



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

---

---

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TRANSPORTE DE PARTÍCULAS SOLUTO EN MODELOS  
TIPO-LORENZ QUE CONSERVAN LA ENERGÍA Y  
VORTICIDAD TOTAL EN CONVECCIÓN CON FLUJOS  
SHEAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

VALERIA MONTSERRAT MAYA GONZÁLEZ

TUTOR:

DR. RICARDO BECERRIL BÁRCENAS

Morelia, Michoacán, Enero 2024



*Dedicatoria ...*

*“Happiness can be found, even in the darkest of times, if one only remembers to turn on the light” - J.K. Rowling.*

A mis padres, mis hermanos; a mi familia que aún me acompaña y la que llevo en el corazón. Para mi mejor amigo que ha sido un apoyo incondicional. Gracias por ser mi luz.

## Resumen

En los últimos años, el fenómeno de transporte de partículas soluto en un flujo convectivo ha sido estudiado ampliamente debido a su presencia en múltiples sistemas físicos. Conocer esa información es útil si se quiere optimizar un proceso de mezclado, por ejemplo; la proyección de cómo se dispersan dichas partículas permite también ser capaz de intervenir su difusión si se tratase de agentes contaminantes. El proceso de difusión y la posible aparición de caos advectivo son características que adjudicaremos a los modelos matemáticos que construiremos para nuestro problema de un fluido de Rayleigh-Benard (RB) y será la enmienda principal de este trabajo. Binson Joseph (1998) estudió el transporte de partículas pasivas (de advección pasiva) en un modelo dinámico propuesto por Howard y Krishnamurti (1986) (HK), para el problema de convección RB, y lo hizo a través de la relación  $\Delta X^2(t) \sim t^m$ , para tiempos grandes, donde  $\Delta X^2(t)$  es la distancia cuadrática media que viajan las partículas desde una nube inicial. Thiffeault y Horton (1996), y Gluhovsky et al. (2002) habrían propuesto en su momento, modificaciones al modelo HK para su base de Fourier, tal que los modelos resultantes irían satisfaciendo la conservación de la energía y posteriormente también la vorticidad total.

En el presente trabajo se estudia el proceso de difusión de partículas soluto para el problema de RB, haciendo uso de modelos tipo Lorenz de bajo orden que permiten la conservación de las cantidades mencionadas: energía y vorticidad. La obtención de la solución del sistema EDOs de las cuales se compone nuestro modelo, nos darán la pauta para realizar el estudio del transporte a través del cálculo de distancias cuadráticas medias y el coeficiente de difusión. A la par, se explora el efecto de variar la densidad de las partículas soluto, ya que se ha analizado el caso de partículas pasivas, ahora queremos analizar el efecto de considerar valores de una densidad de magnitud diferente a la densidad del fluido y cómo el arrastre afectará el proceso de transporte de esta nube de partículas, esto es, su efecto en la su difusión.

## Abstract

In recent years, the phenomenon of solute particle transport in a convective flow has been widely studied due to its presence in multiple physical systems. Knowing this information is useful if you want to optimize a mixing process, for example; the projection of how these particles are dispersed also allows us to be able to intervene in their diffusion if they are polluting agents. The diffusion process and the possible appearance of advective chaos are characteristics that we will attribute to the mathematical models that we will build for our problem of a Rayleigh-Benard (RB) fluid and will be the main amendment of this work. Binson Joseph (1998) studied the transport of passive particles (passive advection) in a dynamic model proposed by Howard and Krishnamurti (1986) (HK), for the RB convection problem, and did so through the relationship  $\Delta X^2(t) \sim t^m$ , for large times, where  $\Delta X^2(t)$  is the root mean square distance that particles travel from an initial cloud. Thiffeault and Horton (1996), and Gluhovsky et al. (2002) would have proposed at the time, modifications to the HK model for its Fourier basis, such that the resulting models would satisfy the conservation of energy and later also the total vorticity.

In the present work, the diffusion process of solute particles is studied for the RB problem, using low-order Lorenz-type models that allow the conservation of the aforementioned quantities: energy and vorticity. Obtaining the solution of the ODE system of which our model is composed will give us the guideline to carry out the transport study through the calculation of mean square distances and the diffusion coefficient. At the same time, the effect of varying the density of the solute particles is explored, since the case of passive particles has been analyzed, now we want to analyze the effect of considering values of a density of a different magnitude than the density of the fluid and how the drag will affect the transport process of this cloud of particles, that is, its effect on diffusion.

**Key words:** Advección Caótica, Transporte de partículas soluto, Difusión, Exponentes de Lyapunov.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Convección de Rayleigh-Benard: una visión general</b>	<b>5</b>
	§2.1 Ecuaciones de Movimiento . . . . .	7
	§2.2 Condiciones de Frontera . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Modelo Dinámico</b>	<b>12</b>
	§3.1 Modelos tipo Lorenz de bajo orden (LOM) . . . . .	12
	§3.1.1 Modelo de Lorenz Clásico . . . . .	13
	§3.1.2 Truncación a 6 modos de Fourier: Modelo extendido de Howard-Krishnamurti (HK) . . . . .	18
	§3.1.3 Truncación a 7 modos de Fourier: Modelo de Thiffeault y Horton, y Modelo de Hermiz . . . . .	19
	§3.1.4 Truncación a 8 modos de Fourier: Modelo Gluhovsky-Tong-Agee (GTA) . . . . .	22
	§3.2 Ecuaciones de advección . . . . .	23
	§3.2.1 Advección Pasiva . . . . .	23
	§3.2.2 Advección con inercia . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Transporte de partículas soluto en modelos tipo Lorenz</b>	<b>25</b>
	§4.1 Desplazamiento cuadrático Medio y Coeficiente de Difusión. . . . .	27
	§4.2 Evolución de una nube de partículas en el espacio de configuración del sistema. . . . .	32
<b>5</b>	<b>Caos dinámico y su relación con la advección</b>	<b>37</b>
	§5.1 Exponentes de Lyapunov . . . . .	38
	§5.1.1 Método Estándar para el cálculo de los exponentes de Lyapunov . . . . .	40
	§5.2 Espectro de Lyapunov para el modelo GTA. . . . .	42
<b>6</b>	<b>Comentarios Finales</b>	<b>44</b>

# Índice de figuras

1.1	Una línea de corriente es una curva que, en todas partes, es tangente al vector velocidad local instantáneo, del campo de velocidades del fluido (es decir, a un tiempo fijo). . . . .	2
2.1	Representación del sistema de Rayleigh-Benard. Las placas que delimitan la capa de fluido se encuentran a temperaturas $T_1$ (placa inferior) y $T_2$ (placa superior), con $T_1 < T_2$ . Una de las primeras estructuras del movimiento del fluido que se forma en el umbral de la convección es de rollos de convección; dado que el sistema es infinito en las direcciones horizontales, no hay una dirección privilegiada y entonces se puede justificar la reducción del sistema a 2D, donde podremos ver las celdas de convección. . . . .	6
3.1	Comparación de los valores críticos del número de Rayleigh para el cuál el modelo dinámico entra en su estado de convección, para dos diferentes elecciones del grosor de la capa. . . . .	16
3.2	a) Diagrama de espacio fase, para las variables A vs B vs C del modelo de Lorenz, en la cual podemos ver una órbita periódica del modelo en el espacio. Usando los parámetro $\sigma = 10$ , $b = \frac{8}{3}$ y $R = 99$ . b) Trayectoria para una partícula individual que para el modelo de Lorenz, permanece oscilando en una celda de convección, para los mismo valores de parámetros de la figura (a). Ambas figuras fueron obtenidas al integrar el modelo de Lorenz y de advección pasiva, en un tiempo total $t = 100$ . . . . .	17
3.3	Órbitas periódicas para el modelo de HK, encontradas en el espacio fase AC, en las que se usaron los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de $R$ . . . . .	19
3.4	Órbitas periódicas en el espacio fase A vs C, para el modelo de GTA-8 modos de Fourier. Se utilizaron los valores de parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de $R$ señalados en la figura. . . . .	23
3.5	Órbitas periódicas en el espacio fase A vs C, para el modelo de GTA-8 modos de Fourier. Se utilizaron los valores de parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de $R$ señalados en la figura. . . . .	23
4.1	Coefficiente de Difusión para partículas pasivas evaluadas en dos diferentes modelos HK y GTA. El cálculo se realizó para 10,000 condiciones iniciales, usando los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , $R = 44.601$ , para un tiempo total $t = 100$ . . . . .	28

4.2	Desplazamiento cuadrático medio para partículas pasivas evaluadas en dos diferentes modelos HK y GTA. El cálculo se realizó para 10,000 condiciones iniciales, usando los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , $R = 44.601$ , obteniendo los valores de $m = 1.005509 \pm 0.011883$ para HK y de $m = 0.394366 \pm 0.007013$ para GTA. . . . .	28
4.3	Coefficiente de Difusión de 10,000 partículas con densidad relativa $\delta = 0.9$ para el modelo GTA, tomando los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R señalados en la figura. . . . .	30
4.4	Desplazamiento cuadrático medio de 10,000 partículas con densidad relativa $\delta = 0.9$ para el modelo GTA, tomando los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R señalados en la figura. . . . .	30
4.5	Coefficiente de Difusión de 10,000 partículas con densidad relativa $\delta = 1.1$ para el modelo GTA, tomando los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R señalados en la figura. . . . .	31
4.6	Desplazamiento cuadrático medio de 10,000 partículas con densidad relativa $\delta = 1.1$ para el modelo GTA, tomando los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R señalados en la figura. . . . .	31
4.7	Evolución de una nube de 10,000 partículas pasivas; con CI aleatorias en el dominio $[-1, 1]x[1.4, 1.6]$ , siguiendo el modelo de HK, que se integró con los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , y $R = 42.38361$ . Se muestren figuras para diferentes tiempos finales hasta un tiempo. . . . .	33
4.8	Evolución de una nube de 10,000 partículas pasivas; con CI aleatorias en el dominio $[-1, 1]x[1.4, 1.6]$ , siguiendo el modelo de GTA, que se integró con los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , y $R = 42.38361$ . Se muestren figuras para diferentes tiempos finales hasta un tiempo. . . . .	34
4.9	Evolución de una nube de 10,000 partículas pasivas; con CI aleatorias en el dominio $[-1, 1]x[1.4, 1.6]$ , siguiendo los modelos mencionados en la figura; que se integró con los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , y $R = 44.6$ . Se muestren figuras para diferentes tiempos finales, para tiempo grandes. . . . .	35
4.10	Evolución de una nube de 10,000 partículas con inercia; con CI aleatorias en el dominio $[-1, 1]x[1.4, 1.6]$ , siguiendo el modelo GTA; que se integró con los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , y $R = 60$ . Se muestren figuras para diferentes tiempos finales, y comparando para partículas de densidad relativa señaladas en la figura. . . . .	36
5.1	Ilustración de la divergencia de trayectorias con condiciones iniciales cercanas, siendo $  \delta(t)  $ la distancia entre ambas trayectorias al tiempo $t$ . . . . .	38
5.2	Evolución de los ejes principales con el tiempo . . . . .	40
5.3	Espectro correspondiente al primer exponente de Lyapunov, para $A(t)$ , usando los parámetros $\sigma = 1$ , $\alpha = 1.2$ , en el modelo GTA. . . . .	43

# Capítulo 1

## Introducción

Al resolver las ecuaciones hidrodinámicas para un fluido, ya sea analítica o numéricamente, se obtiene el campo de velocidades del fluido  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ , en el esquema euleriano. Para contestar cómo se dispersa un soluto, que podría ser una nube de partículas de un agente externo, uno trabaja en el esquema lagrangiano. En este esquema se definen las velocidades de las partículas soluto a través de las siguientes ecuaciones:

$$\vec{v}_{particula} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (1.1)$$

donde  $\vec{x}$  el vector de posiciones de las mismas. Cuando  $\vec{v}_{particula} = \vec{v}$ , donde  $\vec{v}$  es el campo de velocidades del fluido, se habla de transporte de partículas pasivas, que simplemente se dejan llevar por la corriente, y entonces la densidad de las partículas soluto sería igual a la densidad del fluido. Cuando estas densidades son diferentes, aparece el arrastre de Stokes y la velocidad de las partículas soluto sería la velocidad del fluido más otros terminos. En este trabajo estudiaremos el transporte de partículas pasivas en modelos de convección de Benard, y también exploraremos el cómo se relacionan las velocidades de las partículas con la velocidad del fluido y del arrastre cuando las densidades de las partículas soluto y del fluido difieren.

Si consideramos un fluido 2-dimensional, incompresible ( $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ), la ecuación de continuidad se reduce a :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.2)$$

Es conveniente introducir en estos casos, la función de corriente  $\Psi$ , que se define como

$$v_x(\vec{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.3)$$



Un esquema que muestra cómo se relacionan una línea de corriente con los vectores del campo de velocidades del fluido se muestra en la figura 1.1

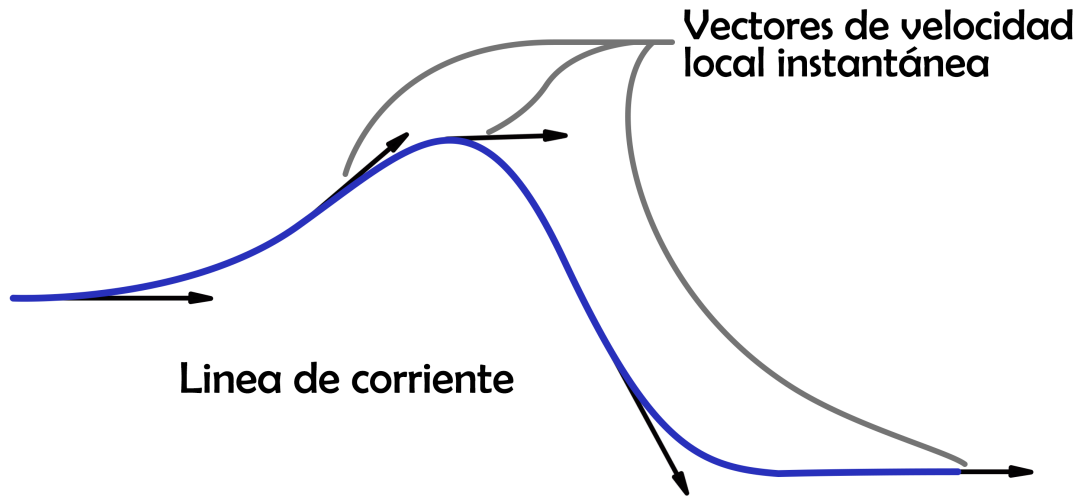


Figura 1.1: Una línea de corriente es una curva que, en todas partes, es tangente al vector velocidad local instantáneo, del campo de velocidades del fluido (es decir, a un tiempo fijo).

En una primera aproximación que llamaremos aproximación de partículas pasivas o aproximación pasiva, las partículas son arrastradas idealmente sobre las líneas de corriente del fluido. Esto puede asumirse cuando las partículas soluto tienen la misma densidad que las partículas del fluido a su alrededor, y se mueven según el campo de velocidades del fluido; en otras palabras, las partículas soluto estarían describiendo una dinámica tal que si fueran partículas del mismo fluido. Así, la velocidad en una posición y tiempo determinado (velocidad euleriana) es idéntica a la velocidad de una partícula (velocidad lagrangiana) que ocupa ese lugar en ese tiempo. Lo anterior es uno de los principios cinemáticos a partir del cual se deriva la relación entre ambas representaciones (euleriana y lagrangiana) [1]. Dicho principio se traduce en la igualdad:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.4)$$

que serán además las ecuaciones de advección para la aproximación pasiva. Teniendo estas ecuaciones, aún debemos determinar la forma funcional de la función de corriente  $\Psi(x, z, t)$ .

Lo que varios autores encontraron hace casi cuatro décadas, es que aún para campos de velocidades simples del fluido se puede encontrar que las partículas advectadas se mueven en forma aleatoria en algunas regiones del sistema. Hassan Aref (1984) [2], introdujo el término de caos advectivo, refiriéndose precisamente al hecho de que un campo de velocidades euleriano puede producir una repuesta estocástica en la advección de partículas soluto.

Pero ¿a que se debe esa respuesta estocástica en la advección de partículas?. Lo anterior puede explicarse desde la mecánica clásica, al observar que las ecuaciones (1.4), son equivalentes a un sistema Hamiltoniano autónomo, integrable, donde la función de corriente  $\Psi$  toma el lugar del Hamiltoniano. La mecánica clásica nos dicta que, si la función de corriente (el Hamiltoniano), es independiente del tiempo, las trayectorias de las partículas pasivas van a seguir siempre trayectoria a  $\Psi$  constante; en caso contrario, en las ecuaciones de advección pasiva es posible encontrar caos.

En general, las trayectorias de las partículas no son siempre equivalentes a los campos de velocidades del fluido que las contiene y por ello es relevante también estudiar este caso.

El estudio del caos advectivo ha tenido grandes desarrollos. En experimentos recientes, Aref ha presentado también el caos advectivo como una alternativa para un mezclado rápido, tal como lo mencionan en Aref et al. (2017) [3], ya que hay muchas aplicaciones en las que se requiere maximizar el tiempo de mezclado de un fluido; se emplea para esto el proceso de advección, y la advección caótica tiene ventaja sobre la turbulencia que no requiere una gran cantidad de energía para mantenerlo.

En oceanografía y biología marina podemos encontrar estudios del flujo y transporte de, por ejemplo, huevecillos en un sitio de agregación de desove de ciertas especies de peces [4], también estudios similares para organismos que no pueden dirigir su propio movimiento como algas y corales [5] [6], que son determinantes en la distribución de dichas especies después de sus ciclos reproductivos. El análisis de la dispersión de agentes contaminantes también es de gran utilidad y se ha incrementado en los años recientes debido a su impacto en el ecosistema. Por ejemplo, la dispersión de microplásticos en el océano [7] [8] [9], o en la atmósfera, derrames de petróleo [10] [11], o cualquier otro contaminante.

En este trabajo, la encomienda principal es entonces medir la dispersión de partículas soluto en un fluido, conociendo su campo de velocidades.

En el capítulo 2, se hace una breve introducción del sistema físico de interés, llamado sistema de Rayleigh- Benard; se mencionan sus características, ecuaciones de movimiento y condiciones de frontera.

En el capítulo 3, se detalla la motivación, aparición y utilidad del modelo de Lorenz para estudiar fluidos convectivos; se expone la construcción del modelo mediante el uso de series

de Fourier truncada (método de Galerkin). También se expone la motivación que tuvieron varios autores para modificar el *ansatz* truncado del modelo de Lorenz utilizando más de 3 modos de Fourier. Varias propuestas interesantes se desarrollan, llegando a un modelo que contempla un *ansatz* con 8 modos de Fourier en su totalidad y se justifica su uso y elección.

En el capítulo 4, se hace el cálculo del coeficiente de difusión y del desplazamiento cuadrático medio, para los modelos expuestos, logrando comparar los resultados obtenidos para dichos modelos para cada una de las elecciones de la naturaleza de las partículas soluto; por un lado en su aproximación "pasiva", por otro lado, de partículas con inercia.

En el capítulo 5, se completa el análisis del caos advectivo con el cálculo de los exponentes de Lyapunov y su espectro respecto a parámetros importantes de nuestro sistema físico, como es el número de Rayleigh, del cuál se hablará en detalle a continuación.

## Capítulo 2

# Convección de Rayleigh-Benard: una visión general

La influencia de un gradiente de temperatura sobre un fluido naturalmente la podemos asociar con la modificación de su dinámica, pues resulta en un agente desestabilizador que promueve, en un principio, el cambio de su estado de reposo a un estado de movimiento. Este fenómeno, que es comunmente conocido con el nombre de **convección**, sucede debido a la estratificación de densidades de sus partículas. Es natural preguntarse cómo es entonces la dinámica resultante del fluido, tomando en cuenta que el gradiente de temperatura juega un papel de competencia con los agentes estabilizadores, como la viscosidad del fluido, la difusión térmica o niveles de concentración de alguna otra sustancia, como puede ser la salinidad. La convección juegan un papel central en varios procesos que ocurren en nuestro planeta: la circulación de la atmósfera o las corrientes marítimas, últimamente afectadas por los cambios climáticos, por mencionar algunos. La convección es entonces, un fenómeno de relevancia en diversos campos de investigación y se puede acceder a un vasto acervo bibliográfico.

El sistema en el que una capa de fluido se calienta desde la base del mismo, se conoce como sistema de Rayleigh - Bénard (RB). Los primeros experimentos sistemáticos iniciaron con el físico francés Bénard en 1900 [12] que estudió el problema para condiciones de frontera libres de la capa superior (en contacto con la atmósfera) pues quería estudiar la dinámica de las nubes en la atmósfera. Posterior a ello, para diferentes fines, se han estudiado sistemas en que tanto la capa superior como inferior se mantienen a una temperatura constante, cuya temperatura inferior es más alta que la superior; también con modulación espacial o temporal de la temperatura de la capa caliente, por mencionar algunos ejemplos. A lo largo de los años, los fenómenos de convección se han estudiado en diversas situaciones y geometrías. Hay recopilaciones importantes de estos estudios como se muestra en el trabajo de revisión de Bodenschatz et al. (2000) [13], donde se consideran casos con inclinaciones del sistema, efectos resultantes de rotaciones del contenedor, sistemas con geometría cilíndrica, y por supuesto, estudiados con diferentes condiciones de frontera. Actualmente es un campo muy amplio de estudio. Comencemos ahora planteando el sistema físico de interés para este trabajo.

Las consideraciones importantes de nuestro sistema son que se trata de un fluido (casi) incompresible, las placas están a temperaturas fijas (sistema aislado), y condiciones de frontera conocidas como stress-free, que se explicarán más adelante. Un diagrama del sistema de Rayleigh-Benard se muestra en la Figura ( 2.1).

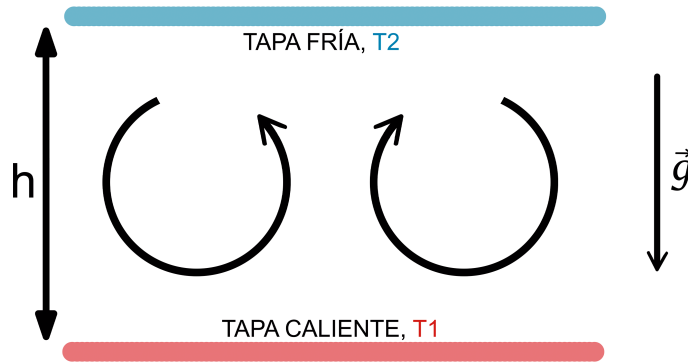


Figura 2.1: Representación del sistema de Rayleigh-Benard. Las placas que delimitan la capa de fluido se encuentran a temperaturas  $T_1$  (placa inferior) y  $T_2$  (placa superior), con  $T_1 < T_2$ . Una de las primeras estructuras del movimiento del fluido que se forma en el umbral de la convección es de rollos de convección; dado que el sistema es infinito en las direcciones horizontales, no hay una dirección privilegiada y entonces se puede justificar la reducción del sistema a 2D, donde podremos ver las celdas de convección.

Lord Rayleigh (1916) [14], introdujo un parámetro adimensional que da información central sobre los fenómenos experimentales de Bénard. El parámetro mencionado introducido por Rayleigh, y nombrado en su honor, está definido como:

$$R = \frac{\alpha g h^3 \Delta T}{D_T \nu}, \quad (2.1)$$

donde  $\Delta T = T_1 - T_2$  es el gradiente de temperatura,  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmico,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\nu$  viscosidad cinemática,  $D_T$  el coeficiente de difusión térmica y  $h$  el grosor de la capa de fluido.

Otro parámetro importante conocido como número de Prandtl, se define como el cociente entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica o coeficiente de difusión:

$$\sigma \equiv \frac{\nu}{D_T}. \quad (2.2)$$

Ambos parámetros servirán para clasificar la dinámica y ello se analizará con detalle en el siguiente capítulo. Veremos ahora, para este sistema de convección de Rayleigh-Bénard, el desarrollo de sus ecuaciones de movimiento.

## 2.1. Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones del modelo de Lorenz se derivan a partir de la ecuación de Navier-Stokes (N-S), que gobiernan el movimiento de un fluido, de la ecuación de difusión de energía térmica, que describe el comportamiento de la temperatura en la capa de fluido, además de la ecuación de continuidad, también conocida como ecuación de conservación de la masa. Estas ecuaciones son respectivamente:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \vec{v} + \rho F^{(e)} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = D_T \nabla^2 T \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.5)$$

Aquí  $F^{(e)}$  representa las fuerzas externas ejercidas sobre el sistema,  $\rho$  es la densidad de masa del fluido,  $p$  la presión,  $\vec{v}$  el campo de velocidades,  $\nu = \mu/\rho$  la viscosidad cinemática y  $D_T$  la constante de difusión térmica. El sistema lo consideraremos infinito en las direcciones horizontales, por lo que trataremos al sistema como 2-dimensional, esto es, todas las cantidades relevantes serán funciones de  $(x, z, t)$ .

Nos detendremos un momento en la ecuación de difusión para el caso en que el fluido está en reposo y la temperatura no depende del tiempo. La ecuación queda entonces como:

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad (2.6)$$

Siguiendo a Howard y Krishnamurti, [21], consideraremos que la capa de fluido tiene un grosor  $h = \pi$ , que la temperatura  $T(0) = T_1$  (caliente) y  $T(\pi) = T_2$  (frio) con  $T_1 > T_2$ . Con estas condiciones de frontera, la solución de la ecuación (2.6) es:

$$T_c(z) = -\frac{\Delta T}{\pi} z + T_1 \quad (2.7)$$

donde  $\Delta T = T_1 - T_2$  es la diferencia de temperatura entre las placas de recipiente de

fluido.  $T_c(z)$  es la temperatura en el *estado de conducción*, que está caracterizado por tener velocidad nula y temperatura lineal en  $z$  dada por (2.7). Sin embargo, al entrar al régimen convectivo, se pierde esa linealidad, pues hay un cambio en cuanto a la difusión de la temperatura, y entonces debemos considerar una función adicional que llamaremos  $\tau(x, z, t)$ , para considerar esa perturbación de su valor lineal correspondiente. Por lo tanto, la construcción de la función de temperatura, en general, sería la suma de la temperatura en el estado conductivo y la perturbación,

$$T(x, z, t) = T_c(z) + \tau(x, z, t) \quad (2.8)$$

es decir:

$$T(x, z, t) = -\frac{\Delta T}{\pi}z + T_1 + \tau(x, z, t) \quad (2.9)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de difusión, obtenemos:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \tau - v_z \frac{\Delta T}{\pi} = D_T \nabla^2 \tau, \quad (2.10)$$

que es la ecuación de evolución para  $\tau(x, z, t)$ .

El término de fuerzas externas que aparece en la ecuación de Navier-Stokes, en nuestro caso será solamente la de la gravedad,  $-\rho g \hat{k}$ , por lo que se obtiene la ecuación:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \nu (\nabla)^2 \vec{v} - \rho g \hat{k} \quad (2.11)$$

La aproximación de Boussinesq [27], usada frecuentemente en dinámica de fluidos, consiste en tomar el valor de la densidad constante en todos los términos excepto en aquellos donde la fuerza boyante tenga efecto; en nuestro caso, es el término donde aparece la fuerza externa. La densidad depende de la temperatura, y tendrá efecto solo en dirección  $z$ , conforme a la aproximación de Boussinesq. Se puede escribir en serie de Taylor como:

$$\rho(T) = \rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial T} (T - T_0) + \dots \quad (2.12)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad correspondiente a la temperatura  $T_0$  de referencia. Si además introducimos el coeficiente de expansión térmica  $\alpha$ :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (2.13)$$

entonces podemos reescribir la función de densidad haciendo una aproximación a primer orden:

$$\rho(T) = \rho_0 - \alpha\rho_0 \left[ -\frac{z}{\pi}\Delta T + \tau(x, z, t) \right] \quad (2.14)$$

donde se ha usado la ecuación (2.9)

Usando la aproximación de Boussinesq, la ecuación de Navier-Stokes se reescribe como:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \rho_0 \nu \nabla^2 \vec{v} - \hat{k} \left[ \rho_0 g + \alpha g \rho_0 \frac{z}{\pi} \Delta T - \alpha g \rho_0 \tau(x, z, t) \right] \quad (2.15)$$

Por otro lado, para sistemas 2-dimensionales es conveniente introducir la función de corriente  $\Psi(x, z, t)$  que funge como un potencial de velocidad, está definida a través de

$$\vec{v} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

Con la introducción de la función de corriente dada por (2.16), la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  se satisface idénticamente, por tanto, las únicas ecuaciones relevantes son la ecuación de N-S y la de difusión térmica.

En la ecuación de N-S aparece un término para la presión, esto implica que se requeriría una ecuación de estado.

Debido a que el objeto de estudio es un fluido incompresible, la presión se propaga a velocidad muy alta buscando que el flujo se mantenga incompresible en todo lugar y momento. Entonces podemos proceder según Gresho y Sani (1987) para mostrar lo anterior. Basta con tomar el rotacional de la ecuación de Navier-Stokes para ver que la presión desaparece, y eso nos permite trabajar con la ecuación de transporte de vorticidad. Dividimos toda la expresión entre la densidad  $\rho_0$ , y calculamos el rotacional:

$$\nabla \times \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \vec{v} - \hat{k} \left[ g + \alpha g \frac{z}{\pi} \Delta T - \alpha g \tau(x, z, t) \right] \right] \quad (2.17)$$

En el desarrollo vemos que aparecen términos de productos de derivadas de  $\Psi$  y  $\nabla^2 \Psi$ . Éstos se pueden agrupar para que queden de la forma:



$$J(f, g) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (2.18)$$

que es la definición de un paréntesis de Poisson  $J(f, g)$ . Esto nos permite escribir la ecuación de N-S y la de difusión en forma más compacta.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \Psi + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \nu \nabla^4 \Psi + g\alpha \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + J(\Psi, \tau) - \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = D_T \nabla^2 \tau \quad (2.20)$$

En resumen, el sistema a resolver será entonces el compuesto por las ecuaciones (2.19) y (2.20).

El siguiente paso es expresar las ecuaciones anteriores en términos de variables adimensionales. Esto siempre es importante para garantizar que las ecuaciones sean de aplicabilidad general independientemente de los parámetros del sistema, y asegurar que la descripción física sea la misma. Adicionalmente, llevar a cabo este procedimiento también simplifica el cálculo de las soluciones numéricas. Para ello se usan combinaciones de parámetros importantes para el sistema, en este punto no hay una regla general, sin embargo el análisis dimensional puede comprobar haberlo hecho de manera correcta. Así, por ejemplo, obtenemos las siguientes variable primadas sin dimensiones:

$$t' = \frac{D_T}{\pi^2} t, \quad x' = \frac{x}{\pi}, \quad z' = \frac{z}{\pi}, \quad \tau' = \frac{\alpha \pi^3 g}{\nu D_T} \tau. \quad (2.21)$$

Con lo anterior podemos definir las velocidades adimensionales, los gradientes adimensionales y el resto de los términos. Al introducir estas variables adimensionales, aparecerán parámetros importantes mencionados en la introducción. Aparece  $\sigma$  que es el número de Prandtl y también  $R$  que es el número de Rayleigh.

Desde ahora vamos a omitir las primas en todas las variables; lo anterior para que las ecuaciones no tengan un exceso de notación. Debemos tener en cuenta que las ecuaciones que presentamos a continuación son las correspondientes ecuaciones sin dimensiones:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + J(\Psi, \tau) - R \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nabla^2 \tau \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) \right] = \frac{\partial \tau}{\partial x} + \nabla^4 \Psi \quad (2.23)$$

que son con las ecuaciones con las que trabajaremos.

## 2.2. Condiciones de Frontera

El fluido que se estudiará, como ya se mencionó en el capítulo anterior, está confinado entre dos placas:  $z = 0$  y  $z = \pi$ ; en ellas se deben satisfacer ciertas condiciones de frontera. Independientemente de la naturaleza de las placas, se debe satisfacer lo siguiente:

$$\tau = 0 \quad \text{y} \quad \Psi = 0 \quad \text{para} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad z = \pi. \quad (2.24)$$

ya que las placas están a temperatura constante, es decir, no hay efecto sobre estas debido a las funciones de perturbación de la temperatura y la función de corriente  $\tau$  y  $\Psi$ .

Además de ello, podemos distinguir dos tipos de condiciones de frontera que fueron bien descritas por Chandrasekhar [26]; y éstas sí dependen de la naturaleza del sistema físico. Comencemos entonces con las condiciones de superficie rígidas donde no ocurre deslizamiento de la capa, que se conocen como "no slip", y las condiciones de superficie libres donde no actúa ningún esfuerzo tangencial a la capa "stress-free".

De manera breve podemos identificar el primer tipo con valores nulos para las velocidades horizontales, pues la capa no admite deslizamiento, y de las velocidades normales a la capa, pues el fluido no la atraviesa. Para la velocidad, Lorenz usó condiciones de frontera stress-free [32], donde no hay ningún esfuerzo tangencial a la capa o en dirección  $z$ , así, tanto las componentes de la velocidad vertical como su aceleración se anulan en la capa. Acorde al sistema de referencia elegido, podemos expresar las condiciones de frontera como:

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad z = 0, \pi \quad (2.25)$$

Una vez definido el sistema físico a estudiar, y debido a las dificultades mencionadas para la búsqueda de la solución del sistema (2.22) y (2.23), un modelo adecuado nos permitiría obtener aproximaciones a la solución en una medida aceptable.

# Capítulo 3

## Modelo Dinámico

### 3.1. Modelos tipo Lorenz de bajo orden (LOM)

Los modelos de bajo orden, cómo ya se introdujeron en este trabajo y que son nombrados así en la literatura, han ganado terreno gracias a que, en general, la integración de las ecuaciones de movimiento para fluidos no es una tarea fácil, y los modelos permiten un análisis sin tan elevado costo computacional. Sólomente hablando de la ecuación de Navier Stokes, ésta no cuenta con una solución analítica hasta la fecha; en otras palabras, la solución de la ecuación de conservación de momento, que en la naturaleza es tridimensional y es de carácter no lineal, sigue siendo un problema abierto de la física. Pongamos además sobre la mesa que para estudiar algún problema en particular, dicha ecuación se requiere resolver simultáneamente con otra u otras más, como la ecuación de difusión de energía térmica, por ejemplo.

Actualmente, para poder integrar las ecuaciones, se recurre a algún tipo de simplificación de las ecuaciones o al uso de algunos métodos nuevos [29], [30], [31]. En este trabajo, como ya se mencionó, se procede con la búsqueda de una base finita de Fourier como propuesta de solución para las variables incógnitas que en este caso son la función de corriente y la desviación lineal de la temperatura. Partiendo de las siguientes ecuaciones:

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m,n} \Psi_{m,n}(t) e^{imz+nax} \quad (3.1)$$

$$\tau(x, z, t) = \sum_{m,n} \tau_{m,n}(t) e^{imz+nax} \quad (3.2)$$

vemos que estamos considerando un número infinito de términos para ambas funciones  $\Psi(x, z, t)$  y  $\tau(x, z, t)$ . En la práctica se tiene una truncación de dichas series. La dependencia temporal va anidada en los coeficientes de la expansión, así que lo que se busca es encontrar (numéricamente) estos coeficientes como función del tiempo. Tales expansiones considerando de antemano una truncación, se sustituyen en las ecuaciones hidrodinámicas (método de Galerkin) obteniéndose un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

acopladas (no lineales) para esos coeficientes.

### 3.1.1. Modelo de Lorenz Clásico

Lorenz (1963) [16] hizo una propuesta con un ansatz truncado a 3 modos de Fourier; ello tomando como referencia los trabajos previos de Saltzman (1962) [28], donde éste último, mediante integración numérica había logrado mostrar que un ansatz con 6 modos ya contenía suficiente información del fenómeno y se apegaba a resultados experimentales. Lorenz concluyó además que de los resultados de Saltzman, en algunos casos, todas las variables del sistema de ecuaciones excepto 3 tienden a cero, por lo que él usó esta última aproximación.

Como la temperatura de las placas inferior y superior se mantienen constantes, las condiciones de frontera para la función de perturbación  $\tau$ , es que ésta se anula en las placas. Para la velocidad, Lorenz uso condiciones de frontera de superficie libre [32]. Acorde al sistema de referencia elegido, podemos expresar las condiciones de frontera como:

$$\tau = \Psi = \nabla^2 \Psi = 0, \quad z = 0, \pi \quad (3.3)$$

El siguiente ansatz propuesto por Lorenz satisface las condiciones de frontera :

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= A(t) \sin(z) \sin(ax) \\ \tau(x, z, t) &= B(t) \sin(z) \cos(ax) + C(t) \sin(2z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde se debe determinar los coeficientes  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$ . Es decir, hay que encontrar las ecuaciones de evolución de estos coeficientes, y de este modo se tiene una solución aproximada del sistema 2-dimensional de Bénard. Se están usando sólo tres modos de Fourier:  $\mathcal{F}_1 = \sin ax \sin z$ ,  $\mathcal{F}_2 = \sin z \cos ax$  y  $\mathcal{F}_3 = \sin 2z$ . Al sustituir el ansatz en la ecuaciones de N-S y de difusión, se obtienen dos expresiones que son combinaciones de los tres modos de Fourier usados en (3.4), más otros modos de Fourier que surgen de los términos no lineales de las dos ecuaciones de movimiento, específicamente:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sigma}(1+a^2)\dot{A} \sin z \sin(ax) &= -aB \sin z \sin(ax) + (1+a^2)^2 A \sin z \sin(ax) \\ \dot{B} \cos ax \sin z - \dot{C} \sin 2z &= -aAB \cos z \sin z + 2aAC \cos ax \sin z \cos 2z \\ &+ RaA \cos ax \sin z - (1+a^2)B \cos ax \sin z \\ &+ 4C \sin 2z \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para mantenernos en el subespacio de Fourier generado por la aproximación del ansatz (3.4), se hace la proyección de estas dos expresiones con cada modo de Fourier del ansatz:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{a}} \int_0^{\pi} f(x, z, t) \sin(ax) \sin(z) dz dx \quad (3.6)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{a}} \int_0^{\pi} f(x, z, t) \cos(ax) \sin z dz dx \quad (3.7)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{a}} \int_0^{\pi} f(x, z, t) \sin(2z) dz dx \quad (3.8)$$

donde la función  $f$  representa a cada una de las dos ecuaciones (3.5). El resultado es un sistema de 3 ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\sigma(1 + a^2)A + \frac{a\sigma}{(1 + a^2)}B \\ \dot{B} &= -(1 + a^2)B + aRA - aAC \\ \dot{C} &= \frac{a}{2}AB - 4C \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $R$  es el número de Rayleigh, que es el parámetro experimental.

El sistema (3.9) no está aún en la forma en que suele aparecer en los libros de texto. Para llevarlo a su forma convencional se hacen algunos cambios de variable. En primer lugar, para la variable temporal, se hace el cambio:

$$t' = (1 + a^2)t \quad (3.10)$$

y luego las sustituciones:

$$\begin{aligned} X(t') &= \frac{a}{\sqrt{2}(1 + a^2)}A(t) \\ Y(t') &= \frac{a^2}{\sqrt{2}(1 + a^2)^3}B(t) \\ Z(t') &= \frac{a^2}{(1 + a^2)^3}C(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

además que definimos un nuevo parámetro  $b$ , como:

$$b = \frac{4}{(1 + a^2)} \quad (3.12)$$

y el llamado número de Rayleigh reducido:

$$r = \frac{a^2}{(1 + a^2)^3} R \quad (3.13)$$

Con lo que obtenemos el Modelo de Lorenz en su forma convencional:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= rX - XZ - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \quad (3.14)$$

Debido a las simplificaciones realizadas para el modelo de Lorenz, el parámetro  $a$  se debe determinar para quedar bien definido. Ya que nos interesa estudiar el fluido en movimiento, debemos determinar dicho parámetro que satisfaga el sistema ese estado. Del estado de conducción (donde aún no hay movimiento del fluido), se cumple que la velocidad del fluido y desviación lineal de la temperatura son nulas, es decir:  $\Psi = 0$  y  $\tau = 0$ ; lo que corresponde a  $\vec{x}_c = (X, Y, Z) = \vec{0}$ , un punto fijo del sistema dinámico, pues satisface que  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}_c) = \vec{0}$ . Procedemos a realizar un análisis de estabilidad lineal buscando la condición que se debe cumplir para que el punto fijo del estado de conducción sea inestable, y provoque el inicio del movimiento. Así, ignorando por el momento los términos no-lineales para poner a prueba la estabilidad lineal del sistema dinámico [32], nos enfocamos en analizar el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= rX - Y \\ \dot{Z} &= -bZ \end{aligned} \quad (3.15)$$

El punto fijo  $\vec{x}_c = \vec{0}$  resulta ser inestable para  $r > 1$ . Lo que corresponde a, de la ecuación (3.13):

$$R \geq \frac{(1 + a^2)^3}{a^2} \quad (3.16)$$

Procedemos a buscar  $a$  tal que  $R$  sea mínima para el inicio de la convección. Es decir,  $\frac{\partial R}{\partial a} = 0$ , lo que podemos ver en la figura 3.1. Así encontramos  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Con esto ya podemos conocer también los valores de los parámetros  $R_c = \frac{27}{4}$  y  $b = 8/3$ .

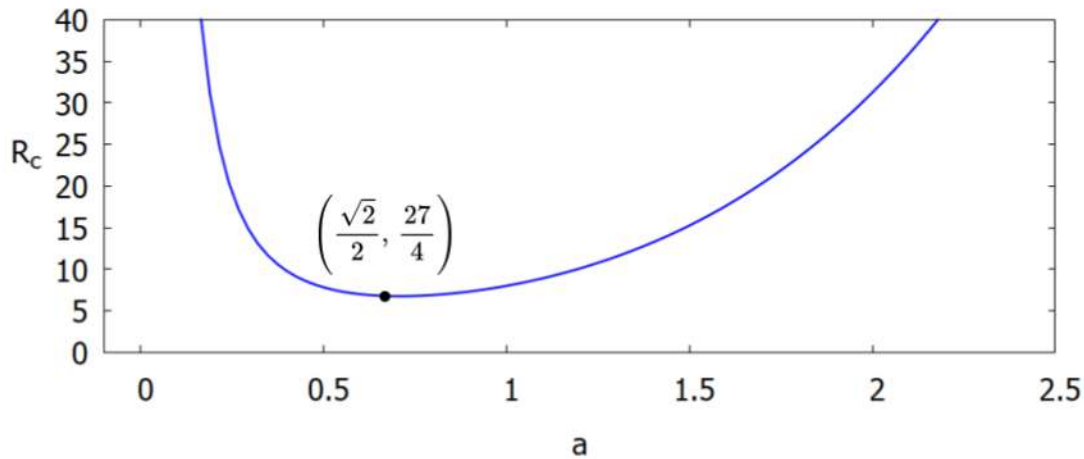


Figura 3.1: Comparación de los valores críticos del número de Rayleigh para el cuál el modelo dinámico entra en su estado de convección, para dos diferentes elecciones del grosor de la capa.

### Retratos de Fase y su utilidad

Dado un sistema dinámico  $n$ -dimensional  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ , el conjunto de puntos  $\{(x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in [a, b]\}$  es una trayectoria en el espacio fase. Un retrato de fase es una representación geométrica de (varias) trayectorias de un sistema dinámico, pueden ser en 1, 2 ó 3 dimensiones, que son las que se pueden dibujar. La configuración de las curvas en el espacio de fase puede sugerir o revelar, la existencia de atractores, repulsores o ciclos límite [32, 15]. Que exista un ciclo límite para nuestro modelo, nos puede indicar una dependencia temporal de las variables del modelo que estemos observando, más específicamente serían periódicas en el tiempo; por tanto podemos con este procedimiento, identificar de manera cualitativa los valores de parámetros para los cuales se podría encontrar que  $\Psi = \Psi(x, z, t)$  y por ende la posibilidad de aparición de caos advectivo.

El modelo de Lorenz, a pesar de haber sido de gran utilidad para estudiar de manera práctica la dinámica de nubes, mostró tener grandes limitaciones para ciertos valores de parámetros. En particular, no permite estudiar el movimiento de partículas fuera de una celda de convección. Aún para valores de  $R$  en los cuales encontramos órbitas periódicas en el espacio fase, la trayectoria para una partícula individual permanece en una celda de convección. Esta predicción, queda en evidencia en la figura 3.2.

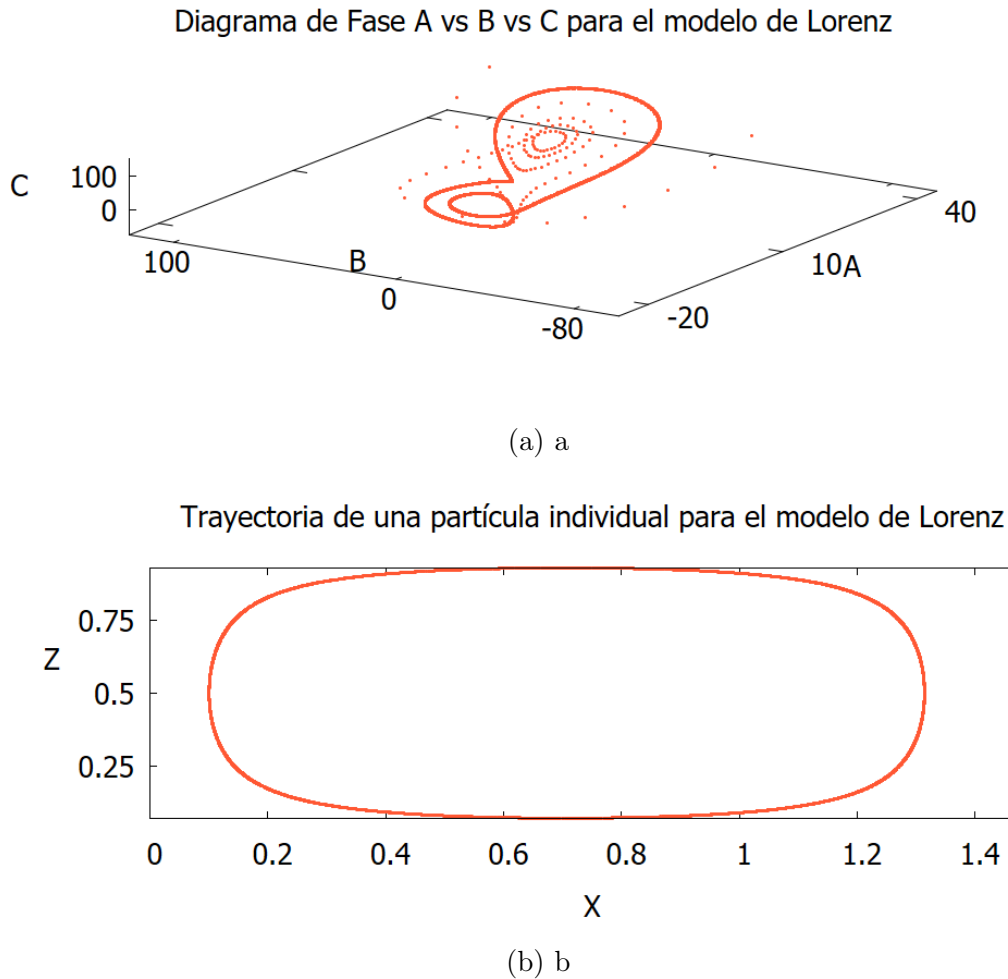


Figura 3.2: a) Diagrama de espacio fase, para las variables A vs B vs C del modelo de Lorenz, en la cual podemos ver una órbita periódica del modelo en el espacio. Usando los parámetros  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  y  $R = 99$ . b) Trayectoria para una partícula individual que para el modelo de Lorenz, permanece oscilando en una celda de convección, para los mismos valores de parámetros de la figura (a). Ambas figuras fueron obtenidas al integrar el modelo de Lorenz y de advección pasiva, en un tiempo total  $t = 100$



### 3.1.2. Truncación a 6 modos de Fourier: Modelo extendido de Howard-Krishnamurti (HK)

Howard y Krishnamurti [21], publicaron su artículo en 1986. Ellos profundizaron su estudio en el modelo matemático de convección que contiene 6 ecuaciones, en lugar de 3, que son los correspondientes al Modelo de Lorenz Clásico. Esto lo hicieron porque querían mostrar, para este modelo extendido, la aparición de celdas inclinadas y con forma de pluma, apegadas al comportamiento experimental (Malkus (1954) [33]; Willis Deardorff (1967) a [34], b [35]; Krishnamurti 1970 a [36], b [37]) del flujo de R-B para valores altos de número de Rayleigh. Es decir, muestra en un contexto manejable, la transición de celdas aparentemente simétricas a celdas inclinadas, gracias a que permite un flujo a gran escala en la dirección  $x$ , esto en comparación con la longitud de la altura entre las capas. Con esta información, este modelo resultó muy útil para estudiar el flujo shear y posteriormente, para la difusión de partículas pasivas.

El ansatz correspondiente al modelo de Howard y Krishnamurti (HK) tiene la forma:

$$\begin{aligned}\Psi(x, z, t) &= A \sin(ax) \sin(z) + B \sin(z) + C \cos(ax) \sin(2z) \\ \tau(x, z, t) &= D \cos(ax) \sin(z) + E \sin(2z) + F \sin(ax) \sin(2z)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Se sigue un procedimiento similar al visto en el capítulo anterior. Hacemos la sustitución del ansatz en las ecuaciones de movimiento (2.22) y (2.23). Para las ecuaciones obtenidas, hacemos la proyección con las integrales de Fourier, obteniendo el modelo:

$$\dot{A} + \sigma(1 + a^2)A - \frac{\sigma a}{(1 + a^2)}D - \frac{1}{2}a \frac{(3 + a^2)}{(1 + a^2)}BC = 0 \quad (3.18a)$$

$$\dot{B} + \sigma B + \frac{3}{4}aAC = 0 \quad (3.18b)$$

$$\dot{C} + \sigma(4 + a^2)C + \frac{a\sigma}{(4 + a^2)}F + \frac{a^3}{2(4 + a^2)}AB = 0 \quad (3.18c)$$

$$\dot{D} + (1 + a^2)D - RaA + aAE + \frac{1}{2}aBF = 0 \quad (3.18d)$$

$$\dot{E} + 4E - \frac{1}{2}aAD = 0 \quad (3.18e)$$

$$\dot{F} + (4 + a^2)F + RaC - \frac{1}{2}aBD = 0 \quad (3.18f)$$

Este modelo es el propuesto en el artículo de HK. Como es de esperarse, se puede recuperar el modelo de Lorenz clásico conformado ahora por los coeficientes  $A$ ,  $D$  y  $E$  al

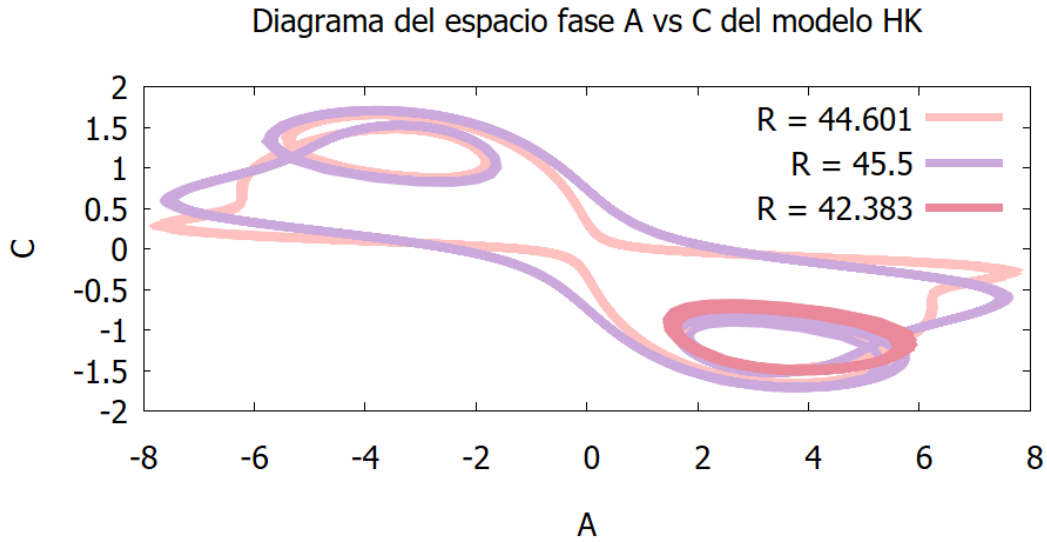


Figura 3.3: Órbitas periódicas para el modelo de HK, encontradas en el espacio fase AC, en las que se usaron los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R.

tomar  $B = C = F = 0$ .

Del análisis de estabilidad lineal para este modelo se encontró que, para los valores de  $\sigma = 1$ ,  $a = 1.2$ , la aparición de órbitas periódicas estables para valores de número de Rayleigh será  $38.802 < R < 140$  [21]. En la figura 3.3, se reprodujeron algunas órbitas periódicas para ese rango de valores del número de Rayleigh.

### 3.1.3. Truncación a 7 modos de Fourier: Modelo de Thiffeault y Horton, y Modelo de Hermiz

En 1996, Thiffeault y Horton [38] presentaron un método para obtener truncaciones finitas de los modos de Fourier para el problema de Rayleigh Benard, las cuales mostraron proveer una correcta estimación del flujo térmico, para el límite no disipativo de su estado estacionario, donde el modelo HK comienza a fallar.

Ellos partieron de las ecuaciones de Navier Stokes y Difusión térmica con el procedimiento ya expuesto. La ecuaciones obtenidas son equivalentes a las ecuaciones (2.22) y (2.23), por una diferencia en parámetros debida a la adimensionalización. En su Tesis de Maestría [39], Thiffeault detalla los parámetros usados. Dichas ecuaciones son:

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} + J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \nabla^4 \Psi \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + J(\Psi, T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 T \quad (3.20)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $\kappa$  la conductividad térmica. En el límite no disipativo tendremos  $\nu, \kappa \rightarrow 0$ .

Si multiplicamos (3.19) por la  $\Psi$ , e integramos sobre el espacio, aplicando las condiciones de frontera, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle (\nabla \Psi)^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle T \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\rangle \quad (3.21)$$

Por otro lado, si se multiplica (3.20) por  $z$ , se toma el promedio sobre el dominio y aplicando condiciones de frontera, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle zT \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle T \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\rangle \quad (3.22)$$

Si tomamos la diferencia de estas dos últimas expresiones, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \langle (\nabla \Psi)^2 \rangle - \langle zT \rangle \right] = 0 \quad (3.23)$$

Reconociendo y renombrando los términos de energía cinética  $K = \frac{1}{2} \langle (\nabla \Psi)^2 \rangle$  y potencial  $U = \langle zT \rangle$  de la ecuación obtenida, obtenemos una ecuación de conservación de la energía total  $E = K + U$  para el caso no disipativo,  $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ .

A partir de esta relación, Horton y Thiefault pudieron reconocer que el propio modelo de Lorenz clásico conserva la energía, sin embargo el modelo de Howard y Krishnamurti no lo hace. Mediante la aplicación de la ecuación de conservación se pudo identificar casi de manera directa, que con la introducción de un modo extra en la propuesta de solución para la desviación de la temperatura, bastaba para que el modelo por fin satisficiera dicha condición. Así, el nuevo ansatz que propusieron fue el siguiente:

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= A \sin(ax) \sin(z) + B \sin(z) + C \cos(ax) \sin(2z) \\ \tau(x, z, t) &= D \cos(ax) \sin(z) + E \sin(2z) + F \sin(ax) \sin(2z) + G \sin(4z) \end{aligned} \quad (3.24)$$

que nos generará el modelo dinámico:

$$\dot{A} + \sigma(1 + a^2)A - \frac{\sigma a}{(1 + a^2)}D - \frac{1}{2}a \frac{(3 + a^2)}{(1 + a^2)}BC = 0 \quad (3.25a)$$

$$\dot{B} + \sigma B + \frac{3}{4}aAC = 0 \quad (3.25b)$$

$$\dot{C} + \sigma(4 + a^2)C + \frac{a\sigma}{(4 + a^2)}F + \frac{a^3}{2(4 + a^2)}AB = 0 \quad (3.25c)$$

$$\dot{D} + (1 + a^2)D - RaA + aAE + \frac{1}{2}aBF = 0 \quad (3.25d)$$

$$\dot{E} + 4E - \frac{1}{2}aAD = 0 \quad (3.25e)$$

$$\dot{F} + (4 + a^2)F + RaC - \frac{1}{2}aBD = 0 \quad (3.25f)$$

$$\dot{G} + 16F + 8aCF = 0 \quad (3.25g)$$

El modelo de Thiffeault y Horton (TH) fue más acertado en el sentido físico, ya que no requiere términos adicionales en la ecuación de energía para tener una buena aproximación del flujo en la transición del estado estacionario, tanto disipativo como no-disipativo, al estado de convección.

Hermiz y Finn (1995) [34], analizaron la integración de la ecuación de vorticidad. En tal caso, el modelo propuesto debía satisfacerse la igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \omega dx dz = \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \omega dx \right]_{z=0}^{z=\pi} \quad (3.26)$$

donde  $w = \nabla^2 \Psi$ .

Para poder satisfacer dicha ecuación, se tuvo que hacer una modificación al ansatz de la función de corriente de 6 modos, para la cual se agregó un modo extra, a saber:

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= A \sin(ax) \sin(z) + B \sin(z) + C \cos(ax) \sin(2z) + G \sin(3z) \\ \tau(x, z, t) &= D \cos(ax) \sin(z) + E \sin(2z) + F \sin(ax) \sin(2z) \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.1.4. Truncación a 8 modos de Fourier: Modelo Gluhovsky-Tong-Agee (GTA)

En 2001, Gluhovsky, Tong y Agee [25] recopilaron ambos conceptos en un nuevo modelo, pero obtenido desde una perspectiva diferente. Los LOM fueron construidos en forma de sistemas conocidos en mecánica clásica como giroscopios Volterra. Esta estructura asegura la conservación de la energía, una propiedad de importancia fundamental. El enfoque se ilustra con un LOM, que es modificación del modelo de Howard-Krishnamurti de convección con cizalla que restaura la conservación de ambas, energía y vorticidad total al modelo original; además resulta ser el modelo equivalente de utilizar las dos propuestas simultáneamente para nuevos modos en el azats, los provenientes del modelo de Thiffeault y Horton, y el modelo de Hermiz.

$$\begin{aligned}\Psi(x, z, t) &= A \sin(ax) \sin(z) + B \sin(z) + C \cos(ax) \sin(2z) + G \sin(3z) \\ \tau(x, z, t) &= D \cos(ax) \sin(z) + E \sin(2z) + F \sin(ax) \sin(2z) + H \sin(4z)\end{aligned}\quad (3.28)$$

obteniendo así el modelo:

$$\dot{A} + \sigma(1 + a^2)A - \frac{\sigma a}{(1 + a^2)}D - \frac{1}{2}a \frac{(3 + a^2)}{(1 + a^2)}BC = 0 \quad (3.29a)$$

$$\dot{B} + \sigma B + \frac{3}{4}aAC = 0 \quad (3.29b)$$

$$\dot{C} + \sigma(4 + a^2)C + \frac{a\sigma}{(4 + a^2)}F + \frac{a^3}{2(4 + a^2)}AB = 0 \quad (3.29c)$$

$$\dot{D} + (1 + a^2)D - RaA + aAE + \frac{1}{2}aBF = 0 \quad (3.29d)$$

$$\dot{E} + 4E - \frac{1}{2}aAD = 0 \quad (3.29e)$$

$$\dot{F} + (4 + a^2)F + RaC - \frac{1}{2}aBD = 0 \quad (3.29f)$$

$$\dot{G} + 9\sigma G - \frac{9}{4}AC = 0 \quad (3.29g)$$

$$\dot{H} + 16H + 8aCF = 0 \quad (3.29h)$$

Mediante la búsqueda de ciclos límite para este modelo, se revelaron algunos valores de parámetros que nos servirán para comparar este modelo con sus antecesores de menor orden, como por ejemplo los parámetros usados en la figura 3.4.

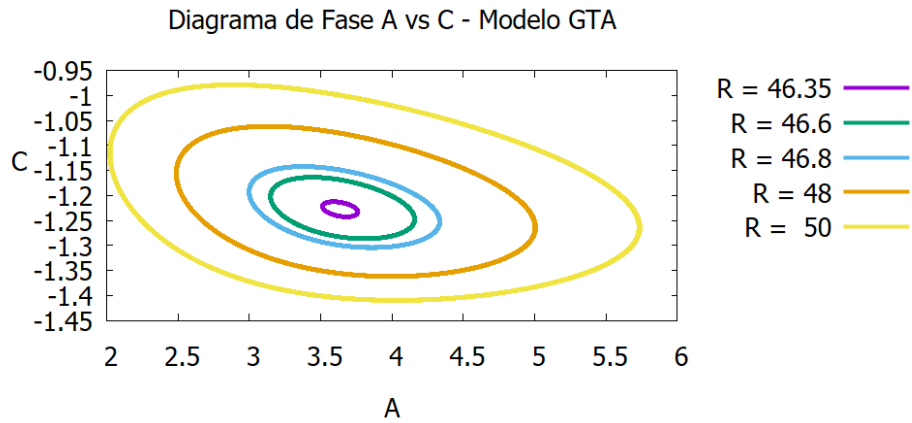


Figura 3.4: Órbitas periódicas en el espacio fase A vs C, para el modelo de GTA-8 modos de Fourier. Se utilizaron los valores de parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de  $R$  señalados en la figura.

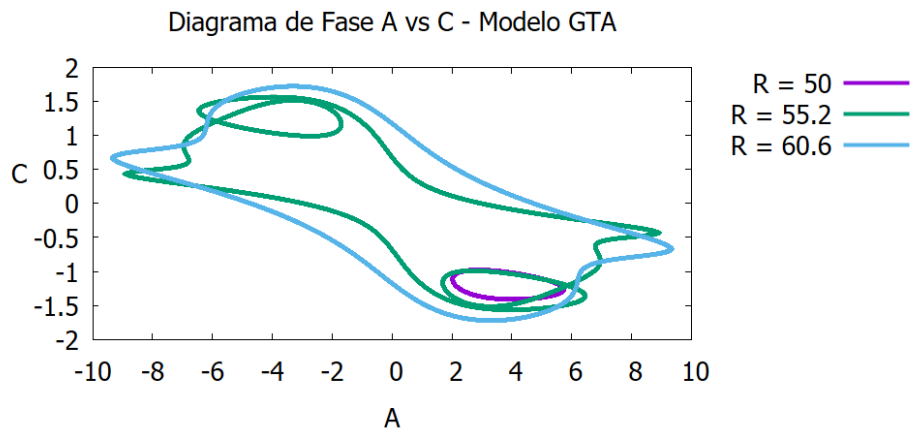


Figura 3.5: Órbitas periódicas en el espacio fase A vs C, para el modelo de GTA-8 modos de Fourier. Se utilizaron los valores de parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de  $R$  señalados en la figura.

## 3.2. Ecuaciones de advección

### 3.2.1. Advección Pasiva

Como se mencionó en la introducción, se pueden escribir las ecuaciones de las velocidades para las partículas soluto en su aproximación pasiva, de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3.30}$$

Según la elección del ansatz, estas ecuaciones van a cambiar su forma funcional. Para

el caso del modelo de Lorenz Clásico, solo depende del coeficiente  $A$ . Para el modelo de Howard y Krishnamurti, se aumenta su dependencia en los coeficientes  $B$  y  $C$ ; esto se mantiene para el modelo de Horton y Thiffeault, ya que en dicho modelo, el modo adicional que contempla su *ansatz* es para la función de temperatura, y no para la función de corriente. En el modelo de Hermiz y Finn si aparece una coeficiente  $G$ , al igual que en el modelo GTA.

### 3.2.2. Advección con inercia

Veamos ahora cómo van a cambiar las ecuaciones de advección si se considera que las partículas tienen una densidad comparable con la densidad del fluido. Crisanti et al. en 1992 [46], ya habían estudiado el movimiento de impurezas advectadas pasivamente, con densidad diferente del fluido. Ellos encontraron que las propiedades del movimiento de las partículas dependen en gran medida de la razón entre ambas densidades.

Partiendo del análisis de las fuerzas que siente la partícula soluto, la manera más simple que podemos considerar es la siguiente:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \delta \frac{D\vec{u}}{Dt} - \mu \left( \frac{d\vec{x}}{dt} - \vec{u} \right) \quad (3.31)$$

donde aparece la derivada material  $\frac{D\vec{f}}{Dt} = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{f}$ ; aquí  $\vec{u}$  es el campo de velocidades del fluido. La variable  $\delta$  es la razón entre la densidad del fluido  $\rho_f$  y la densidad de la partícula  $\rho_p$ . Al incluir la función de corriente obtenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \delta \frac{\partial^2\Psi}{\partial t \partial z} - \delta J \left( \Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{dx}{dt} - \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) \quad (3.32)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\delta \frac{\partial^2\Psi}{\partial t \partial x} + \delta J \left( \Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) - \mu \left( \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) \quad (3.33)$$

Posteriormente, se analizó la evolución del sistema dinámico junto con las velocidades correspondientes a la advección con inercia y se encontró que la aparición del  $R_c$  se daba para valores diferentes respecto a las velocidades de advección pasiva. Lo anterior se realizó tanto para el modelo 6 como para el de 8 modos. Se eligieron algunos valores de  $R$  para los que se observó aparición de órbitas periódicas, los cuales coinciden con los valores expuestos en el modelo para partículas pasivas.

# Capítulo 4

## Transporte de partículas soluto en modelos tipo Lorenz

Un modelo dinámico  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ , se puede resolver numéricamente usando el método de Runge-Kutta de orden 4 [40]. Anteriormente, se expuso la construcción de modelos de Lorenz de bajo orden para un flujo de Rayleigh-Benard; una vez resuelto nuestro sistema mediante integración numérica, tendremos  $\vec{x}(t)$ , variable dinámica (no confundir con la variable espacial  $x$ ), que en nuestro caso equivaldría a encontrar los coeficientes de la expansión de Fourier ( $A(t_i), B(t_i), C(t_i), \dots$ ), para un  $t_i$  dentro del tiempo de integración considerado. Una vez conociendo estos coeficientes, podemos almacenar un registro de cuál es el campo de velocidades y temperatura del fluido en el tiempo; esto es muy importante ya que, en particular, conocer el campo de velocidades del fluido nos permite evaluar las ecuaciones de advección para partículas soluto, ya sean pasivas o no pasivas. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones diferenciales del modelo dinámico y las ecuaciones de advección obtendremos también las posiciones de las partículas afectadas conforme se evoluciona el sistema.

La difusión de partículas en un fluido con flujo R-B se considerará esencialmente un proceso unidimensional, debido a que asumimos que en la dirección  $x$  nuestro sistema se extiende infinitamente. Para la difusión a lo largo de una línea calculamos el **desplazamiento cuadrático medio**, esto lo podemos hacer a un conjunto de partículas que inicialmente se encuentran en una nube o región muy pequeña y que es liberada en el dominio del flujo; el desplazamiento cuadrático medio está definido cómo:

$$\Delta X^2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle (x - x_0)^2 \rangle \quad (4.1)$$

donde  $x_0$  hace referencia a la posición inicial de las partículas. Los corchetes  $\langle \rangle$  representan el promedio sobre todas las partículas en esa nube. Por otro lado, el **coeficiente de difusión** está definido como:

$$D(t) = \frac{\Delta X^2(t)}{2t} \quad (4.2)$$



Esta expresión fue usada desde los primeros estudios de movimiento browniano [42] y en la literatura se pueden encontrar diferentes caminos que llevan a su derivación, [43].

Podemos obtener información sobre el proceso de transporte a partir de la relación:

$$\Delta X^2(t) \sim \text{constante} \times t^m, \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

tal como lo realizó Binson [?], para estudiar la advección caótica aplicando el modelo de Howard y Krishnamurti.

De la ecuación 4.3, aplicando el logaritmo, obtenemos:

$$\ln(\Delta X^2(t)) = m * \ln(t) + \text{constante}. \quad (4.4)$$

y en función de encontrar los valores de  $m$ , podemos trabajar ahora con una ecuación lineal. Haciendo un ajuste por mínimos cuadrados, para una expresión del tipo  $f(x) = mx + b$ , tenemos:

$$m = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i f(x_i)) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n f(x_i))}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n f(x_i))^2} \quad (4.5)$$

que es la pendiente de la recta que mejor se ajusta a un conjunto de  $n$  puntos  $(x_i, f(x_i))$ .

El error para el cálculo de  $m$ , estará dado por:

$$\Delta m = \sqrt{\frac{n(\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2)}{(n-2)((\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n f(x_i))^2)} \quad (4.6)$$

donde requerimos encontrar los residuos  $y_i - f(x_i)$  de los datos obtenidos numéricamente respecto a los valores esperados del ajuste.

En el código utilizado se definen condiciones iniciales aleatorias para las posiciones  $(x_0, z_0)$  de cada una de las partículas en la nube; en nuestro caso tomaremos un total de 5,000 y 10,000 partículas. En el mismo, se resuelve el modelo dinámico de interés conjuntamente con las ecuaciones del transporte advectivo. Posterior a ello, se hace el cálculo del desplazamiento cuadrático medio y el coeficiente de difusión.

Nos interesa de manera especial analizar el proceso de difusión de partículas soluto usando el modelo GTA, que usa 8 modos en su base de Fourier; lo anterior porque este

modelo fue construido tomando en cuenta la conservación de la energía y vorticidad total, a diferencia del modelo HK; siendo estas diferencias entre ambos modelos de importancia para tener una predicción realista en un amplio régimen de parámetros. Compararemos los resultados previos del estudio de la difusión para el modelo de HK con los que se obtendrán para el modelo de GTA. Adicionalmente, considerando partícula no pasivas en el modelo GTA, nos interesaría visualizar el efecto sobre difusión debido a la densidad relativa entre el fluido y la partícula. Todos estos resultados se exponen en las siguientes secciones.

## 4.1. Desplazamiento cuadrático Medio y Coeficiente de Difusión.

Se realizaron los cálculos del desplazamiento cuadrático medio así como del coeficiente de difusión, para el modelo GTA, usando 5,000 y 10,000 partículas pasivas y no pasivas; del mismo modo, se realizaron los mismos cálculos para el modelo HK usando partículas pasivas. En la tabla 4.1 se muestran algunos resultados del modelo GTA con partículas pasivas donde se eligieron algunos valores representativos del número de Rayleigh para los cuales tenemos la aparición de órbitas periódicas, como se muestra en las figuras (3.4) y (3.5) para el plano AC.

		GTA - pasivas	
R \ N°p		5,000	10,000
46.35		$m = 1.67 \pm 2 \times 10^{-3}$	$m = 1.63 \pm 2 \times 10^{-3}$
46.6		$m = 1.73 \pm 3 \times 10^{-3}$	$m = 1.82 \pm 3 \times 10^{-3}$
46.8		$m = 1.81 \pm 2 \times 10^{-3}$	$m = 1.82 \pm 1 \times 10^{-3}$
48		$m = 1.97 \pm 9 \times 10^{-4}$	$m = 1.97 \pm 1 \times 10^{-3}$
50		$m = 1.88 \pm 1 \times 10^{-3}$	$m = 1.88 \pm 1 \times 10^{-3}$
55.2		$m = 1.75 \pm 6 \times 10^{-4}$	$m = 1.77 \pm 8 \times 10^{-4}$
60.593		$m = 1.65 \pm 1 \times 10^{-3}$	$m = 1.63 \pm 1 \times 10^{-3}$

Tabla 4.1: Exponente de difusión  $m$ , evaluado para el modelo GTA, en la advección de partículas pasivas para diferentes valores de  $R$ . Se usaron dos nubes de condiciones iniciales de 5,000 y 10,000 partículas, liberadas en una región inicial pequeña en el dominio  $[-1.0, 1.0] \times [0.1, 2.1]$ . Se usaron los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para un tiempo total de integración  $t = 100$ .

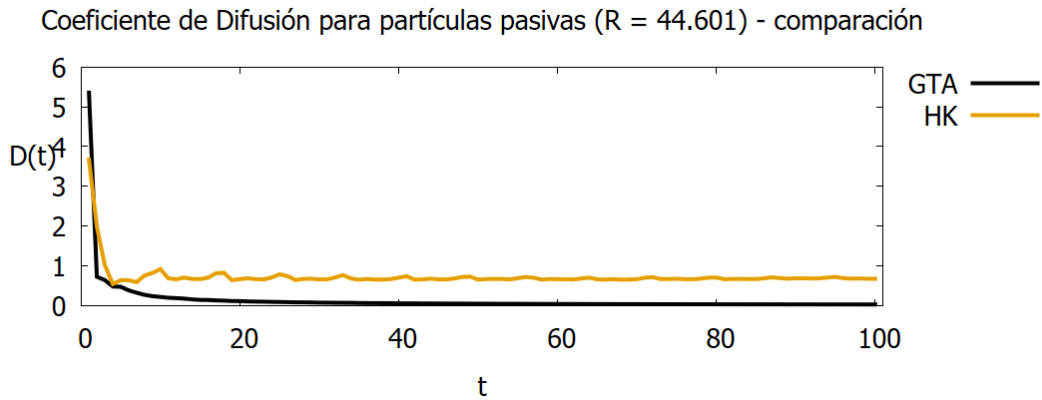


Figura 4.1: Coeficiente de Difusión para partículas pasivas evaluadas en dos diferentes modelos HK y GTA. El cálculo se realizó para 10,000 condiciones iniciales, usando los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ ,  $R = 44.601$ , para un tiempo total  $t = 100$ .

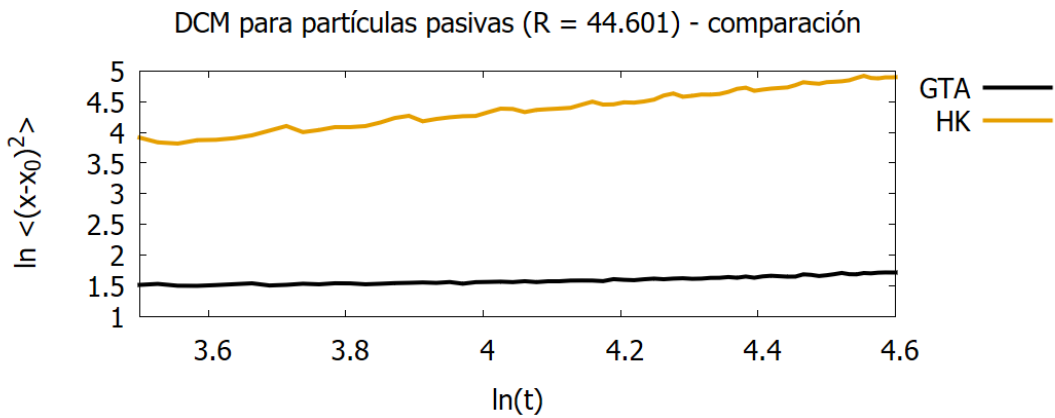


Figura 4.2: Desplazamiento cuadrático medio para partículas pasivas evaluadas en dos diferentes modelos HK y GTA. El cálculo se realizó para 10,000 condiciones iniciales, usando los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ ,  $R = 44.601$ , obteniendo los valores de  $m = 1.005509 \pm 0.011883$  para HK y de  $m = 0.394366 \pm 0.007013$  para GTA.

Los resultados para el coeficiente  $m$  se mantuvieron muy cercanos al considerar nubes con un número diferente de condiciones iniciales, en la aproximación de partículas pasivas. Esta característica se mantuvo de igual manera cuando se consideraron partículas con inercia. En la tabla 4.2, se muestran una compilación de los exponentes  $m$  obtuvieron para el modelo GTA y partículas con inercia, al considerar valores de la densidad relativa, ligeramente mayor y menos que 1.

$R$	GTA - inercia		
	$\delta$	5,000	10,000
46.35	0.9	$m = 0.86 \pm 2x10^{-3}$	$m = 0.87 \pm 2x10^{-3}$
	1.1	$m = 0.00 \pm 5x10^{-3}$	$m = 0.00 \pm 1x10^{-3}$
50	0.9	$m = 1.379 \pm 1x10^{-2}$	$m = 1.51 \pm 1x10^{-2}$
	1.1	$m = 0.01 \pm 1x10^{-3}$	$m = 0.01 \pm 1x10^{-3}$
60	0.9	$m = 1.37 \pm 4x10^{-3}$	$m = 1.33 \pm 7x10^{-3}$
	1.1	$m = 0.99 \pm 3x10^{-3}$	$m = 0.99 \pm 3x10^{-3}$

Tabla 4.2: Exponente de difusión  $m$ , evaluado para el modelo GTA, en la advección de partículas con inercia para diferentes valores de  $R$ . Se usaron dos nubes de condiciones iniciales de 5,000 y 10,000 partículas, liberadas en una región inicial pequeña en el dominio  $[-1.0, 1.0] \times [0.1, 2.1]$ . Se usaron los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para un tiempo total de integración  $t = 100$ , para dos densidades relativas cercanas a 1.

De esta última tabla, se observó que para partículas ligeras, comparadas con la densidad del fluido ( $\delta = 0.9$ ), el coeficiente  $m$  tiende a ser más grande que si, por el contrario, consideramos partículas densas ( $\delta = 1.1$ ); esto se observó por igual para los valores de  $R$  analizados. Por otro lado, si se mantiene una densidad relativa fija, al aumentar el número de Rayleigh el coeficiente  $m$  va aumentando también, tal como se muestra en la serie de figuras 4.3 hasta 4.6.

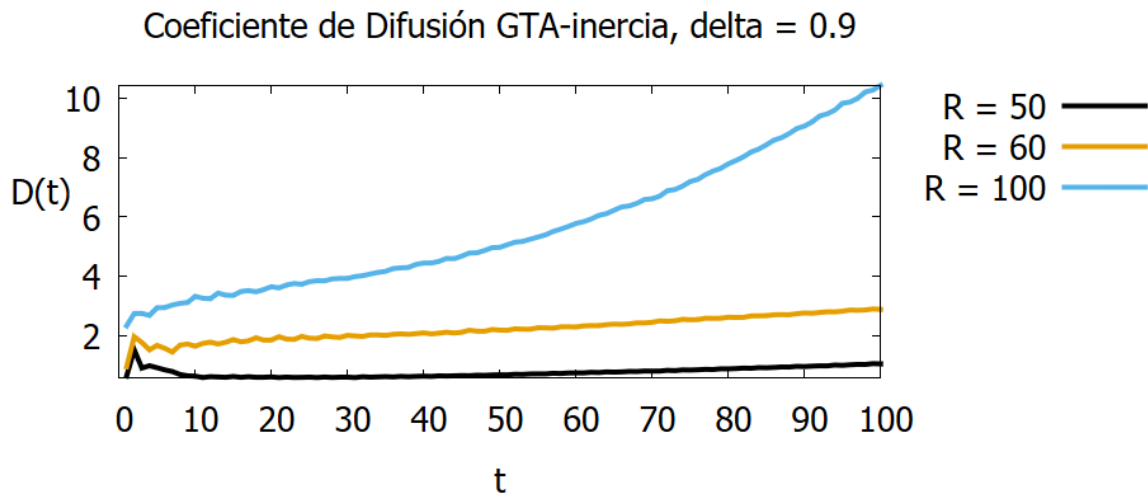


Figura 4.3: Coeficiente de Difusión de 10,000 partículas con densidad relativa  $\delta = 0.9$  para el modelo GTA, tomando los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R señalados en la figura.

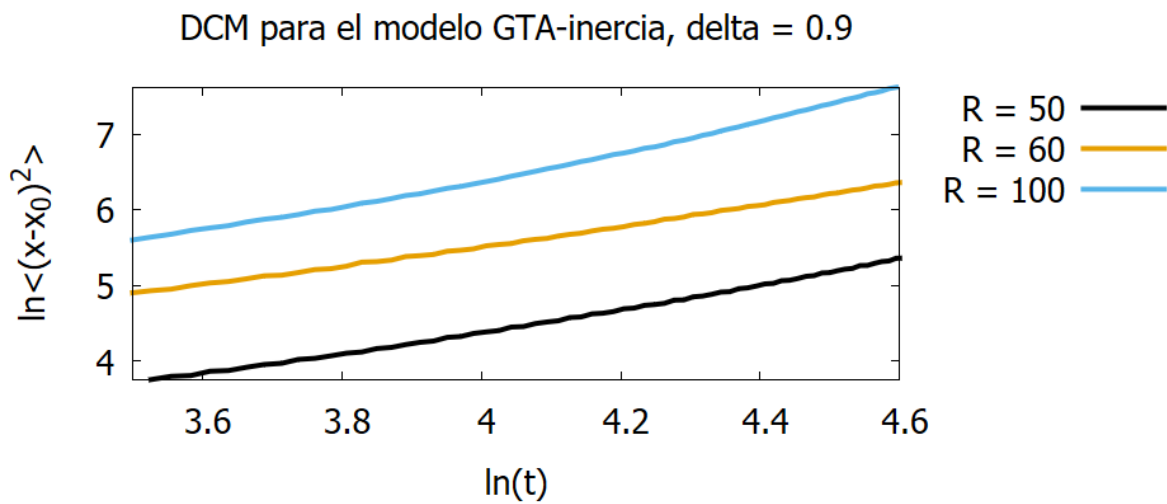


Figura 4.4: Desplazamiento cuadrático medio de 10,000 partículas con densidad relativa  $\delta = 0.9$  para el modelo GTA, tomando los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R señalados en la figura.

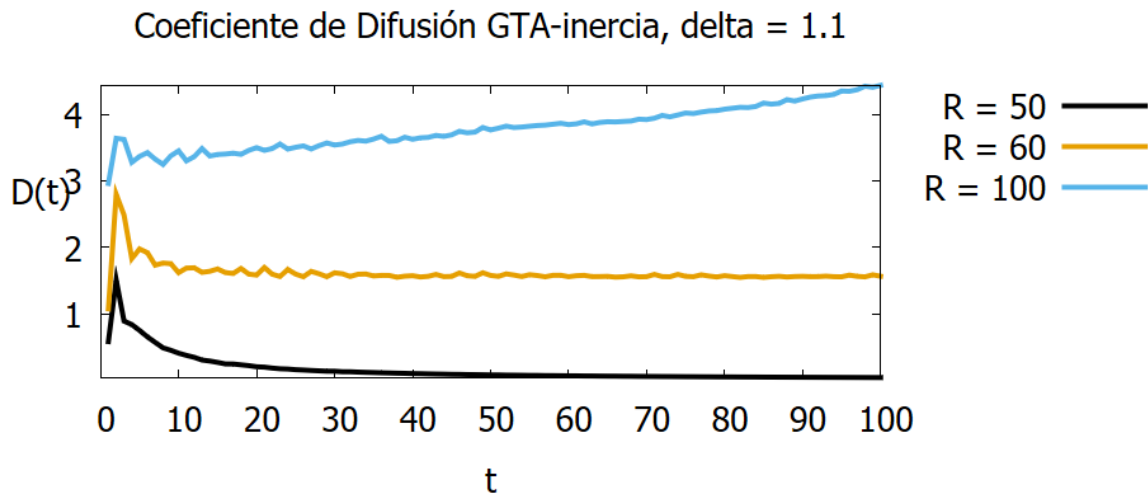


Figura 4.5: Coeficiente de Difusión de 10,000 partículas con densidad relativa  $\delta = 1.1$  para el modelo GTA, tomando los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R señalados en la figura.

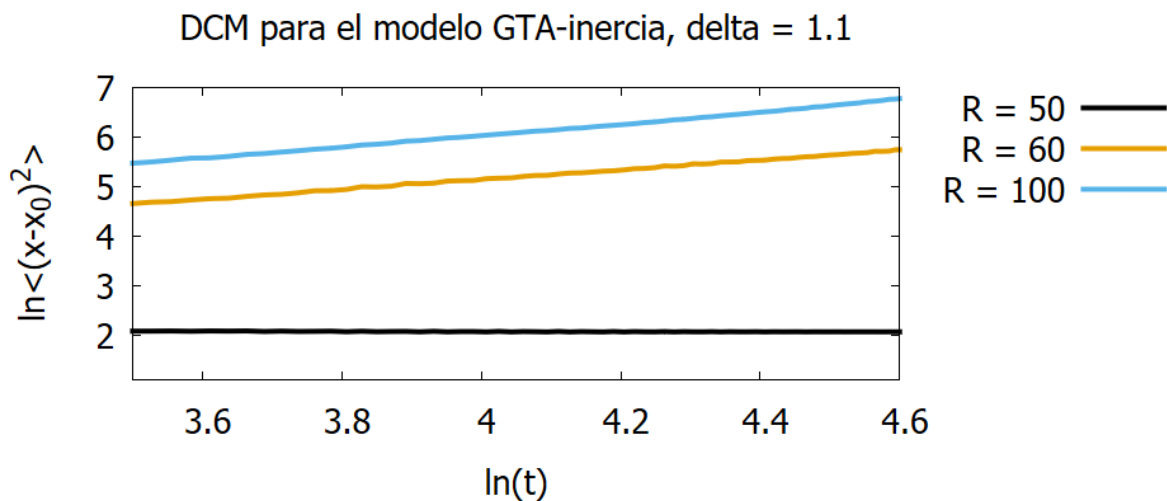


Figura 4.6: Desplazamiento cuadrático medio de 10,000 partículas con densidad relativa  $\delta = 1.1$  para el modelo GTA, tomando los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , para diferentes valores de R señalados en la figura.

## 4.2. Evolución de una nube de partículas en el espacio de configuración del sistema.

Con motivo de visualizar la dispersión de la nube de partículas de nuestro problema, se adjuntan a continuación algunas figuras. En (4.7) se muestran 10,000 partículas, que sigue el modelo de HK para la temperatura y función de corriente. En ella vemos como a un tiempo corto se visualiza la formación de celdas inclinadas, cómo está predicho para ese modelo al usar el valor de  $R = 42.38831$  que corresponde a una órbita periódica. En (4.8) se usó el mismo valor de  $R$ , de igual manera para un tiempo final  $t = 6$ , en la advección pasiva usando el modelo GTA. Aquí apreciamos que en este modelo alcanza un área menor pero las partículas están más distribuidas que en el caso del modelo HK.

En la figura 4.9 se comparó la dispersión de la nube de partículas para los modelos HK y GTA para el valor  $R = 44.601$ ; aquí podemos ver que a tiempos cortos predomina el área ocupada por el modelo GTA, y después éste se dispersa más lento, de tal forma que no hay una diferencia considerable entre los tiempos  $t = 60$  y  $t = 100$ . Sin embargo para el caso del modelo HK, la velocidad con que se dispersan las partículas parece aumentar, ya que para el tiempo final considerado, la dispersión para un modelo u otro es muy similar en área. Esto podría tener relación con la consideración de conservación de la energía. Por otro lado, es en el modelo de GTA donde aún se visualizan de manera clara las celdas de convección; esto último puede ser consecuencia de la conservación de la vorticidad para el modelo GTA.

En la figura (4.10) se analizó ahora la dispersión de partículas con inercia, para las cuales se eligió densidades relativas apenas por debajo de 1 o un poco mayor (0.9 y 1.1), ya que el valor de  $\delta = 1$  correspondería a la aproximación pasiva. Se eligió el valor de  $R = 60$ , para el cual el coeficiente de difusión  $m$  es ligeramente mayor para partículas ligeras. Para tiempos cortos predomina la dispersión de partículas densas en dirección  $x$ , pero a partir de  $t = 20$ , hasta  $t = 100$ , el área que cubren ambas nubes es muy similar. Adicionalmente, las partículas más densas tienden a formar estructuras a diferencia de las partículas ligeras que parecen llegar el espacio de manera aleatoria.

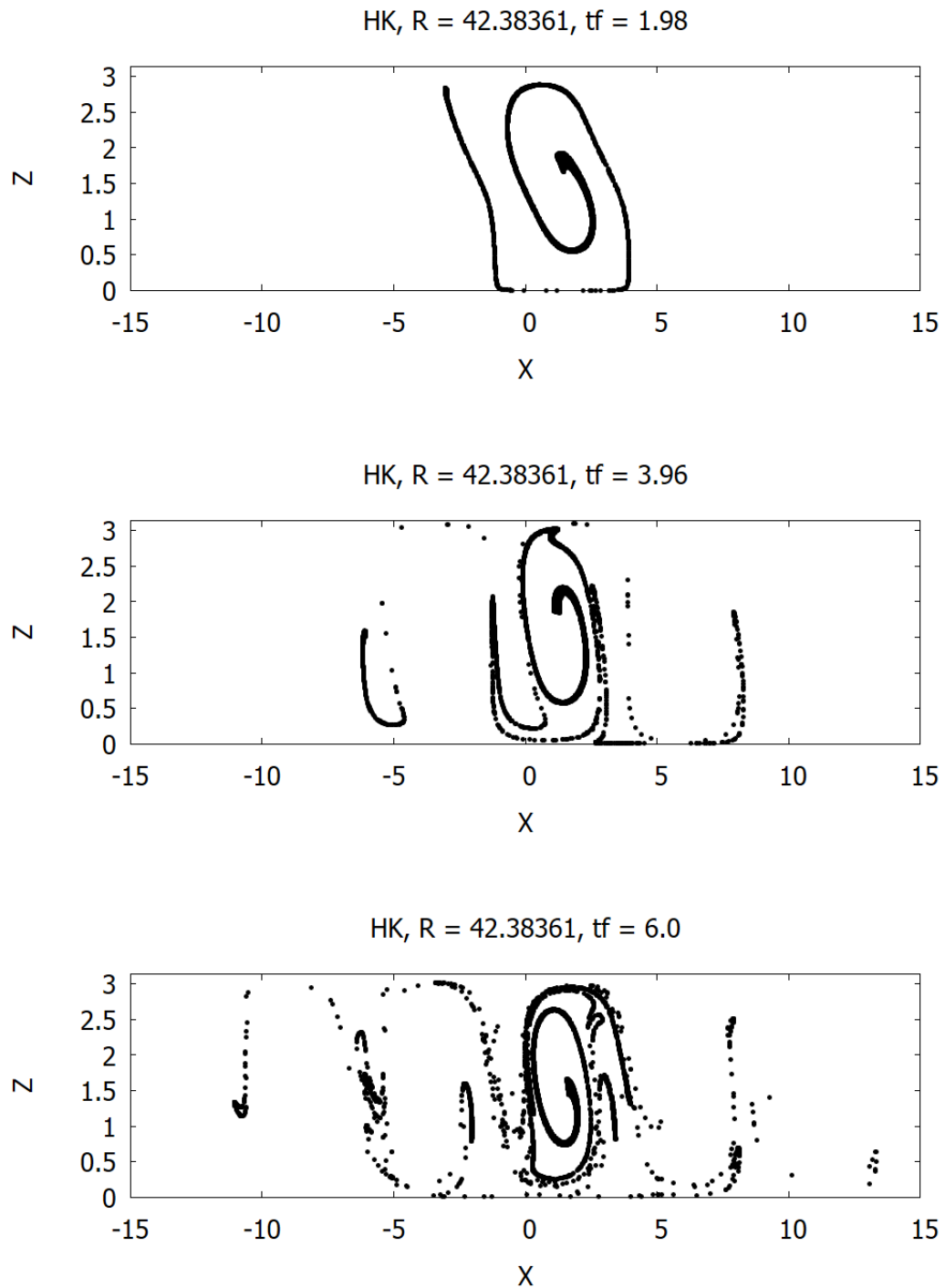


Figura 4.7: Evolución de una nube de 10,000 partículas pasivas; con CI aleatorias en el dominio  $[-1, 1] \times [1.4, 1.6]$ , siguiendo el modelo de HK, que se integró con los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , y  $R = 42.38361$ . Se muestran figuras para diferentes tiempos finales hasta un tiempo.



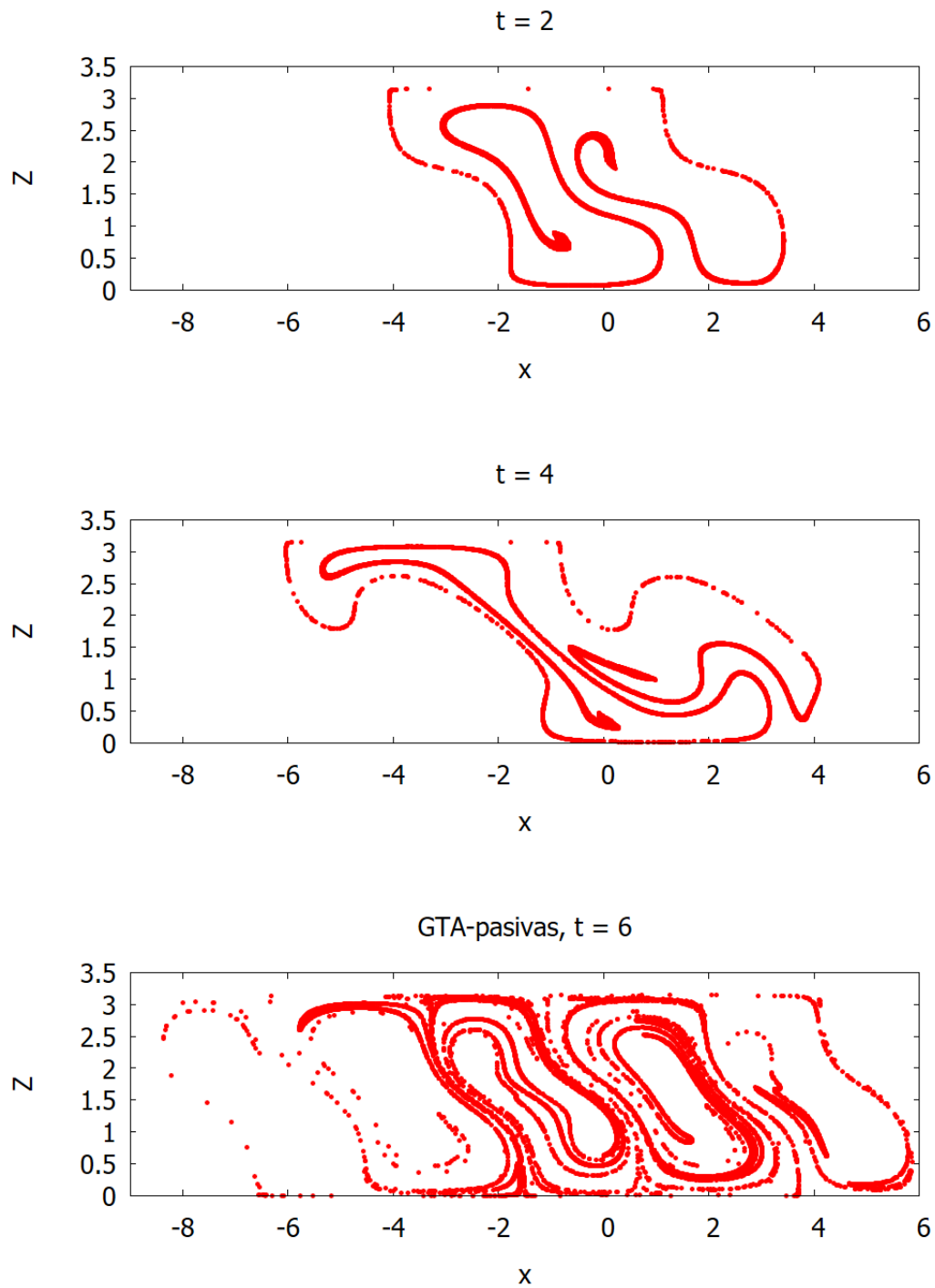


Figura 4.8: Evolución de una nube de 10,000 partículas pasivas; con CI aleatorias en el dominio  $[-1, 1] \times [1.4, 1.6]$ , siguiendo el modelo de GTA, que se integró con los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , y  $R = 42.38361$ . Se muestran figuras para diferentes tiempos finales hasta un tiempo.

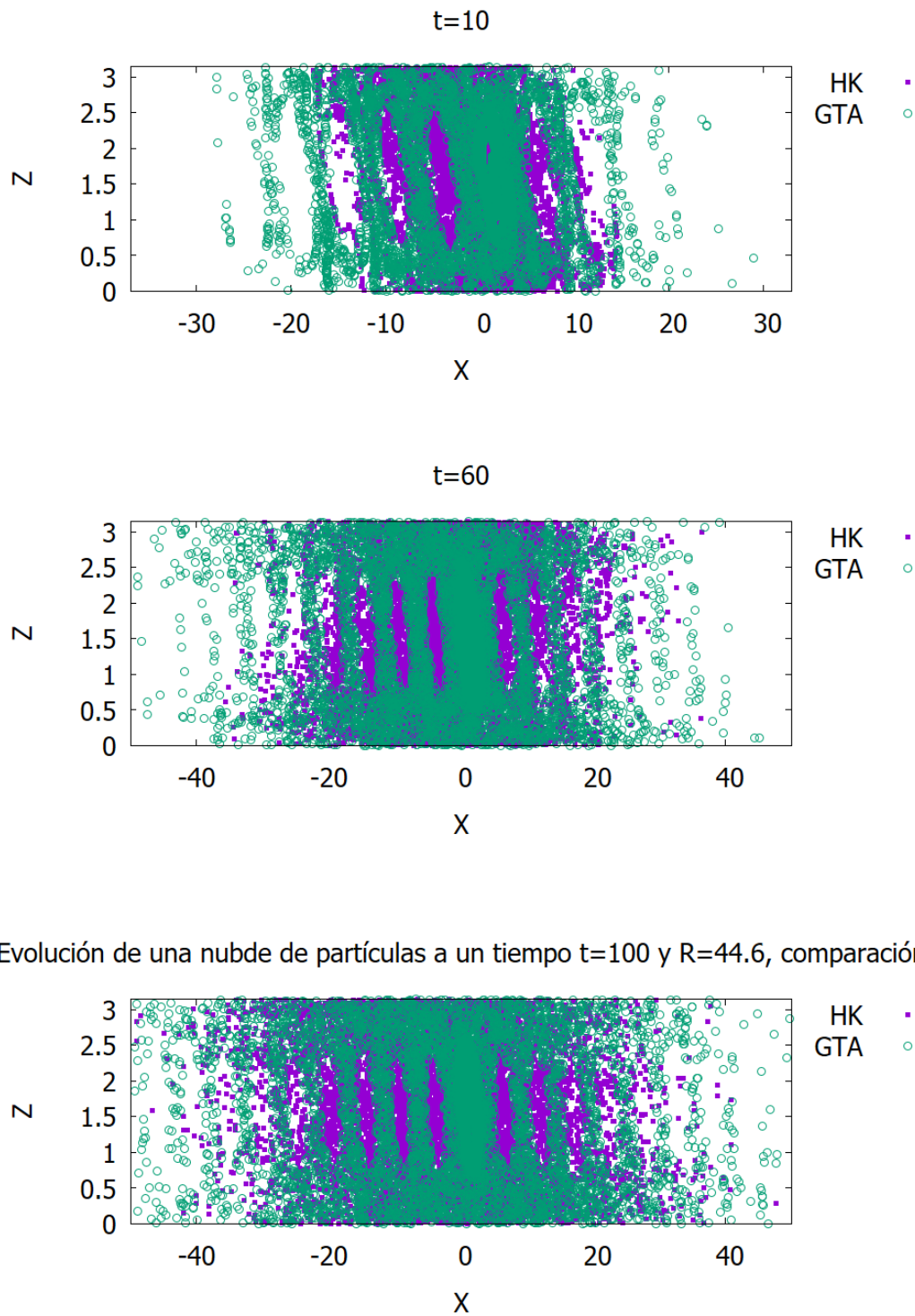


Figura 4.9: Evolución de una nube de 10,000 partículas pasivas; con CI aleatorias en el dominio  $[-1, 1] \times [1.4, 1.6]$ , siguiendo los modelos mencionados en la figura; que se integró con los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , y  $R = 44.6$ . Se muestran figuras para diferentes tiempos finales, para tiempo grandes.

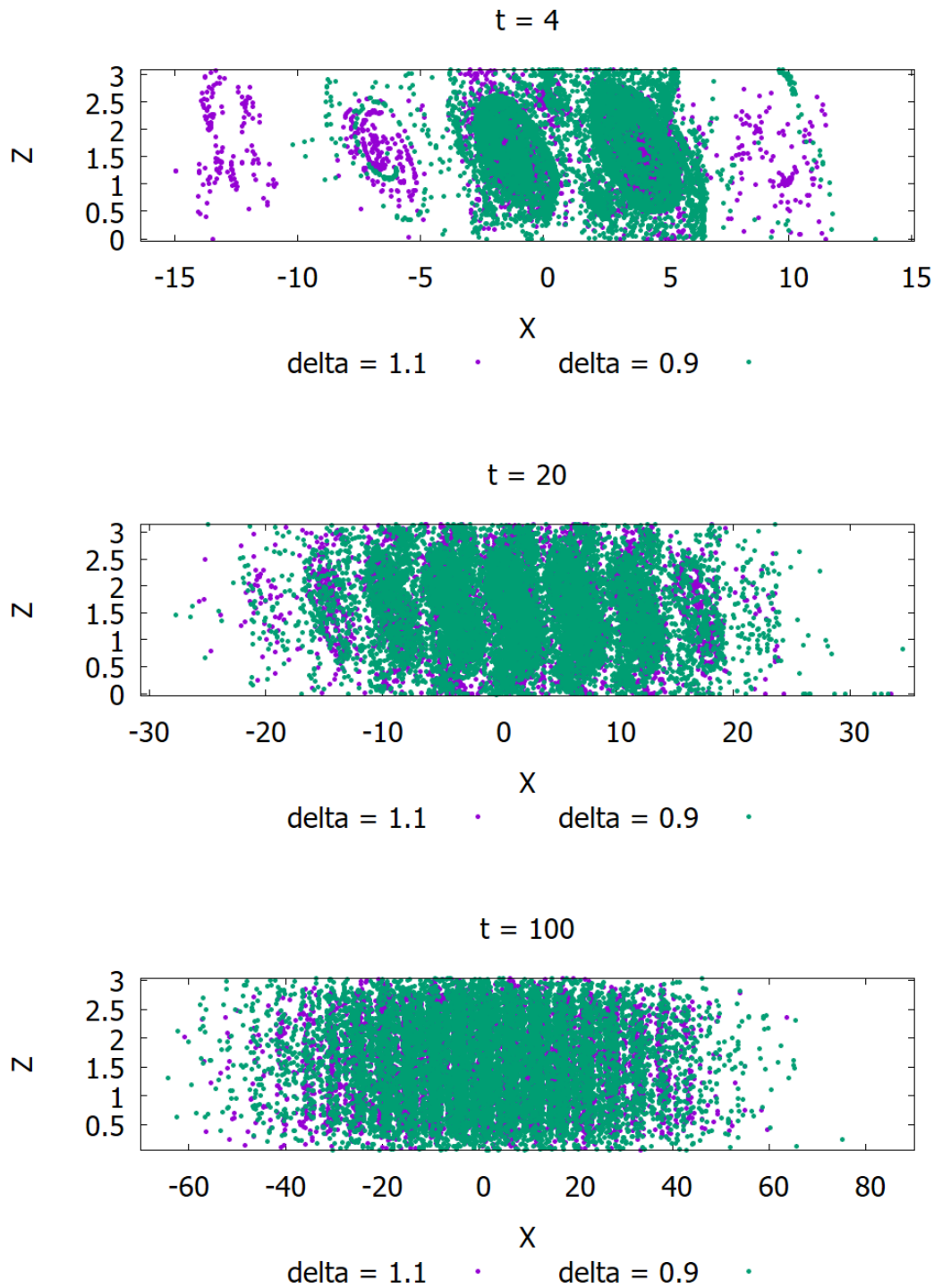


Figura 4.10: Evolución de una nube de 10,000 partículas con inercia; con CI aleatorias en el dominio  $[-1, 1] \times [1.4, 1.6]$ , siguiendo el modelo GTA; que se integró con los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , y  $R = 60$ . Se muestran figuras para diferentes tiempos finales, y comparando para partículas de densidad relativa señaladas en la figura.

## Capítulo 5

# Caos dinámico y su relación con la advección

Hasta el momento se han integrado las ecuaciones diferenciales de modelos tipo Lorenz junto con las ecuaciones de advección, indicando las condiciones iniciales para cada una de las variables: por un lado las posiciones  $(x_{0i}, z_{0i})$  de todas las partículas en una nube inicial, por otro lado los valores de los coeficientes  $A_0, B_0, \dots$ , para un tiempo  $t_0$ . Conforme se evoluciona el modelo (se integra numéricamente), se van registrando los valores que tendrán las variables en tiempos posteriores. Al estudiar advección de partículas soluto en 2 dimensiones, es posible encontrar caos advectivo si se tiene una dependencia temporal de los coeficientes del modelo que están contenidos en la función de corriente. De manera cualitativa puede observarse graficando los valores de alguno de los coeficientes, y también por la aparición de órbitas periódicas en el espacio fase del modelo. Que exista un atractor (punto fijo u órbita periódica) para un modelo dinámico, se traduce en la convergencia de las trayectorias, solución del sistema, hacia un atractor. Sin embargo, una causalidad de las ecuaciones no lineales como de las que está compuesto el modelo de Lorenz, es si se modificara ligeramente las condiciones iniciales, nuestras predicciones sobre la convergencia de las trayectorias podría cambiar drásticamente y eso representa un problema muy grande, especialmente para poder llevar a cabo experimentos donde puede haber un sesgo por la intervención humana.

Una de las observaciones fundamentales del modelo de Lorenz Clásico desde su aparición, fue que para ciertos regímenes del número de Rayleigh, si se consideran cambios muy pequeños en las condiciones iniciales se pueden provocar grandes cambios en las predicciones. En otras palabras, el modelo era altamente sensible a las condiciones iniciales. Esto tiene fuertes implicaciones; en el caso hipotético en que se pudieran conocer con toda precisión las condiciones iniciales del campo de velocidad y temperatura de la atmósfera, pero revoloteara repentinamente una mariposa cambiándolas, esa pequeña variación en las condiciones iniciales podría cambiar en forma drástica la predicción del modelo, por lo que sería imposible tener pronósticos del clima a largo plazo. Este efecto, lo explicó Lorenz en el 139th Meeting of the American Association for the Advancement of Science (Diciembre de 1972), el título de su presentación fue: “Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?”. Los detalles de su experiencia con su modelo pueden

leerse en el libro “The Essence of Chaos” [17]. En su libro, Strogatz [18] señala que no hay una definición de caos universalmente aceptada, pero casi todos concordarían en que *Caos es un comportamiento aperiódico en un sistema determinístico con alta sensibilidad a las condiciones iniciales*. Los comportamientos irregulares que puede presentar el modelo se deben a su carácter no lineal.

Debido a la naturaleza del modelo utilizado en este trabajo, surge la necesidad de evaluar la aparición de caos dinámico y en qué parámetros se manifiesta, ya que para estudiar la advección de partículas, queremos evitar dichos regímenes de parámetros donde exista caos dinámico. Una herramienta muy poderosa que nos da información cuantitativa del caos dinámico de un modelo son los exponentes de Lyapunov. A continuación se dará una breve explicación de su derivación y su implementación numérica para realizar dicho análisis al modelo GTA que hemos ido estudiando a lo largo de este trabajo. De tal manera se realiza el cálculo del espectro de Lyapunov respecto al número de Rayleigh.

## 5.1. Exponentes de Lyapunov

La noción de que las trayectorias obtenidas de la solución de un sistema dinámico divergen exponencialmente se introduce formalmente definiendo los *exponentes de Lyapunov*. Consideremos dos condiciones iniciales cercanas  $x_0$  y  $x$  y sea  $\vec{x}(t)$  la trayectoria que inicia en  $x_0$  mientras que  $\vec{x}(t) + \delta t$  es la trayectoria que inicia en  $x$ , como se muestra en la figura 5.1.

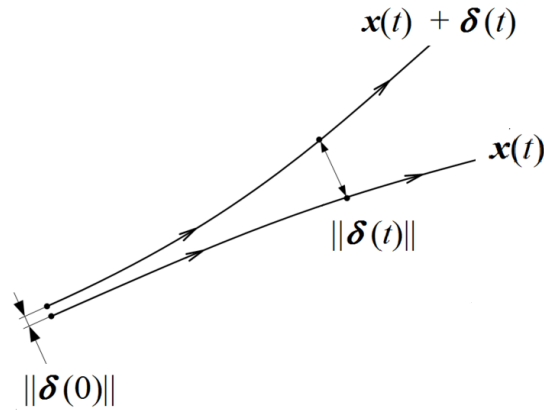


Figura 5.1: Ilustración de la divergencia de trayectorias con condiciones iniciales cercanas, siendo  $\|\delta(t)\|$  la distancia entre ambas trayectorias al tiempo  $t$ .

Queremos entonces conocer cómo evoluciona con el tiempo la distancia que existe entre las trayectorias,  $\|\delta(t)\|$  asumimos que

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(x) \quad (5.1)$$

Sea entonces un punto cercano  $x$ , podemos usar una expansión en series de Taylor en torno al punto  $x_0$  para escribir

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots \quad (5.2)$$

por otro lado, la razón de cambio de la distancia entre las trayectorias esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{d} &= \dot{x} - \dot{x}_0 \\ &= f(x) - f(x_0) \\ &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \end{aligned} \quad (5.3)$$

por tanto, la ecuación para la evolución de la distancia es

$$\dot{d} = \lambda d, \quad (5.4)$$

con  $\lambda = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$ ,  $\lambda$  es llamado *exponente de Lyapunov*, entonces la distancia al tiempo  $t$  entre dos trayectorias que comienzan en puntos cercanos esta dada por

$$d(t) = d_0 \exp^{\lambda t}, \quad (5.5)$$

en esta ecuación vemos que si  $\lambda$  es positivo las dos trayectorias divergen y si  $\lambda$  es negativo convergen.

Para mapeos discretos, de la forma  $x_{n+1} = f(x_n)$  podemos derivar una formula computacional útil para  $\lambda$ , consideremos dos trayectorias que cercanas que inician en  $x$  y  $x_0$ , sea  $d_n$  la separación entre las trayectorias despues de  $n$  iteraciones, entonces  $d_n = d_0 e^{\lambda n}$  ahora tomando el logaritmo y notando que  $d_n = f^n(x) - f^n(x_0)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d_n}{d_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x) - f^n(x_0)}{d_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)| \end{aligned} \quad (5.6)$$

Donde  $|(f^n)'(x_0)|$  es el valor absoluto de la primera derivada de la n-ésima iteración de  $f$  a partir de  $x_0$ , que usando regla de la cadena escribimos  $(f^n(x))'(x_0)$  como

$$(f^n(x))'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i), \quad (5.7)$$

de aqui se tiene que

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right|, \quad (5.8)$$

si esta expresión tiene límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , definimos este límite como el *exponente de Lyapunov* para la órbita que comienza en  $x_0$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right]. \quad (5.9)$$

Para sistemas de orden superior, el número de exponentes corresponde a la dimensión del sistema. No existe una fórmula exacta para calcular los exponentes de Lyapunov para sistemas  $n$ -dimensionales, como existe para mapeos discretos, pero se han desarrollado diversos algoritmos para su cálculo. Se eligió el llamado **Método estándar** debido a que ha demostrado ser el más eficiente en cuanto al tiempo que concierne el cálculo en el CPU, como se muestra detalladamente en Ramasubramanian Y Sriram (2000) [44].

### 5.1.1. Método Estándar para el cálculo de los exponentes de Lyapunov

En un sistema continuo  $n$ -dimensional, la noción de separación entre dos trayectorias que se analiza en una o dos dimensiones, se traduce a monitorear la evolución a largo plazo de una  $n$ -esfera infinitesimal de condiciones iniciales, esto se lleva a cabo eligiendo  $n$  condiciones iniciales sobre la superficie de la esfera y una condición inicial que señale el centro de la misma, los exponentes de Lyapunov son determinados por el comportamiento de los ejes que se forman con la superficie y el centro de la  $n$ -esfera el cual evoluciona con las ecuaciones de movimiento no lineales, las trayectorias que siguen los ejes están definidas por la acción de las ecuaciones de movimiento linealizadas en puntos separados infinitesimalmente de la trayectoria del centro de la esfera, como se muestra en la figura (5.2), estas ecuaciones son linealizadas cada periodo de tiempo  $\tau$ .

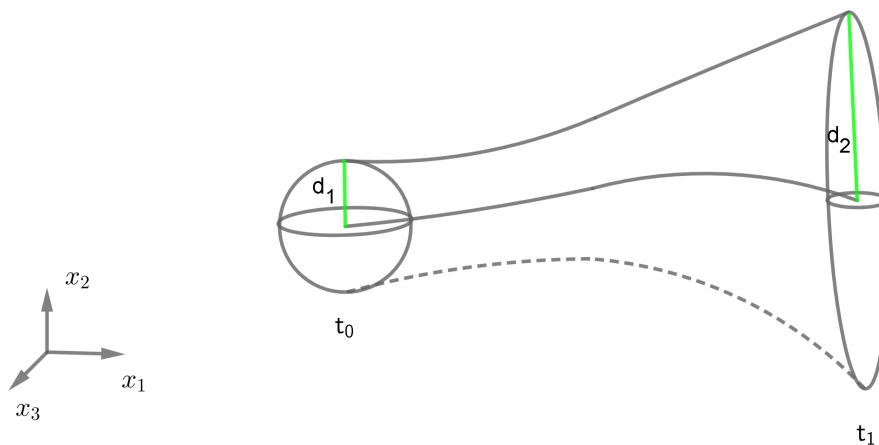


Figura 5.2: Evolución de los ejes principales con el tiempo

Para llevar a cabo este procedimiento consideremos el sistema n-dimensional

$$\dot{\vec{Z}} = \vec{F}(\vec{Z}, t), \quad (5.10)$$

la trayectoria fiducial (la evolución del centro de la esfera) es creada integrando el sistema anterior para alguna condición inicial  $\vec{Z}_0$ .

Para definir la trayectoria que siguen los punto sobre la superficie de la esfera consideremos una pequeña perturbación  $\delta\vec{Z} = \vec{Z} - \vec{Z}_0$  cerca de  $\vec{Z}_0$ , diferenciamos  $\delta\vec{Z}$  para determinar su comportamiento a lo largo del tiempo, es decir,

$$\delta\dot{\vec{Z}} = \dot{\delta\vec{Z}} = \vec{F}'(\vec{Z}, t) \delta\vec{Z} \quad (5.11)$$

llevando a cabo una linealización alrededor de  $\vec{Z}_0$  como se hizo en la sección (??) obtenemos las ecuaciones de movimiento linealizadas sobre la trayectoria fiducial que definen la trayectoria de los ejes las cuales están representadas por

$$\delta\dot{\vec{Z}} = \mathbf{J}\delta\vec{Z} \quad (5.12)$$

donde  $J$  es la matriz jacobiana de  $n \times n$  con

$$J_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial Z_j}. \quad (5.13)$$

una solución a la ecuación (5.12) puede ser escrita como

$$\delta\vec{Z}(t) = \mathbf{M}(\vec{Z}(t), t)\delta\vec{Z}(0). \quad (5.14)$$

donde

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{M}(t) \quad (5.15)$$

Al integrar simultaneamente las ecuaciones (5.10) y (5.12) desde un tiempo  $t = t_0$  a un tiempo  $t = \tau$  eligiendo como condiciones iniciales el conjunto ortonormal  $\{\hat{e}_1(0) = (1, 0, 0, \dots); \hat{e}_2(0) = (0, 1, 0, \dots); \dots\}$  para la superficie de la esfera y  $\vec{Z}(0)$  para el centro de la misma obtenemos un nuevo conjunto de vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dados por

$$\delta\vec{Z}(\tau) = \mathbf{M}(\vec{Z}(\tau), \tau)\delta\vec{Z}(0) \quad (5.16)$$

los cuales conforman la superficie de la esfera centrada ahora en  $Z(\tau)$ , los nuevos ejes representados por este conjunto de vectores cambian su orientación y tamaño, esto provoca que después de cierto número de integraciones los ejes sean indistinguibles y la linealización de las ecuaciones de movimiento ya no sea posible debido a la divergencia en la magnitud de algunos ejes, este tipo de problemas es evitado mediante el uso repetido del procedimiento de reortonormalización de Gram-Schmidt de vectores obtenidos  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ :



$$\hat{e}_1(\tau) = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \quad (5.17)$$

$$\hat{e}_n(\tau) = \frac{\vec{v}_n - \sum_{j=1}^{n-1} (\vec{v}_n, \hat{e}_j(\tau)) \hat{e}_j(\tau)}{\|\vec{v}_n - \sum_{j=1}^{n-1} (\vec{v}_n, \hat{e}_j(\tau)) \hat{e}_j(\tau)\|}. \quad (5.18)$$

Las normas en los denominadores, denotadas por  $N_1(1), N_2(1), \dots, N_n(1)$  son almacenadas para el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Se repite el procedimiento de integración de  $t = \tau$  a  $t = 2\tau$ , ahora tomando como centro de la esfera el punto  $\vec{Z}(\tau)$  y condiciones iniciales sobre la superficie de la esfera el nuevo conjunto de vectores ortonormal  $\{\hat{e}_1(\tau), \hat{e}_2(\tau), \dots\}$  obteniendo nuevamente una esfera centrada en  $\vec{Z}(2\tau)$  cuya superficie esta formada por un nuevo conjunto de vectores, dados por la ecuación

$$\delta\vec{Z}(2\tau) = \mathbf{M}(\vec{Z}(2\tau), \tau) \delta\vec{Z}(\tau) \quad (5.19)$$

estos vectores se ortonormalizan obteniendo el conjunto  $\{\hat{e}_1(2\tau), \hat{e}_2(2\tau), \dots\}$  y las normas  $N_1(2), N_2(2), \dots, N_n(2)$ . Después de  $r$  iteraciones, obtenemos el conjunto de vectores ortonormal  $\{\hat{e}_1(r\tau), \hat{e}_2(r\tau), \dots\}$  al tiempo  $t = r\tau$ . De esta manera los exponentes de Lyapunov son

$$\lambda_i = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^r \ln N_i(m)}{r\tau} \quad (5.20)$$

En el apéndice A, se muestra el código construido para el método estandar del cálculo de los exponentes de Lyapunov, el cual es facilmente adaptable para otros sistemas dinámicos de más dimensiones.

## 5.2. Espectro de Lyapunov para el modelo GTA.

Al realizar el cálculo de los exponentes de Lyapunov, 8 en total para el modelo GTA, se observó que solo uno de ellos tomaba valores positivos para algunos regímenes del número de Rayleigh. Por tanto, se eligió para mostrar en detalle únicamente a ese exponente, que corresponde al coeficiente  $A$  del modelo. Lo anterior se realizó para valores del número de Rayleigh desde 20 hasta 200, cómo se muestra en la figura (5.3).

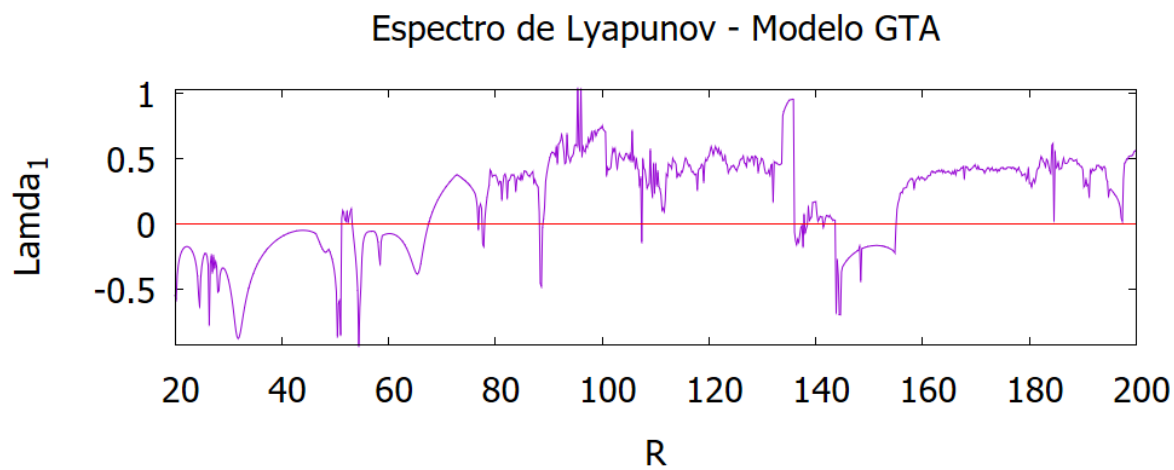


Figura 5.3: Espectro correspondiente al primer exponente de Lyapunov, para  $A(t)$ , usando los parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\alpha = 1.2$ , en el modelo GTA.

# Capítulo 6

## Comentarios Finales

a) Al considerar cantidades conservadas adicionales como en el caso del modelo GTA, los valores tanto del coeficiente de difusión como del desplazamiento cuadrático medio para partículas pasivas, fueron menores respecto al modelo HK donde no se toman en cuenta esas consideraciones. Adicionalmente, el incremento del número de Rayleigh favorecería la aparición de exponentes  $m$  mayores, como se esperaría.

b) La dispersión de partículas con inercia, usando el modelo GTA, es sensible a la elección de densidades relativas cercanas a 1. Para los casos analizados, el desplazamiento cuadrático medio parece tener la misma tasa de crecimiento respecto del tiempo, sin embargo, para el coeficiente de difusión la diferencia es mayor, siendo además proporcionalmente más grande al elegir número de Rayleigh mayores. Al visualizar en el espacio de configuración del sistema las posiciones que va tomando la nube de partículas, podemos apreciar que las partículas densas tienden a desplazarse con una velocidad decreciente. En el caso de partículas ligeras pareciera que la velocidad de difusión es más uniforme. Esto en definitiva es algo que debe revisarse aún más a fondo para poder determinar de manera cuantitativa la disminución de las velocidades de difusión, ya que dicha información no se puede apreciar de evaluar el exponente  $m$ .

d) La conservación de la energía para el modelo GTA estaría proyectando un perfil correcto en la función de la temperatura. Lo que se observó es que para el modelo GTA usando partículas pasivas o partículas densas, se definen de manera clara estructuras de las partículas soluto, marcando la geometría de las celdas de convección, esto podría ser efecto de tomar en cuenta las dos cantidades conservadas mencionadas.

Resalto la importancia del análisis de estabilidad lineal de los sistemas dinámicos obtenidos, de los cuales ya se tenía referencia, tanto para el modelo de Lorenz, como el de Howard y Krishnamurti. En este sentido, la evidencia cualitativa de dichos atractores fue revelada gracias a los diagramas de espacio fase. Sería interesante ampliar en un futuro el estudio de advección con inercia generando estos diagramas de bifurcación.

# Bibliografía

- [1] Price, J. F. (2005). Lagrangian and Eulerian representations of fluid flow: Part I, kinematics and the equations of Motion. Clark Laboratory Woods Hole Oceanographic Institution: Woods Hole, MA, USA.
- [2] Aref, H. (1984). Stirring by chaotic advection. *Journal of fluid mechanics*, 143, 1-21.
- [3] Aref, H., Blake, J. R., Budišić, M., Cardoso, S. S., Cartwright, J. H., Clercx, H. J., Tuval, I. (2017). Frontiers of chaotic advection. *Reviews of Modern Physics*, 89(2), 025007.
- [4] Cherubin, L. M., Nemeth, R. S., Idrisi, N. (2011). Flow and transport characteristics at an *Epinephelus guttatus* (red hind grouper) spawning aggregation site in St. Thomas (US Virgin Islands). *Ecological Modelling*, 222(17), 3132-3148.
- [5] Grech, A., Wolter, J., Coles, R., McKenzie, L., Rasheed, M., Thomas, C., ... Hanert, E. (2016). Spatial patterns of seagrass dispersal and settlement. *Diversity and Distributions*, 22(11), 1150-1162.
- [6] Jones, R., Ricardo, G. F., Negri, A. P. (2015). Effects of sediments on the reproductive cycle of corals. *Marine Pollution Bulletin*, 100(1), 13-33.
- [7] Wichmann, D., Delandmeter, P., Dijkstra, H. A., van Sebille, E. (2019). Mixing of passive tracers at the ocean surface and its implications for plastic transport modelling. *Environmental Research Communications*, 1(11), 115001.
- [8] Li, Y., Zhang, H., Tang, C. (2020). A review of possible pathways of marine microplastics transport in the ocean. *Anthropocene Coasts*, 3(1), 6-13.
- [9] Bigdeli, M., Mohammadian, A., Pilechi, A., Taheri, M. (2022). Lagrangian Modeling of Marine Microplastics Fate and Transport: The State of the Science. *Journal of Marine Science and Engineering*, 10(4), 481.
- [10] Xiong, T., Meng, M., Wang, N., Xu, X., Lu, H., Yang, Q. (2021). Investigation on desorption of petroleum hydrocarbon contaminants by active and passive particle self-rotation. *Journal of Environmental Chemical Engineering*, 9(6), 106330.
- [11] Huesemann, M. H., Truex, M. J. (1996). The role of oxygen diffusion in passive bioremediation of petroleum contaminated soils. *Journal of Hazardous Materials*, 51(1-3), 93-113.

- [12] Bénard, H. (1900). Étude expérimentale des courants de convection dans une nappe liquide.—Régime permanent: tourbillons cellulaires. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 9(1), 513-524.
- [13] Bodenschatz, E., Pesch, W., Ahlers, G. (2000). Recent developments in Rayleigh-Bénard convection. *Annual review of fluid mechanics*, 32(1), 709-778.
- [14] Rayleigh, L. (1916). LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 32(192), 529-546.
- [15] Borrelli, R., Coleman, C. S. (2002). *Ecuaciones Diferenciales: una perspectiva de modelación*. Oxford University Press.
- [16] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2), 130-141
- [17] Lorenz, E. N. (1994) *The Essence of Chaos*. University of Washington Press, Seattle.
- [18] Strogatz, S.H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2nd ed.). CRC Press.
- [19] Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics 2.
- [20] Binson, J. (1998). Chaotic advection in large-scale convection. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(01), 57-71.
- [21] Howard, L. N., Krishnamurti, R. (1986). Large-scale flow in turbulent convection: a mathematical model. *Journal of fluid mechanics*, 170, 385-410.
- [22] Thiffeault, J. L., Horton, W. (1996). Energy-conserving truncations for convection with shear flow. *Physics of Fluids*, 8(7), 1715-1719.
- [23] Hermiz, K. B., Guzdar, P. N., Finn, J. M. (1995). Improved low-order model for shear flow driven by Rayleigh-Bénard convection. *Physical Review E*, 51(1), 325.
- [24] Roy, D., Musielak, Z. E. (2007). Generalized Lorenz models and their routes to chaos. I. Energy-conserving vertical mode truncations. *Chaos, Solitons Fractals*, 32(3), 1038-1052.
- [25] Gluhovsky, A., Tong, C., Agee, E. (2002). Selection of modes in convective low-order models. *Journal of the atmospheric sciences*, 59(8), 1383-1393.
- [26] Chandrasekhar, S. (2013). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation.
- [27] Gray, D. D., Giorgini, A. (1976). The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(5), 545-551.

- [28] Saltzman, B. (1962). Finite amplitude free convection as an initial value problem - I. *Journal of the Atmospheric Sciences* 19, 329-41.
- [29] Nugroho, G., Ali, A. M., Karim, Z. A. (2009). Toward a new simple analytical formulation of Navier-Stokes equations. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 39, 197-201.
- [30] Chen, H. C., Patel, V. C., Ju, S. (1990). Solutions of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations for three-dimensional incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 88(2), 305-336.
- [31] Dorodnicyn, A. A. (2008, January). Review of methods for solving the Navier-Stokes equations. In *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics: Vol. I General Lectures. Fundamental Numerical Techniques July 3-7, 1972 Universities of Paris VI and XI* (pp. 1-11). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [32] Hilborn, R. C. (2000). *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press on Demand.
- [33] Malkus, W. V. R. (1954). Discrete transitions in turbulent convection. *Proc. R. SOC. Lond.* A225, 185-195.
- [34] Willis, G. E. Deardroff, J.W. 1967a Development of short-period temperature fluctuations in thermal convection. *Phys. Fluids* 10, 931-937.
- [35] Willis, G. E. Deardroff, J. W. 1967 b Confirmation and renumbering of the discrete heat flux transitions of Malkus. *Phys. Fluids* 10, 1861-1866.
- [36] Krishnamurti, R. 1970a On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow. *J. Fluid Mech.* 42, 295-307.
- [37] Krishnamurti, R. 1970b On the transition to turbulent convection. Part 2. The transition to time-dependent flow. *J. Fluid Mech.* 42, 309-320.
- [38] Thiffeault, J. L., Horton, W. (1996). Energy-conserving truncations for convection with shear flow. *Physics of Fluids*, 8(7), 1715-1719.
- [39] Thiffeault, J. L. (1995). *Modeling shear flow in the Rayleigh-Benard convection* (Master's thesis, University of Texas at Austin).
- [40] Teukolsky, S. A., Flannery, B. P., Press, W. H., Vetterling, W. T. (1992). Numerical recipes in C. *SMR*, 693(1), 59-70.
- [41] Grassberger, P., Procaccia, I. (1983). Characterization of strange attractors. *Physical review letters*, 50(5), 346.
- [42] Einstein, A. (1956). *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Corporation.

- [43] Bakunin, O. G. (2011). *Chaotic Flows: correlation effects, transport, and structures* (Vol. 10). Springer Science Business Media.
- [44] Ramasubramanian, K., Sriram, M. S. (2000). A comparative study of computation of Lyapunov spectra with different algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 139(1-2), 72-86.
- [45] Hénon, M., Heiles, C. (1964). The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astronomical Journal*, Vol. 69, p. 73 (1964), 69, 73.
- [46] Crisanti, A., Falcioni, M., Provenzale, A., Tanga, P., Vulpiani, A. (1992). Dynamics of passively advected impurities in simple two-dimensional flow models. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(8), 1805-1820.