



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE  
HIDALGO

---

---

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ANÁLISIS NO LINEAL DÉBIL DE CONVECCIÓN DOBLE  
DIFUSIVA EN DIFERENTES GEOMETRÍAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MAESTRA EN CIENCIAS EN **EL** ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

VALERIA FROYLÁN LÁZARO.

ASESOR:

DR. RICARDO BECERRIL BÁRCENAS



Estados Unidos Mexicanos  
Morelia, Michoacán  
**Enero. 2024**

# Agradecimientos

A través de las siguientes líneas me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a las personas que de manera científica y/o humana han contribuido con mi formación académica.

Quiero agradecer a mis padres Carmen y Alejo por guiar mi camino, a mi hermano Alejandro por sus consejos, a mis queridos abuelos Gregorio y Elena por el cariño, a mis tíos Ignacio, Pedro, Benito, Liliana, Adriana y Antonio por apoyar e impulsar mis sueños, sin su respaldo y confianza no lograría estar viviendo esta maravillosa experiencia.

A mis amigos Víctor Manuel, Eric Didier, Cesar Iván, Valeria Montserrat, Luis Angel y Karina por acompañarme a lo largo de los años además de apoyarme en los momentos difíciles.

Al Dr. Ricardo Becerril por su paciencia, apoyo también por la dirección para la realización de este proyecto. A los profesores Dr. Ulises Nucamendi, Dr. Pablo Genaro Martínez, Dr. Gabriel Espinosa y el Dr. Francisco Antonio Astorga por sus observaciones y tiempo dedicado a este trabajo.

Al Instituto de Física y Matemáticas por brindar un espacio cómodo de trabajo y la atención del personal administrativo, por la ayuda económica brindada al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnología (CONAHCYT).

# Resumen

La importancia de estudiar sistemas de convección doble difusivos radica en sus amplias aplicaciones en distintas áreas como oceanografía, astrofísica, ingeniería de baterías, etc. El sistema consiste en una capa de fluido infinita horizontalmente atrapada entre dos placas separadas a una altura  $h$  donde se consideran dos gradientes de difusión que son la densidad y temperatura siendo mayores estos en la placa inferior, además se trabaja con el caso dos dimensional.

En el presente trabajo se realiza un análisis de estabilidad no lineal débil al sistema de convección doble difusiva sustituyendo el tradicional perfil lineal de la salinidad por uno no lineal, inspirado en (Balmforth, Casti, y Julien (1998)), de la forma:

$$S^{(e)}(z) = 0.5[1 - \tanh q(z - 1/2)] \quad (1)$$

donde  $q$  es un parámetro que modula la profundidad de perfil.

Con la ayuda de teoría de perturbaciones y la creación de modelos buscamos los cambios presentados en la bibliografía usando un perfil lineal.

Se comparan los diagramas de estabilidad lineal debidos a la influencia del nuevo perfil, los cuales sufren un crecimiento en el espacio  $(R_S, R_T)$ , alejándose del número de Rayleigh salino, lo cual denota el cambio de posicionamiento que existe en las ramas que definen el umbral de comportamiento del sistema. Realizamos un mapeo de la variación de algunos puntos de interés como lo es el punto tricrítico. Se encuentran las nuevas distancias relativas en las cuales aparecen las situaciones descritas linealmente cerca de la rama oscilatoria, donde logramos observar que con el cambio de perfil necesitamos distancias relativas mas cortas.

En las conclusiones se presenta un condensado de las diferencias, en diferentes espacios de parámetros, con la modificación del perfil.

*Palabras clave: dinámica de fluidos, convección, doble difusión, perfil no lineal, salinidad, diagramas de estabilidad, bifurcaciones, oscilaciones y ciclos límite*

# Abstract

The importance of studying diffusive double convection systems lies in their wide applications in different areas such as oceanography, astrophysics, battery engineering, etc. The two dimensional system consists of a layer of infinite fluid horizontally trapped between two planes separated at a height  $h$  where two diffusion gradients are considered which are salt and temperature being higher these in the lower plane.

In the present work, a weak nonlinear stability analysis of the double diffusive convection system is performed, replacing the traditional linear salinity profile with a nonlinear one, inspired by ( Balmforth y cols. (1998)), of the form:

$$S^{(c)}(z) = 0.5[1 - \tanh q(z - 1/2)] \quad (2)$$

where  $q$  is a parameter that modulates the profile depth.

With the help of perturbation theory and the creation of models we look for the changes presented in the phenomenology already reported in the literature with the use of a linear profile. We compare diagrams of linear stability due to the influence of the new profile which suffer a growth in space  $(R_S, R_T)$  away from the saline Rayleigh number, which denotes the change in positioning that exists in the branches that define the behavior threshold of the system, we map the change of some points of interest as it is the tricritical point, we find the new relative distances in which appear the situations described linearly near the oscillatory branch, where we manage to observe that with the change of profile we need shorter relative distances. The conclusions present a condensation of the differences in different spaces of parameters with the variation of the profile.

*Keywords: fluid dynamics, convection, double diffusion, non-linear profile, salinity, stability diagrams, bifurcations, oscillations and limiting cycles*

# Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Sistema doble difusivo</b>	<b>3</b>
2.1 Ecuaciones de movimiento . . . . .	3
2.2 Análisis de estabilidad lineal . . . . .	10
2.3 Formas normales . . . . .	15
2.3.1 Rama estacionaria . . . . .	15
2.3.2 Rama oscilatoria . . . . .	17
<b>3 Construcción de los modelos y cambio de perfil</b>	<b>21</b>
3.1 Modelo perfil lineal . . . . .	21
3.2 Modelo perfil salino no lineal . . . . .	28
<b>4 Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>A Estabilidad lineal</b>	<b>42</b>
<b>B Orbitas heteroclínicas</b>	<b>44</b>

# Índice de figuras

2.1	Arreglo del problema principal a estudiar. . . . .	3
2.3	Umbral critico de $R_T$ para diferentes valores de $n$ . . . . .	13
2.4	Diagrama de análisis de estabilidad lineal . . . . .	14
2.5	Bifurcación para valores de $\epsilon > 0$ y $g_3 > 0$ en la rama estacionaria . . . . .	16
2.6	Bifurcación para valores de $g_3 < 0$ y $\epsilon < 0$ en la rama estacionaria . . . . .	17
2.7	Bifurcación para orden quinto en la rama estacionaria donde se presentan brincos e histéresis . . . . .	18
2.8	Punto tri-critico en la rama estacionaria . . . . .	19
3.1	Diagrama de análisis de estabilidad lineal . . . . .	23
3.2	Número de Rayleigh salino $R_S$ en función de $\tau$ . . . . .	24
3.3	Amplitud cuando nos acercamos al punto tricrítico tomando $\tau = 0.4$ . . . . .	25
3.4	Cambios en las oscilaciones del coeficiente $d$ cuando variamos $r_T$ . . . . .	25
3.5	Cambio en los ciclos límite con la variación $r_T$ . . . . .	26
3.6	Ciclo límite cuando $r_T = 2$ perfil lineal para $r_s = 0.5$ . . . . .	26
3.7	Cambio en las oscilaciones para $r_s = 4$ variando $r_T$ en el perfil lineal . . . . .	26
3.8	Ciclo límite y punto fijo aislado para $r_s = 6$ con un perfil lineal . . . . .	27
3.9	Perfil no lineal de la salinidad aparece en color rojo. . . . .	28
3.10	Perfil no lineal de la salinidad según el valor de $q$ . . . . .	29
3.11	Diagrama de estabilidad lineal comparando los modelos lineal en amari- llo/rojo y en azules para $q = 49.5$ . . . . .	30
3.12	Diagrama de estabilidad lineal para los valores de $q = 10$ , $q = 49.5$ y perfil lineal . . . . .	31
3.13	(Cambio de posición del punto de codimensión dos en el espacio $(R_S^{C2}, R_T^{C2})$ ) . . . . .	32
3.14	Número de Rayleigh salino $R_S$ en función de $\tau$ para el perfil no lineal . . . . .	33
3.15	Cambio de posición del punto tricrítico en el espacio $(R_S, R_T)$ según el perfil que utilicemos . . . . .	34
3.16	Coeficiente $d$ para $q = 10$ y $r_s = 0.5$ . . . . .	34
3.17	Coeficiente $d$ para $q = 49.5$ y $r_s = 0.5$ . . . . .	35
3.18	Ciclos límite para $q = 10$ y $r_s = 0.5$ . . . . .	35
3.19	Ciclos límite para $q = 49.5$ y $r_s = 0.5$ . . . . .	36
3.20	Coeficiente $a$ para $q = 10$ y $r_s = 4$ . . . . .	36
3.21	Coeficiente $a$ para $q = 50$ y $r_s = 4$ . . . . .	37
3.22	Ciclos límite para $q = 10$ y $r_s = 6$ . . . . .	37
3.23	Ciclos límite para $q = 49.5$ y $r_s = 6$ . . . . .	38

4.1	Cambio en el diagrama de estabilidad en el espacio $(R_S, R_T)$ según el perfil que utilizemos . . . . .	39
A.1	Clasificación de los puntos fijos del sistema según los valores propios obtenidos del mismo . . . . .	43
B.1	orbitas heteroclínicas que se forman con un péndulo rígido . . . . .	44
B.2	orbitas heteroclínicas que se forman con puntos silla . . . . .	45
B.3	orbitas homoclínicas que se forman con puntos silla . . . . .	45

# Capítulo 1

## Introducción

Muchos de los sistemas de ecuaciones que describen fenómenos físicos, económicos, biológicos, y otras áreas del conocimiento humano, pueden escribirse en forma de un sistema dinámico de dimensión  $n$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t, \vec{p}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (1.1)$$

esto es, un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, usualmente no lineal junto con una condición inicial  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . En la ecuación (1.1), el vector  $n$ -dimensional  $\vec{x}(t)$  tiene por componentes las diferentes variables que describen el sistema en estudio, pueden ser posiciones y momentos lineales de las partículas si tratamos un sistema mecánico; corrientes eléctricas, voltajes, demanda de energía de los consumidores, si tratamos con sistemas eléctrico de potencia, por dar unos ejemplos. La función vectorial  $\vec{f}(\vec{x}, t; \vec{p})$  es usualmente no lineal,  $t$  es el parámetro de evolución, usualmente el tiempo, y  $\vec{p}$  es el vector donde se anidan los diversos parámetros del sistema.

En el estudio de sistemas dinámicos, un primer paso es determinar sus puntos fijos, es decir, los vectores  $\tilde{\vec{x}}$  tales que  $\vec{f}(\tilde{\vec{x}}) = \vec{0}$  y determinar sus estabilidad. Para ello, se analiza la evolución temporal de una pequeña perturbación  $\vec{\eta}(t)$  alrededor de un punto fijo dado, esto es, se escribe  $\vec{x}(t) = \tilde{\vec{x}} + \vec{\eta}(t)$  y dependiendo del tipo de evolución de la perturbación, los puntos fijos pueden catalogarse como: estable, inestable, asintóticamente estable, espirales, centros, etcétera. En el apéndice A, se hace una breve revisión del análisis de estabilidad lineal para sistemas dinámicos  $n$ -dimensionales. En el libro de Strogatz (2018), se encuentra un estudio exhaustivo de los diferentes puntos fijos de sistemas dinámicos 2-dimensional.

Cuando alguno (o varios) de los parámetros del sistema cambia, la estabilidad de los puntos fijos puede también cambiar e incluso, un punto fijo puede desaparecer y otros crearse. Los valores críticos de estos parámetros donde ocurren estos cambios, se conocen como puntos de bifurcación. El análisis de estabilidad lineal funciona cuando  $|\vec{\eta}| \ll 1$ , es decir, la perturbación es pequeña. Si uno desea estudiar la dinámica de los sistemas más allá de los puntos de bifurcación, los términos no lineales ciertamente deben incluirse. Con frecuencia, puede existir una dinámica de gran interés en la vecindad del umbral de bifurcación, y es cuando uno recurre al análisis de estabilidad no lineal débil. Éste estudio se realizan usualmente mediante la teoría de perturbaciones, o bien con la construcción de modelos del tipo (1.1) de dimensión finita. Un ejemplo de este tipo de modelos es el icónico

modelo atmosférico de Lorenz, que fue diseñado para simular la convección de un fluido (Lorenz (1963)). En esta tesis, realizaremos un análisis no lineal débil de la convección doble difusiva.

La convección natural es un proceso en que el movimiento del fluido que inicialmente se encuentra en un estado específico de movimiento, puede cambiar a otro estado de movimiento, no por la acción de fuentes (fuerzas) externas, si no por la presencia de gradientes de propiedades (por ejemplo la temperatura) que generan diferencias de densidades de masa en el fluido. Este proceso es de gran relevancia en la naturaleza pues ocurre en diferentes fenómenos físicos, por ejemplo, la convección en los océanos, la cual puede generar olas (ver De Jong y Battjes (2004)) y por supuesto corrientes marítimas, desempeña un fuerte papel en la transferencia de calor y movimiento atmosférico, que a su vez determina el comportamiento climático a corto plazo, también tiene relevancia en astrofísica, con la convección que ocurre en el interior de las estrellas, y ciertamente tiene aplicación industrial, por ejemplo en el diseño de hornos y en la ventilación de espacios habitables.

La dinámica convectiva en capas de fluido en los que existen dos componentes o propiedades que se difunden a diferentes ritmos se conoce como convección doble difusiva (CDD). El estudio moderno de la CDD, donde la temperatura y salinidad constituían esas dos propiedades que se difundían, desde entonces, a este sistema se le denominó convección termo salina.

El sistema termosalino clásico consiste de una capa de fluido que está entre dos placas horizontales que están separadas una distancia  $h$  y está sujeta a dos gradientes verticales de temperatura y de salinidad. El sistema se mantiene en reposo si esos gradientes son pequeños. Comúnmente en este estado de reposo, la temperatura y la salinidad tienen perfiles lineales en la distancia vertical  $z$ . Hace algunos años, se introdujo una nueva variante al estudio de la CDD, donde el perfil de la salinidad cambió de uno lineal a uno no lineal de la forma tangente hiperbólica, vea el trabajo de Balmforth y cols. (1998) en el cual los cambios a la densidad del sistema se hacen modificando la ecuación hidrodinámica de la misma mediante los perfiles de salinidad, pero se conserva el perfil lineal de la temperatura. Este cambio en el sistema adquiere importancia en distintos campos como en estanques solares (Zangrando y Bertram (1985)) e interiores de estrellas (Spiegel (1969)). Se realiza el análisis de estabilidad lineal y no lineal débil utilizando este nuevo perfil no lineal en la difusión de la salinidad, mediante la teoría de perturbaciones y el uso de modelos tipo Lorenz comparando con los resultados mostrados en (Da Costa, Knobloch, y Weiss (1981)) y (Huppert y Moore (1976)) con el perfil lineal salino a uno no lineal.

# Capítulo 2

## Sistema doble difusivo

En este capítulo se hará una descripción del sistema doble difusivo el cual es el sistema de estudio de este trabajo. Consideraremos una capa de fluido bajo la acción de la gravedad, limitada por dos placas horizontales infinitas que están separadas una distancia  $h$ . La placa inferior se mantiene a una temperatura y salinidad  $T_0 + \Delta T$  y  $\Sigma_0 + \Delta\Sigma$  respectivamente, mientras que en la superior se mantienen a la placa superior se considera  $T_0$  y  $\Sigma_0$  uno de los pioneros en describir estos sistemas fue Veronis en sus trabajos Veronis (1965) y Veronis (1968).



Figura 2.1: Arreglo del problema principal a estudiar.

### 2.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema hidrodinámico, son las siguientes: las ecuaciones de continuidad (2.1), Navier Stokes (2.2) y las ecuaciones de difusión de la temperatura (2.3) y de la salinidad (2.4)

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

Ecuación de Navier-Stokes

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{F}^{ext} \quad (2.2)$$

Ecuaciones de difusividad

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \kappa_T \nabla^2 T \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \Sigma = \kappa_S \nabla^2 \Sigma \quad (2.4)$$

En las ecuaciones arriba descritas  $\rho$  es la densidad del fluido,  $p$  es la presión,  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad,  $\kappa_T$  es el coeficiente de expansión térmico,  $\kappa_S$  es el coeficiente de expansión salino y  $\vec{F}^{ext}$  es la fuerza externa, en este caso la fuerza de la gravedad.  $\vec{F}^{ext}$  tiene unidades de fuerza por unidad de volumen, por lo cual la escribimos de la siguiente forma  $\vec{F}^{ext} = -\rho(T, \Sigma)g\hat{k}$ .

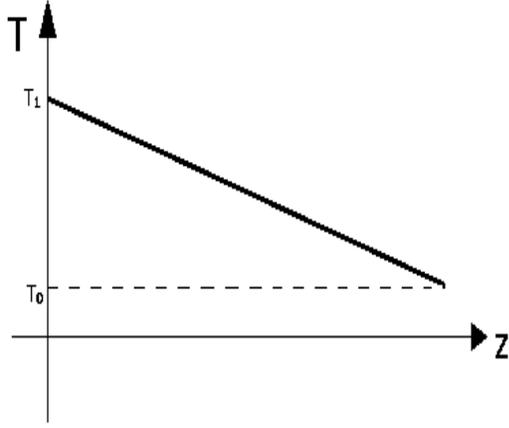
Se dice que el sistema se encuentra en el estado conductivo cuando  $\vec{v} = \vec{0}$  y ninguna variable depende del tiempo. En este estado, la ecuación de difusión de la temperatura se reduce a  $\nabla^2 T = 0$ , como solo existen una diferencia de temperatura en la dirección vertical, este laplaciano se reduce a  $\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$  que tiene por solución un perfil lineal, lo mismo ocurre con la ecuación de difusión de la salinidad. El estado conductivo queda entonces caracterizado por velocidad nula y perfiles de la temperatura y salinidad lineales, a saber

$$\vec{v} = \vec{0} \quad (2.5)$$

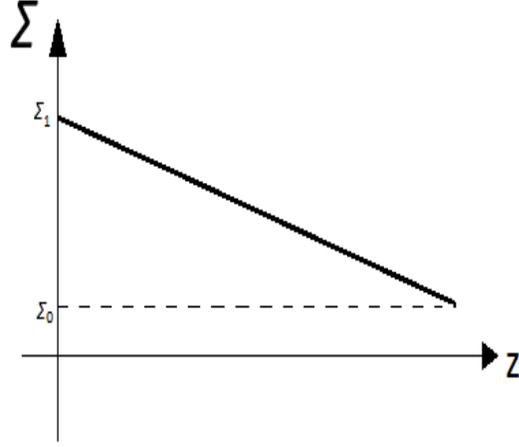
$$T^c(z) = -\frac{\Delta T}{h}z + T_1 \quad (2.6)$$

$$\Sigma^c(z) = -\frac{\Delta \Sigma}{h}z + \Sigma_1 \quad (2.7)$$

donde  $T_1 = T_0 + \Delta T$  y  $\Sigma_1 = \Sigma_0 + \Delta \Sigma$ . Las figuras (2.2a) y (2.2b) ilustran estos perfiles. Usaremos la aproximación de Boussinesq, que nos dice que, si la diferencia en las densidades es muy pequeña, se considerará la densidad constante excepto en el término donde aparece la fuerza externa, en este caso, la de la gravedad. Una explicación formal puede verse en el trabajo de Rajagopal, Ruzicka, y Srinivasa (1996) o en el libro de Chandrasekhar (2013). Tomando en consideración esta aproximación, la ecuación de continuidad se reduce a  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ . Para el caso 2-dimensional, es conveniente introducir la función de corriente que funge como un potencial de velocidad, esta función de corriente  $\Psi(x, z, t)$  está definida como



(a) Perfil lineal de la temperatura



(b) Perfil lineal de la salinidad

$$\vec{v} = \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \quad (2.8)$$

La posición del signo negativo varía de autor en autor, y por supuesto, no afecta la física del sistema; nosotros utilizaremos la indicada en (2.8). Con la introducción de esta función de corriente y el uso de la aproximación de Boussinesq, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, en efecto,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

donde se asume que  $\Psi(x, z, t)$  es tal que las derivadas parciales conmutan.

El estado conductivo, caracterizado por  $\vec{v} = \vec{0}, T^c(z), \Sigma^c(z)$ , que, en el lenguaje de los sistemas dinámicos, puede pensarse como un punto fijo; en términos de la función de corriente, este punto fijo se caracterizaría por  $\Psi = 0, T^c(z), \Sigma^c(z)$ , y procederemos a analizar su estabilidad, agregándole una perturbación de la siguiente manera

$$\Psi(x, z, t) = 0 + \Psi(x, z, t), \quad (2.9)$$

$$T = T^c(z) + \Theta(x, z, t), \quad (2.10)$$

$$\Sigma = \Sigma^c(z) + S(x, z, t). \quad (2.11)$$

o en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} \Psi(x, z, t) \\ T(x, z, t) \\ S(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T^c(z) \\ \Sigma^c(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi(x, z, t) \\ \Theta(x, z, t) \\ S(x, z, t) \end{pmatrix} \equiv \vec{\xi}^c(z) + \vec{\xi}(x, z, t). \quad (2.12)$$

Para analizar el comportamiento de  $\vec{\xi}(x, z, t)$ , es necesario escribir las ecuaciones hidrodinámicas en términos de sus componentes. Comenzamos con la ecuación de difusión térmica (2.3). Introduciendo la definición de función de corriente (2.8) así como también las temperaturas (2.10) y (2.6), es decir, la segunda componente del vector  $\xi(x, z, t)$ , se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T^c(z) + \Theta(x, z, t))}{\partial t} + \left[ \left( \frac{-\partial\Psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) \cdot \nabla \right] (T^c(z) + \Theta(x, z, t)) \\ = \kappa_T \nabla^2 (T^c(z) + \Theta(x, z, t)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

lo que nos conduce a

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\Theta}{\partial z}}_{\equiv J(\Psi, \Theta)} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial T^c(z)}{\partial z}}_{-\frac{\Delta T}{h}} = \kappa_T \nabla^2 \Theta, \quad (2.14)$$

así que la ecuación de difusión se convierte en

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + J(\Psi, \Theta) - \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \kappa_T \nabla^2 \Theta. \quad (2.15)$$

Para escribir la ecuación de difusión salina en términos de  $\Psi$  y  $S$ , introducimos (2.7) y (2.11) en (2.4) para llegar a

$$\frac{\partial S}{\partial t} + J(\Psi, S) - \frac{\Delta\Sigma}{h} \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \kappa_T \nabla^2 S. \quad (2.16)$$

Sigue el turno de la ecuación de Navier-Stokes (2.2), para reescribirla en términos de  $\Psi$ ,  $\Theta$ , y  $S$  nos encontramos con la necesidad de determinar  $\rho(T, \Sigma)$  en el término de la fuerza externa. Siguiendo a Huppert y Moore (1976), consideramos la serie de Taylor de la densidad alrededor de un punto de referencia  $(T_0, \Sigma_0)$ , y retenemos sólo la parte lineal

$$\rho(T, \Sigma) = \rho(T_0, \Sigma_0) + \frac{\partial\rho}{\partial T}(T - T_0) + \frac{\partial\rho}{\partial\Sigma}(\Sigma - \Sigma_0) + \dots \quad (2.17)$$

donde  $\rho_0 = \rho(T_0, \Sigma_0)$ . Denotaremos los coeficientes de expansión térmicos  $\iota$  y salinos  $\beta$ ,

éstos están definidos como

$$\iota = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (2.18)$$

$$\beta = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial S} \quad (2.19)$$

El signo negativo en  $\iota$  se debe a que si la temperatura crece, la densidad de masa disminuye y  $\frac{\partial \rho}{\partial T} < 0$ , el signo deja a  $\iota$  positivo. Como la densidad crece si  $S$  crece, el signo positivo en la expresión de  $\beta$ , garantiza que  $\beta$  quede positiva. La densidad queda finalmente

$$\rho(T, \Sigma) = \rho_0 [1 - \iota(T - T_0) + \beta(\Sigma - \Sigma_0)]. \quad (2.20)$$

Esta expresión de la densidad la sustituiremos en  $\vec{F}^{ext} = -\rho(T, \Sigma)g\hat{k}$ . Si ahora dividimos la ecuación de Navier-Stokes (2.2) entre  $\rho_0$ , esta se reescribe como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{-\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \vec{v} - \hat{k}g(1 - \iota(T - T_0) + \beta(\Sigma - \Sigma_0)). \quad (2.21)$$

La presión es desconocida y se requeriría una ecuación de estado para ésta; sin embargo, tomando el rotacional de (2.21), el término de presión desaparece debido a que

$$\nabla \times \left( \frac{\nabla p}{\rho_0} \right) = \vec{0}$$

Se requiere entonces el rotacional de cada uno de los otros términos que aparecen en (2.21). El rotacional del primer término es

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{v}] \quad \text{donde} \quad \nabla \times \vec{v} = -\hat{j} \nabla^2 \Psi, \quad (2.22)$$

El rotacional del segundo término de (2.21) resulta ser

$$\nabla \times [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = -J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \hat{j} \quad (2.23)$$

donde  $J(f, g)$  es el paréntesis de Poisson. Para el siguiente término tenemos que

$$\nabla \times \left[ \frac{\rho \hat{g}}{\rho_0} \right] = \nabla \times \left[ \frac{-\rho g \hat{k}}{\rho_0} \right] = -\hat{j} \left[ g \iota \frac{\partial \Theta}{\partial x} - g \beta \frac{\partial S}{\partial x} \right]. \quad (2.24)$$

Al fusionar en una expresión todos los términos a los que se le aplicó el rotacional, llegamos a la ecuación siguiente

$$\partial_t \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \iota g \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \beta g \frac{\partial S}{\partial x} + \nu \nabla^4 \Psi. \quad (2.25)$$

Es importante expresar las ecuaciones de Navier-Stokes (2.25), la desviación de la temperatura (2.15) y salinidad (2.16) en términos de variables adimensionales con el fin de determinar la importancia de las combinaciones de los parámetros en el comportamiento del sistema. Para adimensionalizar, introducimos variables adimensionales del tiempo, la distancia y la temperatura de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{x}{h} & \text{entonces} & \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ \hat{z} &= \frac{z}{h} & \text{similarmente} & \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \\ \hat{t} &= \frac{\kappa_T}{h^2} t & \text{conduce a} & \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\kappa_T}{h^2} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \\ \nabla^2 &= \frac{1}{h^2} \hat{\nabla}^2 & \text{también} & \quad \hat{\Psi} = \frac{\Psi}{\kappa_T} \\ \hat{\Theta} &= \frac{\Theta}{\Delta T} & \text{y} & \quad \hat{S} = \frac{S}{\Delta \Sigma}\end{aligned}$$

donde el símbolo  $\hat{x}$  representa que es sin dimensiones. De (2.15), (2.16) y (2.25) aplicando las expresiones anteriores llegamos a

$$\begin{aligned}\frac{\kappa_T \Delta T}{h^2} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\kappa_T \Delta T}{h^2} \hat{J}(\hat{\Psi}, \hat{\Theta}) - \frac{\kappa_T \Delta T}{h^2} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{x}} &= \frac{\kappa_T \Delta T}{h^2} \hat{\nabla}^2 \hat{\Theta}, \\ \frac{\kappa_T \Delta \Sigma}{h^2} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{t}} + \frac{\kappa_T \Delta \Sigma}{h^2} \hat{J}(\hat{\Psi}, \hat{S}) - \frac{\kappa_T \Delta \Sigma}{h^2} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{x}} &= \frac{\kappa_T \Delta \Sigma}{h^2} \hat{\nabla}^2 \hat{S}, \\ \frac{\kappa_T^2}{h^4} \frac{\partial \hat{\nabla}^2 \hat{\Psi}}{\partial \hat{t}} + \frac{\kappa_T^2}{h^4} \hat{J}(\hat{\Psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\Psi}) - \frac{\nu g \Delta T}{h} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \hat{x}} + \frac{\beta g \Delta \Sigma}{h} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{x}} &= \frac{\kappa_T \nu}{h^4} \hat{\nabla}^4 \hat{\Psi}.\end{aligned}$$

donde se introdujeron las definiciones

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\nu}{\kappa_T}, \\ \tau &= \frac{\kappa_S}{\kappa_T}, \\ R_T &= \frac{g \nu \Delta T h^3}{\kappa_T \nu}, \\ R_S &= \frac{g \nu \Delta \Sigma h^3}{\kappa_T \nu},\end{aligned}$$

$\sigma$  es el número de Prandtl, que describe la relación entre la difusión de cantidad de movimiento dado por la viscosidad cinemática  $\nu$ , y la difusión del calor,  $\kappa_T$ , por conducción.  $\tau$  el número de Lewis, que define la relación entre las difusividades salina y térmica

y comúnmente se usa para caracterizar flujos en donde hay procesos simultáneos de transferencia de calor y sal por convección.  $R_T$  y  $R_S$  son los números de Rayleigh térmico y salino, respectivamente; estos pueden interpretarse conceptualmente como el parámetro que mide la importancia relativa entre los efectos de las fuerzas de flotabilidad y los efectos de las fuerzas de viscosidad y de la conducción térmica. En conclusión las ecuaciones hidrodinámicas de Boussinesq que gobiernan la evolución de las perturbaciones  $\psi(x, z, t)$ ,  $\Theta(x, z, t)$  y  $S(x, z, t)$  son

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^{-1}[\partial_t \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi)] &= R_T \partial_x \Theta - R_S \partial_x S + \nabla^4 \Psi, \\ \partial_t \Theta + J(\Psi, \Theta) &= \partial_x \Psi + \nabla^2 \Theta, \\ \partial_t S + J(\Psi, S) &= \partial_x \Psi + \tau \nabla^2 S\end{aligned}} \quad (2.26)$$

El sistema de ecuaciones anterior también se puede escribir de forma compacta de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi} = \left( \underline{M} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L} \right) \vec{\xi} = \hat{N}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) \quad (2.27)$$

donde

$$\vec{\xi}(x, z, t) = \begin{pmatrix} \Psi(x, z, t) \\ \Theta(x, z, t) \\ S(x, z, t) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\hat{N}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \\ J(\Psi, \Theta) \\ J(\Psi, S) \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

contiene los términos no lineales del sistema

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} \nabla^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

acompaña a las derivadas temporales del sistema y

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\nabla^4 & R_T \partial_x & -R_S \partial_x \\ \partial_x & -\nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\tau \nabla^2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

es un operador (de derivadas espaciales) matricial lineal. Es este sistema (2.26) el sistema básico con el que trabajamos en esta tesis.

## 2.2. Análisis de estabilidad lineal

En esta sección realizaremos el análisis de estabilidad lineal del sistema de ecuaciones hidrodinámicas (2.26) que nos describen el comportamiento espacio - temporal de la perturbación  $(\Psi, \Theta, S)$ . Comenzamos considerando las expresiones linealizadas de (2.26) alrededor del estado conductivo, es decir, las ecuaciones en las que no aparecen los términos no lineales generados por los términos donde aparecen los paréntesis de Poisson.

$$\sigma^{-1}[\partial_t \nabla^2 \Psi] = R_t \partial_x \Theta - R_s \partial_x S + \nabla^4 \Psi \quad (2.32)$$

$$\partial_t \Theta = \partial_x \Psi + \nabla^2 \Theta \quad (2.33)$$

$$\partial_t S = \partial_x \Psi + \tau \nabla^2 S \quad (2.34)$$

Siguiendo a Huppert y Moore (1976), proponemos las siguientes soluciones que satisfacen las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= A \sin \pi \alpha x \sin n \pi z e^{pt}, \\ \Theta(x, z, t) &= B \cos \pi \alpha x \sin n \pi z e^{pt}, \\ S(x, z, t) &= C \cos \pi \alpha x \sin n \pi z e^{pt}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

que cumplen

$$\Psi = \partial_{zz}^2 \Psi = \Theta = S = 0 \quad (z = 0, 1). \quad (2.36)$$

Para la construcción de las soluciones anteriores se sigue una idea esencial de expandir las variables  $\Psi, \Theta, S$  en una serie infinita de funciones ortogonales (en nuestro caso, usaremos la base de Fourier), que se trunca conservando los modos mas bajos y en la propuesta se dejan tres modos, como se observa en (2.35) para mas detalles véase Howard y Krishnamurti (1986) y Joseph (1998). La dependencia temporal es una exponencial  $e^{pt}$ , ahí,  $p$  es una cantidad incógnita, que puede ser real o imaginaria. Los coeficientes  $A, B$  y  $C$ , tienen valores desconocidos, para intentar determinarlos, sustituimos (2.35) en las ecuaciones de Boussineq (2.26), que nos conducen a

$$-\frac{p}{\sigma} \pi^2 (n^2 + \alpha^2) A - R_T \pi \alpha B + R_S \pi \alpha C - \pi^4 (n^2 + \alpha^2)^2 A = 0 \quad (2.37)$$

$$pB + \pi \alpha A + \pi^2 (n^2 + \alpha^2) B = 0 \quad (2.38)$$

$$pC + \pi \alpha A + \tau \pi^2 (n^2 + \alpha^2) C = 0 \quad (2.39)$$

la ecuación anterior también se puede escribir de forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\pi^2(n + \alpha) \left[ \frac{p}{\sigma} + \pi^2(n + \alpha) \right] & -R_T \pi \alpha & R_S \pi \alpha \\ \pi \alpha & p + \pi^2(n^2 + \alpha^2) & 0 \\ \pi \alpha & 0 & p + \tau \pi^2(n^2 + \alpha^2) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (2.40)$$

De (2.38) y (2.39) podemos obtener las expresiones

$$B = \frac{-\pi \alpha A}{p + \pi^2(n^2 + \alpha^2)} \quad (2.41)$$

$$C = \frac{-\pi \alpha A}{p + \tau \pi^2(n^2 + \alpha^2)} \quad (2.42)$$

Que nos ayudarán a dejar una sola incógnita de amplitud en lugar de tres. Sustituyendo estas últimas expresiones en (2.37) nos lleva a

$$\frac{-p}{\sigma} \pi^2(n^2 + \alpha^2) + \frac{R_T(\pi \alpha)^2}{p + \pi^2(n^2 + \alpha^2)} - \frac{R_S(\pi \alpha)^2}{p + \tau \pi^2(n^2 + \alpha^2)} - \pi^4(n^2 + \alpha^2)^2 = 0$$

Al resolver para  $R_T$

$$R_T = \frac{p + \pi^2(n^2 + \alpha^2)}{\pi^2 \alpha^2} \left[ \frac{(\pi \alpha)^2 R_S}{p + \tau \pi^2(n^2 + \alpha^2)} + \pi^4(n^2 + \alpha^2)^2 + \frac{p \pi^2(n^2 + \alpha^2)}{\sigma} \right] \quad (2.43)$$

Si denotamos una nueva variable  $k^2 = \pi^2(n^2 + \alpha^2)$  y la introducimos en (2.40) el sistema tendrá solución no trivial si  $\det M = 0$  es decir

$$\det \begin{pmatrix} -k^2 \left( \frac{p}{\sigma} + k^2 \right) & -\pi \alpha R_T & \pi \alpha R_S \\ \pi \alpha & p + k^2 & 0 \\ \pi \alpha & 0 & p + \tau k^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.44)$$

que es equivalente al polinomio

$$p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (2.45)$$

donde  $p$  es una de las incógnitas a determinar y

$$a_2 = k^2(1 + \sigma + \tau) \quad (2.46)$$

$$a_1 = \frac{(\pi\alpha)^2}{k^2}\sigma(R_S - R_T) + k^4(\sigma + \tau(1 + \sigma)) \quad (2.47)$$

$$a_0 = \sigma(k^6\tau + (\alpha\pi)^2)(R_S - R_T\tau) \quad (2.48)$$

Si  $p = 0$ , la solución propuesta en (2.35) sería independiente del tiempo y nos encontraríamos en un estado estacionario. Para tener  $p = 0$ , en la ecuación cúbica (2.45), debe tenerse  $a_0 = 0$ , de donde se desprende que

$$R_T^{SS} = \frac{R_S}{\tau} + \frac{k^6}{(\pi\alpha)^2} \quad (2.49)$$

$R_T^{SS}$  define la rama estacionaria, para la cual, si  $R < R_T^{SS}$  el sistema es estable ante perturbaciones, es decir, la perturbación decaería y regresaríamos al estado conductivo o de reposo; si  $R > R_T^{SS}$  se tendría el inicio del estado convectivo, donde la perturbación ya no decae, lo que generará movimiento en el sistema.

Si  $p = i\omega_0$ , nos encontramos en la rama oscilatoria; la ecuación cúbica (2.45), se convertiría en

$$(i\omega_0)^3 + a_2(i\omega_0)^2 + a_1(i\omega_0) + a_0 = 0 \quad (2.50)$$

que al separar parte real e imaginaria nos conduce a dos relaciones:  $a_0 = a_1a_2$  y  $a_1 = \omega_0^2$ , la primera, al resolverla para  $R_T$  nos proporciona la relación que define a la rama oscilatoria

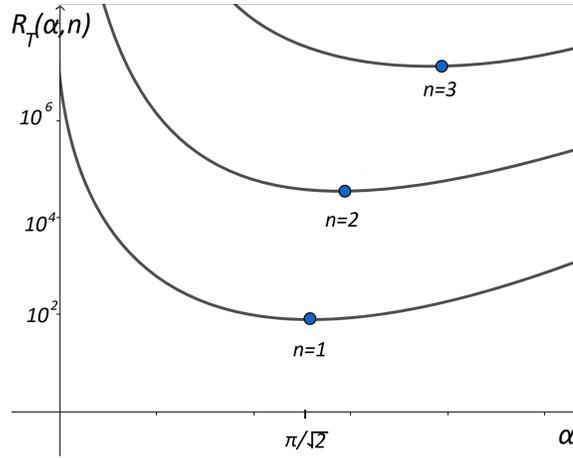
$$R_T^{osc} = \frac{\sigma + \tau}{\sigma + 1}R_S + \frac{k^6}{(\pi\alpha)^2} \frac{(1 + \tau)(\sigma + \tau)}{\sigma}. \quad (2.51)$$

Es  $R_T^{osc}$  quien marca el umbral de la convección oscilatoria. La segunda relación,  $a_1 = \omega_0^2$ , proporciona una expresión para la frecuencia

$$\omega_0^2 = \frac{(\pi\alpha)^2\sigma}{k^2}(R_S - R_T) + k^4(\sigma + \tau(1 + \sigma)) \quad (2.52)$$

Recordemos que en  $k^2 = \pi^2(n^2 + \alpha^2)$  aparecen dos cantidades (números de onda) desconocidos hasta ahora, procederemos a determinarlas. Usando (2.49) podemos graficar  $R_T^{SS}$ , que se muestra en la figura (2.3)

Usualmente, en un experimento, se fija  $R_s$  y se va incrementando el valor de  $R_T$ . La


 Figura 2.3: Umbral crítico de  $R_T$  para diferentes valores de  $n$ 

primera curva que se encontrará al incrementar el valor de  $R_T$  será con  $n = 1$ . Ese es el valor que se escoge. Y el mínimo de esa curva (con  $n = 1$ ) se encuentra resolviendo  $\frac{dR_T}{d\alpha} = 0$  para  $\alpha$ , y el valor que se elige es entonces  $\alpha_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , que es un valor mínimo que utilizaremos. De este modo, usando  $n = 1$  y  $\alpha_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , las expresiones de los números de Rayleigh que definen las ramas estacionaria y oscilatoria quedan

$$R_T^{OSC}(\alpha) = \frac{\sigma + \tau}{\sigma + 1} R_s + \frac{27\pi^4}{4} \frac{(1 + \tau)(\sigma + \tau)}{\sigma} \quad (2.53)$$

$$R_T^{SS}(\alpha) = \frac{R_s}{\tau} + \frac{27\pi^4}{4} \quad (2.54)$$

También existe un punto de codimensión dos que es donde se une la rama estacionaria con la oscilatoria

$$R_s^{c2} = \frac{k^6(1 + \sigma)\tau^2}{(\pi\alpha)^2\sigma(1 - \tau)} \quad (2.55)$$

$$R_T^{c2} = \frac{k^6(\sigma + \tau)}{(\alpha\pi)^2\sigma(1 - \tau)} \quad (2.56)$$

Las ramas estacionaria y oscilatoria, así como la ubicación del punto de codimensión dos, se muestran en el diagrama de estabilidad de la figura 2.4. Los estados del sistema abajo de esas ramas, representan estados (conductivos) que son estables ante perturbaciones, los estados que están arriba de esas ramas son inestable. Si se cruza el umbral con  $R_s < R_s^{c2}$ , se iniciará la convección que será estacionaria y que ya no decaerá. Si  $R_s > R_s^{c2}$ , se iniciará un movimiento convectivo oscilatorio que también ya no decaerá al estado conductivo.

Cuando se haga el análisis de estabilidad no lineal débil, lo que buscaremos analizar

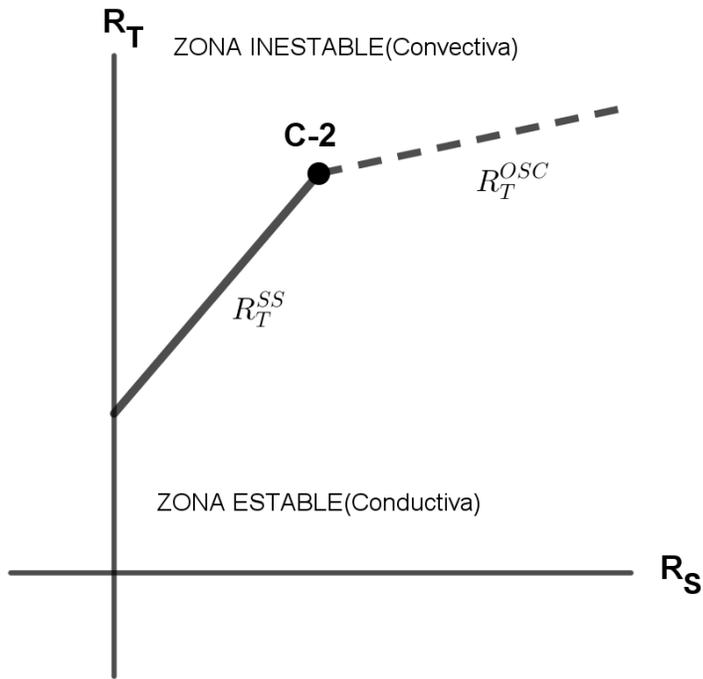


Figura 2.4: Diagrama de análisis de estabilidad lineal

es el comportamiento de las perturbaciones  $\Psi$ ,  $\Theta$  y  $S$  en una pequeña vecindad cercana a estas ramas que se muestran en el diagrama de estabilidad. El análisis de estabilidad no lineal débil se puede hacer por diferentes técnicas y en nuestra investigación mostraremos el procedimiento mediante perturbaciones que nos lleva a las formas normales de la amplitud y la creación de modelos que simplifican el sistema y nos ayudan a realizar un análisis numérico mediante la integración con el método R-K.

Lo que expondremos en la siguiente sección es el análisis no lineal débil vía la teoría de perturbaciones, que conducen a las ecuaciones de amplitud (formas normales) para el sistema clásico de convección doble difusiva. Estas formas normales fueron estudiadas por (Deane, Knobloch, y Toomre (1987), Knobloch (1986)) y las incluimos como ilustración del método de perturbaciones así como para revisar la fenomenología que se encuentra justo arriba de las ramas de estabilidad tanto oscilatoria como estacionaria.

## 2.3. Formas normales

Al llevar a cabo el análisis de estabilidad no lineal débil mediante el método de perturbaciones surgen las formas normales para la amplitud  $A$ , recordemos de la sección anterior las otras dos amplitudes podemos escribirlas en términos de una sola amplitud relevante, las formas normales nos darán un panorama general del comportamiento del sistema alrededor de las ramas que ya conocemos que aparecen en el diagrama de estabilidad lineal de la figura (2.4)

### 2.3.1. Rama estacionaria

Cuando hacemos mención a que nos encontramos en la rama estacionaria o estado estacionario, tomaremos las propiedades que ya conocemos mediante el análisis de estabilidad lineal mostradas en las ecuaciones de la propuesta de solución con  $p = 0$  (2.35) y el valor de  $R_T^{SS}$  (2.49), son a estas mismas a las cuales les agregaremos perturbaciones para encontrar una forma de indagar la amplitud  $A$  hasta el momento desconocida, entonces escribiremos la formulación de la ecuación de amplitud cerca del umbral del estado estacionario :

$$R_T = R_T^{SS} + \eta R_1^{SS} + \eta^2 R_2^{SS} + \dots \quad (2.57)$$

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Theta \\ S \end{pmatrix} = \eta \vec{\xi} + \eta^2 \vec{\xi}_2 + \dots \quad (2.58)$$

Donde  $\eta$  representa el parámetro de pequeñez y la amplitud depende del tiempo  $A = A(t)$ . Al sustituir el anast (2.35) en las ecuaciones hidrodinámicas no lineales (2.26) encontramos diferentes expresiones orden por orden de  $\eta$ :

A primer orden

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_1 = \vec{0} \quad (2.59)$$

Para segundo orden

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_2 = \vec{F}_2 \quad (2.60)$$

Al tercer orden

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_3 = \vec{F}_3 \quad (2.61)$$

donde

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} -\nabla^4 & R_T \partial_x & R_S \partial_x \\ \partial_x & -\nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\tau \nabla^2 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

A tercer orden nos da la ecuación de amplitud

$$\tau_0 \frac{dA}{dt} = \epsilon A - g_3 A |A|^2 \quad (2.63)$$

donde

$$\epsilon = \frac{(R_T - R_T^{SS})}{R_T^{SS}} \quad (2.64)$$

es una distancia relativa y

$$g_3 = \frac{\alpha \pi^2}{8k^2} \left[ R_T - \frac{R_s}{\tau^3} \right]. \quad (2.65)$$

Los puntos fijos de (2.63) se pueden clasificar como:

$$\tilde{A} = 0, \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}. \quad (2.66)$$

Cuando  $g_3 > 0$  y  $\epsilon > 0$  ocurre una bifurcación hipercrítica como se muestra en la figura (2.5).

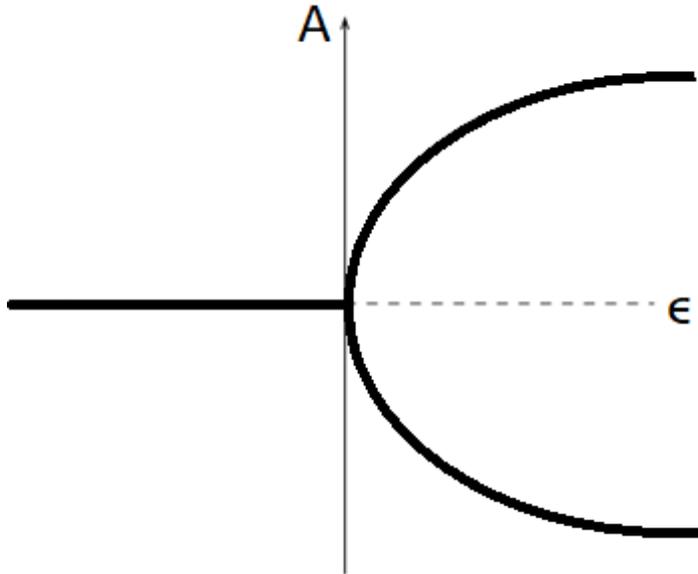


Figura 2.5: Bifurcación para valores de  $\epsilon > 0$  y  $g_3 > 0$  en la rama estacionaria

Cuando los valores  $g_3 < 0$  y  $\epsilon < 0$  ocurren, la bifurcación es una subcrítica como se muestra en la figura (2.6).

Cuando  $g_3 < 0$  el grado cúbico de la ecuación no es suficiente para garantizar ramas estables para  $\epsilon > 0$  y debemos agregar términos de orden quinto y la bifurcación tomara

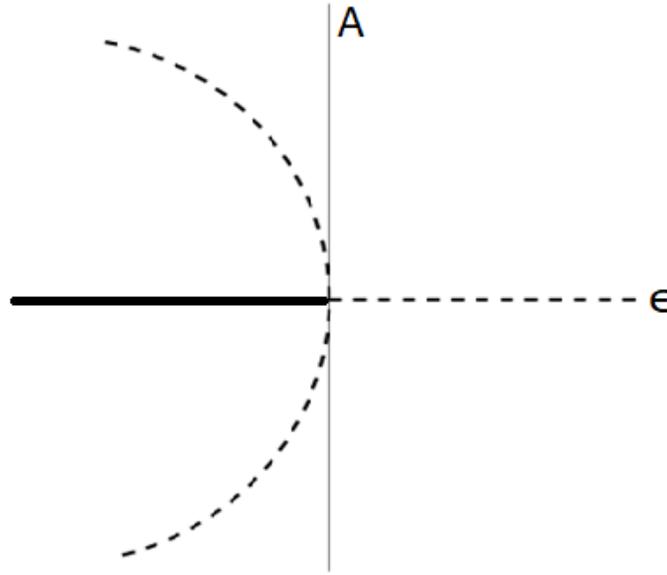


Figura 2.6: Bifurcación para valores de  $g_3 < 0$  y  $\epsilon < 0$  en la rama estacionaria

la forma como en la figura (2.7).

$$\frac{dA}{dt} = \alpha A - g_3 A |A|^2 - dA^5 \quad (2.67)$$

Notamos que existe también un punto tricrítico que es donde ocurre el cambio de bifurcación en la rama estacionaria como se muestra en la figura (2.8) que ocurre antes de llegar por supuesto al punto de codimensión en  $g_3 = 0$ .

### 2.3.2. Rama oscilatoria

Para formulación de la ecuación de amplitud cerca de la rama oscilatoria lo haremos de manera similar que para la rama estacionaria, utilizando teoría de perturbaciones de tiempos múltiples, agregando perturbaciones pequeñas a  $R_T^{OSC}$  (2.51) y cambiando la propuesta de solución para las ecuaciones de Boussinesq que gobiernan el sistema quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= \frac{i \sin \pi z}{2} [A_R e^{pt-iz} - A_L e^{pt+iz} + c.c.], \\ \Theta(x, z, t) &= \frac{\sin \pi z}{2} [B_R e^{pt-iz} + B_L e^{pt+iz} + c.c.], \\ S(x, z, t) &= \frac{\sin \pi z}{2} [C_R e^{pt-iz} + C_L e^{pt+iz} + c.c.]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

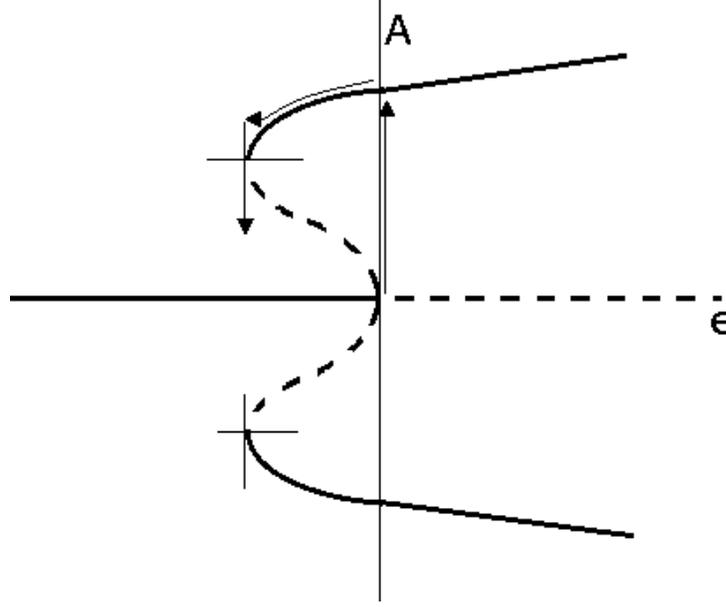


Figura 2.7: Bifurcación para orden quinto en la rama estacionaria donde se presentan brinco e histéresis

Agregamos las pequeñas perturbaciones a los valores conocidos anteriormente

$$R_T = R_T^{OSC} + \eta R_1^{OSC} + \eta^2 R_2^{OSC} + \dots \quad (2.69)$$

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Theta \\ S \end{pmatrix} = \eta \vec{\xi} + \eta^2 \vec{\xi}_2 + \dots \quad (2.70)$$

$$p = \omega_0 + \eta p_1 + \eta^2 p_2 \quad (2.71)$$

recordando que  $\eta$  es un parámetro de pequeñez, es importante introducir otro tiempo, existirá un tiempo lento y uno rápido pues así eliminaremos los términos seculares que podrían aparecer en las soluciones, la amplitud solo dependerá del tiempo lento, el nuevo tiempo lo denotaremos como

$$t' = pt \quad (2.72)$$

de donde notamos que

$$\frac{\partial}{\partial t} = p \frac{\partial}{\partial t'} = (\omega_0 + \eta p_1 + \dots) \frac{\partial}{\partial t'} \quad (2.73)$$

Al introducir la nueva propuesta de solución en el sistema de ecuaciones hidrodinámicas de Boussinesq que nos definen el sistema nos dará diferentes expresiones a diferentes ordenes de  $\eta$ .

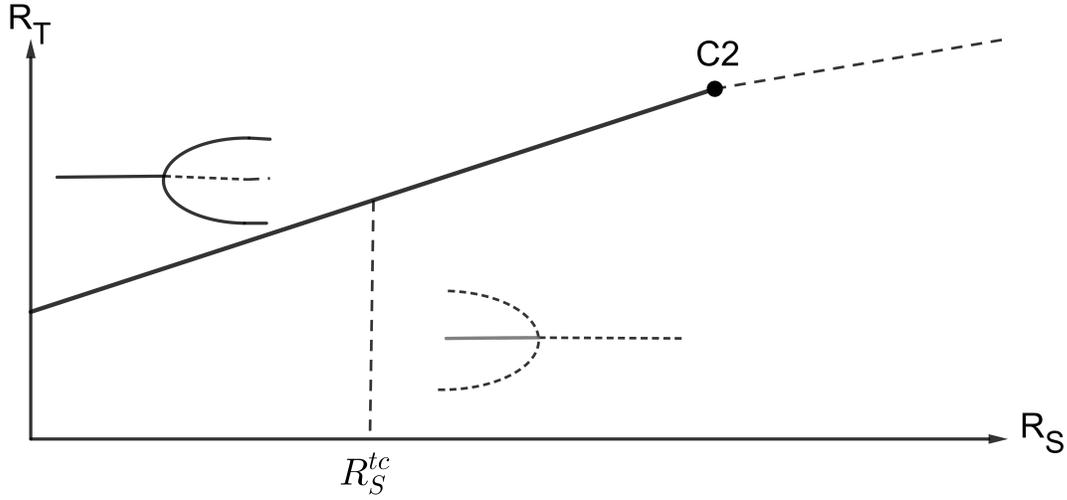


Figura 2.8: Punto tri-critico en la rama estacionaria

A primer orden

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_1 = \vec{0} \quad (2.74)$$

Para segundo orden

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_2 = \vec{F}_2 \quad (2.75)$$

Al tercer orden

$$\mathcal{L}_0 \vec{\xi}_3 = \vec{F}_3 \quad (2.76)$$

y así continuamos hasta el quinto donde

$$\mathcal{L}_0 = \omega_0 \begin{pmatrix} \frac{\nabla^2}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_t + \begin{pmatrix} -\nabla^4 & R_T \partial_x & R_S \partial_x \\ \partial_x & -\nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\tau \nabla^2 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

A quinto orden nos percatamos que las ecuaciones de amplitud se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\dot{A}_l = (\lambda + aA_r^2 + bA^2 + cA_l^4 + dA^2 A_r^2 + eA^4) A_l + O(7) \quad (2.78)$$

$$\dot{A}_r = (\lambda + aA_l^2 + bA^2 + cA_l^4 + dA^2 A_l^2 + eA^4) A_r + O(7) \quad (2.79)$$

donde  $A_l$  y  $A_r$  son las amplitudes de ondas viajeras hacia la izquierda y derecha respectivamente. Encontramos cinco puntos fijos de las formas normales anteriores

- $(0,0)$  que es la solución conductiva.
- $(A_l, 0)$  onda viajera hacia la izquierda.
- $(0, A_r)$  onda viajera hacia la derecha.
- $(\frac{A}{\sqrt{2}}, \frac{A}{\sqrt{2}})$  onda estacionaria.
- $(A_l, A_r)$  ondas moduladas donde  $A_l \neq A_r$ .

Los diagramas de estabilidad ya han sido previamente estudiados y analizados en Deane y cols. (1987) y Knobloch (1986)

# Capítulo 3

## Construcción de los modelos y cambio de perfil

Como se había mencionado en el capítulo anterior una de las maneras de hacer el análisis de estabilidad no lineal débil es mediante la creación de modelos que simplificaran los sistemas de ecuaciones que nos describen el sistema y uno de los mas conocidos para sistemas dinámicos es el modelo atmosférico de Lorenz que fue formulado por el meteorólogo Lorenz al hacer simulaciones numéricas en su computadora logró obtener un modelo simplificado que describía la convección atmosférica incluyendo el comportamiento de atractor aperiódico y caótico. De una manera similar construiremos modelos que describan la dinámica del sistema que cumpla las condiciones de frontera impuestas al arreglo como aparecen en Da Costa y cols. (1981).

### 3.1. Modelo perfil lineal

Tomando en cuenta un arreglo lineal para la salinidad de igual manera que para la temperatura como en la figura (2.1) y las ecuaciones (2.26) al utilizar un arreglo parecido al ansatz (2.35) pero agregando más modos de Fourier resulta en (3.1) donde estos modos que se agregan son los resultantes de hacer teoría de perturbaciones, así proyectando sobre los modos podemos llegar a la construcción de un modelo simple de la forma (3.2)

$$\begin{aligned}\Psi(x, z, t) &= A \sin \pi \alpha x \sin n \pi z e^{pt} \\ T(x, z, t) &= B \cos \pi \alpha x \sin n \pi z e^{pt} - C \sin 2z\pi \\ S(x, z, t) &= D \cos \pi \alpha x \sin n \pi z e^{pt} - E \sin 2\pi z\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 a' &= \sigma[-a + br_T - dr_S] \\
 b' &= -b + a(1 - c) \\
 c' &= \bar{\omega}[-c + ab] \\
 d' &= -\tau d + a(1 - e) \\
 e' &= \bar{\omega}[-\tau e + ad]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde  $\bar{\omega} = \frac{-4\pi^2}{K^2}$ ,  $r_T = R_T \frac{\kappa^2}{K^6}$ ,  $r_S = R_S \frac{\kappa^2}{K^6}$  y  $K^2 = \kappa^2 + \pi^2$  y realizando el análisis de estabilidad lineal del modelo obtenemos los números de Rayleigh térmicos para la parte estacionaria y oscilatoria

$$R_T^e = \frac{K^6}{(\pi\alpha)^2} + \frac{R_S}{\tau} \tag{3.3}$$

$$R_T^o = \frac{(\tau + 1)(\sigma + \tau)}{\sigma} \frac{K^6}{(\pi\alpha)^2} + \left(\frac{\sigma + \tau}{\sigma + 1}\right) R_S \tag{3.4}$$

también encontramos un número de onda mínimo

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.5}$$

El punto de codimensión dos ocurre en:

$$R_S^{c2} = \frac{K^6}{(\pi\alpha)^2} \frac{(1 + \sigma)\tau^2}{\sigma(1 - \tau)} \tag{3.6}$$

$$R_T^{c2} = \frac{K^6}{(\pi\alpha)^2} \frac{(\sigma + \tau)}{\sigma(1 - \tau)} \tag{3.7}$$

Lo que nos lleva a un diagrama de estabilidad lineal como se muestra en la figura (3.1):

Podemos encontrar el punto tricrítico usando la ecuación (2.65) y (3.3) que nos conduce a

$$R_S = \frac{-K^6}{\alpha^2} \left( \frac{\tau^3}{\tau^2 - 1} \right). \tag{3.8}$$

Al realizar un gráfico de la ecuación (3.8) nos resulta en la figura (3.2):

Cuando tomamos  $\tau = 0.4$  y nos vamos acercando al punto tricrítico entonces la amplitud va creciendo como se puede observar en la figura (3.3), aquí usamos  $r_S = 0.07$ ,  $r_T = 1.19$  en rojo que es muy cerca del punto tricrítico,  $r_S = 0.07$ ,  $r_T = 1.30$  en verde también  $r_S = 0.04$  y  $r_T = 1.50$  en color morada :

Como se puede observar en el sistema (3.2) es compatible con lo descrito en Da Costa y cols. (1981) para poder observar algunas de las propiedades del sistema integramos

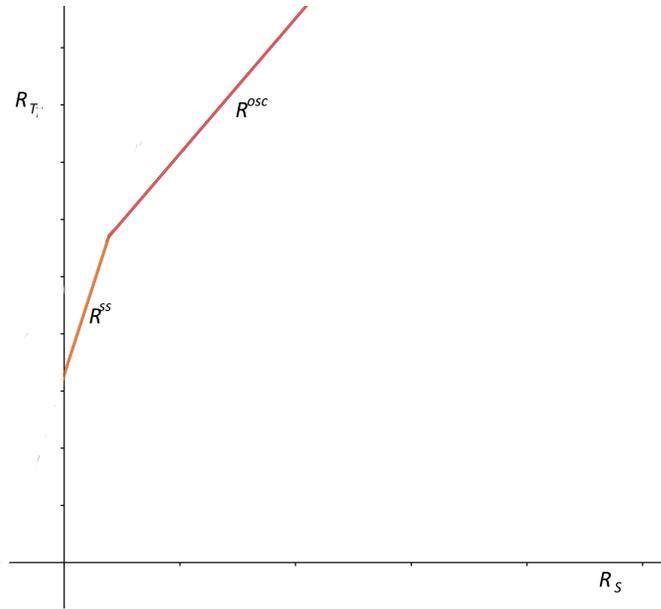


Figura 3.1: Diagrama de análisis de estabilidad lineal

con el método de Runge Kutta a orden cuatro y entonces observamos por ejemplo como cambia el coeficiente de amplitud  $d$  cuando variamos  $r_T$  pero se dejan fijos los valores  $r_S = 0.5, \tau = 0.4, \omega = 2.6$  y  $\sigma = 10$  como se muestra en la figura (3.4):

En la figura (3.4) se muestran los cambios para el coeficiente  $d$  en el tiempo cuando mantenemos los valores fijos de  $r_S = 0.5, \sigma = 10, \tau = 0.4, \omega = 2.6$  pero el valor de  $r_T$  lo variamos yendo de  $r_T = 1.9$  en color verde,  $r_T = 2$  en morado,  $r_T = 2.5$  en azul cielo,  $r_T = 5$  en naranja y para  $r_T = 15$  se representa en amarillo, observamos que mientras aumentamos el valor de  $r_T$  el periodo de la onda tiende a infinito pero eso no significa que se anule la oscilación.

Las oscilaciones caen en ciclos límite que crecen en cuanto vamos aumentando el valores de  $r_T$  hasta que se vuelven en orbitan heteroclínicas (véase apéndice B )como se muestra en la figura(3.5) en morado para el valor de  $r_T = 2$  se forma un ciclo límite y crece y forma otro ciclo límite cuando  $r_T = 15$  hasta crearse las orbitas heteroclínicas para  $r_s = 0.5$ .

En la figura (3.6) podemos observar la creación del ciclo límite de la figura (3.5) cuando  $r_T = 2$  haciendo un acercamiento para observar los ciclos con claridad en el plano a-d.

Notamos que cuando cambiamos el valor a  $r_S = 4, \omega = 2.667, \tau = 0.4$  variamos los valores de  $r_T$  como se muestra en la figura (3.7) oscilando el coeficiente  $a$  en el tiempo teniendo oscilaciones simétricas cuando  $r_T = 5.853$  (en morado) pero al aumentar el valor a  $r_T = 5.87$  que se muestra en color verde dejan de serlo.

Cuando  $r_T = 7.8, r_S = 6, \omega = 2.667, \tau = 0.4, \sigma = 10$  en el plano a-d se pierden los ciclos límite que se formaban con claridad para los valores de  $r_T = 4$  pues se pierde la estabilidad

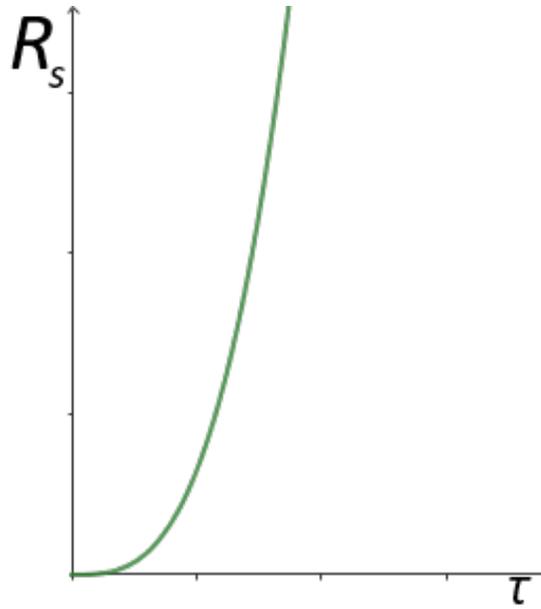


Figura 3.2: Número de Rayleigh salino  $R_S$  en función de  $\tau$

y las trayectorias se alejan a un punto fijo, como se muestra en la figura(3.8) y entonces aparecen orbitas heteroclínicas.

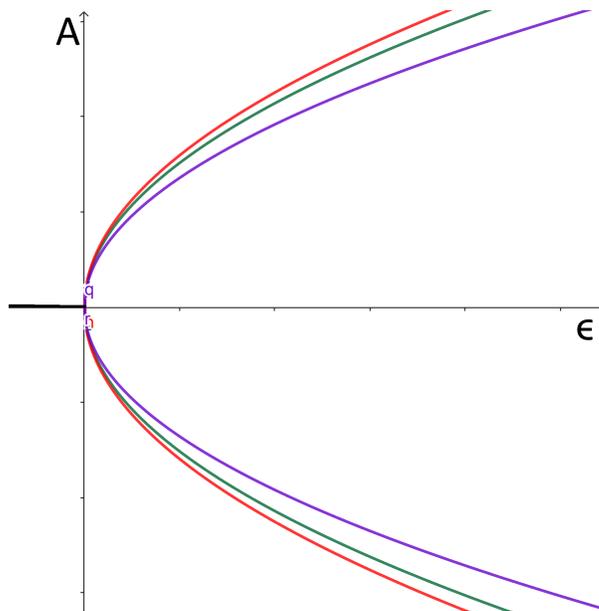


Figura 3.3: Amplitud cuando nos acercamos al punto tricrítico tomando  $\tau = 0.4$

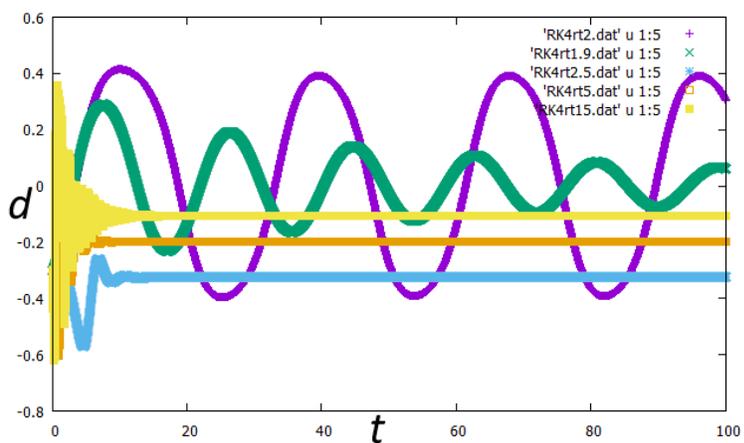


Figura 3.4: Cambios en las oscilaciones del coeficiente  $d$  cuando variamos  $r_T$

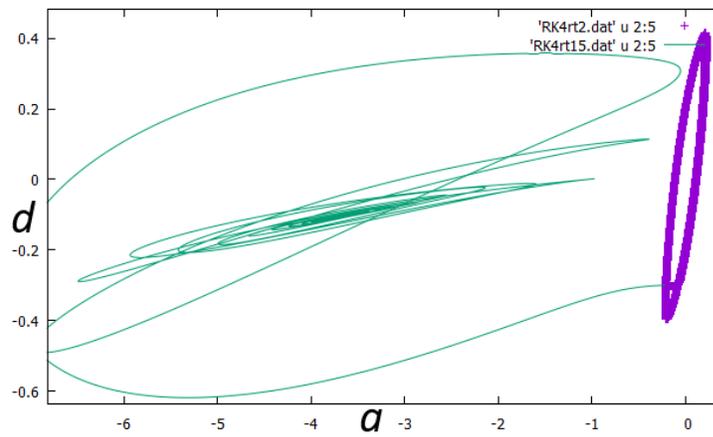


Figura 3.5: Cambio en los ciclos límite con la variación  $r_T$

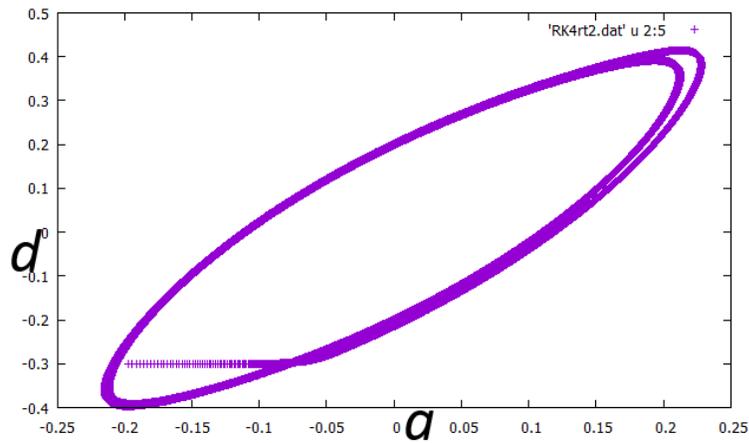


Figura 3.6: Ciclo límite cuando  $r_T = 2$  perfil lineal para  $r_s = 0.5$

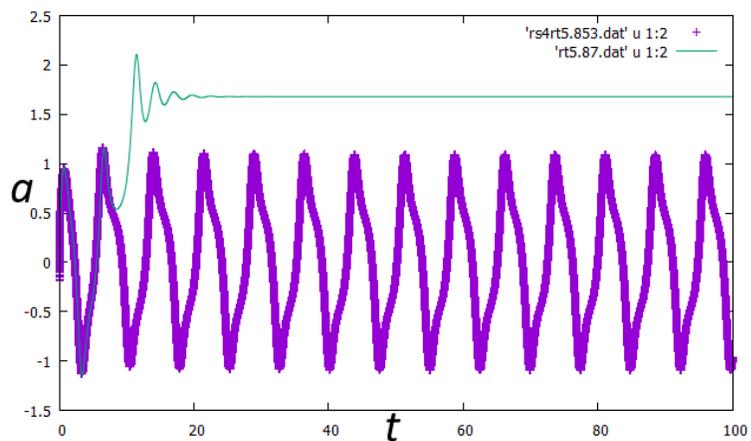


Figura 3.7: Cambio en las oscilaciones para  $r_s = 4$  variando  $r_T$  en el perfil lineal

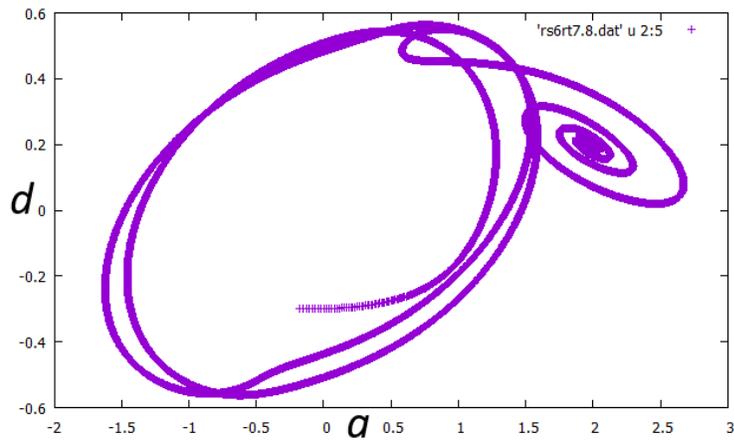


Figura 3.8: Ciclo límite y punto fijo aislado para  $r_s = 6$  con un perfil lineal

### 3.2. Modelo perfil salino no lineal

Cambiando el perfil salino de uno lineal a uno no lineal que se justifica en distintos fenómenos naturales, como los perfiles salinos en corrientes marinas a grandes profundidades y la creación de rocas ígneas cuando el magma volcánico endurece, siendo monótonamente decreciente y cumpliendo las condiciones de frontera.

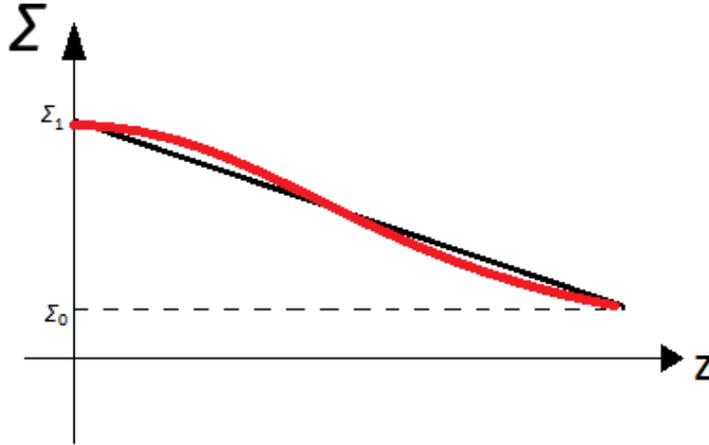


Figura 3.9: Perfil no lineal de la salinidad aparece en color rojo.

Al quitar dimensiones de la ecuación 2.16 encontramos un cambio al tomar en cuenta un perfil salino no lineal y entonces se reescribe como

$$\partial_t S + J(\Psi, S) = \partial_z S^{(c)} \partial_x \Psi + \tau \nabla^2 S \quad (3.9)$$

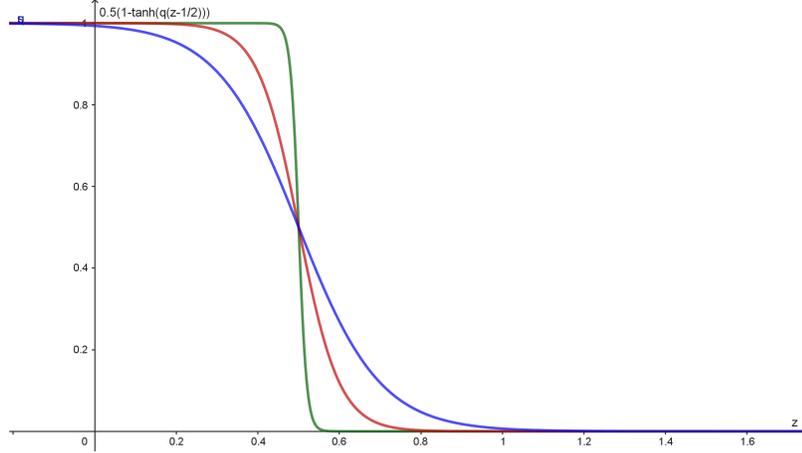
donde  $\partial S^{(c)}(z)$  se refiere al cambio del perfil no lineal y en este trabajo tomaremos un perfil de la forma

$$S^{(c)}(z) = 0.5[1 - \tanh q(z - 1/2)] \quad (3.10)$$

por lo cual

$$\frac{dS^{(c)}}{dz} = \frac{-q \operatorname{sech}^2(q(z - 1/2))}{2} \quad (3.11)$$

El valor de  $q$  puede variar en cuanto siga cumpliendo las condiciones de frontera y este dictará que tan pronunciada se vuelve la curva del perfil. Como se observa en la figura (3.10) los cambios son notables para distintos valores de  $q$ . En la gráfica (3.10) el color verde para  $q = 50$ , rojo para  $q = 10$  y azul  $q = 5$  tomando las consideraciones anteriores hacemos el mismo procedimiento que cuando el perfil es lineal pero hay un cambio el el


 Figura 3.10: Perfil no lineal de la salinidad según el valor de  $q$ 

sistema y ahora se transforma en

$$a' = \sigma[-a + br_T - dr_S] \quad (3.12)$$

$$b' = -b + a(1 - c) \quad (3.13)$$

$$c' = \bar{\omega}[-c + ab] \quad (3.14)$$

$$d' = -\tau d + a(\delta - e) \quad (3.15)$$

$$e' = \bar{\omega}[-\tau e + ad] \quad (3.16)$$

donde  $\bar{\omega} = \frac{-4\pi^2}{K^2}$ ,  $r_T = R_T \frac{\kappa^2}{K^6}$ ,  $r_S = R_S \frac{\kappa^2}{K^6}$  y  $K^2 = \kappa^2 + \pi^2$  y además se encuentra un factor importante

$$\delta = -2 \int_0^1 \sin^2 z\pi \frac{dS^{(c)}}{dz} dz \quad (3.17)$$

También encontramos los números de Rayleigh térmicos para las distintas ramas

$$R_T^e = \frac{K^6}{(\pi\alpha)^2} + \frac{\delta R_S}{\tau} \quad (3.18)$$

$$R_T^o = \frac{(\tau + 1)(\sigma + \tau)}{\sigma} \frac{K^6}{(\pi\alpha)^2} + \left(\frac{\sigma + \tau}{\sigma + 1}\right) \delta R_S \quad (3.19)$$

Y el punto de codimensión dos ocurre en

$$R_S^{c2} = \frac{K^6}{(\pi\alpha)^2} \frac{(\sigma + 1)\tau^2}{\sigma\delta(1 - \tau)} \quad (3.20)$$

$$R_T^{c2} = \frac{K^6}{(\alpha\pi)^2} \frac{(\sigma + \tau)}{\sigma(1 - \tau)} \quad (3.21)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones anteriores llegamos a un diagrama de estabilidad de la siguiente forma cuando  $q$  tiene un valor de 49.5 como en la figura (3.11):

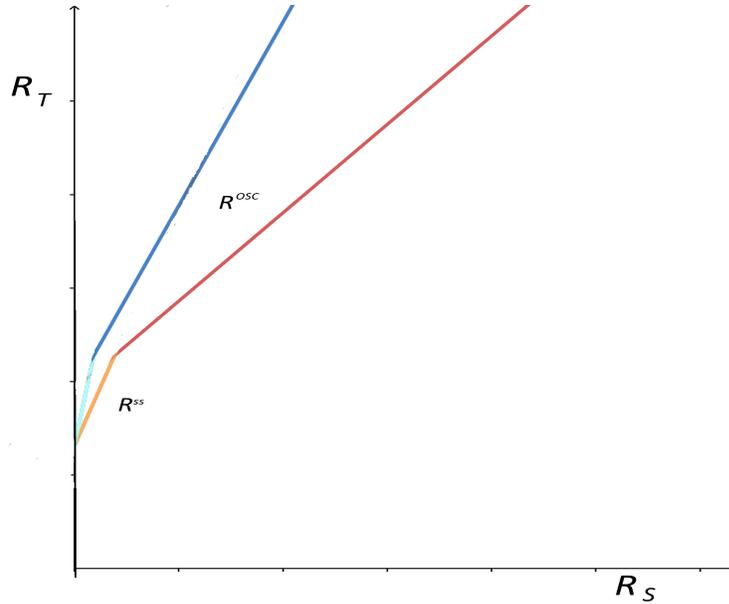


Figura 3.11: Diagrama de estabilidad lineal comparando los modelos lineal en amarillo/rojo y en azules para  $q = 49.5$

Cuando agregamos mas valores de  $q$  si se sufre una ligera modificación en los diagramas de estabilidad pues estos se mueven dependiendo del valor escogido, es mas notable en la rama oscilatoria, en la figura (3.12) el modelo lineal se muestra para los colores amarillo/rojo, en azul celeste y marino para un valor de  $q = 49.5$  mientras que para  $q = 10$  aparece en color rosa/morado, los colores claros representan la rama estacionaria mientras que los oscuros son para la parte oscilatoria en la fig (3.12).

Si hacemos un barrido de las posiciones en el espacio de parámetros  $(R_S^{C2}, R_T^{C2})$  del punto de codimensión dos variando el parámetro  $q$  nos damos cuenta lo único que cambia es el numero de Rayleigh salino.

Podemos encontrar el punto tricrítico usando la ecuación (2.65) y (3.18) que nos conduce a

$$R_S = \frac{K^6}{\alpha^2} \left( \frac{\tau^3}{1 - \delta\tau^2} \right). \quad (3.22)$$

Al realizar un gráfico de la ecuación (3.22) nos resulta en la figura (3.14) donde no es muy notable el cambio de usar el perfil lineal a la modificación que estamos tomando:

sorprendentemente no existe diferencia alguna en la gráfica cuando  $q = 49.5$ ,  $q = 10$  y

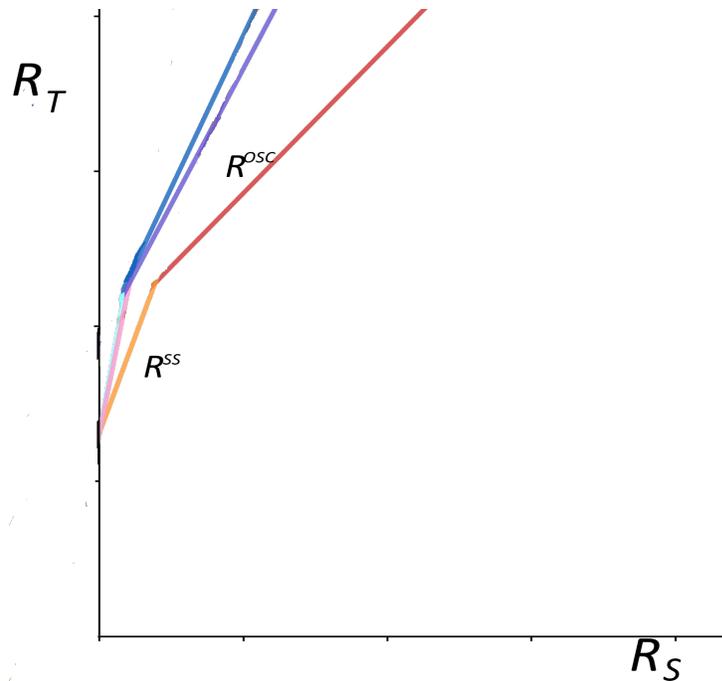


Figura 3.12: Diagrama de estabilidad lineal para los valores de  $q = 10$ ,  $q = 49.5$  y perfil lineal

el perfil lineal.

Entonces podemos hacer un seguimiento de la posición del punto tricrítico para los diferentes perfiles que estamos usando y resulta en la gráfica (3.15) donde el punto mas bajo es para el perfil lineal y como los cambios son mínimos cuando escribimos  $(R_S(\tau, q))$  por eso los avances en el eje horizontal son pequeños para un valor de  $\tau$  fijo en este caso  $\tau = 0.4$ .

En el coeficiente  $d$  del modelo es donde principalmente existe un cambio es inmediato en el sistema y lo podemos notar en las gráficas (3.16): en la figura (3.16a) notamos la diferencia para cuando comparamos el coeficiente “ $d$ ” para el valor de  $r_s = 0.5$ ,  $r_T = 2.65$ (morado),  $r_T = 3.02$ (verde),  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 0.4$  la gráfica del perfil salino no lineal se hizo con  $q = 10$ .

Como podemos observar en ambas gráficas las oscilaciones no se anulan pero la amplitud tiende a infinito mas rápido para un valor de  $r_T$  mayor, los cálculos se hicieron a la misma distancia relativa que para el perfil lineal, pero existe también una diferencia al no considerar las distancias relativas y por ejemplo como se muestra en la figura (3.16b) con un valor de  $q = 10$ ,  $r_s = 0.5$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 0.4$  pero en el gráfico morado un valor de  $r_T = 2.55$  y en verde  $r_T = 3.02$  entonces el periodo de las oscilaciones no decaen hasta aumentar drásticamente el valor de  $r_T$ .

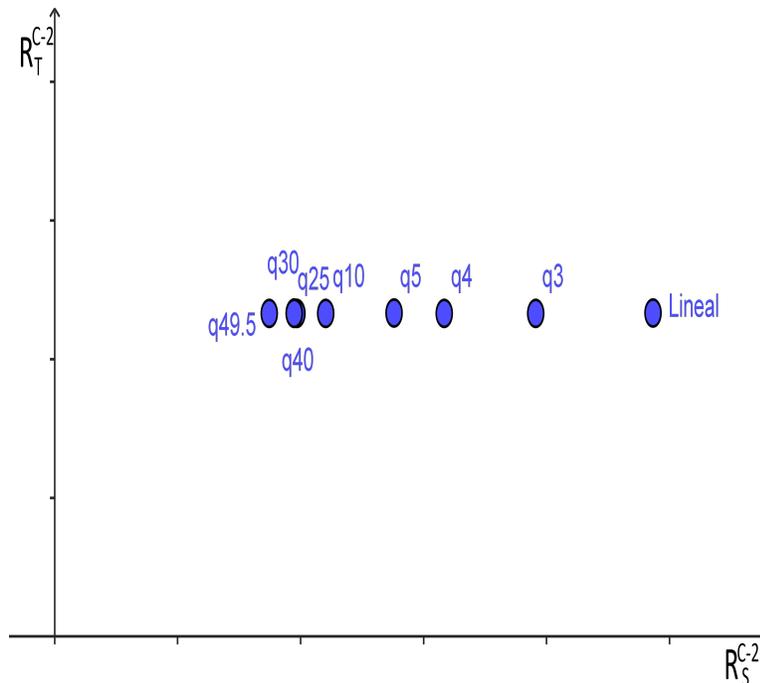


Figura 3.13: (Cambio de posición del punto de codimensión dos en el espacio  $(R_S^{C2}, R_T^{C2})$  )

En la figura (3.17) es el gráfico para cuando comparamos el coeficiente “d” para el valor de  $r_s = 0.5$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 0.4$  y  $q = 49.5$ . En (3.17a) que están a distancias relativas iguales que para el perfil lineal como observamos que tampoco se anulan las oscilaciones pero a medida que aumente el valor de  $r_T$  el periodo de las oscilaciones tiende a infinito, en (3.17b) podemos notar que el periodo de las oscilaciones no decaen para un valor de  $r_T = 2.7$  pero estas no comienzan a decaer a la misma distancia relativa que en el perfil lineal.

En la figura (3.18) podemos observar la creación de los ciclos limite para el valor de  $r_s = 0.5$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 0.4$  y  $q = 10$  y notamos en (3.18a) que no se forma ningún especie de ciclos limite para el valor de  $r_T = 2.65$  que es un valor relativamente igual al cual ya existen en el perfil lineal, pero cuando  $r_T = 3.02$  en verde de (3.18b), ocurre un fenómeno similar al perfil lineal con la creación de un ciclo limite y después al incrementar  $r_T$  la aparición de orbitas heteroclínicas. Una situación similar ocurre para la formación de ciclos limite con un valor de  $q = 49.5$  y  $r_s = 0.5$  como se puede observar en (3.19) pues no ocurren fenómenos iguales al perfil lineal a una distancia relativa que corresponde como en (3.19a) para  $r_T = 2.65$  y  $r_T = 3.02$  pero si en  $r_T = 2.7$  como se observa en (3.19b).

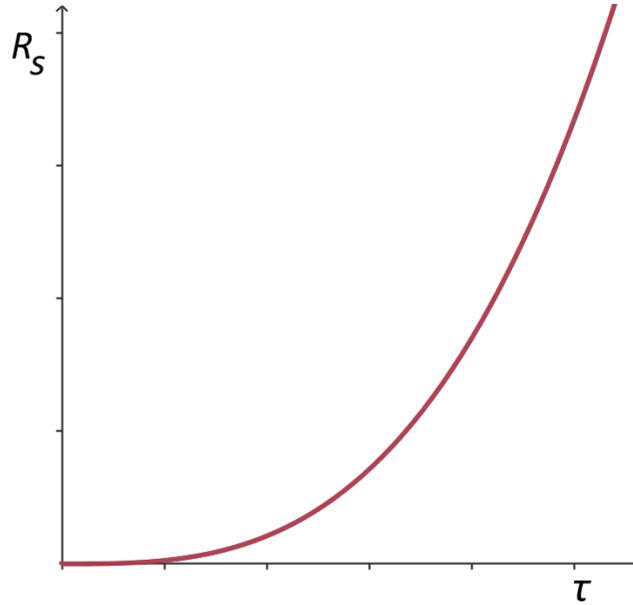


Figura 3.14: Número de Rayleigh salino  $R_S$  en función de  $\tau$  para el perfil no lineal

Ahora cuando  $r_S = 4$ ,  $q = 10$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 0.4$  la gráfica del perfil salino no lineal (3.20) no muestra oscilaciones simétricas (3.20a) a las mismas distancias relativas donde el perfil lineal si, siendo que las gráficas están a las mismas distancias relativas, en cambio si no tomamos en cuenta la distancia relativa si podemos apreciar que aparecen oscilaciones simétricas para el coeficiente  $a$  a un valor de  $r_T = 9.0$

Cuando  $r_S = 4.0$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 0.4$  y  $q = 49.5$  podemos observar en (3.21) que al igual que para los otros datos no se muestran los mismos fenómenos a las distancias relativas correspondientes (3.21a), en cambio cuando  $r_T = 9.85$  aparecen oscilaciones simétricas, pero en  $r_T = 10.44$  estas oscilaciones desaparecen y el periodo tiende a infinito.

Cuando  $r_S = 6$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 0.4$ ,  $\omega = 2.667$  y  $q = 10$  como podemos observar en (3.22) no es muy claro que se forma un ciclo limite a  $r_T = 13.075$  y después va a un punto fijo aislado figura (3.22a), si no tomamos en cuenta la distancia relativa y tomamos  $r_T = 12.7$  entonces es mas notorio la formación del ciclo para después pasar al punto de equilibrio aislado y formar orbitas heteroclínicas figura(3.22b).

Ahora tomando  $r_S = 6$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 0.4$ ,  $\omega = 2.667$  y  $q = 49.5$  como podemos observar en (3.23) es poco preciso la formación de un ciclo limite a  $r_T = 14.49$  y después va a un punto fijo aislado figura (3.23a), en cambio sin tomar en cuenta la distancia relativa y  $r_T = 14.19$  observamos con mayor claridad el ciclo para después pasar a el punto de equilibrio aislado y la creación de orbitas heteroclínicas figura(3.23b).

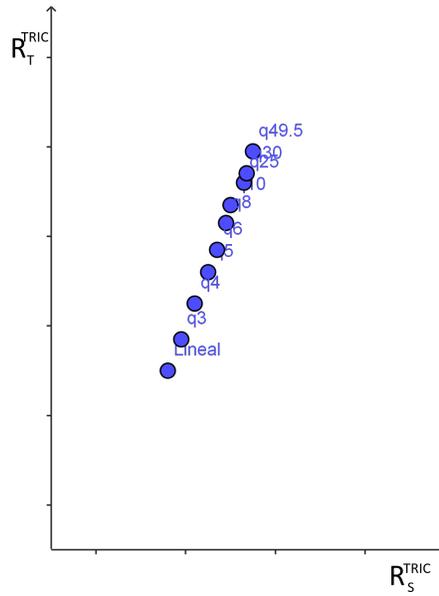
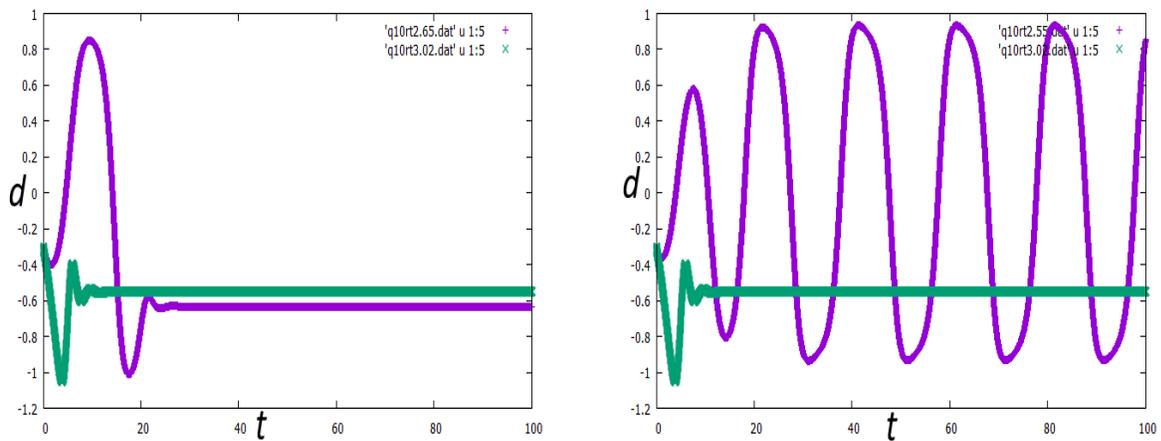
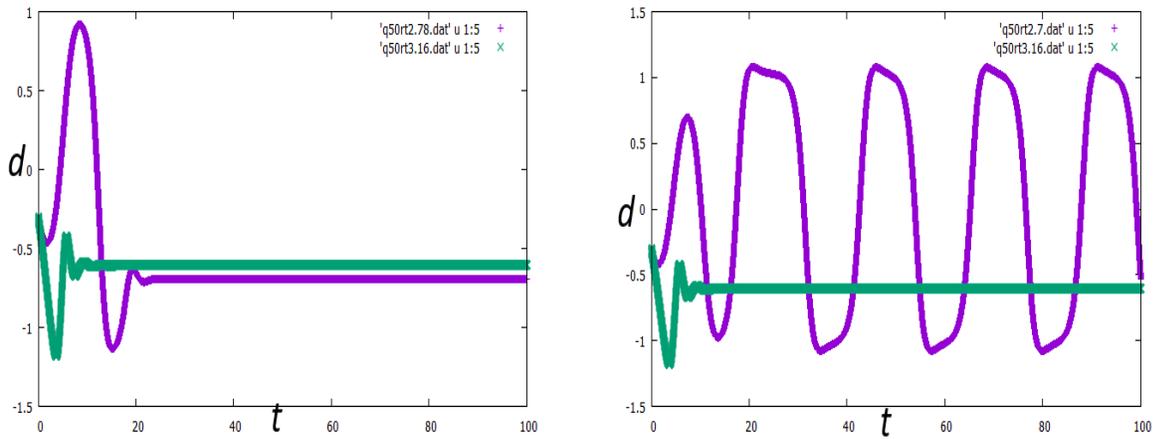


Figura 3.15: Cambio de posición del punto tricrítico en el espacio  $(R_S, R_T)$  según el perfil que utilizemos



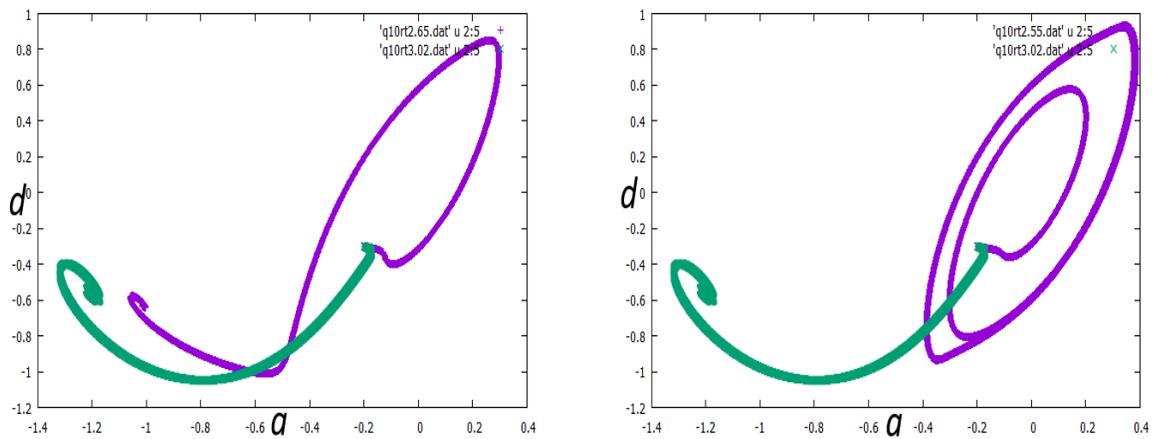
(a) Coeficiente  $d$  para  $r_T = 2.65$  en morado y  $r_T = 3.02$  en verde (b) Coeficiente  $d$  para  $r_T = 2.55$  en morado y  $r_T = 3.02$  en verde

Figura 3.16: Coeficiente  $d$  para  $q = 10$  y  $r_S = 0.5$



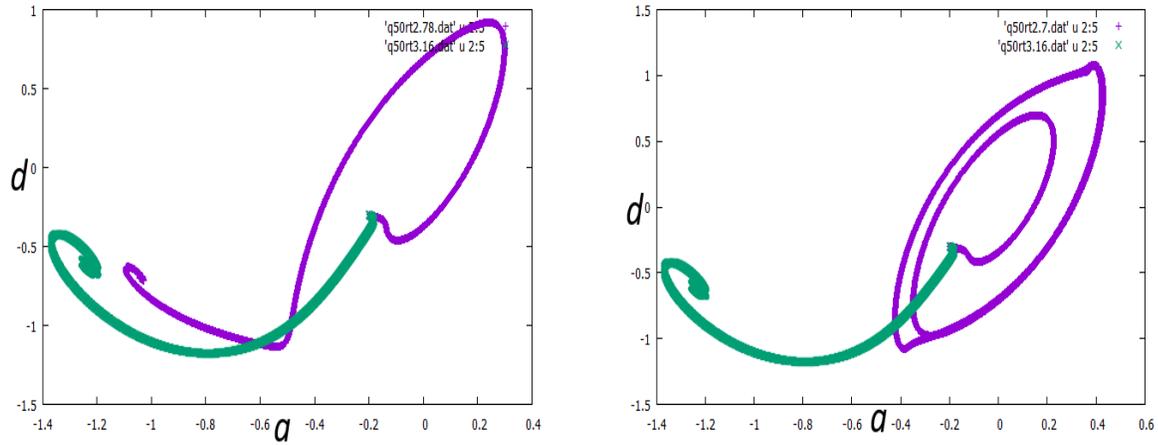
(a)  $d$ - $t$  para  $r_T = 2.78$ (morado) y  $r_T = 3.16$ (verde) (b)  $d$ - $t$  para  $r_T = 2.7$ (morado) y  $r_T = 3.16$ (verde)

Figura 3.17: Coeficiente  $d$  para  $q = 49.5$  y  $r_S = 0.5$



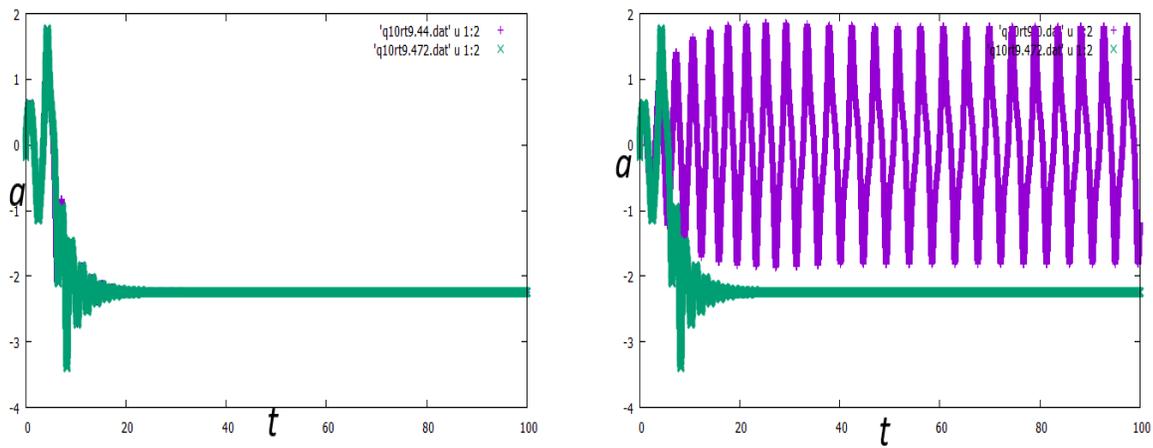
(a) Ciclos límite para  $r_T = 2.65$ (morado) y  $r_T = 3.02$ (verde) (b) Ciclos límite  $r_T = 2.55$ (morado) y  $r_T = 3.02$ (verde)

Figura 3.18: Ciclos límite para  $q = 10$  y  $r_S = 0.5$



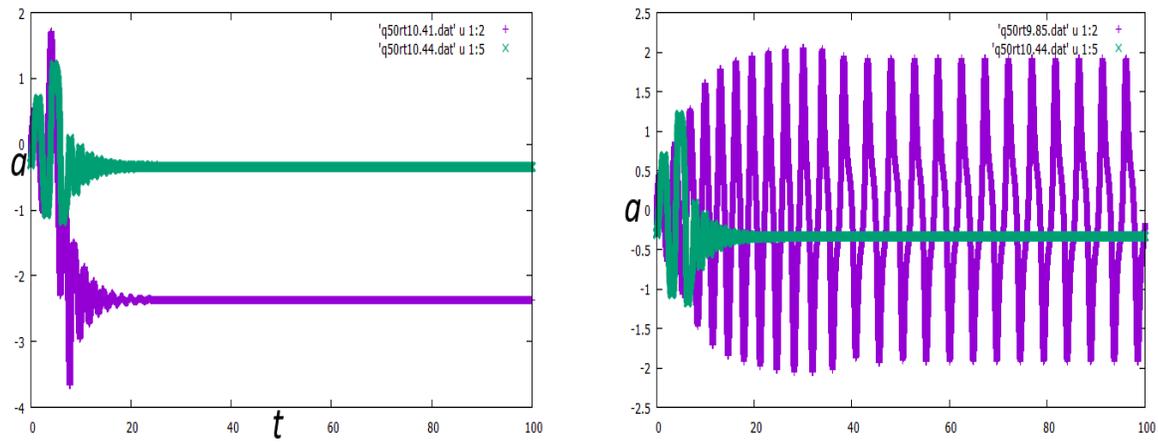
(a) Ciclos límite para  $r_T = 2.78$ (morado) y  $r_T = 3.16$ (verde) (b) Ciclos límite  $r_T = 2.7$ (morado) y  $r_T = 3.16$ (verde)

Figura 3.19: Ciclos límite para  $q = 49.5$  y  $r_S = 0.5$



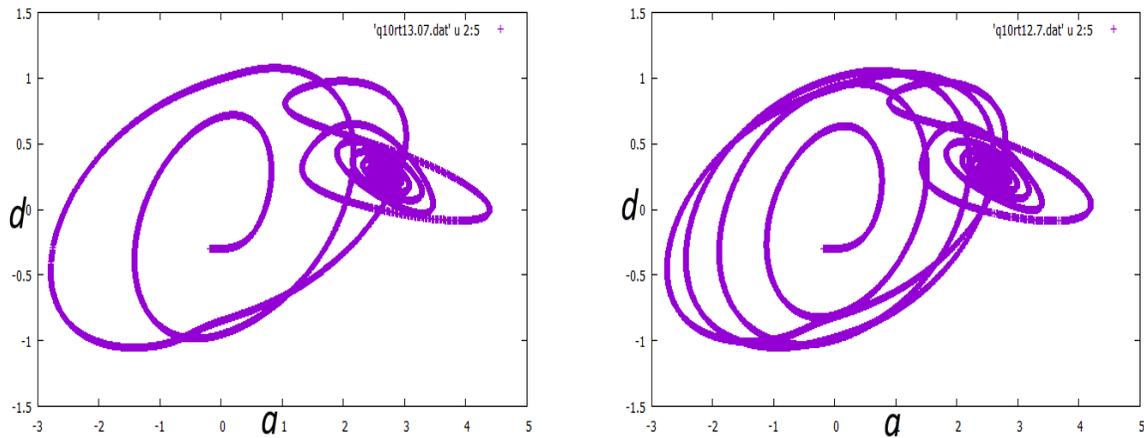
(a) Coeficiente a para  $r_T = 9.44$  (morado) y  $r_T = 9.472$ (verde) (b) Coeficiente a para  $r_T = 9.0$  (morado) y  $r_T = 9.472$ (verde)

Figura 3.20: Coeficiente a para  $q = 10$  y  $r_S = 4$



(a) Coeficiente  $a$  para  $r_T = 10.41$  (morado) y (b) Coeficiente  $a$  para  $r_T = 9.85$  (morado) y  $r_T = 10.44$ (verde)

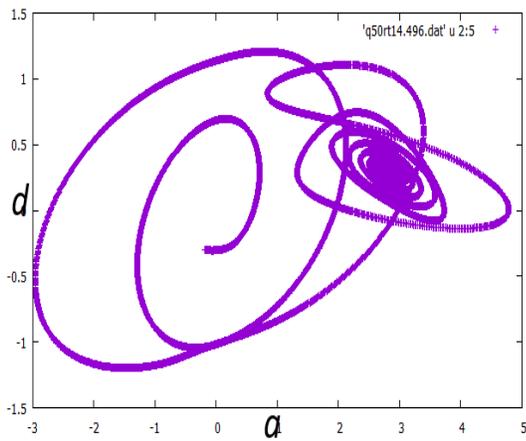
Figura 3.21: Coeficiente  $a$  para  $q = 50$  y  $r_S = 4$



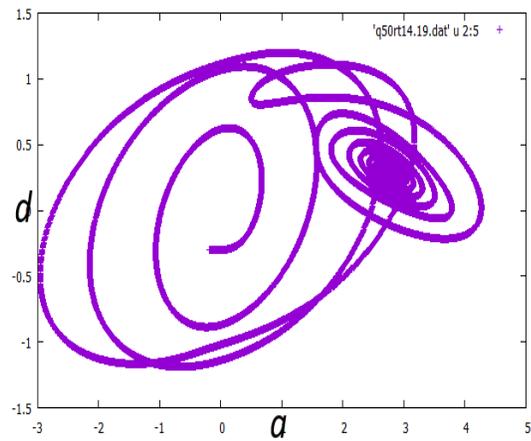
(a) Ciclos límite  $r_T = 13.07$

(b) Ciclo límite para  $r_T = 12.7$

Figura 3.22: Ciclos límite para  $q = 10$  y  $r_S = 6$



(a) Ciclos límite  $r_T = 14.49$



(b) Ciclo límite para  $r_T = 14.19$

Figura 3.23: Ciclos límite para  $q = 49.5$  y  $r_S = 6$

# Capítulo 4

## Conclusiones

Con ayuda de un análisis de estabilidad lineal y teoría de perturbaciones, logramos obtener expresiones para localizar puntos de interés, como lo son las ramas del umbral, el punto de codimensión dos (2.56) y el punto tricrítico (3.8) al rededor del cual aparecen bifurcaciones en el sistema. Al cambiar el perfil a uno no lineal el diagrama de estabilidad lineal cambia según el valor de  $q$  como mostramos en la figura(4.1) en rosa el perfil lineal, en rojo  $q = 10$  y en verde  $q = 49.5$ , donde los valores de  $q$  fueron escogidos de manera arbitraria y tomando en cuenta  $q = 49.5$  que es el valor que utilizan en (Balmforth y cols. (1998)):

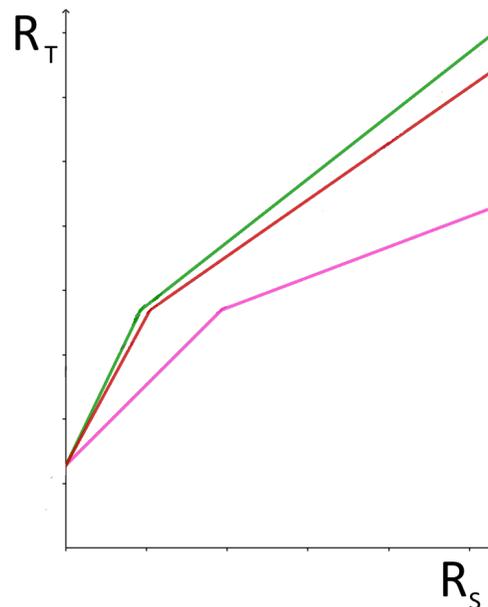


Figura 4.1: Cambio en el diagrama de estabilidad en el espacio  $(R_S, R_T)$  según el perfil que utilizemos

Se realizó un tabulación del cambio del punto tricrítico al cual aparecen bifurcaciones y

Perfil	Posición( $r_s, r_t$ )
lineal	(0.070,1.200)
$q = 5$	(0.085,1.212)
$q = 10$	(0.090,1.227)
$q = 20$	(0.093,1.232)
$q = 30$	(0.0934,1.234)
$q = 49.5$	(0.095,1.239)

Tabla 4.1: Cambio del punto tricrítico a  $\tau = 0.4$ 

Perfil	Posición( $r_s, r_t$ )
lineal	(0.293,1.733)
$q = 5$	(0.188,1.733)
$q = 10$	(0.160,1.733)
$q = 20$	(0.149,1.733)
$q = 30$	(0.148,1.733)
$q = 49.5$	(0.141,1.733)

Tabla 4.2: Cambio del punto de codimensión dos a  $\tau = 0.4$  y  $\sigma = 10$ 

cambian de estabilidad a un número  $\tau$  fijo ( $\tau = 0.4$ ) como se mostró en la figura (3.15). También podemos crear un barrido del punto de codimensión dos en las posiciones, donde es notable que no cambia el número de Rayleigh térmico.

Los fenómenos que reporta Da Costa y cols. (1981) alrededor de la rama oscilatoria, como lo son oscilaciones periódicas, oscilaciones asimétricas y ciclos límite ocurren a distintas distancias relativas con el uso de un perfil no lineal, como se muestra a continuación, que resultan a distancias menores, lo que se podría interpretar de manera que, los fenómenos ocurren más cerca del umbral cuando cambiamos el perfil.

Perfil	Distancia relativa
lineal	0.014
$q = 10$	0.094
$q = 49.5$	0.011

Tabla 4.3: distancias relativas para  $r_s = 0.5$ 

Perfil	Distancia relativa
lineal	0.11
$q = 10$	0.067
$q = 49.5$	0.058

Tabla 4.4: distancias relativas para  $r_s = 4$ 

Perfil	Distancia relativa
lineal	0.09
$q = 10$	0.06
$q = 49.5$	0.07

Tabla 4.5: distancias relativas para  $r_s = 6$

# Apéndice A

## Estabilidad lineal

Consideremos el sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})) \quad (\text{A.1})$$

un punto fijo  $\tilde{x}$  es una raíz de  $\vec{f}(\vec{x})$ , cuando se introduce una perturbación  $\vec{\eta}(t)$  como  $\vec{x}(t) = \tilde{x} + \vec{\eta}(t)$  se quiere determinar el comportamiento de  $\vec{\eta}(t)$  en forma lineal. Asumiendo que  $|\vec{\eta}(t)| \ll 1$  se tiene  $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{\eta}} = \vec{f}(\tilde{x} + \vec{\eta})$ , para la componente  $j$ -ésima tenemos la expresión

$$\dot{\eta}_j = f_j(\tilde{x} + \vec{\eta}) = f_j(\tilde{x}) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{\tilde{x}} (x_k(t) - \tilde{x}_k) + \dots \quad (\text{A.2})$$

Como  $\tilde{x}$  es un punto fijo  $f_j(\tilde{x}) = 0$ ,  $x_k(t) - \tilde{x}_k = \eta_k(t)$  se tiene  $\dot{\eta}_j(t) = \sum_{k=1}^n (\partial f_j / \partial x_k)_{\tilde{x}} \eta_k + \mathcal{O}(\eta^2)$  a orden lineal se desprecian los términos  $\mathcal{O}(\eta^2)$ , queda entonces  $\dot{\vec{\eta}} = \underline{J} \vec{\eta}$  con  $\underline{J} = (f_{jk})$  que tiene por solución  $\vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0 e^{\lambda t}$  que sustituyendo en las ecuaciones anteriores se obtiene  $\underline{J} \vec{\eta}_0 = \lambda \vec{\eta}_0$  que es un problema de valores y vectores propios, que se reescribe como  $\underline{M} = (\underline{J} - \lambda \underline{I})$ ,  $\underline{M} \vec{\eta}_0 = \vec{0}$  que tiene solución no trivial ssi  $\det(\underline{J} - \lambda \underline{I}) = 0 = P(\lambda)$  polinomio característico. Una vez encontrados los valores y vectores propios se puede escribir la solución que nos dará el comportamiento del sistema en la velocidad de un punto fijo, y nos permite clasificar a los puntos fijos.

### Caso 2-D

El sistema linealizado se escribirá como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{11}x + f_{12}y \\ \dot{y} &= f_{21}x + f_{22}y \end{aligned}$$

con  $\vec{x}(t) = (x,y)$  y  $\vec{x}(0) = (x_0, y_0)$  aquí se renombra  $\eta_1 \rightarrow x, \eta_2 \rightarrow y$  trabajaremos en la velocidad de  $\vec{x}$  que es el origen del sistema. Así que  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  es correspondiente al origen visto desde el sistema  $(\eta_1, \eta_2)$  o corresponde al punto fijo, visto en el sistema  $(x_1, x_2)$ , trabajando con las perturbaciones renombradas como  $(x,y)$ . Entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

o abreviando  $\vec{x} = \underline{A}\vec{x}$  donde  $\underline{J} \rightarrow \underline{A}$ .  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{\lambda t}$  nos conduce a un valor de valores y vectores propios, donde el polinomio característico para este caso dos dimensional se ve de la forma

$$\lambda = \frac{Tr \underline{A} \pm \sqrt{(Tr \underline{A})^2 - 4det \underline{A}}}{2} \tag{A.4}$$

Si  $\lambda_+ = \lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_-$  los vectores propios correspondientes  $\vec{v}_+, \vec{v}_-$  son linealmente independiente y genera  $\mathbb{R}^2$  en lo particular  $\vec{x}_0 = c_+ \vec{v}_+ + c_- \vec{v}_- (= c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2)$  y en general  $\vec{x}(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} \vec{v}_+ + c_- e^{\lambda_- t} \vec{v}_- (= c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2)$ .

Un esquema de valores de los puntos fijos en dos dimensiones, basándonos en los valores propios  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(Tr J \pm \sqrt{(Tr J)^2 - 4det J})$

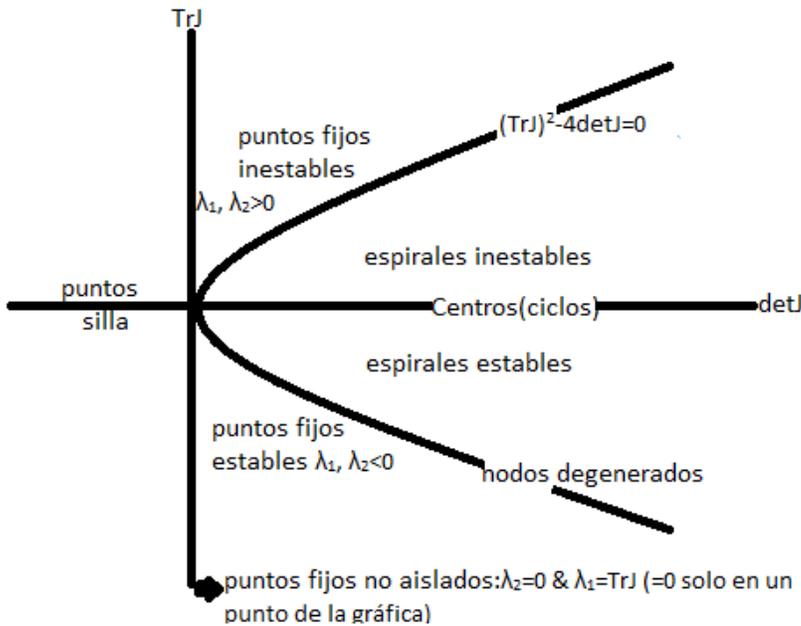


Figura A.1: Clasificación de los puntos fijos del sistema según los valores propios obtenidos del mismo

# Apéndice B

## Orbitas heteroclínicas

Las orbitas heteroclínicas también llamadas conexiones heteroclínicas son líneas que aparecen en los retratos del espacio fase siendo un camino que une a dos puntos fijos o de equilibrio diferentes.

Si los puntos de equilibrio al principio y al final de la órbita son los mismos, la órbita es una órbita homoclínica.

Las orbitas heteroclínicas y homoclínicas son más comunes en sistemas reversibles o conservativos que en otros tipos de sistemas.

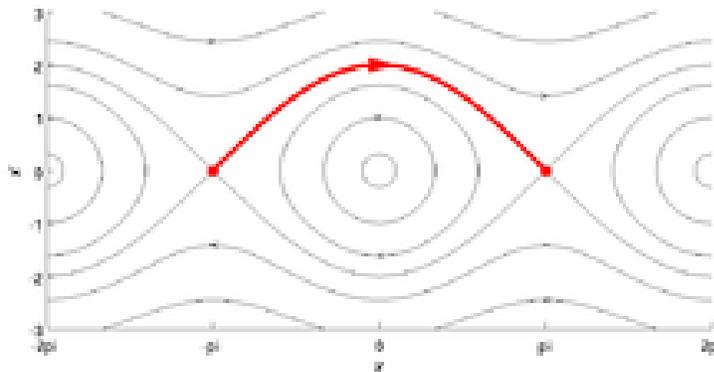


Figura B.1: orbitas heteroclínicas que se forman con un péndulo rígido

En la figura (B.1) se muestra en color rojo como se forma una órbita heteroclínica uniéndose a los diferentes puntos de equilibrio que se forman.

Otra forma de orbitas heteroclínicas son las conexiones silla como se muestra en la figura (B.2) donde se unen dos puntos silla con las líneas, dando así diferentes trayectorias según el sistema que se presente.

En cambio como se puede observar en el origen del gráfico (B.3) en el punto silla las orbitas comienzan y terminan en el mismo punto fijo dando así lugar a las orbitas homoclínicas

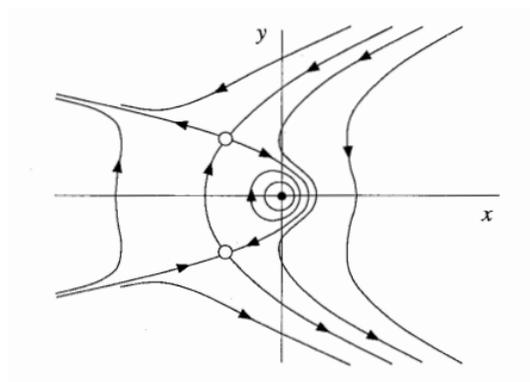


Figura B.2: orbitas heteroclínicas que se forman con puntos silla

que mencionábamos con anterioridad.

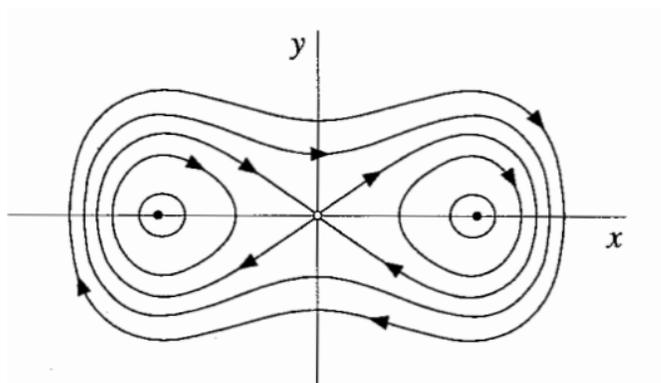


Figura B.3: orbitas homoclínicas que se forman con puntos silla

# Referencias

- Balmforth, N., Casti, A., y Julien, K. (1998). Thermohaline convection with nonlinear salt profiles. *Physics of Fluids*, 10(4), 819–828.
- Chandrasekhar, S. (2013). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation.
- Da Costa, L., Knobloch, E., y Weiss, N. (1981). Oscillations in double-diffusive convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 109, 25–43.
- Deane, A., Knobloch, E., y Toomre, J. (1987). Traveling waves and chaos in thermosolutal convection. *Physical Review A*, 36(6), 2862.
- De Jong, M., y Battjes, J. (2004). Low-frequency sea waves generated by atmospheric convection cells. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 109(C1).
- Howard, L., y Krishnamurti, R. (1986). Large-scale flow in turbulent convection: a mathematical model. *Journal of fluid mechanics*, 170, 385–410.
- Huppert, H. E., y Moore, D. R. (1976). Nonlinear double-diffusive convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 78(4), 821–854.
- Joseph, B. (1998). Chaotic advection in large-scale convection. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(01), 57–71.
- Knobloch, E. (1986). Oscillatory convection in binary mixtures. *Physical Review A*, 34(2), 1538.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2), 130–141.
- Rajagopal, K., Ruzicka, M., y Srinivasa, A. (1996). On the oberbeck-boussinesq approximation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 6(08), 1157–1167.
- Spiegel, E. (1969). Semiconvection. *Comments on Astrophysics and Space Physics*, Vol. 1, p. 57, 1, 57.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.
- Veronis, G. (1965). On finite amplitude instability in thermohaline convection.
- Veronis, G. (1968). Effect of a stabilizing gradient of solute on thermal convection. *Journal*

*of Fluid Mechanics*, 34(2), 315–336.

Zangrado, F., y Bertram, L. A. (1985). The effect of variable stratification on linear doubly diffusive stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 151, 55–79.