en la ecuación de conservación de momento se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{v}_1, \mathbf{B}_0, P_0), \quad (6.6)$$

donde  $\mathbf{F}$  es el operador de fuerza lineal. En [Gurnett and Bhattacharjee, 2005] puede verse que este operador es autoadjunto de manera que, descomponiendo en funciones armónicas a la perturbación de la velocidad, se puede encontrar los modos que llevan a regímenes oscilatorios, amortiguantes ó de crecimiento exponencial.

Para las configuraciones de equilibrio MHD se puede hacer este mismo análisis linealizado, aunque el proceso es de mayor complejidad.

En el caso de una inestabilidad, una vez que ésta se dispara, rápidamente escapa del análisis lineal y es necesario utilizar herramientas numéricas para las no-linearidades. Aunado a esto, la precisión con la que es capturada la perturbación inicial puede tener efectos estructurales a pequeña y gran escala; de manera que la estrategia de refinamiento adaptativo se posiciona como mecanismo idóneo en la evolución no lineal de estos sistemas.

En este capítulo, presentamos la simulación de la versión magnetohidrodinámica de dos inestabilidades, la del tipo KH y la del tipo RT, las cuales presentan estructuras finas localizadas, ideáles para la evaluación de la implementación de la estrategia AMR. En la sección 6.2 se establecen las especificaciones de la simulaciones; En la sección 6.3 se muestran los resultados de las simulaciones y finalmente en la sección 6.4 se discuten los resultados así y se muestran los argumentos a favor de la implementación AMR para el estudio de las inestabilidades.

## 6.2. Especificaciones de la simulación

Para abordar el comportamiento no lineal de las inestabilidades, en este trabajo se realizaron dos configuraciones inestables; las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y las inestabilidades Raleygh-Taylor. Los objetivos principales de as simulaciones son evaluar el efecto de la estrategia AMR en el comportamiento no lineal de la inestabilidad y cómo afectan los criterios de refinamiento a la hora de seleccionar las regiones que poseerán mayor resolución.

### 6.2.1. Inestabilidad Kelvin-Helmholtz

Las inestabilidades KH son pruebas estándar para los códigos hidrodinámicos, y en el contexto de física solar, estas pueden ocurrir en las fronteras entre diferentes regiones del viento solar que presenten variaciones pronunciadas en la velocidad o la densidad; pero también en chorros solares de escalas pequeñas [Skirvin et al., 2023]. Como se muestra en [Mishin and Tomozov, 2016], estas inestabilidades pueden generar la formación de estructuras turbulentas y la mezcla de plasma, el cual puede afectar la propagación y las propiedades del viento solar.

La prueba que se presenta en este trabajo, en la cual las discontinuidades entre regiones con flujos opuestos desarrollan patrones espirales, los cuales son un reto para que la estrategia de refinamiento adaptativo pueda rastrearlas adecuadamente.

Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$(\rho, p, v_x, v_y, B_x, B_y) = \begin{cases} (1, 2.5, -0.5, 0, 0.2, 0), & |y| < 0.52 \\ (2, 2.5, 0.5, 0, 0.2, 0), & |y| \geq 0.25 \end{cases} \quad (6.7)$$

Donde el índice adiabático tiene un valor de  $\gamma = 1.4$ . Para poder generar la inestabilidad, se inserta una perturbación en la velocidad dada por

$$\begin{cases} v_x = v_x + \delta \\ v_y = v_y + \delta, \end{cases} \quad (6.8)$$

donde  $\delta = 0.1 \cos(4\pi x) \sin(4\pi y)$ .

Esta prueba se define en un dominio de dimensiones  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ , con una resolución base de  $160 \times 160$  celdas, la resolución temporal está dada por un factor CFL de 0.75. Para esta prueba se utilizó la fórmula de flujos Roe y la evolución temporal CTU. Para esta prueba se realizaron tres simulaciones con diferentes criterios de refinamiento y diferentes niveles de refinamiento.

### Simulación 1

En la primera simulación se utilizó el criterio (4.3) con un umbral de  $\chi_r = 0.1$  usando la densidad  $\rho$  como la función de evaluación en 4.1. Se utilizaron 5 niveles de refinamiento, los cuales dan una resolución equivalente de  $5120 \times 5120$  celdas.

### Simulación 2

En la segunda simulación se utilizó el criterio 4.2, con un umbral de  $\chi_r = 10$ . Se fijaron 4 niveles de refinamiento los cuales dan una resolución equivalente de  $1024 \times 1024$  celdas.

### Simulación 3

En la segunda simulación se utilizó el criterio 4.3 con un umbral de  $\chi_r = 0.05$ , usando la densidad  $\rho$  como la función de evaluación en 4.1. Se fijaron 4 niveles de refinamiento los cuales dan una resolución equivalente de  $1024 \times 1024$  celdas.

## 6.2.2. Inestabilidad Rayleigh-Taylor

En presencia de la aceleración de la gravedad<sup>3</sup>, cuando un fluido que presenta una fase de densidad baja y una densidad alta, con la región de menor densidad soportando a la de mayor densidad y todo el sistema inicialmente en un equilibrio hidrostático, pequeñas perturbaciones dan lugar al crecimiento de la inestabilidad tipo RT.

El análisis de este tipo de inestabilidades es utilizado para mostrar como una perturbación lineal desarrolla comportamientos no-lineales complejos. Por otra parte, las inestabilidades RT en el

<sup>3</sup>En general, pueden darse inestabilidades tipo Rayleigh-Taylor con cualquier aceleración que se le imprima al fluido como bulto, siempre que haya una separación entre fases de densidad.

contexto de física solar sirven para obtener una mayor comprensión en los procesos físicos de responsables para las erupciones solares, liberación de energía en la atmosfera solar (véase por ejemplo Jenkins and Keppens [2022]).

Al inicio, en el régimen lineal de la evolución de la perturbación, la tasa de crecimiento de estas inestabilidades depende del número de onda y la frecuencia de oscilación de la perturbación; por ejemplo, la amplitud de la perturbación crece más rápido para perturbaciones de número de onda más pequeñas, como se ha analizado en [Stone and Gardiner, 2007]. Después, cuando la perturbación evoluciona hacia el régimen no lineal, burbujas se forman de la región de menor densidad y se desplazan hacia arriba mientras que gotas caen de la región de mayor densidad, de manera que hay un cruce en la interfaz que separa estas regiones. Todo el proceso culmina en la mezcla de las dos fases iniciales y esta complejidad es la razón por la cuál es una prueba demandante para los códigos de dinámicas de fluidos.

En el caso de la MHD, el plasma se considera como un gas ideal que responde a perturbaciones del campo magnético, el cual cambia la evolución de la inestabilidad. En esta prueba, el campo magnético se dispone de manera que inhibe el crecimiento de la inestabilidad. Para mostrar que el código de este trabajo puede manejar estos escenarios inestables, además de que permite evaluar qué también se lidia con la gravedad, se presenta la prueba bidimensional de inestabilidad RT.

El problema se restringe a un dominio numérico  $x \in [-0.5, 0.5]$ ,  $y \in [-1.5, 0.5]$  y se fija la interfaz de las fases en  $y_0 = 0$ . Las condiciones iniciales asumen la densidad debajo y encima de la interfaz con un valor de  $\rho_L = 1$  and  $\rho_H = 4\rho_L$  respectivamente. La constante gravitacional se fija a un valor de  $g = -1.0$  y el sistema se encuentra en equilibrio hidrostático, consistente con el perfil de la presión de

$$p(y) = \frac{100}{\gamma} - \rho g y, \quad (6.9)$$

el cual en turno define la velocidad del sonido como  $c_s = 10$  y un tiempo de cruce del fluido a través la interfaz de  $t = 0.1$ .

A lo largo de la dirección  $\hat{x}$  se utilizan condiciones de frontera periódicas, mientras que en la dirección  $\hat{y}$  las condiciones de frontera son fijas. La resolución base es de  $64 \times 128$  celdas con cinco niveles de refinamiento, lo cual resulta en una resolución equivalente de  $2048 \times 4096$  celdas. El criterio de refinamiento utilizado es el de (4.3) usando la presión hidrodinámica, densidad y la componente  $v_y$  de la velocidad como funciones de evaluación; el umbral de refinamiento se fija como  $\chi_r = 0.1$ . Se utilizan los flujos numéricos tipo Roe usando un reconstructor Minmod. La resolución temporal está dada por un factor de estabilidad de  $CFL = 0.75$ .

La perturbación que dispara la inestabilidad se añade al campo de velocidades en la interfaz asumiendo el perfil

$$v_y(x, y) = -\frac{\text{Exp}[-(5.0x)^2]}{10\cosh[(10y)^2]}, \quad (6.10)$$

la cual es la versión bidimensional de la prueba de la inestabilidad presentada en[Mignone et al., 2011]; también se define el campo magnético en dirección  $\hat{x}$ , es decir, paralelo a la interfaz de separación, de manera que  $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$ , donde

$$B_x = \alpha \sqrt{(\rho_H - \rho_L)|g|}. \quad (6.11)$$

Para analizar la inestabilidad se realizaron dos simulaciones:

### Simulación 1

Este es el caso hidrodinámico en el cual  $\alpha = 0$  en la ecuación (6.11).

### Simulación 2

Este es el caso ligeramente magnetizado en el cual  $\alpha = 0.06$  en la ecuación (6.11).

## 6.3. Resultados

Ambas pruebas de inestabilidad se centran en la dinámica y la modificación de la estructura de la capa que separa dos fases de un fluido; en ese sentido se observó que las estrategias de refinamiento implementadas son capaces de capturar la evolución de las interfaces y esto a su vez modifica la estructura fina de la solución.

### 6.3.1. Inestabilidad Kelvin-Helmholtz

En la Figura 6.1 se muestra una instantánea del perfil de la densidad a un tiempo  $t = 0.25$  junto con un acercamiento hecho a una región que comprende una subsección de la interfaz del fluido. La añadidura de resolución extra a lo largo de la interfaz logra desarrollar patrones en forma de espirales en escalas espaciales muy pequeñas. En la Figura 6.2 se muestra como a tiempo  $t = 1.0$  esta estrategia de refinamiento adaptativo consigue capturar la interfaz del fluido; por otra parte en las regiones alejadas a esta interfaz se puede observar que la baja resolución no afecta el comportamiento de las componentes menos dinámicas.

En la Figura 6.3 se muestran los resultados de las simulaciones con diferentes criterios de refinamiento con el objetivo de comparar cómo modifican la estructura fina de la interfaz del fluido. En la parte superior se muestran los resultados de la simulación utilizando las especificaciones de la subsección 6.2.1; dado que este criterio de refinamiento utiliza todas las cantidades conservativas del plasma como funciones evaluadoras para refinar, se puede observar que no solo la interfaz entre fluidos está cubierta, sino que también se añade mayor resolución a algunas vecindades de esta. En la parte inferior se muestran los resultados de la simulación utilizando las especificaciones de la subsección 6.2.1; en este caso las regiones de mayor resolución están localizadas en espacios más reducidos. Comparando el perfil de la presión magnética puede observarse que hay diferencias sustanciales en la estructura fina de la interfaz.

### 6.3.2. Inestabilidad Rayleigh-Taylor

La Figura 6.4 presenta la evolución de los perfiles de la densidad y la estructura de refinamiento para la inestabilidad RT para el caso hidrodinámico a tiempos  $t = 1.5, 2.0, 3.0$ . Puede observarse que mientras la capa más densa comienza a escurrir hacia abajo, debido a la diferencia en velocidades de las regiones de baja y alta densidad, el flujo comienza a desarrollar inestabilidades KH, las cuales a su vez generan una interfaz altamente estructurada a tiempos posteriores. Por otra parte se puede ver

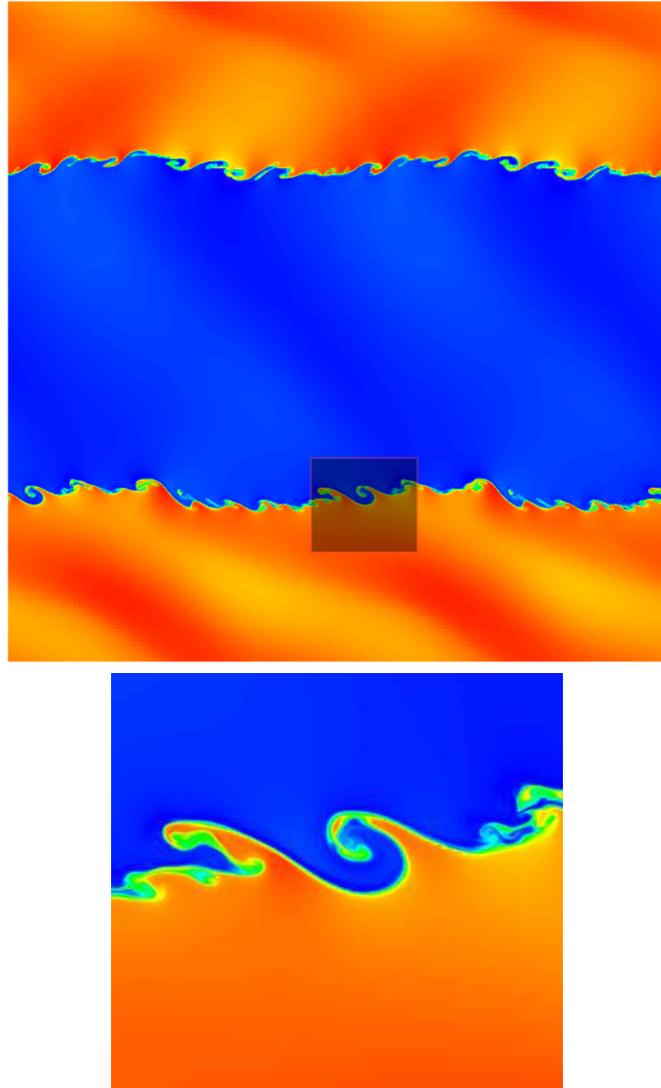


Figura 6.1: Perfil de densidad para la prueba de la inestabilidad KH en un tiempo  $t = 0.24$  en la simulación con 5 niveles de refinamiento (ver subsección 6.2.1). En la parte superior se muestra el perfil del dominio completo con una caja sombreada sobre la cual se aplica un acercamiento, el cual es mostrado en la parte inferior.

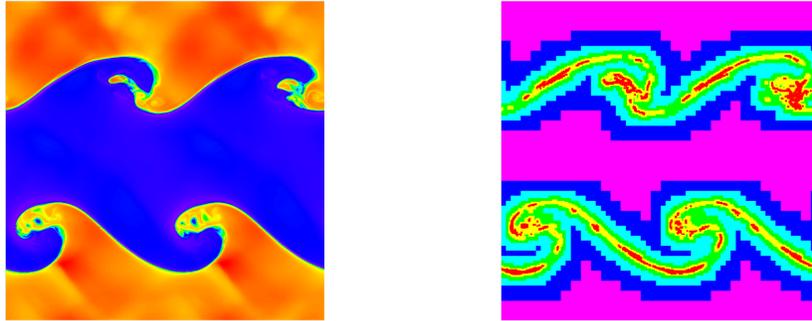


Figura 6.2: Instantánea de la inestabilidad KH en un tiempo  $t = 1.0$  en la simulación con 5 niveles de refinamiento (ver subsección 6.2.1). A la izquierda se muestra el perfil de densidad mientras que a la derecha se muestra la estructura de refinamiento.

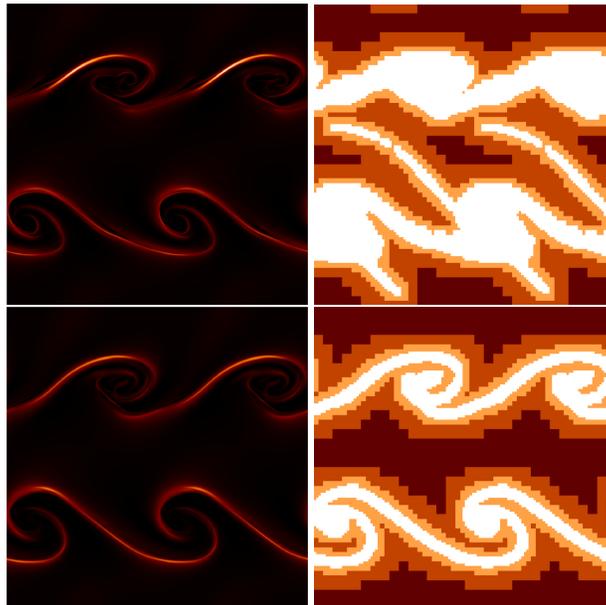


Figura 6.3: Perfiles de la presión magnética (izquierda) y la estructura de refinamiento para la inestabilidad KH en un tiempo  $t = 1.0$ . En la parte superior se muestra la simulación utilizando las especificaciones de refinamiento de la subsección 6.2.1, mientras que en la parte inferior se muestran los resultados de la evolución utilizando las especificaciones de refinamiento de la subsección 6.2.1.

que la estrategia de refinamiento en este caso rastrea de manera precisa la dinámica de la interfaz y su estructura subyacente. Dada la simetría de las condiciones iniciales y la perturbación, es de esperarse que la evolución del sistema también se mantenga simétrica. No obstante para  $t = 3.0$  puede observarse que ya se presentan desviaciones fuertes de esta simetría. Es relevante para esta observación que a estos tiempos el comportamiento del sistema ya no es lineal.

En la Figura 6.5 se presenta la densidad y la estructura de refinamiento en el caso ligeramente magnetizado  $\alpha = 0.06$ , para la inestabilidad RT a tiempos  $t = 1.5, 2.0, 3.0$ . Puede observarse que a diferencia del caso hidrodinámico, las inestabilidades KH fueron reprimidas a causa de la topología de las líneas de campo. Existe cierta tensión que se opone a la deformación de estas líneas y esto en su turno interrumpe la torsión de la interfaz de fluidos; el campo magnético hace trabajo en contra de la gravedad y ayuda a que la capa más densa permanezca en la parte superior, la cual también detiene la generación de las inestabilidades KH. Por otra parte a lo largo de toda la evolución se puede observar que la estrategia de refinamiento implementada persigue adecuadamente la interfaz del fluido.

En la Figura 6.6 se muestra el perfil de la presión magnética en el tiempo  $t = 0.3$ ; Se observa que las regiones de mayor presión están ubicadas en la interfaz del fluido. Por otra parte en la Figura 6.7 se muestra cómo la estrategia AMR captura estructuras muy pequeñas en la parte más baja de la interfaz del fluido, se observa la variación de pequeña escala tanto en la densidad como en la presión de campo magnético.

## 6.4. Discusión de resultados y comentarios finales

Las simulaciones de los dos tipos de inestabilidades son contundentes al mostrar que la estructura fina es altamente susceptible a la resolución que se tenga. Es notable de las ampliaciones de ciertas regiones presentadas en las figuras 6.1 y 6.7 que aunque el comportamiento global de la simulación no es alterado, esta estrategia permite capturar dinámicas que por la disipación inherente del método numérico desaparecerían totalmente.

En las figuras 6.2 y 6.4 puede observarse que hay una pérdida de la simetría, que aparece después de cierto tiempo, la cual es muy probable sea causada por la estrategia AMR y a que una vez que el sistema evoluciona al régimen no lineal, los sistemas son fuertemente susceptibles a las variaciones.

A favor de la primera causa se tiene que las estrategias de refinamiento no necesariamente respetan la simetría; por ejemplo el criterio de evaluación utiliza diferencias finitas hacia adelante, en lugar de estar centradas. Quizás esto pueda ser remediado al evaluar de manera más educada al sistema a la hora de escoger las regiones de refinamiento; en la Figura 6.3 puede observarse que la estructura fina de la evolución es menos simétrica en la estrategia de refinamiento 4.3 que sí utiliza diferencias finitas centradas, pero sólo se evaluó con la densidad, mientras que en el otro caso se utilizaron todas las cantidades conservativas del plasma. La Figura 6.6 deja en claro que para ciertos sistemas, existe una región delimitada donde suceden estructuras simples, mientras que las regiones de mayor estructura pueden tener escalas muy pequeñas en comparación con el resto.

Ambas pruebas realizadas en este capítulo tomaron como referencia las mostradas en los códigos PLUTO [Mignone et al., 2007]; [Teyssier, 2002]; NIRVANA [Ziegler, 2008] y ATHENA [Stone et al., 2008]. Y las evoluciones mostradas concuerdan con las aquí presentadas.

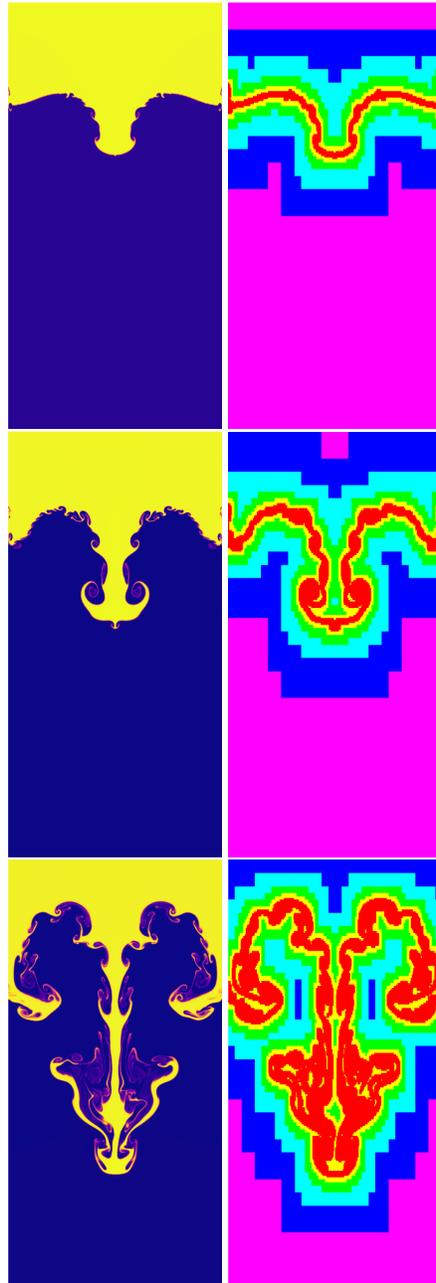


Figura 6.4: Instantáneas del perfil de densidad (izquierda) y la estructura de refinamiento (derecha) para la simulación hidrodinámica (ver la subsección 6.2.2) de la inestabilidad RT en tiempos  $t = 1.5$ ,  $t = 2.0$  y  $t = 3.0$ , de arriba hacia abajo.

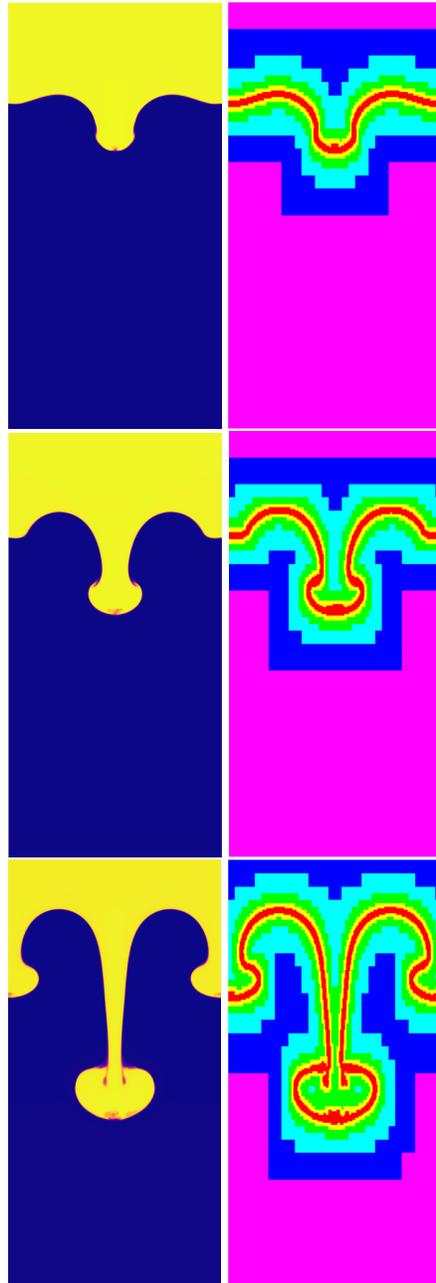


Figura 6.5: Instantáneas del perfil de densidad (izquierda) y la estructura de refinamiento (derecha) para la simulación ligeramente magnetizada (ver la subsección 6.2.2) de la inestabilidad RT en tiempos  $t = 1.5$ ,  $t = 2.0$  y  $t = 3.0$ , de arriba hacia abajo.

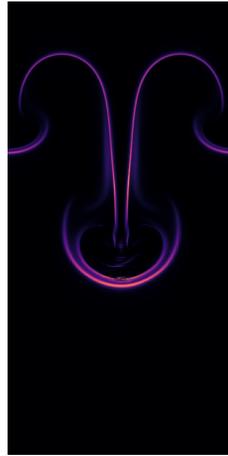


Figura 6.6: Perfil de la presión magnética en un tiempo  $t = 3.0$  para la prueba de la inestabilidad RT en el caso ligeramente magnetizado (véase 6.2.2) .

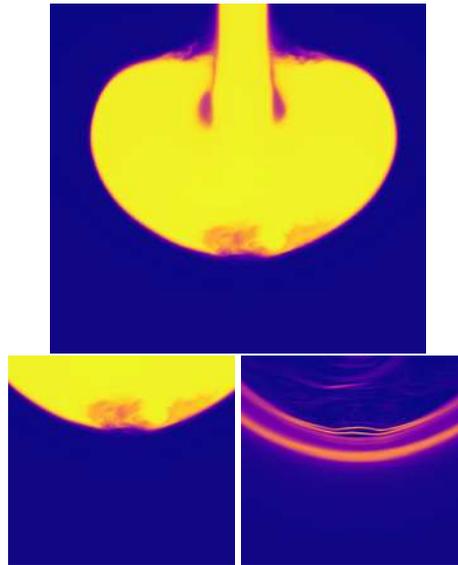


Figura 6.7: Acercamientos de diversos perfiles de cantidades de plasma para la prueba de la inestabilidad RT en el caso ligeramente magnetizado. En la parte superior se muestra el perfil de densidad de la región ubicada en la parte más baja de la interfaz entre las dos fases del plasma. En la parte inferior se muestra una comparación de la densidad (izquierda) y de la presión magnética (derecha) en la región turbulenta de la parte más baja de la interfaz.

Con todo, la implementación de la estrategia AMR presentada en este trabajo muestra que logra abordar los comportamientos no lineales que causan estructuras finas en las simulaciones MHD. En lo cuál fue aplicado en las simulaciones que abordan escenarios reales de la física solar.



## Capítulo 7

# Fulguración solar

### Resumen

En este capítulo se presenta la simulación de una fulguración solar eruptiva con base en el modelo bidimensional CSHKP. En la introducción se da un contexto histórico y se describe lo que es una fulguración eruptiva. Después se habla de la reconexión magnética en las hojas de corriente y su relación con el modelo de fulguración utilizado. Además de las simulación de la fulguración solar, se presentan dos simulaciones de reconexión magnética en hojas de corriente. El modelo de fulguración solar depende fuertemente de la resistividad anómala localizada, en este capítulo se argumenta qué tan buena es la estrategia AMR al capturar esta estructura.

### 7.1. Introducción

Para 1859 las líneas telegráficas estaban bien establecidas en buena parte de los países desarrollados. En estas épocas, era importante incrementar la estabilidad de la comunicación, y se estaba trabajando activamente en mitigar los efectos de la inducción causados por las tormentas geomagnéticas. A finales de agosto de ese año se registraron una serie de eventos mundiales relativos a la suspensión del servicio de las líneas. Por nombrar algunos; en la estación Noyelle ubicada en Bruselas, entre las 0 h hasta alrededor de las 1:30 h la comunicación con cualquier otra capital europea era imposible; en algunas estaciones americanas se aumentó la potencia de las baterías para retomar el control de las líneas en contra de corrientes inducidas, lo cual llevo a ciertas chispas que provocaron que ciertos papeles guardados inadecuadamente se incendiaran.

En estas mismas fechas, se realizaron varias observaciones del máximo solar de 1859, que ocurrió desde finales de agosto hasta el 6 de septiembre. Auroras boreales, manchas solares y tormentas magnéticas ocurrieron cada día frecuentemente, pero la más espectacular de todas las observaciones fue la fulguración de luz blanca observada por Carrington el primero de septiembre de 1859 [Carrington, 1859] con su ahora asociada tormenta magnética registrada 18 horas después <sup>1</sup>.

Qué tan extremo sea un evento solar tiene una fuerte conexión con el impacto que tenga sobre la tierra. En [Hudson, 2021] se habla del concepto de *geoefectividad*, el cual ayuda a describir y

---

<sup>1</sup>Los datos históricos de los primeros dos párrafos se tomaron de las referencias [Muller, 2014, Hudson, 2021]

clasificar los eventos solares mayores y su influencia terrestre. En síntesis, las mediciones que se realizan para determinar la geoeffectividad se efectúan en tres sentidos principales:

- Emisión electromagnética (fulguraciones en rayos X<sup>2</sup>, rayos  $\gamma$ , etc).
- Las partículas energéticas solares (SEP, por sus siglas en inglés), las cuales incluyen las partículas relativistas inmediatas a la atmósfera solar baja.
- La nube de plasma magnetizado de la eyección de masa coronal interplanetaria (ICME por sus siglas en inglés).

El evento Carrington tuvo la fortuna de desarrollar una geoeffectividad tan alta que podría decirse inauguró la disciplina del clima espacial, sin embargo, eventos solares mayores se pueden observar hoy en día. Por ejemplo la fulguración del evento de Octubre-Noviembre del año 2003, SOL2003-10-28 usando la nomenclatura de la unión internacional astronómica, tiene una clasificación GOES<sup>3</sup> del orden de X100 [Hudson, 2021], lo cual es significativamente mayor que el evento Carrington. Con todo, es notable que los eventos solares mayores poseen diferentes facetas físicas y hay un interés en el entendimiento de cada uno. Es aquí donde el estudio de las fulguraciones solares juega un papel crucial.

En [Priest, 2014] se menciona cómo las fulguraciones solares pueden variar desde simples centelleos localizados en el sol hasta eventos salvajemente complejos, llegando a ser los más violentos en el sistema solar. Previo a la era espacial se definían como “centelleos rápidos y transitorios en  $H\alpha$ ”<sup>4</sup> pero esta definición se ha extendido y estirado conforme aumentan y se mejoran las técnicas observacionales del Sol; por ejemplo abajo se presenta cómo en el trabajo de [Magara et al., 1996] se separaban las fulguraciones en dos casos dependiendo de qué técnica de observación se utiliza con los avances logrados hasta la década de los noventa:

- Observación en  $H\alpha$ : Fulguraciones eruptivas o fulguraciones confinadas.
- Satélite Yohkoh<sup>5</sup> + rayos X suaves: Fulguraciones tipo cúspide o no cúspide.
- Análisis de curva de rayos X Duros: Fulguraciones de eventos de larga duración o Fulguraciones Impulsivas.
- Observación en  $H\alpha$  + rayos X suaves detectados en Skylab<sup>6</sup>: Fulguraciones de dos cintas o fulguraciones de bucle simple.

<sup>2</sup>Según [Priest, 2014] la radiación de rayos X suaves tiene rangos energéticos de  $\approx 10\text{KeV}$ , mientras que para los rayos X duros el rango de energía es de  $\approx 100\text{ KeV}$ .

<sup>3</sup>Las fulguraciones se clasifican como A, B, C, M o X dependiendo en el máximo del flujo de rayos X de 1 a 8 Å cerca de la tierra, siendo las mediciones realizadas por la red de satélites GOES [Priest, 2014]. Cada clasificación tiene un pico de flujo diez veces mayor que la clasificación precedente con las fulguraciones tipo X alcanzando el orden de  $10^{-4}\text{ Wm}^{-2}$ ; esto es, a saber, 0.01 % de la luminosidad solar. Dentro de cada clase hay una escala de 1 a 9, tal que el flujo en una fulguración X3 es 50 % mayor que la X2.

<sup>4</sup>Los filtros  $H\alpha$  miden la luz generada cuya energía corresponde al brinco del tercer al segundo estado energético del espectro de emisión de Balmer para el átomo de hidrógeno.

<sup>5</sup>Las observaciones satélite yohkoh [Acton et al., 1992] fueron un esfuerzo conjunto de Estados Unidos, Reino Unido y Japón se realizaron de 1991 al 2001.

<sup>6</sup>Skylab fue una estación espacial estadounidense que orbitó la Tierra desde 1973 hasta 1979 [Johnson, 2007].

- Rayos X suaves: Fulguraciones de arcadas o Fulguraciones de Bucle.
- Corónógrafos de luz blanca +  $H\alpha$ : Fulguraciones relacionadas a CME o Fulguraciones compactas.

Hoy en día, hay un paradigma bien definido para la descripción de los eventos eruptivos solares, las fulguraciones eruptivas se analizan con el modelo de fulguraciones de dos cintas solares. En [Priest, 2014] se menciona que alrededor de 90 % de las fulguraciones de clase X son asociadas a erupciones. En este tipo de fulguraciones se observan 4 etapas básicas de evolución:

- *Fase prefulguración*: Con una duración entre 10 minutos a 1 hora, la intensidad de los rayos X suaves incrementa, mientras que una prominencia de una región activa se aviva y empieza a elevar.
- *Fase impulsiva*: Con una duración entre 100 a 1000 segundos, se indica por la aparición de un estallido desde energías de micro-ondas hasta rayos X duros (>30 KeV) con una estructura interna causada por electrones altamente acelerados.
- *Fase de elevación* (también conocida como fase *flash*): Con una duración típica de 5 minutos, alcanzando en algunas ocasiones 1 hora. Está marcada por un incremento rápido tanto en la intensidad y área de emisión de rayos X suaves y emisión  $H\alpha$ , mientras que la prominencia hace una erupción rápida. La aceleración de partículas rápidas continúa y el plasma de la corona es calentado a decenas de millones de grados.
- *Fase principal*: Con una duración de 1 hora alcanzando en ocasiones hasta 2 días. La intensidad decae lentamente.

Las cintas solares son estructuras intrincadas vistas en  $H\alpha$  similares a las manchas solares. Durante la fase de elevación, dos de estas cintas se forman sobre el disco solar, uno de cada lado de una prominencia localizada en una región activa; mientras ocurre la fase principal, los dos cintas se separan. Ocasionalmente la prominencia permanece estacionaria pero tiende a elevarse y desaparecer. Esto genera una erupción de la prominencia y una CME. Esquemáticamente se presentan las partes de la fulguración eruptiva en la Figura 7.1, hay una arcada magnética constituida por bucles de fulguración observables en rayos X los cuales soportan una prominencia. La porción central acumula energía magnética que eventualmente es liberada.

La primera pregunta fundamental que posan las fulguraciones desde el punto de vista de la MHD es relativa al origen de la erupción en primer lugar. La explicación generalmente aceptada es que se produce una pérdida de la estabilidad o desequilibrio del campo magnético coronal [Priest, 1986, Priest and Forbes, 2007]; el surgimiento continuo de nuevos flujos desde la zona de convección causa movimientos de los puntos de anclaje de los bucles coronales desencadenando a su vez que las líneas de campo magnético cerradas sufran tensiones y esfuerzos que se acumulan en el campo magnético coronal. Esta situación excede cierto umbral después del cual el equilibrio es imposible y el campo erupciona, las líneas de campo magnético se abren y la energía magnética almacenada se libera.

En este sentido, los primeros análisis y estudios eran relativos a modelos linealizados de las ecuaciones MHD sobre las cuales se estudiaba la estabilidad de configuraciones de bucles coronales o arcadas. Un ejemplo de esto se presenta en el modelo Rosner-Tucker-Vaiana (RTV) [Rosner

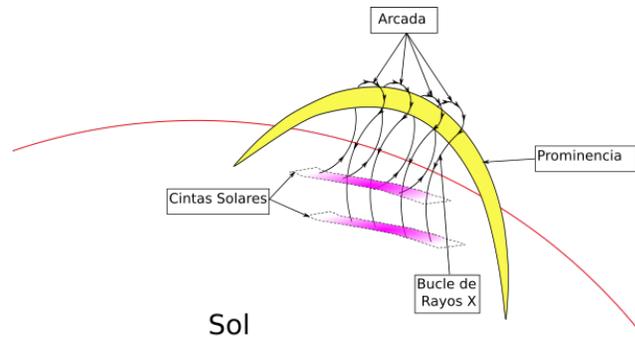


Figura 7.1: Esquema tridimensional de los componentes de una fulguración. Las cintas se representan como franjas ubicadas en el disco solar; la prominencia se posiciona como en situaciones en las cuales se puede observar en el borde del disco solar, los bucles de rayos X tienen sus puntos de anclaje en las cintas y se representa cómo la arcada soporta la prominencia.

et al., 1978] que aborda la estabilidad para un ingreso constante de energía en un bucle compacto estacionario en términos de la temperatura en el punto más alto del bucle, la presión sobre este y la escala espacial; aunque los bucles coronales no obedecen la ley de escalamiento RTV, estos trabajos llevaron a aproximaciones numéricas como la llamada EBTEL (por sus siglas en inglés *Enthalpy based thermal evolution of loops* [Klimchuk et al., 2008], el cual se utiliza para abordar el calentamiento coronal así como las emisiones dependientes del tiempo de los puntos de anclaje en la cromosfera de los bucles coronales. Esta clase de descripciones aborda la estructura energética de los bucles a través de modelos unidimensionales lo cual deja fuera los mecanismos que disparan inestabilidades que abordan la propia morfología de los bucles, a saber las inestabilidades tipo torcedura y de tipo toro; por ejemplo en [Jing et al., 2018] se realizó un análisis estadístico de 38 fulguraciones, de las cuales había tanto eruptivas como compactas, clasificándolas conforme a parámetros obtenidos previamente para inestabilidades tipo toro y de torcedura en experimentos de laboratorio en regímenes de MHD ideal. La desventaja de este acercamiento es que los modelos anteriores no capturan otro tipo de inestabilidades que puede desequilibrar a los bucles de fulguración, es decir las inestabilidades resistivas.

La siguiente pregunta que posan las fulguraciones en la perspectiva de las ecuaciones MHD se busca describir cómo evoluciona una fulguración y, tanto para esto, como para las inestabilidades resistivas en el contexto solar, la reconexión magnética juega un papel fundamental. La reconexión magnética sucede cuando en una región localizada del plasma los efectos no ideales de la MHD se hacen importantes, lo cual cambia la conectividad de las líneas de campo magnético. En el contexto de física solar, los efectos principales que manifiesta son los de convertir la energía magnética en calor por disipación óhmica; acelerar el plasma al convertir energía magnética en cinética; crear ondas de choque, filamentación y turbulencia. Es notable que a causa de esta segunda cuestión, buena parte de los códigos que resuelven las ecuaciones MHD y que se apoyan en la estrategia AMR tienen un módulo que resuelve la parte resistiva de las ecuaciones con un alto grado de sofisticación y en un contexto de física solar. Notablemente se encuentran los códigos NIRVANA[Ziegler, 2008], la reciente tercer versión de MPI-AMRVAC[Keppens et al., 2023] donde incluyen un módulo capaz

de abordar los términos de corrientes de Hall<sup>7</sup>.

Con todo esto se tiene que la siguiente clase de modelos de plasma coronal y fulguraciones, los cuales abordan aspectos dinámicos desde la perspectiva MHD, se apoyan fuertemente en la reconexión magnética, bien sea generándola artificialmente o utilizándola para la evolución. Esto se engloba en el altamente popular *modelo de fulguración CHSKP*, el cual describe la geometría básica de las fulguraciones, tales como las regiones de reconexión con un punto tipo  $x$  de campo magnético neutro asociado con una onda de choque de modo lento MHD, chorros de reconexión bidireccional, ondas de choque de modo rápido formadas encima de los bucles de reconexión y plasmas que se eyectan hacia arriba de la región donde se está dando la reconexión. Este modelo se ha utilizado efectivamente para describir procesos de evaporación cromosférica [Yokoyama and Shibata, 1994] [Yokoyama and Shibata, 1997] [Yokoyama and Shibata, 2001] por medio de simulaciones MHD las cuales añaden la conducción de calor. Notablemente en el contexto de AMR [Ruan et al., 2020] se utiliza este modelo usando el código MPI-AMRVAC [Keppens et al., 2012] para modelar la emisión de rayos X producida en diversas ubicaciones del modelo, en particular los puntos de anclaje cromosféricos.

En este capítulo se aborda la simulación de una fulguración, para esto se presentan dos simulaciones relativas a las configuraciones de hojas de corriente que muestran el aspecto resistivo de las ecuaciones MHD y de reconexión; después se presentan los resultados que hemos desarrollado el modelo de una fulguración generada por un perfil de resistividad magnética anómala localizada similar a los trabajos de [Magara et al., 1996] [Yokoyama and Shibata, 1997] de manera que se perturbe una hoja de corriente ubicada entre la cromosfera y la corona. Mostramos cómo evoluciona la configuración produciendo tanto chorros bidireccionales fuera de la región de reconexión como las ondas de choque presentes en las configuraciones de reconexión magnética rápida. En la sección 7.2 describiremos el modelo CHSKP abordando la reconexión magnética como mecanismo fundamental. En la sección 7.3 se muestra la descripción del modelo y la implementación. En la sección 7.4 se muestran los resultados de la simulación para terminar en la sección 7.5 con comentarios y conclusiones.

## 7.2. Reconexión magnética y modelo de fulguración CHSKP

La reconexión magnética es el mecanismo principal para explicar la liberación de energía magnética en la corona. Este fenómeno se ha utilizado efectivamente para modelar aspectos a gran escala del calentamiento coronal; para describir, tanto de forma cualitativa como cuantitativa, a las prominencias en la corona; y, no menos importante, en la descripción de las fulguraciones solares.

La reconexión magnética es esencialmente una reestructuración del campo magnético causado por un cambio en la conectividad de las líneas de campo. Este cambio permite liberar energía magnética almacenada, la cual, en muchas ocasiones, es la fuente dominante de energía libre en el plasma.

Esta reestructuración puede manifestarse a partir de diversas configuraciones y en diversas regiones. Por ejemplo en [Priest and Forbes, 2007] muestran las complejas reconexiones de tipo espina, abanico, en separatrices, por líneas singulares, mencionando algunas. No obstante el caso más

---

<sup>7</sup>Los efectos de corrientes de Hall introducen la primera distinción entre las partículas con carga negativa y positiva dentro de la descripción de un fluido de plasma [Bittencourt, 2004].

sencillo, y del cual se sirve el modelo CSHKP de fulguraciones, es el caso bidimensional de la reconexión en las hojas de corriente.

### 7.2.1. Hojas de corriente

Las hojas de corriente se caracterizan como capas delgadas que transportan una corriente eléctrica a través de las cuales el campo magnético cambia en dirección y magnitud. Las hojas de corriente, en el contexto de reconexión, ocurren en los puntos nulos tipo X, los cuales son regiones puntuales donde el campo magnético desaparece y en cuyas vecindades pares de líneas de campo magnético se juntan.

Como se muestra en [Priest and Forbes, 2007], en el estudio de la reconexión en dos dimensiones las hojas de corriente y los puntos nulos tipo X en configuraciones estacionarias ayudan a parametrizar los procesos de reconexión bidimensional, es así que algunas de las cantidades que frecuentemente se utilizan son:

- La media longitud y la media anchura de la hoja de corriente. Son parámetros útiles al momento del estudio perturbativo de la reconexión.
- La beta del plasma,  $\beta = 2\mu P/B^2$ ; donde  $B$  es la magnitud del campo magnético,  $\mu$  es la susceptibilidad magnética, y  $P$  es la presión hidrodinámica. Permite rastrear los desequilibrios en las hojas de corriente al ser perturbadas.
- Número de Reynolds magnético,  $R_m = v/v_d$ . Razón entre la velocidad del fluido  $v$  y la velocidad de disipación  $v_d$ .
- Número de Lundquist,  $S = v_A/v_d$ . Este parámetro es un cociente entre la velocidad alfvénica  $v_A = B/\sqrt{\mu\rho}$  y la velocidad de disipación  $v_d = \eta/L_0$ , donde  $\rho$  es la densidad del plasma,  $\eta$  es la resistividad y  $L_0$  es la escala espacial base del sistema. Es un caso especial del número de Reynolds magnético. Entre otras cosas, permite rastrear qué aspecto domina de las ecuaciones MHD, ya sea el ideal ( $S \gg 1$ ) o el resistivo ( $S \ll 1$ ).

Las hojas de corriente que se asocian a procesos de reconexión frecuentemente se manifiestan como discontinuidades tangenciales; es decir, que el campo magnético es tangencial a la discontinuidad y no existe flujo de plasma a través de la capa de plasma.

Las discontinuidades tangenciales son altamente susceptibles a perturbaciones; frecuentemente se presentan inestabilidades del tipo KH y de desgarre. En ese sentido las hojas de corriente se sirven de esta característica para promover procesos de reconexión magnética; esto se exhibe fuertemente en el modelo de reconexión Sweet-Parker ([Sweet, 1958, Parker, 1957]).

En la Figura 7.2 se esquematiza este mecanismo de reconexión, el cual consiste en ceñir la difusión, con una resistividad dada  $\eta$ , a una capa delgada de anchura media  $l$  y longitud media  $L$ . Asumiendo una perturbación en el sistema dado por una configuración de campo magnético de una hoja de corriente, existe una cantidad de plasma que ingresa a la región de difusión arrastrando consigo las líneas del campo magnético  $B_i$  a una velocidad de entrada  $v_i$ , que es expulsada fuera de la región de difusión con una intensidad  $B_o$  y a una velocidad  $v_o$ . Para una configuración estacionaria el resultado principal de este mecanismo se tiene bien estudiado (véase [Gurnett and Bhattacharjee, 2005]), y en este caso se tiene que:

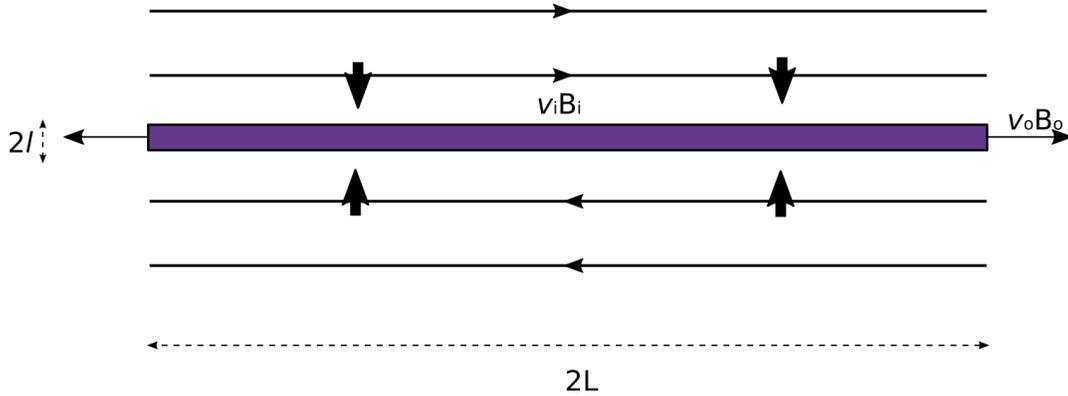


Figura 7.2: Modelo de reconexión de Sweet-Parker. La región de difusión se presenta rellena de púrpura. Tiene una anchura media  $l$  y una longitud media  $L$ .  $B_i$  es la intensidad de campo magnético que entra en la región de difusión a una velocidad  $v_i$ , mientras que  $B_o$  es la intensidad del campo que se expulsa a una velocidad  $v_o$ .

- La velocidad de expulsión fuera de la región de difusión está dada por

$$v_o = \frac{B_i}{\sqrt{\mu\rho}} \equiv v_{Ai}, \quad (7.1)$$

donde  $v_{Ai}$  es la velocidad alfvénica debida a  $B_i$ .

- La media anchura  $l$  y la media longitud  $L$  de la hoja de corriente están relacionadas por el número de Lundquist,  $S = Lv_{Ai}/\eta$ , por medio de

$$l = \frac{L}{S^{1/2}}. \quad (7.2)$$

- La magnitud del campo magnético expulsado está dada por

$$B_o = \frac{B_i}{S^{1/2}}. \quad (7.3)$$

- La velocidad de ingreso hacia la zona de difusión está dada por

$$v_i = \frac{v_{Ai}}{S^{1/2}}. \quad (7.4)$$

Al cociente de  $v_i/v_o$  se le conoce como *tasa de reconexión*,  $M_e$ , donde el subíndice  $e$  expresa que vincula la región exterior e interior de la zona de reconexión. Es evidente que, según las ecuaciones (7.1) y (7.4), para el mecanismo de Sweet-Parker la tasa de reconexión obtiene un valor de

$$M_e = S^{-1/2}. \quad (7.5)$$

Según [Priest and Forbes, 2007], para los campos magnéticos de la corona solar el número

de Lundquist se ubica en un valor entre  $10^6$  a  $10^{12}$ , de manera que  $M_e \in [10^{-3}, 10^{-6}]$ , lo cual es demasiado lento para una fulguración solar; es por razones como esta que a este mecanismo se le denomina como *reconexión lenta*, aunque cabe mencionar que sigue siendo un mecanismo de disipación de velocidad mayor que la ohmica.

Seis años después de la presentación de este mecanismo, H.E. Petschek presentó una modificación que permite obtener tasas de reconexión mayores [Petschek, 1964], en esencia se asume que la región de difusión está limitada solo a un segmento de longitud menor en la frontera que define el cambio de polaridad del campo magnético, de manera que el proceso de reconexión puede darse de manera expedita.

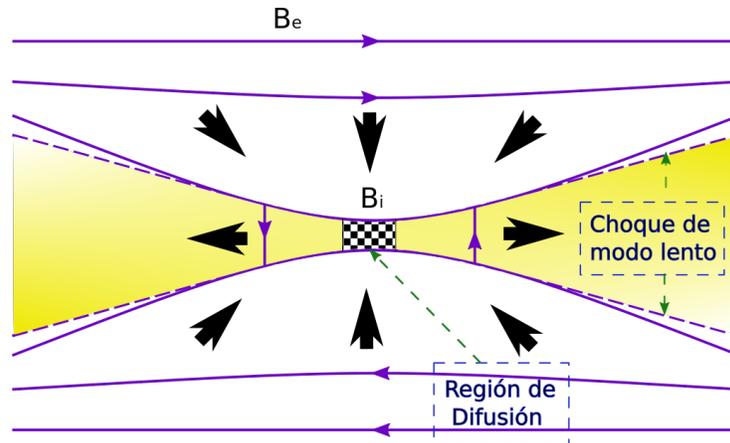


Figura 7.3: Esquema del mecanismo de reconexión tipo Petschek. Las líneas violetas continuas representan el campo magnético externo  $B_e$  y el campo magnético interno  $B_i$ . La región de central de difusión está rellenas con un patrón de tablero de ajedrez. La región rellena de color amarillo es hacia donde el plasma es expulsado; ésta región está delimitada por choques de modo lento, representados por líneas violeta punteadas, que actúan como choques de desconexión, lo cual es representado por el cambio de dirección del campo magnético aquí. El flujo de plasma se representa por las flechas negras.

En la Figura 7.3 se presenta esquemáticamente el mecanismo de reconexión de Petschek, se tiene que la región fuera de la zona de difusión se separa en una región interior y una región exterior (representadas respectivamente con los subíndices  $i$  y  $e$ ); sólo la región interior es la que experimenta el cambio de topología de la reconexión magnética. Como se muestra en [Priest and Forbes, 2007] del análisis de esta configuración, sirviéndose de aproximaciones similares al mecanismo de Sweet-Parker, se determina que para un valor del campo magnético uniforme lejos de la región de difusión  $B_e$  la máxima tasa de reconexión posible es

$$M_e \approx \frac{\pi}{8 \log S}, \quad (7.6)$$

lo cual es significativamente más rápido para un número de Lundquist dado que el mecanismo de Sweet-Parker, situando la tasa de reconexión en un rango de  $M_e \in [10^{-1}, 10^{-2}]$ . En este modelo se encuentra la presencia de choques lentos que funcionan como choques de desconexión y delimitan

la región en la cual el plasma es expulsado.

El mecanismo de Petschek muestra cómo las dimensiones y la ubicación de la región de difusión en configuraciones de campo magnético de las hojas de corriente afectan fuertemente la reconexión magnética, de manera que los análisis numéricos requieren que las técnicas puedan capturar regiones de aumento de resistividad localizada y precisamente es que el código desarrollado en ésta investigación se enfoca en realizar esto de manera efectiva.

Después del mecanismo de Petschek, gran número de modelos de regiones de difusión localizada fueron desarrollados que aumentaron la tasa de reconexión y actualmente se engloban como mecanismos de *reconexión rápida*.

La característica de restringir espacialmente la región de difusión se menciona en varias instancias como *resistividad anómala*<sup>8</sup> y esta generación espontánea de la resistividad anómala puede escapar el enfoque de las ecuaciones MHD; por ejemplos, se puede estudiar desde el enfoque multi-especie de los plasmas que frecuentemente se sirve de la ecuación de Vlasov, métodos estocásticos para la ecuación de Boltzmann o métodos numéricos de partículas virtuales para rastrear la dinámica de cada especie de partícula. Por otra parte, la resistividad anómala evoluciona fácilmente en dinámicas turbulentas las cuales requieren estudios más sofisticados.

Los mecanismos de reconexión rápida en dos dimensiones fueron utilizados efectivamente en el modelo CSHKP el cual se describe a continuación.

### 7.2.2. Modelo de Fulguración Carmichael-Sturrock-Hirayama-Kopp-Pneuman

En la Figura 7.4 se muestra la imagen que pinta el modelo de fulguración CSHKP, [Carmichael, 1964, Sturrock, 1966, Hirayama, 1974, Kopp and Pneuman, 1976], con el cual se han recolectado los rasgos geométricos relevantes de las fulguraciones eruptivas. En esencia puede considerarse este modelo como un corte bidimensional del escenario representado en la Figura 7.1: existe una compresión de las líneas de campo magnético hacia la zona de difusión localizada lo cual reconecta las líneas de campo alrededor de la prominencia, por una parte se produce una expulsión de plasma similar el mecanismo de Petschek que, de manera simultánea, empuja la prominencia hacia afuera de la región de difusión y comprime los bucles de fulguración elevando su temperatura. Puede observarse la presencia de choques lentos, los cuales son generados por el mecanismo de reconexión rápida a la vez que se encuentran choques de modo rápido encima y debajo de la zona de difusión que se encuentran entre la prominencia y el bucle de fulguración.

## 7.3. Especificaciones de las simulaciones

Con todo, en este trabajo se utilizó el código CAFE-AMR para simular una fulguración eruptiva con este modelo, el cuál es altamente susceptible a las variaciones de tamaño y forma de la zona de difusión, lo cuál lo hace un problema útil para abordar la resolución localizada en el contexto de física solar. En la siguiente sección se presentan las especificaciones para simular aspectos pertinentes a las fulguraciones eruptivas: la hoja de corriente bidimensional en el régimen ideal de la MHD que debido a errores de truncamiento del método numérico generan resistividad artificial que promueve

---

<sup>8</sup>En el libro de texto de [Priest, 2014] puede encontrarse esta denominación, como en los trabajos de [Yokoyama and Shibata, 1994, 1997, 2001].

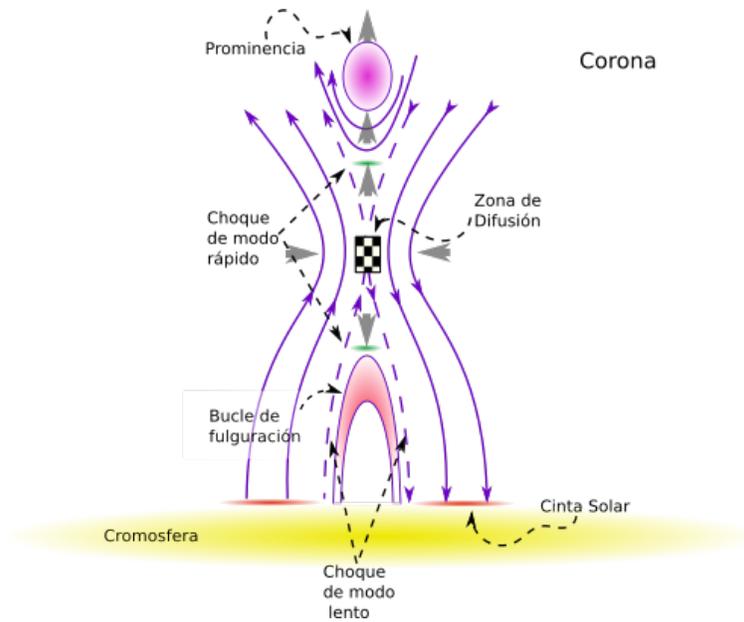


Figura 7.4: Modelo de fulguración CSHKP. La región amarilla representa la cromosfera alta. La prominencia está representada por la elipse superior sombreada por color violeta. Las cintas solares se presentan como las dos regiones rojas delgadas. Las líneas contínuas purpuras representan las líneas de campo magnético, mientras que las líneas punteadas representan los choques de modo lento. La zona de difusión está remarcada por un patrón de tablero de ajedrez. El bucle de fulguración está ubicado debajo de la zona de difusión y está resaltado con color naranja. Los choques de modo rápido se presentan como regiones delgadas posicionadas encima y debajo de la zona de difusión. Las flechas semitransparentes indican el flujo de plasma del sistema.

la reconexión; la hoja de corriente de Harris, donde una configuración de campo magnético de hoja de corriente en una resistividad pequeña y homogénea genera reconexión al perturbar ligeramente el sistema; finalmente, el modelo de fulguración generado por medio de la resistividad anómala localizada encima de la zona de transición entre la cromosfera y la corona, similar al modelo CSHKP.

A continuación se presentan las especificaciones para las simulaciones de hoja de corriente bidimensionales, la hoja de corriente de Harris y una fulguración generada con resistividad localizada.

### 7.3.1. Hoja de corriente bidimensional

La prueba de hoja de corriente propuesta en [Gardiner and Stone, 2005] y más específicamente probando la estrategia AMR en [Fromang et al., 2006], corresponde a la evolución del plasma en una configuración de campo magnético de hoja de corriente apropiadamente discontinuo, puesto que en el contexto de la MHD ideal no puede haber reconexión, éste proceso es generado por los errores de truncamiento de los métodos numéricos y puede actuar como una resistividad numérica efectiva, la cual a su vez depende de la resolución numérica.

El problema está formulado en el dominio  $[0, 2] \times [0, 2]$ , llenado con un gas de densidad cons-

tante  $\rho = 1.0$  y presión  $p = 0.1$ . El campo magnético discontinuo está definido por la expresión

$$B_y = \begin{cases} -1, & |x - 1| \leq 0.5 \\ 1, & > 0.5 \end{cases} \quad (7.7)$$

y  $B_x = B_z = 0$ . La dinámica de la reconexión se dispara por una perturbación en el campo de velocidades  $(v_x, v_y, v_z) = (0.1 \sin(\pi y), 0, 0)$ , lo cual produce una inestabilidad en modo de desgarramiento al vincular el tamaño de la amplitud de la perturbación con el de las dimensiones de la hoja de corriente. Las condiciones de frontera utilizadas para el sistema son periódicas, las cuales eventualmente amplificarán los efectos de la perturbación.

Esta simulación utiliza una resolución base de  $80 \times 80$  celdas con cuatro niveles de refinamiento, dando como resultado una resolución equivalente de  $1024 \times 1024$ , y el criterio de refinamiento 4.3 con un umbral de  $\chi_r = 0.1$  utilizando como función escalar para evaluar tanto a la presión  $P$  como la componente  $B_y$  del campo magnético. La fórmula de flujos numéricos utilizó HLLC.

### 7.3.2. Hoja de corriente de Harris

La prueba de la hoja de corriente de Harris se presentó en [Birn et al., 2001] en el contexto de modelación geoespacial, y básicamente ilustra como la reconexión magnética ocurre en la presencia de una hoja de corriente en un dominio con resistividad uniforme y estacionaria. En esencia éste es un mecanismo de reconexión lenta similar al de Sweet-Parker. Se utilizan parámetros estándar para el dominio numérico y físico de las cantidades del problema. El dominio numérico se define como el rectángulo  $[-L_x/2, L_x/2] \times [-L_y/2, L_y/2]$  con  $L_x = 25.6$  y  $L_y = 12.8$ . Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \operatorname{sech}^2(y/\lambda) + \rho_\infty \\ p &= \frac{B_0^2}{2} = 0.5 \\ B_x &= B_0 \tanh(y/\lambda) + \delta B_x \\ B_y &= \delta B_y \end{aligned} \quad (7.8)$$

con el sistema inicialmente en reposo, y donde las perturbaciones en las componentes del campo magnético son

$$\begin{aligned} \delta B_x &= -\Psi_0 \frac{\pi}{L_y} \sin(\pi y/L_y) \cos(2\pi x/L_x), \\ \delta B_y &= \Psi_0 \frac{2\pi}{L_x} \sin(2\pi x/L_x) \cos(\pi y/L_y). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Los valores de los parámetros son: para la densidad  $\rho_0 = 1$ , junto con un valor asintótico de  $\rho_\infty = 0.2$ ; la intensidad del campo magnético está dada por  $B_0 = 1.0$ ; la anchura media de la hoja de corriente es  $\lambda = 0.5$ ; la amplitud de la perturbación  $\Psi_0 = 0.1$  y con un valor de la resistividad de  $\eta = 8 \times 10^{-3}$ . La simulación usa una resolución base de  $128 \times 64$  celdas, una fórmula de flujos HLLC; criterio de refinamiento (4.2) con un umbral de  $\chi_r = 1$  y dos niveles de refinamiento dando una resolución equivalente de  $512 \times 256$  celdas.

### 7.3.3. Fulguración por resistividad anómala localizada

El modelo para fulguraciones solares que se presenta en este trabajo tiene como base el utilizado en [Yokoyama and Shibata, 2001] en donde se muestra cómo el efecto de tener una región localizada de resistividad magnética tiene el efecto de disparar los procesos de reconexión en la fulguración. La simulación que se realizó para este trabajo modela la generación de fulguraciones en un perfil de densidad estratificado donde el campo magnético de una hoja de corriente se desarrolla en la presencia de un perfil espacial de la resistividad gaussiano.

La simulación se lleva a cabo en un dominio numérico de  $(x, y) \in [-10, 10][0, 20]$ ; las condiciones de frontera son de flujo saliente en el borde superior y los costados mientras que para el borde inferior las condiciones son fijas. Se utiliza una resolución inicial de  $80 \times 80$  celdas con cuatro niveles de refinamiento, dando como resolución equivalente de  $1280 \times 1280$  celdas; el criterio de refinamiento usado es (4.2) con un umbral de  $\chi_r = 1$ ; los flujos numéricos se construyeron usando la fórmula HLLE con un avance temporal de segundo orden dado por la estrategia CTU. El factor  $CFL = 0.01$  se escogió de manera que sean correctamente capturadas las escalas temporales de difusión las cuales se obtienen de la ecuación de inducción y numéricamente tienen la forma de

$$\Delta t < \frac{\text{mín} [\Delta x, \Delta y, \Delta z]^2}{\eta}.$$

La densidad tiene un perfil estratificado dado por

$$\rho(y) = \rho_{chr} + \frac{1}{2}(\rho_{cor} - \rho_{chr}) \tanh [(y - h_{tr})/w_{tr} + 1], \quad (7.10)$$

donde  $\rho_{cor} = 1$ ,  $\rho_{chr} = \rho_{cor} \times 10^5$ ,  $h_{tr} = 1$ ,  $w_{tr} = 0.2$ . Debido a que la densidad entre la corona y la cromosfera tiene una diferencia de 5 ordenes de magnitud, la ecuación de estado de gas ideal garantiza que la temperatura del sistema se ciña también a una corona más caliente que la cromosfera.

El campo magnético se define como

$$B_x = 0, \quad (7.11)$$

$$B_y = B_0 \tanh(x/\omega), \quad (7.12)$$

$$B_z = B_0 \cosh(x/\omega), \quad (7.13)$$

donde  $B_0 = 1$  and  $\omega = 0.5$ ; la resistividad localizada es la misma que en [Takasao et al., 2015], y está dada por

$$\eta(x, y) = \eta_0 \exp[-(x^2 + (y - h_\eta)^2)/\omega_\eta^2], \quad (7.14)$$

donde  $\omega_\eta = 0.2$ ,  $h_\eta = 6$  y  $\eta_0 = 1$ . La presión está inicialmente fija y homogénea con un valor de  $P = 1/\gamma$  y un valor para el índice adiabático de  $\gamma = 5/3$ . Finalmente se tiene que el sistema está inicialmente en reposo. Las unidades físicas se conectan con las unidades de código siguiendo el mismo esquema que en la prueba del viento solar hidrodinámico que se mostrará en la sección 8.3.2. Las constantes de normalización para este caso se muestran en la tabla 7.1. Donde los valores de escalamiento son similares a los de [González-Avilés et al., 2020].

Cantidad	Normalización
Tiempo	$t_0 = 1 \text{ s}$
Longitud	$L_0 = R_\odot = 1 \times 10^8 \text{ m}$
Campo Magnético	$B_0 = 11.21 \times 10^{-4} \text{ Tesla}$
Velocidad	$v_0 = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0} \approx 1 \times 10^6 \text{ m/s}$
Temperatura	$\mu_H v_0^2 / k_B \approx 7.269 \times 10^6 \text{ K}$
Densidad	$\rho_0 = 10^{-12} \text{ Kg m}^{-3}$

Tabla 7.1: Constantes de normalización para la prueba de la fulguración solar dipolo magnético inclinado, donde  $\mu_H = 0.6 \times 1.6726219 \times 10^{-27} \text{ kg}$  es el peso medio de la molécula de hidrógeno,  $k_B = 1.3806488 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  es la constante de Boltzmann, y  $\mu_0 = 1.256637 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$  la permeabilidad magnética.

## 7.4. Resultados

En las pruebas siguientes mostramos cómo la estrategia de refinamiento adaptativo persigue las regiones en las cuales se dan los procesos de reconexión magnética.

### 7.4.1. Hoja de corriente bidimensional

En esta prueba se puede observar que, dado que no existe una resistividad explícita en las ecuaciones, la discontinuidad del campo magnético tiende a producir un desgarre a lo largo de las hojas de corriente y regiones de reconexión localizada se generan. La evolución promueve la formación de plasmoides, lo cual se muestra por las islas magnéticas localizadas. En la Figura 7.5 se muestra el perfil de la presión hidrodinámica y la estrategia de refinamiento los resultados para dos momentos temporales, uno previo a la formación de islas y uno posterior a la formación. Se observa la formación de estructuras compactas de alta presión las cuales son capturadas por la estrategia AMR.

En la Figura 7.6 se observa cómo las líneas de campo magnético son torcidas hasta que se cierran y forman las islas magnéticas las cuales a su vez presentan islas anidadas.

### 7.4.2. Hoja de corriente de Harris

Los resultados de la solución numérica para esta prueba se presentan por las instantáneas en la Figura 7.7 a diferentes tiempos. Puede observarse cómo la corriente eléctrica comienza a localizarse mientras que se generan unos plasmoides en los extremos del dominio numérico. En la Figura 7.8, se muestra una instantánea de la densidad y el comportamiento del refinamiento adaptativo. En este caso se muestra cómo las regiones con mayor resolución coinciden con las regiones en las cuales el sistema tiene mayor variación.

### 7.4.3. Fulguración por resistividad anómala localizada

Para el modelo de una fulguración eruptiva por medio de la resistividad localizada se obtuvo un perfil que corresponde al presentado en la Figura 7.4. A continuación se muestran los obtenidos para  $t = 15\text{s}$ . En la Figura 7.9 se presenta la instantánea de la beta del plasma. Se puede observar

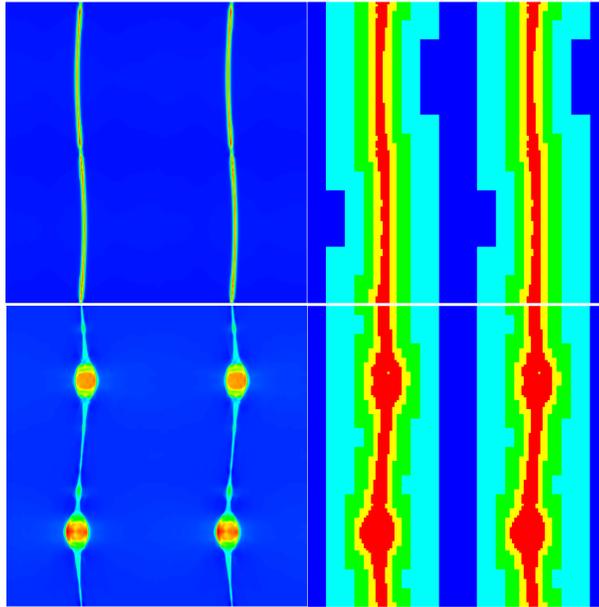


Figura 7.5: Instantáneas a los tiempos  $t = 0.75, 1.75$  en la prueba de la hoja de corriente bidimensional. A la izquierda se muestra el perfil de la presión, mientras que a la derecha se muestran los correspondiente seguimiento de los refinamientos. En esta simulación se utilizó un criterio de refinamiento (4.3) con un umbral de  $\chi_r = 0.1$  y tres niveles de refinamiento.

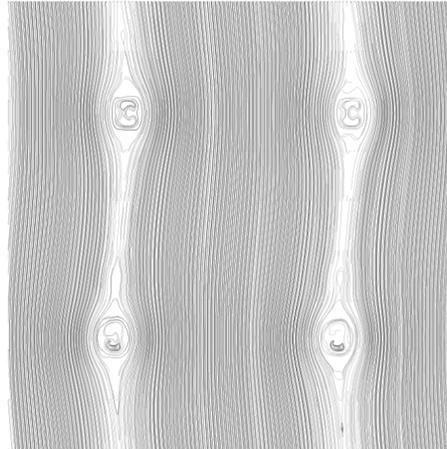


Figura 7.6: Muestreo de las líneas decampo magnético a un tiempo  $t = 1.75$  en la prueba de la hoja de corriente bidimensional.

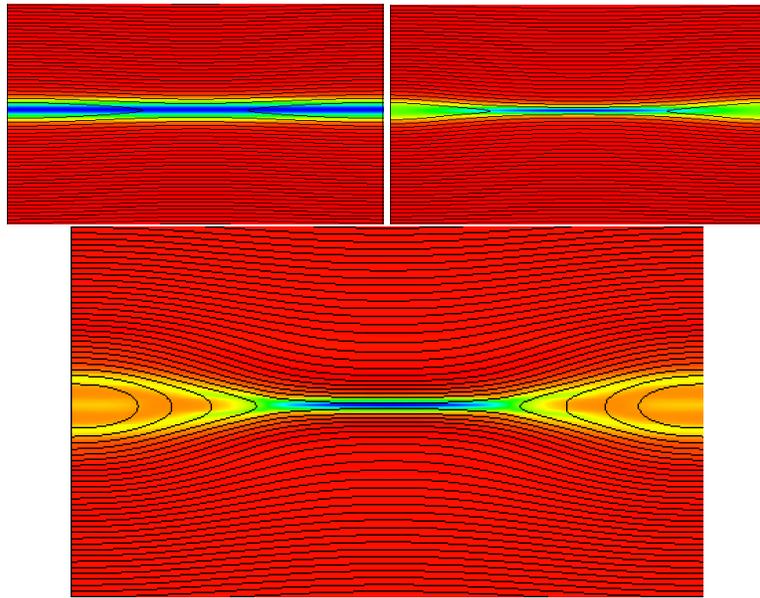


Figura 7.7: Instantáneas de la componente  $J_z$  de la corriente eléctrica a tiempos  $t = 7.5$  (izquierda parte superior),  $t = 12.5$  (derecha parte superior) y  $t = 25$  (parte inferior) para la prueba de la hoja de corriente de Harris. La gama de colores es color azul para el valor más negativo de la corriente eléctrica, mientras que el amarillo es el más positivo; la región naranja en general tiene un valor nulo de la corriente eléctrica. Las líneas de campo magnético se superponen a cada una de las instantáneas.

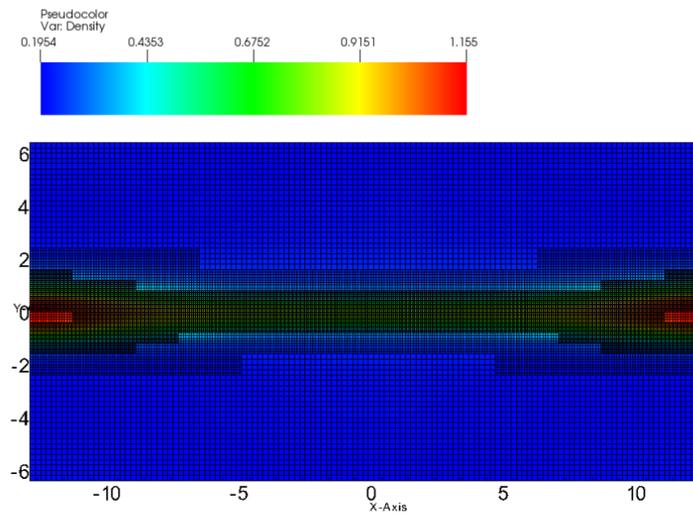


Figura 7.8: Instantánea de la densidad a  $t = 23.5$  para la hoja de corriente de Harris, se ha superpuesto el refinamiento adaptativo y se muestra cómo cubre las regiones de interés.

que en las vecindades de la región donde la resistividad es mayor, el comportamiento de difusión es mayor, llegando a ser  $\sim 10^{-2}$  veces menor que en las regiones de beta pequeña; por otra parte se muestra que donde se ubican los choques de modo lento existe una diferencia bastante pronunciada en la beta definiendo de manera efectiva una región interna caliente y de carácter hidrodinámico y una región externa en la cual el comportamiento difusivo domina.

En la Figura 7.10 se muestra cómo la temperatura tanto de la cromosfera como de la corona presentan poca variación con respecto a las regiones cercanas a la zona de difusión; dentro de la región difusiva puede observarse que las temperaturas llegan hasta  $\approx 3.31 \times 10^7 \text{K}$  lo cual es muchísimo más caliente que en la región externa; puede observarse que en la parte inferior a la zona de resistividad localizada el contacto con la cromosfera fría genera una estructura tipo cúpula, la cual corresponde a los bucles de fulguración, mientras que la parte superior no está delimitada y asemeja a una mitad del mecanismo de reconexión de Petschek de la Figura 7.3. En la Figura 7.12 se encuentran que existen chorros de plasma verticales con velocidades máximas de  $\approx 488 \text{Km s}^{-1}$ . Estos chorros están ubicados en la región interior de difusión y tienen la característica de expulsar el plasma fuera de la zona de mayor resistividad; el contacto con la corona frena el flujo de plasma de manera que el chorro inferior tiene una velocidad de expulsión de magnitud menor.

En la Figura 7.11 se muestra la disposición de las líneas de campo magnético, para obtenerlas se utilizó el algoritmo integrador del paquete para visualizar datos VisIt [Childs et al., 2012]. Se tiene que las líneas de campo se comprimen y aumentan hacia la zona difusiva. En la región interna de difusión, las líneas de campo se reconectan de manera que los choques de modo lento presentan la característica de funcionar como choques de desconexión. Por otra parte en se muestra que se generan ciertas islas magnéticas en la región superior y en la región inferior se presentan estructuras del tipo bucle. Finalmente, en la Figura 7.13 se muestra que la estrategia de refinamiento que se ha escogido promueve aumentar la resolución en:

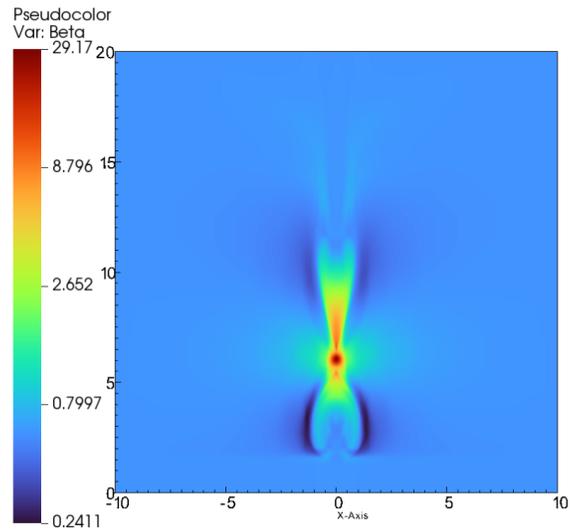


Figura 7.9: Instantánea de la beta del plasma a un tiempo  $t = 15s$  para la simulación de la fulguración por resistividad localizada; dado que la beta del plasma es un cociente entre presiones, es una cantidad adimensional.

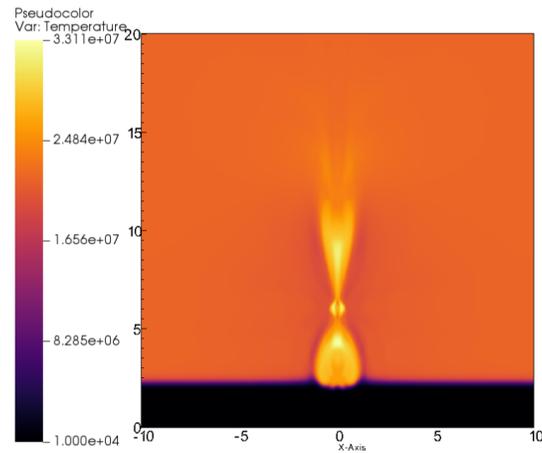


Figura 7.10: Distribución de la temperatura, en grados Kelvin, para la simulación de la fulguración por resistividad localizada a un tiempo  $t = 15s$ .

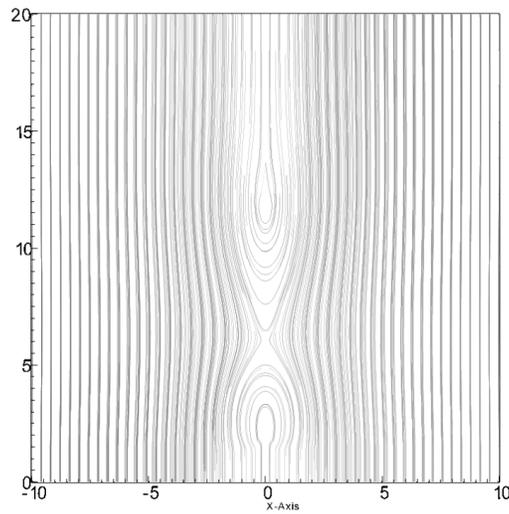


Figura 7.11: Muestreo de las líneas de campo magnético a un tiempo  $t = 15$ s para la simulación de la fulguración por resistividad localizada.

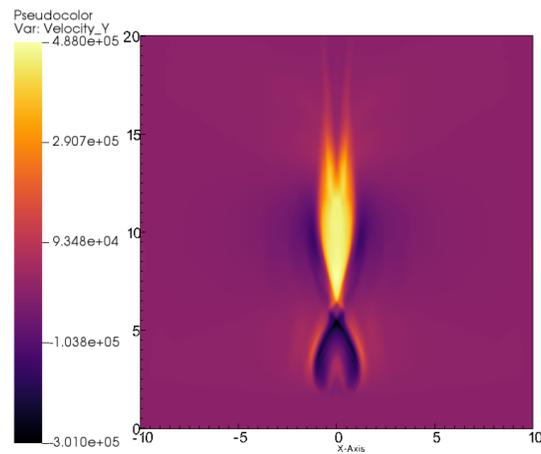


Figura 7.12: Distribución de la componente  $v_y$  de la velocidad del plasma, en unidades de  $\text{m s}^{-1}$ , para la simulación de la fulguración por resistividad localizada a un tiempo  $t = 15$ s.

- Los choques lentos
- La región de mayor difusión magnética
- La cromosfera en general.

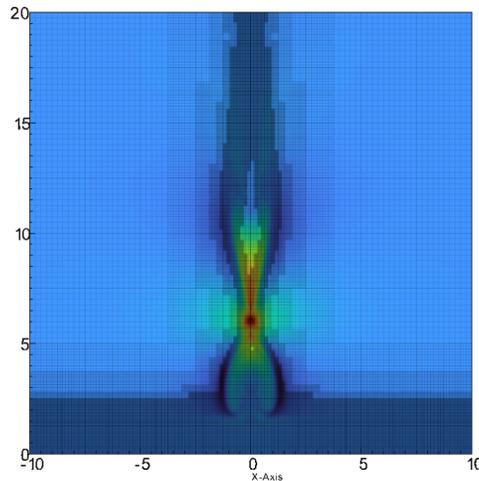


Figura 7.13: Instantánea de la beta del plasma a un tiempo  $t = 15s$  para la simulación de la fulguración por resistividad localizada, aquí se superpone la estructura de refinamiento mostrando las regiones con mayor resolución.

Con todo, los resultados muestran que existe una región interna y una externa difusiva, separadas por choques de desconexión. En la región interna se presentan chorros verticales que expulsan el plasma fuera de la zona de mayor resistividad. A causa de la presencia de la cromosfera, el chorro inferior genera una estructura tipo cúpula que puede identificarse como un bucle de fulguración, y finalmente se muestra que con la estrategia de refinamiento se generó mayor resolución en las vecindades de la discontinuidad que separa a las regiones de difusión e ideales, a la par que la región de la cromosfera.

## 7.5. Discusión de resultados y comentarios finales

Los mecanismos de disipación tienden a ser asociados con las ecuaciones diferenciales parabólicas; la dificultad al abordar esto es que los métodos de volúmenes finitos fueron desarrollados principalmente para construir las soluciones a los problemas estrictamente hiperbólicos. Aunado a esto, las ecuaciones parabólicas son susceptibles a variaciones globales en el dominio numérico donde se resuelven y el refinamiento adaptativo puede hacer más difícil la construcción de la solución. No obstante, con las estrategias que se han desarrollado en este trabajo, se pudieron construir soluciones para los escenarios de fulguraciones solares de manera satisfactoria, lo cual sirve, cuando

menos, como basen en la cual se pueden implementar estrategias más sofisticadas como los métodos implícitos y explícitos<sup>9</sup>.

Con respecto a los resultados obtenidos para la hoja de corriente bidimensional y para la hoja de corriente de Harris, se tiene que son comparables con las pruebas que se tienen para otros códigos, por ejemplo, PLUTO [Mignone et al., 2007]; ATHENA [Stone et al., 2008]; FLASH [Fryxell et al., 2000] y CAFE Newtoniano [González-Avilés et al., 2015]. En el caso de la hoja de corriente bidimensional, la morfología de las islas magnéticas tiene una estructura considerablemente de mayor volumen que la presentada en las pruebas para estos códigos y una posibilidad es que los flujos numéricos HLLC no fueron utilizados para estos trabajos. Dado que las soluciones a la linearización de las ecuaciones MHD tiene una solución que se compone en 7 modos de propagación (a saber, las dos velocidades magnetosónicas rápidas las dos lentas y la velocidad del sonido), es probable que el método HLLC introduzca diferencias al ser un método que se aproxima con 3 ondas.

Por otra parte, el refinamiento adaptativo se posicionó adecuadamente alrededor de las discontinuidades de las hojas de corriente y fue capaz de rastrear el movimiento de la capa que separa la polaridad del campo, lo cual promovió la creación de subislas magnéticas.

Para la hoja de corriente de Harris, se tiene que la corriente eléctrica se comportó de la misma manera que en las pruebas numéricas de los códigos mencionados, localizándose paulatinamente en una capa cada vez más delgada y estrecha, como puede observarse en la Figura 7.7; el refinamiento adaptativo para esta prueba persiguió las regiones de mayor dinámica, como era de esperarse.

Con respecto a los resultados para el modelo de la fulguración solar, se puede observar que se logró conseguir los aspectos geométricos del modelo CSHKP de la Figura 7.4; la zona de reconexión está bien delimitada y las cantidades típicas de los chorros de expulsión de las fulguraciones eruptivas están dentro de los rangos de velocidad aceptables. En la estructura térmica de la solución puede observarse que se alcanzan temperaturas que corresponden fuertemente al canon actual, es decir uno o dos órdenes de magnitud mayor que la corona que lo rodea. El refinamiento adaptativo logró capturar adecuadamente los choques lentos que dividen a las regiones, de manera que la topología del campo magnético se estableció en la configuración del modelo CHSKP; sin embargo, la estrategia de refinamiento asignó la máxima resolución a la zona correspondiente a la cromosfera, sobre la cual, el sistema no varía fuertemente en comparación con las demás zonas refinadas; en ese sentido más pruebas son necesarias. Por último cabe mencionar que no se observó calentamiento de las cintas coronales, lo cual sí se ha generado en trabajos como los de [Takasao et al., 2015], [Ruan et al., 2020] y la diferencia estriba en que ahí se utiliza un módulo para abordar la parte calorífica de las ecuaciones MHD aunado a la estrategia AMR. Con todo, el código desarrollado para este trabajo sirve como buena base para montar diversos módulos y estudiar este aspecto de las fulguraciones eruptivas.

Aunque aún existen preguntas por responder, tales como el origen de la localización de la resistividad, la teoría de reconexión magnética en dos dimensiones está bien comprendida y desarrollada. Se ha encontrado que el tipo de reconexión que se produce depende de la tasa de reconexión, la configuración de las líneas de campo y las condiciones de frontera. Por otra parte, en estudios tridimensionales, está menos desarrollada dado que la estructura topológica del campo magnético se vuelve más intrincada, en los puntos nulos la reconexión pueden originarse en configuraciones más complejas que las hojas de corriente y estudios subsecuentes pueden realizarse con el código

<sup>9</sup>Pueden consultarse las referencias de [Gustafsson et al., 2013] donde se profundiza más sobre este tema

desarrollado en este trabajo.



## Capítulo 8

# Viento solar

### Resumen

En este capítulo se presentan dos simulaciones de viento solar, un caso hidrodinámico estacionario sobre el cual se inyecta una perturbación utilizando los parámetros para una eyección de masa coronal y un caso magnetizado en el cual se simula un viento inmerso en un campo magnético producido por un dipolo magnético inclinado y con rotación. Ambas pruebas tienen la motivación de abordar la efectividad de utilizar la estrategia AMR desarrollada en este trabajo en fenómenos solares a escalas interplanetarias.

En la *Introducción* se hace una breve descripción de lo que es el viento solar y se describe el estado del arte de las simulaciones de éste. Después, en la sección de *Modelos analíticos de viento solar*, se describen los modelos que ayudan a establecer características importantes en las simulaciones numéricas, por ejemplo, *el punto sónico* y *el radio alfvénico*. En la sección de *Métodos numéricos para modelar vientos solares* se hace una descripción técnica de las configuraciones para las simulaciones realizadas. En la sección de *Resultados* se muestran perfiles de las cantidades relevantes del plasma interplanetario. Finalmente, en la sección de *Discusión de resultados* se evalúa la pertinencia de las simulaciones y argumentamos cómo la estrategia AMR captura estructuras localizadas del viento solar, validando su aplicación a simulaciones de escalas interplanetarias.

### 8.1. Introducción

El clima espacial hace referencia al campo de investigación que permite abordar las influencias complejas que tienen los efectos del Sol y otras fuentes cósmicas en el espacio interplanetario y gran parte está motivada (tanto física como económicamente) por la búsqueda de predicción y entendimiento de qué le sucederá a nuestro planeta al estar inmerso en este medio y su dinámica.

En las regiones interplanetarias los efectos del Sol y el medio interestelar compiten por quién representa la mayor influencia física. En este contexto, el viento solar es un protagonista que genera gran cantidad de la dinámica y cinemática en el medio interplanetario.

El viento solar se modela como un fluido de plasma supersónico completamente ionizado que es expulsado del Sol y representa una extensión de la corona a través del medio interplanetario. Los inicios del estudio del viento comienzan desde 1900, cuando Bierkeland [Birkeland, 1913] hizo

modelos de radiación corpuscular ionizante que llegaba a la Tierra, y en 1930, cuando Chapman y Ferraro [Chapman, 1929] utilizaron ideas similares para explicar las tormentas geomagnéticas; los modelos actuales tienen sus orígenes en los trabajos realizados por Parker alrededor de la década de 1960 [Parker, 1958], en donde se abordó la idea de que una corona extendida con una densidad estratificada a temperatura constante producía una eyección estacionaria solar de materia a velocidades supersónicas, lo cual fue completamente corroborado observacionalmente en la misión venusina de 1962, Mariner II [Snyder and Neugebauer, 1965].

Actualmente, para ahondar en el estudio del viento solar, de manera continua se generan datos observacionales de la corona y el viento solar, por ejemplo con las misiones ULYSSES [Wenzel et al., 1992], SOHO [Domingo et al., 1995], STEREO [Kaiser et al., 2008] y más recientemente la *Parker Solar Probe* [Raouafi et al., 2023]; son necesarias en este contexto buenas simulaciones numéricas para entender y mejorar los modelos que describan al viento solar.

Como caso gregario de la modelación actual, se puede observar el acercamiento del *Centro para el modelado de clima espacial Integrado* (CISM por sus siglas en inglés) [Goodrich et al., 2004], en donde, entre otras aproximaciones, utilizan esquemas que representan soluciones en la corona y en la heliosfera, todo esto contenido en un paradigma computacional denominado *CORHEL* en [Feng et al., 2021] y que fue originalmente desarrollado en [Linker et al., 2009]. La idea de este tipo de esquemas es extender las soluciones que se obtienen para modelar cuantitativamente la corona solar y generar información que inicie los modelos del viento solar en la heliosfera. Ejemplos notables que utilizan éste tipo de esquemas son los de la aplicación MAS [Linker et al., 1999, Mikić et al., 1999] en heliofísica y el modelo empírico de la fuente superficial de campo potencial Wang-Sheley-Argé (PFSS-WSA) [Wang and Sheeley Jr, 1992], por ejemplo en el código ENLIL [Odstrcil, 2003]; en ambos se realizan predicciones del clima espacial utilizando mapas sinópticos de la componente radial del campo magnético en la fotosfera.

De importancia mayor para estas simulaciones es poder capturar subestructuras del viento solar a diversas escalas. Ejemplos de estas subestructuras, mencionadas en [Burlaga and Burlaga, 1995], son: la *hoja de corriente heliosférica*, que representa la región del viento solar localizada alrededor del ecuador, tiene una velocidad de viento menor que el resto del dominio y presenta un cambio de polaridad en el campo magnético; y las *regiones de interacción corrotantes* causadas por chorros de viento solar que rotan con el Sol y que presentan una discontinuidad de las cantidades del plasma. En este contexto multiescala, la estrategia AMR ha sido efectivamente aplicada por los códigos AMR-CESE-MHD [Feng et al., 2012], ICARUS [Verbeke et al., 2022] los cuales pueden realizar simulaciones solares utilizando esta estrategia en mallas no cartesianas.

En este contexto, el código CAFE-AMR que se ha desarrollado con esta investigación, implementa la estrategia AMR para la solución de las ecuaciones MHD en simulaciones de escalas interplanetarias y puede capturar aspectos de alta resolución localizada. En este capítulo efectuamos dos pruebas que validan que con la tecnología desarrollada es posible desarrollar simulaciones de viento solar con futuras aplicaciones a la predicción de clima espacial.

## 8.2. Modelos analíticos del viento solar

Para comprender el modelado del viento solar, comenzaremos la discusión abordando los modelos analíticos que fueron propuestos a mediados del siglo XX.

Para comenzar hablaremos de modelos analíticos del viento solar los cuales manifiestan dos parámetros físicos importantes a tener en cuenta; el *punto sónico* y el *radio alfvénico*. El primero determina a partir de qué distancias el viento solar es supersónico mientras que el segundo determina por una parte a partir de qué punto el comportamiento de la MHD ideal del viento solar es más relevante, es decir que el campo magnético es arrastrado por el viento solar en las espirales arquimedianas, y por otra la distancia a partir de la cual las ondas alfvénicas no regresan al Sol.

### 8.2.1. Solución de Parker

El modelo de Parker de una corona extendida asume que existe un viento supersónico originado desde la corona que se extiende hasta distancias interplanetarias ¿Cómo se llegó a esta conclusión?

Brevemente describiremos la situación previa al modelo de Parker. Antes de 1958, Alfvén y Chapman [Alfvén, 1941, Chapman] mostraron que una de las consecuencias de la conducción térmica de una corona que tenga una temperatura de millones de grados es extender esta corona. Fue así que se decidió explorar el caso de una atmósfera *estacionaria*.

Partiendo del equilibrio hidrostático causado por la fuerza de gravedad:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{GM_{\odot}\rho}{r^2}. \quad (8.1)$$

donde  $P$  es la presión del gas  $\rho$  es la densidad,  $M_{\odot}$  es la masa del Sol y  $r$  es la distancia radial tomando como origen el centro del sol; dado que el plasma interplanetario es relativamente diluido, a partir de la ley de gases ideales  $\rho(r) \approx P(r)/T(r)$ , se obtiene que

$$P(r) = P_0 \exp \left[ -\alpha \int_{R_{\odot}}^r \frac{dr}{r^2 T(r)} \right], \quad (8.2)$$

donde  $\alpha$  es la constante que deriva de la ecuación de estado de gas ideal y las constantes  $G$  y  $M_{\odot}$  de la fuerza gravitacional. La ecuación (8.2) muestra que *en el modelo de equilibrio estacionario, si la temperatura decae más lento que  $1/r$  entonces la presión a distancias  $r \gg R_{\odot}$  no es nula.*

Hay dos argumentos que condenan este modelo. Por una parte, la presión obtenida de esta manera está en desacuerdo con cualquier presión interestelar concebible, por otra parte, si la temperatura del plasma decae con la distancia, de la ecuación de gas ideal se tiene que  $\rho \rightarrow \infty$  lo cual es todavía más improbable. Ahora bien, Parker [Parker, 1958], propuso que en la ausencia de una presión externa en infinito que mantuviera a la corona, se debe eyectar hacia afuera un flujo conocido como viento solar. El escenario que se analizará es el de un *flujo estacionario isotérmico esféricamente simétrico*.

La ecuación de continuidad de la masa en este sistema muestra que en los cascarones esféricos de radio  $r$  la masa se conserva, es decir

$$4\pi r^2 \rho v = \text{constante}, \quad (8.3)$$

por otra parte, de la conservación de momento se tiene que

$$\rho v \frac{dv}{dr} = \frac{dP}{dr} - \frac{GM_{\odot}\rho}{r^2}, \quad (8.4)$$

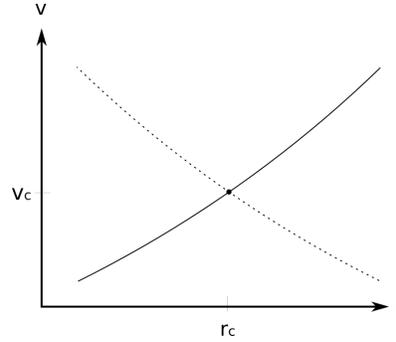


Figura 8.1: Esquema del comportamiento de la solución implícita del viento solar isotérmico supersónico. La línea punteada expresa la solución en la cual el viento solar tiene como valor inicial en la frontera interna un valor supersónico que decae, mientras que la línea continua expresa aquella en la que el viento solar pasa de un régimen subsónico a uno supersónico. Los puntos  $r_c$ ,  $v_c$  corresponden a los puntos críticos de la ecuación (8.6).

de la cual puede, usando la ecuación de estado de gas ideal, sustituirse  $p$  y eliminar  $\rho$  dando como resultado

$$\left(v - \frac{v_c^2}{v}\right) \frac{dv}{dr} = \frac{2v_c^2}{r^2}(r - r_c), \quad (8.5)$$

donde  $v_c = (\tilde{R}T/\tilde{\mu})^{1/2}$  es la *velocidad isotérmica del sonido* y  $r_c = GM_\odot\tilde{\mu}/(2\tilde{R}T)$  es un punto crítico conocido como *punto sónico*. De manera implícita, la ecuación (8.5) tiene como solución

$$\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 - \log_e \left(\frac{v}{v_c}\right)^2 = 4 \log_e \frac{r}{r_c} + 4 \frac{r_c}{r} + C, \quad (8.6)$$

donde  $C$  es la constante de integración.

La principal característica de la solución de Parker es que, a diferencia del modelo estático de Chapman, a la presión a distancias muy lejanas al Sol,  $P_\infty$ , se le puede asignar cualquier valor deseado. En particular, el caso en el que se fija  $P_\infty = 0$  es el que produce un viento supersónico, como puede verse en la Figura 8.1, en la cual se observa el perfil de la velocidad del viento solar en función de la distancia radial; en este caso, se observa como al fijar la presión la magnitud de la velocidad del viento solar crece con la distancia en el caso de la línea continua; en el caso de la línea punteada se descarta a causa de que no se observan velocidades supersónicas en regiones cercanas al Sol.

Por último, una de las características de este modelo es que la presión y la densidad también poseen un gradiente que decae en función de la distancia, lo cual quiere decir que se comporta similar al modelo de Chapman.

## 8.2.2. Efectos de la rotación y el campo magnético: espirales de Parker

El Sol tiene cierta rotación cuyo periodo aproximado es de 27 días. Esto quiere decir que el viento solar también expresa esta rotación en el medio interplanetario generando cierto tipo de

espirales, típicamente conocidas como espirales arquimedeanas. Dado que el viento solar transporta al campo magnético del Sol, se tiene que las líneas de campo magnético del Sol tienen una curvatura conectada con esta rotación solar.

A continuación se describe un modelo analítico en el caso de un sistema estacionario, es decir, una estrella modelada como un sólido que rota y eyecta materia de manera estacionaria.

Para el caso estacionario de la MHD se obtienen las siguientes ecuaciones

- Ecuación conservación de la masa

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8.7)$$

- Ecuación de conservación de momento

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla \cdot \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{GM_\odot \rho}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (8.8)$$

- Ecuación de inducción

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \quad (8.9)$$

En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , es posible escribir la ecuación de masa (8.7) como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r r^2) = 0; \quad (8.10)$$

lo cual indica que la cantidad  $\rho v_r r^2$  es constante. Ahora bien, la componente azimutal  $\phi$  de la ecuación de momento (8.8), asumiendo que la presión depende sólo de la distancia  $r$ , se transforma en

$$\rho \left( v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_\phi \frac{v_r}{r} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left( B_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + B_\phi \frac{B_r}{r} \right),$$

o escrito de otra manera

$$\rho v_r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\phi) = \frac{1}{\mu_0} B_r \frac{1}{r} (r B_\phi). \quad (8.11)$$

Multiplicando la ecuación (8.11) por  $r^3$  se obtiene que

$$r v_\phi - \frac{B_r r^2}{\rho v_r r^2} \frac{1}{\mu_0} r B_\phi = \text{constante} = L, \quad (8.12)$$

donde  $L$  es el *momento angular total* por unidad de masa transportado por tanto el movimiento del plasma como por las tensiones magnéticas. De la ecuación de inducción (8.9) en coordenadas esféricas se tiene que

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r(v_r B_\phi - v_\phi B_r)) = 0. \quad (8.13)$$

En 1967 Weber y Davis modelaron la interacción entre un viento solar y un campo magnético radial uniforme [Weber and Davis Jr, 1967]. Este modelo del campo tiene la ventaja de que aproxima correctamente sólo las líneas de campo magnético que tienen una topología abierta, es decir que no inician ni terminen en la superficie del Sol. Usando esta aproximación monopolar se tiene, a partir

de  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , que

$$B_r = \frac{B_\odot R_\odot^2}{r^2}, \quad (8.14)$$

donde  $B_\odot$  es la magnitud del campo magnético a un radio solar,  $R_\odot$ . a continuación, de la ecuación (8.13), se tiene que

$$r(v_r B_\phi - v_\phi B_r) = \text{constante} \approx -R_\odot v_\phi B_\odot = -\Omega r^2 B_r, \quad (8.15)$$

donde se está asumiendo que el Sol rota como un cuerpo sólido con periodo  $\Omega$ .

De las ecuaciones (8.12) y (8.15) se obtiene un sistema de ecuaciones para  $v_\phi$  y  $B_\phi$  que dan como resultado

$$v_\phi = \Omega r \frac{M_A^2(L/(r^2\Omega)) - 1}{M_A^2 - 1} \quad (8.16)$$

y

$$B_\phi = -\frac{B_r \Omega r}{v_r} \left[ \frac{1 - L/(r^2\Omega)}{M_A^2 - 1} \right] M_A^2; \quad (8.17)$$

donde  $M_A^2 = v_r^2/v_A^2$  es el número mach alfvénico y  $v_A^2 = B_r^2/(\mu_0\rho)$  es la velocidad de Alfvén.

En ambas expresiones muestran que se debe tener que

$$1 - L/(r^2\Omega) = 0$$

cuando

$$M_A^2 - 1 = 0$$

de manera que se encuentra el *radio alfvénico*  $r_A$ , como la distancia a la cual  $M_A^2 = 1$  y entonces  $L = r_A^2\Omega$ . Con todo, se tiene los siguientes comportamientos asintóticos

- Para  $r \gg r_A$

$$\begin{cases} v_\phi \approx \frac{\Omega r_A^2}{r} \rightarrow 0 \\ B_\phi \approx -\frac{B_r \Omega r}{v_r} \end{cases} \quad (8.18)$$

- para  $R_\odot \gtrsim r < r_A$

$$\begin{cases} v_\phi \approx \Omega r \\ B_\phi \approx -\frac{B_r \Omega r}{v_A} \end{cases} \quad (8.19)$$

En otras palabras, el campo magnético y el viento solar tienen una rotación similar a un cuerpo sólido justo después del punto crítico  $r_A$  en el cual la velocidad radial es igual a la velocidad de Alfvén. Más allá de este punto, el campo magnético es arrastrado a lo largo del viento en una espiral, conocida como *espiral de Parker*; lejos del Sol, este fluido es aproximadamente radial.

### 8.3. Modelo numérico del viento solar.

Existen diversos enfoques para el estudio de un plasma, inclusive el interplanetario; desde la perspectiva de la MHD ideal, se tiene que los parámetros relevantes para describir al viento solar son el campo de velocidades, el campo magnético, la temperatura de los electrones y protones y finalmente la densidad del fluido. Estos parámetros están íntimamente relacionados; por ejemplo, a través de la ecuación de continuidad, el campo de velocidades se relaciona con la densidad; el campo magnético se relaciona con el campo de velocidades por el teorema de campo congelado; la temperatura se relaciona con la densidad y la presión con la ecuación de gas ideal. Estas conexiones entre las cantidades relevantes del plasma representan una importancia mayor en los modelos que describen al viento solar.

Con respecto a la prueba que se ha confeccionado para validar la capacidad del código CAFE-AMR para simular escenarios relativos a vientos solares, escogimos dos en concreto. Una prueba de un viento solar isotérmico supersónico, el cuál es perturbado con una eyección de materia más caliente y veloz de una región localizada, a manera de simular algunos aspectos de las eyecciones de masa coronal y por otra parte, un viento solar magnetizado cuyo campo magnético corresponde a un dipolo magnético que rota con el Sol.

En esta sección, se abordan las especificaciones tanto de las condiciones iniciales, cambio de unidades físicas a unidades de código, estrategias de refinamiento y también cómo se aborda la frontera interna.

#### 8.3.1. Dominio numérico y frontera interna

Para simular el viento solar a distancias interplanetarias se resuelven las ecuaciones MHD en un dominio numérico cuyo origen está en el centro del Sol y parte desde una esfera de radio  $R_{in} = 20R_{\odot}$  centrada en el origen hasta las caras del cubo del dominio numérico cuyas distancias son de  $r \approx 250R_{\odot}$  a partir del origen lo cual alcanza distancias del orden de una unidad astronómica o  $r > 200R_{\odot}$ . Típicamente esto es a razón de hacer predicciones del clima espacial en la Tierra partiendo de las observaciones que se tengan en el Sol.

Las dos simulaciones que se presentan en este capítulo se realizan en dominios exteriores a una frontera interna esférica, es decir distancias  $r \geq R_{in}$ , donde la frontera interna se define como la esfera de radio

$$R_{in} \sim 20R_{\odot}; \quad (8.20)$$

se ha escogido  $R_{in}$  conforme con los modelos analíticos del viento solar de manera que las simulaciones se realizan en distancias mayores al punto sónico  $r_c$  y al radio alfvénico  $r_A$ .

Dicho de otra manera, a distancias mayores que  $R_{in}$  se espera que el viento sea expulsado con una velocidad supersónica con las velocidades características dentro del dominio siempre apuntando hacia afuera de la frontera interna. Esto determina en las simulaciones una condición de frontera fija en la frontera interna ya que a partir de esta distancia no se pierde información física del sistema.

La inyección permanente de plasma en la frontera interna puede simularse manteniendo invariantes las variables físicas del viento solar en  $r = R_{in}$ . Sin embargo existe el grave problema de que en coordenadas cartesianas, la frontera interna no es una esfera, sino que está compuesta de una esfera lego compuesta por muchos cubos que recubren la región delimitada por la ecuación (8.20);

en general, la implementación de condiciones de frontera aquí es un asunto delicado.

Para sortear este problema, en estas simulaciones hemos implementado el método presentado en [Kleimann et al., 2009], el cual consiste en promediar el valor de las cantidades conservativas en las celdas que están justo afuera de la frontera interna. Esto se ilustra esquemáticamente en la Figura 8.2 en un caso bidimensional.

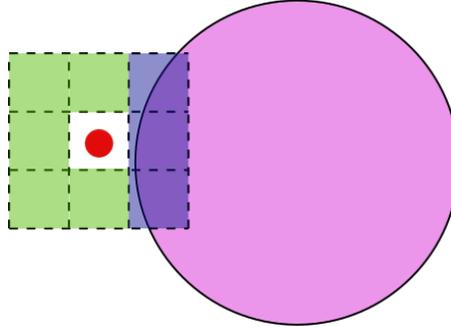


Figura 8.2: Esquema del método de promedios para la frontera interna delimitada por el círculo de color magenta. Las celdas internas (purpura), tienen un valor fijo, mientras que las celdas externas (verde) obtienen su valor del método numérico; la celda de transición (roja) obtiene su valor al hacer un promedio de las cantidades conservativas pesado con las distancias de los centros de las celdas vecinas.

El algoritmo utilizado consiste en los siguientes pasos:

1. Determinar si se trata de una celda de la frontera interna, celda externa a la frontera interna o celda de transición. Las celdas correspondientes a la frontera interna son aquellas que o bien tocan a la frontera física interna o presentan una intersección con el dominio que cubren. Las celdas externas son aquellas que no cumplen el criterio de ser frontera interna. Las celdas de transición son celdas externas que tienen por vecino al menos una celda interna.
2. Fijar los valores de la frontera interna.
3. Evolucionar las celdas externas con el método numérico deseado.
4. Sustituir el valor en las celdas de transición por un promedio pesado hecho con sus vecinos. La manera de hacer esto es asignar como peso la distancia del centro de la celda de transición con los centros de las celdas vecinas. Esto es, si  $w_{tr}$  es una cantidad conservativa en la celda de transición  $tr$ , entonces

$$w_{tr} = \frac{\left( \sum_a |\mathbf{r}_{tr} - \mathbf{r}_a|^{-1} w_a \right)}{\sum_a |\mathbf{r}_{tr} - \mathbf{r}_a|^{-1}}, \quad (8.21)$$

donde  $w_a$  es el valor de la cantidad conservativa  $w$  en el vecino  $a$ , mientras que  $\mathbf{r}_{tr}$  y  $\mathbf{r}_a$  son las posiciones de los centros de la celda de transición y las celdas vecinas respectivamente.

Para las condiciones de frontera en los límites del dominio numérico se han implementado las de flujo saliente.

### 8.3.2. Viento solar hidrodinámico

La prueba de viento solar hidrodinámica que hemos realizado permite probar qué tan bien funciona el refinamiento adaptativo en la frontera interna a la par que el método de promediar dado por la ecuación (8.21), por otra parte nos permite abordar la cuestión de qué tan bien se persiguen las perturbaciones que se gesten en la frontera interna y que se propaguen en el resto del dominio numérico, todo esto con vistas a simular las EMC.

Para conseguir el modelo de viento solar estacionario, se simula un bombeo de plasma desde regiones cercanas al Sol hacia distancias cercanas a la Tierra a través de la heliosfera. Este modelo produce una onda expansiva inicial tras la cual se obtiene el comportamiento supersónico estacionario. A continuación describimos las especificaciones de este modelo.

#### Dimensiones del dominio.

Como se estipuló en la sección anterior, el dominio numérico sobre el cuál se realiza la simulación parte desde una esfera de radio  $R_{in} = 20R_{\odot}$  centrada en el origen, hasta las caras del cubo del dominio numérico cuyas distancias son de  $r = 250R_{\odot}$  a partir del origen. Este dominio numérico tiene dimensiones utilizadas en varios trabajos, por ejemplo [Riley and Gosling, 1998, González-Esparza et al., 2003, Feng et al., 2021]; tiene la ventaja de que abarca distancias superiores a la distancia máxima de la Tierra al Sol y a su vez el radio de la esfera de la frontera interna es superior tanto a la localización del punto sónico  $r_c$  como al radio alfvénico  $r_A$ , de manera que no se pierde información sobre la propagación de la información.

#### Cambio de unidades físicas a unidades de código.

La transición hacia unidades de código se hace de la misma manera que en [Guzmán and Mendoza-Mendoza, 2022]. Tanto las unidades físicas como las de código se definen en términos de escalas fijas para las variables de estado es decir que la densidad  $\rho$ , presión  $P$ , longitud  $l$ , tiempo  $t$ , velocidad  $v$  y temperatura  $T$  son inversamente proporcionales a las unidades físicas:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{Phys}} &= \rho_0 \rho, \\ P_{\text{Phys}} &= P_0 p, \\ l_{\text{Phys}} &= l_0 l, \\ t_{\text{Phys}} &= t_0 t, \\ T_{\text{Phys}} &= T_0 T,\end{aligned}\tag{8.22}$$

donde el subíndice Phys indica que son cantidades físicas y el subíndice 0 establece que son los factores de escalamiento. En la Tabla 8.1 se muestran los valores de las escalas que conectan las unidades.

#### Estrategia para obtener el viento solar estacionario

La inyección permanente de plasma en la frontera interna puede simularse al mantener las variables físicas del viento solar fijas en  $r = R_{in}$ . Se han utilizado los valores presentados en el trabajo [González-Esparza et al., 2003], es así que obtenemos  $\rho_{in}$ ,  $v_{in}$ ,  $p_{in}$ , a  $r = R_{in}$  siguientes:

Cantidad	Constante de normalización
Tiempo	$t_0 = 3600$ s
Longitud	$l_0 = R_\odot = 6.9634 \times 10^8$ m
Velocidad	$v_0 = l_0/t_0 \approx 1.93 \times 10^5$ m/s
Temperatura	$T = m_H v_0^2/k_B \approx 2.73 \times 10^6$ K
Densidad	$\rho_0 = \frac{m_H}{\text{cm}^3} = 1.0003573 \times 10^{-21}$ Kg m <sup>-3</sup>

Tabla 8.1: Constantes de normalización para el viento solar hidrodinámico. Para obtener los valores mostrados se tiene que la masa media de la molécula de hidrógeno es  $m_H = 0.6 \times 1.6726219 \times 10^{-27}$  kg y que la constante de Boltzmann es  $k_B = 1.3806488 \times 10^{-23}$  J/K.

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_{sw}, & \text{si } r < R_{in} \\ 0.01\rho_{sw}, & \text{si } r > R_{in} \end{cases},$$

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} v_{sw}\hat{\mathbf{r}}, & \text{si } r < R_{in} \\ 0, & \text{si } r > R_{in} \end{cases}, \quad (8.23)$$

$$T_0(\mathbf{r}) = T_{sw}$$

eyecciones de masa coronal donde se tiene densidad<sup>1</sup> de  $\rho_{sw} = \mu_H \times 2100 \text{kgcm}^{-3}$ , velocidad de  $v_{sw} = 2.5 \times 10^5 \text{ms}^{-1}$  y temperatura de  $T_{sw} = 5 \times 10^5$  K.

En este caso se ha optado por condiciones iniciales isotérmicas, lo cual tiene por referencia el modelo analítico de Parker, no obstante, las ecuaciones que resuelve CAFE-AMR además de ser adiabáticas capturan la evolución de la energía total del sistema, de manera que la temperatura tendrá un perfil que decae con la distancia radial. Para obtener, entonces la presión se utiliza la ecuación de estado de gas ideal con un índice adiabático de  $\gamma = 1.4$ .

### Estrategia para la formación de la eyección de masa coronal.

Luego de que el viento solar se hace estacionario, propagamos una EMC. Los parámetros de la simulación tienen como base el trabajo de [González-Esparza et al., 2003]. Caracterizamos la EMC lanzada desde la frontera interna en  $r = 20R_\odot$  por su velocidad  $v_{CME}$ , densidad  $\rho_{CME} = 2 \times \rho_{sw}$ , temperatura  $T_{CME} = 2 \times T_{sw}$  y la apertura del ángulo  $\theta = \pi/6$  que circunscribe la región de la frontera interna sobre la cual se inyecta la EMC, lo cual se muestra en la Figura 8.3. Para lanzar la CME se aumenta progresivamente la inyección en función del tiempo y posteriormente se hace decaer hasta los valores del viento solar. Esto se realiza a través de una tangente hiperbólica. Por

<sup>1</sup>Al trasladar las unidades a código, se ha usado la densidad de número de partículas, pues la constante referente al peso molecular del hidrógeno  $\mu_H$  puede incluirse de manera natural a las constante de normalización  $\rho_0$ .

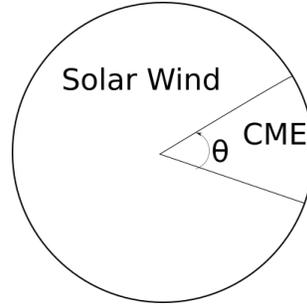


Figura 8.3: Esquema de la localización de la inyección de la CME en la frontera interna. Dentro del cono de ángulo  $\theta$  las cantidades fijas de la frontera interna tienen los valores de la CME, mientras que fuera del cono, las cantidades permanecen invariantes a cuando se inyectó el viento solar.

ejemplo en el caso de la densidad se tiene que

$$\rho = \frac{1}{2} [(\rho_{CME} + \rho_{sw}) \pm (\rho_{CME} - \rho_{sw}) \tanh(t)], \quad (8.24)$$

donde el signo + corresponde previo a la inyección y – al decaimiento.

Después de 3.6 horas de que se ha activado el aumento a través de la ecuación (8.24), se mantienen los valores máximos (por ejemplo  $\rho = \rho_{CME}$  en el caso de la densidad) durante 6 horas para después activar la función de decaimiento.

### Configuración de la simulación

Para la simulación se define una resolución base de  $80^3$  celdas con tres niveles de refinamiento, dando como resultado una resolución equivalente de  $640^3$  celdas. Se utiliza como criterio de refinamiento (4.2) con un valor de umbral de  $\chi_r = 10$ . En las fronteras del dominio numérico se utilizan condiciones de frontera de flujo saliente. A lo largo de la simulación se utilizó un factor CFL de 0.125 y los flujos numéricos computados fueron hechos utilizando la fórmula HLLC.

### 8.3.3. Viento solar magnetizado.

El campo magnético del viento solar está dominado por el momento dipolar, es decir que la primera gran aproximación del campo magnético del Sol es un dipolo magnético. Con esto en mente, la prueba que se ha diseñado para un viento solar magnetizado es aquella de un dipolo magnético inclinado, es decir que su eje de simetría está inclinado con respecto al eje de rotación del Sol como se muestra esquemáticamente en la Figura 8.4.

Esta prueba consigue dos objetivos. Por una parte permite valorar la implementación de modelos empíricos de viento solar en el código que se ha desarrollado; por otra parte permite evaluar la estrategia AMR que hemos implementado para capturar la hoja de corriente heliosférica y las espirales de Parker.

A continuación se muestra una descripción del modelo empírico que hemos implementado.

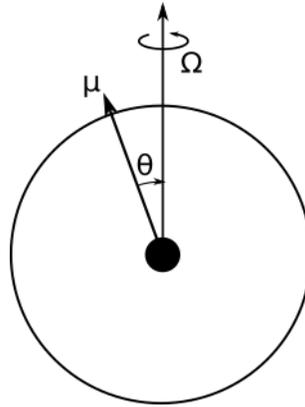


Figura 8.4: Esquema del Sol con un dipolo magnético, con momento magnético  $\mu$ , ubicado al centro del Sol e inclinado con respecto al eje de rotación,  $\Omega$ , un ángulo  $\theta$ .

### Descripción del modelo empírico

Lejos de la corona solar, el viento solar está bien modelado usando las ecuaciones de la MHD. En este contexto, las cantidades macroscópicas del plasma, es decir la densidad, temperatura y velocidad, pueden ligarse directamente a la topología de las líneas de campo magnético. Al día de hoy, varias técnicas aplicadas en la simulación de la heliosfera interplanetaria se apoyan en este hecho, por ejemplo la aproximación WSA [Arge et al., 2004] y su implementación en el modelo ENLIL [Odstrcil, 2003]. Nuestra implementación del modelo empírico también utiliza esta estrategia.

Para la implementación aquí mostrada, el dominio numérico se particiona en capas esféricas, como se ha esquematizado en la Figura 8.5; estas capas se ubican aproximadamente en las divisiones de las regiones solares: la fotosfera ubicada en  $R_{SUN} = 1R_{\odot}$ , la corona solar a  $R_{SC} = 2.5R_{\odot}$ , la frontera interna de la simulación a  $R_{in} = 20R_{\odot}$  y el resto del dominio numérico que incluye un volumen que contenga al menos la órbita terrestre, de aproximadamente  $r = 1AU$ .

Para poder construir las cantidades a inyectar por la frontera interna se siguen una serie de pasos. Lo primero consiste en determinar el campo magnético de la frontera interna y esto se hace construyéndolo en cada una de las capas del dominio. Comenzando con la región comprendida entre la fotosfera  $R_{SUN}$  y la corona solar  $R_{sc}$ . En el contexto de la predicción del clima espacial, para encontrar una expresión del campo magnético en esta región, se tiene como datos iniciales los mapas sinópticos de los magnetogramas. En esta región se asume que el campo magnético es potencial, es decir que

$$\mathbf{B} = \nabla\Psi, \quad (8.25)$$

donde  $\Psi$  es una función escalar. Como se menciona en [Priest, 2014], esto es posible al asumir que

- La mayor contribución de la dinámica del plasma se debe a fuerza magnética.
- Las fuentes de campo magnético en la fotosfera han permanecido estacionarias.
- La helicidad<sup>2</sup> del campo magnético es despreciable.

<sup>2</sup>La helicidad se define sobre cierto volumen  $V$  como  $\int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}dV$ , donde  $\mathbf{A}$  es el potencial vectorial magnético. Entre

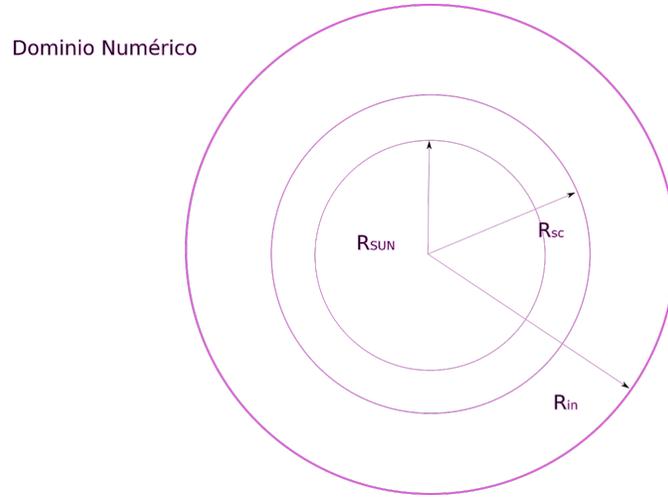


Figura 8.5: Esquema de las capas que dividen al dominio numérico: la fotosfera la definimos en  $R_{SUN}$ , la corona en  $R_{SC}$ , la frontera interna en  $R_{in}$ .

Ahora bien, al definir el campo magnético como potencial, se define la ecuación de Laplace para el potencial  $\Psi$

$$\nabla^2 \Psi = 0,$$

la cual puede resolverse utilizando diversas técnicas, por ejemplo en [Sakurai, 1982] se hace utilizando funciones de Green. Una de las estrategias de mayor uso es mediante la *superficie fuente de campo potencial* [Newkirk and Altschuler, 1969], PFSS por sus siglas en inglés (*potential field source surface*). Este método aproxima el campo magnético global en una serie de ondas cuyos coeficientes se obtienen al reconstruir los valores del campo magnético en la fotosfera. Este proceso da como resultado una expresión analítica para el campo magnético a través de la fotosfera hasta la corona.

Para la región comprendida entre la corona y la frontera interna, lo primero que se hace es discriminar las líneas de campo que tienen una topología abierta hasta  $R_{sc}$ , es decir, las líneas de campo cuyos extremos están en  $R_{SUN}$  y  $R_{sc}$ . Sobre las líneas de campo magnético se puede calcular el *factor de expansión super-radial* ( $f_s$ ) que se refiere a la variación de la intensidad del campo magnético a lo largo de un tubo de flujo de campo magnético. El modelo que se ha escogido para esto es el presentado en [Shiota et al., 2014]:

$$f_s(\theta_{sc}, \phi_{sc}) = \left( \frac{R_{\odot}}{R_{sc}} \right)^2 \frac{B_r(R_{\odot}, \theta_{\odot}, \phi_{\odot})}{B_r(R_{sc}, \theta_{sc}, \phi_{sc})}, \quad (8.26)$$

donde  $B_r$  es la componente radial del campo magnético. En nuestro caso, para encontrar las coordenadas  $(R_{\odot}, \theta_{\odot}, \phi_{\odot})$  del punto de origen del tubo de flujo de campo magnético se ha utilizado una integración a primer orden de las líneas de campo magnético a  $r = R_{sc}, \theta, \phi$  como punto inicial;

---

otras cosas se utiliza para evaluar la torsión y qué tanto se enrollan sobre sí las líneas de campo magnético. En el caso de la MHD ideal, la helicidad es una cantidad que se conserva.

si después de un número finito de pasos, en nuestro caso 500 iteraciones, el punto de origen no es encontrado, se considera que la línea de campo es cerrada y se fija  $f_s$  a un valor predeterminado.

Una vez hecho esto, se modela al campo magnético como uno puramente radial discriminando el resto de las componentes y además se fija que el flujo de campo magnético se conserve a lo largo de tubos de flujo radial desde  $r = R_{sc}$  hasta  $r = R_{in}$ , lo cual se utiliza para encontrar que en la frontera interna

$$B_r(R_{in}) = \left( \frac{R_{sc}}{R_{in}} \right)^2 B_r(R_{sc}). \quad (8.27)$$

El resto de las cantidades relevantes del viento solar en la frontera interna; la densidad y velocidad radial; se ligan a los valores del campo magnético de la frontera interna de la siguiente manera. Para la velocidad radial  $v_r$  se utilizó el modelo empírico de Wang y Sheely dado por la fórmula [Wang and Sheeley Jr, 1990, Arge and Pizzo, 2000]

$$v_r(R_{in}, \theta_{in}, \phi_{in}) = \left[ 267.5 + \frac{410}{f_s^{0.4}(\theta_{in}, \phi_{in})} \right] \text{kms}^{-1}, \quad (8.28)$$

donde  $f_s$  está definido como en la ecuación (8.26), en el caso en el que el factor de expansión corresponda a una línea de campo cerrada,  $f_s$  se escoge de manera que el valor de  $v_r$  sea mínimo. La densidad de número de partículas, y por lo tanto la densidad, se obtienen utilizando la fórmula empírica, presentada en [Smith, 2009], que incluye una medida del flujo radial de densidad de número a una distancia de 1AU dado por

$$n(R_{in}) = n_0 \left( \frac{R_0}{R_{in}} \right)^2 \times \frac{v_0}{v_r(R_{in})}, \quad (8.29)$$

donde  $n_0 = 8.06 \times 10^6 \text{cm}^{-3}$ ,  $v_0 = 267.5 \text{kms}^{-1}$ ,  $R_0 = 1 \text{AU}$ . Este perfil de densidad de número fija la densidad del gas a través de

$$\rho = \mu_H n, \quad (8.30)$$

donde  $\mu_H = 0.6 \times 1.6726219 \times 10^{-27} \text{Kg}$  es el peso de la molécula de Hidrógeno.

### Especificaciones de la prueba

Para asignar los valores iniciales de la prueba numérica, primero se fija el valor del campo magnético en las ecuaciones (8.26,8.27) como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}, \quad (8.31)$$

donde  $\boldsymbol{\mu}$  es el momento dipolar magnético. Se utiliza un sistema de referencia heliográfico inercial [Burlaga and Burlaga, 1995] que no presenta fuerzas de Coriolis causadas por rotaciones. En este sentido, la frontera interna expresa una eyección de plasma caliente magnetizado a partir de una esfera que rota como un sólido. El eje  $z$  se alinea con el eje de rotación del Sol el ángulo de inclinación del momento dipolar magnético con respecto a este eje se fija como  $\theta = \pi/5$ .

Para aplicar la rotación en la frontera interna, la cual fijamos con la misma frecuencia de rotación

Cantidad	Normalización
Tiempo	$t_0 = 3600$ s
Longitud	$L_0 = R_\odot = 6.9634 \times 10^8$ m
Velocidad	$v_0 = L_0/t_0 \approx 1.93 \times 10^5$ m/s
Temperatura	$m_H v_0^2/k_B \approx 2.73 \times 10^6$ K
Densidad de número	$N_0 = 1 \times 10^9$ m <sup>-3</sup>
Densidad	$\rho_0 = m_H N_0 \approx 1.004 \times 10^{-18}$
Campo Magnético	$B_0 = v_0 \sqrt{\mu_0 \rho_0} \approx 2.1786 \times 10^{-7}$ Tesla

Tabla 8.2: Constantes de normalización para la prueba del dipolo magnético inclinado, donde  $\mu_H = 0.6 \times 1.6726219 \times 10^{-27}$  kg es el peso medio de la molécula de Hidrógeno,  $k_B = 1.3806488 \times 10^{-23}$  J/K es la constante de Boltzmann, y  $\mu_0 = 1.256637 \times 10^{-6}$  N/A<sup>2</sup> la permeabilidad magnética.

a  $\Omega_\odot = 27$  días, se aplica una transformación de la componente  $\mu_\phi$  del momento magnético dipolar dado por  $\phi \rightarrow \phi + \Omega_\odot t$ ; aplicar esta transformación genera una rotación del campo magnético inyectado en la frontera interna dado por (8.31) y a su vez el resto de las cantidades del plasma, dado que están ligadas al campo magnético, experimentarán la misma rotación.

La intensidad del dipolo magnético esta dada por  $|\mu| = 1 \times 10^{-1}$  Gm<sup>-3</sup>. La temperatura inicial se toma como constante,  $T = 10^5$  K, en toda la frontera interna y la presión hidrodinámica se obtiene utilizando la ecuación de estado de gas ideal con el perfil de la densidad (8.30) la temperatura constante y un índice adiabático de  $\gamma = 5/3$ .

### Cambio de unidades físicas a unidades de código

Las unidades físicas se conectan con las unidades de código siguiendo el mismo esquema que en la prueba del viento solar hidrodinámico mostrado en la sección 8.3.2. Las constantes de normalización para este caso se muestran en la tabla 8.2.

### Configuración de la simulación

El dominio numérico comprende una región cúbica de dimensiones de  $256^3 R_\odot^3$  con el origen ubicado al centro del Sol. La resolución base está dada por  $128^3$  celdas usando tres niveles de refinamiento, lo cual corresponde a una resolución equivalente de  $1024^3$  celdas. La frontera interna se fija a un radio de  $r = 20R_\odot$ , para las condiciones de frontera externas en las caras del dominio numérico, se utilizan las de flujo saliente. El paso temporal se maneja utilizando un Runge-Kutta de segundo orden con un factor CFL de 0.125. Los flujos numéricos se obtienen utilizando una aproximación HLLE.

Se utilizaron dos criterios de refinamiento, uno fijo y uno adaptativo. Para minimizar los efectos de los errores geométricos hechos al aproximar la frontera interna esférica, definimos mallas refinadas cerca de la frontera de manera que la resolución temporal y espacial sea máxima. Para definir el refinamiento adaptativo se ha implementado una estrategia que mezcla dos acercamientos; por una parte el planetado en [Matsumoto et al., 2019], donde se refina un bloque de datos si es que existe un cambio en la polaridad del campo magnético, es decir si  $B_r$  cambia de signo en algún lugar del dominio; por otra parte, dado que se desea capturar el comportamiento tipo espiral en la

componente radial de la velocidad, se escoge como función de evaluación  $\sigma(\mathbf{U}) = v_r$  en la ecuación (4.3) con un umbral de  $\chi_r \leq 0.1$ . Este refinamiento es aplicado en regiones donde  $|z| \leq 2R_{in}$  de manera que sólo la hoja de corriente heliosférica sea refinada.

## 8.4. Resultados

En esta sección mostramos los resultados obtenidos de las simulaciones para los dos escenarios de viento solar planteados, el caso hidrodinámico y el caso del viento magnetizado. Estos resultados tienen un fuerte énfasis en mostrar la capacidad de capturar estructuras de diferentes escalas utilizando la estrategia AMR que se implementó para esta investigación.

### 8.4.1. Viento solar hidrodinámico

En esta prueba, a un tiempo inicial las variables del viento tienen valores constantes dentro de la esfera de radio  $R_{in}$  lo cual simula un bombeo estacionario de plasma hacia la heliosfera. El gas llena el dominio numérico  $r > R_{in}$  iniciando con una onda de choque frontal la cual se propaga hacia las fronteras externas y debido a las condiciones de frontera este frente de choque es expulsado del dominio a través de la frontera externa. En la Figura 8.6 se muestra un corte del perfil de la densidad en el cual se observa cómo el criterio de refinamiento persigue este frente de la onda de choque. Una vez que la onda de choque es expulsada del dominio numérico, el flujo del viento solar se aproxima a un estado estacionario. El resultado de esta simulación se muestra en la Figura 8.7,

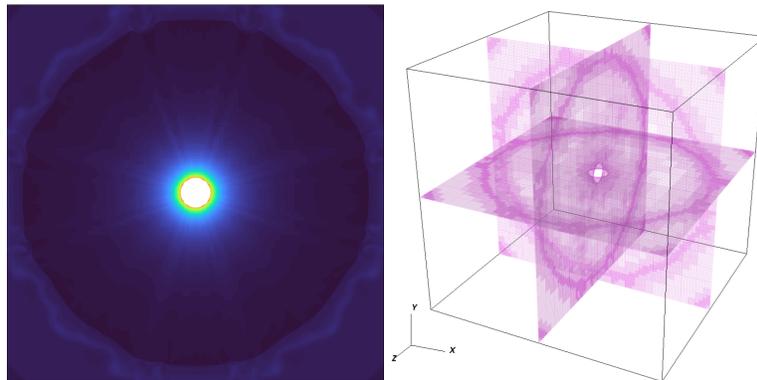


Figura 8.6: Instantáneas de la densidad y su seguimiento AMR a  $t = 234$  horas de la prueba del viento solar hidrodinámico, antes de que el viento alcance un estado estacionario. La onda de choque inicial, así como las discontinuidades de contacto, están cubiertas por cuadrículas más finas.

donde se presentan los perfiles de la densidad, la componente  $v_x$  de la velocidad, y la temperatura del gas a lo largo del eje  $x$  una vez que el flujo se ha estabilizado a lo largo de todo el dominio a  $t \sim 1000h$ . Como referencia contextual sobre las dimensiones espaciales, en el sistema de referencia escogido la posición media donde estaría localizada la Tierra es  $x_{Earth} = 214.83452R_{\odot}\hat{x}$ . Una vez que el viento solar tiene carácter estacionario, se inyecta la EMC de la manera descrita en la sección 8.3.2. En la Figura 8.8 se muestran cortes del perfil de la densidad durante la propagación de la

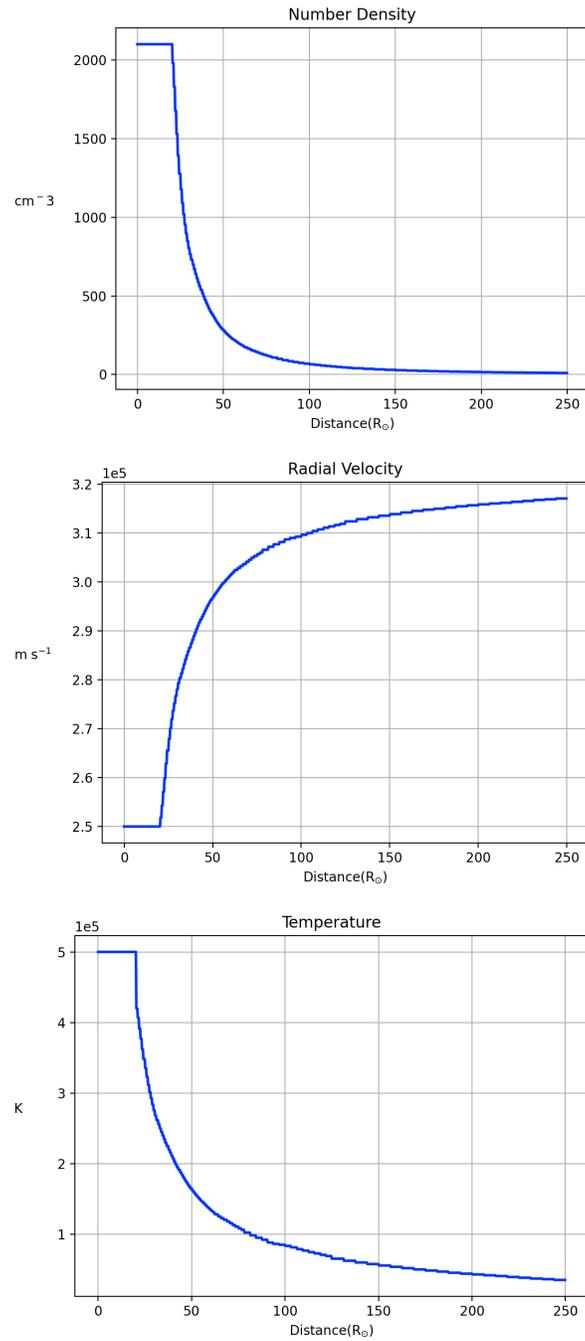


Figura 8.7: Densidad, velocidad radial y temperatura del viento solar hidrodinámico a lo largo del eje  $x$  en la prueba del viento solar hidrodinámico.

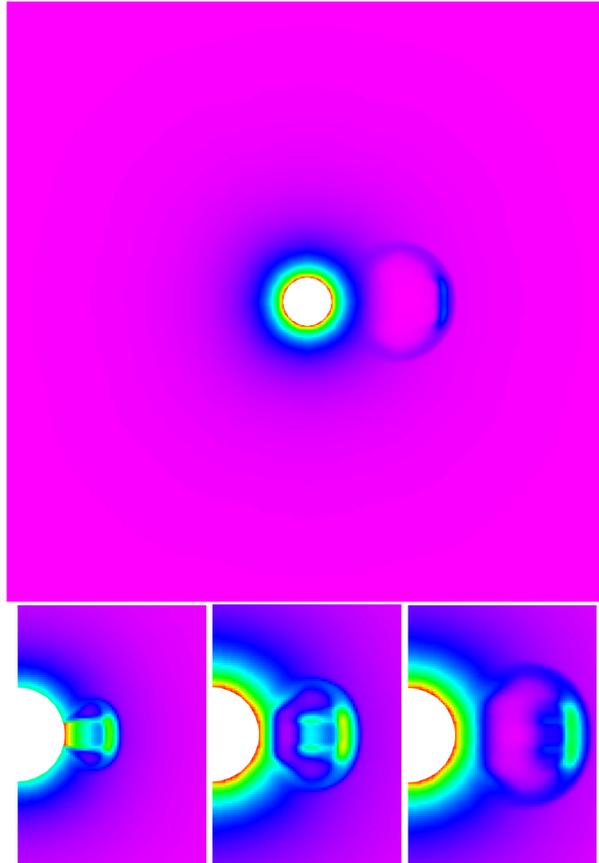


Figura 8.8: Cortes del perfil de densidad en el plano  $xy$  para la prueba del viento solar hidrodinámico. Las imágenes corresponden a un escenario después de que la perturbación inicial ha sido inyectada en el viento solar estacionario a tiempos  $t = 34, 8\text{hr}$  (parte superior),  $t = 7.50\text{hr}, 13.98\text{hr}, 19.01\text{hr}$  (parte inferior).

eyección de masa coronal a distintos tiempos. Con este montaje, la erupción inicial se propaga, su perfil de densidad se difumina y se ensancha. En la Figura 8.9, mostramos que la estructura del nivel de refinamiento más alto rastrea la perturbación cubriendo todo el frente de choque.

#### 8.4.2. Viento solar magnetizado

Para la prueba del viento solar que transporta el campo magnético de un dipolo, primero se muestra en la Figura 8.10 un corte meridional de la velocidad radial. Se puede observar que existen dos regiones bien diferenciadas que corresponden al cinturón de serpentinas de viento solar lento<sup>3</sup>, donde las velocidades del viento tienen valores alrededor de  $\approx 2.8 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ , y regiones de viento solar rápido, las cuales se localizan alrededor de los polos y cuya velocidad ronda  $\approx 5.56 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ .

<sup>3</sup>Traducción de "slow streamer belt".

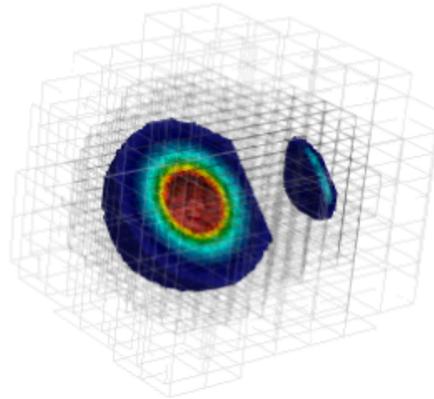


Figura 8.9: Estructura de refinamiento después de que la perturbación del límite interno se haya inyectado en la configuración estacionaria del viento solar hidrodinámico a  $t = 33.8$  horas. En esta Figura también se ha superpuesto una selección de la densidad correspondiente a la frontera interna y a la deformación que ha experimentado la CME al propagarse en el dominio.

Los efectos de la rotación se presentan en la Figura 8.11 en donde se muestra un corte cenital (plano  $z = 0$ ) de la velocidad radial, la cual desarrolla débilmente gradientes en la velocidad, generando patrones tipo espiral asociados con las espirales de Parker y las regiones de interacción corrotantes.

Con respecto a los refinamientos de malla adaptativos, en la Figura 8.12 se muestra un corte de varias regiones cubiertas por los parches de refinamiento en el plano  $x = 0$ . El refinamiento cubre la región de viento lento que también corresponde a las regiones donde hay cambio de polaridad del campo magnético.

A grandes distancias interplanetarias, el perfil magnético del viento solar está dominado por el momento dipolar. En la Figura 8.13 se muestran las líneas de campo magnético sobre el dominio numérico superpuesto con un corte de la componente radial de la velocidad; se puede mostrar que cerca del ecuador, la aparición de líneas de campo es esporádica. Cierta torsión de la rotación de las líneas de campo asociada con la rotación la frontera interna puede observarse también.

## 8.5. Discusión de Resultados

En el contexto de las simulaciones del viento solar, el asunto que se ha explorado con estas pruebas es el de aumentar la resolución espacial no sólo en la frontera interna, sino también capturar las estructuras dinámicas en regiones de interés más alejadas.

Ciertamente, el AMR en cuadrículas rectilíneas no es la única estrategia. Por ejemplo, en el proyecto de simulaciones de Sol a Tierra [Narechania et al., 2021], se emplean estrategias AMR utilizando bloques hexaédricos, obteniendo una alta resolución en la formación de hojas de co-

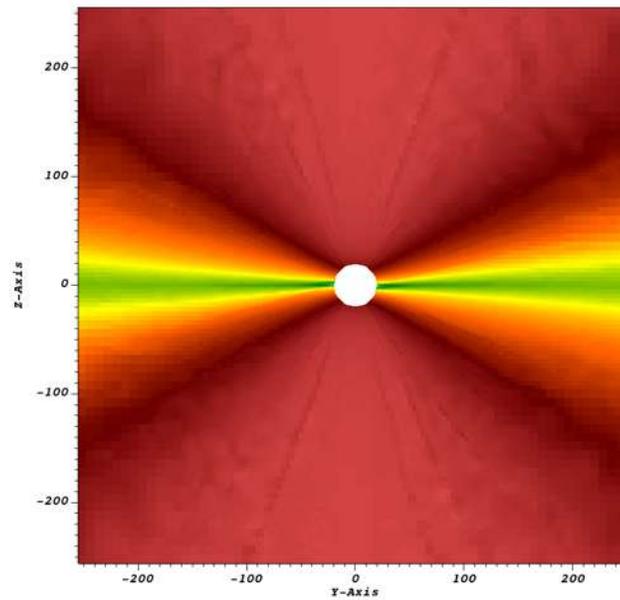


Figura 8.10: Corte en el plano  $x = 0$  del perfil de la distribución de la velocidad radial en un tiempo  $t = 200h$  para la prueba del viento solar magnetizado. Los rangos de velocidad se encuentran de entre  $\approx 2.8 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$  (verde) hasta  $\approx 5.56 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$  (rojo oscuro).

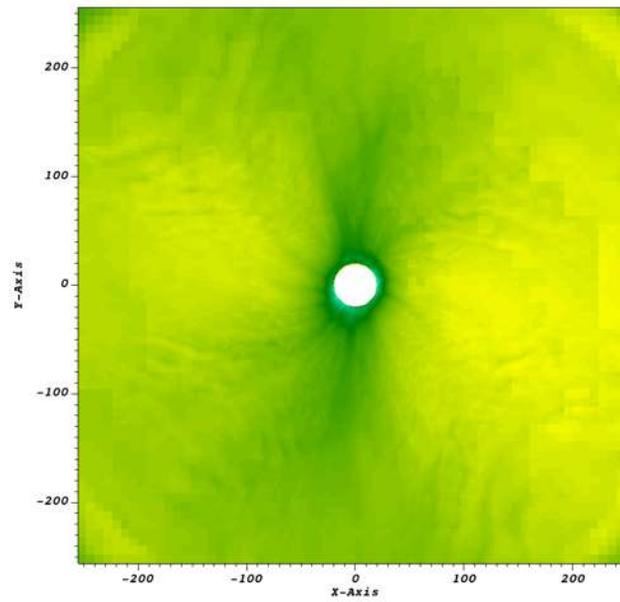


Figura 8.11: Corte en el plano  $z = 0$  del perfil de la distribución de la velocidad radial en un tiempo  $t = 200h$  para la prueba del viento solar magnetizado. Los rangos de velocidad se encuentran de entre  $\approx 2.8 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$  (verde oscuro) hasta  $\approx 3.25 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$  (verde claro).

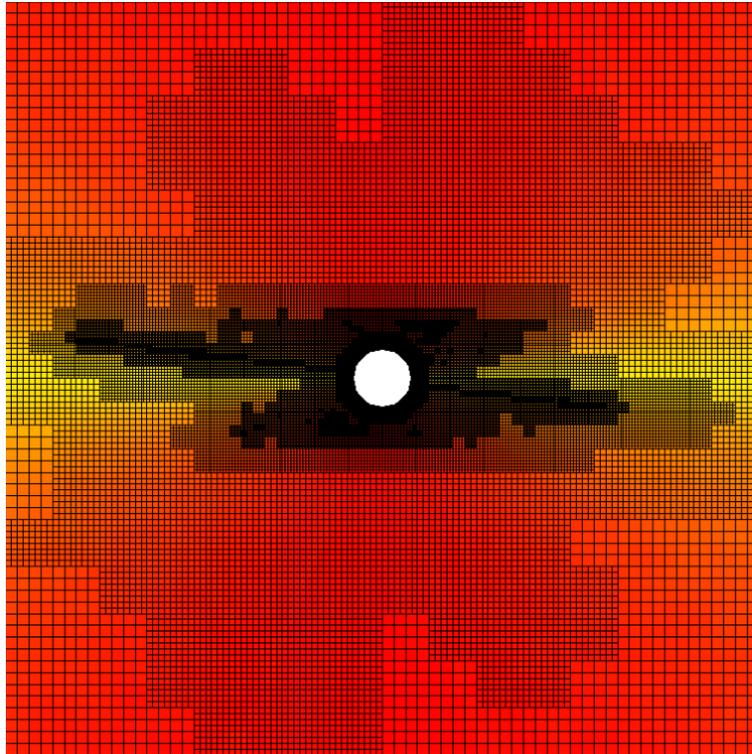


Figura 8.12: Corte en el plano  $x = 0$  de la disposición de la malla de refinamiento sobrepuesto al perfil de velocidad radial  $t = 200h$  para la prueba de viento solar magnetizado. La zona refinada tiene una estructura en forma de la letra z y se debe al cambio de polaridad de la componente radial del campo magnético. Las trazas verticales refinadas fuera de la región  $|z| < 2R_{in}$  son causadas por el criterio que utiliza la componente radial de la velocidad como función evaluadora.

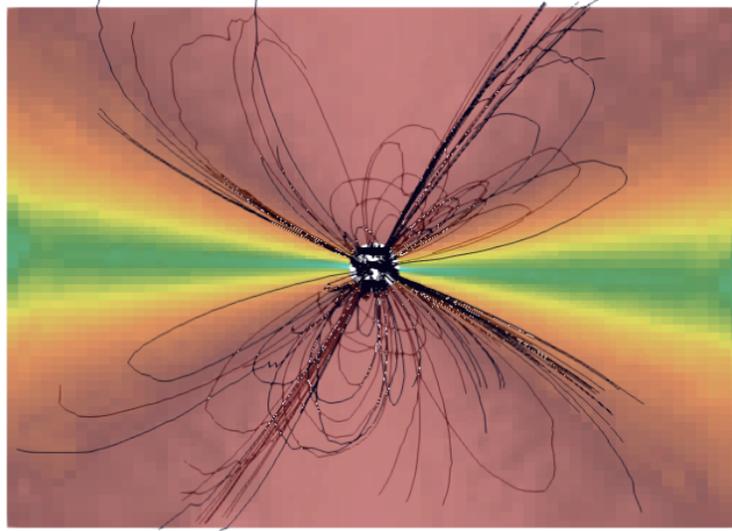


Figura 8.13: Muestreo de las líneas de campo magnético para la prueba del viento solar magnetizado a un tiempo  $t=200$ ; se superpone el corte del plano definido por el ángulo azimutal constante  $\Phi = 3\pi/2$  del perfil de velocidad radial. Los rangos de velocidad están desde  $\approx 2.8 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$  (verde) hasta  $\approx 5.56 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$  (rojo oscuro).

rriente, así como en la propagación de CME, a costa de tener que prestar especial atención a los flujos numéricos en las caras de los límites intercelulares. Otro caso es el código ICARUS [Verbeke et al., 2022], que logra simulaciones de alta resolución utilizando AMR en cuadrículas esféricas, que no tienen fórmulas de flujo tan complejas como las simulaciones hexaédricas, pero debido a la geometría de las ecuaciones es necesario prestar especial atención a las singularidades de las ecuaciones en los polos.

El AMR en cuadrículas rectilíneas no tiene ninguno de los problemas antes mencionados, pero el problema de tener una esfera lego en el límite interno es un problema que sobrecarga el uso de los esquemas PFSS y el uso de marcos corrotantes también podría inducir fenómenos no físicos; en este sentido, se pueden hacer grandes mejoras en esta prueba aplicando correcciones que podrían mitigar este problema geométrico, incluyendo al promedio que se realiza en la superficie de escisión [Kleimann et al., 2009]; un ejemplo de esto sería utilizar el método de Frontera Inmersa (*Immersed Boundary*) [Mittal and Iaccarino, 2005], la cual en su versión aplicada a métodos de volúmenes finitos reconstruye los flujos numéricos en un poliedro construido a base de triángulos que aproxima mejor la superficie esférica interna.

Mejoras a la prueba del viento hidrodinámico pueden realizarse aumentando la cantidad de niveles de refinamiento y utilizando flujos numéricos de menor disipación. En el trabajo de [González-Esparza et al., 2003] se reportan como condiciones iniciales de viento solar quieto valores a  $r = 1 \text{ AU} \approx 215 R_{\odot}$  de velocidad  $v_r = 290 \text{ Kms}^{-1}$ , densidad de número de partículas de  $n = 12.7 \text{ cm}^{-3}$  y temperaturas de  $T = 1.7 \times 10^4 \text{ K}$  lo cual concuerda fuertemente con el orden de la magnitud de los valores presentados en la Figura 8.7. En la Figura 8.6 se pudo observar que incluso al inicio de la formación del viento estacionario la estrategia de refinamiento persigue los escenarios sobre los

cuales se presentan discontinuidades.

La inyección de la CME en el dominio numérico presenta una evolución concordante con [Guzmán and Mendoza-Mendoza, 2022] al presentar un perfil localizado que se expande en forma de arco al propagarse lejos de la frontera interna. A diferencia del refinamiento de malla fijo que se utiliza en dicho trabajo la estrategia AMR que se ha empleado en este trabajo, como puede observarse en la Figura 8.9 extiende el refinamiento durante el tránsito, esparcimiento y difuminación de la CME.

En el caso del viento solar magnetizado se puede observar en la Figura 8.12 que la estrategia de refinamiento se concentra fuertemente en la región de viento solar lento. lo cual permite aumentar la resolución a latitudes cercanas al ecuador. Se observa en la Figura 8.11 que este aumento de la resolución permite capturar la estructura de las espirales de Parker aunque el método numérico utilizado para la simulación sea disipativo. Adicionalmente en esta simulación se lograron obtener las regiones diferenciadas de viento solar rápido y lento, como se muestra en la Figura 8.10, y también evolucionar una configuración de campo magnético rotante, Figura 8.13, tanto en la torsión de las líneas de campo como en la generación de las espirales de parker.

Este tipo de pruebas también ayuda sentar las bases para simulaciones prácticas de vientos solares en contextos de predicción de clima espacial y extender las simulaciones a situaciones aún más específicas; notablemente, se espera involucrar versiones especializadas de la técnica de PFSS para simular vientos solares utilizando datos actualizados de los magnetogramas en la fotosfera.

## Capítulo 9

# Comentarios finales

En esta tesis se ha mostrado la implementación efectiva de la estrategia AMR. Se lograron abordar las problemáticas planteadas en el inicio de este trabajo.

- Simulaciones multiescala.

Se mostró que se pueden simular los fenómenos multi-escala, en la simulación de la fulguración CSHKP, donde se logró simular un evento eruptivo que se da entre la cromosfera y la corona, mientras que en las simulaciones de viento solar se simuló la propagación de información proveniente del sol al medio interplanetario.

- Uso adecuado de recursos.

Con respecto a la distribución adecuada de recursos, en la simulación de viento solar se planteó una estrategia de refinamiento que capturó la hoja de corriente heliosférica y se implementó el refinamiento fijo para la esfera que cubre la frontera interna.

- Mejorar la precisión del método numérico.

Con respecto a la disipación de los métodos numéricos, en las simulaciones presentadas del capítulo de inestabilidades se capturó de manera precisa la interfáz entre las fases del fluido, tanto para la simulación de la inestabilidad KH como para la inestabilidad RT, poniendo una mayor resolución solo en esta region generando múltiples subestructuras.

Finalmente el código CAFE-AMR es de fácil implementación, compilación y utilización lo cual lo convierte en una herramienta accesible.

En esta investigación se abrieron diferentes posibilidades para continuar.

- Con respecto al aspecto computacional:

- Implementar estrategias de paralelización más sofisticadas.
- Generalización a geometrías no rectangulares.
- Implementación de métodos disipativos para la resistividad y la convección de calor.
- Implementación del código a problemas conservativos no necesariamente solares.

- Con respecto a la física solar:
  - Simulaciones de las cuerdas de flujo cromosféricas tridimensionales.
  - Simular las eyecciones de masa coronal con estructura magnética.
  - Aplicación del código en el clima espacial.

Futuras investigaciones se apoyarán la comunidad de simulaciones solares que es áltamente activa e involucrada.

# Apéndice A

## Descomposición característica

### A.1. Descomposición característica para los flujos numéricos

Aquí se dan las formas explícitas de la matriz jacobiana  $\mathbf{A}$  que resulta de linealizar las ecuaciones dinámicas como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0},$$

para el vector de variables conservativas

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ E \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{b} = \mathbf{B} / \sqrt{4\pi}$ . Esta descomposición fue desarrollada en [Roe and Balsara, 1996]; en este trabajo se sigue la implementación de [Stone et al., 2008].

La Matriz jacobiana está dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x^2 + \gamma' \frac{v^2}{2} - X' & -(\gamma - 3)v_x & -\gamma' v_y & -\gamma' v_z & -\gamma' & -b_y Y' & -b_z Y' \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 & 0 & -b_x & 0 \\ -v_x v_z & v_z & 0 & v_x & 0 & 0 & -b_x \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & \gamma v_x & A_{56} & A_{57} \\ \frac{b_x v_y - b_y v_x}{\rho} & \frac{b_y}{\rho} & -\frac{b_x}{\rho} & 0 & 0 & v_x & 0 \\ \frac{b_x v_z - b_z v_x}{\rho} & \frac{b_z}{\rho} & 0 & -\frac{b_x}{\rho} & 0 & 0 & v_x \end{pmatrix}$$

donde  $\gamma' = (\gamma - 1)$ ,  $X' = (\gamma - 2)X$ ,  $Y' = (\gamma - 2)Y$ , y para el resto de las cantidades

$$\begin{aligned} X &= \frac{(b_{y,L} - b_{y,R})^2 + (b_{z,L} - b_{z,R})^2}{2(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})}, \\ Y &= \frac{\rho_L + \rho_R}{2\rho}, \\ A_{51} &= -v_x H + \frac{\gamma' v_x v^2}{2} + \frac{b_x}{\rho} (b_x v_x + b_y v_y + b_z v_z) - v_x X', \\ A_{52} &= -\gamma' v_x^2 + H - \frac{b_x^2}{\rho}, \\ A_{53} &= -\gamma' v_x v_y - b_y \frac{b_x}{\rho}, \\ A_{54} &= -\gamma' v_x v_z - b_z \frac{b_x}{\rho}, \\ A_{56} &= -(b_x v_y + b_y v_x Y'), \\ A_{57} &= -(b_x v_z + b_z v_x Y'), \end{aligned}$$

donde  $H = (E + P + b^2/2)/\rho$  es la entalpía.

Las 7 velocidades características, ordenadas de menor a mayor son

$$\lambda^{1,7} = v_x \mp C_f, \quad \lambda^{2,6} = v_x \mp C_{Ax}, \quad \lambda^{3,5} = v_x \mp C_s, \quad \lambda^4 = v_x,$$

donde

$$C_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left( (a^2 + C_A^2) \pm \sqrt{(a^2 + C_A^2)^2 - 4a^2 C_{Ax}^2} \right)$$

$$a^2 = \gamma' \left( H - \frac{v^2}{2} - \frac{b^2}{\rho} \right) - X'$$

$$C_{Ax}^2 = \frac{b_x^2}{\rho}, \quad C_A^2 = C_{Ax}^2 + \frac{b_y^2}{\rho}, \quad b_{\perp}^{*2} = (\gamma' - Y')(b_y^2 + b_z^2).$$

Para construir las matrices de eigen valores es necesario definir las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \frac{a^2 - C_s^2}{C_f^2 - C_s^2}, & \alpha_f &= \frac{a^2 - C_s^2}{C_f^2 - C_s^2}, & S &= \frac{b_x}{|b_x|}, & C_{ff} &= C_f \alpha_f, \\ C_{ss} &= C_s \alpha_s, & Q_f &= C_f \alpha_f S, & Q_s &= C_s \alpha_s, & A_f &= a \alpha_f \sqrt{\rho} \\ A_s &= a \alpha_s \sqrt{\rho}, & \beta_2 &= \frac{b_y}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}, & \beta_3 &= \frac{b_z}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}; \end{aligned}$$

también

$$H' = H - \frac{b^2}{\rho};$$

finalmente

$$V_{xf}, s = v_x \alpha_{f,s}, \quad V_{yf}, s = v_y \alpha_{f,s}, \quad V_{zf}, s = v_z \alpha_{f,s}, \quad Q_y^* = \frac{\beta_y^*}{\beta_{\perp}^{*2}}$$

$$\beta_y^* = \frac{b_y}{|b_{\perp}^*|}, \quad \beta_z^* = \frac{b_z}{|b_{\perp}^*|}, \quad \beta_{\perp}^{*2} = \beta_y^{*2} + \beta_z^{*2}, \quad Q_z^* = \frac{\beta_z^*}{\beta_{\perp}^{*2}}$$

La matriz de eigen-valores derechos,  $\mathbf{R}$ , donde cada columna corresponde a un eigen-valor, es

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \alpha_f & 0 & \alpha_s & 1 & \alpha_s & 0 & \alpha_f \\ V_{xf} - C_{ff} & 0 & V_{xs} - V_{ss} & v_x & V_{xs} + C_{ss} & 0 & V_{xf} + C_{ff} \\ V_{yf} + Q_s \beta_y^* & -\beta_z & V_{ys} - Q_f \beta_y^* & v_y & V_{ys} + Q_f \beta_z^* & \beta_z & V_{yf} - Q_s \beta_y^* \\ V_{zf} + Q_s \beta_z^* & \beta_y & V_{zs} - Q_f \beta_z^* & v_z & V_{zs} + Q_f \beta_y^* & -\beta_y & V_{zf} - Q_s \beta_z^* \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & R_{56} & R_{57} \\ \frac{A_s \beta_y^*}{\rho} & -\frac{\beta_z S}{\sqrt{\rho}} & -\frac{A_f \beta_y^*}{\rho} & 0 & -\frac{A_f \beta_y^*}{\rho} & -\frac{\beta_z S}{\sqrt{\rho}} & \frac{A_s \beta_y^*}{\rho} \\ \frac{\rho}{A_s \beta_z^*} & \frac{\beta_y S}{\sqrt{\rho}} & -\frac{A_f \beta_z^*}{\rho} & 0 & -\frac{A_f \beta_z^*}{\rho} & \frac{\beta_y S}{\sqrt{\rho}} & \frac{A_s \beta_z^*}{\rho} \end{pmatrix},$$

donde

$$R_{51} = \alpha_f (H' - v_x C_f) + Q_s (v_y \beta_y^* + v_z \beta_z^*) + \frac{A_s b_{\perp}^{*2} \beta_{\perp}^{*2}}{\rho}$$

$$R_{52} = -(v_y \beta_z - v_z \beta_y)$$

$$R_{53} = \alpha_s (H' - v_x C_s) - Q_f (v_y \beta_y^* + v_z \beta_z^*) - \frac{A_f b_{\perp}^* \beta_{\perp}^{*2}}{\rho}$$

$$R_{54} = \frac{v^2}{2} + \frac{X'}{\gamma'}$$

$$R_{55} = \alpha_s (H' - v_x C_s) + Q_f (v_y \beta_y^* + v_z \beta_z^*) - \frac{A_f b_{\perp}^* \beta_{\perp}^{*2}}{\rho}$$

$$R_{56} = -R_{52}$$

$$R_{57} = \alpha_f (H' - v_x C_f) - Q_s (v_y \beta_y^* + v_z \beta_z^*) + \frac{A_s b_{\perp}^{*2} \beta_{\perp}^{*2}}{\rho}$$

La matriz de eigenvalores izquierdos,  $\mathbf{L}$ , donde cada fila corresponde a un eigen-valor, es

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} L_{11} & -\tilde{V}_{xf} - \hat{C}_{ff} & -\tilde{V}_{yf} + \hat{Q}_s Q_y^* & -\tilde{V}_{zf} + \hat{Q}_s Q_z^* & \tilde{\alpha}_f & \hat{A}_s Q_y^* - \tilde{\alpha}_f b_y & \hat{A}_s Q_z^* - \tilde{\alpha}_f b_z \\ L_{21} & 0 & -\frac{\beta_z}{2} & \frac{\beta_y}{2} & 0 & -\frac{\beta_z S \sqrt{\rho}}{2} & \frac{\beta_y S \sqrt{\rho}}{2} \\ L_{31} & -\tilde{V}_{xs} - \hat{C}_{ss} & -\tilde{V}_{ys} - \hat{Q}_f Q_y^* & -\tilde{V}_{zs} - \hat{Q}_f Q_z^* & \tilde{\alpha}_s & -\hat{A}_f Q_y^* - \tilde{\alpha}_s b_y & -\hat{A}_f Q_z^* - \tilde{\alpha}_s b_z \\ L_{41} & 2\tilde{v}_x & 2\tilde{v}_y & 2\tilde{v}_z & -\frac{\gamma'}{a^2} & 2\tilde{b}_y & 2\tilde{b}_z \\ L_{51} & -\tilde{V}_{xs} + \hat{C}_{ss} & -\tilde{V}_{ys} + \hat{Q}_f Q_y^* & -\tilde{V}_{zs} + \hat{Q}_f Q_z^* & \tilde{\alpha}_s & -\hat{A}_f Q_y^* - \tilde{\alpha}_s b_y & -\hat{A}_f Q_z^* - \tilde{\alpha}_s b_z \\ L_{61} & 0 & \frac{\beta_z}{2} & \frac{\beta_y}{2} & 0 & -\frac{\beta_z S \sqrt{\rho}}{2} & \frac{\beta_y S \sqrt{\rho}}{2} \\ L_{71} & -\tilde{V}_{xf} + \hat{C}_{ff} & -\tilde{V}_{yf} - \hat{Q}_s Q_y^* & -\tilde{V}_{zf} - \hat{Q}_s Q_z^* & \tilde{\alpha}_f & \hat{A}_s Q_y^* - \tilde{\alpha}_f b_y & \hat{A}_s Q_z^* - \tilde{\alpha}_f b_z \end{pmatrix},$$

donde un símbolo encima de una cantidad  $q$  denota normalización a través de  $\tilde{q} = \gamma' q / (2a^2)$  o  $\hat{q} = q / (2a^2)$ ; y

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \tilde{\alpha}_f (v^2 - H') + \hat{C}_{ff}(C_f + v_x) - \hat{Q}_s (v_y Q_y^* + v_z Q_z^*) - \frac{\hat{A}_s |b_\perp|}{\rho} \\
L_{21} &= \frac{v_y \beta_z - v_z \beta_y}{2} \\
L_{31} &= \tilde{\alpha}_s (v^2 - H') + \hat{C}_{ss}(C_s + v_x) + \hat{Q}_f (v_y Q_y^* + v_z Q_z^*) + \frac{\hat{A}_f |b_\perp|}{\rho} \\
L_{41} &= 1 - \tilde{v}^2 + 2\hat{X}' \\
L_{51} &= \tilde{\alpha}_s (v^2 - H') - \hat{C}_{ss}(C_s - v_x) + \hat{Q}_f (v_y Q_y^* + v_z Q_z^*) + \frac{\hat{A}_f |b_\perp|}{\rho} \\
L_{61} &= -L_{21} \\
L_{71} &= \tilde{\alpha}_f (v^2 - H') + \hat{C}_{ff}(C_f - v_x) + \hat{Q}_s (v_y Q_y^* + v_z Q_z^*) - \frac{\hat{A}_s |b_\perp|}{\rho}
\end{aligned}$$

## A.2. Descomposición característica para la integración temporal CTU

Aquí se dan las formas explícitas de la matriz jacobiana  $\mathbf{A}$  que resulta de linealizar las ecuaciones dinámicas como

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{0},$$

para el vector de variables primitivas

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ b_x \\ b_y \\ b_z \\ P \\ \Psi \end{pmatrix}$$

donde  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/\sqrt{4\pi}$ . Esta descomposición fue tomada de [Stone et al., 2008] y extendida para la GLM-MHD en [Mignone et al., 2010]

La matriz jacobiana está dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & v_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & v_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & \gamma P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las 9 velocidades características, ordenadas de menor a mayor son

$$\lambda^{1,9} = \mp C_h, \quad \lambda^{2,8} = v_x \mp c_f, \quad \lambda^{3,7} = v_x \mp C_A, \quad \lambda^{4,6} = v_x \mp C_s, \quad \lambda^5 = v_x,$$

donde

$$C_{f,s} = \sqrt{\frac{1}{2\rho} \left( \gamma P + b^2 \pm \sqrt{(\gamma P + b^2)^2 - 4\gamma P b_x^2} \right)}$$

$$C_A = \frac{|b_x|}{\sqrt{\rho}}$$

Para construir las matrices de eigen valores es necesario definir las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\gamma P}{\rho}, & \alpha_s &= \frac{a^2 - C_s^2}{C_f^2 - C_s^2}, & \alpha_f &= \frac{a^2 - C_f^2}{C_f^2 - C_s^2}, & S &= \frac{b_x}{|b_x|} \\ C_{ff} &= C_f \alpha_f, & C_{ss} &= C_s \alpha_s, & Q_f &= C_f \alpha_f S, & Q_s &= C_s \alpha_s \\ A_f &= a \alpha_f \sqrt{\rho}, & A_s &= a \alpha_s \sqrt{\rho}, & \beta_2 &= \frac{b_y}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}, & \beta_3 &= \frac{b_z}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}} \\ N_f &= N_s &= \frac{1}{2a^2}; \end{aligned}$$

en el caso degenerado en el cual  $C_f = C_s$  se fija  $\alpha_f = 1, \alpha_s = 0$ ; por otra parte, si  $b_y = b_z = 0$  se fija  $\beta_2 = \beta_3 = 1/\sqrt{2}$ .

La matriz de eigen-valores derechos,  $\mathbf{R}$ , donde cada columna corresponde a un eigen-valor, es

$$\mathbf{R}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 & \rho \alpha_f & 0 & \rho \alpha_s & 1 & \rho \alpha_s & 0 & \rho \alpha_f & 0 \\ 0 & -C_{ff} & 0 & -C_{ss} & 0 & C_{ss} & 0 & C_{ff} & 0 \\ 0 & Q_s \beta_2 & -\beta_3 & -Q_f \beta_2 & 0 & Q_f \beta_2 & \beta_3 & -Q_s \beta_2 & 0 \\ 1 & Q_s \beta_3 & \beta_2 & -Q_f \beta_3 & 0 & Q_f \beta_3 & -\beta_2 & -Q_s \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_s \beta_2 & -\beta_3 \sqrt{\rho} S & -A_f \beta_2 & 0 & -A_f \beta_2 & -\beta_3 \sqrt{\rho} S & A_s \beta_2 & 0 \\ 0 & A_s \beta_3 & \beta_2 \sqrt{\rho} S & -A_f \beta_3 & 0 & -A_f \beta_3 & \beta_2 \sqrt{\rho} S & A_s \beta_3 & 0 \\ 0 & \rho a^2 \alpha_f & 0 & \rho a \alpha_s & 0 & \rho a^2 \alpha_s & 0 & \rho a^2 \alpha_f & 0 \\ -C_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_h \end{pmatrix}$$

La matriz de eigenvalores izquierdos,  $\mathbf{L}$ , donde cada fila corresponde a un eigen-valor, es

$$\mathbf{L}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2C_h} \\ 0 & -N_f C_{ff} & N_f Q_s \beta_2 & N_f Q_s \beta_3 & 0 & \frac{N_f A_s \beta_2}{\rho} & \frac{N_f A_s \beta_3}{\rho} & \frac{N_f \alpha_f}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{2} & \frac{\beta_2}{2} & 0 & -\frac{\beta_2 S}{2\sqrt{\rho}} & \frac{\beta_2 S}{2\sqrt{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & -N_s C_{ss} & -N_s Q_f \beta_2 & -N_f Q_f \beta_3 & 0 & \frac{-N_s A_f \beta_2}{\rho} & \frac{-N_s A_f \beta_3}{\rho} & \frac{N_s \alpha_s}{\rho} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & N_s C_{ss} & -N_s Q_f \beta_2 & -N_f Q_f \beta_3 & 0 & \frac{-N_s A_f \beta_2}{\rho} & \frac{-N_s A_f \beta_3}{\rho} & \frac{N_s \alpha_s}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_3}{2} & -\frac{\beta_2}{2} & 0 & -\frac{\beta_2 S}{2\sqrt{\rho}} & \frac{\beta_2 S}{2\sqrt{\rho}} & 0 & 0 \\ 0 & N_f C_{ff} & -N_f Q_s \beta_2 & -N_f Q_s \beta_3 & 0 & \frac{N_f A_s \beta_2}{\rho} & \frac{N_f A_s \beta_3}{\rho} & \frac{N_f \alpha_f}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2C_h} \end{pmatrix}$$

## Apéndice B

# Limitadores de pendiente

A continuación se expresan los reconstructores utilizados en esta tesis.

### B.1. Godunov

Tiene este nombre debido a que se usa la aproximación del primer método de volúmenes finitos en la literatura, que fue expuesto por este autor. Se tienen los valores aproximados de  $u$  en la celda como

$$u_{i+1/2} = u_{i+1}$$

Este reconstructor no tiene limitadores de pendiente.

### B.2. Minmod

Este reconstructor utiliza aproximaciones lineales, es decir, se aproxima el valor de la función como

$$u_{i+1/2} = u_i + \sigma_i \frac{\Delta x}{2}$$

donde  $\sigma$  es una pendiente similar a la obtenida por una serie de Taylor.  $\sigma$  se obtiene utilizando la función minmod y el valor de las pendientes centradas en las fronteras intercelda:

$$\sigma_i = \text{minmod}(m_{i-1/2}, m_{i+1/2})$$

donde minmod está definida como

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab < 0 \end{cases}$$

y la pendiente  $m_{i+1/2}$  es

$$m_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}.$$

### B.3. MC (Monotonized Central)

. Aproximación lineal similar a minmod pero obtiene la pendiente de otra manera:

$$\sigma_i = \text{minmod}[\text{minmod}(mc_i, 2m_{i-1/2}), \text{minmod}(mc_i, 2m_{i+1/2})]$$

donde

$$mc_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}.$$

# Bibliografía

Enzo code, 2019. URL <https://enzo-project.org/>.

L. Acton, M. Bruner, J. Lemen, S. Tsuneta, Y. Ogawara, J. Nishimura, R. Bentley, L. Culhane, R. Canfield, H. Hudson, et al. The yokkoh mission for high-energy solar physics. *Science*, 258 (5082):618–625, 1992.

O. Agertz, B. Moore, J. Stadel, D. Potter, F. Miniati, J. Read, L. Mayer, A. Gawryszczak, A. Kravtsov, Å. Nordlund, et al. Fundamental differences between sph and grid methods. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 380(3):963–978, 2007.

H. Alfvén. On the solar corona. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, 27(25):1–23, 1941.

G. Amdahl. Amdahl’s law, 1967.

C. Arge and V. Pizzo. Improvement in the prediction of solar wind conditions using near-real time solar magnetic field updates. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 105(A5):10465–10479, 2000.

C. Arge, J. Luhmann, D. Odstrcil, C. Schrijver, and Y. Li. Stream structure and coronal sources of the solar wind during the may 12th, 1997 cme. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 66(15-16):1295–1309, 2004.

D. S. Balsara and D. S. Spicer. A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations. *Journal of Computational Physics*, 149(2):270–292, Mar. 1999. doi: 10.1006/jcph.1998.6153.

U. Banerjee. *Speedup of ordinary programs*. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1979.

M. Berger and J. Oliger. The amr technique. *J. Computat. Phys*, 53:484–512, 1984.

M. J. Berger, P. Colella, et al. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of computational Physics*, 82(1):64–84, 1989.

K. Birkeland. *The Norwegian Aurora Polaris Expedition, 1902-1903...*, volume 1. H. Aschehoug & Company, 1913.

J. Birn, J. F. Drake, M. A. Shay, B. N. Rogers, R. E. Denton, M. Hesse, M. Kuznetsova, Z. W. Ma, A. Bhattacharjee, A. Otto, and P. L. Pritchett. Geospace environmental modeling (gem) magnetic

- reconnection challenge. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3715–3719, 2001. doi: <https://doi.org/10.1029/1999JA900449>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/1999JA900449>.
- J. A. Bittencourt. *Fundamentals of plasma physics*. Springer Science & Business Media, 2004.
- L. F. Burlaga and L. F. Burlaga. *Interplanetary magnetohydrodynamics*. Oxford University Press on Demand, 1995.
- P. Cargo and G. Gallice. Roe matrices for ideal mhd and systematic construction of roe matrices for systems of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 136(2):446–466, 1997.
- H. Carmichael. 54 a process for flares. In *AAS NASA Symposium on the Physics of Solar Flares: Proceedings of a Symposium Held at the Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, October 28-30, 1963*, volume 50, page 451. National Aeronautics and Space Administration, 1964.
- R. C. Carrington. Description of a singular appearance seen in the sun on september 1, 1859. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 20, p. 13-15*, 20:13–15, 1859.
- S. Chapman. Geophysical discussion of the royal astronomical society.
- S. Chapman. Solar streams of corpuscles: their geometry, absorption of light, and penetration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 89, p. 456*, 89:456, 1929.
- H. Childs, E. Brugger, B. Whitlock, J. Meredith, S. Ahern, D. Pugmire, K. Biagas, M. Miller, C. Harrison, G. H. Weber, H. Krishnan, T. Fogal, A. Sanderson, C. Garth, E. W. Bethel, D. Camp, O. Rübel, M. Durant, J. M. Favre, and P. Navrátil. Visit: An end-user tool for visualizing and analyzing very large data. In *High Performance Visualization—Enabling Extreme-Scale Scientific Insight*, pages 357–372. October 2012. doi: 10.1201/b12985.
- I. D. Chivers and J. Sleightholme. *Introduction to programming with Fortran*, volume 2. Springer, 2018.
- S. Cielo, O. Porth, L. Iapichino, A. Karmakar, H. Olivares, and C. Xia. Optimizing the hybrid parallelization of bhac. *Astronomy and Computing*, 38:100509, 2022.
- P. Colella. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws. *Journal of computational physics*, 87(1):171–200, 1990.
- A. J. Cunningham, A. Frank, P. Varnière, S. Mitran, and T. W. Jones. Simulating magnetohydrodynamical flow with constrained transport and adaptive mesh refinement: algorithms and tests of the astrobear code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 182(2):519, 2009.
- A. Dedner, F. Kemm, D. Kröner, C.-D. Munz, T. Schnitzer, and M. Wesenberg. Hyperbolic divergence cleaning for the mhd equations. *Journal of Computational Physics*, 175(2):645–673, 2002.

- V. Domingo, B. Fleck, and A. Poland. Soho: the solar and heliospheric observatory. *Space Science Reviews*, 72:81–84, 1995.
- B. Einfeldt, C.-D. Munz, P. L. Roe, and B. Sjögreen. On godunov-type methods near low densities. *Journal of computational physics*, 92(2):273–295, 1991.
- X. Feng, L. Yang, C. Xiang, C. Jiang, X. Ma, S. Wu, D. Zhong, and Y. Zhou. Validation of the 3d amr sip–cese solar wind model for four carrington rotations. *Solar Physics*, 279:207–229, 2012.
- X. Feng, H. Wang, C. Xiang, X. Liu, M. Zhang, J. Zhao, and F. Shen. Magnetohydrodynamic modeling of the solar corona with an effective implicit strategy. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 257(2):34, nov 2021. doi: 10.3847/1538-4365/ac1f8b. URL <https://doi.org/10.3847/1538-4365/ac1f8b>.
- S. Fromang, P. Hennebelle, and R. Teyssier. A high order godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics. *Astronomy & Astrophysics*, 457(2):371–384, 2006.
- B. Fryxell, K. Olson, P. Ricker, F. Timmes, M. Zingale, D. Lamb, P. MacNeice, R. Rosner, J. Truran, and H. Tufo. Flash: An adaptive mesh hydrodynamics code for modeling astrophysical thermonuclear flashes. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 131(1):273, 2000.
- H. P. Furth, J. Killeen, and M. N. Rosenbluth. Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch. *The physics of Fluids*, 6(4):459–484, 1963.
- T. A. Gardiner and J. M. Stone. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. *Journal of Computational Physics*, 205(2):509–539, May 2005. doi: 10.1016/j.jcp.2004.11.016.
- T. A. Gardiner and J. M. Stone. An unsplit godunov method for ideal mhd via constrained transport in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, 227(8):4123–4141, 2008.
- J. González-Avilés, F. Guzmán, V. Fedun, and G. Verth. Spicule jets in the solar atmosphere modeled with resistive mhd and thermal conduction. *The Astrophysical Journal*, 897(2):153, 2020.
- J. J. González-Avilés, A. Cruz-Osorio, F. D. Lora-Clavijo, and F. S. Guzmán. Newtonian cafe: a new ideal MHD code to study the solar atmosphere. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 454(2):1871–1885, oct 2015. doi: 10.1093/mnras/stv2013. URL <https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstv2013>.
- J. González-Esparza, J. Cantó, R. González, A. Lara, and A. Raga. Propagation of cmes in the interplanetary medium: Numerical and analytical results. *Advances in Space Research*, 32(4): 513–518, 2003. ISSN 0273-1177. doi: [https://doi.org/10.1016/S0273-1177\(03\)00334-X](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(03)00334-X). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S027311770300334X>. Heliosphere at Solar Maximum.
- C. Goodrich, A. Sussman, J. Lyon, M. Shay, and P. Cassak. The cism code coupling strategy. *Journal of atmospheric and solar-terrestrial physics*, 66(15-16):1469–1479, 2004.

- D. A. Gurnett and A. Bhattacharjee. *Introduction to plasma physics: with space and laboratory applications*. Cambridge university press, 2005.
- J. L. Gustafson. Reevaluating amdahl's law. *Communications of the ACM*, 31(5):532–533, 1988.
- B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and J. Oliger. *Time dependent problems and difference methods*, volume 2. Wiley Online Library, 2013.
- F. S. Guzmán and L. F. Mendoza-Mendoza. Tests of a new code that simulates the evolution of solar winds and cmes. *Journal of Physics: Conference Series*, 2307(1):012020, sep 2022. doi: 10.1088/1742-6596/2307/1/012020. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2307/1/012020>.
- T. Hirayama. Theoretical model of flares and prominences: I: Evaporating flare model. *Solar Physics*, 34:323–338, 1974.
- Q. Hu, J. Qiu, and S. Krucker. Magnetic field line lengths inside interplanetary magnetic flux ropes. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 120(7):5266–5283, 2015.
- H. S. Hudson. Carrington events. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 59:445–477, 2021.
- J. M. Jenkins and R. Keppens. Resolving the solar prominence/filament paradox using the magnetic rayleigh–taylor instability. *Nature Astronomy*, 6(8):942–950, 2022.
- J. Jing, C. Liu, J. Lee, H. Ji, N. Liu, Y. Xu, and H. Wang. Statistical analysis of torus and kink instabilities in solar eruptions. *The Astrophysical Journal*, 864(2):138, 2018.
- M. P. Johnson. *Skylab: the human side of a scientific mission*. University of North Texas, 2007.
- M. L. Kaiser, T. Kucera, J. Davila, O. St Cyr, M. Guhathakurta, and E. Christian. The stereo mission: An introduction. *Space Science Reviews*, 136:5–16, 2008.
- R. Keppens, M. Nool, G. Tóth, and J. Goedbloed. Adaptive mesh refinement for conservative systems: multi-dimensional efficiency evaluation. *Computer Physics Communications*, 153(3): 317–339, 2003.
- R. Keppens, Z. Meliani, A. J. van Marle, P. Delmont, A. Vlasits, and B. van der Holst. Parallel, grid-adaptive approaches for relativistic hydro and magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 231(3):718–744, 2012.
- R. Keppens, B. P. Braileanu, Y. Zhou, W. Ruan, C. Xia, Y. Guo, N. Claes, and F. Bacchini. Mpi-amrvac 3.0: Updates to an open-source simulation framework. *arXiv preprint arXiv:2303.03026*, 2023.
- J. Kleimann, A. Kopp, H. Fichtner, and R. Grauer. A novel code for numerical 3-d mhd studies of cme expansion. *Annales Geophysicae*, 27(3):989–1004, 2009. doi: 10.5194/angeo-27-989-2009. URL <https://angeo.copernicus.org/articles/27/989/2009/>.

- B. Kliem, V. Titov, and T. Török. Formation of current sheets and sigmoidal structure by the kink instability of a magnetic loop. *Astronomy & Astrophysics*, 413(3):L23–L26, 2004.
- J. Klimchuk, S. Patsourakos, and P. Cargill. Highly efficient modeling of dynamic coronal loops. *The Astrophysical Journal*, 682(2):1351, 2008.
- R. Kopp and G. Pneuman. Magnetic reconnection in the corona and the loop prominence phenomenon. *Solar Physics*, 50:85–98, 1976.
- LBNL. Chombo library, 2019. URL <https://commons.lbl.gov/display/chombo/Chombo+-+Software+for+Adaptive+Solutions+of+Partial+Differential+Equations>.
- R. J. LeVeque et al. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press, 2002.
- S. Li. An hllc riemann solver for magneto-hydrodynamics. *Journal of computational physics*, 203(1):344–357, 2005.
- J. Linker, P. Riley, Z. Mikic, R. Lionello, V. Titov, and D. Odstrcil. Corhel: a modeling suite for describing the solar corona and inner heliosphere. In *AGU Fall Meeting Abstracts*, volume 2009, pages SA43A–1612, 2009.
- J. A. Linker, Z. Mikić, D. A. Biesecker, R. J. Forsyth, S. E. Gibson, A. J. Lazarus, A. Lecinski, P. Riley, A. Szabo, and B. J. Thompson. Magnetohydrodynamic modeling of the solar corona during whole sun month. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 104(A5):9809–9830, 1999.
- M. Liska, K. Chatterjee, D. Issa, D. Yoon, N. Kaaz, A. Tchekhovskoy, D. van Eijnatten, G. Musoke, C. Hesp, V. Rohoza, et al. H-amr: A new gpu-accelerated grmhd code for exascale computing with 3d adaptive mesh refinement and local adaptive time stepping. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 263(2):26, 2022.
- R. Löhner. An adaptive finite element scheme for transient problems in cfd. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61(3):323–338, 1987.
- P. MacNeice, K. M. Olson, C. Mobarry, R. De Fainchtein, and C. Packer. Paramesh: A parallel adaptive mesh refinement community toolkit. *Computer physics communications*, 126(3):330–354, 2000.
- T. Magara, S. Mineshige, T. Yokoyama, and K. Shibata. Numerical simulation of magnetic reconnection in eruptive flares. *Magnetodynamic Phenomena in the Solar Atmosphere: Prototypes of Stellar Magnetic Activity*, pages 585–586, 1996.
- T. Matsumoto. Self-gravitational magnetohydrodynamics with adaptive mesh refinement for protostellar collapse. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 59(5):905–927, 2007.
- T. Matsumoto, D. Shiota, R. Kataoka, H. Miyahara, and S. Miyake. A dynamical model of the heliosphere with the adaptive mesh refinement. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 1225, page 012008. IOP Publishing, 2019.

- A. Mignone and P. Tzeferacos. A second-order unsplit godunov scheme for cell-centered mhd: The ctu-glm scheme. *Journal of Computational Physics*, 229(6):2117–2138, 2010.
- A. Mignone, G. Bodo, S. Massaglia, T. Matsakos, O. e. Tesileanu, C. Zanni, and A. Ferrari. Pluto: a numerical code for computational astrophysics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(1):228, 2007.
- A. Mignone, P. Tzeferacos, and G. Bodo. High-order conservative finite difference glm–mhd schemes for cell-centered mhd. *Journal of Computational Physics*, 229(17):5896–5920, 2010.
- A. Mignone, C. Zanni, P. Tzeferacos, B. Van Straalen, P. Colella, and G. Bodo. The pluto code for adaptive mesh computations in astrophysical fluid dynamics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 198(1):7, 2011.
- Z. Mikić, J. A. Linker, D. D. Schnack, R. Lionello, and A. Tarditi. Magnetohydrodynamic modeling of the global solar corona. *Physics of Plasmas*, 6(5):2217–2224, 1999.
- V. Mishin and V. Tomozov. Kelvin–helmholtz instability in the solar atmosphere, solar wind and geomagnetosphere. *Solar Physics*, 291:3165–3184, 2016.
- R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37:239–261, 2005.
- C. Muller. The carrington solar flares of 1859: consequences on life. *Origins of Life and Evolution of Biospheres*, 44(3):185–195, 2014.
- N. M. Narechania, L. Nikolić, L. Freret, H. De Sterck, and C. P. Groth. An integrated data-driven solar wind–cme numerical framework for space weather forecasting. *Journal of Space Weather and Space Climate*, 11:8, 2021.
- G. Newkirk and M. Altschuler. Magnetic fields and the structure of the solar corona. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 1, page 288, 1969.
- R. Ochoa-Armenta and F. S. Guzmán. Cafe-amr: a computational mhd solar physics simulation tool that uses amr. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 525(1):667–682, 2023.
- D. Odstrcil. Modeling 3-d solar wind structure. *Advances in Space Research*, 32(4):497–506, 2003.
- S. A. Orszag and C.-M. Tang. Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 90(1):129–143, 1979.
- E. N. Parker. Sweet’s mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids. *Journal of Geophysical Research*, 62(4):509–520, 1957.
- E. N. Parker. Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields. *Astrophysical Journal*, vol. 128, p. 664, 128:664, 1958.
- H. E. Petschek. 50 magnetic field annihilation. In *Proceedings of a Symposium Held at the Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, October 28-30, 1963*, volume 50, page 425. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and . . . , 1964.

- O. Porth, C. Xia, T. Hendrix, S. Moschou, and R. Keppens. Mpi-amrvac for solar and astrophysics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 214(1):4, 2014.
- K. G. Powell. An approximate riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension). Technical report, 1994.
- E. Priest. Magnetohydrodynamic theories of solar flares: Invited review. *Solar Physics*, 104:1–18, 1986.
- E. Priest. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press, 2014.
- E. Priest and T. Forbes. Magnetic reconnection. *Magnetic Reconnection*, 2007.
- N. Raouafi, L. Matteini, J. Squire, S. Badman, M. Velli, K. Klein, C. Chen, W. Matthaeus, A. Szabo, M. Linton, et al. Parker solar probe: Four years of discoveries at solar cycle minimum. *Space Science Reviews*, 219(1):8, 2023.
- S. Ray. *Fortran 2018 with Parallel Programming*. CRC Press, 2019.
- P. Riley and J. T. Gosling. Do coronal mass ejections implode in the solar wind? *Geophysical Research Letters*, 25(9):1529–1532, 1998. doi: <https://doi.org/10.1029/98GL01057>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/98GL01057>.
- P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2):357–372, 1981.
- P. L. Roe and D. S. Balsara. Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56(1):57–67, 1996.
- R. Rosner, W. H. Tucker, and G. Vaiana. Dynamics of the quiescent solar corona. *Astrophysical Journal, Part 1, vol. 220, Mar. 1, 1978, p. 643-645, 647, 649-653, 655-665. Research supported by the Smithsonian Institution*, 220:643–645, 1978.
- W. Ruan, C. Xia, and R. Keppens. A fully self-consistent model for solar flares. *The Astrophysical Journal*, 896(2):97, 2020.
- D. Ryu and T. Jones. Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics: algorithm and tests for one-dimensional flow. *arXiv preprint astro-ph/9404074*, 1994.
- T. Sakurai. Green’s function methods for potential magnetic fields. *Solar Physics*, 76:301–321, 1982.
- D. Shiota, R. Kataoka, Y. Miyoshi, T. Hara, C. Tao, K. Masunaga, Y. Futaana, and N. Terada. Inner heliosphere mhd modeling system applicable to space weather forecasting for the other planets. *Space Weather*, 12(4):187–204, 2014.
- S. Skirvin, G. Verth, J. J. González-Avilés, S. Shelyag, R. Sharma, F. S. Guzmán, I. Ballai, E. Scullion, S. S. Silva, and V. Fedun. Small-scale solar jet formation and their associated waves and instabilities. *Advances in Space Research*, 71(4):1866–1892, feb 2023. doi: 10.1016/j.asr.2022.05.033. URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.asr.2022.05.033>.

- C. Smith. Heliophysics i. plasma physics of the local cosmos, 2009.
- C. W. Snyder and M. Neugebauer. Interplanetary solar-wind measurements by mariner ii. In *Proceedings of the Plasma Space Science Symposium: Held at the Catholic University of America Washington, DC, June 11–14, 1963*, pages 67–90. Springer, 1965.
- G. A. Sod. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of computational physics*, 27(1):1–31, 1978.
- J. M. Stone and T. Gardiner. Nonlinear evolution of the magnetohydrodynamic rayleigh-taylor instability. *Physics of Fluids*, 19(9):094104, 2007.
- J. M. Stone, T. A. Gardiner, P. Teuben, J. F. Hawley, and J. B. Simon. Athena: a new code for astrophysical mhd. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 178(1):137, 2008.
- P. Sturrock. Model of the high-energy phase of solar flares. *Nature*, 211(5050):695–697, 1966.
- P. Sweet. The production of high energy particles in solar flares. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 8: 188–196, 1958.
- S. Takasao, T. Matsumoto, N. Nakamura, and K. Shibata. Magnetohydrodynamic shocks in and above post-flare loops: two-dimensional simulation and a simplified model. *The Astrophysical Journal*, 805(2):135, 2015.
- R. Teyssier. Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement—a new high resolution code called ramses. *Astronomy & Astrophysics*, 385(1):337–364, 2002.
- E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- G. Tóth, B. Van der Holst, I. V. Sokolov, D. L. De Zeeuw, T. I. Gombosi, F. Fang, W. B. Manchester, X. Meng, D. Najib, K. G. Powell, et al. Adaptive numerical algorithms in space weather modeling. *Journal of Computational Physics*, 231(3):870–903, 2012.
- C. Verbeke, T. Baratashvili, and S. Poedts. Icarus, a new inner heliospheric model with a flexible grid. *Astronomy & Astrophysics*, 662:A50, 2022.
- Y.-M. Wang and N. Sheeley Jr. Solar wind speed and coronal flux-tube expansion. *The Astrophysical Journal*, 355:726–732, 1990.
- Y.-M. Wang and N. Sheeley Jr. On potential field models of the solar corona. *The Astrophysical Journal*, 392:310–319, 1992.
- E. J. Weber and L. Davis Jr. The angular momentum of the solar wind. *Astrophysical Journal*, vol. 148, p. 217–227, 148:217–227, 1967.
- K. Wenzel, R. Marsden, D. Page, and E. Smith. The ulysses mission. *Astronomy and Astrophysics Supplement*, Vol. 92, NO. 2/JAN, P. 207, 1992, 92:207, 1992.

- C. Xia, J. Teunissen, I. El Mellah, E. Chané, and R. Keppens. Mpi-amrvac 2.0 for solar and astrophysical applications. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 234(2):30, 2018.
- M. Yokosawa and T. Inui. Magnetorotational instability around a rotating black hole. *The Astrophysical Journal*, 631(2):1051, 2005.
- T. Yokoyama and K. Shibata. What is the condition for fast magnetic reconnection? *The Astrophysical Journal*, 436:L197–L200, 1994.
- T. Yokoyama and K. Shibata. Magnetic reconnection coupled with heat conduction. *The Astrophysical Journal*, 474(1):L61, 1997.
- T. Yokoyama and K. Shibata. Magnetohydrodynamic simulation of a solar flare with chromospheric evaporation effect based on the magnetic reconnection model. *The Astrophysical Journal*, 549(2):1160, 2001.
- U. Ziegler. The NIRVANA code: Parallel computational MHD with adaptive mesh refinement. *Computer Physics Communications*, 179(4):227–244, Aug. 2008. doi: 10.1016/j.cpc.2008.02.017.