Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Sobre la matriz resolvente del problema matricial truncado de momentos de Hausdorff

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Autor:
Baruch Emmanuel Medina Hernández

Asesor:
Dr. Abdon Eddy Choque Rivero

Morelia, Michoacán, México
Febrero, 2024

A mis padres.

Índice general

Sobre la matriz resolvente del problema matricial truncado de momentos de Hausdorff

Resumen

En el presente trabajo consideramos el problema de momentos matricial truncado de Hausdorff (problema MMTH) en el intervalo $[a, b]$ para el caso de un número par de momentos. Para resolver este problema, transformamos el problema-MMTH en un problema de encontrar funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ y que son las soluciones de un sistema de desigualdades del tipo de V.P. Potapov. En el caso cuando las dos matrices de Hankel construidas por los momentos son positivas definidas, se describe la solución del problema MMTH en términos de los datos dados.

Presentamos la solución del problema-MMTH en términos de la matriz resolvente "centrada" en el punto $z = b$. Cabe mencionar que en trabajos relacionados con el problema-MMTH que preceden al presente, se utilizó la matriz resolvente "centrada" en el punto $z = a$ y "centrada" en el punto $z = 0$.

Palabras clave: Caso par, transformada de Stieltjes, sistema matricial de desigualdades de Potapov, matrices de Hankel, función J interna de Potapov.

On the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem

Abstract

In this work, we consider the truncated Hausdorff matrix moment problem (THMM problem) on the interval [a,b] for the case of an even number of moments. To solve this problem, we transform the THMM problem into a problem of finding holomorphic functions on $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ such that these functions are solutions to a system of matrix inequalities of V.P. Potapov's type. In the case when two Hankel matrices constructed from the moments are positive definite, the solution to the THMM problem is described in terms of the given moments.

We present the solution to the THMM problem in terms of the resolvent matrix "centered" at point $z = b$. It's worth noting that in previous works related to the THMM problem, resolvent matrices "centered" at points $z = a$ and $z = 0$ were studied.

Introducción

Antecedentes

El término *problema de momentos* aparece por primera vez en el trabajo de T. Stieltjes de 1894-1895 [36]. Stieltjes define para cada $k \in \mathbb{N}$ el momento generalizado de orden k como la integral

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u)$$

donde σ es una función monótona no decreciente. Al final del Capítulo 4 de [36], Stieltjes escribió: "Daremos el nombre del problema de momento al siguiente problema: se requiere encontrar una función no decreciente positiva en el intervalo $[0, \infty)$, dados los momentos de orden $k(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$".

El problema de momentos matricial fue considerado por primera vez por M.G. Krein en 1949. En el caso matricial, el problema de momentos fue desarrollado con las siguientes direcciones: polinomios ortogonales matriciales, factores de Blaschke-Potapov, parámetros de Dyukarev-Stieltjes, entre otros.

La parte central de este trabajo es la consideración de un problema matricial de momentos. El estudio del problema de momentos y los problemas relativos, son de interés desde la segunda parte del siglo XIX. Estos problemas fueron desarrollados por varios matemáticos y continúa siendo un campo activo de las matemáticas. La causa es que el problema de momentos está relacionado con distintas disciplinas de las matemáticas (teoría de probabilidad, teoría de funciones de variable compleja, teoría de aproximación, teoría de polinomios ortogonales, teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert, entre otros). Lo anterior se puede confirmar por un número importante de libros los cuales se centran en el problema de momentos por ejemplo: Akhiezer [1], Akhiezer/Krein [2], Berg/Christensen/Ressel [6], Dette/Studden [17], Geronimus [22], Grenander/Szegö [24], Krein/Nudelman [26], Nikishin/Sorokin [33], Schmüdgen [35] y Shohat/Tamarkin [37]. Las bases del estudio del problema de momentos se iniciaron a principios del siglo XIX. Se discutieron problemas de teoría de probabilidades en las fronteras. En el mismo sentido, los primeros estudios importantes fueron realizados por la escuela de San Petersburgo, representados por P.L. Chebyshev y sus colaboradores entre ellos A.A. Markov. Los autores Chebyshev y Markov consideraron en el siglo XIX, el método de las fracciones continuas.

El problema de momentos matricial truncado de Hausdorff (problema MMTH) se define en el intervalo finito $[a, b]$. En el presente trabajo usamos el método de la desigualdad fundamental de V.P. Potapov que se desarrolló a finales de la década de

1960-1970 del siglo XX. El problema MMTH fue resuelto en el 2001, en [11], para el caso de un número par e impar de momentos. En el 2006, en [12], se resuelve el problema de momentos en un intervalo acotado para el caso de un número par de momentos.

Motivación

El análisis de circuitos eléctricos de múltiples polos estudiado en [20] es una de las motivaciones del problema matricial de momentos de Hausdorff. En [20] se estudia la aplicación de resultados del problema de interpolación de Nevanlinna Pick (ver Definición B.15 del Apéndice B) a circuitos de múltiples polos. Cabe señalar que el problema de momentos de Hausdorff es un caso especial del problema de interpolación de Nevanlinna-Pick (ver Observación B.13 y Apéndice B).

En la teoría de control se estudian sistemas con coeficientes matriciales [28], [40], [38]. El análisis del problema de control admisible [10] de ciertos sitemas con coeficientes matriciales se puede llevar a cabo usando resultados del problema de momentos de Hausdorff. En el caso escalar ver [13] y [14].

Otra motivación de la presente tesis es el estudio de la fórmula de cuadratura de Gauss con densidad matricial [18] mediante los métodos de la presente tesis.

Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis es estudiar el problema MMTH en un intervalo acotado $[a, b]$ en el caso de un número par de momentos s_0, s_1, $\ldots$, s_{2n+1}. En particular estudiamos la matriz resolvente del problema MMTH que consiste en una matriz polinomial de $2q \times 2q$ con bloques α, β, γ y δ

$$U(z) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

que dependen de los momentos dados. En esta tesis se obtiene una matriz resolvente "centrada" en el punto $z = b$. Cabe mencionar que en el trabajo [15] el autor de la presente tesis junto con su asesor obtuvieron una relación explícita entre la matriz resolvente en $z = 0$ con la matriz resolvente en $z = a$.

Planteamiento del problema

Sean s_0, s_1, $\ldots$, s_{2n+1} matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Se requiere describir el conjunto de todas las funciones matriciales $\sigma(t)$ definidas en el intervalo $[a, b]$, $(-\infty < a < b < +\infty)$, que son no decrecientes y hermitianas no negativas en $[a, b]$, tales que

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j, \;\; j = 0, ..., 2n + 1. \tag{0.0.1}$$

Cabe mencionar que este problema, para $a = 0$, $b = 1$, representa el problema de momentos de Hausdorff. Para $a = 0$, $\; b \to +\infty$, representa el problema de momentos de

Stieltjes $a = 0,\ b \to +\infty$ y para $a \to -\infty,\ b \to +\infty$, el problema planteado representa el problema de momentos de Hamburger. Además, este problema fue estudiado para el caso *escalar* en [26].

Metodología

Utilizamos el método de Potapov [27] que consiste en transformar el problema planteado de momentos matricial, en un sistema de dos desigualdades matriciales. De esta manera el problema de encontrar el conjunto de funciones matriciales σ se traduce en el problema de encontrar funciones holomorfas $S(z)$ en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Posteriormente, se resuelve el sistema de desigualdades matriciales de Potapov. Para resolver estas desigualdades se define la llamada matriz resolvente en el punto $z = b$

$$\widehat{V}_n(z) = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_n(z) & \widehat{\beta}_n(z) \\ \widehat{\gamma}_n(z) & \widehat{\delta}_n(z) \end{pmatrix}, \tag{0.0.2}$$

cuyas entradas son bloques de dimensión $q \times q$. Se reescribe la desigualdad de Potapov para el caso no degenerado, es decir, las matrices de Hankel

$$H_{3,n} = (bs_{j+k} - s_{j+k+1})_{j,k=0}^{n} \quad \text{y} \quad H_{4,n} = (-as_{j+k} + s_{j+k+1})_{j,k=0}^{n},$$

son positivas definidas. Luego resolvemos el sistema transformado y finalmente la solución se escribe en términos de la matriz resolvente (0.0.2) y los pares no negativos.

Contribuciones de la tesis

Recordemos que el problema MMTH está dado en el intervalo finito $[a, b]$, este intervalo aparece en la definición de los momentos

$$s_j = \int_a^b t^j d\sigma(t), \quad j = 0, \dots, 2n+1.$$

La contribución de esta tesis es la obtención de la matriz resolvente del problema MMTH en el punto $z = b$.

En trabajos anteriores, por ejemplo [12] y [9], la matriz resolvente fue construida en el punto $z = a$. En [11] la matriz resolvente del problema mencionado se considera en $z = 0$.

Adicionalmente, como contribución relacionada con la presente tesis, mencionamos el artículo [15] que analiza y proporciona una relación explícita entre la matriz resolvente del problema MMTH “centrada” en $z = a$ publicado el 2006 en [12] con la matriz resolvente “centrada” en el punto $z = 0$ publicado en 2001 en [7].

Organización de la tesis

En el capítulo 1 se plantea el problema de MMTH para el caso de un número par de momentos. Consideramos el el conjunto de todas las soluciones del sistema fundamental de desigualdades matriciales asociado a el problema MMTH. En el capítulo 2, reescribimos el sistema fundamental de desigualdades matriciales para el caso no degenerado y además, en ese mismo caso encontramos las soluciones. También introducimos una matriz resolvente (0.0.2) "centrada" en el punto $z = b$ y estudiamos sus propiedades. Finalmente, en el capítulo 3 damos una descripción del conjunto todas las soluciones asociadas al problema MMTH en el caso de un número par de momentos. Incluimos algunos ejemplos.

Capítulo 1

Desigualdades matriciales de V.P. Potapov

En este capítulo planteamos el problema de momentos en términos de funciones que pertenecen al conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]]$, el cual se define en la Definición 1.11. Después veremos en el Teorema 1.3 cómo se relacionan las soluciones del sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov con el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]]$.

Notación 1. *Usaremos $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{N}$ para denotar el conjunto de los números complejos, el conjunto de los números reales, el conjunto de todos los enteros no negativos, y el conjunto de todos los enteros positivos, respectivamente.*

Notación 2. *Para todos $m,n \in \mathbb{N}_0$, designamos a $\mathbb{N}_{m,n}$ el conjunto de todos los enteros k que satisfacen $m \leqslant k \leqslant n$.*

Notación 3. *Sean $p,q \in \mathbb{N}$. El símbolo $\mathbb{C}^{p\times q}$ representa el conjunto de todas las matrices con entradas en $\mathbb{C}$ y de dimensión $p \times q$. Si $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ entonces denotamos a $\mathfrak{Re}\, A$ y $\mathfrak{Im}\, A$ la parte real de A y la parte imaginaria de A, respectivamente.*

Notación 4. *Sean $p,q \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in \mathbb{C}^q$ denotamos mediante $\|x\|_E$ la norma Euclidiana de el vector x. Para cada $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ el operador $||\cdot||$ representa la norma de la matriz A y $\|A\|$ es la norma inducida, es decir*

$$||A|| := \sup_{x\in\mathbb{C}^q,\quad x\neq 0} \frac{||Ax||_E}{||x||_E}.$$

Notación 5. *Sean X y Y conjuntos no vacíos y si Z es un subconjunto no vacío de X, y además $f : X \to Y$ es una función, entonces $f_{|Z}$ representa la función restricción de f en Z.*

Definición 1.1. *Sea $q \in \mathbb{N}$ y sea $X \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Sea $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$. Llamamos a la función F como una* función matricial compleja de $q \times q$. *Cuando se hace referencia a la función matricial F, tenemos la siguiente forma:*

$$F(z) = \begin{pmatrix} F_{11}(z) & \dots & F_{1q}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{q1}(z) & \dots & F_{qq}(z) \end{pmatrix}$$

para cada $z \in X$*. Así, si* $\mathbb{N}_{1,q}$ *está denotado mediante la Notación 2, para cada* $m, n \in \mathbb{N}_{1,q}$*, tenemos la función escalar* $F_{mn} : X \to \mathbb{C}$ *de* F *que se encuentra en la entrada* (m, n) *de* $F(z)$*. Claramente, la función* F *se puede escribir como* $F(z) = \mathfrak{Re}\, F(z) + i\mathfrak{Im}\, F(z)$ *para cada* $z \in X$*.*

Notación 6. *Si* Z *es un subconjunto no vacío de* $\mathbb{C}$ *y si* F *es una función matricial definida en* Z*, entonces para cada* $z \in Z$ *usaremos* $F^*(z)$ *para representar la matriz transpuesta conjugada. Esta matriz también se denotará como* $(F(z))^*$*.*

Incluimos las siguientes definiciones que son importantes para este trabajo.

Definición 1.2. *Sea* $q \in \mathbb{N}$*. Una matriz* $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ *se dice que es hermitiana si* $A = A^*$*, donde* A^* *es la matriz transpuesta conjugada de* A*.*

Definición 1.3. *Sean* $q \in \mathbb{N}$ *y* $X \subseteq \mathbb{C}$ *no vacío. Sea* $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ *una función matricial. Decimos que* $F(z)$ *es hermitiana en X, si para cada* $z \in X$*,* $F(z)$ *es hermitiana. Es decir,* $F(z) = F^*(z)$ *para cada* $z \in X$*.*

Definición 1.4. *Sea* $q \in \mathbb{N}$*. Decimos que una matriz* $A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ *es* no negativa *si*

$$x^* A x \geqslant 0 \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{C}^q \textit{ tal que } x \neq 0. \tag{1.0.1}$$

Una matriz no negativa se abrevia como $A \geqslant 0$*. Si en la desigualdad (1.0.1) solamente se cumple la desigualdad estricta, es decir* $x^* A x > 0$*, entonces decimos que* A *es* positiva definida *y abreviamos como* $A > 0$*.*

Definición 1.5. *Sean* $q \in \mathbb{N}$ *y* $X \subseteq \mathbb{C}$ *no vacío. Sea* $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ *una función matricial. Decimos que,* F *es no negativa en X, si para cada* $z \in X$*,* $F(z)$ *es no negativa y se denota como* $F \geqslant 0$ *en X. Similarmente, decimos que* F *es positiva en X, si para cada* $z \in X$*,* $F(z)$ *es positiva y se denota como* $F > 0$ *en X.*

Definición 1.6. *Sean* $q \in \mathbb{N}$ *y* $X \subseteq \mathbb{C}$ *no vacío. Sea* $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ *una función matricial.* F *se llama monótona no decreciente, si para cada* t_0*,* $t_1 \in X$ *tales que* $t_1 \geqslant t_0$ *se cumple que* $F(t_1) - F(t_0) \geqslant 0$ *en X.*

En la Definición A.3 del Apéndice A se define la función holomorfa en el caso escalar. Ahora introducimos la siguiente noción análoga para funciones matriciales.

Definición 1.7. *Sean* $q \in \mathbb{N}$ *y* $X \subseteq \mathbb{C}$ *no vacío. Sea* $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ *una función matricial compleja de dimensión* $q \times q$*. Sea* F_{mn} *definida como en la Definición 1.1 y sea* $\mathbb{N}_{1,q}$ *de acuerdo a la Notación 2. Decimos que* F *es holomorfa en* A *si para cada* $m, n \in \mathbb{N}_{1,q}$*,* F_{mn} *es holomorfa en* A*.*

Observación 1.1. *Sea* $q \in \mathbb{N}$*. Si* $A, B \in \mathbb{C}^{q\times q}$ *y si escribimos* $A \geqslant B$ *(respectivamente,* $A > B$*), entonces significa que* $A - B$ *es no negativa. (respectivamente,* $A - B$ *es positiva).*

Finalmente, se definen dos conjuntos que hacen referencia a la parte superior e inferior respectivamente, del plano complejo.

Notación 7. $\Pi_+ := \{\omega \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\,\omega \in (0, +\infty)\}$ *y* $\Pi_- := \{\omega \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\,\omega \in (-\infty, 0)\}$.

Definición 1.8. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sean a y b números reales que satisfacen $a < b$. Denotamos mediante $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$ como el conjunto de todas las funciones $\sigma : [a, b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ no decrecientes, y que además son hermitianas no negativas en $[a, b]$.*

Definición 1.9. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sea $f(t)$ una función continua en $[a, b]$ y $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))^q_{i,j=1}$ una función matricial hermitiana en $[a, b]$ de dimensión $q \times q$. Definimos*

$$\int_a^b f(t)d\sigma(t) := \begin{pmatrix} \int_a^b f(t)d\sigma_{11}(t) & \cdots & \int_a^b f(t)d\sigma_{1q}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f(t)d\sigma_{q1}(t) & \cdots & \int_a^b f(t)d\sigma_{qq}(t) \end{pmatrix}, \tag{1.0.2}$$

donde σ_{ij} para cada $i, j = 1, \ldots, q$, es una función continua a trozos en $[a, b]$ tal que la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f(t)d\sigma_{ij}(t)$ está definida en $[a, b]$ (ver [7, pág. 89]).

En adelante, la integral de la forma $\int_a^b f(t)d\sigma(t)$ se entiende como en (1.0.2).

Definición 1.10. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Sean a y b números reales que satisfacen $a < b$. Sean $s_0, s_1, \ldots, s_{2n+1}$ matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Sea $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$ definido como en la Definición 1.8 y sea $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ de acuerdo a la Notación 2. Denotamos mediante $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a, b]; (s_j)^{2n+1}_{j=0}]$ el conjunto de todas las funciones $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$ tales que*

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j. \tag{1.0.3}$$

para cada entero $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$.

Claramente, se tiene que $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a, b]; (s_j)^{2n+1}_{j=0}] \subseteq \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$. Una secuencia $(s_j)^{2n+1}_{j=0}$ de matrices complejas de dimensión $q \times q$ es una secuencia de matrices hermitianas si se satisface $s_j = s_j^*$ para cada $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$, donde $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ está determinado en la Notación 2. Consideremos una secuencia $(s_j)^{2n+1}_{j=0}$ de matrices complejas de $q \times q$, y supongamos que s_j está definido como en (1.0.3) y que $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$, entonces tenemos que cada s_j es una matriz hermitiana ya que σ también lo es. Así, lo anterior es un caso particular de considerar una secuencia de matrices complejas de $q \times q$ que son hermitianas, es decir, sin conocer como está definido el término s_j de la secuencia dada. Con lo escrito hasta ahora, podemos reescribir nuestro problema de momentos en la versión matricial de la siguiente manera:

Planteamiento del problema de momentos de Hausdorff para el caso par de momentos

Problema 1. *Sea $\mathbb{N}_0$ denotado como en la Notación 1. Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in (a, \infty)$. Además, sea $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a, b]; (s_j)^{2n+1}_{j=0}]$ definido como en la Definición 1.10. Sea $(s_j)^{2n+1}_{j=0}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$, se requiere describir el conjunto $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a, b]; (s_j)^{2n+1}_{j=0}]$.*

El conjunto $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a, b]; (s_j)^{2n+1}_{j=0}]$ dado en la Definición 1.10 en realidad es para nuestro caso, el conjunto de soluciones de la versión matricial del problema de momentos.

1.1 El problema de momentos y la clase $\mathcal{R}_q[a,b]$

En está sección reescribimos la versión matricial del problema de momentos en términos de un subconjunto de la clase de funciones denotada por $\mathcal{R}_q[a,b]$. También agregamos los elementos necesarios para definir el sistema fundamental matricial de desigualdades de V.P. Potapov. Para dar comienzo a esta sección, introducimos los conjuntos de las funciones que tienen las propiedades de nuestro interés y las cuales deseamos describir explícitamente.

Las definiciones, teoremas, observaciones de esta sección han sido tomados de [12] y [11] sin demostración.

En el Teorema 1.1, veremos que el problema planteado se traslada al área de funciones holomorfas, en particular, a la clase de funciones $\mathcal{R}_q[a,b]$.

Definición 1.11. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sea Π_+ dado como en la Notación 7. Denotamos mediante $\mathcal{R}_q[a,b]$ la clase de todas las funciones matriciales $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$, que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$.*
2. *Para cada $\omega \in \Pi_+$, la matriz $\mathfrak{Im}\, S(\omega)$ es hermitiana no negativa.*
3. *Para cada $t \in (-\infty, a)$, la matriz $S(t)$ es hermitiana no negativa.*
4. *Para cada $t \in (b, +\infty)$, la matriz $-S(t)$ es hermitiana no negativa.*

Teniendo en consideración los conjuntos $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b]$ y $\mathcal{R}_q[a,b]$, el Teorema 1.1 describe la relación entre dichos conjuntos. Cabe mencionar que esta idea fue usada por M.G. Krein y A.A. Nudelman (ver [26, pág. 394]) para el caso escalar $q = 1$.

Teorema 1.1. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b]$ definido como en la Definición 1.8 y $\mathcal{R}_q[a,b]$ definido como en la Definición 1.11*

(a) Para cada $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b]$ la función matricial $S^{[\sigma]} : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definida por

$$S^{[\sigma]}(z) := \int_a^b \frac{1}{t-z} d\sigma(t) \tag{1.1.1}$$

pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$.

(b) Para cada $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$ existe una única $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b]$ tal que

$$S(z) := \int_a^b \frac{1}{t-z} d\sigma(t) \tag{1.1.2}$$

se satisface para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$.

Según el Teorema 1.1, el mapeo $f : \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b] \to \mathcal{R}_q[a,b]$ dado por $f(\sigma) := S^{[\sigma]}$ es biyectivo. Para todo $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b]$, la función matricial $S^{[\sigma]} : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definida en (1.1.1) es llamada como la transformada de Stieltjes de σ. Recíprocamente, si la función matricial $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$ es dada, entonces la única $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b]$ que satisface

(1.1.2) para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$ se dice que es la función distribución de Stieltjes que corresponde a S. Ahora veamos que la transformada de Stieltjes se puede escribir como una serie. La demostración del siguiente teorema aparece en [[8], pág. 35, Teorema 1.2.16].

Teorema 1.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b]$ definido como en la Definición 1.8. Sea $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a,b]$. Denotamos a $S^{[\sigma]}$ como la transformada de Stieltjes de σ. Para cada $j \in \mathbb{N}_0$ denotamos a $s_j^{(\sigma)}$ el $j-$ésimo momento definido como en (1.0.3) correspondiente a σ. Además sea $z \in \mathbb{C}$ elegido de manera que $|z| > \max\{|a|,|b|\}$ se cumple. Entonces $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$ y*

$$S^{[\sigma]}(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k^{(\sigma)}}{z^{k+1}}. \tag{1.1.3}$$

Definición 1.12. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ $a \in \mathbb{R}$ y $b \in (a, \infty)$. Sea $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.10. Mediante $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ denotamos a el conjunto de todas las funciones matriciales $S^{[\sigma]} : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definidas como en (1.1.1), es decir, $S^{[\sigma]} := \int_a^b (t-z)^{-1} d\sigma(t)$ para cada $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.*

Nótese que $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ es el conjunto de las transformadas de Stieltjes de todas las distribuciones σ hermitianas no negativas que pertenecen a $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Con las notaciones actuales, la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff puede escribirse como:

Replanteamiento del problema de momentos en términos de $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.

Problema 2. *Sea $\mathbb{N}_0$ denotado como en la Notación 1. Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in (a,\infty)$. Además sea $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definicion 1.12. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$, se requiere describir el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.*

La consideración de esta versión reformulada del problema de momentos tiene la ventaja de que se pueden aplicar métodos de teoría de funciones. Claramente de la parte (a) del Teorema 1.1 se tiene que

$$\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \subseteq \mathcal{R}_q[a,b]$$

y esto representa un problema en la clase $\mathcal{R}_q[a,b]$. Notemos que

$$\mathcal{M}^q_{\geqslant}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset \quad \text{si y solo si} \quad \mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset.$$

Ahora, pasamos a introducir notaciones adicionales, adecuadas e importantes ya que se usarán en la mayor parte de lo que sigue.

Definición 1.13. *Consideremos $q \in \mathbb{N}$. Usaremos I_q para designar la matriz identidad que pertenece a $\mathbb{C}^{q\times q}$. La notación $0_{q\times q}$ representa la matriz nula que pertenece a $\mathbb{C}^{q\times q}$.*

Si la dimensión de una matriz identidad o una matriz nula es obvia, omitiremos los índices. Para todo $j \in \mathbb{N}_0$ y toda $k \in \mathbb{N}_0$, sea δ_{jk} el símbolo de Kronecker, es decir, $\delta_{jk} := 1$ si $j = k$ y $\delta_{jk} := 0$ si $j \neq k$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea

$$T_0 := 0_q, \quad T_n := \begin{pmatrix} 0_{q\times nq} & 0_{q\times q} \\ I_{nq} & 0_{nq\times q} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.1.4}$$

y sea $R_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{(n+1)q\times(n+1)q}$ definida por

$$R_n(z) := (I - zT_n)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1.5}$$

Sea $v_0 := I_q$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$v_0 := I_q, \quad v_n := \begin{pmatrix} I_q \\ 0_{nq\times q} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.6}$$

Definición 1.14. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$, llamaremos a*

$$H_{1,n} := (s_{j+k})_{j,k=0}^{n}, \tag{1.1.7}$$

$$\widetilde{H}_{1,n} = (s_{j+k+1})_{j,k=0}^{n}, \tag{1.1.8}$$

como la primera (respectivamente, la segunda) matriz de bloque de Hankel asociada a $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$. Más aún, para todos números reales a y b que satisfacen $a < b$, para cada entero no negativo n, y para cada secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$, llamaremos a las matrices

$$H_{4,n} := -aH_{1,n} + \widetilde{H}_{1,n}, \tag{1.1.9}$$

respectivamente,

$$H_{3,n} := bH_{1,n} - \widetilde{H}_{1,n} \tag{1.1.10}$$

como la primera (respectivamente, la segunda) matriz de bloque de Hankel asociada a el intervalo $[a,b]$ y la secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$, definimos

$$u_n := \text{column}\left(-s_0, -s_1, \ldots, -s_n\right), \tag{1.1.11}$$

$$u_{4,n} := [R_n(a)]^{-1}u_n, \tag{1.1.12}$$

$$u_{3,n} := -[R_n(b)]^{-1}u_n. \tag{1.1.13}$$

Definición 1.15. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Sean a y b números reales que satisfacen $a < b$. Sea $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial. Definimos las funciones matriciales como sigue $\widetilde{S}_4 : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$*

$$\widetilde{S}_4(z) := (z-a)S(z), \tag{1.1.14}$$

y $\widetilde{S}_3 : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$

$$\widetilde{S}_3(z) := (b-z)S(z). \tag{1.1.15}$$

Llamamos a $\widetilde{S}_4$ y $\widetilde{S}_3$, como la primera función matricial asociada canónicamente a S y la segunda función matricial asociada canónicamente a S, respectivamente.

Tengamos en cuenta que M.G Krein y A.A. Nudelman (ver [26, pág. 394]) mencionan que, en el caso $q = 1$, las funciones $\widetilde{S}_4$ y $\widetilde{S}_3$ puden usarse para caracterizar la clase $\mathcal{R}_1[a,b]$. Este resultado está probado para el caso matricial, es decir, para la clase $\mathcal{R}_q[a,b]$, en el Lema 3.6 de [12].

Definición 1.16. *Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $q \in \mathbb{N}$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Sea $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial que es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Además, sean T_n, $R_n(z)$, v_n, $H_{3,n}$, $H_{4,n}$, $u_{3,n}$, $u_{4,n}$, $\widetilde{S}_4$ y $\widetilde{S}_3$ definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14 y 1.15, respectivamente. Decimos que S es solución del sistema de desigualdades matriciales fundamental de tipo V.P. Potapov asociado a $[a,b]$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ si para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y $r \in \{3,4\}$, las matrices*

$$K_{r,n}^{[S]}(z) := \begin{pmatrix} H_{r,n} & R_n(z)\,[\,v_n\widetilde{S}_r(z) - u_{r,n}\,] \\ [\widetilde{S}_r^*(z)v_n^* - u_{r,n}^*]R_n^*(z) & \{\widetilde{S}_r(z) - \widetilde{S}_r^*(z)\}/\{z-\overline{z}\} \end{pmatrix} \tag{1.1.16}$$

ambas son hermitianas no negativas.

Observación 1.2. *Las matrices $K_{3,n}^{[S]}(z)$ y $K_{4,n}^{[S]}(z)$ definidas como en la Definición 1.16, son de dimensión $(n+2)q \times (n+2)q$.*

Definición 1.17. *Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y $q \in \mathbb{N}$. Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q\times q$. El símbolo $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ representará el conjunto de todas las soluciones del sistema de desigualdades matriciales fundamental de tipo V.P. Potapov asociado a $[a,b]$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$.*

El teorema principal de esta sección es el siguiente resultado (ver [12] y [11]):

Teorema 1.3. *Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$ y $q \in \mathbb{N}$. Sea s_j definido como en (1.0.3). Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Sean $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ y $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definidos como en las Definiciones 1.12 y 1.17, respectivamente. Entonces se satisface la igualdad*

$$\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] = \mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}].$$

1.2 Identidades principales

En esta sección mostraremos y destacaremos las identidades esenciales que conectan a las matrices de bloques introducidas en la Sección 1.1, más específicamente, nos referimos a las Ecuaciones (1.1.4)-(1.1.13) y que además nos servirán para simplificar cálculos posteriores.

En principio, introducimos algunas identidades triviales.

Observación 1.3. *Supongamos que $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in (a, \infty)$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$, de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$, tales que $H_{4,n} \geqslant 0$ y $H_{3,n} \geqslant 0$, entonces la ecuación*

$$H_{1,n} = \frac{1}{b-a}(H_{4,n} + H_{3,n}) \tag{1.2.1}$$

demuestra que también $H_{1,n}$ es hermitiana no negativa. La identidad (1.2.1) se obtiene de resolver las Ecuaciones (1.1.9) y (1.1.10) para $H_{1,n}$. Además, de $H_{4,n}^* = H_{4,n}$ y $H_{3,n}^* = H_{3,n}$ se sigue que $\widetilde{H}_{1,n}^* = \widetilde{H}_{1,n}$ ya que

$$\widetilde{H}_{1,n} = \frac{1}{b-a}(bH_{4,n} + aH_{3,n}). \tag{1.2.2}$$

Similarmete la identidad (1.2.2) se obtiene de (1.1.9) y (1.1.10).

Lema 1.1. *Sea $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ un secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Además sean T_n, v_n, $H_{1,n}$, $\widetilde{H}_{1,n}$ y u_n definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces se satisfacen las siguientes igualdades*

$$u_n v_n^* = \widetilde{H}_{1,n} T_n^* - H_{1,n}. \tag{1.2.3}$$

Demostración. Por un lado calcular $u_n v_n^*$ usando (1.1.11) y (1.1.6). Después calculamos $\widetilde{H}_{1,n} T_n^* - H_{1,n}$ usando (1.1.8), (1.1.4) y (1.1.7). ■

Proposición 1.1. (Identidades de tipo Ljapunov). *Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ un secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean T_n, v_n, $H_{4,n}$, $H_{3,n}$ $u_{4,n}$ y $u_{3,n}$ definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces para cada $r \in \{3, 4\}$, se satisface la siguiente igualdad*

$$H_{r,n} T_n^* - T_n H_{r,n} = u_{r,n} v_n^* - v_n u_{r,n}^*. \tag{1.2.4}$$

Demostración. Ver [[12], Proposición 2.1] ■

1.3 Condición de existencia de la solución de la versión matricial del problema de momentos

En esta sección reproducimos el criterio de existencia de la solución al problema de momentos de Hausdorff en la versión matricial.

Lema 1.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que el conjunto $\mathcal{M}_{\geqslant}^q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido en la Definición 1.10 es no vacío. En particular, $s_j^* = s_j$ para todo $j \in \mathbb{N}_{0,2n+1}$ donde $\mathbb{N}_{0,2n+1}$ está determinado por la Notación 2. Entonces las matrices $H_{1,n}$, $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ definidas en la Definición 1.14 son hermitianas no negativas y la matriz $\widetilde{H}_{1,n}$ es hermitiana.*

Demostración. Con las hipótesis del Lema 1.2, obtenemos las matrices definidas en la Definición 1.14. Sea $\sigma \in \mathcal{M}_{\geqslant}^q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, claramente $\sigma \in \mathcal{M}_{\geqslant}^q[a,b]$. Entonces se puede ver que la afirmación del Lema 1.2 se sigue de aplicar el Lema 3.3 de [12] con las matrices introducidas en (1.1.7)-(1.1.10) ■

El Teorema 1.4 es importante ya que nos habla sobre la condición necesaria y suficiente para la existencia de la solución de la versión matricial del problema de momentos.

Teorema 1.4. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Entonces el conjunto $\mathcal{M}_{\geqslant}^q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido en la Definición 1.10 es no vacío si y solo si las matrices de bloque de Hankel $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ introducidas en la Definición 1.14, ambas son hermitianas no negativas.*

Demostración. Probaremos la condición necesaria. Supongamos que $\mathcal{M}_{\geqslant}^q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset$. De acuerdo al Lema 1.2, tenemos que en particular, las matrices de bloque de Hankel $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ ambas son hermitianas no negativas. La demostración de la condición suficiente se puede encontrar en [12, pág. 160-161]. ■

1.4 Ejemplos

Ejemplo 1.1. *Sea $q = 2$. Consideremos la función matricial definida en $[0,1]$ y dada por*

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + t & 2t^2 - 2t \\ 2t^2 - 2t & 3t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 4t \end{pmatrix}. \tag{1.4.1}$$

Se puede demostrar que $\sigma \in \mathcal{M}_{\geqslant}^2[0,1]$, donde $\sigma \in \mathcal{M}_{\geqslant}^2[0,1]$ se define mediante la Definición 1.8.

Ejemplo 1.2. *Sea $n = 2$ y el intervalo $[0,1]$. Obtener los cinco primeros momentos de la función $\sigma(t)$ dada por (1.4.1).*

Solución. Utilizando (1.0.3), tenemos:

$$s_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad s_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} \end{pmatrix},$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad s_4 = \begin{pmatrix} \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \end{pmatrix}, \qquad s_5 = \begin{pmatrix} \frac{13}{42} & \frac{5}{21} \\ \frac{5}{21} & \frac{37}{168} \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2

El problema de momentos en el caso no degenerado

El objetivo del Problema 1 (ver pág. 3) es describir el conjunto $\mathcal{M}_{\geqslant}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. De la versión matricial reformulada del problema de momentos, es decir, el Problema 2 (ver pág. 5), es suficiente con describir el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ dado en la Definición 1.12 y por ahora podemos referirnos a dicho conjunto como el conjunto de soluciones de la versión matricial del problema de momento de Hausdorff. Además, recordemos que

$$\mathcal{M}_{\geqslant}^{q}[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset \quad \text{si y solo si} \quad \mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}] \neq \emptyset. \tag{2.0.1}$$

En este capítulo se reescribe el sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov asociado a la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff en un número par de momentos, para el caso no degenerado. También, se introduce la matriz resolvente.

Observación 2.1. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$. En vista de (2.0.1), si $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ de soluciones de la versión matricial reformulada del problema de momento de Hausdorff dado en la Definición 1.12, es no vacío si y solo si la primera matriz de bloques de Hankel $H_{4,n}$ y la segunda matriz de bloques de Hankel $H_{3,n}$ asociadas con el intervalo $[a,b]$ y la secuencia $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ dadas por (1.1.9) y (1.1.10) son hermitianas no negativas.*

En la Sección 2.2, daremos una parametrización del conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ bajo la suposición de que las matrices de bloque de Hankel $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ son hermitianas positivas. A este caso le llamaremos *caso no degenerado*, es decir,

$$H_{4,n} > 0, \quad H_{3,n} > 0. \tag{2.0.2}$$

De (1.2.1) y (2.0.2) se sigue $H_{1,n} > 0$. Supongamos además que $\det \widetilde{H}_{1,n} \neq 0$. En consecuencia las matrices $H_{1,n}$, $\widetilde{H}_{1,n}$, $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ son invertibles. Lo anterior nos permite hacer la siguiente observación.

2.1 Columna par de funciones no negativas

En esta sección usamos definiciones y resultados publicados en [12] sin demostración.

Sea J una matriz signo, es decir, J es una matriz compleja de $p \times p$ que satisface $J^* = J$ y $J^2 = I$. Una matriz compleja de $p \times p$ es $J-$ contractiva (respectivamente, $J-$ expansiva) si $J - A^*JA \geqslant 0$ (respectivamente, $A^*JA - J \geqslant 0$). Si A es una matriz compleja de $p \times p$, entonces A es $J-$ contractiva (respectivamente, $J-$ expansiva) si y solo si A^* es $J-$ contractiva (respectivamente, $J-$ expansiva) (ver, [16, Teorema 1.3.3]). Además, si A es no singular, entonces A es $J-$ contractiva si y solo si A^{-1} es $J-$ expansiva (ver, [16, Lema 1.3.15]). Una matriz compleja de $p \times p$ se dice $J-$ unitaria si $J - A^*JA = 0$. Si A es una matriz compleja de $p \times p$ $J-$ unitaria, entonces A es no singular y las matrices A^* y A^{-1} también son $J-$ unitaria.

Definición 2.1. *Sea Π_+ definido como en la Notación 7. Una funcion matricial $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{q\times q}$ es de la clase Potapov si*

$$J - W^*(z)JW(z) \geqslant 0 \tag{2.1.1}$$

se satisface para todo $z \in \Pi_+$. Denotamos mediante $\mathcal{B}_J(\Pi_+)$ el conjunto de todas las funciones matriciales de la clase de Potapov. Una función matricial W que pertenece a $\mathcal{B}_J(\Pi_+)$ es llamada una función $J-$ interna de $\mathcal{B}_J(\Pi_+)$ si

$$J - W^*(x)JW(x) = 0 \tag{2.1.2}$$

se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lema 2.1. *Sean Π_+ y Π_- definidos como en la Notación 7. Sea J una matriz signo de $p \times p$ y sea W una $J-$función interna de $\mathcal{B}_J(\Pi_+)$, donde $\mathcal{B}_J(\Pi_+)$ está definido en la Definición 2.1.*

(a) Para cada $z \in \mathbb{C}$, la matriz $W(z)$ es no singular y

$$[W(z)]^{-1} = JW^*(\overline{z})J \tag{2.1.3}$$

y

$$J - [W(z)]^{-*}J[W(z)]^{-1} = J(J - W(\overline{z})JW^*(\overline{z}))J. \tag{2.1.4}$$

(b) Para cada $z \in \Pi_-$,

$$W^*(z)JW(z) - J \geqslant 0. \tag{2.1.5}$$

(c) Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\frac{W^*(z)JW(z) - J}{i(z - \overline{z})} \geqslant 0. \tag{2.1.6}$$

Demostración.Ver [12]. ■

Para nuestras consideraciones introducimos la siguiente matriz

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & -iI_q \\ iI_q & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

donde $q \in \mathbb{N}$. Esta matriz posee propiedades importantes y en particular, nos permitirá más adelante, expresar la desigualdad (2.2.17), de la Proposición 2.3. La siguiente observación se demuestra directamente.

Observación 2.2. *Sea $q \in \mathbb{N}$ y J_q dado por (2.1.7). Para todo entero $n > 0$, se satisfacen las siguientes igualdades: $J_q^* = J_q$, $J_q^{2n} = I_{2q}$ y $J_q^{2n+1} = J_q$.*

Definición 2.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y $X \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Sea $F : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial compleja de $q \times q$. Sea F_{mn} definida como en la Definición 1.1 y sea $\mathbb{N}_{1,q}$ de acuerdo a la Notación 2. Decimos que F es meromorfa en X si para cada $m, n \in \mathbb{N}_{1,q}$, F_{mn} es meromorfa en X.*

Definición 2.3. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y J_q definido por (2.1.7). Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ funciones matriciales de $q \times q$ que son meromorfas en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Entonces decimos que el par columna $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ es no negativo con respecto a $-J_q$ y $[a, b]$ si existe un subconjunto discreto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ sin puntos de acumulación tal que las siguientes cuatro condiciones se satisfacen:*

(i) Las funciones $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus ([a, b] \cup \mathcal{D})$.

(ii) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus ([a, b] \cup \mathcal{D})$,

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix} = q.$$

(iii) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \mathcal{D})$,

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z} \begin{pmatrix} (z-a)\mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix}^* (-J_q) \begin{pmatrix} (z-a)\mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

(iv) Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \mathcal{D})$,

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z} \begin{pmatrix} (b-z)\mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix}^* (-J_q) \begin{pmatrix} (b-z)\mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Definición 2.4. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$ y J_q definido como en (2.1.7). Denotamos mediante $\mathcal{P}[-J_q, [a, b]]$ el conjunto de todos las columnas de pares $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ no negativos correspondientes a $-J_q$ y $[a, b]$.*

Definición 2.5. *Sean* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, J_q *definido como en (2.1.7). y* $\mathcal{P}[-J_q, [a, b]]$ *definido en la Definición 2.4. Sean* $\begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[-J_q, [a, b]]$. *Se dice que* $\begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix}$ *son equivalentes si existe una función matricial* Q *de dimensión* $q \times q$ *meromorfa en* $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ *con* $\det Q \neq 0$ *tal que*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix} Q. \tag{2.1.8}$$

Denotemos la relación (2.1.8) mediante

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p_2} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} \mathbf{p_1} \\ \mathbf{q_1} \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que la relación $\sim_{\mathcal{P}}$ de la Definición 2.5 es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}[-J_q, [a, b]]$.

Definición 2.6. *Sean* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, J_q *definido como en (2.0.1) y* $\mathcal{P}[-J_q, [a, b]]$ *definido en la Definición 2.4. El conjunto de todas las clases de equivalencia en* $\mathcal{P}[-J_q, [a, b]]$ *bajo la relación* $\sim_{\mathcal{P}}$, *se denota como*

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \right\rangle_{\sim_{\mathcal{P}}}.$$

Observación 2.3. *Sea* $S : \mathbb{C} \setminus [a, b] \to \mathbb{C}^{q \times q}$ *una función matricial y sea* $\widetilde{S}_4$, *(respectivamente,* $\widetilde{S}_3$*) las funciones asociadas canónicamente a* S, *es decir,* $\widetilde{S}_4 : \mathbb{C} \setminus [a, b] \to \mathbb{C}^{q \times q}$ *y* $\widetilde{S}_3 : \mathbb{C} \setminus [a, b] \to \mathbb{C}^{q \times q}$ *dados por (1.1.14) y (1.1.15). Para cada* $r \in \{3, 4\}$ *y cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *se obtiene inmediatamente*

$$\frac{\begin{pmatrix} \widetilde{S}_r^*(z) & I_q \end{pmatrix} (-J_q) \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r(z) \\ I_q \end{pmatrix}}{i(\overline{z} - z)} = \frac{\widetilde{S}_r(z) - \widetilde{S}_r^*(z)}{z - \overline{z}}. \tag{2.1.9}$$

Definición 2.7. *Si* f *es una función matricial meromorfa en* $X \subseteq \mathbb{C}$ *no vacío, entonces sea* $\mathbb{H}_f$ *el conjunto de todos los puntos donde* f *es holomorfa en* X.

El siguiente lema se puede demostrar de forma similar como la implicación "(ii)⇒(i)" en la demostración del Lema 3.6 en [12]. Es por eso que omitimos los detalles de la demostración.

Lema 2.2. *Sean* $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, Π_+ *denotado de acuerdo a la Notación 7 y* $\mathbb{H}_f$ *definido en la Definición 2.7. Sea* φ *una función matricial de* $q \times q$ *que satisface* $\mathfrak{Im}\, \varphi(z) \geqslant 0$ *para todo* $z \in \Pi_+ \cap \mathbb{H}_\varphi$

(a) φ *es meromorfa en* $\mathbb{C} \setminus [a, +\infty)$. *Supongamos que la función* $\varphi_1 : \mathbb{H}_\varphi \to \mathbb{C}^{q \times q}$ *definida por* $\varphi_1(\omega) := (\omega - a)\varphi(\omega)$ *satisface* $\mathfrak{Im}\, \varphi_1(z) \geqslant 0$ *para todo* $z \in \Pi_+ \cap \mathbb{H}_\varphi$ *Entonces, para cada* $x \in (-\infty, a) \cap \mathbb{H}_\varphi$, *la matriz* $\varphi(x)$ *es hermitiana no negativa.*

(b) φ *es meromorfa en* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, b]$. *Supongamos que la función* $\varphi_2 : \mathbb{H}_\varphi \to \mathbb{C}^{q \times q}$ *definida por* $\varphi_2(\omega) := (b - \omega)\varphi(\omega)$ *satisface* $\mathfrak{Im}\, \varphi_2(z) \geqslant 0$ *para todo* $z \in \Pi_+ \cap \mathbb{H}_\varphi$. *Entonces, para cada* $x \in (b, +\infty) \cap \mathbb{H}_\varphi$, *la matriz* $-\varphi(x)$ *es hermitiana no negativa.*

Proposición 2.1. *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{N}$, J_q definido como en (2.1.7) y $\mathcal{R}_q[a, b]$ definido en la Definición 1.11. Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ funciones matriciales que son meromorfas en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Supongamos que $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ es un par columna no negativo con respecto a $-J_q$ y $[a, b]$ y que la función $\det \mathbf{p}$ no es idénticamente cero en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Entonces $S := \mathbf{q}\mathbf{p}^{-1}$ pertenece a $\mathcal{R}_q[a, b]$.*

2.2 El sistema de desigualdades matriciales de V.P. Potapov en el caso no degenerado

En esta sección introducimos dos matrices tipo resolventes auxiliares $\widehat{U}_{3,n}$ y $\widehat{U}_{4,n}$ que son parte fundamental de la obtención de la matriz resolvente "centrada" en el punto $z = b$.

Además, en esta sección reproducimos los resultados de [12] sin demostración. El Lema 2.3, Lema 2.4, Lema 2.5, Lema 2.6 y la Proposición 2.3 se obtienen como parte de la tesis.

Proposición 2.2. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean J_q dado por (2.1.7), T_n, v_n, $H_{4,n}$, $H_{3,n}$, $u_{4,n}$ y $u_{3,n}$ definidos como en las Definiciones 1.13 y 1.14. Entonces se cumple la siguiente igualdad*

$$\begin{pmatrix} v_n & u_{r,n} \end{pmatrix} J_q \begin{pmatrix} v_n^* \\ u_{r,n}^* \end{pmatrix} = i(H_{r,n}T_n^* - T_n H_{r,n}) \quad \textit{para} \quad r = 3, 4. \tag{2.2.1}$$

Observación 2.4. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$. Supongamos que $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ dadas por (1.1.9) y (1.1.10) son hermitianas positivas. Sea $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial. Además, sean T_n, $R_n(z)$, v_n, $u_{4,n}$, $u_{3,n}$, $\widetilde{S}_4$ y $\widetilde{S}_3$ definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14, 1.15. En vista de la Observación A.10 del Apéndice A, se puede ver que las matrices $K_{3,n}^{[S]}(z)$ y $K_{4,n}^{[S]}(z)$ definidas por (1.1.16) son hermitianas no negativas para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si y solo si para cada $r \in \{3, 4\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ la matriz*

$$\widetilde{C}_{r,n}^{[S]}(z) := \frac{\widetilde{S}_r(z) - \widetilde{S}_r^*(z)}{z - \overline{z}} - \left(v_n \widetilde{S}_r(z) - u_{r,n}\right)^* R_n^*(z) H_{r,n}^{-1} R_n(z) \left(v_n \widetilde{S}_r(z) - u_{r,n}\right) \tag{2.2.2}$$

es hermitiana no negativa.

Lema 2.3. *Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$. Además, sean J_q, R_n, v_n, $H_{4,n}$, $H_{3,n}$, $u_{4,n}$ y $u_{3,n}$ definidas como en (2.1.7), (1.1.5), (1.1.6), (1.1.9), (1.1.10), (1.1.13) y (1.1.12). Supongamos que las matrices de bloques de Hankel $H_{r,n}$ son hermitianas positivas. Entonces $\widehat{U}_{r,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2q\times 2q}$ definido mediante*

$$\widehat{U}_{r,n}(z) := I_{2q} - i(b - z) \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{r,n}^{-1} R_n(b)(u_{r,n}\ v_n) J_q \tag{2.2.3}$$

para $r=3,4$ es un polinomio matricial de $2q\times 2q$ de grado mayor o igual a $n+1$. Además, los siguientes enunciados se cumplen:

(a) Para todo $z\in\mathbb{C}$,

$$J_q-\widehat{U}_{r,n}(z)J_q\widehat{U}^*_{r,n}(z)=-i(z-\overline{z})\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(\overline{z})H^{-1}_{r,n}R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n). \tag{2.2.4}$$

En particular, para cada $\omega\in\Pi_+$,

$$J_q-\widehat{U}_{r,n}(\omega)J_q\widehat{U}^*_{r,n}(\omega)\geqslant 0. \tag{2.2.5}$$

Además, para cada número real x,

$$J_q-\widehat{U}_{r,n}(x)J_q\widehat{U}^*_{r,n}(x)=0. \tag{2.2.6}$$

(b) Para todo $z\in\mathbb{C}$, la matriz $\widehat{U}_{r,n}(z)$ es no singular y las siguientes identidades

$$[\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1}=I_{2q}+i(b-z)\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(b)H^{-1}_{r,n}R_n(z)(u_{r,n}\,v_n)J_q \tag{2.2.7}$$

y

$$J_q-[\widehat{U}^{-1}_{r,n}(z)]^*J_q[\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1}=-i(\overline{z}-z)J_q\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(z)H^{-1}_{r,n}R_n(z)(u_{r,n}\,v_n)J_q \tag{2.2.8}$$

se satisfacen.

Demostración. Sea $r=3,4$. Obtenemos la transpuesta conjugada de $\widehat{U}_{r,n}(z)$:

$$\widehat{U}^*_{r,n}(z)=I_{2q}+i(b-\overline{z})J_q\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(b)H^{-1}_{r,n}R_n(\overline{z})(u_{r,n}\,v_n). \tag{2.2.9}$$

Calculamos $\widehat{U}_{r,n}(z)J_q\widehat{U}^*_{r,n}(z)$:

$$\begin{aligned}
&J_q-\widehat{U}_{r,n}(z)J_q\widehat{U}^*_{r,n}(z)\\
&=J_q-\left\{J_q-i(b-z)\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(\overline{z})H^{-1}_{r,n}R_n(b)(u_{r,n}\ v_n)\right\}\\
&\quad\cdot\left\{I_{2q}+i(b-\overline{z})J_q\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(b)H^{-1}_{r,n}R_n(\overline{z})(u_{r,n}\,v_n)\right\}\\
&=-i(b-\overline{z})\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(b)H^{-1}_{r,n}R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n)+i(b-z)\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(\overline{z})H^{-1}_{r,n}\\
&\quad\cdot R_n(b)(u_{r,n}\ v_n)+i(b-z)\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(\overline{z})H^{-1}_{r,n}R_n(b)(u_{r,n}\ v_n)J_q i(b-\overline{z})\\
&\quad\cdot\begin{pmatrix}u^*_{r,n}\\ v^*_n\end{pmatrix}R^*_n(b)H^{-1}_{r,n}R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= i \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{r,n}^{-1} R_n(b)(-(b-\overline{z})(I-bT_n)H_{r,n}(I-zT_n^*) + (b-z)(I-\overline{z}T_n) \\
&\quad \cdot H_{r,n}(I-bT_n^*) + (b-z)(b-\overline{z}) i (u_{r,n}\ v_n) J_q \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix}) R_n^*(b) H_{r,n}^{-1} R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n) \\
&= i \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{r,n}^{-1} R_n(b)(-(b-\overline{z})(I-bT_n)H_{r,n}(I-zT_n^*) + (b-z)(I-\overline{z}T_n) \\
&\quad \cdot H_{r,n}(I-bT_n^*) + (b-z)(b-\overline{z})(H_{r,n}T_n^* - T_n H_{r,n})) R_n^*(b) H_{r,n}^{-1} R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n) \\
&= i \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{r,n}^{-1} R_n(b)(-b^2 z T_n H_{r,n} T_n^* + \overline{z} H_{r,n} - b\overline{z} T_n H_{r,n} + b^2 \overline{z} T_n H_{r,n} T_n^* \\
&\quad - z H_{r,n} + bz H_{r,n} T_n^* - b\overline{z} H_{r,n} T_n^* + bz T_n H_{r,n}) R_n^*(b) H_{r,n}^{-1} R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n) \\
&= -i \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{r,n}^{-1} R_n(b)(z-\overline{z})(H_{r,n}(I-bT_n*) - bT_n H_{r,n}(I-bT_n^*)) R_n^*(b) \\
&\quad \cdot H_{r,n}^{-1} R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n) \\
&= -i \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{r,n}^{-1} R_n(b)(z-\overline{z})(H_{r,n} - bT_n H_{r,n})(I-bT_n^*) R_n^*(b) H_{r,n}^{-1} R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n) \\
&= -i \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{r,n}^{-1} R_n(b)(z-\overline{z})(I-bT_n)H_{r,n}(I-bT_n^*) R_n^*(b) H_{r,n}^{-1} R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n) \\
&= -i(z-\overline{z}) \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{r,n}^{-1} R_n(\overline{z})(u_{r,n}\ v_n).
\end{aligned}
$$

En la primera igualdad usamos (2.2.3). En la segunda igualdad hemos multiplicado y usamos las propiedades de J_q mencionadas en la Observación 2.2. En la tercera igualdad usamos las identidades $(R_n(\overline{z}))^{-1} = (I - \overline{z}T_n)$ y $(R_n^*(\overline{z}))^{-1} = (I - zT_n^*)$. En la cuarta igualdad usamos la identidad 2.2.1 y partir de ahí solo se va simplificando. Por lo tanto, claramente se sigue (2.2.4).

Sea $w \in \Pi_+$, ya que $\mathfrak{Im}\, w > 0$ la identidad (2.2.5) se sigue de reemplazar w por z. Sea $x \in \mathbb{R}$, la identidad (2.2.6) se sigue de reemplazar x por z en (2.2.4).

Para la parte (b), de (2.1.3) tenemos

$$
\begin{aligned}
[\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1} &= J_q \widehat{U}_{r,n}^*(\overline{z}) J_q \\
&= J_q (I_{2q} + i(b-z) J_q \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(b) H_{r,n}^{-1} R_n(z)(u_{r,n}\, v_n)) J_q \\
&= I_{2q} + i(b-z) \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(b) H_{r,n}^{-1} R_n(z)(u_{r,n}\, v_n) J_q.
\end{aligned}
$$

La segunda igualdad se sigue de reemplazar $\overline{z}$ por z en (2.2.9). En la tercera usamos propiedades de J_q mencionadas en la Observación 2.2. Similarmente de (2.1.3), tenemos

$$\begin{aligned}
&J_q - [\widehat{U}_{r,n}^{-1}(z)]^* J_q [\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1} = J_q - \left(J_q \widehat{U}_{r,n}^*(\overline{z}) J_q\right)^* J_q J_q \widehat{U}_{r,n}^*(\overline{z}) J_q \\
&= J_q - J_q \widehat{U}_{r,n}(\overline{z}) J_q J_q J_q \widehat{U}_{r,n}^*(\overline{z}) J_q \\
&= J_q - J_q \widehat{U}_{r,n}(\overline{z}) J_q \widehat{U}_{r,n}^*(\overline{z}) J_q \\
&= J_q - J_q [J_q + i(\overline{z} - z) \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(z) H_{r,n}^{-1} R_n(z) (u_{r,n}\ v_n)] J_q \\
&= -i(\overline{z} - z) J_q \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(z) H_{r,n}^{-1} R_n(z) (u_{r,n}\ v_n) J_q .
\end{aligned}$$

En la tercera igualdad usamos las propiedades de J_q mencionadas en la Observación 2.2. En la cuarta igualdad usamos la identidad (2.2.4). Finalmente la quinta igualdad se sigue de usar las propiedades de J_q de la Observación 2.2. ■

Lema 2.4. *Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices de bloques de Hankel $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ definidas en (1.1.9) y (1.1.10) son hermitianas positivas. Entonces, para cada $r \in \{3, 4\}$, $\widehat{U}_{r,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2q \times 2q}$ definida como en (2.2.3) es una función J_q-interna de la clase $\mathcal{B}_J(\Pi_+)$, donde $\mathcal{B}_J(\Pi_+)$ está definido en la Definición 2.1.*

Demostración. Si A es una matriz compleja de $2q \times 2q$, entonces A^* es J_q-contractiva (respectivamente, J_q-unitaria) si y solo si A es J_q-contractiva (respectivamente, J_q-unitaria). Por lo tanto, del Lema 2.3 se sigue inmediatamente la afirmación. ■

Lema 2.5. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $r \in \{3, 4\}$. Supongamos que $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ es una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ dadas por (1.1.9) y (1.1.10) son hermitianas positivas. Sea $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{q \times q}$ una función matricial. Además, sean T_n, $R_n(z)$, v_n, $u_{4,n}$, $u_{3,n}$, $\widetilde{S}_4$ y $\widetilde{S}_3$ definidos como en las Definiciones 1.13, 1.14, 1.15. Entonces para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ la matriz $\widetilde{C}_{r,n}^{[S]}(z)$ admite la representación*

$$\widetilde{C}_{r,n}^{[S]}(z) = \frac{1}{i(z - \overline{z})} \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r \\ I \end{pmatrix}^* [\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1*} J_q [\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r \\ I \end{pmatrix}. \tag{2.2.10}$$

Demostración. Claramente se satisface la siguiente igualdad

$$v_n \widetilde{S}_r(z) - u_{r,n} = -i(u_{r,n}\, v_n) J_q \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r \\ I \end{pmatrix}. \tag{2.2.11}$$

De (2.1.9) y (2.2.11) podemos reescribir (2.2.2) como sigue

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_{r,n}^{[S]}(z) = &\frac{\begin{pmatrix} \widetilde{S}_r(z) \\ I \end{pmatrix}^* (-J_q) \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r(z) \\ I \end{pmatrix}}{i(\overline{z} - z)} - \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r(z) \\ I \end{pmatrix}^* J_q \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(z) H_{r,n}^{-1} R_n(z) \\
&\cdot (u_{r,n}\, v_n) J_q \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r(z) \\ I_q \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r^*(z) \\ I \end{pmatrix} \frac{-J_q - i(\overline{z}-z)J_q \begin{pmatrix} u_{r,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(z) H_{r,n}^{-1} R_n(z) \begin{pmatrix} u_{r,n} \, v_n \end{pmatrix} J_q}{i(\overline{z}-z)} \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r(z) \\ I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r^*(z) \\ I \end{pmatrix} \frac{[\widehat{U}_{r,n}^{-1}(z)]^* J_q [\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1}}{i(z-\overline{z})} \begin{pmatrix} \widetilde{S}_r(z) \\ I \end{pmatrix}.$$

En la tercera igualdad hemos usado (2.2.4). ■

Observación 2.5. *Sea M una matriz compleja $q \times q$, y sean*

$$A_1 := \begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} I & M \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A_1^* J_q A_1 = J_q + \operatorname{diag}(i(M^* - M), 0), \quad A_2^* J_q A_2 = J_q + \operatorname{diag}(0, i(M^* - M))$$

En particular, A_1 y A_2 ambas son J_q-unitaria si y solo si $M^* = M$.

Lema 2.6. *Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices de bloques de Hankel $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ son hermitianas positivas. Sean*

$$\widehat{M}_{4,n} := (b-a) u_{3,n}^* R_n^*(b) H_{3,n}^{-1} R_n(b) u_{3,n}, \tag{2.2.12}$$

$$\widehat{M}_{3,n} := (b-a) v_n^* R_n^*(b) H_{4,n}^{-1} R_n(b) v_n,$$

$$\widehat{A}_{4,n} := \begin{pmatrix} I & -\widehat{M}_{4,n} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \; \widehat{A}_{3,n} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ \widehat{M}_{3,n} & I \end{pmatrix}. \tag{2.2.13}$$

Sea $r \in \{3,4\}$ y sea $\widehat{U}_{r,n}$ definida como (2.2.3). Entonces

$$W_{r,n} := \widehat{U}_{r,n} \widehat{A}_{r,n} \tag{2.2.14}$$

con $r = 3,4$ es un polinomio matricial $2q \times 2q$ de grado menor o igual a $n+1$. Además, $W_{r,n}$ es una función J_q-interna de la clase $\mathcal{B}_{J_q}(\Pi_+)$, donde $\mathcal{B}_J(\Pi_+)$ está definido en la Definición 2.1. Para cada $z \in \mathbb{C}$, la matriz $W_{r,n}(z)$ es no singular y para cada $z \in \mathbb{C}$ las identidades

$$W_{r,n}(z) J_q W_{r,n}^*(z) = \widehat{U}_{r,n}(z) J_q \widehat{U}_{r,n}^*(z) \tag{2.2.15}$$

y

$$W_{r,n}^{-*}(z) J_q W_{r,n}^{-1}(z) = \widehat{U}_{r,n}^{-*}(z) J_q \widehat{U}_{r,n}^{-1}(z) \tag{2.2.16}$$

se satisfacen.

Demostración. Obviamente las matrices $\widehat{M}_{3,n}$ y $-\widehat{M}_{4,n}$ son hermitianas. De la Observación 2.5 tenemos que $\widehat{A}_{3,n}$ y $\widehat{A}_{4,n}$ son $J-$unitarias. Consecuentemente, todas las matrices $\widehat{A}^*_{3,n}$, $\widehat{A}^*_{4,n}$ y $\widehat{A}^{-1}_{3,n}$ y $\widehat{A}^{-1}_{4,n}$ también son J_q-unitarias. Así, (2.2.15) y (2.2.16) se satisfacen para cada $z \in \mathbb{C}$. En vista de Lema 2.3. ■

Ahora estamos listos para reescribir el sistema de desigualdades matriciales fundamental del tipo de V.P. Potapov asociado a la versión matricial del problema de momento de Hausdorff para el caso no degenerado. Esto será de gran ayuda más adelante para la demostración del Teorema 3.1.

Proposición 2.3. *Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices de bloques de Hankel $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ son hermitianas positivas. Sea $S : \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}^{2q\times 2q}$ una función matricial. Sean $\widetilde{S}_4$ y $\widetilde{S}_3$ definidas como en (1.1.14) y (1.1.15), respectivamente. Entonces S pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ si y solo si S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y la desigualdad matricial*

$$\frac{1}{i(z-\overline{z})}\begin{pmatrix}\widetilde{S}_r(z)\\ I\end{pmatrix}^* [W_{r,n}(z)]^{-*} J_q [W_{r,n}(z)]^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{S}_r(z)\\ I\end{pmatrix} \geqslant 0 \tag{2.2.17}$$

se satisface para cada $r \in \{3,4\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Demostración. Por el Teorema 1.3, tenemos que S pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ si y solo si S pertenece a $\mathcal{P}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ dado en la Definición 1.17, entonces S es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ y además, $K^{[S]}_{3,n}(z)$ y $K^{[S]}_{4,n}(z)$ son hermitianas no negativas.

De la Observación 2.4 tenemos que $K^{[S]}_{3,n}(z)$ y $K^{[S]}_{4,n}(z)$ son hermitianas no negativas para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ si y solo si para cada $r \in \{3,4\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se satisface (2.2.2). Entonces de (2.2.10) tenemos

$$\frac{1}{i(z-\overline{z})}\begin{pmatrix}\widetilde{S}_r\\ I\end{pmatrix}^* [\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1*} J_q [\widehat{U}_{r,n}(z)]^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{S}_r\\ I\end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{2.2.18}$$

Finalmente usamos (2.2.16) y la Proposición (2.3) queda demostrada. ■

2.3 La matriz resolvente en el punto b

En esta sección definimos la matriz resolvente en el punto $z = b$.

Lema 2.7. *Sea $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$. Además sean T_n, v_n, u_n, $H_{3,n}$ y $H_{4,n}$ definidos como en (1.1.4), (1.1.6), (1.1.11), (1.1.10) y (1.1.9), respectivamente. Se satisface la siguiente identidad:*

$$(I - aT_n)H_{3,n} + (b-a)v_n u_n^* = -(I - bT_n)H_{4,n}. \tag{2.3.1}$$

Demostración. Del lado izquierdo de (2.3.1) tenemos

$$\begin{aligned}(I - aT_n)H_{3,n} + (b-a)v_n u_n^* &= (I - aT_n)H_{3,n} + (b-a)(T_n\widetilde{H}_{1,n} - H_{1,n})\\ &= bH_{1,n} - \widetilde{H}_{1,n} - aT_n bH_{1,n} + aT_n\widetilde{H}_{1,n} + bT_n\widetilde{H}_{1,n} - bH_{1,n}\\ &\quad - aT_n\widetilde{H}_{1,n} + aH_{1,n}\\ &= -(I - bT_n)\widetilde{H}_{1,n} + (I - bT_n)aH_{1,n}\\ &= -(I - bT_n)H_{4,n}.\end{aligned}$$

En la primera igualdad se usa (1.2.3). En la segunda igualdad usamos (1.1.10). En la cuarta igualdad se sigue de (1.1.9). ■

Teorema 2.1. *Sea $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$. Además, sean T_n, $R_n(z)$, v_n, u_n $u_{4,n}$, $u_{3,n}$, definidos como en la Definiciones 1.13 y 1.14. Para $r \in \{3, 4\}$, sea $W_{r,n}$, dado por (2.2.14). Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q \times q$ tales que las matrices $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ dadas por (1.1.9) y (1.1.10), respectivamente, son hermitianas positivas. Sea $\widehat{V}^{(2n+1)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2q\times 2q}$ definida para todo $z \in \mathbb{C}$ por*

$$\widehat{V}^{(2n+1)}(z) := \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_n(z) & \widehat{\beta}_n(z) \\ \widehat{\gamma}_n(z) & \widehat{\delta}_n(z) \end{pmatrix}, \tag{2.3.2}$$

donde

$$\widehat{\alpha}_n(z) := I_q + (b - z)u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b) v_n, \tag{2.3.3}$$
$$\widehat{\gamma}_n(z) := (b - z)(z - a)v_n^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b) v_n, \tag{2.3.4}$$
$$\widehat{\beta}_n(z) := -u_{3,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(b) u_{3,n}, \tag{2.3.5}$$
$$\widehat{\delta}_n(z) := I_q - (b - z)v_n^* R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(b) u_{3,n}. \tag{2.3.6}$$

Entonces

(a) *Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, la identidad*

$$\widehat{V}^{(2n+1)}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(z-a)} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} W_{4,n}(z) \begin{pmatrix} (z - a)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{2.3.7}$$

se satisface donde $W_{4,n}$ está dado por (2.2.14) con $r = 4$.

(b) *Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$, la identidad*

$$\widehat{V}^{(2n+1)}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(b-z)} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} W_{3,n}(z) \begin{pmatrix} (b - z)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{2.3.8}$$

se satisface donde $W_{3,n}$ está dado por (2.2.14) con $r = 3$.

(c) *Para todo $z \in \mathbb{C}$, la matriz $\widehat{V}_n(z)$ es invertible.*

Demostración. (a) Para $r = 4$ reescribimos la matriz de (2.2.14) como sigue

$$\begin{aligned} W_{4,n}(z) &= \widehat{U}_{4,n}(z)\widehat{A}_{4,n} \\ &= \left(I_{2q} - i(b - z) \begin{pmatrix} u_{4,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b)(u_{4,n}\ v_n) J_q \right) \widehat{A}_{4,n} \\ &= \widehat{A}_{4,n} - i(b - z) \begin{pmatrix} u_{4,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b)(u_{4,n}\ v_n) J_q \widehat{A}_{4,n} \\ &= \widehat{A}_{4,n} - i(b - z) \begin{pmatrix} u_{4,n}^* \\ v_n^* \end{pmatrix} R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b)(u_{4,n}\ v_n) \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & -i\widehat{M}_{4,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

En la segunda igualdad usamos (2.2.3). La cuarta igualdad se sigue de usar (2.1.7) y (2.2.13). Después de hacer el producto de matrices se sigue la quinta igualdad, donde

$$b_{11} = I + (b-z)u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)v_n, \tag{2.3.10}$$

$$b_{12} = -\widehat{M}_{4,n} - (b-z)[u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)u_{4,n} + u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)v_n\widehat{M}_{4,n}], \tag{2.3.11}$$

$$b_{21} = (b-z)v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)v_n, \tag{2.3.12}$$

$$b_{22} = I - (b-z)[v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)u_{4,n} + v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)v_n\widehat{M}_{4,n}]. \tag{2.3.13}$$

De (2.3.9) tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(z-a)}I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} W_{4,n}(z) \begin{pmatrix} (z-a)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{1}{(z-a)}b_{12} \\ (z-a)b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.3.14}$$

Comparando (2.3.3) con (2.3.10) y (2.3.4) con (2.3.12) obtenemos

$$\widehat{\alpha}_n(z) = b_{11}, \tag{2.3.15}$$

$$\widehat{\gamma}_n(z) = (z-a)b_{21}. \tag{2.3.16}$$

Veamos que b_{22} es precisamente $\widehat{\delta}_n(z)$. De (2.3.13) tenemos

$$\begin{aligned}
b_{22} &= I - (b-z)[v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)u_{4,n} + v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)v_n\widehat{M}_{4,n}] \\
&= I - (b-z)[v_n^* R_n^{(}\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)u_{4,n} + v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)v_n(b-a)u_{3,n}^* R_n^*(b)H_{3,n}^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot R_n(b)u_{3,n}] \\
&= I - (b-z)[v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)(I-aT_n)u_n + (b-a)v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)v_n u_n^* H_{3,n}^{-1}u_n] \\
&= I - (b-z)[v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)[(I-aT_n)H_{3,n} + (b-a)v_n u_n^*]H_{3,n}^{-1}u_n] \\
&= I - (b-z)[v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{4,n}^{-1}R_n(b)[(-I+bT_n)H_{4,n}]H_{3,n}^{-1}u_n] \\
&= I + (b-z)[v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{3,n}^{-1}u_n] \\
&= I - (b-z)v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{3,n}^{-1}R_n(b)u_{3,n}.
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos (2.2.12). En la tercera igualdad usamos las identidades $R_n(b)u_{3,n} = -u_n$ y $u_{4,n} = (I-aT_n)u_n$. En la cuarta igualdad factorizamos. En la quinta igualdad usamos la identidad (2.3.1). En la sexta igualdad usamos las identidades $H_{4,n}^{-1}R_n(b)(I-bT_n)H_{4,n} = I$ y $u_{4,n}^* = u_n^*(I-aT_n^*)$. En la última igualdad usamos la identidad $R_n(b)u_{3,n} = -u_n$. Entonces

$$b_{22} = I - (b-z)v_n^* R_n^*(\overline{z})H_{3,n}^{-1}R_n(b)u_{3,n}. \tag{2.3.17}$$

Comparando (2.3.17) con (2.3.6) tenemos

$$b_{22} = \widehat{\delta}_n(z). \tag{2.3.18}$$

Ahora veamos que $\frac{1}{(z-a)}b_{12} = \widehat{\beta}_n(z)$. De (2.3.11) tenemos

$$\begin{aligned}
b_{12} &= -\widehat{M}_{4,n} - (b-z)[u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b) u_{4,n} + u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b) v_n \widehat{M}_{4,n}] \\
&= -(b-a) u_{3,n}^* R_n^*(b) H_{3,n}^{-1} R_n(b) u_{3,n} - (b-z)[u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b) u_{4,n} \\
&\quad + u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b) v_n (b-a) u_{3,n}^* R_n^*(b) H_{3,n}^{-1} R_n(b) u_{3,n}] \\
&= -(b-a) u_n^* H_{3,n}^{-1} u_n - (b-z) u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b)(I - aT_n) u_n \\
&\quad - (b-z)(b-a) u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b) v_n u_n^* H_{3,n}^{-1} u_n \\
&= -(b-a) u_n^* H_{3,n}^{-1} u_n + (b-z) u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b) \cdot \\
&\quad \cdot [-(I - aT_n) H_{3,n} - (b-a) v_n u_n^*] H_{3,n}^{-1} u_n \\
&= -(b-a) u_n^* H_{3,n}^{-1} u_n + (b-z) u_{4,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{4,n}^{-1} R_n(b)[(I - bT_n) H_{4,n}] H_{3,n}^{-1} u_n \\
&= -(b-a) u_n^* H_{3,n}^{-1} u_n + (b-z) u_n^* (I - aT_n^*) R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1} u_n \\
&= u_n^*[-(b-a)(I - zT_n^*) + (b-z)(I - aT_n^*)] R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1} u_n \\
&= u_n^*[(a-z)(I - bT_n^*)] R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1} u_n \\
&= -(a-z) u_{3,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1} u_n \\
&= -(a-z) u_{3,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1}(-R_n(b) u_{3,n}) \\
&= (a-z) u_{3,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(b) u_{3,n}.
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos (2.2.12). En la tercera igualdad usamos las identidades $R_n(b)u_{3,n} = -u_n$ y $u_{4,n} = (I - aT_n)u_n$. En la cuarta igualdad factorizamos. En la quinta igualdad usamos la identidad (2.3.1). En la sexta igualdad usamos las identidades $H_{4,n}^{-1}R_n(b)(I - bT_n)H_{4,n} = I$ y $u_{4,n}^* = u_n^*(I - aT_n^*)$. En la septima igualdad factorizamos usando la identidad $(I - zT_n^*)R_n^*(\overline{z})$. La octava igualdad se sigue de simplificar. En la novena igualdad se usa la identidad. Así

$$\frac{1}{(z-a)} b_{12} = -u_{3,n}^* R_n^*(\overline{z}) H_{3,n}^{-1} R_n(b) u_{3,n}. \tag{2.3.19}$$

Comparando (2.3.5) con (2.3.19) se sigue

$$\frac{1}{(z-a)} b_{12} = \widehat{\beta}_n(z). \tag{2.3.20}$$

Por lo tanto, de (2.3.15), (2.3.16), (2.3.18), (2.3.20) y (2.3.14) se sigue (2.3.7) y el (a) queda demostrado. (b) De manera análoga se puede probar (2.3.7). (c) De (2.2.14) tenemos que $W_{r,n}$ es invertible para todo $z \in \mathbb{C}$ y para $r \in \{3, 4\}$. En vista de (2.3.7) y de (2.3.8), la parte (c) queda demostrada. ■

Definición 2.8. *La matriz (2.3.2) es llamada la* matriz resolvente *que corresponde a el Problema 1 (ver pág. 3) en el caso no degenerado.*

Nótese que la matriz resolvente es un polinomio matricial de $2q \times 2q$ de grado no mayor que $n + 2$.

Capítulo 3

Descripción del conjunto de soluciones del problema de momentos

Recordemos que en el Problema 2 (ver pág. 5), se pide describir el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ de soluciones de la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff dado en la Definición 1.12. En este capítulo procedemos con la descripción del conjunto de soluciones del problema de momentos.

3.1 Descripción del conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$

En esta sección demostramos que el conjunto de todas las clases de equivalencia y el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ forman una biyección dada por una función $S(z)$ que es precisamente la descripción deseada. Cabe mencionar que los resultados de esta sección no aparecen en trabajos anteriores

Obtenemos la parametrización de los elementos del conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, es decir, el conjunto de soluciones de la versión matricial del problema de momento de Hausdorff dado en la Definición 1.12, teniendo como parámetro un par columna no negativo y además en términos de los bloques de la matriz resolvente $\widehat{V}_n$ definida en (2.3.2).

Para que esto tenga sentido, debemos restringir la matriz resolvente y sus bloques ya que por la Definición 1.12, los elementos de $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ son funciones matriciales que están definidas en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Usamos la misma notación $\widehat{V}_n$ para denotar la restricción de esta matriz resolvente en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$, es decir,

$$\widehat{V}_n := \widehat{V}_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}, \tag{3.1.1}$$

y consecuentemente definimos,

$$\widehat{\alpha}_n := \widehat{\alpha}_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}, \quad \widehat{\beta}_n := \widehat{\beta}_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}, \quad \widehat{\gamma}_n := \widehat{\gamma}_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}, \quad \widehat{\delta}_n := \widehat{\delta}_n\,|_{\mathbb{C}\setminus[a,b]}. \tag{3.1.2}$$

Lema 3.1. *Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ una secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q\times q$ tales que las matrices de bloques de Hankel $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ son hermitianas positivas. Sea*

$\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} \in \mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$, *definimos* $P_1 := \widehat{\alpha}_n\mathbf{p} + \widehat{\beta}_{\mathbf{n}}\mathbf{q}$ *y* $Q_1 := \widehat{\gamma}_n\mathbf{p} + \widehat{\delta}_{\mathbf{n}}\mathbf{q}$. *Entonces* $\det P_1$ *y* $\det Q_1$ *son funciones complejas las cuales son meromorfas en* $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ *y no se hacen idénticamente cero. Además, el par columna* $\begin{pmatrix}P_1\\ Q_1\end{pmatrix}$ *pertenece a* $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$.

Demostración. De acuerdo a las Definiciones 2.3 y 2.4, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son funciones matriciales complejas de $q\times q$ para las cuales existe un subconjunto discreto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ tal que las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) en la Definición 2.3 se satisfacen. En principio, vamos a mostrar que $\begin{pmatrix}P_1\\ Q_1\end{pmatrix}$ también pertenece a $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$. En vista del Teorema 2.1 y la condición (i) de la Definición 2.3, P_1 y Q_1 son meromorfas en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ y holomorfas en $\mathbb{C}\setminus([a,b]\cup\mathcal{D})$. Del Teorema 2.1 parte (c), tenemos que la matriz resolvente $\widehat{V}_n$ es invertible. De acuerdo a la Proposición A.2 del Apéndice A y por la condición (ii) de la Definición 2.3, tenemos

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}P_1(z)\\ Q_1(z)\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left[\widehat{V}_n(z)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix}\right] = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix} = q \tag{3.1.3}$$

para cada $z\in\mathbb{C}\setminus[a,b]\cup\mathcal{D}$. En virtud al Lema 2.6, para cada $r\in\{3,4\}$, la función matricial $W_{r,n}$ dada por (2.2.14) es una función J_q-interna de la clase $\mathcal{B}_{J_q}(\Pi_+)$, donde $\mathcal{B}_{J_q}(\Pi_+)$ está definido como en la Definición 2.1. Por lo tanto del Lema 2.1 y (2.1.6) con $W = W_{r,n}$ y $J = J_q$ obtenemos

$$\frac{W_{r,n}^*(z)J_qW_{r,n}(z)}{i(z-\overline{z})} \geqslant \frac{J_q}{i(z-\overline{z})} \tag{3.1.4}$$

para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Usando el Teorema 2.1 podemos ver que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}(z-a)P_1(z)\\ Q_1(z)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}(z-a)I_q & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}\widehat{V}_n(z)\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix}\\ &= W_{4,n}(z)\begin{pmatrix}(z-a)I_q & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix} = W_{4,n}(z)\begin{pmatrix}(z-a)\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

y

$$\begin{pmatrix}(b-z)P_1(z)\\ Q_1(z)\end{pmatrix} = W_{3,n}(z)\begin{pmatrix}(b-z)\mathbf{p}(z)\\ \mathbf{q}(z)\end{pmatrix} \tag{3.1.6}$$

se satisfacen para todo $z\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$. De (3.1.4), (3.1.5) y la condición (iii) de la Definición 2.3 se sigue

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}(z-a)P_1(z)\\ Q_1(z)\end{pmatrix}^*(-J_q)\begin{pmatrix}(z-a)P_1(z)\\ Q_1(z)\end{pmatrix} \geqslant 0$$

para todo $z\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$. Similarmente, usando (3.1.4), (3.1.6) y la condición (iv) de la Definición 2.3 tenemos

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}(b-z)P_1(z)\\ Q_1(z)\end{pmatrix}^*(-J_q)\begin{pmatrix}(b-z)P_1(z)\\ Q_1(z)\end{pmatrix} \geqslant 0$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \mathcal{D})$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$. Ahora, sea $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \mathcal{D})$. De (2.2.16) sabemos que $\det W_{4,n}$ no es cero en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, en vista de (3.1.5) tenemos

$$\begin{pmatrix} (z-a)\mathbf{p}(z) \\ \mathbf{q}(z) \end{pmatrix} = [W_{4,n}(z)]^{-1} \begin{pmatrix} (z-a)P_1(z) \\ Q_1(z) \end{pmatrix}. \tag{3.1.7}$$

De la condición (iii) de la Definición 2.3 y (3.1.7) podemos concluir que

$$\frac{1}{i(z-\overline{z})} \begin{pmatrix} (z-a)P_1(z) \\ Q_1(z) \end{pmatrix}^* [W_{4,n}(z)]^{-*} J_q [W_{4,n}(z)]^{-1} \begin{pmatrix} (z-a)P_1(z) \\ Q_1(z) \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Para cada $g \in \mathcal{N}[P_1(z)] := \{h \in \mathbb{C}^q : P_1(z)h = 0\}$, esto implica que

$$\frac{1}{i(z-\overline{z})} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix}^* [W_{4,n}(z)]^{-*} J_q [W_{4,n}(z)]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Ya que

$$\frac{1}{i(z-\overline{z})} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix}^* J_q \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix} = 0,$$

se cumple para todo $g \in \mathbb{C}^q$, vemos entonces que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix}^* \frac{J_q - [W_{4,n}(z)]^{-*} J_q [W_{4,n}(z)]^{-1}}{i(z-\overline{z})} \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{3.1.8}$$

es verdadero para cada $g \in \mathcal{N}[P_1(z)]$. Por otro lado, usando el Lema 2.3 y el Lema 2.6 junto con las identidades (2.2.8) y (2.2.16), obtenemos

$$[W_{4,n}(z)]^{-*} J_q [W_{4,n}(z)]^{-1} = J_q + i(\overline{z}-z) J_q (u_{4,n}\, v_n)^* [R_n(z)]^* H_{4,n}^{-1} R_n(z) (u_{4,n}\, v_n) J_q. \tag{3.1.9}$$

Así, la igualdad (3.1.9) nos proporciona

$$\frac{J_q - [W_{4,n}(z)]^{-*} J_q [W_{4,n}(z)]^{-1}}{i(z-\overline{z})} = J_q (u_{4,n}\, v_n)^* [R_n(z)]^* H_{4,n}^{-1} R_n(z) (u_{4,n}\, v_n) J_q. \tag{3.1.10}$$

Ya que la matriz $H_{4,n}$ es hermitiana positiva, el lado derecho de (3.1.10) es Hermitiano no negativo. Así, en vista de (3.1.8), para cada $g \in \mathcal{N}[P_1(z)]$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix}^* J_q (u_{4,n}\, v_n)^* [R_n(z)]^* H_{4,n}^{-1} R_n(z) (u_{4,n}\, v_n) J_q \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix} = 0$$

y, en vista de $\det R_n(z) \neq 0$, entonces

$$0 = (u_{4,n}\, v_n) J_q \begin{pmatrix} 0 \\ Q_1(z)g \end{pmatrix} = -i u_{4,n} Q_1(z) g.$$

De acuerdo a (1.1.11), esto implica que $s_0Q_1(z)g = 0$ para todo $g \in \mathcal{N}[P_1(z)]$. Ya que $H_{4,n}$ es hermitiana positiva, la matriz s_0 es no singular. Entonces

$$\begin{pmatrix} P_1(z) \\ Q_1(z) \end{pmatrix} g = 0$$

para todo $g \in \mathcal{N}[P_1(z)]$. Así, (3.1.3) demuestra que $\mathcal{N}[P_1(z)] = \{0\}$. Por lo tanto, la matriz $P_1(z)$ es no singular. Análogamente, uno puede verificar que la matriz $Q_1(z)$ es no singular. ■

Ahora podemos demostrar el resultado principal de esta sección y de este capítulo.

Teorema 3.1. *Sea J_q definido en (2.1.7), $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$ dado como en la Definición (2.4) $\widehat{\alpha}_n$, $\widehat{\beta}_n$, $\widehat{\gamma}_n$ y $\widehat{\delta}_n$ dados por (2.3.3)-(2.3.6) y $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido en la Definición (1.12). Sea $(s_j)_{j=0}^{2n+1}$ un secuencia de matrices hermitianas de dimensión $q\times q$ tales que las matrices $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ dadas por (1.1.9) y (1.1.10), son hermitianas positivas. Entonces*

(a) Para cada $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$, la función matricial

$$S := \{\widehat{\alpha}_n(z)\mathbf{p}(z) + \widehat{\beta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}\{\widehat{\gamma}_n(z)\mathbf{p}(z) + \widehat{\delta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}^{-1} \tag{3.1.11}$$

pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.

(b) Para cada $S \in \mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$, existe un par columna $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$ de funciones matriciales $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ que son meromorfas en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ tal que S admite la representación

$$S = \{\widehat{\alpha}_n(z)\mathbf{p}(z) + \widehat{\beta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}\{\widehat{\gamma}_n(z)\mathbf{p}(z) + \widehat{\delta}_n(z)\mathbf{q}(z)\}^{-1}.$$

(c) Si $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$ pertenecen a $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$, entonces

$$\begin{aligned} &\{\widehat{\alpha}_n(z)\mathbf{p}_1(z) + \widehat{\beta}_n(z)\mathbf{q}_1(z)\}\{\widehat{\gamma}_n(z)\mathbf{p}_1(z) + \widehat{\delta}_n(z)\mathbf{q}_1(z)\}^{-1} \\ &= \{\widehat{\alpha}_n(z)\mathbf{p}_2(z) + \widehat{\beta}_n(z)\mathbf{q}_2(z)\}\{\widehat{\gamma}_n(z)\mathbf{p}_2(z) + \widehat{\delta}_n(z)\mathbf{q}_2(z)\}^{-1} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

si y solo si

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\sim\mathcal{P}} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\sim\mathcal{P}} \tag{3.1.13}$$

donde $\langle\rangle_{\sim\mathcal{P}}$ está definido mediante la Definición 2.6.

Demostración. (a) Sea $\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$. En virtud de Lema 3.1, tenemos entonces que $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix}$ definidos por $\mathbf{p}_1 = \widehat{\alpha}_n\mathbf{p} + \widehat{\beta}_n\mathbf{q}$ y $\mathbf{q}_1 := \widehat{\gamma}_n\mathbf{p} + \widehat{\delta}_n\mathbf{q}$, también pertenecen a

$\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$ y, además la función $\det \mathbf{q}_1$ no es idénticamente cero en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. De la Proposición 2.1 se sigue que $S := \mathbf{p}_1\mathbf{q}_1^{-1}$ pertenece a $\mathcal{R}_q[a,b]$ definido por la Definición 1.11. Se puede ver fácilmente que el par columna $\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{p}}\\ \widetilde{\mathbf{q}}\end{pmatrix}$ dado por $\widetilde{\mathbf{p}} := \mathbf{p}\mathbf{q}_1^{-1}$ y $\widetilde{\mathbf{q}} := \mathbf{q}\mathbf{q}_1^{-1}$, también pertenece a $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$. Obviamente, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{pmatrix}S\\ I_q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{p}_1\\ \mathbf{q}_1\end{pmatrix}\mathbf{q}_1^{-1} = \widehat{V}_n\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}\mathbf{q}_1^{-1} = \widehat{V}_n\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{p}}\\ \widetilde{\mathbf{q}}\end{pmatrix}.$$

Nuevamente, recordamos que del Teorema 2.1 parte (c), tenemos que la matriz resolvente $\widehat{V}_n$ es invertible. Se sigue que

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{p}}\\ \widetilde{\mathbf{q}}\end{pmatrix} = \widehat{V}_n^{-1}\begin{pmatrix}S\\ I_q\end{pmatrix}. \tag{3.1.14}$$

Del Teorema 2.1 obtenemos que $\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{p}}\\ \widetilde{\mathbf{q}}\end{pmatrix}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Ya que $\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{p}}\\ \widetilde{\mathbf{q}}\end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$, tenemos entonces

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}(z-a)\widetilde{\mathbf{p}}(z)\\ \widetilde{\mathbf{q}}(z)\end{pmatrix}^*(-J_q)\begin{pmatrix}(z-a)\widetilde{\mathbf{p}}(z)\\ \widetilde{\mathbf{q}}(z)\end{pmatrix} \geqslant 0 \tag{3.1.15}$$

y

$$\frac{1}{2\mathfrak{Im}\, z}\begin{pmatrix}(b-z)\widetilde{\mathbf{p}}(z)\\ \widetilde{\mathbf{q}}(z)\end{pmatrix}^*(-J_q)\begin{pmatrix}(b-z)\widetilde{\mathbf{p}}(z)\\ \widetilde{\mathbf{q}}(z)\end{pmatrix} \geqslant 0 \tag{3.1.16}$$

para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. De (3.1.14), (1.1.14), (1.1.15) y el Teorema 2.1 tenemos

$$\begin{pmatrix}(z-a)\widetilde{\mathbf{p}}(z)\\ \widetilde{\mathbf{q}}(z)\end{pmatrix} = [W_{4,n}(z)]^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{S}_4(z)\\ I_q\end{pmatrix} \tag{3.1.17}$$

y

$$\begin{pmatrix}(b-z)\widetilde{\mathbf{p}}(z)\\ \widetilde{\mathbf{q}}(z)\end{pmatrix} = [W_{3,n}(z)]^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{S}_3(z)\\ I_q\end{pmatrix} \tag{3.1.18}$$

para cada $z\in\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Así de (3.1.15), (3.1.16), (3.1.17), y (3.1.18) vemos que la desigualdad (2.2.17) se cumple para cada $r\in\{3,4\}$ y cada $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Aplicando la Proposición 2.3 se sigue que S pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$.

(*b*) Ahora consideramos una función matricial arbitraria S que pertenece a $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$. Sean

$$\widetilde{\mathbf{p}} := \begin{pmatrix}I_q, & 0\end{pmatrix}\widehat{V}_n^{-1}\begin{pmatrix}S\\ I_q\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{\mathbf{q}} := \begin{pmatrix}0, & I_q\end{pmatrix}\widehat{V}_n^{-1}\begin{pmatrix}S\\ I_q\end{pmatrix}. \tag{3.1.19}$$

Del Teorema 2.1 vemos que la función matricial $\widehat{V}_n^{-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Entonces $\widetilde{\mathbf{p}}$ y $\widetilde{\mathbf{q}}$ también son holomorfas en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ y obtenemos

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{p}}(z)\\ \widetilde{\mathbf{q}}(z)\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}S(z)\\ I_q\end{pmatrix} = q \tag{3.1.20}$$

para cada $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Usando el Teorema 2.1 es fácil comprobar que las identidades (3.1.17) y (3.1.18) se satisfacen para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Ya que de la Proposición 2.3 sabemos que la desigualdad (2.2.17) se cumple para cada $r \in \{3,4\}$ y cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se sigue entonces que las desigualdades (3.1.15) y (3.1.16) se satisfacen para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Así, en vista de (3.1.20), vemos que $\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{p}} \\ \widetilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ pertenece a $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$. De (3.1.19) obtenemos

$$\begin{pmatrix} S \\ I_q \end{pmatrix} = \widehat{V}_n \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{p}} \\ \widetilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_n \widetilde{\mathbf{p}} + \widehat{\beta}_n \widetilde{\mathbf{q}} \\ \widehat{\gamma}_n \widetilde{\mathbf{p}} + \widehat{\delta}_n \widetilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S = S \cdot I_q^{-1} &= (\widehat{\alpha}_n \widetilde{\mathbf{p}} + \widehat{\beta}_n \widetilde{\mathbf{q}})(\widehat{\gamma}_n \widetilde{\mathbf{p}} + \widehat{\delta}_n \widetilde{\mathbf{q}})^{-1} \\ &= ((\widehat{\alpha}_n \mathbf{p} + \widehat{\beta}_n \mathbf{q})\mathbf{q}_1^{-1})((\widehat{\gamma}_n \mathbf{p} + \widehat{\delta}_n \mathbf{q})\mathbf{q}_1^{-1})^{-1} \\ &= (\widehat{\alpha}_n \mathbf{p} + \widehat{\beta}_n \mathbf{q})(\widehat{\gamma}_n \mathbf{p} + \widehat{\delta}_n \mathbf{q})^{-1}. \end{aligned}$$

(c) Sean $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$ que pertenecen a $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$. Obviamente se satisface

$$\begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_n \mathbf{p}_k + \widehat{\beta}_n \mathbf{q}_k \\ \widehat{\gamma}_n \mathbf{p}_k + \widehat{\delta}_n \mathbf{q}_k \end{pmatrix} = \widehat{V}_n \begin{pmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{q}_k \end{pmatrix}$$

para cada $k \in \{1,2\}$. En vista del Teorema 2.1 parte (c) y el Lema 3.1 lo anterior implica que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{q}_k \end{pmatrix} &= \widehat{V}_n^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_n \mathbf{p}_k + \widehat{\beta}_n \mathbf{q}_k \\ \widehat{\gamma}_n \mathbf{p}_k + \widehat{\delta}_n \mathbf{q}_k \end{pmatrix} \\ &= \widehat{V}_n^{-1} \begin{pmatrix} (\widehat{\alpha}_n \mathbf{p}_k + \widehat{\beta}_n \mathbf{q}_k)(\widehat{\gamma}_n \mathbf{p}_k + \widehat{\delta}_n \mathbf{q}_k)^{-1} \\ I \end{pmatrix} (\widehat{\gamma}_n \mathbf{p}_k + \widehat{\delta}_n \mathbf{q}_k) \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

para cada $k \in \{1,2\}$. Ahora suponemos que (3.1.12) se cumple. Entonces de (3.1.21) tenemos,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} &= \widehat{V}_n^{-1} \begin{pmatrix} (\widehat{\alpha}_n \mathbf{p}_1 + \widehat{\beta}_n \mathbf{q}_1)(\widehat{\gamma}_n \mathbf{p}_1 + \widehat{\delta}_n \mathbf{q}_1)^{-1} \\ I \end{pmatrix} (\widehat{\alpha}_n \mathbf{p}_2 + \widehat{\beta}_n \mathbf{q}_2) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} (\widehat{\gamma}_n \mathbf{p}_1 + \widehat{\delta}_n \mathbf{q}_1)^{-1} (\widehat{\alpha}_n \mathbf{p}_2 + \widehat{\beta}_n \mathbf{q}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 F \\ \mathbf{q}_1 F \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $F := (\widehat{\gamma}_n \mathbf{p}_1 + \widehat{\delta}_n \mathbf{q}_1)^{-1} (\widehat{\alpha}_n \mathbf{p}_2 + \widehat{\beta}_n \mathbf{q}_2)$ es una función matricial que es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$. Además, del Lema 3.1 sabemos que $\det F$ no es idénticamente cero. Por lo tanto, (3.1.13) se cumple. En cambio, ahora suponemos que (3.1.13) se satisface. Entonces existe una función matricial F que es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ tal que $\det F$ no es idénticamente cero y que $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 F$ y $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 F$ se cumplen. Entonces se sigue inmediatamente (3.1.12). ■

Definición 3.1. *La función S descrita en (3.1.11) es la solución asociada a la versión matricial del problema de momentos de Hausdorff para el caso par de momentos dados.*

El Teorema 3.1 da una clara descripción de los elementos del conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ dado en la Definición 1.12. De esta manera, para resolver el Problema 2 (ver pág. 5) utilizamos el Teorema 3.1. Consecuentemente, el Problema 1 (ver pág. 3) queda solucionado.

3.2 Ejemplos

Ejemplo 3.1. *Dada la secuencia de matrices:*

$$s_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad s_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} \end{pmatrix},$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad s_4 = \begin{pmatrix} \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \end{pmatrix}, \qquad s_5 = \begin{pmatrix} \frac{13}{42} & \frac{5}{21} \\ \frac{5}{21} & \frac{37}{168} \end{pmatrix}.$$

Hallar al menos una función σ tal que $\sigma \in \mathcal{M}^2_{\geqslant}[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$.

Solución. Para un mejor entendimiento del lector, el procedimiento de la solución lo escribimos en pasos:

Paso 1. Claramente la secuencia $(s_j)_{j=0}^5$ es una secuencia de matrices hermitianas de 2×2. Verificamos que la secuencia dada satisface las condiciones necesarias y suficientes de existencia de solución.

De acuerdo a (1.1.7) y (1.1.8) construimos las matrices de bloque de Hankel asociadas a la secuencia $(s_j)_{j=0}^5$

$$H_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{H}_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} & \frac{13}{42} & \frac{5}{21} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} & \frac{5}{21} & \frac{37}{168} \end{pmatrix}$$

y también, de acuerdo a (1.1.9) y (1.1.10), construimos las matrices de bloque de Hankel asociadas a la secuencia $(s_j)_{j=0}^5$ y al intervalo acotado $[0,1]$

$$H_{4,2} = -0H_{1,2} + \widetilde{H}_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} & \frac{13}{42} & \frac{5}{21} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} & \frac{5}{21} & \frac{37}{168} \end{pmatrix},$$

$$H_{3,2} = 1H_{1,2} - \widetilde{H}_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{21} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{2}{35} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{21} & \frac{1}{35} & \frac{9}{280} \end{pmatrix}.$$

Verificamos que sean positivas definidas. Para $H_{4,2}$ se tiene

$$\det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{3}{8} > 0, \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} \end{pmatrix} = \frac{7}{960} > 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{6400} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} & \frac{13}{42} \end{pmatrix} = \frac{3}{22400000} > 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{23}{60} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{10} & \frac{11}{30} & \frac{4}{15} & \frac{13}{42} & \frac{5}{21} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{15} & \frac{53}{210} & \frac{5}{21} & \frac{37}{168} \end{pmatrix} = \frac{1}{6272000000} > 0.$$

Para $H_{3,2}$ tenemos

$$\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} > 0, \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} \end{pmatrix} = \frac{3}{320} > 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \frac{9}{32000} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{2}{35} \end{pmatrix} = \frac{1}{4200000} > 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{12} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{21} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{2}{35} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{21} & \frac{1}{35} & \frac{9}{280} \end{pmatrix} = \frac{1}{2744000000} > 0.$$

Usando el criterio de Sylvester, Teorema A.8 del Apéndice A, tenemos que $H_{4,n}$ y $H_{3,n}$ son positivas definidas. Por lo que, tenemos una secuencia $(s_j)_{j=0}^{5}$ de matrices hermitianas de 2×2 tales que $H_{4,2}$ y $H_{3,2}$ son hermitianas positivas. Si revisamos el Teorema 1.4, entonces aseguramos que el conjunto $\mathcal{M}^2_{\geqslant}[[0,1];(s_j)_{j=0}^{5}]$ definido mediante la Definición 1.10 es no vacío.

Paso 2. Construimos la matriz resolvente $\widehat{V}_2$ dada en (3.1.1). Para eso, primero construimos los elementos $R_2^*(\overline{z})$, $R_2(1)$, v_2, $u_{4,2}$ y $u_{3,2}$ de acuerdo a (1.1.5), (1.1.6), (1.1.12) y (1.1.13), respectivamente,

$$R_2^*(\overline{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & z^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_{4,2} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{7}{12} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{23}{60} \end{pmatrix},$$

$$u_{3,2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{11}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad R_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, los bloques de $\widehat{V}_2$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_2(z) &= I_2 + (1-z)u_{4,2}^* R_2^*(\overline{z}) H_{4,2}^{-1} R_2(1) v_2, \\ &= \begin{pmatrix} 490z^3 - 720z^2 + 235z - 4 & -\frac{10}{7}(z-1)\left(322z^2 - 152z + 3\right) \\ -2(z-1)\left(140z^2 - 70z + 3\right) & 340z^3 - 510z^2 + 178z - 7 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_2(z) &= (1-z)(z-0)v_2^* R_2^*(\overline{z}) H_{4,2}^{-1} R_2(1) v_2, \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{20}{3}(z-1)z\left(49z^2 - 44z + 9\right) & \frac{40}{21}(z-1)z\left(161z^2 - 139z + 27\right) \\ \frac{280}{3}(z-1)z^2(2z-1) & -\frac{20}{21}(z-1)z\left(238z^2 - 140z + 9\right) \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_2(z) &= -u_{3,2}^* R_2^*(\overline{z}) H_{3,2}^{-1} R_2(1) u_{3,2} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{192}\left(1386z^2 - 1400z + 283\right) & \frac{1}{96}\left(-2394z^2 + 2552z - 547\right) \\ \frac{1}{96}\left(-2520z^2 + 2660z - 529\right) & -\frac{7}{240}\left(1080z^2 - 1100z + 211\right) \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}_2(z) &= I_2 - (1-z)v_2^* R_2^*(\overline{z}) H_{3,2}^{-1} R_2(1) u_{3,2} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{16}\left(385z^3 - 665z^2 + 345z - 49\right) & \frac{1}{8}(z-1)\left(133z^2 - 120z + 21\right) \\ \frac{5}{8}(z-1)\left(28z^2 - 21z + 3\right) & \frac{1}{4}\left(84z^3 - 133z^2 + 60z - 7\right) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Paso 3. Escribimos la fórmula general de los elementos que pertenecen a el conjunto $\mathcal{R}_q[[a,b];(s_j)_{j=0}^{2n+1}]$ definido como en la Definición 1.12,

$$S(z) = \left(\widehat{\alpha}_n(z)\mathbf{p}(z) + \widehat{\beta}_n(z)\mathbf{q}(z)\right)\left(\widehat{\gamma}_n(z)\mathbf{p}(z) + \widehat{\delta}_n(z)\mathbf{q}(z)\right)^{-1} \tag{3.2.5}$$

donde $\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}$ pertenece al conjunto $\mathcal{P}[-J_q,[a,b]]$, definido como en la Definición 2.4 y J_q definido como en (2.1.7).

Paso 4. Ahora, consideramos dos casos:

(a) Sean $\mathbf{p} = I_2$ y $\mathbf{q} = 0_{2\times 2}$. Se verifica fácilmente que el par $\begin{pmatrix}I_2\\ 0_{2\times 2}\end{pmatrix}$ pertenece al conjunto $\mathcal{P}[-J_2,[0,1]]$. Si aplicamos la fórmula (3.2.5) para $n = 2$ y con el par $\begin{pmatrix}I_2\\ 0_{2\times 2}\end{pmatrix}$ obtenemos,

$$S(z) = \widehat{\alpha}_2(z)\{\widehat{\gamma}_2(z)\}^{-1}. \tag{3.2.6}$$

Por otro lado, tenemos que

$$S(z) = \int_0^1 \frac{1}{t-z}d\mu(t)$$

donde $\mu \in \mathcal{M}_{\geqslant}^2[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$. Ahora, estamos interesados en describir la función $\mu(t)$. De (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.6) tenemos que

$$S(z) = \begin{pmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.2.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_{11}(z) &= \frac{-26460z^5 + 62160z^4 - 51380z^3 + 17792z^2 - 2255z + 36}{60(z-1)z\left(294z^4 - 560z^3 + 371z^2 - 100z + 9\right)},\\
S_{12}(z) &= \frac{-2940z^4 + 5600z^3 - 3416z^2 + 734z - 27}{30(z-1)z\left(294z^4 - 560z^3 + 371z^2 - 100z + 9\right)},\\
S_{12}(z) &= \frac{-2940z^4 + 5600z^3 - 3416z^2 + 734z - 27}{30(z-1)z\left(294z^4 - 560z^3 + 371z^2 - 100z + 9\right)},\\
S_{22}(z) &= \frac{-26460z^5 + 66570z^4 - 60662z^3 + 24155z^2 - 3818z + 117}{60(z-1)z\left(294z^4 - 560z^3 + 371z^2 - 100z + 9\right)}.
\end{aligned}$$

Notemos que $S_{12} = S_{21}$. Sea $P(z)$ el polinomio que se repite en el denominador de las igualdades anteriores

$$P(z) := (z-1)z\left(294z^4 - 560z^3 + 371z^2 - 100z + 9\right).$$

El polinomio $P(z)$ tiene las siguientes raíces:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0.1846, \quad z_3 = 0.3867, \quad z_4 = 0.5406, \quad z_5 = 0.7926, \quad z_6 = 1$$

donde hemos utilizado 4 dígitos después del punto decimal. Utilizando fracciones parciales tenemos que

$$
\begin{aligned}
S_{11}(z) &= \frac{0.0667}{z_1 - z} + \frac{0.2637}{z_2 - z} + \frac{0.2769}{z_3 - z} + \frac{0.2242}{z_4 - z} + \frac{0.5412}{z_5 - z} + \frac{0.1274}{z_6 - z}, \\
S_{12}(z) &= -\frac{0.1000}{z_1 - z} - \frac{0.4116}{z_2 - z} + \frac{0.1553}{z_3 - z} - \frac{0.1695}{z_4 - z} + \frac{0.4091}{z_5 - z} + \frac{0.1167}{z_6 - z}, \\
S_{12}(z) &= -\frac{0.1000}{z_1 - z} - \frac{0.4116}{z_2 - z} + \frac{0.1553}{z_3 - z} - \frac{0.1695}{z_4 - z} + \frac{0.4091}{z_5 - z} + \frac{0.1167}{z_6 - z}, \\
S_{22}(z) &= \frac{0.2167}{z_1 - z} + \frac{0.6423}{z_2 - z} + \frac{0.0871}{z_3 - z} + \frac{0.1281}{z_4 - z} + \frac{0.3092}{z_5 - z} + \frac{0.1167}{z_6 - z}.
\end{aligned}
$$

Reescribiendo (3.2.7), tenemos que

$$
S(z) = \frac{A_1}{z_1 - z} + \frac{A_2}{z_2 - z} + \frac{A_3}{z_3 - z} + \frac{A_4}{z_4 - z} + \frac{A_5}{z_5 - z} + \frac{A_6}{z_6 - z},
$$

donde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} 0.0667 & -0.1000 \\ -0.1000 & 0.2167 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 0.2637 & -0.4116 \\ -0.4116 & 0.6423 \end{pmatrix}, \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 0.2769 & 0.1553 \\ 0.1553 & 0.0871 \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} 0.2242 & -0.1695 \\ -0.1695 & 0.1281 \end{pmatrix}, \\
A_5 &= \begin{pmatrix} 0.5412 & 0.4091 \\ 0.4091 & 0.3092 \end{pmatrix}, & A_6 &= \begin{pmatrix} 0.1274 & 0.1167 \\ 0.1167 & 0.1167 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

En vista de la Definición A.5 del Apéndice A, podemos concluir que

$$
S(z) = \frac{A_1}{z_1 - z} + \frac{A_2}{z_2 - z} + \frac{A_3}{z_3 - z} + \frac{A_4}{z_4 - z} + \frac{A_5}{z_5 - z} + \frac{A_6}{z_6 - z} = \int_0^1 \frac{1}{t - z} d\mu(t),
$$

donde

$$
\mu(t) = \begin{cases} 0_{2\times 2} & t = 0, \\ A_1 & 0 < t < 0.1846, \\ A_1 + A_2 & 0.1846 \leqslant t < 0.3867, \\ A_1 + A_2 + A_3 & 0.3867 \leqslant t < 0.5406, \\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 & 0.5406 \leqslant t < 0.7926, \\ \sum_{j=0}^{5} A_j & 0.7926 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.2.8}
$$

(b) Sean $\mathbf{p} = 0_{2\times 2}$ y $\mathbf{q} = I_2$. Similarmente como en el caso anterior (a). Se verifica fácilmente que el par $\begin{pmatrix} 0_{2\times 2} \\ I_2 \end{pmatrix}$ pertenece al conjunto $\mathcal{P}[-J_2, [0,1]]$. Si aplicamos la fórmula (3.2.5) con $n = 2$ y el par $\begin{pmatrix} 0_{2\times 2} \\ I_2 \end{pmatrix}$, obtenemos

$$
S(z) = \widehat{\beta}_2(z)\{\widehat{\delta}_2(z)\}^{-1}. \tag{3.2.9}
$$

Por otro lado,

$$S(z) = \int_0^1 \frac{1}{t-z} d\nu(t)$$

donde $\nu \in \mathcal{M}^2_{\geqslant}[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$. Estamos interesados en describir la función $\nu(t)$. De (3.2.3), (3.2.4) y (3.2.9) tenemos que

$$S(z) = \begin{pmatrix} S_{11}(z) & S_{12}(z) \\ S_{21}(z) & S_{22}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.2.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_{11}(z) &= -\frac{5\,(12348z^5 - 28294z^4 + 23828z^3 - 9027z^2 + 1499z - 85)}{12\,(3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7)}, \\
S_{12}(z) &= \frac{-6860z^4 + 12670z^3 - 8064z^2 + 2047z - 182}{6\,(3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7)}, \\
S_{12}(z) &= \frac{-6860z^4 + 12670z^3 - 8064z^2 + 2047z - 182}{6\,(3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7)}, \\
S_{22}(z) &= \frac{-308700z^5 + 758800z^4 - 701015z^3 + 300015z^2 - 58655z + 4207}{60\,(3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7)}.
\end{aligned}$$

Notemos que $S_{12} = S_{21}$. Sea $Q(z)$ el polinomio que aparece en el denominador de las igualdades anteriores

$$Q(z) := 3430z^6 - 9765z^5 + 10710z^4 - 5689z^3 + 1503z^2 - 180z + 7.$$

El polinomio $Q(z)$ tiene las siguientes raíces:

$z_1 = 0.0714, \quad z_2 = 0.2182, \quad z_3 = 0.3398, \quad z_4 = 0.6045, \quad z_5 = 0.6931, \quad z_6 = 0.9197$

donde hemos utilizado 4 dígitos después del punto decimal. Utilizando fracciones parciales tenemos que

$$\begin{aligned}
S_{11}(z) &= \frac{0.1756}{z_1 - z} + \frac{0.0955}{z_2 - z} + \frac{0.2966}{z_3 - z} + \frac{0.3664}{z_4 - z} + \frac{0.1882}{z_5 - z} + \frac{0.3773}{z_6 - z}, \\
S_{12}(z) &= -\frac{0.3179}{z_1 - z} + \frac{0.0677}{z_2 - z} - \frac{0.3261}{z_3 - z} + \frac{0.2743}{z_4 - z} - \frac{0.0372}{z_5 - z} + \frac{0.3392}{z_6 - z}, \\
S_{12}(z) &= -\frac{0.3179}{z_1 - z} + \frac{0.0677}{z_2 - z} - \frac{0.3261}{z_3 - z} + \frac{0.2743}{z_4 - z} - \frac{0.0372}{z_5 - z} + \frac{0.3392}{z_6 - z}, \\
S_{22}(z) &= \frac{0.5754}{z_1 - z} + \frac{0.0480}{z_2 - z} + \frac{0.3586}{z_3 - z} + \frac{0.2054}{z_4 - z} + \frac{0.0073}{z_5 - z} + \frac{0.3050}{z_6 - z}.
\end{aligned}$$

Reescribiendo (3.2.10), tenemos que

$$S(z) = \frac{B_1}{z_1 - z} + \frac{B_2}{z_2 - z} + \frac{B_3}{z_3 - z} + \frac{B_4}{z_4 - z} + \frac{B_5}{z_5 - z} + \frac{B_6}{z_6 - z},$$

donde

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.1756 & -0.3179 \\ -0.3179 & 0.5754 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0.0955 & 0.0677 \\ 0.0677 & 0.0480 \end{pmatrix},$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} 0.2966 & -0.3261 \\ -0.3261 & 0.3586 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0.3664 & 0.2743 \\ 0.2743 & 0.2054 \end{pmatrix},$$
$$B_5 = \begin{pmatrix} 0.1882 & -0.0372 \\ -0.0372 & 0.0073 \end{pmatrix}, \qquad B_6 = \begin{pmatrix} 0.3773 & 0.3392 \\ 0.3392 & 0.3050 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la Definición A.5 del Apéndice A, tenemos que

$$S(z) = \frac{B_1}{z_1 - z} + \frac{B_2}{z_2 - z} + \frac{B_3}{z_3 - z} + \frac{B_4}{z_4 - z} + \frac{B_5}{z_5 - z} + \frac{B_6}{z_6 - z} = \int_0^1 \frac{1}{t - z} d\nu(t),$$

donde

$$\nu(t) = \begin{cases} 0_{2\times 2} & 0 \leqslant t < 0.0714, \\ B_1 & 0.0714 \leqslant t < 0.2182, \\ B_1 + B_2 & 0.2182 \leqslant t < 0.3398, \\ B_1 + B_2 + B_3 & 0.3398 \leqslant t < 0.6045, \\ B_1 + B_2 + B_3 + B_4 & 0.6045 \leqslant t < 0.6931, \\ \sum_{j=0}^{5} B_j & 0.6931 \leqslant t < 0.9197, \\ \sum_{j=0}^{6} B_j & 0.9197 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Respuesta al ejemplo: las funciones en (3.2.8) y (3.2.11) pertenecen a $\mathcal{M}^2_{\geqslant}[[0,1];(s_j)_{j=0}^5]$.

Observación 3.1. [9, pág. 21] *Las soluciones asociadas dadas en (3.2.6) y (3.2.9) se llaman soluciones extremales.*

Observación 3.2. *También se puede verificar que la función σ dada por (1.4.1), es solución para este problema.*

Apéndice A

Definición A.2. [21, pág. 12] *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función no decreciente, entonces* f *tiene límites por la derecha y por la izquierda en cada punto:*

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x > a} f(x), \quad f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \sup_{x < a} f(x).$$

Además, los valores de los límites $f(\infty) = \sup_{a \in \mathbb{R}} f(x)$ *y* $f(-\infty) = \inf_{a \in \mathbb{R}} f(x)$ *existen (posiblemente igual a* $\pm\infty$*).* f *se llama continua por la derecha si* $f(a) = f(a^+)$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$ *y continua por la izquierda si* $f(a) = f(a^-)$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*. Otra notación usual para* $f(a^+)$ *y* $f(a^-)$ *es* $f(a+0)$ *y* $f(a-0)$*, respectivamente.*

Definición A.3. [31, pág. 73] *Sea* $f : A \to \mathbb{C}$ *donde* $A \subseteq \mathbb{C}$ *es un conjunto abierto. La función* f *se dice que es diferenciable (en el sentido complejo) en* $z_0 \in A$ *si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Este límite es denotado por $f'(z_0)$*, o a veces por* $(df/dz)(z_0)$*. Así,* $f'(z_0)$ *es un número complejo. La función* f *se dice que es holomorfa en* A *si* f *es complejo diferenciable para cada* $z_0 \in A$*. La frase "holomorfa en* z_0*" significa que* f *es holomorfa en una vecindad de* z_0*.*

Definición A.4. [32, pág. 25] *Decimos que una función* f *escalar, es meromorfa en un dominio* Ω *si es holomorfa en* Ω *excepto para posibles polos.*

Lema A.2. [19, pág. 790] *Sean* $q \in \mathbb{N}$ *y* Π_+ *denotado como en la Notación 7. Sea* S *una función matricial de* $q \times q$ *meromorfa en* Π_+ *tal que*

$$\frac{S(z) - S^*(z)}{2i} \geqslant 0$$

para todo $z \in \mathbb{H}_S$*, donde* $\mathbb{H}_S$ *está definido como en la Definición 2.7. Entonces* S *es holomorfa en todo* Π_+*.*

Proposición A.1. [25]. *Si* f *es una función holomorfa en una región* U *entonces*

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

es holomorfa en U^**.*

Teorema A.2. (Principio de simetría)[25]. *Sea U una región simétrica sobre el eje real y sea*

$$U^+ = \{z \in U | \mathfrak{Im}\, z > 0\}$$

la parte media de U sobre el plano superior $\mathbb{C}$. Si $f(z)$ es una función holomorfa en U^+ tal que

$$\lim_{\mathfrak{Im}\,(z)\to 0^+} \mathfrak{Im}\, f(z) = 0$$

como z se aproxima al eje real por arriba entonces $f(z)$ se extiende a una función holomorfa f^e tal que $f = f^e$ en U que satisface

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \text{ para todo } z \in U.$$

Definición A.5. *Sea $f(t)$ una función continua en $[a,b]$ y sean t_1, t_2, $\ldots$ t_n números tales que*

$$a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b.$$

Asumimos que $\sigma(t)$ es una función no decreciente constante a trozos con puntos de discontinuidad en t_k, $k = 1, \ldots, n$. Entonces la integral de Stieltjes de f respecto de σ tiene la forma:

$$\int_a^b f(t)d\sigma(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(\sigma(t_k+0) - \sigma(t_k-0)).$$

Generalmente, se entiende que σ es una función continua por la derecha.

Teorema A.3. [34, pág. 137-139] *Sean f_1, f_2 funciones que son integrables con respecto a σ, en el sentido de Riemann-Stieltjes en $[a,b]$, entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

(i) *Para toda constante c, cf_1+f_2 también es integrable en $[a,b]$ y, además, se cumple la siguiente igualdad:*

$$\int_a^b (cf_1+f_2)d\sigma = c\int_a^b f_1 d\sigma + \int_a^b f_2 d\sigma.$$

(ii) *Si $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ en $[a,b]$,*

$$\int_a^b f_1 d\sigma \leqslant \int_a^b f_2 d\sigma.$$

(iii) *Si f es una función integrable en $[a,b]$ y $a < c < b$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y*

$$\int_a^b f d\sigma = \int_a^c f d\sigma + \int_c^b f d\sigma.$$

.

(iv) *Sea c una constante. Si f es una función integrable con respecto de $c\sigma_1$ e integrable con respecto de σ_2, entonces f es integrable con respecto de $c\sigma_1 + \sigma_2$ y*

$$\int_a^b fd(c\sigma_1+\sigma_2) = \int_a^b cfd\sigma_1 + \int_a^b fd\sigma_2.$$

Observación A.3. [29, pág. 51,54]. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, X no vacío. Sea $G : X \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial de $q \times q$. La derivada de la función matricial $G(t)$ es la matriz de las derivadas en cada entrada*

$$\frac{dG(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dG_{11}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dG_{1q}(t)}{dt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dG_{q1}(t)}{dt} & \cdots & \frac{dG_{qq}(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Observación A.4. [29, pág. 51,54]. *Sea G una función matricial definida como en la Observación A.1. La integral de la función matricial $G(t)$ es la matriz de las integrales en cada entrada*

$$\int_a^b G(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b G_{11}(z)dt & \cdots & \int_a^b G_{1q}(z)dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b G_{q1}(z)dt & \cdots & \int_a^b G_{qq}(z)dt \end{pmatrix}.$$

Observación A.5. *Sean $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ y $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$ definido como en la Definición 1.8. En el caso cuando existe la derivada $\sigma'(t)$ en $[a, b]$ entonces la igualdad (1.0.2) se escribe como*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z,t)d\sigma(t) &= \int_a^b f(z,t)\sigma'(t)dt \\ &= \begin{pmatrix} \int_a^b f(z,t)\sigma'_{11}(t)dt & \cdots & \int_a^b f(z,t)\sigma'_{1q}(t)dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f(z,t)\sigma'_{q1}(t)dt & \cdots & \int_a^b f(z,t)\sigma'_{qq}(t)dt \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observación A.6. [26, pág. 58]. *Sea $P(t)$ una función escalar tal que $P(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [a, b]$ y sea $\sigma \in \mathcal{M}^1_{\geqslant}[a, b]$. Entonces*

$$\int_a^b P(t)d\sigma(t) \geqslant 0.$$

En vista de la Observación A.6, de forma similar para $\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$ tenemos la siguiente observación.

Observación A.7. *Sea $P(t)$ una función escalar tal que $P(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [a, b]$ y sea*
$\sigma \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$ donde $\mathcal{M}^q_{\geqslant}[a, b]$ está definido como en la Definición 1.8. Entonces

$$\int_a^b P(t)d\sigma(t) \geqslant 0.$$

Teorema A.4. (Criterio de Weierstrass) [34, pág. 158-159]. *Supongamos que* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones definidas en* E*, y supongamos*

$$|f_n(x)| \leqslant M_n \quad (x \in E, \quad n = 1, 2, 3, \dots).$$

En estas condiciones, Σf_n *converge uniformemente en* E *si* ΣM_n *converge.*

Teorema A.5. *Supongamos*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in E).$$

Hagamos

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Entonces, $f_n \to f$ *uniformemente en* E *si y solo si* $M_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*.*

Teorema A.6. (Teorema de Identidad) [31, pág. 365-366]. *Sean* f *y* g *funciones holomorfas en una región* A*. Supongamos que existe una secuencia* $z_1, z_2, z_3, \dots$ *de puntos distintos en* A *que converge a* $z_0 \in A$ *tal que* $f(z_n) = g(z_n)$ *para todo* $n = 1, 2, 3, \dots$*. Entonces* $f(z) = g(z)$ *para todo* $z \in A$*. La conclusión es válida en particular si* $f = g$ *en alguna vecindad de algún punto de* A*.*

Observación A.8. [21, pág. 33,39] *Supongamos que* μ *es una medida de Borel finita en* $\mathbb{R}$*, y sea* $F(x) = \mu((-\infty, x])$*.* F *es llamada la función distribución de* μ*.* F *es creciente y continua por la derecha. Y se cumplen las igualdades*

$$\begin{aligned} \mu((a,b]) &= F(b) - F(a), \\ \mu(\{x\}) &= F(x) - F(x^-) = F(x) - \lim_{x\to x_0^-} F(x). \end{aligned}$$

Teorema A.7. [21, pág 101] *Sea* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función distribución no decreciente. Entonces el conjunto de puntos en los cuales* F *es discontinua es contable.*

Si consideramos los puntos de continuidad de dos distribuciones como sucesiones, el Teorema A.7 nos permite hacer la siguiente observación.

Observación A.9. *De acuerdo al Teorema A.7 existen sucesiones* $\{A_1^{(m)}\}_m^\infty$ *y* $\{A_2^{(m)}\}_m^\infty$ *tales que*

1. $A_1^{(m+1)} < A_1^{(m)} < 0 < A_2^{(m)} < A_2^{(m+1)}$.
2. $\lim_{m\to\infty} A_1^m = -\infty, \quad \lim_{m\to\infty} A_2^m = +\infty.$
3. *Para cada* $m \in \mathbb{N}, \quad \tilde{\Sigma}_r(\{A_1^m\}) = \tilde{\Sigma}_r(\{A_2^m\}) = 0_{(n+1)q\times(n+1)q}$.
4. *Para cada* $m \in \mathbb{N}, \quad \sigma_r(\{A_1^m\}) = \sigma_r(\{A_2^m\}) = 0_{q\times q}$

donde $\tilde{\Sigma}_r$ *y* σ_r *son funciones no decrecientes.*

Proposición A.2. [30] *Sean $p, q \in \mathbb{N}$, A una matriz de $q \times p$ y B una matriz cuadrada de $q \times q$. Si B es de rango máximo, entonces*

$$rank\,(BA) = rank\,(A).$$

Proposición A.3. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y A una matriz de $q \times q$ con entradas en $\mathbb{C}$. Sea*

$$\mathcal{N}[A] = \{x \in \mathbb{C}^q : Ax = 0\}$$

el núcleo de A. Entonces $\mathcal{N}[A] = \{0\}$ si y solo si $\det A \neq 0$.

Para toda $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$, usaremos A^+ para denotar la pseudoinversa de Moore-Penrose de A.

Observación A.10. *Sean $p, q \in \mathbb{N}$, A una matriz con entradas en $\mathbb{C}$ de $p \times p$, B una matriz con entradas en $\mathbb{C}$ de $p \times q$, D una matriz con entradas en $\mathbb{C}$ de $q \times q$ y*

$$E := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Albert [3] demostró que la matriz de bloques E es hermitiana no negativa si y solo si las siguientes cuatro condiciones se satisfacen:

1. *$A \geqslant 0$.*

2. *$AA^+B = B$.*

3. *$C = B^*$.*

4. *$D - CA^+B \geqslant 0$.*

(Para una versión ligeramente diferente pero relacionada de una caracterización de matrices de bloques hermitianas no negativas, nos referimos a un artículo de Efimov y Potapov [20]). Es más, se comprueba fácilmente que si E es hermitiana no negativa, entonces la desigualdad $||B||^2 \leqslant ||A|| \cdot ||D||$ se cumple.

Recordemos que el i, j *menor* del elemento a_{ij} de la matriz A de $q \times q$ es denotado como $M^{i,j}$, es el determinante de la matriz de $(q-1) \times (q-1)$ obtenida de quitar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El i, j *cofactor* del elemento a_{ij} de A, es denotado por $C^{i,j}$, está definido mediante $(-1)^{i+j}M^{i,j}$. Denotamos por $A_{(k)}$ la k-ésima *submatriz principal* de $k \times k$, es decir, la submatriz cuadrada de $k \times k$ que se obtiene de las primeras k filas y de las primeras k columnas de A, $k = 1, \dots, q$. El *menor principal* de orden k de A está definido como $\det(A_{(k)})$, y es denotado como Δ_k, $k = 1, \dots, q$.

Teorema A.8. (Criterio de Sylvester) [23, pág. 55]. *Sean $q \in \mathbb{N}$ y A una matriz con entradas en $\mathbb{R}$ simétrica de $q \times q$. Entonces*

(a) A es positiva definda si y solo si

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_k > 0, \quad \dots, \quad \Delta_q > 0.$$

(b) A es negativa definida si y solo si

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \ldots, \quad (-1)^q \Delta_q > 0.$$

Definición A.6. *Sea $q \in \mathbb{N}$. El producto interno (o producto interior) sobre $\mathbb{C}^q$ es una función $(\cdot,\cdot) : \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q :\to \mathbb{C}$ tal que para cualesquiera v, u, w en $\mathbb{C}^q$ y cualquier escalar c en $\mathbb{C}$ se tiene:*

1. $(v+u, w) = (v, w) + (u, w)$.
2. $(cv, u) = c(v, u)$.
3. $(u, v) = \overline{(v, u)}$.
4. $(v, v) > 0$ *si v es no nulo.*

Observación A.11. *Sea A una matriz. Si $(\cdot,\cdot)$ es un producto interno en $\mathbb{C}^q$ entonces para $x, y \in \mathbb{C}^q$ definimos $(x, y) = x^* A y$. Además, si A es hermitiana entonces $x^* A y$ es un producto interno.*

Proposición A.4. [5, pág. 192] *Si en un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ se satisface la ley del paralelogramo, entonces existe un producto interno en V tal que $||x||^2 = (x, x)$ para todo $x \in V$. Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces el producto interno está definido por la identidad de polarización*

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) \quad \forall x, y \in V.$$

Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, el producto interno está dado por la identidad de polarización

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2) \quad \forall x, y \in V. \tag{A.12}$$

La Ecuación (A.12) también se escribe como

$$(x, y) = \frac{1}{4}((x+y, x+y) - (x-y, x-y) + i(x+iy, x+iy) - i(x-iy, x-iy)) \quad \forall x, y \in V.$$

Observación A.12. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Consideremos la matriz A asociada a T. Entonces*

$$(x, Ay) = \frac{1}{4}((x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) + i(x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)))$$

para todo $x, y \in V$.

Definición A.7. [39]. *Un funcional $\phi(x, y)$ se llama una forma bilineal hermitiana si para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{C}^q$ y cualquier número $\alpha \in \mathbb{C}$ se satisfacen:*

$$\phi(x+z, y) = \phi(x, y) + \phi(z, y), \quad \phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x, y),$$
$$\phi(x, y+z) = \phi(x, y) + \phi(x, z), \quad \phi(x, \alpha y) = \overline{\alpha}\phi(x, y).$$

Definición A.8. [39]. *Una forma bilineal hermitiana ϕ se llama hermitiana simétrica si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{C}^q$ se cumple:*

$$\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}.$$

Lema A.3. [39]. *Entre las formas bilineales hermitianas solamente las formas simétricas generan formas hermitianas cuadráticas.*

La demostración del Lema A.3 se puede encontrar en [39, pág. 286]. En [39, pág. 289] tenemos que existe la matriz A tal que

$$\phi(x, y) = (x, Ay). \tag{A.13}$$

La matriz A de la Ecuación (A.13) es llamada como la matriz asociada a la forma bilineal y está únicamente definida.

Definición A.9. [4] *Sean f, g funciones que son reales o complejas definidas en un conjunto X. La expresión $f(x) = O(g(x))$, para $x \in X$ significa que existe $A > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant A|g(x)|$ para todo $x \in X$.*

Definición A.10. [4] *La expresión $f(x) = O(g(x))$, $x \to +\infty$ significa que existen $C > 0$ y $N > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ para $x > N$.*

Definición A.11. [16] *Sean $q \in \mathbb{N}$ y A una matriz compleja de $q \times q$. Decimos que A es J_q-expansiva si $A^* J_q A - J_q \geqslant 0$.*

Teorema A.9. *Sea $q \in \mathbb{N}$. Si A es una matriz compleja de $q \times q$ entonces A es J-expansiva si y solo si A^* es J-expansiva.*

La demostración del Teorema A.9 se puede encontrar en [16, Teorema 1.3.3]. En otras palabras el Teorema A.9 dice que

$$A^* J_q A - J_q \geqslant 0 \text{ si y solo si } (A^*)^* J_q A^* - J_q \geqslant 0.$$

Apéndice B

Las clases de funciones $\mathcal{R}_q$ y $\mathcal{R}_{0,q}$

Definición B.12. [26]. *Sea* $X \subseteq \mathbb{C}$ *y* Π_+ *como en la Notación 7. Una función escalar* $F : X \to \mathbb{C}$ *es de la clase* $\mathcal{R}_1$ *si*

1. $F(z)$ *es holomorfa en* Π_+.

2. $\mathfrak{Im}\, F(z) \geqslant 0$ *para cada* $z \in \Pi_+$.

Definición B.13. [12]. *Sea* Π_+ *denotado como en la Notación 7. Sea* $\mathcal{R}_q$ *el conjunto de todas las funciones matriciales* $F : \Pi_+ \to \mathbb{C}^{q\times q}$ *que son holomorfas en* Π_+ *y que satisfacen* $\mathfrak{Im}\, F(\omega) \geqslant 0$ *para cada* $\omega \in \Pi_+$. *Y decimos que una función matricial* f *es de la clase* $\mathcal{R}_q$ *si* f *pertenece a* $\mathcal{R}_q$.

Lema B.4. *Sea* $S(z)$ *una función matricial, tal que* $S \in \mathcal{R}_q$ *y sea* $f \in \mathbb{C}^q$ *constante, entonces* $(f, S(z)f)$ *es una función escalar que pertenece a* $\mathcal{R}_1$.

Definición B.14. [26]. *Una función* $f(z)$ *es de la clase* $\mathcal{C}_q$ *(clase de Carathéodory) si*

1. $f(z)$ *es holomorfa en* $|z| < 1$

2. $\mathfrak{Re}\, f(z) \geqslant 0$ *para* $|z| < 1$.

Teorema B.10. (F. Riesz y Herglotz)[26]. *Una función* $f(z)$ *es de la clase* $\mathcal{C}_q$ *si y solo si admite una representación*

$$f(z) = i\mathfrak{Im}\, f(0) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\tau(\theta) \tag{B.14}$$

donde $\tau(\theta)$ *es una función no decreciente.*

Teorema B.11. (R. Nevanlinna)[26]. *Una función* $F(z)$ *es de clase* $\mathcal{R}_1$ *si y solo si admite una representación*

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t) \tag{B.15}$$

donde α *es un número real,* $\beta \geqslant 0$ *y* $\sigma(t)$ *es una función no decreciente tal que la integral* $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{-1} d\sigma(t)$ *es convergente.*

Mencionamos sin demostrar que la representación (B.15) es única si la función $\sigma(t)$ está normalizada de alguna manera, digamos,

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(t) = \frac{1}{2}[\sigma(t+0) + \sigma(t-0)].$$

Así normalizado, $\sigma(t)$ se determina en términos de $F(z)$ por la fórmula de inversión de Stieltjes:

$$\sigma(t_2) - \sigma(t_1) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{Im}\, F(x + i\varepsilon) dx. \tag{B.16}$$

Definición B.15. (Problema de Nevanlinna-Pick.) *Sea $\mathcal{R}_1$ la clase de funciones definida en la Definición B.12. Dado un conjunto de números w_α, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que exista una función $w = f(z) \in \mathcal{R}_1$, que satisface la ecuación*

$$f(z_\alpha) = w_\alpha \quad (z_\alpha \in Z)$$

donde $Z = \{z_\alpha\}$ es un conjunto dado de puntos en el semiplano $\mathfrak{Im}\, z > 0$.

Observación B.13. (Caso especial Problema de Nevanlinna-Pick) *Sea $\mathcal{R}_1$ la clase de funciones definida en la Definición B.12. El problema de Nevanlinna-Pick para la clase $\mathcal{R}_1$ (ver Definición B.15), en el caso en que el conjunto Z sea numerable las condiciones que se deben satisfacer son como en la siguiente igualdad*

$$f(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{B.17}$$

Si en el problema de Nevanlinna-Pick para la clase $\mathcal{R}_1$ todos los puntos z_k se unen en un único punto z_0, situado dentro de la región $\mathfrak{Im}\, z > 0$, la condición (B.17) sería reemplazada por el requisito de que en las proximidades de este punto z_0 se debería tener la expansión

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$$

donde a los C_k se les dan números. Si el punto z_0 se moviera al infinito entonces se tendría en lugar de la serie de Taylor de la última ecuación la expansión asintótica

$$f(z) \approx -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \frac{s_2}{z^3} - \ldots$$

que debe ser válido para $z \to \infty$ en el rango de ángulos $\delta \leqslant \arg z \leqslant \pi - \delta$ para cualquier positivo $\delta < \frac{\pi}{2}$. El problema de encontrar funciones $f(z) \in \mathcal{R}_1$ con una asintótica dada la expansión de la forma indicada es equivalente al problema de momentos (ver [1], pág. 110).

Teorema B.12. (R. Nevanlinna Versión Matricial)[12]. *Sea Π_+ denotado como en la Notación 7. (a) Para toda función matricial F que pertenece a la clase $\mathcal{R}_q$, existe* *una única matriz α compleja de $q \times q$ hermitiana, existe una única matriz β compleja de $q \times q$ hermitiana no negativa y existe una única $\nu \in \mathcal{M}_{\geqslant}^{q}[a,b]$ tal que*

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z} d\nu(t) \tag{B.18}$$

se satisface para cada $z \in \Pi_+$.
(b) Toda función matricial $F : \Pi_+ \to \mathbb{C}^{q\times q}$ para la cual existe una matriz α compleja de $q \times q$, existe una matriz β compleja de $q \times q$ hermitiana no negativa y $\nu \in \mathcal{M}_{\geqslant}^{q}[a,b]$ tal que (B.18) se satisface para cada $z \in \Pi_+$ pertenece a la clase $\mathcal{R}_q$.

Esta versión matricial del conocido teorema de Nevanlinna se puede demostrar usando la versión clásica del teorema de Nevanlinna en el caso $q = 1$ y usando el hecho de que para cada $F \in \mathcal{R}_q$ y cada $u, v \in \mathbb{C}^q$, la función $f := u^* F v$ pertenece a $\mathcal{R}_1$. Para cada $F \in \mathcal{R}_q$ llamamos a (α, β, ν) definidos como en (B.18) La parametrización de Nevanlinna de F y en particular la única medida ν hermitiana no negativa $q \times q$ en $\mathfrak{B} \cap \mathbb{R}$ descrita en la parte (a) del Teorema (B.12), la medida de Nevanlinna de F.

Sea λ la medida de Lebesgue que se define en $\mathfrak{B} \cap \mathbb{R}$. Además, sea $\mathfrak{B}_0$ el sistema de todos los conjuntos acotados que pertenecen a $\mathfrak{B} \cap \mathbb{R}$. Observe que para cada $B \in \mathfrak{B}_0$ y cada $\nu \in \mathcal{M}_{\geqslant}^{q}(\mathbb{R}, \mathfrak{B} \cap \mathbb{R})$, se comprueba fácilmente que la función $f_B : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{q\times q}$ definido para cada $t \in \mathbb{R}$ por

$$f_B(t) := 1_B(t)\sqrt{1+t^2} I_q \tag{B.19}$$

pertenece a $q \times q - \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathfrak{B} \cap \mathbb{R}, \nu)$. Más adelante en el Teorema B.14 formulamos una versión matricial de la Fórmula de inversión de Stieltjes-Perron (ver (B.16)).

Proposición B.5. [12]. *Sean Π_+ y Π_- denotados como en la Notación 7. Sea $M = (c, d)$ una unión finita de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sea $\varphi : \Pi_+ \cup M \cup \Pi_- \to \mathbb{C}^{q\times q}$ una función matricial que satisface las siguientes condiciones*

(i) φ es holomorfa en $\Pi_+ \cup M \cup \Pi_-$.

(ii) $\varphi_{|\Pi_+} \in \mathcal{R}_q$.

(iii) Para todo $x \in M$, la matriz $\varphi(x)$ es hermitiana.

Denotamos como (α, β, ν) la parametrización de $\varphi_{|\Pi_+}$. Entonces

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{c} \frac{1+tz}{t-z} d\nu(t) + \int_{d}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z} d\nu(t)$$

para todo $z \in \Pi_+ \cup M \cup \Pi_-$.

Lema B.5. *Si para cualquier función $F(z) \in \mathcal{R}_q$, tenemos que $\beta = 0$, entonces se cumplen las siguientes igualdades*

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta \mathfrak{Im}\, F(i\eta) = \sup_{\eta>0} \eta \mathfrak{Im}\, F(i\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t),$$

partes de las cuales pueden ser infinitas.

Definición B.16. *Denotamos a* $\mathcal{R}_{0,1}$ *como la clase de funciones escalares* $F(z) \in \mathcal{R}_1$*, tales que*

$$y\|F(iy)\| = O(1), \quad y > 0.$$

Aquí el símbolo $O(1)$ *está definido como en la Definición A.9.*

Definición B.17. [12]. *Denotamos a* $\mathcal{R}_{0,q}$ *como la clase de funciones matriciales* $F(z) \in \mathcal{R}_q$*, tales que*

$$y\|F(iy)\| = O(1), \quad y > 0.$$

Aquí el símbolo $O(1)$ *está definido como en la Definición A.9.*

Nótese que toda función matricial F que pertenece a $\mathcal{R}_{0,q}$ satisface claramente

$$\lim_{y\to+\infty} F(iy) = 0 \tag{B.20}$$

y admite una particular representación integral como veremos en el Teorema B.13.

Lema B.6. *Sea* $S(z)$ *una función matricial,* $S \in \mathcal{R}_{0,q}$ *y* $f \in \mathbb{C}^q$ *constante, entonces* $(f, S(z)f)$ *es una función escalar que pertenece a* $\mathcal{R}_{0,1}$*.*

Demostración. Sea $\varphi(z) = (f, S(z)f)$. Ya que $\mathcal{R}_{0,q} \subseteq \mathcal{R}_q$, se tiene que $S \in \mathcal{R}_q$. Por el Lema B.1, tenemos que φ pertenece a $\mathcal{R}_1$. Luego

$$|y\varphi(iy)| = |(f, yS(iy)f)| = |y(f, S(iy)f)| \leqslant y||f||^2||S(iy)|| = O(1).$$

Por lo tanto,

$$\varphi(z) \in \mathcal{R}_{0,1}.$$

■

Teorema B.13. *(a) Para cada* $F \in \mathcal{R}_{0,q}$ *existe una única medida no negativa hermitiana* $\mu \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}(\mathbb{R}, \mathfrak{B} \cap \mathbb{R})$ *tal que* F *admite la representación*

$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\omega}\mu(dt) \tag{B.21}$$

para todo $\omega \in \Pi_+$*, es decir la medida espectral de* F*, y*

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{y\to+\infty} y\mathfrak{Im}F(iy) = -i\lim_{y\to+\infty} yF(iy) = i\lim_{y\to+\infty} yF^*(iy).$$

(b) Si $F : \Pi_+ \to \mathbb{C}^{q\times q}$ *es una función matricial para la cual existe una* $\mu \in \mathcal{M}^q_{\geqslant}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}\cap \mathbb{R})$ *tal que (B.21) se satisface para todo* $\omega \in \Pi_+$*, entonces* F *pertenece a* $\mathcal{R}_{0,q}$*.*

Observación B.14. *Sea* $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$*. Usando la parte (a) del Teorema 1.1 se puede verificar que* $F := S_{|\Pi_+}$ *pertenece a* $\mathcal{R}_{0,q}$*. En particular, de (B.20) se sigue inmediatamente*

$$\lim_{y\to\infty} S(iy) = 0.$$

Observación B.15. *Sea* $S \in \mathcal{R}_q[a,b]$. *De la Observación B.14 se puede ver fácilmente que*

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\widetilde{S}_4(iy)}{y} = 0 \quad y \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{\widetilde{S}_3(iy)}{y} = 0.$$

Fórmula de la transformada inversa de Stieltjes de funciones matriciales de la clase $\mathcal{R}_q$.

Teorema B.14. *Sea* F *que pertenece a* $\mathcal{R}_q$. *Sea* ν *la medida de Nevanlinna de* F *y sea* $\mu : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{C}^{q\times q}$ *definida para todo* $B \in \mathcal{B}_0$ *mediante*

$$\mu(B) := \int_B (\sqrt{1+t^2} I_q)\nu(dt)(\sqrt{1+t^2} I_q)^*. \tag{B.22}$$

Además sean a *y* b *números reales tales que* $a < b$. *Entonces*

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, F(x+i\varepsilon)\lambda(dx) = \mu((a,b)) + \frac{1}{2}(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})) \tag{B.23}$$

Transformada inversa generalizada de Stieltjes.

Teorema B.15. *Sea* $F \in \mathcal{R}_q$ *y sea* ν *la medida de Nevanlinna de* F. *Sea* $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{p\times q}$ *una función matricial que es holomorfa en* $\mathbb{C}$ *y sea* $\Psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{p\times p}$ *una función matricial que es continua en* $\mathbb{C}$ *y que satisface* $\Psi^*(t) = \Psi(t)$ *para toda* $t \in \mathbb{R}$. *Sea* $G : \Pi_+ \to \mathbb{C}^{p\times p}$ *para cada* $\omega \in \Pi_+$ *definida mediante*

$$G(\omega) := \Psi(\omega) + \Phi(\omega)F(\omega)\Phi^*(\overline{\omega}), \tag{B.24}$$

y sean a, b *números reales que satisfacen* $a < b$. *Entonces*

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, G(x+i\varepsilon)\lambda(dx) = \int_{(a,b)} (\sqrt{1+t^2}\Phi(t))\nu(dt)(\sqrt{1+t^2}\Phi(t))^* \\ &+ \frac{1}{2}[(1+a^2)\Phi(a)\nu(\{a\})\Phi^*(a) + (1+b^2)\Phi(b)\nu(\{b\})\Phi^*(b)]. \end{aligned} \tag{B.25}$$

Bibliografía

[1] Akhiezer N.I.: *The Classical Moment Problem.* Oliver and Boyd, London, 1965. iv, 44

[2] Akhiezer N.I., Krein M.G.: *Some Questions in the Theory of Moments.* Gos.Nauchn.-Tehn. Izd-vo. Ukr., Kharkov 1938; Englische Übersetzung : Translations of Mathematical Monographs, Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1962. iv

[3] Albert A.: *Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses*. SIAM J. App. Math. 17 (1969), 434–440. 40

[4] de Bruijn N.G.: *Asymptotic methods in analysis*. North Holland Publishing, 1961. 42

[5] Blanchard P., Brüning E.: *Mathematical Methods in Physics.* Distributions, Hilbert space operators, and variational methods. Birkhäuser Boston 2003. 41

[6] Berg C., Christensen J.P.R., Ressel P.: *Harmonic Analysis on Semigroups.* Springer-Verlag, New York 1984. iv

[7] Carter M., van Brunt B.: *The Lebesgue-Stieltjes Integral.* A Practical Introduction, 2000. vi, 3

[8] Choque Rivero A.E.: *Ein finites Matrixmomentenproblem auf einem endlichen Intervall.* PhD Thesis. Leipzig University, 2002. In German. 5

[9] Choque Rivero A.E.: *From the Potapov to the Krein-Nudelman representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem.* Sociedad Matemática Mexicana 2015. vi, 35

[10] Choque Rivero A.E.: *On the solution set of the admissible control problem via orthogonal polynomials*, accepted to appear in IEEE Transactions on Automatic Control, vol 62, issue 10, pp. 5213-5219. v

[11] Choque Rivero A.E., Dyukarev Yu. M.: *Power moment problem on compact intervals.* Math Notes, vol. (69), p. 175-187. v, vi, 4, 7

[12] Choque Rivero A.E., Dyukarev Y.M., Fritzsche B. and Kirstein B.: *A Truncated Matricial Moment Problem on a Finite Interval.* Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland 2006. v, vi, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 43, 44, 45, 46

[13] Choque Rivero A.E., Karlovich Yu.: *The time optimal control as an Interpolation Problem*, Proceedings of Analysis, Mathematical Physics and Applications. Commun. Math. Anal, ISSN: 0973-3841, Conf. 03 (2011), 66-76. v

[14] Choque Rivero, A.E., Korobov, V.I., Sklyar, G.M.: *The admissible control problem from the moment problem point of view*, Applied Mathematics Letters, ISSN 0893-9659, Vol.23, No. 1, (2010), 58-63. v

[15] Choque Rivero A.E., Medina Hernandez B.E.: On two resolvent matrices of the truncated Hausdorff matrix moment problem. Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. 95, 4–22 (2022) v, vi

[16] Dubovoj V.K., Fritzsche B., Kirstein B.: *Matricial Version of the Classical Schur Problem.* Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 129, B.G. Teubner, Stuttgart-Leipzig 1992. 11, 42

[17] Dunford N., Schwartz J.T.: *Linear Operators. Part II.*, Spectral Theory, Wiley, New York 1963. iv

[18] Durán A. J., Polo B.: *Gaussian quadrature formulae for matrix weights.* Linear Algebra and its Applications 355 (2002) 119–146 v

[19] Dym H.: *On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the Hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1989. 36

[20] Efimov A.V., Potapov V.P.: *J–expansive matrix-valued functions and their role in the analytic theory of electrical circuits* (Russian). Uspekhi Mat. Nauk 28 (1973), No. 1, 65–130; English translation: Russian Math. Surveys 28 (1973), No. 1, 69–140. v, 40

[21] Folland G.B.: *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.* Second Edition Pure and applied mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts 1999. 36, 39

[22] Geronimus J.L.: *Orthogonal Polynomials* (en Ruso), Fizmatgiz, Moskau 1958. Englische Übersetzung: Consultants Bureau, New York 1961. iv

[23] Giorgio G.: *Various Proofs of the Sylvester Criterion for Quadratic Forms.* Vol. 9. Journal of Mathematics Research, 2017. 40

[24] Grenander U., Szegö G.: *Toeplitz Forms and their Applications.* Univ. of California Press, Berkeley, 1958. iv

[25] Hwang J.S.: *On the Schwarz Reflection Principle.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 272, no. 2, 1982, pp. 711–719. 36, 37

[26] Krein M.G. and Nudelman A.A.: *The Markov moment problem and extremal problems* (in Russian). "Nauka", Moscow, 1973; Engl. transl.in: Translation Math. Monographs, Vol. 50. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977. iv, vi, 4, 7, 38, 43

[27] Kovalishina I.V. and V.P. Potapov: *An indefinite metric in the Nevanlinna-Pick problem* (in Russian). Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl. **59** (1974), 17-22. Engl. transl. in: Collected Papers of V.P. Potapov. Sapporo. Japan: Private translation and edition by T. Ando 1982, pp. 67-99. vi

[28] Luo Q., Nguyen T.A., Fleming J., Zhang H.: *Unknown Input Observer Based Approach for Distributed Tube-Based Model Predictive Control of Heterogeneous Vehicle Platoons*. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 70 (4), pp.2930-2944, 2021. v

[29] Mahmoud M.S.: *Advanced Control Design with Application to Electromechanical Systems*. King Fahd University of Petroleum and Minerals, Systems Engineering Department, Dhahran, Saudi Arabia, 2018. 38

[30] Marco T.: *Matrix product and rank*. Lectures on matrix algebra 2017. 40

[31] Marsden J.E., Hoffman M.J.: *Basic complex analysis.* W.H. Freeman 1999. 36, 39

[32] Nevanlinna O.: *Meromorphic functions and linear algebra.* American Mathematical Society 2003. 36

[33] Nikishin E.M., Sorokin V.N.: *Rational Approximation and Orthogonality.* (in Russisch). Moskva, Nauka, 1988. iv

[34] Rudin W.: *Principios de Análisis Matemático.* Traducción Talleres Estudiantiles, Ciencias UNAM. 3a Edición 1980. 37, 39

[35] Schmüdgen K.: *The Moment Problem*; Graduate Texts in Mathematics. Springer: Cham, Switerland, 2017. iv

[36] Stieltjes T.J.: *Recherches sur les fractions continues* Ann. Fac. Sci. Toulouse 8, 1894, 1-122; Ann. Fac. Sci. Toulouse 9, 1895, 5-47; Versión en inglés contenida en T.J. Stieltjes, Collected Papers, G. van Dijk (Ed.), Vol. II, Springer, Berlin, 1993. iv

[37] Shohat J., Tamarkin J.D.: *The Problem of Moments.* Math. Surveys, New York: Amer. Math. Soc. 1943. iv

[38] Tomasz T.: *Using the block matrices in the modeling of driving and control system of hard disk drives*, Proceedings of ekectrithecnical institute, Issue 253, 2011 v

[39] Voyevodin V.V.: *Linear Algebra.* Mir Publishers 2 Pervy Rizhsky Pereulok 1-110, GSP, Moscow, 129820 USSR 1980. 41, 42

[40] Wei X., Mottershead J.E.: *Block-decoupling vibration control using eigenstructure assignment*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 74, Pages 11-28, 2016. v