



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS MAT. LUIS  
MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

Conteo de Ciclos Límite en los  
Sistemas de Liénard

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias en Ingeniería Física

PRESENTA:

Emmanuel Alfredo Rodríguez Ortiz

ASESORES:

Dr. Joaquin Estevez Delgado  
Dr. Ulises Uriostegui Legorreta



Morelia, Michoacán, México.

Diciembre 2024

A mi madre Ana Isabel, mi padre Jose Alfredo y mis 3 hermanos Jose Eduardo, Luis Gerardo y Rafael Izaguirre.

Espero poder llenarlos de orgullo a diario.

Pues siempre ellos me apoyaron de manera completamente incondicional, todo lo que soy es un reflejo de lo que ellos hicieron conmigo.

Espero poder seguir sanando y poder seguir avanzando, con ustedes a mi lado y poder llenarlos de orgullo a diario

A mis amigos, a todos aquellos que me buscaron cuando yo no me podía encontrar, aquellos que no dudaron en voltear abajo con tal de verme y apoyarme.

A aquellos con los que jugaba videojuegos en la noche, aquellos que me mandaron un mensaje preguntando como estaba, aquellos que salían conmigo para distraer mi mente, todos me dieron alegrías, sonrisas, risas y buenos momentos, y también a aquellos que ya no están, ya sea en la tierra o en mi vida, si tuviera que listarlos uno a uno no terminara y sin embargo todos los llevo en mi corazón.

A mis tíos, por enseñarme que no solo soy aquello que creo de mi.

A mis profesores y asesores Joaquin, Ulises y Alberto, por buscarme cuando estaba perdido y estar a mi lado aun cuando no era su obligación estarlo.

Y en general a todos mis profesores pues sin ellos yo jamás hubiera logrado lo que hoy estoy logrando.

A mis alumnos, pues ellos me han permitido seguir aprendiendo haciendo una de las cosas que más me apasionan, enseñar.

Me han mostrado cómo es seguir socializando y mantener un espíritu joven aun cuando pareciera que la vida adulta me está aplastando.

Recordarme que los problemas son tan momentáneos y que la felicidad a veces es tan duradera.

Ponerme al límite respecto a mis conocimientos ya sea en la materia o en la vida y poder aprender de mis experiencias mediante la enseñanza a ellos.

Sin ellos esta vida nunca hubiera durado tanto.

Finalmente a mí, pues tuve la oportunidad de rendirme en más de una ocasión, pude haber dado media vuelta y se que tenía el derecho de hacerlo, aun así, seguí adelante, con el corazón roto, la cabeza llena de pensamientos extraños, solo alce la mirada y puse un pie delante del otro.

A mí, por no desistir en mi amor por mí mismo.

# CONTENIDO

---

---

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Problema 16 de Hilbert . . . . .	4
1.3. Antecedentes . . . . .	5
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Estado del Arte . . . . .	7
2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	9
2.3. Sistemas dinámicos . . . . .	11
2.4. Dinámica no lineal y caos . . . . .	12
2.5. Espacio fase . . . . .	13
2.6. Sistema de Liénard . . . . .	14
2.7. Estabilidad de los sistemas dinámicos . . . . .	15
2.8. Función de Lyapunov . . . . .	16
2.9. Ciclos límite . . . . .	18
2.10. Teoremas clásicos sobre ciclos límites . . . . .	23

---

<b>3. Contando ciclos límite</b>	<b>36</b>
3.1. Construcción de ciclos límites polinomiales usando el teorema 2.10.5 de Blows y Lloyd y el teorema 2.10.6 de Perko . . . . .	37
3.1.1. Un ciclo límite . . . . .	38
3.1.2. Dos ciclos límite. . . . .	39
3.1.3. Tres ciclos límite. . . . .	40
3.1.4. Cinco ciclos límite. . . . .	41
3.2. La función $\Phi(x)$ . . . . .	42
3.3. Funciones de Lyapunov para analizar los ciclos límite . . . . .	43
3.4. El resultado más importante . . . . .	45
3.4.1. Construyendo la función de Lyapunov . . . . .	46
3.4.2. Función de Lyapunov . . . . .	48
3.4.3. Caracterización de los ciclos límite en el eje $x$ . . . . .	49
3.4.4. Punto de equilibrio . . . . .	53
3.5. Sistemas polinomiales . . . . .	53
3.5.1. Un nuevo método para construir ciclos límite en sistemas polinomiales . . . . .	54
3.5.2. Ciclos límites asimétricos . . . . .	58
3.5.3. Un resultado general para sistemas polinomiales . . . . .	60
3.6. Ciclos límite con $\Phi(x)$ no polinomial . . . . .	62
3.6.1. El polinomio de Chebyshev . . . . .	62
3.6.2. Coseno definido por partes. . . . .	64
3.6.3. Coseno amortiguado. . . . .	66

---

3.6.4. Función de Bessel. . . . .	68
3.6.5. Polinomios de Zernike. . . . .	69
3.6.6. Polinomios de Jacobi. . . . .	71
3.6.7. Funciones no continuas en todo el espacio . . . . .	73
3.6.8. Usando series geométricas con funciones trigonométricas. . . . .	75
3.7. Funciones que no son derivables alrededor de sus puntos críticos . . . . .	77
3.7.1. 1 ciclo límite. . . . .	79
3.7.2. 2 ciclos límite. . . . .	81
3.7.3. 3 ciclos límite. . . . .	82
3.7.4. 2 ciclos límites no simétricos. . . . .	83
3.8. Comportamiento bajo reflexiones . . . . .	84
<b>4. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>91</b>

## Índice de figuras

---

2.1.	Diagrama representando el espacio fase mediante vectores, imagen extraída de [48], página 20. . . . .	14
2.2.	Diagrama de Poincaré sobre la dinámica que se tiene alrededor de los puntos de equilibrio del sistema Ec. (2.6), el eje vertical es $\det(A)$ , el eje horizontal es $\text{Tr}(A)$ . Imagen extraída de [52]. . . . .	16
2.3.	Ciclo límite estable (coloreado de verde) del sistema $\dot{x} = y - \frac{3x-x^3}{3}$ , $\dot{y} = -x$ . 20	
2.4.	Ciclo límite inestable (coloreado de rojo) del sistema $\dot{x} = y - \frac{3x-x^3}{3}$ , $\dot{y} = -x$ . 21	
2.5.	Ciclo límite semiestable, estable por dentro, inestable por fuera, del sistema $\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1)^2$ , $\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1)^2$ . . . . .	22
2.6.	Ciclo límite semiestable, inestable por dentro, estable por fuera, del sistema $\dot{x} = y - x(x^2 + y^2 - 1)^2$ , $\dot{y} = -x - y(x^2 + y^2 - 1)^2$ . . . . .	23
2.7.	La función $y = F(x)$ (de azul) y una trayectoria $\Gamma$ del sistema de Liénard Ec. (2.7), se observan los 5 $P_i$ , $i = 0, \dots, 4$ , que se usaran para la demostración del teorema 2.10.1. . . . .	25
2.8.	$F(x) = \mu(x - \frac{x^3}{3})$ , con $\mu = 1$ . . . . .	28
2.9.	Se observa cómo alrededor del punto de equilibrio (0,0) las trayectorias son espirales, con verde se ha graficado el ciclo límite estable del sistema Ec. (2.11). . . . .	29
2.10.	$\frac{f(x)}{g(x)}$ del sistema Ec. (2.12); es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . . . . .	30
2.11.	Espacio fase del sistema de la Ec. (2.12). De verde se graficó el ciclo límite. 30	

---

2.12. $f(X) = 0.05 \left( 40.5 - 90x^2 + \frac{16x^4}{4} \right)$ del sistema de Ec. (2.13). Se observa que $f(a_1) = 0$ y $f(a_2) = 0$ . . . . .	31
2.13. $F(x) = 0.05 \left( 40.5x - 30x^3 + \frac{16x^5}{5} \right)$ del sistema de Ec. (2.13). Nótese que $F(a_1) > 0$ y $F(a_2) < 0$ . . . . .	32
2.14. Espacio fase del sistema Ec. (2.13). De rojo se graficó el ciclo límite inestable y de verde el estable. . . . .	32
2.15. Espacio fase del sistema Ec. (2.14), con un ciclo límite inestable. . . . .	33
2.16. Espacio fase del sistema Ec. (2.15), con un ciclo límite estable. . . . .	34
3.1. Espacio fase de la Ec. (3.3) con un único ciclo límite estable graficado de negro. . . . .	39
3.2. Espacio fase de la Ec. (3.4) con dos ciclos límites; el primero es estable (verde) y el segundo inestable (rojo). . . . .	40
3.3. Espacio fase del sistema Ec. (3.6) con tres ciclos límites: el primero es estable y los restantes alternan en estabilidad. . . . .	41
3.4. Espacio fase del sistema Ec. (3.8) con cinco ciclos límites, donde el primero es estable y los demás alternan en estabilidad. . . . .	42
3.5. Dibujo representativo de las regiones delimitadas por un ciclo límite. . . . .	43
3.6. Diagrama representando los signos y análisis de $\dot{V}$ en un ciclo límite inestable. . . . .	51
3.7. Diagrama representando los signos y análisis de $\dot{V}$ en un ciclo límite estable. . . . .	51
3.8. Diagrama representando los signos y análisis de $\ddot{V}$ en un ciclo límite inestable. . . . .	52
3.9. Diagrama representando los signos y análisis de $\ddot{V}$ en un ciclo límite inestable. . . . .	52
3.10. Espacio fase de la Ec. (3.20) con dos ciclos límite: de verde el estable y de rojo el inestable. En negro se muestra la gráfica de la Ec. (3.19). . . . .	55

3.11. $\Phi(x)$ , se graficó la parte positiva pues la parte negativa es la misma y la prioridad es observar de buena manera sus máximos y mínimos. . . . .	56
3.12. Espacio fase del sistema (3.11) usando $\Phi(x)$ como en Ec. (3.21). De verde se graficaron los ciclos estables y de negro los inestables. . . . .	57
3.13. $\Phi(x)$ con 7 puntos críticos en su lado positivo. . . . .	57
3.14. Espacio fase del sistema Ec. (3.11), con $\Phi(x)$ como se observa en la Figura 3.13. De verde se graficaron los ciclos estables y de negro los inestables. . . . .	58
3.15. Espacio fase del sistema de la Ec. (3.11) con $\Phi(x) = -4x^2 + 2x^3 + \frac{2x^4}{3}$ . . . . .	59
3.16. Espacio fase de la Ec. (3.23) de verde se gráfico un ciclo límite estable, de rojo uno inestable y de negro el $\Phi(x)$ usado en el sistema Ec. (3.23). . . . .	60
3.17. Espacio fase de (3.24) de rojo sé gráfica un ciclo límite inestable. Se observa cómo, aunque $\Phi(x)$ sea de grado 6, se tiene un único ciclo límite. . . . .	61
3.18. Polinomio de Chebyshev de grado 8. . . . .	63
3.19. Espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11), usando un polinomio de Chebyshev de grado 8 como $\Phi(x)$ . . . . .	63
3.20. Uso de la función paso unitario para truncar el coseno antes y después de $\pm 6.5$ . . . . .	64
3.21. Espacio fase usando la Ec. (3.25) como $\Phi(x)$ en el sistema de Liénard, con la gráfica de $\Phi(x)$ en la parte inferior, los ciclos límites estables estan de verde, los inestables de rojo. . . . .	66
3.22. Gráfica de $\Phi(x) = 10e^{-0.1x^2} \cos \pi x$ . . . . .	67
3.23. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando $\Phi(x)$ como en la Figura 3.22, de verde se graficaron los ciclos límite estables, de rojo los inestables. . . . .	67
3.24. Gráfica de $\Phi(x) = \frac{\cos \pi x}{1+0.1x^2}$ . . . . .	68
3.25. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando $\Phi(x)$ como en la Figura 3.24, de verde se graficaron los ciclos límite estables, de rojo los inestables. . . . .	68
3.26. Función de Bessel de grado 4. . . . .	69

3.27. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando la función de Bessel de grado 4 como $\Phi(x)$ , de verde se graficaron los ciclos límite estables, de rojo los inestables. . . . .	69
3.28. Polinomio de Zernike $R_6^0(x)$ . . . . .	70
3.29. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando el polinomio de Zernike $R_6^0(x)$ como $\Phi(x)$ , de verde se graficó el ciclo límite estable, de rojo el inestable. . . . .	70
3.30. Polinomio de Zernike $R_6^4(x)$ . . . . .	71
3.31. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando el polinomio de Zernike $R_6^4(x)$ como $\Phi(x)$ , de verde se gráfico el ciclo límite estable. . . . .	71
3.32. Parte positiva del polinomio de Jacobi $P_8^{\{1,7\}}$ . . . . .	72
3.33. Mediante la función paso unitario, se refleja la parte positiva del polinomio de Jacobi y se une su parte positiva de tal forma que la función resultante sea simétrica. . . . .	72
3.34. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando la Figura 3.33 como $\Phi(x)$ . . . . .	73
3.35. Gráfica de la función $\Phi(x)$ de la Ec. (3.26). . . . .	74
3.36. Espacio fase del sistema de la Ec. (3.11) usando a la Ec. (3.26) como $\Phi(x)$ . . . . .	74
3.37. Gráfica de la serie geométrica usando signos negativos, $n = 12$ . . . . .	75
3.38. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11), usando $\Phi(x) = \frac{(1-\cos^{12}(x))}{1-\cos(x)}$ con los ciclos límites resaltados, de verde los estables y de rojo los inestables . . . . .	76
3.39. Gráfica de la serie geométrica usando signos positivos, $n = 12$ . . . . .	76
3.40. Espacio fase de la serie geométrica usando signos positivos. . . . .	77
3.41. Diagrama representando los signos y análisis de $\dot{V}$ en un ciclo límite estable para $\Phi(x)$ una función a trozos para la que los valores máximos, sin importar el del origen, no son derivables. . . . .	78

3.42. Diagrama representando los signos y análisis de $\dot{V}$ en un ciclo límite estable para $\Phi(x)$ una función a trozos para la que los valores mínimos, sin importar el del origen, no son derivables. . . . .	78
3.43. $\Phi(x)$ siendo el valor absoluto de $x$ ( $\Phi(x) =  x $ ). . . . .	79
3.44. $\Phi(x)$ Ec. (3.27) a trozos con un par de máximos. . . . .	79
3.45. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando la función mostrada en la Figura 3.44 como $\Phi(x)$ . . . . .	80
3.46. $\Phi(x)$ a trozos con un par de mínimos. . . . .	80
3.47. Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando la función mostrada en la Figura 3.46 $\Phi(x)$ . . . . .	81
3.48. $\Phi(x)$ a trozos con un par de mínimos y máximos de distinto tamaño. . . . .	81
3.49. Espacio fase del sistema Ec. (3.11) usando $\Phi(x)$ como la Figura 3.48. . . . .	82
3.50. $\Phi(x)$ a trozos con un par de mínimos y 2 pares de máximos. . . . .	82
3.51. Espacio fase del sistema Ec. (3.11) usando $\Phi(x)$ como la Figura 3.50. . . . .	83
3.52. $\Phi(x)$ asimétrica, a trozos con un par de mínimos y máximos de distinto tamaño. . . . .	83
3.53. Espacio fase del sistema usando $\Phi(x)$ como la Figura 3.52. . . . .	84
3.54. Espacio fase de un sistema de Liénard típico sin cambios. . . . .	85
3.55. Espacio fase de un sistema de Liénard igual al de la Figura 3.54, con el cambio $x$ a $-x$ y $y$ a $-y$ . . . . .	86
3.56. Espacio fase de un sistema de Liénard igual al de la Figura 3.54, con el cambio $x$ a $-x$ . . . . .	87
3.57. Espacio fase de un sistema de Liénard polinomial sin termino líneal en $\Phi(x)$ . . . . .	88

## Resumen

El estudio de los sistemas dinámicos, originado en la mecánica clásica, se ha ampliado significativamente desde los trabajos pioneros de Henri Poincaré y Aleksandr Lyapunov. Los sistemas dinámicos se describen mediante ecuaciones diferenciales, y los ciclos límite, que son soluciones periódicas de dichos sistemas, juegan un papel crucial en la comprensión de la dinámica de estos sistemas. Las trayectorias dentro y fuera del ciclo límite determinan el tipo de ciclo límite y su estabilidad. Estos conceptos son fundamentales en áreas de la física, como los sistemas oscilatorios y los modelos presa-depredador, donde los ciclos límite estables aseguran la coexistencia de especies o el funcionamiento estable de dispositivos mecánicos.

El problema 16 de Hilbert, propuesto en 1900, se planteó como un problema de topología de curvas y superficies algebraicas. Una parte del problema 16 de Hilbert está relacionado con campos vectoriales polinómicos en el plano real, que es un sistema de ecuaciones diferenciales, de la forma  $\dot{x} = P(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y)$ , donde  $Q$  y  $P$  son polinomios reales de grado  $n$ .

Este trabajo presenta un análisis exhaustivo de los ciclos límite en sistemas de Liénard  $\dot{x} = y - \Phi'(x)$ ,  $\dot{y} = -g(x)$ , utilizando funciones  $\Phi(x)$  con diversas propiedades, incluidas aquellas que no son diferenciables en sus puntos críticos. Se estudia que existe una relación entre la cantidad, estabilidad y la posición de los ciclos límite con los máximos y mínimos de  $\Phi(x)$ . Este enfoque permite analizar sistemas más allá de los polinomiales tradicionales, incluyendo funciones no continuas o definidas a trozos.

Mediante ejemplos detallados, se ilustra cómo construir sistemas con un número específico de ciclos límite y cómo sus soluciones se comportan en el espacio fase. Se emplean polinomios de Chebyshev, funciones de Bessel, polinomios de Zernike y series geométricas, demostrando la aplicabilidad del método a una amplia gama de funciones. También se analiza el comportamiento de funciones no diferenciables, evidenciando que los ciclos límite aún pueden generarse bajo estas condiciones.

Este estudio contribuye a la comprensión de los ciclos límite en sistemas dinámicos y abre nuevas vías para futuras investigaciones. Se espera que este trabajo sirva como referencia para la representación gráfica de ciclos límite, facilitando su análisis y comprensión.

Palabras clave: Sistemas dinámicos, ciclos límite, estabilidad, sistemas de Liénard, sistemas polinomiales, funciones no diferenciables, sistemas no polinomiales.

---

## Abstract

The study of dynamical systems, originating in classical mechanics, has significantly expanded since the pioneering work of Henri Poincaré and Aleksandr Lyapunov. Dynamical systems are described by differential equations, and limit cycles, which are periodic solutions of such systems, play a crucial role in understanding the dynamics of these systems. The trajectories inside and outside the limit cycle determine the type of limit cycle and its stability. These concepts are fundamental in areas of physics, such as oscillatory systems and predator-prey models, where stable limit cycles ensure the coexistence of species or the stable operation of mechanical devices.

Hilbert's 16th problem, proposed in 1900, was posed as a problem of the topology of algebraic curves and surfaces. A part of Hilbert's 16th problem is related to polynomial vector fields in the real plane, which is a system of differential equations of the form  $\dot{x} = P(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y)$ , where  $Q$  and  $P$  are real polynomials of degree  $n$ .

This work presents a comprehensive analysis of limit cycles in Liénard systems  $\dot{x} = y - \Phi'(x)$ ,  $\dot{y} = -g(x)$ , using functions  $\Phi(x)$  with various properties, including those that are not differentiable at their critical points. It is studied that there is a relationship between the number, stability, and position of the limit cycles with the maxima and minima of  $\Phi(x)$ . This approach allows for the analysis of systems beyond traditional polynomials, including discontinuous or piecewise-defined functions.

Through detailed examples, it is illustrated how to construct systems with a specific number of limit cycles and how these solutions behave in phase space. Chebyshev polynomials, Bessel functions, Zernike polynomials, and geometric series are employed, demonstrating the method's applicability to a wide range of functions. The behavior of non-differentiable functions is also analyzed, showing that limit cycles can still be generated under certain conditions.

This study provides a deeper understanding of limit cycles in dynamical systems and opens new avenues for future research. It is hoped that this work will serve as a reference for the graphical representation of limit cycles, facilitating their analysis and understanding.

Keywords: Dynamic systems, limit cycles, stability, Liénard systems, polynomial systems, non-differentiable functions, non-polynomial systems.

---

# Capítulo 1

---

## Introducción

---

### SECCIÓN 1.1

#### Introducción

El concepto de sistemas dinámicos tiene su origen en la mecánica clásica, donde se busca una ley o relación capaz de predecir la evolución de un sistema a lo largo del tiempo. Henri Poincaré es considerado el padre de los sistemas dinámicos, gracias a sus monografías “Nuevos métodos de mecánica celeste” (1892-1899) y “Conferencias sobre mecánica celeste” (1905-1910) [1]. Aportaciones fundamentales en este campo también provienen de Aleksandr Lyapunov, quien desarrolló métodos para el estudio de la estabilidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, estableciendo las bases de la teoría de la estabilidad moderna [2].

Un sistema dinámico se describe mediante ecuaciones diferenciales, no necesariamente lineales [3]. Dentro de este contexto, un ciclo límite es una solución periódica, también conocida como trayectoria cerrada, de un sistema dinámico [4]. Este ciclo divide el espacio de soluciones o espacio fase en dos regiones: el interior y el exterior de la trayectoria. Las trayectorias circundantes convergen hacia el ciclo límite si este es estable, o divergen si es inestable [5]. Los ciclos límite son cruciales en el estudio de sistemas físicos bidimensionales, especialmente los oscilatorios, porque representan soluciones periódicas, esto permite predecir y controlar el comportamiento oscilatorio, asegurando estabilidad

o inestabilidad frente a perturbaciones[6]. Además, son esenciales para el análisis de estabilidad en sistemas no lineales y tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas, como la biología y la economía, donde ayudan a modelar y comprender fenómenos cíclicos naturales y económicos [7].

Existen tres tipos de ciclos límite: estables, inestables y semiestables [8]. Un ciclo límite estable es una trayectoria a la que otras trayectorias en una vecindad del ciclo límite convergen. Un ciclo límite inestable es una trayectoria de la que otras trayectorias en una vecindad del ciclo límite divergen [9]. Un ciclo límite semiestable presenta características de estabilidad en una región y de inestabilidad en otra [10].

Los ciclos límite se manifiestan en diversos modelos físicos, como el modelo presa-depredador, que determina la supervivencia de dos especies, una de las cuales es presa de la otra [11]. En estos sistemas, es vital obtener una solución periódica estable, ya que garantiza que ninguna de las especies se extinga ni supere significativamente a la otra en población. En problemas físicos, se busca identificar regiones de soluciones donde se generen ciclos límites estables, pues estas soluciones son autosostenidas y, en contextos como el funcionamiento de un motor o la estabilidad de un edificio bajo cargas, es crucial que el sistema retorne a un estado estable tras perturbaciones [12].

## SECCIÓN 1.2

### Problema 16 de Hilbert

Los problemas propuestos por el matemático David Hilbert en el año 1900 durante el Congreso Internacional de Matemáticos en París, son una lista de 23 problemas que abarcan diversas áreas de las matemáticas, incluyendo teoría de números, geometría algebraica y análisis funcional [13]. El problema 16 de Hilbert se refiere a las curvas cerradas en sistemas de ecuaciones diferenciales polinomiales y se enuncia de la siguiente manera [14]:

- Investigar las posiciones relativas de las ramas de las curvas algebraicas reales de grado  $n$  (y de manera similar para las superficies algebraicas).
- Determinar el límite superior para el número de ciclos límite en campos vectoriales polinómicos bidimensionales de grado  $n$  y estudiar sus posiciones relativas.

El segundo problema no tiene una solución conocida: no se conoce un límite superior

para el número de ciclos límite para un sistema polinomial del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} &= \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j. \end{aligned} \tag{1.1}$$

El número de ciclos límite en una ecuación diferencial polinomial de segundo orden es el objeto principal de la segunda parte del decimosexto problema de Hilbert [14].

### SECCIÓN 1.3

## Antecedentes

La historia de los ciclos límite y sus investigaciones ha sido marcada por importantes contribuciones de varios matemáticos destacados [15].

- **Leonhard Euler (1707-1783)**: Contribuyó a la teoría de los números y al cálculo, abordando la existencia de ciclos límite en sistemas de ecuaciones diferenciales en su trabajo sobre la ecuación de Bernoulli [16, 17].
- **Pierre François Verhulst (1804-1849)**: Famoso por su trabajo en ecuaciones de crecimiento logístico, que describen cómo una población puede crecer ilimitadamente en un entorno con recursos finitos [18].
- **Henri Poincaré (1854-1912)**: Hizo contribuciones fundamentales a la teoría de sistemas dinámicos, abordando problemas relacionados con los ciclos límite y la estabilidad orbital en sistemas celestes en su obra “Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste” [19].
- **Aleksandr Lyapunov (1857-1918)**: Desarrolló los conceptos y métodos que llevan su nombre, los “exponentes de Lyapunov”, utilizados para determinar la estabilidad de los puntos críticos en sistemas dinámicos, incluidos los ciclos límite [20].
- **Edward Lorenz (1917-2008)**: Conocido por su trabajo pionero en la teoría del caos y el “efecto mariposa”, que ilustra cómo pequeñas variaciones en condiciones iniciales pueden llevar a comportamientos caóticos en sistemas no lineales [21].

- **Benoit B. Mandelbrot (1924-2010):** Su trabajo en la teoría fractal ayudó a comprender y modelar una variedad de fenómenos naturales, algunos de los cuales involucran ciclos límites [22, 23].

La teoría de sistemas dinámicos, que incluye el estudio de ciclos límite, ha avanzado considerablemente en el siglo *XX* y continúa siendo un área activa de investigación en matemáticas, física, biología, economía y otras disciplinas. Los avances en esta área han llevado a una mayor comprensión de los fenómenos naturales y al desarrollo de aplicaciones en diversas disciplinas científicas.

---

# Capítulo 2

## Marco Teórico

---

En este capítulo, se explora el marco teórico fundamental para el estudio de los sistemas dinámicos y los ciclos límite, destacando su importancia en diversas disciplinas científicas y técnicas. A través de una revisión del estado del arte, se identifican algunas de las contribuciones claves y desarrollos teóricos que han moldeado la comprensión actual de estos fenómenos.

### SECCIÓN 2.1

#### Estado del Arte

Los estudios sobre sistemas dinámicos y la existencia de ciclos límite tienen un impacto significativo en diversas ramas de la ciencia. Este campo de investigación, vigente y relevante, se ha desarrollado a través de múltiples estudios pioneros a lo largo del siglo pasado.

Uno de los trabajos más influyentes es el de Saet y Vivían [24], en el cual se presenta una metodología para construir un sistema de Liénard con un polinomio de grado  $2N + 1$  que contiene  $N$  ciclos límite. La principal contribución radica en la aplicación de la teoría de bifurcación para generalizar el oscilador de Van der Pol y determinar el intervalo en el espacio fase en el cual los ciclos límite están acotados en el eje  $x$ . Además, se muestran

ejemplos prácticos de circuitos autooscilantes con ciclos límite anidados.

En el estudio de Liénard, otra importante investigación es la presentada en [25], donde se reformulan teoremas clásicos sobre ciclos límite utilizando dos funciones de amortiguamiento. Este enfoque permite establecer la existencia de un único ciclo límite, ya sea estable o inestable, sin necesidad de especificar en detalle las funciones que componen el sistema. También se discute cómo la parametrización de los ciclos límite, bajo homeomorfismos y difeomorfismos, conserva la dinámica y posición relativa al punto crítico del sistema.

La aplicación de estos conceptos se extiende a diversas áreas, como la biomedicina y la robótica. En [26], se utiliza un modelo de seis osciladores no lineales acoplados para estudiar el electrocardiograma y las patologías del corazón. Este modelo revela ciclos límites estables asociados a un corazón sano. En [27], se analiza la estabilidad de un pequeño robot controlado por una red neuronal multicapa, utilizada para predecir la aparición de ciclos límite y evitar oscilaciones al aproximarse a obstáculos.

Además, en [28], se explora cómo las redes neuronales, consideradas como sistemas caóticos, pueden presentar atractores, incluidos ciclos límite. En [29], se estudia la dinámica de las neuronas en un estado llamado *bursting*, mediante un sistema *fast-slow*, donde el subsistema rápido contiene un ciclo límite atractor.

El estudio de los ciclos límite también se aplica en ecología. En [30], se investiga cómo las especies del Mar Menor generan ciclos límite estables, observando las relaciones de abundancia de larvas de peces y la concentración de clorofila. Se destaca que las oscilaciones y diferencias en la amplitud del ciclo límite resultan de la estructura comunitaria y los ciclos de vida de las especies.

Modelos presa-depredador también han sido estudiados en este contexto. En [31], se analiza un modelo con tasas de captura proporcional a la densidad poblacional y esfuerzo de pesca, mostrando cómo estas variaciones afectan la estabilidad del equilibrio y generan ciclos límite. En [32], se emplea un análisis geométrico y de Lyapunov para estudiar la estabilidad en las ecuaciones cosmológicas de Friedmann, en el marco de la teoría de la relatividad general.

La investigación teórica sobre el conteo de ciclos límite ha avanzado considerablemente. En [33, 34, 35, 36, 37], se presentan métodos para determinar el número de ciclos límite en sistemas polinomiales, utilizando herramientas del álgebra conmutativa y teoría de bifurcaciones.

Un avance notable en este campo es el trabajo de Pablo Pedregal [38], quien ha propuesto una cota superior para cualquier sistema polinomial en relación con el problema 16 de Hilbert. Aunque su texto aún está por publicarse, su enfoque teórico y el uso de

funcionales para parametrizar ciclos límite representan un progreso significativo.

En resumen, el desafío de contar los ciclos límite en sistemas de Liénard sigue siendo un problema en desarrollo. Hasta donde se sabe la literatura actual se ha centrado en el conteo teórico en sistemas polinomiales, sin una representación visual de los resultados. Este trabajo propone un enfoque que aborda tanto el conteo en sistemas no polinomiales como la visualización de los sistemas y resultados, contribuyendo a la teoría y proporcionando una representación gráfica de los hallazgos.

Este enfoque no solo enriquecerá la teoría existente, sino que también permitirá una mejor comprensión visual de los resultados obtenidos, facilitando su aplicación en diversas áreas científicas.

## SECCIÓN 2.2

### Ecuaciones diferenciales ordinarias

En el presente trabajo se hará uso de ecuaciones diferenciales y a modo de tener claras nuestras ideas preliminares respecto a la teoría necesaria, se comenzará definiendo una ecuación diferencial.

**Definición 2.2.1.** [39] Una **ecuación diferencial (ED)** es una ecuación que relaciona de manera no trivial una función y una o más de las derivadas o diferenciales de la misma función desconocida respecto a una o más variables independientes.

Entre las ecuaciones diferenciales existen dos tipos, las parciales (E.D.P.) y las ordinarias, estas últimas son las que se utilizan en todo lo subsecuente.

**Definición 2.2.2.** [40] Una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**, expresa una relación entre una variable independiente, una variable dependiente y una o más derivadas de la variable dependiente respecto a la variable independiente.

La definición 2.2.2 matemáticamente, se expresa como la Ec. (2.1), donde,  $g(t)$  es la función dependiente de la variable  $t$ ,  $G(t)$  es una función arbitraria

$$F(t, g(t), g'(t), \dots, g^{(n)}(t)) = G(t), \quad \text{con: } g^{(i)}(t) = \frac{d^i g(t)}{dx^i}. \quad (2.1)$$

**Definición 2.2.3.** [41] *El orden de una EDO es el orden de la derivada más alta que aparece en ella.*

Por ejemplo, la Ec. (2.1), es una EDO de orden  $n$ .

En este trabajo usaremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias conocido como el "Sistema de Liénard", del cual más adelante hablaremos.

**Definición 2.2.4.** [41] *Un sistema de EDO's es un conjunto de dos o más EDO's que relacionan dos o más funciones desconocidas y sus derivadas respecto a una única variable independiente.*

Toda EDO de orden  $n$  puede ser reescrita en un sistema de  $n$  EDO's de orden 1 [42], por ejemplo la Ec. (2.1), haciendo el cambio de variable  $g_i(t) = g^{(i-1)}(t)$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , se puede reescribir en el sistema

$$\begin{cases} g_1'(t) = g_2(t), \\ \dots\dots\dots \\ g_{n-1}(t)' = g_n(t), \\ g_n'(t) = f(x, g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)). \end{cases}$$

**Definición 2.2.5.** [41] *Una EDO se llama **lineal** si en la EDO (2.1),  $F$  es una función lineal sobre las variables,  $g(t), g'(t), \dots, g^{(n)}(t)$ . Una EDO lineal de orden  $n$  se escribe en general en la forma*

$$a_0(t)g(t) + a_1(t)g'(t) + a_2(t)g^{(2)}(t) + \dots + a_n(t)g^{(n)}(t) = b(t), \quad (2.2)$$

donde  $a_i(t)$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , son funciones arbitrarias de la variable independiente y  $b(t)$  es una función arbitraria de la variable independiente.

**Definición 2.2.6.** [41] *Una EDO es **no lineal**, si no es de la forma Ec. (2.2).*

En este trabajo se estudiarán EDO's no lineales de orden 2, las cuales, mediante un cambio de variable, que más adelante se explica, se transforman en un sistema de 2 EDO's de primer orden.

## SECCIÓN 2.3

## Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos, área de la cual se desprende el presente trabajo, se escriben y modelan matemáticamente mediante el uso de E.D.

**Definición 2.3.1.** [43] Los **sistemas dinámicos** son sistemas físicos cuyo estado en un parámetro  $t$  (a veces relacionado con el tiempo) se encuentra completamente determinado por un conjunto de  $n$  variables reales  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ .

En consecuencia el sistema es tal que las razones de cambio de estas variables, a saber,  $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ , dependen únicamente del valor de las variables en sí mismas y del parámetro  $t$ , tal que las leyes de movimiento pueden ser expresadas en términos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= X_i(x_1(t), \dots, x_n(t), t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i(t), \quad &i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dentro de el estudio de los sistemas dinámicos, se desprenden dos tipos de sistemas dinámicos: los no autónomos (Ec. (2.3)) y los autónomos (Ec. (2.4)),

**Definición 2.3.2.** [44, 45] Un sistema es **autónomo** (Ec. (2.4)) si el sistema (el lado derecho de la Ec. (2.3)) no depende explícitamente de la variable independiente  $t$ , esto es

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= X_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i(t), \quad &i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Los sistemas que se estudian en este trabajo son autónomos.

## SECCIÓN 2.4

## Dinámica no lineal y caos

Como se menciona en la definición 2.2.6, un sistema no es lineal si no es de la forma de la Ec. (2.2). Un ejemplo de la literatura de dinámica no lineal clásica de una EDO autónoma no lineal es el oscilador de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2.5)$$

Hay muchas definiciones posibles de caos (Robert L. Devaney [46]) y no hay una globalmente aceptada (B. Hasselblatt y A. Katok [47]), la que se usará en este trabajo esta dada por Devaney en [46].

**Definición 2.4.1.** [46] *Un sistema presenta **caos** si tiene las siguientes características:*

- *Sensibilidad a las condiciones iniciales.*
- *Transitividad topológica; esto es: Un sistema dinámico  $T:X \rightarrow X$  se denomina topológicamente transitivo si, para todo par  $U, V$  subconjuntos abiertos de  $X$ , existe algún  $n \geq 0$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Donde  $T^n(U)$ , es aplicar el sistema dinámico  $T$  a todos los integrantes del conjunto  $U$   $n$  veces.*
- *Presencia de puntos periódicos densos.*

La definición 2.4.1 es una definición de caos dada por Robert L. Devaney en [46], la cual punto por punto se refiere a:

- Sensibilidad a las condiciones iniciales; un sistema caótico es completamente determinista, pero no es predecible, esto es, si se tiene una solución de un sistema con caos cuyas condiciones iniciales son  $(x_0, t_0)$ , si les introducimos una pequeña variación  $h$ , se podrá determinar la solución al resolver la ecuación para las condiciones iniciales  $(x_0 + h, t_0 + h)$ , pero su comportamiento será muy distinto al comportamiento que la solución tendría si no tuviera esa pequeña variación en la condición inicial.
- De manera intuitiva, si  $\mathbf{T}$  es topológicamente transitiva, aplicando  $\mathbf{T}$  una cantidad de veces habrá puntos de cualquier región de  $\mathbf{V}$  que se moverán a  $\mathbf{U}$  al aplicar  $\mathbf{T}$  una cantidad suficiente de veces. En otras palabras, la dinámica (las trayectorias solución) se moverá por todo el espacio.

- Un punto periódico denso, es un punto  $X_0$  del espacio fase sobre el cual la trayectoria que sigue la solución del sistema dinámico iniciando en  $X_0$  termina por volver a dicho punto (periódico). Denso se refiere a que dado cualquier punto  $X_1$  en el espacio fase, y dada cualquier distancia  $\epsilon$ , existe un punto  $x$  sobre la trayectoria que inicia en  $X_0$ , para el cual la distancia entre  $X_1$  y  $x$  es  $\epsilon$ . En otras palabras, la trayectoria periódica que inicia en  $X_0$ , rellena todo el espacio.

El caos solo se presenta en sistemas autónomos de orden  $n \geq 3$  o en sistemas no autónomos de orden  $n \geq 2$  [48], la Ec. (2.5) no presenta caos.

La explicación de por que un sistema autónomo de orden  $2 \geq n$  no presenta caos se dara mas adelante junto al teorema 2.9.1, el teorema de Poincaré-Bendixson en la sección 2.9.

## SECCIÓN 2.5

### Espacio fase

Un sistema autónomo de segundo orden se representa como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y), \\ \dot{y} &= f_2(x, y).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Aunque ya se ha usado anteriormente en este trabajo la palabra trayectoria y espacio fase, se dara su definición formal.

**Definición 2.5.1.** [48] Sea  $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ , la solución de la Ec. (2.6) con estado inicial (condiciones iniciales)  $\mathbf{X}(0) = (x(0), y(0)) = \mathbf{X}_0$ . El lugar en el plano  $x - y$ , de la solución  $\mathbf{X}(t)$ , para  $t \geq 0$  es una curva que empieza en el punto  $\mathbf{X}_0$ . Esta curva es llamada la **trayectoria** u órbita de la Ec. (2.6) partiendo de  $\mathbf{X}_0$ .

El lugar donde viven las trayectorias u órbitas de la Ec. (2.6), es el llamado espacio fase, uno de los principales objetivos es el observar dicho espacio fase de los diferentes sistemas analizados.

**Definición 2.5.2.** [49] El retrato de fase (*phase portrait* en inglés) es una imagen de la colección de las curvas de soluciones representativas del sistema en  $\mathbb{R}^2$ . A esta colección sobre el plano  $x - y$  de la Ec. (2.6) se le llama el **espacio fase** (a veces también se le conoce como plano de fase, *phase plane* en inglés).

Cada punto del espacio fase representa un estado del sistema, la curva representa la evolución del sistema a lo largo del parámetro  $t$ , una imagen aproximada del espacio fase puede ser obtenida al graficar muchas trayectorias de un número grande estados iniciales esparcidos por todo el plano  $x - y$ . En la Figura 2.1 se observa un diagrama que representa el espacio fase de un sistema Ec. (2.6).

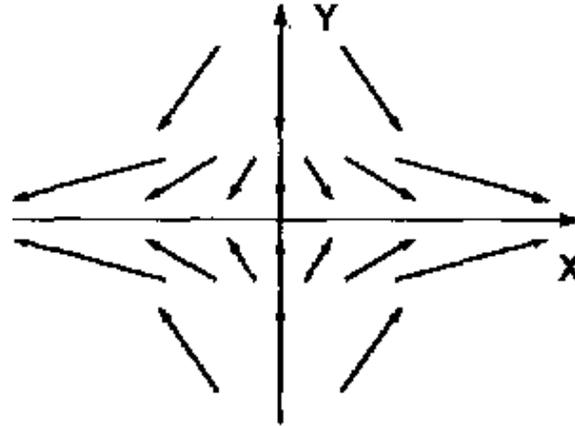


Figura 2.1: Diagrama representando el espacio fase mediante vectores, imagen extraída de [48], página 20.

## SECCIÓN 2.6

### Sistema de Liénard

Los sistemas de Liénard son especialmente útiles para estudiar ciclos límite en sistemas bidimensionales porque:

- Proporcionan una estructura matemática que facilita el análisis de la existencia, unicidad y estabilidad de los ciclos límite.
- Permiten modelar fenómenos oscilatorios reales, donde el ciclo límite representa un comportamiento estable y recurrente.
- Ofrecen métodos analíticos para estudiar la localización y la estabilidad de estos ciclos límite, lo cual es clave en aplicaciones prácticas.

Por ello se utilizan los sistemas de Liénard y para ello se da la definición de estos.

**Definición 2.6.1.** [50] *Los sistemas de la forma*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -g(x),\end{aligned}\tag{2.7}$$

*son referidos como **sistemas de Liénard**.*

Los sistemas de Liénard son una manera de reescribir a la ecuación diferencial autónoma de segundo orden,

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

la cual es una generalización de la ecuación diferencial de un sistema mecánico de segundo orden con fricción  $f(x)$  y potencial  $g(x)$ .

Efectuando el cambio de variable  $y = \dot{x} - F(x)$ , con  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ , la ecuación puede reescribirse en el sistema Ec. (2.7).

El interés en el sistema de Liénard radica en el estudio y caracterización de los ciclos límites (que más adelante se definen) que aparecen en el espacio fase de estos sistemas.

## SECCIÓN 2.7

### Estabilidad de los sistemas dinámicos

El sistema autónomo de segundo orden Ec. (2.6), se puede escribir de forma más compacta como  $\dot{X} = f(X)$ .

**Definición 2.7.1.** [51] *El punto  $X_0 \in \mathbb{R}^2$  es un **punto fijo o de equilibrio** del sistema Ec. (2.6) si  $f(X_0) = 0$  y corresponde a estados estables o estados de equilibrio del sistema.*

Esta definición se puede generalizar para sistemas de dimensión arbitraria  $n$ . Pero en este trabajo basta con definirlo para  $n = 2$ .

Los puntos de equilibrio en sistemas dinámicos se calculan usando la forma matricial del sistema linealizado,  $\dot{X} = AX$ . Los eigenvalores de la matriz  $A$  proporcionan toda la información necesaria sobre la dinámica del sistema alrededor de los puntos de equilibrio.

Recordemos que dichos eigenvalores se obtienen como la solución de la ecuación  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Para sistemas del tipo Ec. (2.6) se puede reescribir la ecuación anterior de una forma más explícita y sencilla como

$$\lambda^2 + \lambda \operatorname{Tr}(A) + \det(A) = 0,$$

donde  $\operatorname{Tr}(A)$  (llamado solo  $T$  en la Figura 2.2) es la traza de la matriz  $A$  y  $\det(A)$  (llamado solo  $D$  en la Figura 2.2) es el determinante de  $A$ . El diagrama de Poincaré Figura 2.2 indica el tipo de dinámica que se tiene alrededor de los puntos de equilibrio según el valor del determinante y la traza de  $A$ .

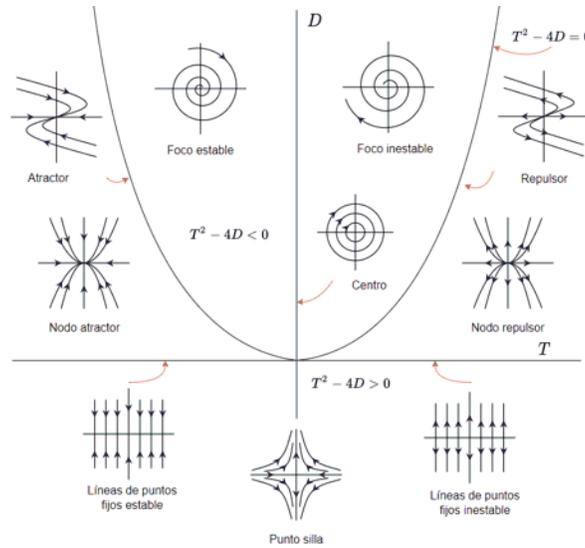


Figura 2.2: Diagrama de Poincaré sobre la dinámica que se tiene alrededor de los puntos de equilibrio del sistema Ec. (2.6), el eje vertical es  $\det(A)$ , el eje horizontal es  $\operatorname{Tr}(A)$ . Imagen extraída de [52].

## SECCIÓN 2.8

### Función de Lyapunov

El objetivo de este trabajo será determinar la dinámica y estabilidad de los ciclos límite en los sistemas de Liénard. Para ello se hará uso de las funciones de Lyapunov; estas funciones son tales que determinan la estabilidad del sistema a estudiar. En 1892, Lyapunov demostró que estas funciones no son únicas. Más adelante se explicará cómo

en la literatura actual dichas funciones son útiles para caracterizar la dinámica del sistema en todo el espacio fase.

En la siguiente definición, el símbolo  $\|\dots\|$  hace referencia a la normal euclídea de  $\mathbb{R}^n$ , donde si  $\mathbf{X}=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  es un vector que vive en  $\mathbb{R}^n$  entonces la norma euclídea es

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2},$$

con ello podemos dar la definición de punto de equilibrio dada en [48].

**Definición 2.8.1.** [48] El **punto de equilibrio**  $\mathbf{X}(0) = 0$ , determinado por  $f(\mathbf{X}(0)) = 0$ , de  $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$ , es:

- **Estable** sí,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que:

$$\|\mathbf{X}(0)\| < \delta \longrightarrow \|\mathbf{X}(t)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

- **Inestable** si no es estable.
- **Asintóticamente estable** si se puede escoger  $\delta$  tal que:

$$\|\mathbf{X}(0)\| < \delta \longrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{X}) = 0.$$

La definición anterior no tiene pérdida de generalidad para un punto de equilibrio  $\mathbf{X}(0) \neq 0$ , pues siempre se puede aplicar un cambio de variables  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \mathbf{X}(0)$ .

Como se mencionó anteriormente, existen funciones que determinan la estabilidad del sistema. Sea  $V : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene al origen. La derivada de  $V$  al parámetro  $t$ , denotada por  $\dot{V}(\mathbf{X})$  está dada por

$$\dot{V}(\mathbf{X}) = \frac{dV(\mathbf{X}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{X}),$$

la derivada de  $V$  respecto al parámetro  $t$  depende del sistema; por lo tanto,  $\dot{V}$  dependerá del sistema estudiado.

**Teorema 2.8.2. Teorema de estabilidad de Lyapunov** [48]. Sea  $\mathbf{X} = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$  y  $D \subset \mathbb{R}^n$  sea un dominio que contenga  $\mathbf{X} = 0$ . Sea  $V : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ , tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{en} \quad D \setminus \{0\}, \quad (2.8)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ en } D, \quad (2.9)$$

entonces,  $\mathbf{X}=0$  es estable. Más aún si

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ en } D \setminus \{0\},$$

entonces,  $\mathbf{X}=0$  es asintóticamente estable.

La demostración del teorema 2.8.2 puede ser encontrada en [48].

**Definición 2.8.3.** [48] Una función  $V$  de clase  $C^1$  que cumple con las ecuaciones (2.8) y (2.9), se le llama una **función de Lyapunov**.

## SECCIÓN 2.9

### Ciclos límite

Se comenzará explicando por qué los sistemas dinámicos de 2 dimensiones no pueden presentar caos y para eso se enuncia uno de los teoremas más importantes en el estudio de sistemas dinámicos.

**Teorema 2.9.1. Teorema de Poincaré-Bendixson** [51]; supongamos que:

- $R$  es un conjunto cerrado del plano ( $\mathbb{R}^2$ ).
- $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$  es un sistema de clase  $C^1$ , en un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contiene a  $R$ .
- $R$  no contiene puntos de equilibrio del sistema.
- Existe una trayectoria  $C$  que está confinada en  $R$ , es decir, que comienza en  $R$  y permanece en  $R$  para todo  $t > 0$ .

Entonces, o bien  $C$  es una órbita cerrada, o bien tiende a una órbita cerrada cuando  $t \rightarrow \infty$ . En cualquier caso,  $R$  contiene una órbita cerrada.

Otra manera de enunciar el teorema 2.9.1 y su demostración puede ser encontrada en [50], aunque realmente casi cualquier libro que se dedique al estudio de sistemas dinámicos, caos o ecuaciones diferenciales contiene una forma de enunciar el teorema 2.9.1.

Las implicaciones de este teorema son varias, pero la principal para este trabajo es una trayectoria confinada en una región cerrada del plano entonces el conjunto de puntos al que la trayectoria tiende en un sistema planar conforme  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$  tiene 3 posibilidades:

- Un **punto fijo**.
- Una **órbita cerrada** (también llamado ciclo límite).
- Un **conjunto finito de puntos fijos y órbitas** que tienden a esos puntos, lo que implica un comportamiento que oscila entre estos equilibrios o ciclos.

La implicación principal de este teorema es que en un sistema planar como la Ec. (2.6), no tiene caos, puesto que las trayectorias no son sensibles a las condiciones iniciales. Por lo que sí pueden aparecer ciclos límites en los sistemas de Liénard.

Una definición intuitiva, sin la necesidad de entrar en tanta rigidez matemática, sobre lo que es un ciclo límite, se puede encontrar en [51].

**Definición 2.9.2.** [51] *Un **ciclo límite** es una trayectoria aislada cerrada. Aislada significa que las trayectorias cercanas no son cerradas; estas espiran hacia dentro o fuera del ciclo límite.*

Aunque hay muchas otras formas de definir lo que es un ciclo límite (todas son equivalentes a la definición 2.9.2) una de estas tantas definiciones, la cual será conveniente para este trabajo sobre lo que es un ciclo límite, está dada en [50].

**Definición 2.9.3.** [50] *Un **ciclo límite u órbita periódica** del sistema  $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$  es cualquier curva cerrada solución del sistema  $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$  que no es un punto de equilibrio del sistema  $\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X})$ .*

Otra de estas maneras de definir lo que es un ciclo límite basándonos en cuál es el comportamiento que tiene sobre el espacio fase está dada en [48], la cual también será de utilidad para este trabajo.

**Definición 2.9.4.** [48] *Sea  $\gamma(\mathbf{X}(t))$  una solución del sistema Ec. (2.6), se le llama solución periódica si  $\gamma(\mathbf{X}(t+T)) = \gamma(\mathbf{X}(t))$  para algún  $T \in \mathbb{R}$ , la imagen de una solución periódica en el espacio fase es llamada **ciclo límite** (también se conoce por órbita periódica u órbita cerrada).*

En general, una trayectoria cerrada en el espacio fase tal que otras trayectorias no cerradas tienden en espiral desde el interior o desde el exterior, cuando  $t \rightarrow \infty$  o cuando  $t \rightarrow -\infty$  se conoce como ciclo límite [41].

**Definición 2.9.5.** [41] Si todas las trayectorias que se inician cerca de una trayectoria cerrada (ciclo límite) (tanto por dentro como por fuera) tienden en espiral hacia la trayectoria cerrada cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces el ciclo límite es **estable**.

En la Figura 2.3 se puede observar el espacio fase del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \frac{3x - x^3}{3}, \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}$$

con el ciclo límite coloreado de verde.

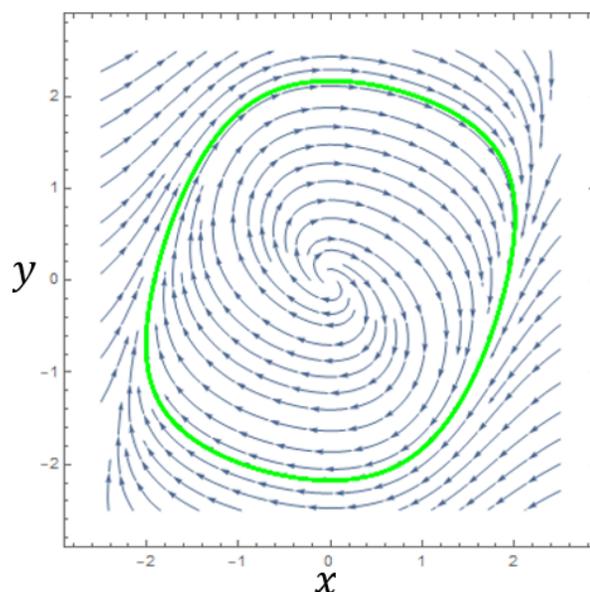


Figura 2.3: Ciclo límite estable (coloreado de verde) del sistema  $\dot{x} = y - \frac{3x - x^3}{3}$ ,  $\dot{y} = -x$ .

**Definición 2.9.6.** [41] Si todas las trayectorias que se inician cerca de una trayectoria cerrada (ciclo límite) (tanto por dentro como por fuera) se alejan en espiral de la trayectoria cerrada cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces el ciclo límite es **inestable**.

En la Figura 2.4 se puede observar el espacio fase del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \frac{3x - x^3}{3}, \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}$$

con el ciclo límite inestable coloreado de rojo.

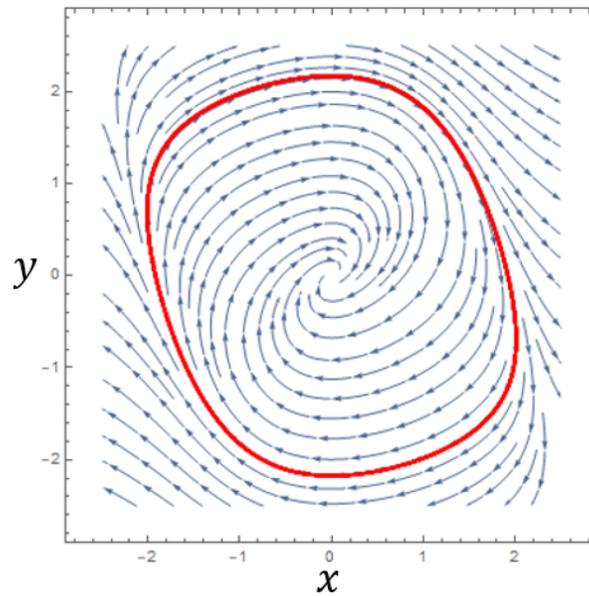


Figura 2.4: Ciclo límite inestable (coloreado de rojo) del sistema  $\dot{x} = y - \frac{3x-x^3}{3}$ ,  $\dot{y} = -x$ .

**Definición 2.9.7.** [41] *Si las trayectorias en uno de los lados se aproximan en espiral hacia la trayectoria cerrada, mientras que las del otro lado se alejan en espiral de ella cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces se dice que el ciclo límite es **semiestable**.*

En otras palabras, un ciclo límite semiestable es aquel que es estable desde una región (dentro o fuera del ciclo límite) e inestable desde la otra.

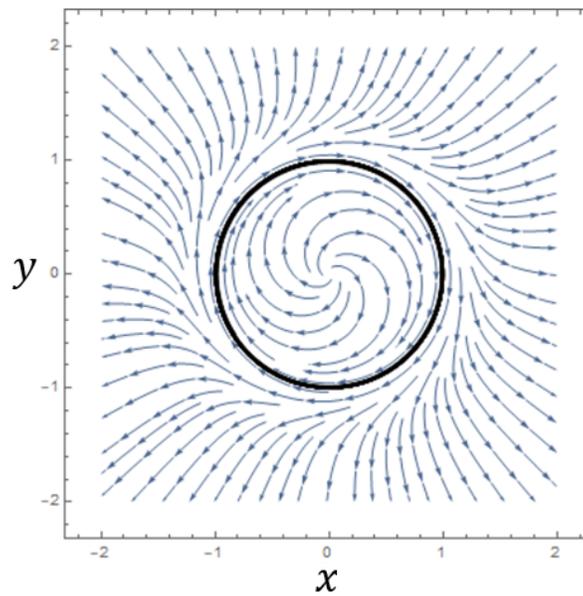


Figura 2.5: Ciclo límite semiestable, estable por dentro, inestable por fuera, del sistema  $\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1)^2$ ,  $\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1)^2$ .

En la Figura 2.5 se observa cómo es estable desde adentro e inestable desde fuera, en la Figura 2.6 se observa el caso opuesto.

El espacio fase graficado fue el del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(x^2 + y^2 - 1)^2, \\ \dot{y} &= -x + y(x^2 + y^2 - 1)^2.\end{aligned}$$

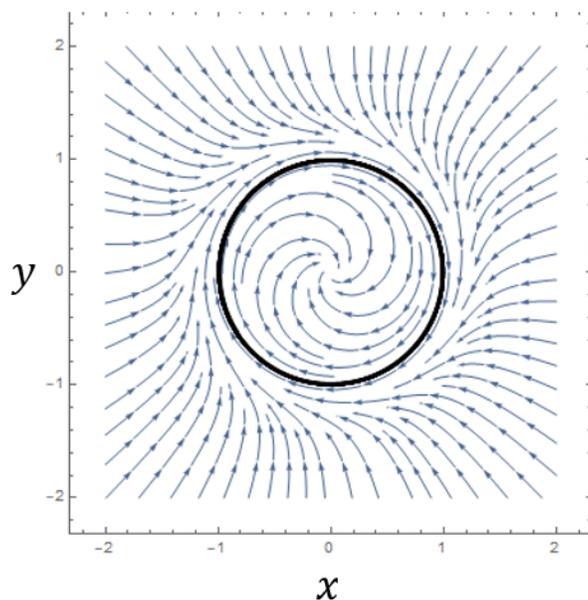


Figura 2.6: Ciclo límite semiestable, inestable por dentro, estable por fuera, del sistema  $\dot{x} = y - x(x^2 + y^2 - 1)^2$ ,  $\dot{y} = -x - y(x^2 + y^2 - 1)^2$ .

En la Figura 2.6 se observa cómo es inestable desde adentro y estable desde fuera.

El espacio fase graficado fue el del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x(x^2 + y^2 - 1)^2, \\ \dot{y} &= -x - y(x^2 + y^2 - 1)^2.\end{aligned}$$

## SECCIÓN 2.10

### Teoremas clásicos sobre ciclos límites

Se revisaron algunos libros y textos de la literatura clásica en sistemas dinámicos y se enlistaron algunos de los teoremas clásicos más destacados sobre ciclos límites, junto con ejemplos.

**Teorema 2.10.1.** [50] *El teorema de Liénard dice que bajo las siguientes hipótesis:*

- *F y g son funciones reales y continuas en todos los reales.*

- $F$  y  $g$  son impares.
- $xg(x) > 0$ , para  $x \neq 0$ .
- $F'(0) < 0$ .
- $F$  tiene ceros en  $x = 0$  y en  $x = \pm a$ .
- $F$  tiende monótonamente a infinito para  $x > a$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Entonces el sistema de Liénard Ec. (2.7) tiene un único ciclo límite y es estable.

La demostración de este teorema es algo confusa en un primer acercamiento, por lo que en el presente trabajo se escribirá la demostración y se dará explicación de los pasos que en [50] obvian.

Antes de presentar la demostración se realizan unas observaciones simples bajo las hipótesis del teorema 2.10.1.

- El origen es el único punto crítico del sistema Ec. (2.7).
- El flujo en el eje  $y$  positivo es horizontal y hacia la derecha (eje  $x$  positivo), pues sobre el eje  $y$  se tiene  $x = 0$ ,  $F(x) = 0$ , debido a que en el sistema Ec. (2.7), se reduce a  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = 0$ , haciendo que solo haya cambio en dirección del eje  $x$ .
- Análogamente a lo anterior, el flujo en el eje  $y$  negativo es horizontal y hacia la izquierda (eje  $y$  negativo).
- El flujo sobre la curva  $y = F(x)$ , es vertical, hacia abajo (eje  $y$  negativo) si  $x > 0$  y hacia arriba si  $x < 0$ , esto debido a que en el sistema Ec. (2.7), se reduce a  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = -x$ , haciendo que el cambio sea solo en dirección del eje  $y$  y que sea de signo opuesto al de  $x$ .
- El sistema Ec. (2.7) es invariante bajo  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ , por lo tanto, si  $(x, y)$  describe una trayectoria del sistema Ec. (2.7),  $(-x, -y)$  describe la misma trayectoria. Lo que significa que si  $\Gamma$  es una trayectoria cerrada, ciclo límite, del sistema Ec. (2.7), entonces  $\Gamma$  es simétrica.

Además, para la demostración utilizaremos la gráfica Figura 2.7, donde se observa que hay 4 puntos  $P_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , los cuales tienen coordenadas  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $C$  es el valor sobre el eje  $x$ , donde la función  $y = F(x)$ , de azul, intersecta el eje  $x$ ,  $P_1 = (C, y_1)$ ,  $P_3 = (C, y_3)$ ,  $P_0 = (0, y_0)$ ,  $P_4 = (0, y_4)$ ,  $P_2 = (\alpha, y_2)$ .  $\alpha$  es la proyección del punto  $P_2$  sobre el eje  $x$ .

En la misma gráfica 2.7,  $\Gamma$  es una trayectoria del sistema de Liénard Ec. (2.7) que inicia en  $P_0$  y pasa por los puntos  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Esta es una trayectoria cualquiera.

La función  $y = F(x)$ , graficada de azul en la Figura 2.7 es una forma general de como se observan las funciones  $F(x)$  que cumplen las condiciones del teorema de Liénard 2.10.1.

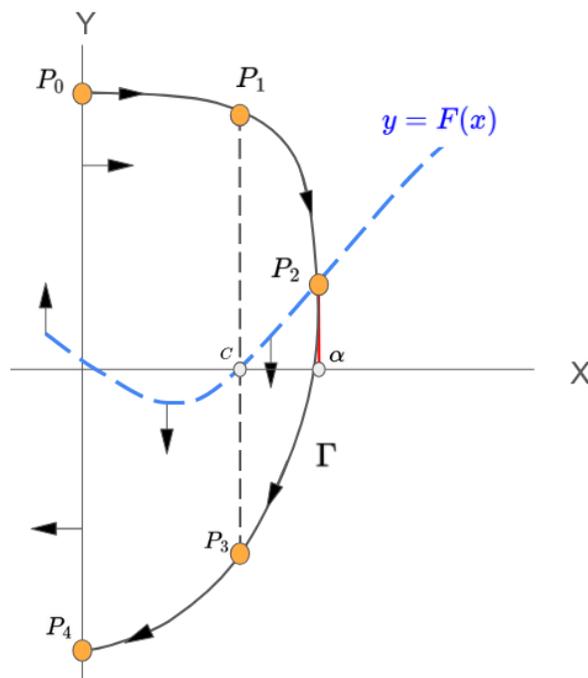


Figura 2.7: La función  $y = F(x)$  (de azul) y una trayectoria  $\Gamma$  del sistema de Liénard Ec. (2.7), se observan los 5  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ , que se usaran para la demostración del teorema 2.10.1.

**Demostración 1.** Debido a la naturaleza del flujo en el eje  $y$  y sobre la curva  $y = F(x)$ , cualquier trayectoria  $\Gamma$  iniciando en el punto  $P_0$  en el eje  $y$  positivo cruza la curva  $y = F(x)$ , verticalmente en el punto  $P_2$  y luego cruza el eje  $y$  horizontalmente en el punto  $P_4$ .

Debido a la simetría de la Ec. (2.7), se sigue que  $\Gamma$  es una trayectoria cerrada si y solo si  $y_4 = -y_0$  y para  $u(x, y) = y^2/2 + G(x)$ , con  $\frac{dG(x)}{dx} = g(x)$ , sería equivalente a decir:  $u(0, y_4) = u(0, y_0)$ . Ahora sea  $A$  el arco  $\overline{P_0P_4}$  de la trayectoria  $\Gamma$  y considera la función  $\psi(\alpha)$  definida por la integral

$$\psi(\alpha) = \int_A du = u(0, y_4) - u(0, y_0),$$

donde  $\alpha = x_2$ , la abscisa del punto  $P_2$ . Entonces  $\Gamma$  es una trayectoria cerrada si y solo si  $\psi(\alpha) = 0$ . Mostraremos que la función  $\psi(\alpha)$  tiene exactamente un cero en  $\alpha = \alpha_0$  y que  $\alpha_0 > C$ .

Primero nótese que sobre la trayectoria  $\Gamma$

$$du = g(x)dx + ydy = F(x)dy,$$

y que si  $\alpha \leq C$  entonces  $F(x) < 0$  y  $dy = -g(x)dt < 0$ . Por lo tanto,  $\psi(\alpha) > 0$ ; esto es,  $u(0, y_4) > u(0, y_0)$ . Por lo que, ninguna trayectoria  $\Gamma$  que cruza la curva  $y = F(x)$  en el punto  $P_2$  con  $0 < x_2 = \alpha \leq C$  es cerrada.

El siguiente Lemma nos ayudará a terminar la demostración.

**Lemma** Para  $\alpha \geq C$ ,  $\psi(\alpha)$  es una función monótonamente decreciente, que decrece del valor positivo  $\psi(C)$  a  $-\infty$  conforme  $\alpha$  crece en el intervalo  $[C, \infty)$ .

Para  $\alpha > C$ , como en la Figura 2.7, dividiremos el arco  $A$  en tres partes  $A_1 = \overline{P_0P_1}$ ,  $A_2 = \overline{P_1P_3}$ ,  $A_3 = \overline{P_3P_4}$  y definiremos las funciones

$$\psi_1(\alpha) = \int_{A_1} du, \quad \psi_2(\alpha) = \int_{A_2} du, \quad \psi_3(\alpha) = \int_{A_3} du,$$

se sigue que  $\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha) + \psi_3(\alpha)$ . A lo largo de  $\Gamma$  tenemos

$$\begin{aligned} du &= \left[ g(x) + y \frac{dy}{dx} \right] dx \\ &= \left[ g(x) - \frac{yg(x)}{y - F(x)} \right] dx \\ &= \frac{-F(x)g(x)}{y - F(x)} dx, \end{aligned} \tag{2.10}$$

a lo largo de los arcos  $A_1$  y  $A_3$  tenemos  $F(x) < 0$ ,  $g(x) > 0$  y  $dx/[y - F(x)] = dt > 0$ . Entonces,  $\psi_1(\alpha) > 0$  y  $\psi_3(\alpha) > 0$ . Similarmente, a lo largo del arco  $A_2$ , se tiene que  $F(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$  y  $dx/[y - F(x)] = dt > 0$  y, por lo tanto,  $\psi_2(\alpha) < 0$ . Ya que las trayectorias del sistema Ec. (2.7) no se cruzan, por lo que al incrementar  $\alpha$ , se incrementa su altura  $A_1$  lo que aumenta la  $y$  lo que hace que decrezca el factor integrando de la Ec. (2.10) y por lo que  $\psi_1(\alpha)$  decrece. A lo largo de  $A_3$ , los límites en el eje  $x$  de la integración permanecen fijos de  $x_3 = C$  a  $x_4 = 0$ ; y para cada una de las  $x \in [0, C]$ , incrementar  $\alpha$  desplaza hacia abajo  $A_3$ , por lo que  $y$  decrezca, y la magnitud del integrando de la Ec. (2.10) decrece y, por lo tanto,  $\psi_3(\alpha)$  decrece, ya que

$$\psi_3(\alpha) = - \int_C^0 \frac{F(x)g(x)}{y - F(x)} dx = \int_0^C \left| \frac{F(x)g(x)}{y - F(x)} \right| dx,$$

a lo largo del arco  $A_2$  de  $\Gamma$  podemos escribir  $du = F(x)dy$ . Y ya que las trayectorias del sistema Ec. (2.7) no se cruzan, se sigue que incrementar  $\alpha$  causa que el arco  $A_2$  se

mueva a la derecha. A lo largo de  $A_2$  los límites de integración del eje y permanecen fijos en  $y = y_1$  y  $y = y_3$ ; y para cada  $y \in [y_1, y_3]$  fija, incrementar  $x$  incrementa  $F(x)y$ , ya que

$$\psi_2(x) = - \int_{y_3}^{y_1} F(x)dy,$$

esto decrece  $\psi_2(\alpha)$ . Por lo que para  $\alpha \geq C$ ,  $\psi$  es una función monótonamente decreciente de  $\alpha$ .

Falta por mostrar que  $\psi(\alpha) \rightarrow -\infty$  conforme  $\alpha \rightarrow \infty$ , pero bastara con demostrar que  $\psi_2(\alpha) \rightarrow -\infty$  conforme  $\alpha \rightarrow \infty$ . Pero a lo largo de  $A_2$ ,  $du = F(x)dy = -F(x)g(x)dt < 0$ , y para un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} |\psi_2(\alpha)| &= - \int_{y_1}^{y_3} F(x)dy = \int_{y_3}^{y_1} F(x)dy > \int_{y_3+\epsilon}^{y_1-\epsilon} F(x)dy \\ &> F(\epsilon) \int_{y_3+\epsilon}^{y_1-\epsilon} dy \\ &= F(\epsilon)|y_1 - y_3 - 2\epsilon| \\ &= F(\epsilon)|y_1 - 2\epsilon|, \end{aligned}$$

pero  $y_1 > y_2$  y  $y_2 \rightarrow \infty$  conforme  $x_2 = \alpha \rightarrow \infty$ . Por lo que,  $|\psi_2(\alpha)| \rightarrow \infty$  conforme  $\alpha \rightarrow \infty$ ;  $\psi_2(\alpha) \rightarrow -\infty$  conforme  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Finalmente, como la función continua  $\psi(\alpha)$  decrece monótonamente de un valor positivo,  $\psi(\alpha)$  a  $-\infty$  conforme  $\alpha$  incremente en  $[C, \infty)$ , se sigue que  $\psi(\alpha) = 0$  en exactamente un valor de  $\alpha$ , llámese  $\alpha = \alpha_0$ , en  $(C, \infty)$ . Por lo que el sistema Ec. (2.7) tiene exactamente una trayectoria cerrada  $\Gamma_0$  que pasa a través del punto  $(\alpha_0, F(\alpha_0))$ .

Más allá, ya que  $\psi(\alpha) < 0$  para  $\alpha > \alpha_0$ , se sigue de la simetría del sistema Ec. (2.7), que para  $\alpha \neq \alpha_0$ , se tienen sucesivos puntos de intersección de una trayectoria  $\Gamma$  a través del punto  $(\alpha, F(\alpha))$  con el eje y se aproximan a  $\Gamma_0$ , esto es,  $\Gamma_0$  es un ciclo límite estable del sistema Ec. (2.7).  $\square$ .

Un ejemplo clásico de este teorema es el oscilador de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

donde  $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ . Que se reescribe en el sistema de Liénard

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right), \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}\tag{2.11}$$

$F(x) = \mu(x - \frac{x^3}{3})$ , su gráfica se observa en la Figura 2.8, tomando  $\mu > 0$ ,  $F(x)$  cumple las condiciones del teorema 2.10.1;  $F(0) = 0$  y tiene ceros en  $x = \pm\sqrt{3}$  y en  $x = 0$ , además tiende monótonamente a infinito conforme  $x$  tiende a infinito.

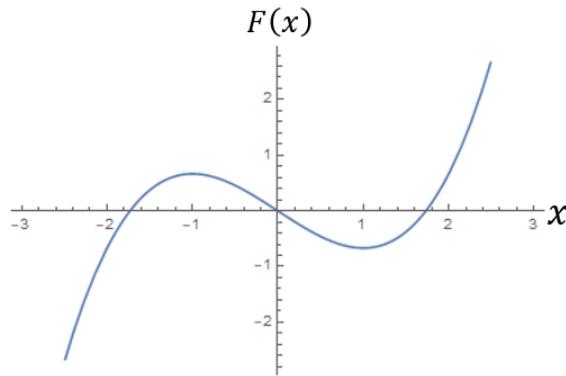


Figura 2.8:  $F(x) = \mu(x - \frac{x^3}{3})$ , con  $\mu = 1$ .

El espacio fase de la Ec. (2.11) se puede observar en la Figura 2.9.

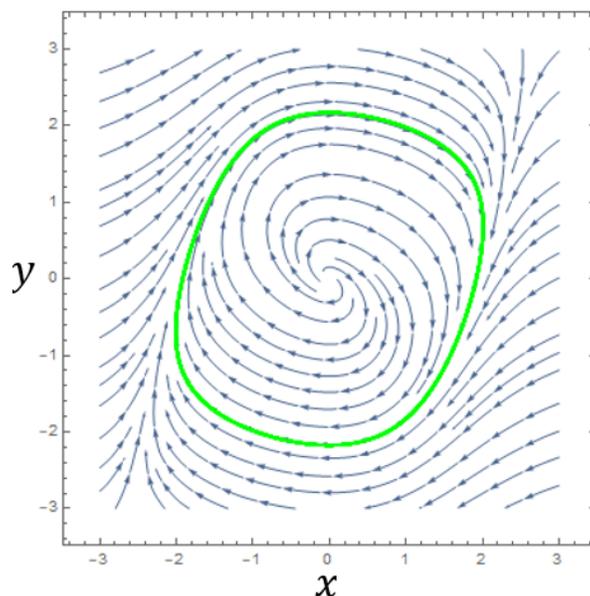


Figura 2.9: Se observa cómo alrededor del punto de equilibrio  $(0,0)$  las trayectorias son espirales, con verde se ha graficado el ciclo límite estable del sistema Ec. (2.11).

**Teorema 2.10.2.** [50] **Teorema 1 de Zhang;** se considera un sistema de Liénard Ec. (2.7) bajo las condiciones:

- $a < 0 < b$ ,
- $F, g \in C^1(a, b)$ ,
- $g(x)$  impar,
- $\int_0^x g(\sigma) d\sigma \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow a$  si  $a = -\infty$  y cuando  $x \rightarrow b$  si  $b = \infty$ ,
- $\frac{f(x)}{g(x)}$  es monótonamente creciente en  $(a, 0) \cup (0, b)$  y no es constante alrededor de  $x = 0$ ,

el sistema puede tener a lo sumo un ciclo límite en la región  $a < x < b$ , y si existe, es estable.

La demostración del teorema 2.10.2 se encuentra en [50].

Este resultado no garantiza la existencia de un ciclo límite, solo establece condiciones bajo las cuales, si existe un ciclo límite, este será estable. Un sistema ejemplo de este teorema es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - (-x + x^2 + x^3), \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}\tag{2.12}$$

en Ec. (2.12), se tiene que  $f(x) = -1 + 2x + 3x^2$  y  $\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{x} + 2 + 3x$ , que es monótonamente creciente en  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  como se observa en la Figura 2.10.

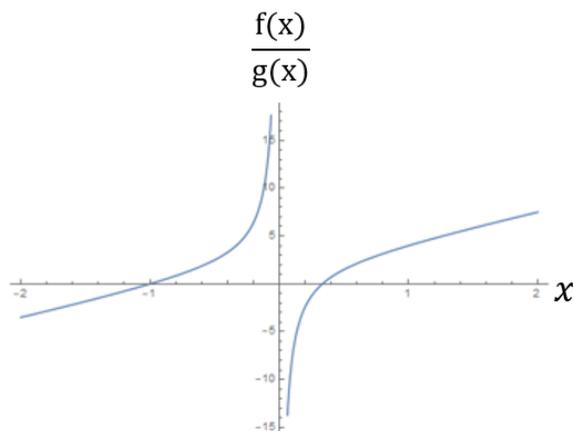


Figura 2.10:  $\frac{f(x)}{g(x)}$  del sistema Ec. (2.12); es creciente en  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .

El espacio fase de Ec. (2.12) con el ciclo límite graficado se puede ver en la Figura 2.11.

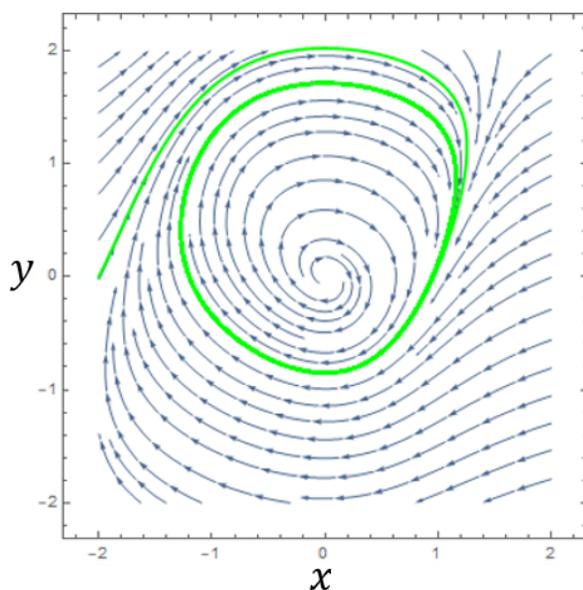


Figura 2.11: Espacio fase del sistema de la Ec. (2.12). De verde se graficó el ciclo límite.

**Teorema 2.10.3.** [50] *El teorema 2 de Zhang establece que un sistema de Liénard Ec. (2.7) bajo las siguientes hipótesis:*

- $g(x) = x$ ,
- $F(x) \in C^1(\mathbb{R})$ ,
- $f(x) = F'(x)$  es una función par con exactamente dos ceros positivos  $a_1 < a_2$ ,
- $F(a_1) > 0$  y  $F(a_2) < 0$ ,

*tiene a lo sumo dos ciclos límites.*

La demostración del teorema 2.10.3 se encuentra en [50].

Es el primer teorema del presente trabajo donde se especifica que  $g(x) = x$ . Nótese que tomar la función así sigue cumpliendo todas las condiciones de los teoremas 2.10.1 y 2.10.2.

Un ejemplo de este teorema es el sistema de Liénard

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 0.05 \left( 40.5x - 30x^3 + \frac{16x^5}{5} \right), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{2.13}$$

en el sistema Ec. (2.13) se tiene que  $f(x) = 0.05 \left( 40.5 - 90x^2 + \frac{16x^4}{4} \right)$  la cual tiene dos ceros positivos, uno en  $a_1 = 0.6777$  y otro en  $a_2 = 4.69474$ . que se pueden observar en la Figura 2.12.

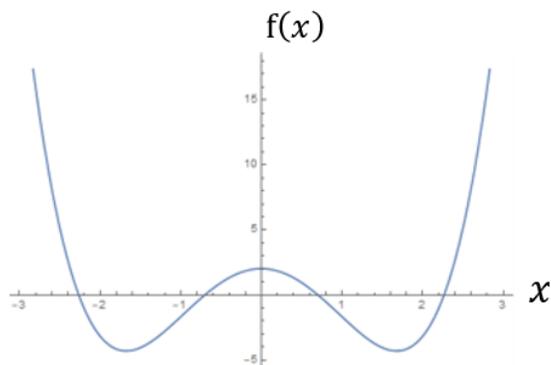


Figura 2.12:  $f(X) = 0.05 \left( 40.5 - 90x^2 + \frac{16x^4}{4} \right)$  del sistema de Ec. (2.13). Se observa que  $f(a_1) = 0$  y  $f(a_2) = 0$ .

En la Figura 2.13 se visualiza el gráfico de  $F(x) = 0.05 \left( 40.5x - 30x^3 + \frac{16x^5}{5} \right)$ , se observa que  $F(a_1) > 0$  y  $F(a_2) < 0$ .

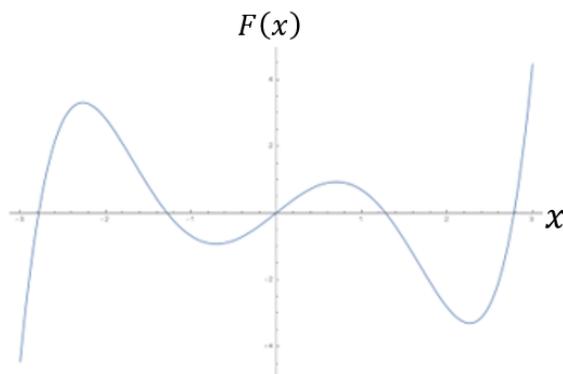


Figura 2.13:  $F(x) = 0.05 \left( 40.5x - 30x^3 + \frac{16x^5}{5} \right)$  del sistema de Ec. (2.13). Nótese que  $F(a_1) > 0$  y  $F(a_2) < 0$ .

El espacio fase del sistema de la Ec. (2.13) se presenta en la Figura 2.14, donde se graficaron los dos ciclos límite, de rojo el ciclo límite inestable y de verde el estable.

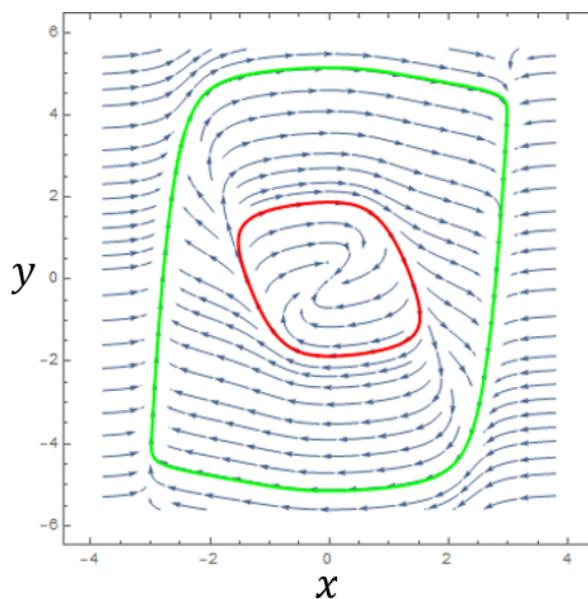


Figura 2.14: Espacio fase del sistema Ec. (2.13). De rojo se graficó el ciclo límite inestable y de verde el estable.

**Teorema 2.10.4.** [50] *Teorema de Lins, de Melo y Pugh.* El sistema de Liénard (2.7) con  $g(x) = x$  y  $F(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , y  $a_1a_3 < 0$ , posee exactamente un ciclo límite. Este será estable si  $a_1 < 0$  e inestable si  $a_1 > 0$ .

La demostración del teorema 2.10.4 se encuentra en [50].

Dos sistemas de Liénard que cumple con las condiciones del teorema 2.10.4 son las Ecs. (2.14) y (2.15).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 0.5(2x + 2x^2 - x^3), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{2.14}$$

el sistema Ec. (2.14) posee un ciclo límite inestable, ya que  $a_1 > 0$ , como se muestra en la Figura 2.15.

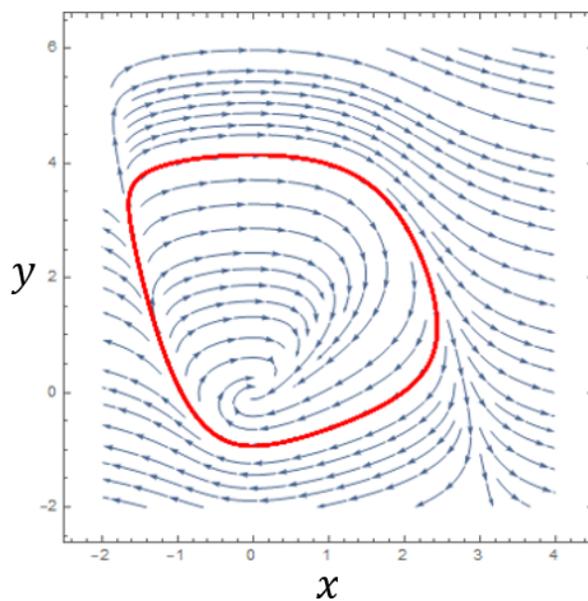


Figura 2.15: Espacio fase del sistema Ec. (2.14), con un ciclo límite inestable.

Cambiando los signos de  $a_1$  y  $a_3$  se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 0.5(-2x + 2x^2 + x^3), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{2.15}$$

este sistema tiene un ciclo límite estable, ilustrado en la Figura 2.16.

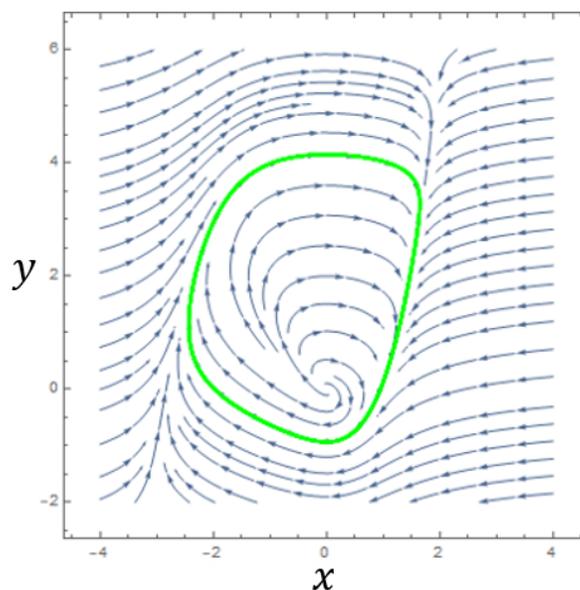


Figura 2.16: Espacio fase del sistema Ec. (2.15), con un ciclo límite estable.

El teorema 2.10.4 es el primer teorema de los presentados en este trabajo que establece que  $F(x)$  debe ser una función polinomial. Los teoremas anteriores a 2.10.4 en esta sección permiten que  $F(x)$  sea cualquier función que cumpla con las condiciones especificadas.

**Teorema 2.10.5.** [50] *El teorema de Blows y Lloyd.* El sistema de Liénard Ec. (2.7), con  $g(x) = x$  y  $F(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2m+1}x^{2m+1}$ , tiene a lo sumo  $m$  ciclos límites locales y existen coeficientes con  $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2m+1}$ , alternando en signo, tal que el sistema Ec. (2.7)  $m$  ciclos límites locales.

El teorema 2.10.5, es tal que nos da el primer indicio de como son las funciones (al menos las polinomiales)  $F(x)$ , para que se presenten ciclos límite, no se presenta un ejemplo de este teorema pues la siguiente sección y el trabajo realizado, comienza con un uso directo de este teorema y del teorema siguiente 2.10.6.

**Teorema 2.10.6.** [50] *El teorema de Perko* Para un valor de  $\epsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, el sistema de Liénard Ec. (2.7) con  $g(x) = x$  y  $F(x) = \epsilon(a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2m+1}x^{2m+1})$  tiene a lo sumo  $m$  ciclos límites. Además, para un valor de  $\epsilon \neq 0$  lo suficientemente pequeño, el sistema tiene exactamente  $m$  ciclos límites que se aproximan asintóticamente, a círculos con radio  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , centrados en el origen, conforme  $\epsilon \rightarrow 0$  si y solo si la ecuación polinomial de grado  $m$

$$\sum_{i=0}^m \binom{2i+2}{i+1} \frac{a_{2i+1}}{2^{2i+1}} \rho^i = 0,$$

posee  $m$  raíces positivas  $\rho_i = r_i^2$ , con  $i = 1, 2, \dots, m$ .

La siguiente sección comienza presentando una manera de construir sistemas del tipo Ec. (2.7), aprovechando el teorema 2.10.5 y 2.10.6

La demostración de los teoremas 2.10.5 y 2.10.6 se presentan en [50].

---

# Capítulo 3

## Contando ciclos límite

---

En este capítulo se explorará la construcción y análisis de ciclos límite en sistemas de Liénard utilizando dos de los teoremas detallados en la sección anterior; el teorema 2.10.6 de Perko y el teorema 2.10.5 de Blows y Lloyd.

Estos teoremas proporcionan las herramientas para diseñar sistemas dinámicos polinomiales con un número específico de ciclos límite, permitiendo así un estudio detallado de sus propiedades y comportamiento.

El capítulo se divide en varias secciones, comenzando con la construcción de ciclos límite en sistemas polinomiales. Aquí, se aplica el teorema 2.10.5 de Blows y Lloyd para definir polinomios de grado  $2m + 1$ , y el teorema 2.10.6 de Perko para ajustar los coeficientes de manera que se generen los ciclos límite deseados. Se presentan ejemplos específicos para ilustrar el proceso de construcción de sistemas con uno, dos, tres y hasta cinco ciclos límite, y se discuten las características de estos ciclos en el espacio fase.

En la sección siguiente, se introduce la función  $\Phi(x)$  como una herramienta para estudiar los ciclos límite, mostrando cómo se relaciona con los polinomios utilizados y cómo se puede utilizar para generar ciclos límite. Se detallan métodos para contar y analizar estos ciclos utilizando funciones de Lyapunov.

El capítulo también aborda la construcción de ciclos límite en sistemas polinomiales asimétricos y demuestra que los ciclos límite pueden generarse incluso en funciones que no son continuas o derivables en todos sus puntos críticos. Se exploran ejemplos con

funciones definidas a trozos, funciones de Bessel, polinomios de Chebyshev y de Zernike, así como series geométricas con funciones trigonométricas.

Finalmente, se discute la aplicación de estos métodos a funciones que no son derivables alrededor de sus puntos críticos, presentando hipótesis y ejemplos numéricos que sugieren la existencia de ciclos límite en estos casos.

### SECCIÓN 3.1

## Construcción de ciclos límites polinomiales usando el teorema 2.10.5 de Blows y Lloyd y el teorema 2.10.6 de Perko

Los teoremas de Perko y de Blows y Lloyd facilitan la construcción de sistemas de Liénard

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $F(x)$  es un polinomio de grado  $2m + 1$  el teorema 2.10.5 de Blows y Lloyd, nos asegura que existe alguna configuración de los coeficientes de dicho polinomio que puede generar  $m$  ciclos límites en el espacio fase del sistema Ec. (3.1).

Utilizando el teorema 2.10.6 de Perko, se puede construir tal polinomio con  $m$  ciclos límites.

El método comienza definiendo manualmente un polinomio sobre  $\rho$  asegurándose que tenga  $m$  raíces positivas, e igualar este a la Ec. (2.10.6), y luego despejar  $a_{2i+1}$ , con  $i = 0, 1, 2, \dots, m$  para formar  $F(x)$ .

Este método solo obtiene los coeficientes impares de  $F(x)$ , que son los necesarios para generar  $m$  ciclos límites en el espacio fase del sistema Ec. (3.1), según el teorema 2.10.5 de Blows y Lloyd.

Lo anterior se puede resumir apoyándose de la Ec. (3.2) donde se define manualmente el polinomio del lado derecho (los coeficientes  $b_m$  se fijan a mano) y se despejan los coeficientes  $a_{2i+1}$

$$\sum_{i=0}^m \binom{2i+2}{i+1} \frac{a_{2i+1}}{2^{2i+1}} \rho^i = \sum_{i=0}^m b_i \rho^i, \quad (3.2)$$

en lo que sigue del trabajo, al referirse al polinomio fijado a mano, el lado derecho de la Ec. (3.2), se le llamara  $P_m[\rho]$ , donde  $m$  es el grado del polinomio.

Se explorarán varios ejemplos de sistemas Ec. (3.1) con tantos ciclos límites como deseemos construir.

### 3.1.1 Un ciclo límite

Para construir un sistema con un único ciclo límite, se fija un polinomio de grado 1.

En este caso, el polinomio a usar es  $-2 + \rho$ , que tiene un cero en  $\rho = 2$ . De la Ec. (3.2) se obtiene  $P_1[\rho] = \frac{a_1}{2} + \frac{3a_3\rho}{8}$ . Igualando y despejando los términos se halla que  $a_1 = -4$  y  $a_3 = \frac{8}{3}$ , resultando en que  $F(x) = -4x + \frac{8x^3}{3}$ .

Por lo que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \left( -4x + \frac{8x^3}{3} \right), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \quad (3.3)$$

tiene 1 ciclo límite en su espacio fase Figura 3.1.

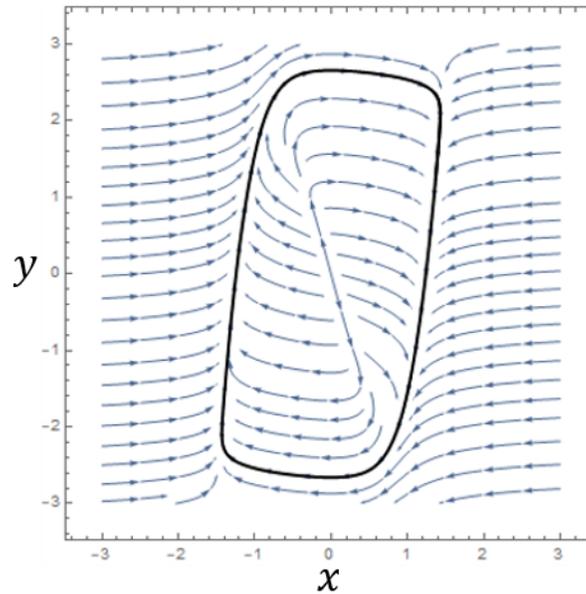


Figura 3.1: Espacio fase de la Ec. (3.3) con un único ciclo límite estable graficado de negro.

### 3.1.2 Dos ciclos límite.

Se comienza fijando  $P_2[\rho]$  en Ec. (3.2), obteniendo

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3\rho}{8} + \frac{5a_5\rho^2}{16} = 20.25 - 11.5\rho + \rho^2 = P_2[\rho],$$

de donde  $a_1 = 40.5$ ,  $a_3 = -30$ ,  $a_5 = \frac{16}{5}$ . Por lo tanto, se obtiene  $F(x) = 40.5x - 30x^3 + \frac{16}{5}x^5$ , teniendo así el sistema de Liénard

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \left(40.5x - 30x^3 + \frac{16}{5}x^5\right), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{3.4}$$

en la Figura 3.2 se muestra el espacio fase del sistema Ec. (3.4). Un ciclo límite inestable se gráfico de rojo y uno estable de verde.

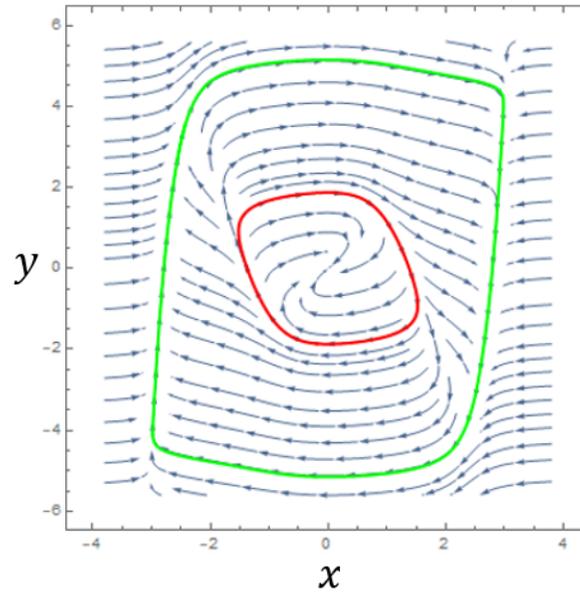


Figura 3.2: Espacio fase de la Ec. (3.4) con dos ciclos límites; el primero es estable (verde) y el segundo inestable (rojo).

### 3.1.3 Tres ciclos límite.

El lado derecho en la Ec. (3.5) se fija y se iguala para determinar los coeficientes de  $F(x)$ .

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3\rho}{8} + \frac{5a_5\rho^2}{16} + \frac{35a_7\rho^3}{128} = -36 + 49\rho - 14\rho^2 + \rho^3 = P_3[\rho], \quad (3.5)$$

se despejan los coeficientes  $a_1 = -72$ ,  $a_3 = \frac{392}{3}$ ,  $a_5 = -\frac{224}{5}$ , y  $a_7 = \frac{128}{35}$  y se forma el sistema de Liénard

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \left(-72x + \frac{392}{3}x^3 - \frac{224}{5}x^5 + \frac{128}{35}x^7\right), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \quad (3.6)$$

en la Figura 3.3, se muestra el espacio fase del sistema, resaltando los tres ciclos límites: uno estable y los otros dos inestables.

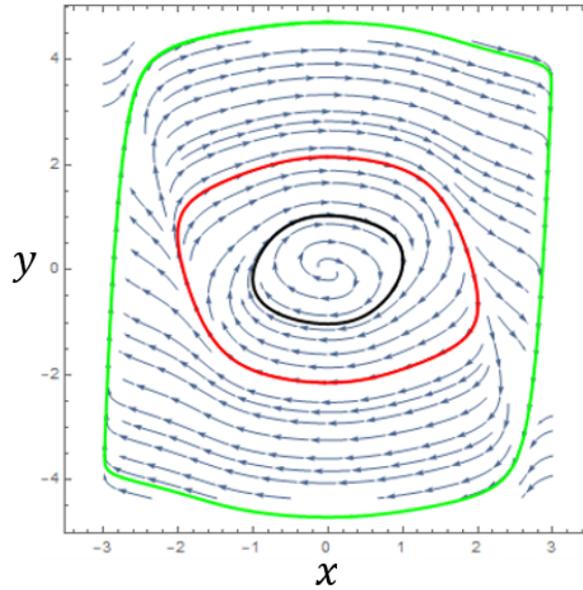


Figura 3.3: Espacio fase del sistema Ec. (3.6) con tres ciclos límites: el primero es estable y los restantes alternan en estabilidad.

### 3.1.4 Cinco ciclos límite.

El lado derecho en la Ec. (3.7) se fija y se iguala para determinar los coeficientes de  $F(x)$

$$\begin{aligned}
 & -2.41865 + 13.4038\rho - 24.96\rho^2 + 20.2905\rho^3 - 7.42\rho^4 + \rho^5 \\
 &= \frac{a_1}{2} + \frac{3a_3\rho}{8} + \frac{5a_5\rho^2}{16} + \frac{35a_7\rho^3}{128} + \frac{63a_9\rho^4}{256} + \frac{231a_{11}\rho^5}{1024} = P_5[\rho],
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

obteniendo los coeficientes:  $a_1 = -4.83729$ ,  $a_3 = 35.7435$ ,  $a_5 = -79.872$ ,  $a_7 = 74.2053$ ,  $a_9 = -30.1511$ , y  $a_{11} = \frac{1024}{231}$  y se forma el sistema de Liénard

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y - \epsilon(-4.83729x + 35.7435x^3 - 79.872x^5 \\
 &+ 74.2053x^7 - 30.1511x^9 + \frac{1024}{231}x^{11}), \\
 \dot{y} &= -x,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

en la Figura 3.4, se muestra el espacio fase del sistema, resaltando los cinco ciclos límites; el primero estable, el resto alterna su estabilidad.

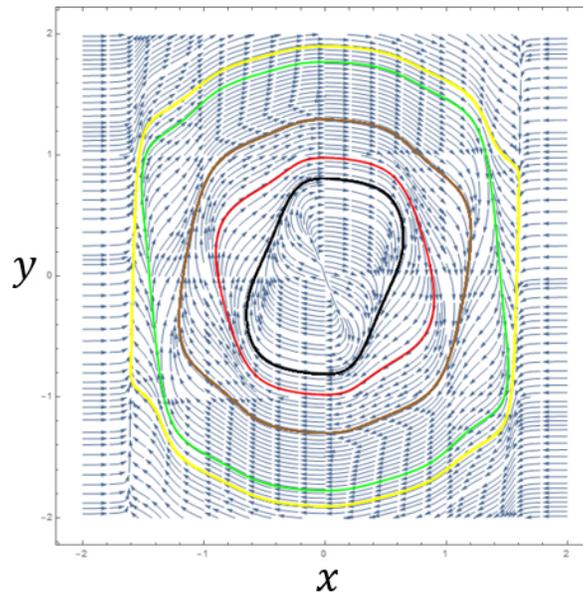


Figura 3.4: Espacio fase del sistema Ec. (3.8) con cinco ciclos límites, donde el primero es estable y los demás alternan en estabilidad.

Este enfoque es un método efectivo para generar y visualizar funciones polinomiales  $F(x)$  con múltiples ciclos límite, tantos como necesitemos, demostrando la capacidad de replicar el método para un número arbitrario de ciclos límite.

### SECCIÓN 3.2

## La función $\Phi(x)$

Los teoremas presentados en la sección 2.10 dicen que los ciclos límites aparecen cuando la función  $F(x)$  se anula. Esta observación introduce la posibilidad de estudiar los ciclos límites mediante una función  $\Phi(x)$ , cuya relación con  $F(x)$  es

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = F(x), \quad (3.9)$$

reescribiendo el sistema de Liénard Ec (3.1), usando la relación de la Ec. (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \frac{d\Phi(x)}{dx}, \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}\tag{3.10}$$

así, la EDO original Ec. (2.6) queda de la forma

$$\ddot{x} + \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}\dot{x} + x = 0.$$

La representación a través de  $\Phi(x)$  ofrece una perspectiva más intuitiva y fundamenta un método alternativo para construir sistemas que pueden albergar tantos ciclos límite como se necesiten, facilitando su representación gráfica, pues se conoce la posición de los ciclos límites en el eje  $x$  del espacio fase.

Se ha logrado un resultado, el cual es un avance significativo que permite contar de manera precisa los ciclos límites en el sistema de Liénard descrito por la Ec. (3.10), sin requerir que  $\Phi(x)$  sea continua, al menos numéricamente. Antes de presentar este resultado y explorar ejemplos de dicho resultado, se deben presentar varias consideraciones previas.

### SECCIÓN 3.3

## Funciones de Lyapunov para analizar los ciclos límite

Las referencias [53] y [54] proporcionan una metodología extendida sobre el uso de las funciones de Lyapunov para determinar regiones dentro y fuera de los ciclos límite, Figura 3.5, y caracterizarlos según su estabilidad.

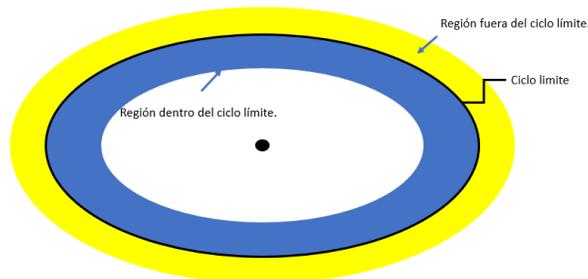


Figura 3.5: Dibujo representativo de las regiones delimitadas por un ciclo límite.

En [53] se aclara que la función  $V(x, y)$ , que describe los ciclos límites de un sistema, no necesariamente es una función de Lyapunov. De hecho, se menciona que cualquier función cuyas primeras y segundas derivadas respecto al parámetro  $t$  sean cero en el ciclo límite puede ser adecuada. El análisis en [54] concluye que dichas funciones son de Lyapunov.

El cómo se determinan los ciclos límites se basa en el análisis de las derivadas respecto al parámetro  $t$  de  $V(x, y)$ , y los valores que estas adoptan al evaluarse dentro, fuera o sobre el ciclo límite.

El artículo [53], afirma que; sea  $L$  un ciclo límite en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Se pueden distinguir cuatro tipos de ciclos límite y estos están completamente caracterizados por la primera y segunda derivada respecto al parámetro  $t$  de una función de Lyapunov, la cual se usa según el problema a estudiar.

La derivada de la función  $V(x, y)$  respecto al parámetro  $t$  es  $\dot{V}$ , esto es,  $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ .

**Definición 3.3.1.** [53] *Un ciclo límite  $L$  es **estable** sí y solo sí:*

- $\dot{V}(x, y) > 0$  y  $\ddot{V}(x, y) < 0$  en una vecindad dentro del ciclo límite.
- $\dot{V}(x, y) < 0$  y  $\ddot{V}(x, y) > 0$  en una vecindad fuera del ciclo límite.
- $\dot{V}(x, y) = 0$  y  $\ddot{V}(x, y) = 0$  sobre el ciclo límite.

**Definición 3.3.2.** [53] *Un ciclo límite  $L$  es **inestable** sí y solo sí:*

- $\dot{V}(x, y) < 0$  y  $\ddot{V}(x, y) < 0$  en una vecindad dentro del ciclo límite.
- $\dot{V}(x, y) > 0$  y  $\ddot{V}(x, y) > 0$  en una vecindad fuera del ciclo límite.
- $\dot{V}(x, y) = 0$  y  $\ddot{V}(x, y) = 0$  sobre el ciclo límite.

La Figura 2.16, de la sección 2.10, ilustra un ejemplo de un ciclo límite estable y la Figura 2.15 uno inestable.

Los ciclos límite semiestables pueden ser de dos tipos, dependiendo de si las trayectorias fuera de ellos convergen hacia el ciclo conforme  $t \rightarrow \infty$  o divergen de él.

**Definición 3.3.3.** [53] *Un ciclo límite es **semiestable tipo 1** si:*

- $\dot{V}(x, y) < 0$  y  $\ddot{V}(x, y) < 0$  en una vecindad dentro del ciclo límite.

- $\dot{V}(x, y) < 0$  y  $\ddot{V}(x, y) > 0$  en una vecindad fuera del ciclo límite.
- $\dot{V}(x, y) = 0$  y  $\ddot{V}(x, y) = 0$  sobre el ciclo límite.

**Definición 3.3.4.** [53] Un ciclo límite se llama **semiestable tipo 2** si:

- $\dot{V}(x, y) > 0$  y  $\ddot{V}(x, y) < 0$  en una vecindad dentro del ciclo límite.
- $\dot{V}(x, y) > 0$  y  $\ddot{V}(x, y) > 0$  en una vecindad fuera del ciclo límite.
- $\dot{V}(x, y) = 0$  y  $\ddot{V}(x, y) = 0$  sobre el ciclo límite.

Aunque en este trabajo no se logró construir ni encontrar en la literatura revisada un sistema de Liénard con ciclos límites semiestables, la inclusión de esta categoría es relevante para la teoría general, ejemplos de este tipo de ciclos se encuentren en las figuras 2.5 y 2.6.

La demostración de estos resultados y una discusión más a fondo está dada en [53].

#### SECCIÓN 3.4

### El resultado más importante

Durante esta investigación se han obtenido varios resultados significativos, los cuales se consolidan en una sola hipótesis fundamental, la cual lamentablemente no pudo ser demostrada, pero se presentan muchos ejemplos numéricos que respaldan lo posteriormente presentado.

Además de que se presenta el intento de demostración realizado y sus limitaciones, el sistema de Lienard que se usara en lo que resta del trabajo es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \frac{d\Phi(x)}{dx}, \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{3.11}$$

**Hipótesis 1.** *Considérese  $\Phi : W \subset \mathbb{R} \rightarrow V \subset \mathbf{R}$  una función con un punto crítico en el origen, que presenta  $2m$  puntos críticos además del que tiene en el origen, a*

*pares, esto es que si el primer punto crítico a la derecha del origen es un máximo, el correspondiente a la izquierda también lo será, y análogamente para los demás puntos.*

*Bajo estas condiciones, el sistema de Liénard descrito en la Ec. (3.11) poseerá  $m$  ciclos límites.*

*Más aún, la ubicación de estos ciclos límite en el eje  $x$  del espacio fase coincide con la de los puntos críticos de  $\Phi(x)$ . Además, cada máximo en  $\Phi(x)$  corresponde a un ciclo límite inestable en el espacio fase, mientras que cada mínimo corresponde a un ciclo límite estable.*

Como ya se mencionó anteriormente, no se logró demostrar la hipótesis 1, pero se logró probar que los ciclos límites del sistema Ec. (3.11) se ubican, al menos, en el eje  $x$ , en la misma ubicación que los puntos críticos de la función  $\Phi(x)$ .

La demostración requiere que primero encontremos una función de Lyapunov que funcione para cualquier sistema de Liénard, una vez que tengamos esta función, la explicación posterior se basa en lo visto en la sección 3.3, usando únicamente los signos que tienen la primera y segunda derivada de la función de Lyapunov  $V(x, y)$  respecto al parámetro  $t$ ,  $\dot{V}(x, y) = \frac{dV(x, y)}{dt}$  y  $\ddot{V}(x, y) = \frac{d^2V(x, y)}{dt^2}$ .

Este resultado difiere de otros en la literatura, ya que no establece una cota superior para la cantidad de ciclos límite que puede tener un sistema con ciertas características, sino que determina que los máximos y mínimos de  $\Phi(x)$  proporcionan información completa sobre los ciclos límite del sistema de Liénard de la Ec. (3.11), incluyendo su cantidad y dinámica.

Esta hipótesis es aplicable no solo a sistemas polinomiales, sino también a sistemas que involucren funciones trigonométricas, funciones definidas a trozos, o funciones no diferenciables en todo el dominio ni alrededor de sus puntos críticos.

### **3.4.1** Construyendo la función de Lyapunov

Como ya se mencionó, se comienza con la identificación de una función de Lyapunov para el sistema de la Ec. (3.11).

La construcción de funciones candidatas de Lyapunov es crucial para analizar la estabilidad de los ciclos límite en sistemas dinámicos. Estas funciones no son únicas y se seleccionan en función de su utilidad para un problema específico.

Se aplicará el método de Lagrange-Charpit, descrito en [55], que implica resolver una

ecuación diferencial parcial.

Este método se basa en la EDO

$$\ddot{x} + \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}\dot{x} + x = 0, \quad (3.12)$$

con el objetivo de encontrar una función  $V(x, y)$  que cumpla con una ecuación diferencial parcial específica, dada por

$$F(x, y, V, P_1, P_2) = P^T h(x, y) = P_1\dot{x} + P_2\dot{y} = 0, \quad (3.13)$$

donde  $P_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$ , y  $h(x, y)$  se encuentran al reescribir la Ec. (3.12) en forma de un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}y - x \end{pmatrix}.$$

El método consiste en formular la ecuación característica de la ecuación diferencial parcial y establecer un conjunto de ecuaciones  $Z_i(x, y, P_1, P_2) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , que permitan expresar  $P_1$  y  $P_2$  en términos de  $x$  y  $y$ .

Si estas ecuaciones permiten una resolución directa para  $P_1$  y  $P_2$ , entonces la función candidata de Lyapunov estará dada por

$$V(x, y) = \int_0^x P_1(t) dt + \int_0^y P_2(t) dt.$$

Este método requiere de la ecuación característica:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-\Phi''(x)y - x} = \frac{dP_1}{(\Phi'''(x)y + 1)P_2} = \frac{dP_2}{(\Phi''(x))P_2 - P_1},$$

ahora, con las partes de abajo de la ecuación se construyen las ecuaciones  $Z_i$ ,  $i = 1, 2$ .  $Z_1$  se construye tomando la parte de abajo de  $dx$  y la parte de abajo de  $dP_1$  multiplicada por  $\frac{-1}{(\Phi'''(x)y+1)}$  se obtiene

$$Z_1 \equiv y - P_2 = 0,$$

$Z_2$  se construye tomando la parte de abajo de  $dy$  y de  $dP_2$ , obteniendo

$$Z_2 \equiv (\Phi''(x))P_2 - P_1 - \Phi''(x)y - x = 0,$$

de  $Z_1$ , se obtiene que  $P_2(y) = y$ . Al sustituir en  $Z_2$  se obtiene que  $P_1(x) = x$ .

Entonces  $V(x, y)$  es

$$V(x, y) = \int_0^x t dt + \int_0^y t dt = \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (3.14)$$

Este es uno de los muchos métodos que al día de hoy se usan para conseguir funciones candidatas de Lyapunov. De hecho, en el método de Lagrange-Charpit se considera una función  $\gamma(x)$  arbitraria y por simplicidad se ha tomado que esta es idénticamente 0. Para más desarrollo y ver cómo se consiguen las funciones de Lyapunov que dependen de esta  $\gamma(x)$ , consultar [55].

Aun así, este no es el único método que existe, y pese a que todos los métodos son distintos y suponen cosas muy diferentes, en sus construcciones siempre llegan a la función  $V(x, y) = \frac{\int_0^x g(\tau) d\tau + y^2}{2}$ , para un sistema de Liénard, la cual es la función de Lyapunov que por default se toma en la literatura, al menos en la estudiada para este trabajo, cuando se analiza un sistema de Liénard.

En el sistema de Liénard Ec. (3.11),  $g(x) = x$ , así la función candidata a usar para este trabajo es  $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ .

### 3.4.2 Función de Lyapunov

Para verificar que  $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$  es una función de Lyapunov se utiliza el teorema 2.8.2.

Como  $V(x, y)$  es suma de cuadrados, es positiva en todo el espacio  $\mathbb{R}^2$  y además  $V(0, 0) = 0$ .

Para la última parte del teorema 2.8.2 se necesita calcular  $\dot{V}(x, y)$ ,

$$\dot{V}(x, y) = \frac{dV(x, y)}{dt} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \dot{y}, \quad (3.15)$$

al utilizar el sistema de Liénard Ec. (3.11), en Ec. (3.15), se obtiene

$$\dot{V}(x, y) = x(y - \Phi'(x)) + y(-x) = -x\Phi'(x). \quad (3.16)$$

Para encontrar el dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  depende de la forma que  $\Phi(x)$  tenga. Pues se quiere mostrar que los ciclos límites dependen de la ubicación de los máximos y mínimos de  $\Phi(x)$ .

Para el caso con  $\Phi(x)$  teniendo un mínimo en el origen y un par de máximos: uno a la derecha del origen  $x = a$  y otro a la izquierda  $x = b$ . En  $b < x < 0$ ,  $\Phi'(x) < 0$  y  $\dot{V}(x, y) < 0$ , en  $0 < x < a$ ,  $\Phi'(x) > 0$  y  $\dot{V}(x, y) < 0$ . En el caso de  $\Phi(x)$  con un mínimo en el origen y un par de máximos,  $D = \{(x, y) | x \in (b, a)\}$ .

Para el caso con  $\Phi(x)$  teniendo un máximo en el origen y un par de mínimos: uno a la derecha del origen  $x = a$  y otro a la izquierda  $x = b$ . En  $-\infty < x < b$ ,  $\Phi'(x) < 0$  y  $\dot{V}(x, y) < 0$ , en  $a < x < \infty$ ,  $\Phi'(x) > 0$  y  $\dot{V}(x, y) < 0$ . En el caso de  $\Phi(x)$  con un máximo en el origen y un par de mínimos,  $D = \{(x, y) | x \in (infy, \infty) \setminus \{(b, a) \setminus 0\}\}$ .

Noté que en ambos casos  $D$  incluye al origen, como lo pide el teorema 2.8.2. Por lo que se concluye que la función Ec. (3.17) es de Lyapunov.

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (3.17)$$

### 3.4.3 Caracterización de los ciclos límite en el eje $x$ .

Como ya se mencionó, se intentó demostrar la hipótesis 1 para todo el espacio  $\mathbb{R}^2$ , pero solo se logró caracterizar las ubicaciones en el eje  $x$ .

Para este análisis se necesitan las primeras dos derivadas de la Ec. (3.17), respecto al parámetro  $t$ , la primera  $\dot{V}(x, y)$  se puede observar en (3.16), y  $\ddot{V}(x, y)$  es

$$\ddot{V}(x, y) = \frac{d\dot{V}(x, y)}{dt} = \frac{d}{dt}(-x\Phi'(x)) = -\left(\frac{dx}{dt}\Phi'(x) + x\frac{d}{dt}\Phi'(x)\right),$$

simplificando, sustituyendo y aplicando la regla de la cadena en  $\frac{d}{dt}\Phi'(x) = \Phi''(x)(y - \Phi'(x))$ , se obtiene

$$\ddot{V}(x, y) = -((y - \Phi'(x))(\Phi'(x) + x\Phi''(x))), \quad (3.18)$$

note que  $\dot{V}(x, y) = -x\Phi'(x)$  no depende de la variable  $y$ , es ahí donde se encuentra la limitación de este trabajo para caracterizar los ciclos límites en todo el espacio, y aunque la Ec. (3.18) si depende de  $y$ , no nos ayuda a caracterizar el espacio fase, como una acotación esto se debe a que  $V(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$  son trayectorias circulares y los ciclos límite aquí evaluados no son en general trayectorias circulares. Pero estas trayectorias circulares tienen la misma amplitud en el eje  $x$ , que los ciclos límites estudiados en el presente trabajo.

Como solo evaluaremos en el eje  $x$ , se analizarán únicamente  $\dot{V}(x, 0)$  y  $\ddot{V}(x, 0)$ . Y basándose en la sección 3.3, se caracteriza el ciclo límite según los signos de  $\dot{V}(x, 0)$  y  $\ddot{V}(x, 0)$ .

Evaluaremos el caso con  $\Phi(x)$  teniendo un mínimo en el origen y un par de máximos: uno a la derecha del origen  $x = a$  y otro a la izquierda  $x = b$  (el análisis teniendo un máximo en el origen y un par de mínimos es completamente análogo).

Como  $\Phi(x)$  tiene un máximo en  $a$  (el análisis para  $b$  es análogo),  $\Phi'(a) = 0$ , así:

$$\begin{aligned} \dot{V}(a, 0) &= -(a) \cdot 0 = 0, \\ \ddot{V}(a, 0) &= -(0 - 0)(0 + a\Phi''(a)) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, el sistema (3.11), tiene un ciclo límite que pasa por  $x = b$  y  $x = a$ . Hace falta verificar qué dinámica tiene este ciclo.

Para ello, veamos qué signos tienen las funciones  $\dot{V}$  y  $\ddot{V}$  en el caso a evaluar basándose en la hipótesis 1, debería ser inestable.

Para  $\dot{V}$  en la región  $b < x < 0$ , dentro del ciclo límite,  $\Phi'(x) < 0$ ,  $\dot{V} < 0$ , en la región  $0 < x < a$ ,  $\Phi'(x) < 0$ ,  $\dot{V} < 0$ . Por lo que en la región dentro del ciclo límite  $\dot{V} < 0$ .

Por fuera del ciclo límite  $\dot{V}(x, 0)$  en la región  $-\infty < x < b$ ,  $\Phi'(x) > 0$ ,  $d\dot{V} > 0$ , en la región  $-\infty < x < b$ ,  $\Phi'(x) > 0$ ,  $\dot{V} > 0$ . Por lo que en la región fuera del ciclo límite  $\dot{V} > 0$ .

En la Figura 3.6, se observa mediante la línea punteada negra la forma de  $\Phi(x)$ , la línea punteada roja representa un ciclo límite inestable y se observa el signo que tiene en general  $\Phi(x)$ .

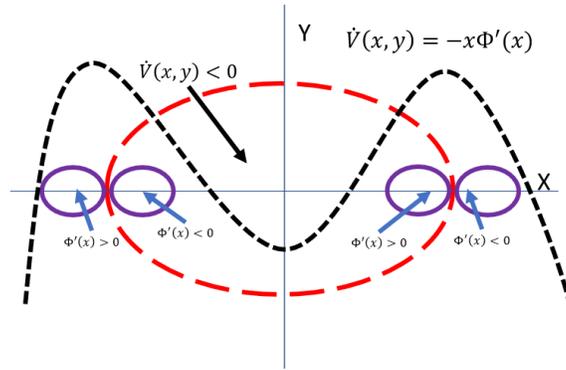


Figura 3.6: Diagrama representando los signos y análisis de  $\dot{V}$  en un ciclo límite inestable.

En la Figura 3.7 se observa exactamente lo mismo, pero en el caso de un ciclo límite estable.

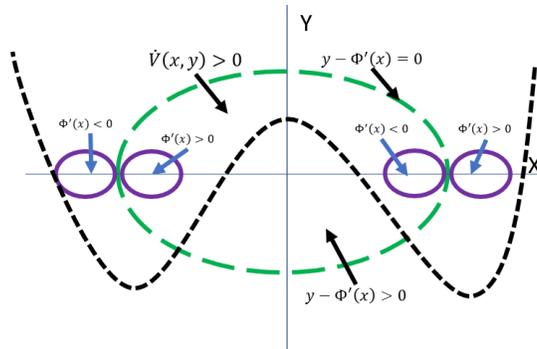


Figura 3.7: Diagrama representando los signos y análisis de  $\dot{V}$  en un ciclo límite estable.

Para los signos de  $\ddot{V}(x, 0) = (\Phi'(x))^2 + x\Phi'(x)\Phi''(x)$ , se analizarán de manera local en una vecindad de los máximos  $x = b$  y  $x = a$ , alrededor de esa vecindad  $(\Phi'(x))^2 \approx 0$ , por lo que  $\dot{V}(x, 0) = x\Phi'(x)\Phi''(x)$ , en la Figura 3.8, se observa lo mismo que en la Figura 3.6, pero en esta se observa el signo de  $\Phi''(x)$  alrededor de los máximos

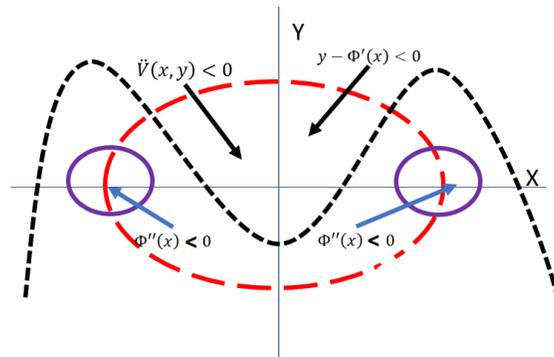


Figura 3.8: Diagrama representando los signos y análisis de  $\ddot{V}$  en un ciclo límite inestable.

En la Figura 3.9, se observa lo mismo, pero para un ciclo límite estable.

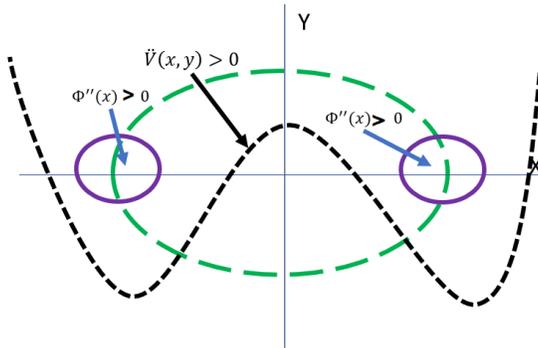


Figura 3.9: Diagrama representando los signos y análisis de  $\ddot{V}$  en un ciclo límite estable.

Alrededor de los máximos  $x = a$  y  $x = b$ ,  $\Phi''(x) < 0$  ( $\Phi''(x) > 0$  si fuesen mínimos), por lo que el análisis queda con caracterizar el signo de  $x\Phi'(x)$ , que tendrá el signo opuesto de  $\dot{V}(x, y) = -x\Phi'(x)$ , pero como la parte de  $\Phi''(x)$  es negativa actúa como un signo negativo, por lo cual, alrededor de los máximos  $x = a$  y  $x = b$ ,  $\ddot{V}(x, 0)$  y  $\dot{V}(x, 0)$  tendrán el mismo signo.

Por lo que dentro del ciclo límite  $\dot{V}(x, 0) < 0$  y  $\ddot{V}(x, 0) < 0$  y por fuera del ciclo límite  $\dot{V}(x, 0) > 0$  y  $\ddot{V}(x, 0) > 0$ .

El análisis de un ciclo límite estable es completamente análogo.

Por lo que, según lo estudiado en la sección 3.3, en efecto, se tiene un ciclo límite inestable (o estable, según sea el caso, se hace hincapié en que el análisis es completamente análogo).

### 3.4.4 Punto de equilibrio

En un sistema tipo Liénard como en la Ec. (3.11), solo puede haber un único punto de equilibrio en todo el sistema, el origen, ya que:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

el determinante de esta matriz es 1 ( $\text{Det}(A) = 1$ ) y  $\text{Tr}(A) = -\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}$ . Como ya se ha mencionado,  $\Phi$  tiene un punto de estabilidad en el origen, lo que indica que el sistema de la Ec. (3.11) tiene un punto crítico en  $(0,0)$ . Si dicho punto crítico de  $\Phi$  es un máximo, entonces el sistema tendrá un punto de estabilidad repulsor pues  $\text{Tr}(A) > 0$ . Análogamente, si es un mínimo, entonces  $\text{Tr}(A) < 0$  y se tendrá un punto de estabilidad atractor.

#### SECCIÓN 3.5

### Sistemas polinomiales

Aunque ya se conoce desde hace tiempo cuál es la cota superior de un sistema polinomial tipo Liénard, tal como se menciona en [56], vale la pena destacar un enunciado, que en este trabajo se llamará hipótesis 2, del resultado principal que se refiere a los ciclos límite en los sistemas polinomiales.

**Hipótesis 2.** Sea  $\Phi(x)$  un polinomio de grado  $2m+2$ , con  $\frac{d\Phi(x)}{dx} = F(x)$ . Si se cumplen las siguientes condiciones:

- La función es tal que  $F(0) = 0$ , es decir  $\Phi(x)$ , tiene un máximo o un mínimo en el origen,
- Es par, i.e,  $\Phi(x) = \Phi(-x)$ ,
- $\Phi(x)$  tiene  $2m$  máximos y/o mínimos, sin contar el origen,
- $\Phi(x)$  es tal que los signos de los coeficientes del polinomio se alternan,

Entonces, el sistema de Liénard (3.11) tiene  $m$  ciclos límite.

Además, los ciclos límite del espacio fase se ubican en las posiciones de  $x$  donde se encuentran los máximos y mínimos de  $\Phi(x)$ . Aquellos que se ubican en un máximo son ciclos inestables, mientras que los que se ubican en un mínimo son ciclos estables.

Esta hipótesis es muy parecida a la de los resultados que aparecen en la literatura revisada.

Pero con esta hipótesis se puede obtener un nuevo método para construir sistemas polinomiales con los ciclos límite que se deseen.

### 3.5.1 Un nuevo método para construir ciclos límite en sistemas polinomiales

Este método consiste en plantear el grado del polinomio, según la cantidad de ciclos límite deseados. Si se desean  $m$  ciclos, el polinomio es de grado  $2m + 2$

$$\Phi(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2m+2}x^{2m+2},$$

luego, se plantean los  $x_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ , tales que  $F(x_i) = \frac{d\Phi(x_i)}{dx} = 0$ , y se define si estos son máximos o mínimos mediante una última igualdad  $\Phi(x_0) = a$ , lo cual indicará si la función tiende a más o menos infinito conforme  $x$  tiende a infinito. De hecho, esta última igualdad puede ser cualquier número real.

#### Ejemplo de construcción de dos ciclos límite.

Para ejemplificar de manera sencilla el método, se construirá un sistema con dos ciclos límite. Primero, se establece  $m = 2$ , por lo que el grado de  $\Phi(x)$  es 6 obteniendo el sistema de Lienard,

$$\Phi(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6,$$

se desea que aparezca un ciclo límite en  $x_1 = 0.5284323797269$  y otro en  $x_2 = 1.5451297313568$ . Además, se define (mediante  $\Phi(2) = -1$ ) que, cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\Phi(x) \rightarrow -\infty$ . De este modo, el primer punto crítico en el origen será un máximo, seguido por un par de mínimos en  $\pm x_1$  y un par de máximos en  $\pm x_2$ .

El polinomio resultante para  $\Phi(x)$  es

$$\Phi(x) = -2x^2 + 4x^4 - x^6, \quad (3.19)$$

el sistema de Liénard correspondiente es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (-4x + 16x^3 - 6x^5), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \quad (3.20)$$

en la Figura 3.10, se puede observar cómo en la recta  $y = 0$  el primer ciclo límite intersecta en  $x_1 = 0.5284323797269$ , donde está el mínimo de  $\Phi(x)$ , y el segundo ciclo límite intersecta  $x = 0$  en  $x_2 = 1.5451297313568$ , donde está el máximo de  $\Phi(x)$ .

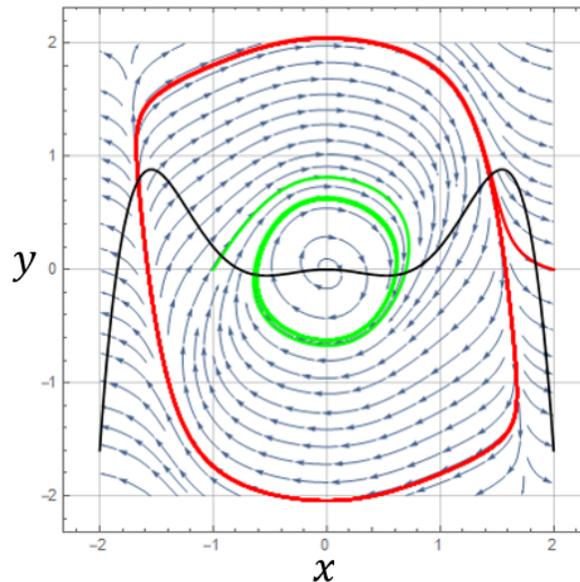


Figura 3.10: Espacio fase de la Ec. (3.20) con dos ciclos límite: de verde el estable y de rojo el inestable. En negro se muestra la gráfica de la Ec. (3.19).

### Seis ciclos límites.

La función  $\Phi(x)$  es

$$\Phi(x) = \frac{31104000x^2}{194391093379} - \frac{3313440x^4}{27770156197} + \frac{846560x^6}{27770156197} - \frac{667095x^8}{194391093379} + \frac{5148x^{10}}{27770156197} - \frac{130x^{12}}{27770156197} + \frac{60x^{14}}{1360737653653}, \quad (3.21)$$

se construyó de manera que tenga máximos en  $\pm 1, 3, 5$  y mínimos en  $\pm 2, 4, 6$ , y que tienda a  $\infty$  conforme  $x$  tiende a  $\infty$ , la parte positiva de  $\Phi(x)$  se observa en la Figura 3.11.

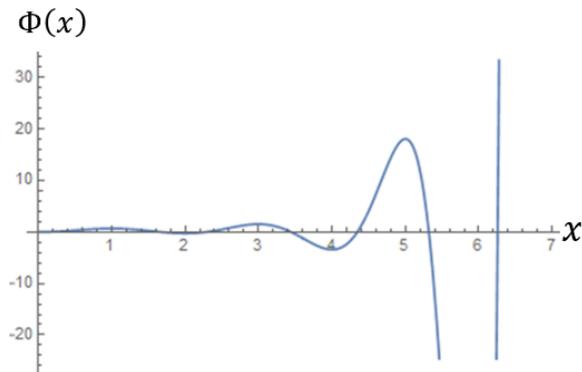


Figura 3.11:  $\Phi(x)$ , se graficó la parte positiva pues la parte negativa es la misma y la prioridad es observar de buena manera sus máximos y mínimos.

El sistema de Liénard correspondiente a la Ec. (3.11) tendrá 6 ciclos límite, siendo el primero inestable y los demás alternándose en estabilidad. El espacio fase, se muestra en la Figura 3.12.

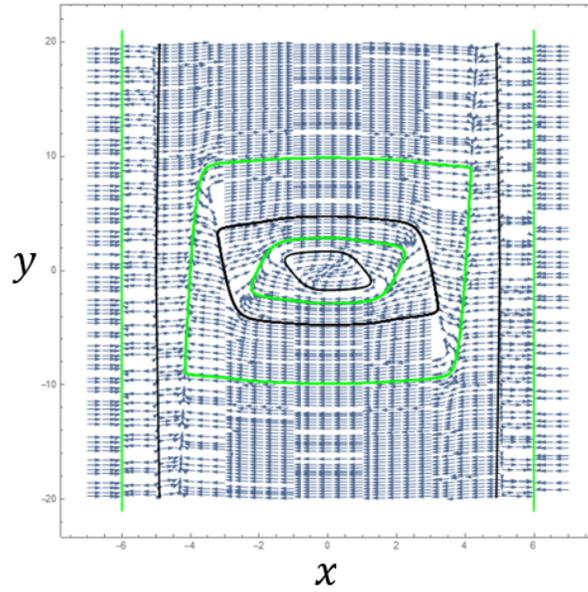


Figura 3.12: Espacio fase del sistema (3.11) usando  $\Phi(x)$  como en Ec. (3.21). De verde se graficaron los ciclos estables y de negro los inestables.

### Siete ciclos límite.

Se construye  $\Phi(x)$  para que los máximos estén en  $\pm 1, 3, 5, 7$  y los mínimos en  $\pm 2, 4, 6$ . La Figura 3.13 muestra la forma de  $\Phi(x)$ , mientras que la Figura 3.14 presenta el espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11), usando  $\Phi(x)$  como se observa en la Figura 3.13.

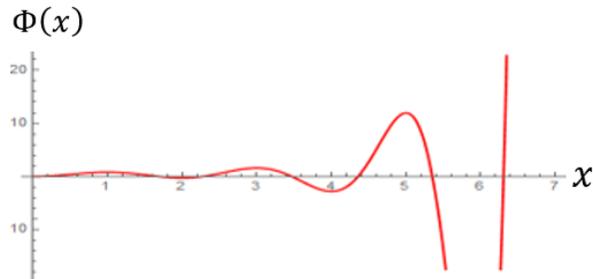


Figura 3.13:  $\Phi(x)$  con 7 puntos críticos en su lado positivo.

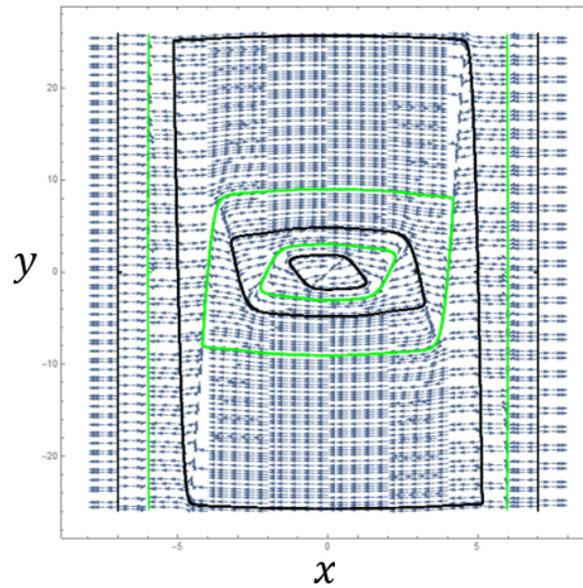


Figura 3.14: Espacio fase del sistema Ec. (3.11), con  $\Phi(x)$  como se observa en la Figura 3.13. De verde se graficaron los ciclos estables y de negro los inestables.

Este método puede generar de manera iterativa tantos ciclos límites como se desee, además de proporcionar un control absoluto sobre su posición en el eje  $x$ . Sin embargo, un problema que surge es que la visualización de todos los ciclos límite no es tan simple debido a la expansión en el eje  $y$ , ya que cada vez se están abriendo más, lo que hace casi imposible visualizarlos todos a la vez. Se cree que hay una relación entre la apertura de los puntos críticos en la función  $\Phi(x)$  y la amplitud de los ciclos límite en el eje  $y$ , pero no se llegó a nada concluyente en este trabajo, aun así en los siguientes casos de estudios se mencionara cuando haya pistas que apunten a este resultado.

### 3.5.2 Ciclos límites asimétricos

Algo a destacar de los ejemplos presentados hasta ahora es que todos los ciclos límite son generados por funciones simétricas, y por lo tanto se espera cierta simetría en su espacio fase. Sin embargo, como ya se ha establecido, la función  $\Phi(x)$  no necesita ser necesariamente simétrica. De hecho, una función  $\Phi(x)$  polinomial cualquiera puede generar tantos ciclos límite como se desee.

Otra hipótesis que nace de la hipótesis 1 tiene que ver con la asimetría de los ciclos límite, se enuncia como sigue:

**Hipótesis 3.** Sea  $\Phi(x)$  un polinomio de grado  $2m + 2$ , con  $\frac{d\Phi(x)}{dx} = F(x)$ , donde se cumplen las siguientes condiciones:

- $F(0) = 0$ , es decir,  $\Phi(x)$  tiene un punto crítico en  $x = 0$ .
- Los coeficientes de grado par alternan sus signos.
- $\Phi(x)$  tiene  $2m$  máximos y mínimos, a pares no necesariamente simétricos, sin contar el origen.

Entonces, el sistema de Liénard (3.11) tiene  $m$  ciclos límite no necesariamente simétricos.

Además, los ciclos límite del espacio fase se ubican en las posiciones donde se encuentran los máximos y mínimos de  $\Phi(x)$ . Aquellos que se ubiquen en un máximo son ciclos inestables, mientras que aquellos que se ubiquen en un mínimo son estables.

### 1 ciclo límite asimétrico

Tomemos, por ejemplo, el polinomio de grado 4

$$\Phi(x) = -4x^2 + 2x^3 + \frac{2x^4}{3}, \quad (3.22)$$

el sistema de la Ec. (3.11) usando  $\Phi(x)$  como en la Ec. (3.22) tendrá un ciclo límite deformado. La gráfica de dicho polinomio se presenta junto al espacio fase del sistema de Liénard (3.11), usando  $\Phi(x)$  como la Ec. (3.22), con un ciclo límite estable, coloreado de negro y superpuesto a la gráfica del polinomio  $\Phi(x)$  Ec. (3.22) se puede observar en la Figura 3.15.

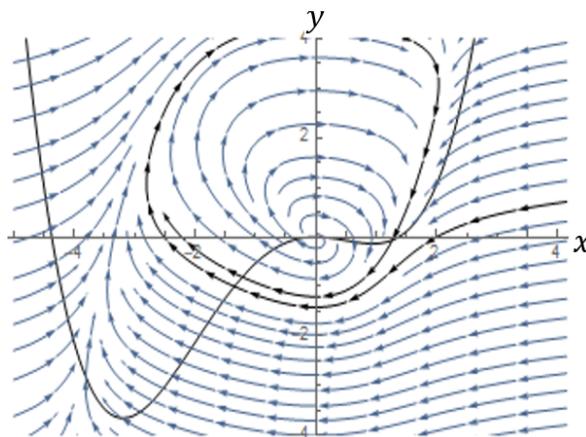


Figura 3.15: Espacio fase del sistema de la Ec. (3.11) con  $\Phi(x) = -4x^2 + 2x^3 + \frac{2x^4}{3}$ .

## 2 ciclos límites asimétricos

Otro ejemplo de la hipótesis 3 es el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 10 \left( \frac{288x}{18475} - \frac{168x^2}{18475} - \frac{156x^3}{18475} + \frac{24x^4}{18475} + \frac{12x^5}{18475} \right), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \quad (3.23)$$

el cual proviene de un polinomio de grado 6, por lo que tendrá 2 ciclos límite, como se puede observar en la Figura 3.16, donde se graficó el espacio fase de la Ec. (3.23) y de negro el  $\Phi(x)$  utilizado en el mismo sistema Ec. (3.23).

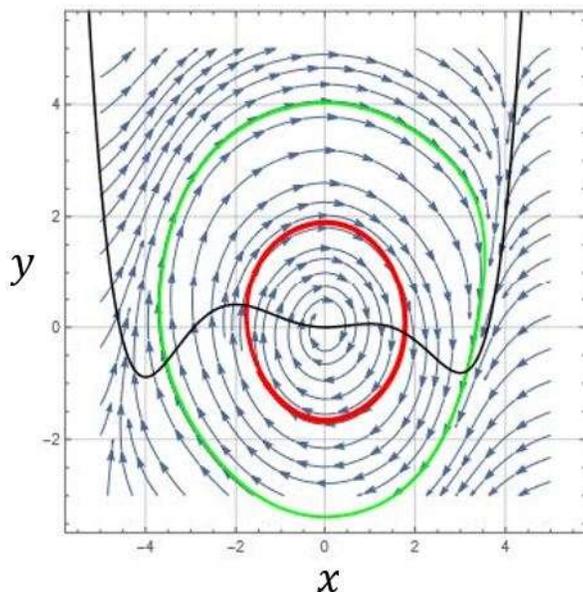


Figura 3.16: Espacio fase de la Ec. (3.23) de verde se gráfico un ciclo límite estable, de rojo uno inestable y de negro el  $\Phi(x)$  usado en el sistema Ec. (3.23).

### 3.5.3 Un resultado general para sistemas polinomiales

Hasta ahora se han considerado polinomios de grado  $2m + 2$  y todos los ejemplos tienen  $m$  ciclos límite, el cual es el número máximo de ciclos límite que pueden tener, pero no necesariamente siempre tienen  $m$  ciclos límite, por lo que deben existir polinomios  $\Phi(x)$  de grado  $2m + 2$  que tengan menos de  $m$  ciclos límite.

La hipótesis para sistemas polinomiales que se desprende de la hipótesis 1 puede formularse de manera general para este tipo de polinomios de la siguiente manera.

**Hipótesis 4.** Si  $\Phi(x)$  es un polinomio de grado  $n$  con  $\frac{d\Phi(x)}{dx} = F(x)$  y tiene:

- Un punto crítico en  $x = 0$ , esto es,  $F(0) = 0$ .
- $2m$  máximos y mínimos en pares, sin necesariamente ser  $n = 2m + 2$  y sin ser necesariamente simétricos, con  $m \leq n$ .

Entonces, el sistema de Liénard (3.11) tiene  $m$  ciclos límites. Además, donde se encuentran los puntos críticos mínimos en  $\Phi(x)$ , estarán los ciclos límite estables en el espacio fase. Análogamente, donde se encuentran los máximos en  $\Phi(x)$ , estarán los ciclos límite inestables en el espacio fase.

Este resultado destaca que lo más importante para la existencia de ciclos límites en un sistema de Liénard son los máximos y mínimos en pares que tiene el polinomio  $\Phi(x)$ .

Un ejemplo de la hipótesis 4 es el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (2x + 4x^3 - 6x^5), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$\Phi(x)$  es un polinomio de grado 6, tiene como máximo 2 ciclos límite, pero como se observa en su espacio fase, Figura 3.17, este solo tiene un ciclo límite.

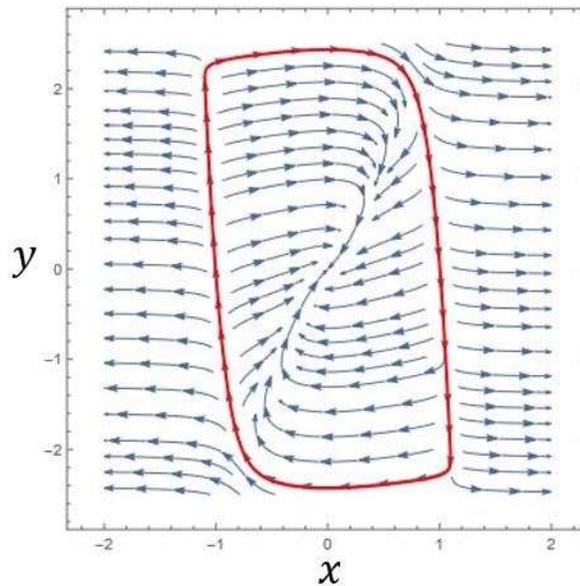


Figura 3.17: Espacio fase de (3.24) de rojo se gráfica un ciclo límite inestable. Se observa cómo, aunque  $\Phi(x)$  sea de grado 6, se tiene un único ciclo límite.

Esto se debe a que la gráfica de  $\Phi(x)$  posee un único par de máximos. Por lo tanto, aunque  $\Phi(x)$  es un polinomio de grado 6 que podría tener hasta 2 ciclos límite, el sistema de Liénard en su espacio fase solo presenta un único ciclo límite.

En esta sección 3.5 se ha mostrado que, en general, en todo sistema de Liénard (3.11) polinomial,  $\Phi(x)$  polinomial, se pueden contar los ciclos límite según los máximos y mínimos a pares que tenga la función  $\Phi(x)$ .

### SECCIÓN 3.6

## Ciclos límite con $\Phi(x)$ no polinomial

Actualmente, en la literatura moderna, al menos en la revisada para realizar este trabajo, se estudian sistemas definidos a trozos (también conocidos como funciones por partes o funciones a trozos), pero siguen siendo polinomios.

Esta sección tiene 2 motivaciones: dar ejemplos de cómo la hipótesis 1 no se limita a sistemas polinomiales, estudiar la relación que hay entre las alturas de los puntos críticos de  $\Phi(x)$  y la apertura en  $y$  de los ciclos límite en el espacio fase.

El cómo se realizará será mediante la presentación de varios sistemas de Liénard (3.11) usando  $\Phi(x)$  como diversas funciones, desde trigonométricas hasta funciones no derivables alrededor de todos sus puntos críticos.

### 3.6.1 El polinomio de Chebyshev

El polinomio de Chebyshev de grado  $2m + 2$  está dado por:

$$\Phi(x) = \cos((2m + 2) \arccos(x)),$$

al ser un polinomio de grado  $2m + 2$ , par, generará  $m$  ciclos límite en la Figura 3.18 se observa el polinomio de Chebyshev de grado 8.

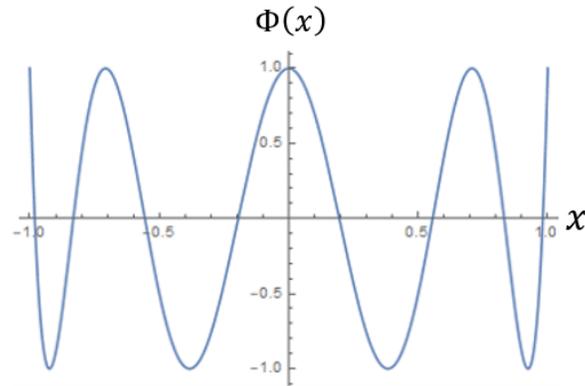


Figura 3.18: Polinomio de Chebyshev de grado 8.

Tomando como  $\Phi(x)$  el polinomio de Chebyshev de grado 8, se observa en su gráfica la Figura 3.18 que posee 7 puntos críticos. De estos, 4 son mínimos y 3 son máximos, aunque uno de estos últimos es el origen. Por lo tanto, tendrá 3 ciclos límite: 2 estables y 1 inestable, ya que posee 2 mínimos a pares después del origen y 1 máximo a par.

El espacio fase del sistema de Liénard Ec.(3.11) (usando el polinomio de Chebyshev de grado 8 como  $\Phi(x)$ ), se muestra en la Figura 3.19.

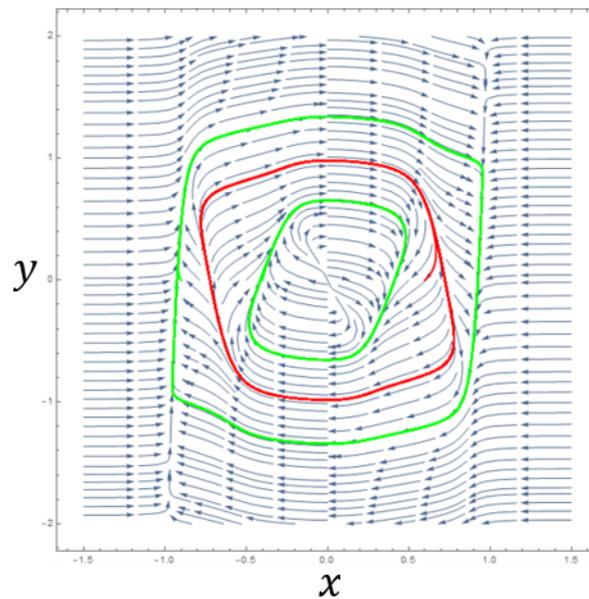


Figura 3.19: Espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11), usando un polinomio de Chebyshev de grado 8 como  $\Phi(x)$ .

Es importante notar que los ciclos límite están equiespaciados tanto en el eje  $x$  como

en el eje  $y$  del espacio fase, lo cual sugiere la posible relación entre las alturas de los puntos críticos de  $\Phi(x)$  y la apertura de los ciclos límite en el espacio fase.

### 3.6.2 Coseno definido por partes.

Al hacer uso de la función paso unitario,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

podemos generar un coseno que tenga un número finito de máximos y mínimos en un determinado dominio.

Definir el coseno por partes es útil para seguir estudiando aquellas funciones cuyos puntos críticos se mantienen a distancia constante del eje  $x$ .

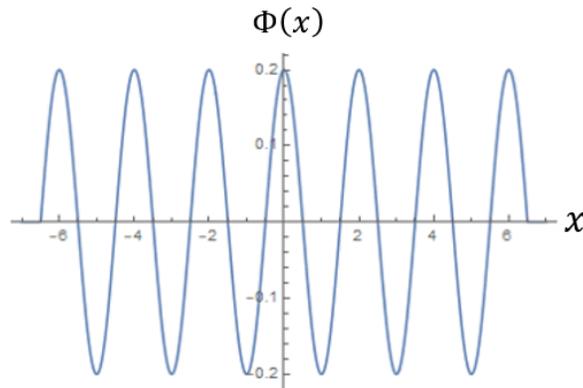


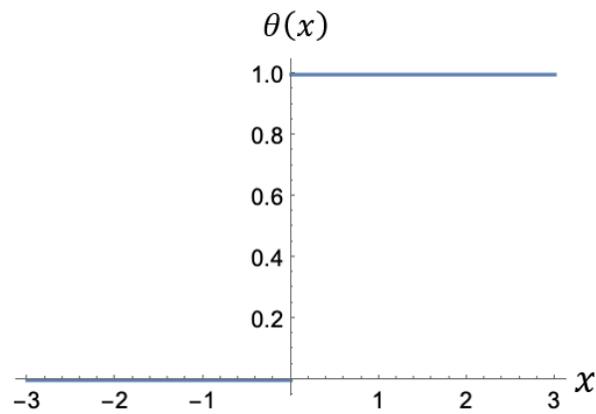
Figura 3.20: Uso de la función paso unitario para truncar el coseno antes y después de  $\pm 6.5$ .

Usemos  $\cos(\pi x)$ , para que sus máximos y mínimos aparezcan cada una unidad de la recta real, y definamos el coseno con el paso unitario en  $\pm 6.5$ . Este coseno por partes será ahora  $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \cos(\pi x) \left( -\frac{1}{5} \theta(-x - 6.5) - \frac{1}{5} \theta(x - 6.5) + \frac{1}{5} \right), \quad (3.25)$$

como se muestra en la Figura 3.20.

Donde  $\theta(x)$  es la función paso unitario;



teniendo  $\Phi(x)$  como en la Ec. (3.25) en el sistema de Liénard, tendrá 6 ciclos límite, pues se ha cosntruido de tal forma para que tenga un total de 13 puntos críticos, de los cuales 1 es el origen y los otros 12 vienen en pares.

En la Figura 3.21 se observa el espacio fase del sistema de Liénard Ec (3.11), usando  $\Phi(x)$  como en la Ec. (3.25), con los ciclos límites resaltados de verde (estables) y rojo (inestables).

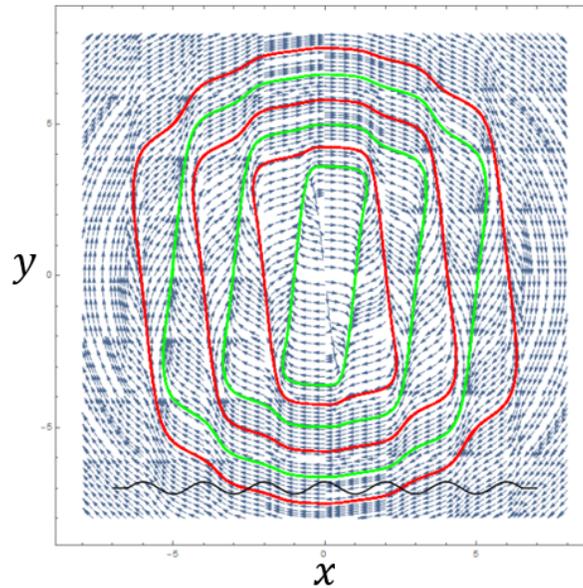


Figura 3.21: Espacio fase usando la Ec. (3.25) como  $\Phi(x)$  en el sistema de Liénard, con la gráfica de  $\Phi(x)$  en la parte inferior, los ciclos límite estables están de verde, los inestables de rojo.

Se puede notar como los ciclos límite están acotados en un rango en el eje  $y$ , pero no se pudo determinar en este trabajo en qué región están acotados o la separación que hay en el eje  $y$  entre dos ciclos límite.

Cabe señalar que la función no es diferenciable  $C^1$  en  $x = \pm 6.5$ , ya que está definida por partes. En el espacio fase, después de este punto, se tienen trayectorias cerradas con una dinámica de tipo centro a partir de  $x = 6.5$ .

### 3.6.3 Coseno amortiguado.

Para investigar si la posición de los puntos críticos en la gráfica de  $\Phi(x)$  afecta la apertura en el eje  $y$  del espacio fase, se propone un coseno que está siendo multiplicado por una función, que será su envolvente, que lo va amortiguando de manera gradual en lugar de abrupta como la función escalón.

Para este análisis se utilizan dos funciones que serán las envolventes del coseno. La primera es una exponencial  $10e^{-0.1x^2}$  y la segunda es una función racional dada por  $\frac{1}{1+0.1x^2}$ .

Entonces, las funciones  $\Phi(x)$  quedan de la siguiente manera:

- La primera es  $10e^{-0.1x^2} \cos \pi x$ , Figura 3.22.
- La segunda es  $\frac{\cos \pi x}{1+0.1x^2}$ , Figura 3.24.

$\Phi(x) = 10e^{-0.1x^2} \cos \pi x$  se observa en la Figura 3.22.

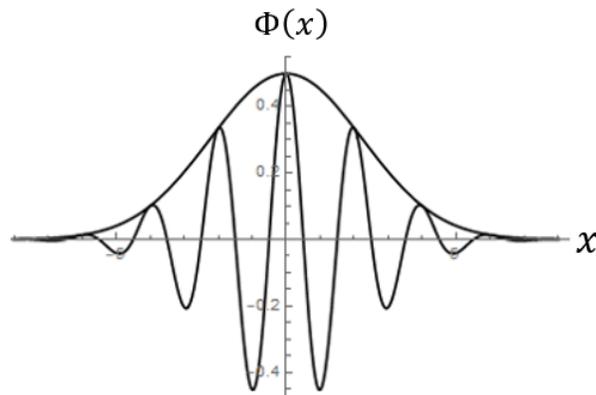


Figura 3.22: Gráfica de  $\Phi(x) = 10e^{-0.1x^2} \cos \pi x$ .

El espacio fase del sistema de Liénard (3.11), usando  $\Phi(x)$  como se observa en la Figura 3.22, se puede observar en la Figura 3.23.

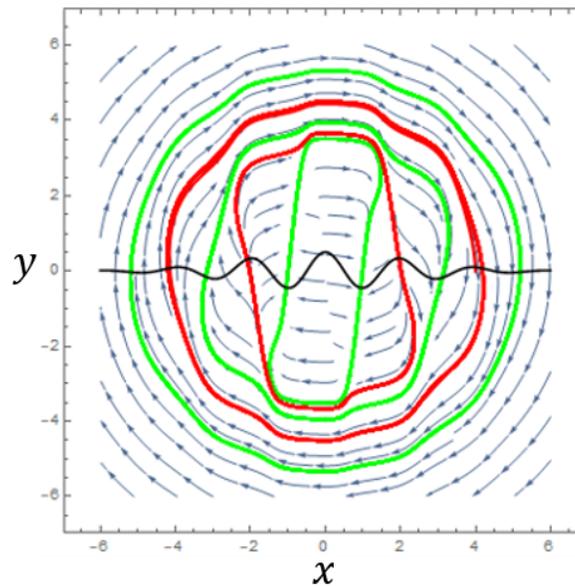


Figura 3.23: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando  $\Phi(x)$  como en la Figura 3.22, de verde se graficaron los ciclos límite estables, de rojo los inestables.

$\Phi(x) = \frac{\cos \pi x}{1+0.1x^2}$  se observa en la Figura 3.24.

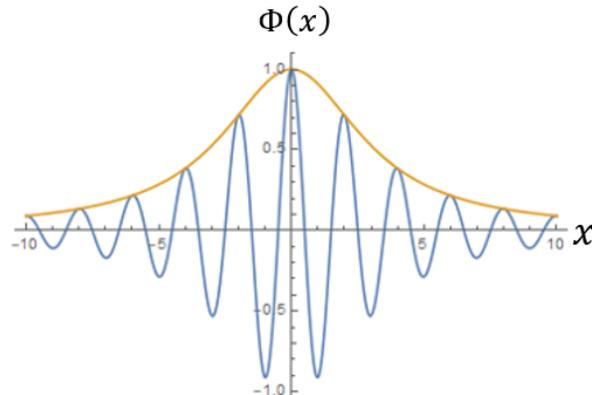


Figura 3.24: Gráfica de  $\Phi(x) = \frac{\cos \pi x}{1+0.1x^2}$ .

El espacio fase del sistema de Liénard (3.11), usando  $\Phi(x)$  como se observa en la Figura 3.24, se puede observar en la Figura 3.25.

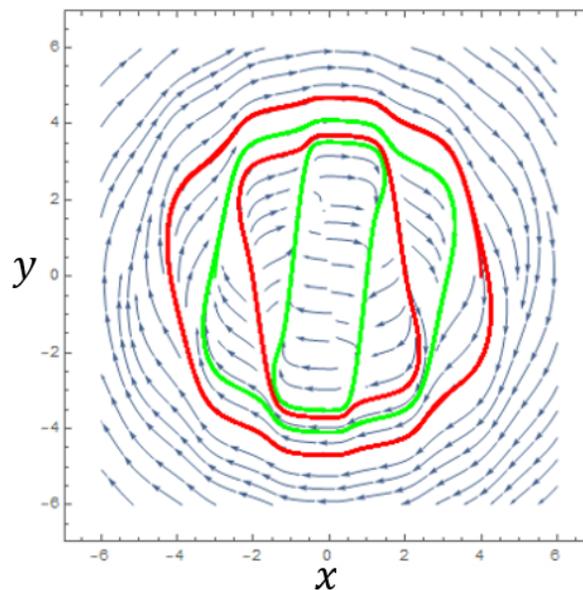


Figura 3.25: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando  $\Phi(x)$  como en la Figura 3.24, de verde se graficaron los ciclos límite estables, de rojo los inestables.

### 3.6.4 Función de Bessel.

Otra función especial que se utiliza como  $\Phi(x)$  para verificar la hipótesis 1 es la función de Bessel, Figura 3.26, la cual cumple con las características necesarias para generar

ciclos límite según la hipótesis 1.

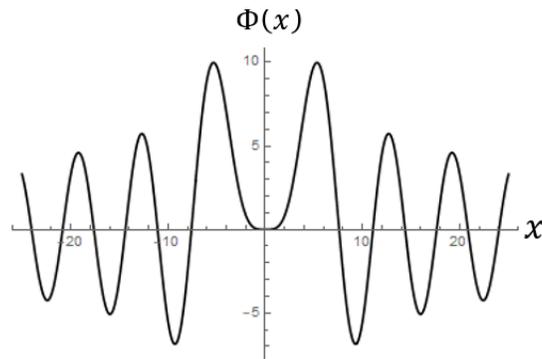


Figura 3.26: Función de Bessel de grado 4.

Se acota el estudio hasta  $x = \pm 25$ , sin utilizar la función escalón. El espacio fase generado del sistema (3.11) usando  $\Phi(x)$  como en la Figura 3.26 se observa en la Figura 3.27.

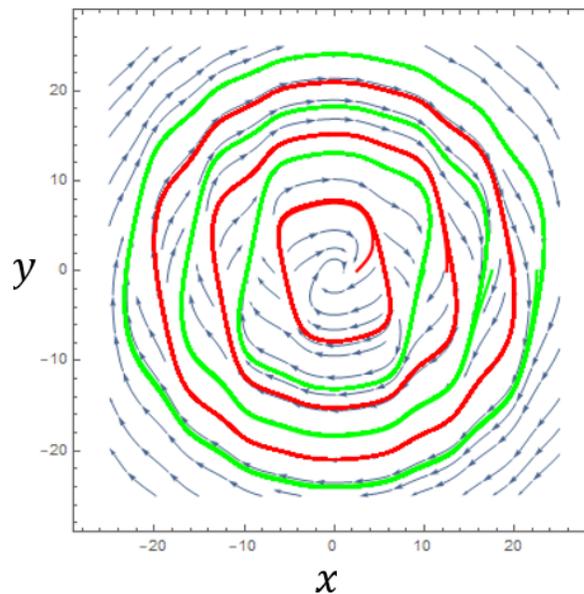


Figura 3.27: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando la función de Bessel de grado 4 como  $\Phi(x)$ , de verde se graficaron los ciclos límite estables, de rojo los inestables.

### 3.6.5 Polinomios de Zernike.

Los polinomios de Zernike de grado par son funciones que cumplen todas las características necesarias para generar ciclos límites, según la hipótesis 1. A continuación, se

presentan algunos ejemplos.

$\Phi(x) = R_6^0(x) = 20x^6 - 30x^4 + 12x^2 - 1$ , su gráfica se observa en la Figura 3.28.

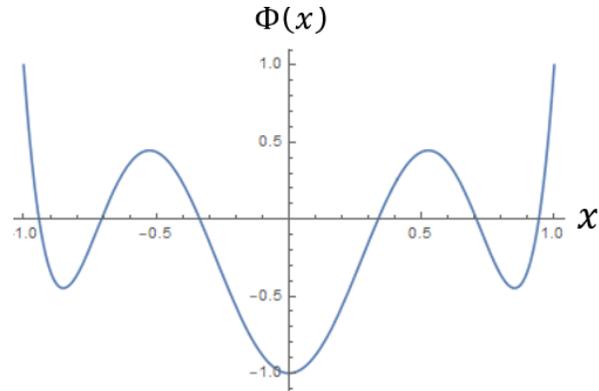


Figura 3.28: Polinomio de Zernike  $R_6^0(x)$ .

El espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11), con  $\Phi(x) = R_6^0(x)$  se observa en la Figura 3.29.

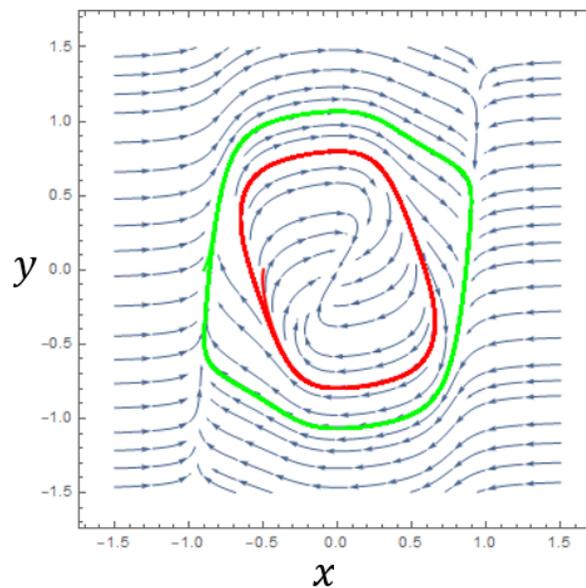


Figura 3.29: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando el polinomio de Zernike  $R_6^0(x)$  como  $\Phi(x)$ , de verde se graficó el ciclo límite estable, de rojo el inestable.

Otro ejemplo es  $R_6^4$ .  $\Phi(x) = R_6^4(x) = x^4(-5 + 6x^2)$ , su gráfica se observa en la Figura 3.30.

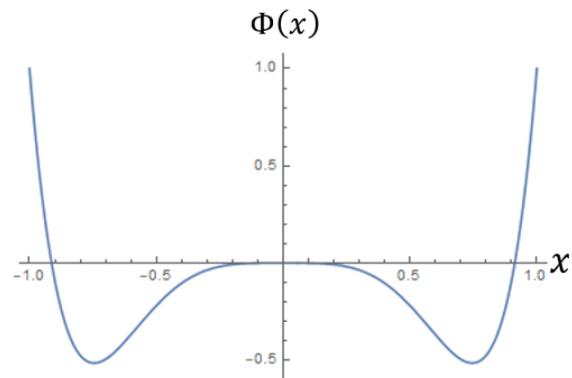


Figura 3.30: Polinomio de Zernike  $R_6^4(x)$ .

El espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11), con  $\Phi(x) = R_6^4(x)$  se observa en la Figura 3.31.

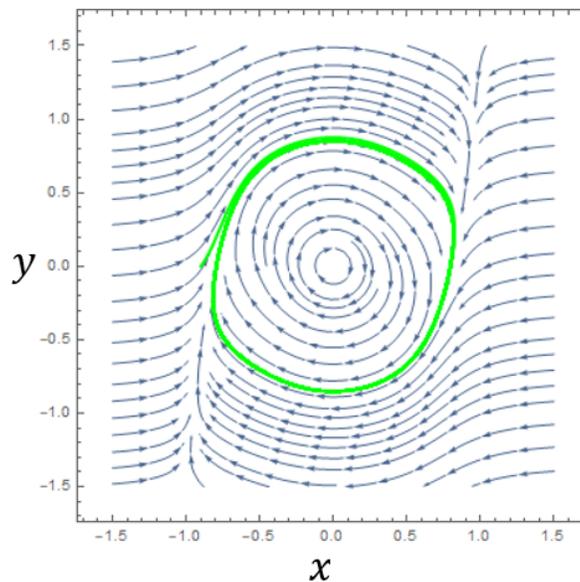


Figura 3.31: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando el polinomio de Zernike  $R_6^4(x)$  como  $\Phi(x)$ , de verde se gráfico el ciclo límite estable.

### 3.6.6 Polinomios de Jacobi.

Si bien los polinomios de Jacobi no son simétricos por sí mismos y solo tienen máximos y mínimos en su parte positiva como se ve en la Figura 3.32, usando la función escalón

$\theta(x)$ , se puede reflejar su parte positiva y unirlos para que su gráfica tenga una forma simétrica lo cual, según la hipótesis 1 es suficiente para que existan ciclos límites.

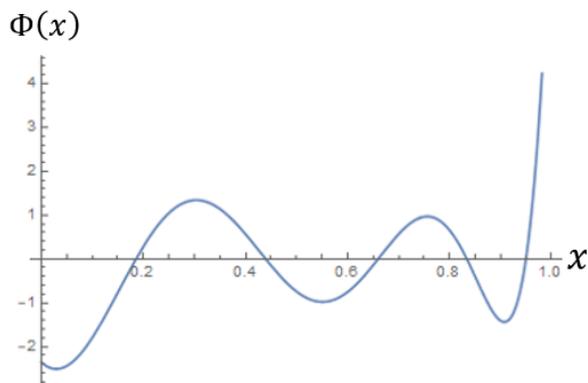


Figura 3.32: Parte positiva del polinomio de Jacobi  $P_8^{\{1,7\}}$ .

En la Figura 3.32 podemos observar la parte positiva del polinomio de Jacobi  $P_8^{\{1,7\}}$ , esta parte si tiene puntos críticos que es lo que nos interesa, como ya se mencionó se reflejará y mediante la función paso unitario se unirán de manera que genere una función simétrica como se observa en la Figura 3.33, lo cual nos debe ayudar a investigar qué pasa con ciclos límite cuando los puntos críticos cada vez son menores y que pasa cuando no se tiene una función diferenciable en todo el espacio.

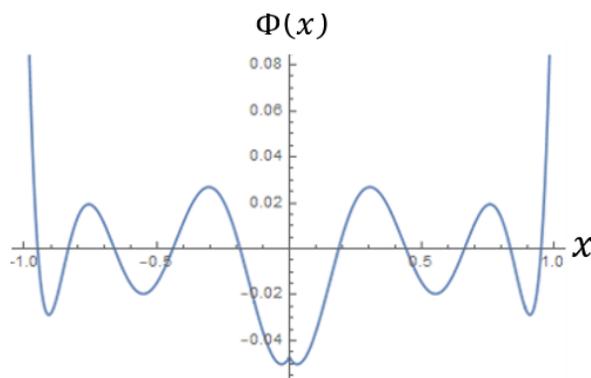


Figura 3.33: Mediante la función paso unitario, se refleja la parte positiva del polinomio de Jacobi y se une su parte positiva de tal forma que la función resultante sea simétrica.

Observamos que esta función definida a trozos cumple todas las propiedades de la hipótesis 1, pues tiene un máximo en  $x = 0$ , tiene máximos y mínimos a pares. Entonces, el sistema de Liénard (3.11), usando  $\Phi(x)$  como en la Figura 3.33 tiene 5 ciclos límites en su espacio fase que se pueden visualizar en la Figura 3.34, de verde se grafican los ciclos límites estables y de rojo los inestables.

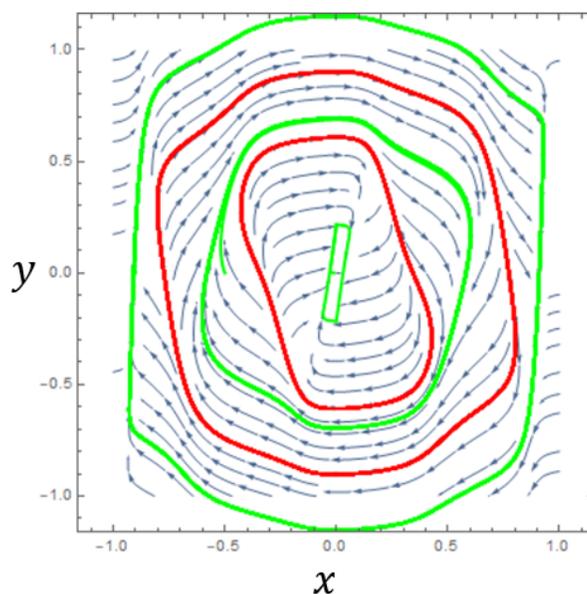


Figura 3.34: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando la Figura 3.33 como  $\Phi(x)$ .

Se observa en la Figura 3.34 que este sistema, posee 5 ciclos límite y, además, la separación entre sus ciclos cada vez es más pequeña tanto en  $x$  como en  $y$ , así como pasa en los puntos críticos de  $\Phi(x)$  en la Figura 3.33.

El espacio fase 3.34 en el origen tiene una pequeña línea repulsora. La función  $V(0, 0) = 0$ , es continua en  $(0, 0)$ , pero no es diferenciable.

### 3.6.7 Funciones no continuas en todo el espacio

Se puede construir una función definida a trozos que no es continua y que no es un polinomio par, para ser  $\Phi(x)$  como por ejemplo:

$$\Phi(x) = (x - 5)^2 [(-\theta(x - 6)) + \theta(x - 4) - \theta(x + 4) + \theta(x + 6)], \quad (3.26)$$

la gráfica de esta función se presenta en la Figura 3.35.

Nótese que la ecuación no es continua en  $x = \pm 4$  ni en  $x = \pm 6$ . Sin embargo, tiene dos mínimos locales en  $x = \pm 5$ , por lo que, según la hipótesis 1, el sistema de Liénard Ec. (3.11), usando la Ec. (3.26) como  $\Phi(x)$  tendrá un ciclo límite estable en su espacio fase.

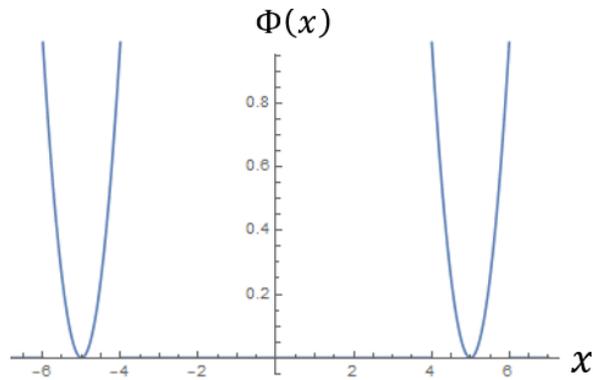


Figura 3.35: Gráfica de la función  $\Phi(x)$  de la Ec. (3.26).

Esta función no es continua, pero tiene dos mínimos locales en  $x = \pm 5$ . En el espacio fase del sistema (3.11), Figura 3.36, usando a la Ec. (3.26) como  $\Phi(x)$ , se observa que la hipótesis 1 se cumple.

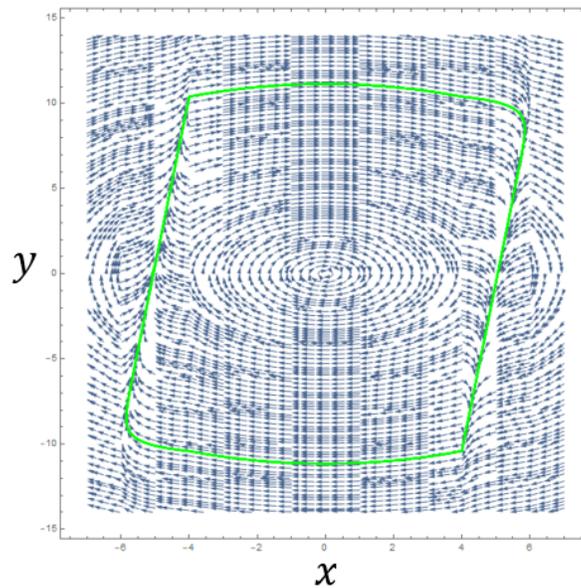


Figura 3.36: Espacio fase del sistema de la Ec. (3.11) usando a la Ec. (3.26) como  $\Phi(x)$ .

Este es uno de los resultados más significativos del estudio, ya que demuestra que no es necesario que la función sea continua; por ahora basta con que tenga máximos o mínimos a pares y que  $\Phi(x)$  sea de clase  $C^1$  alrededor de los puntos crítico para que se generen ciclos límite, más adelante se verá que el hecho de ser de clase  $C^1$  no es necesario.

### 3.6.8 Usando series geométricas con funciones trigonométricas.

Una serie geométrica está dada por  $\frac{1-x^n}{1-x}$ . En lugar de usar  $x$ , se utiliza el coseno y se analizan dos formas diferentes de la serie geométrica utilizando el coseno.

La primera es del tipo  $\Phi(x) = \frac{(1-\cos^n(x))}{1-\cos(x)}$ , con signo negativo. En general, la función tiene la gráfica mostrada en la Figura 3.37.

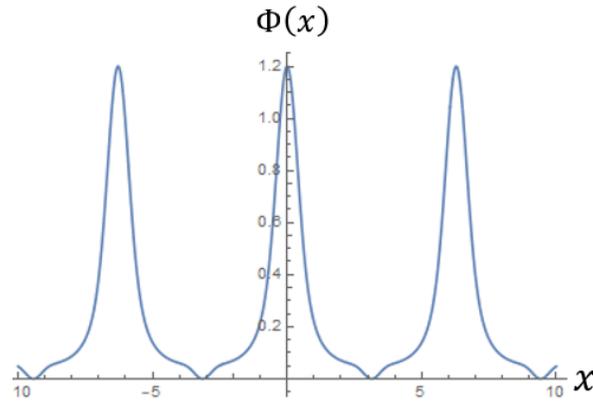


Figura 3.37: Gráfica de la serie geométrica usando signos negativos,  $n = 12$ .

El espacio fase del sistema de Liénard (3.11), usando  $\Phi(x) = \frac{(1-\cos^{12}(x))}{1-\cos(x)}$  con los ciclos límites resaltados, de verde los estables y de rojo los inestables, se muestra en la Figura 3.38.

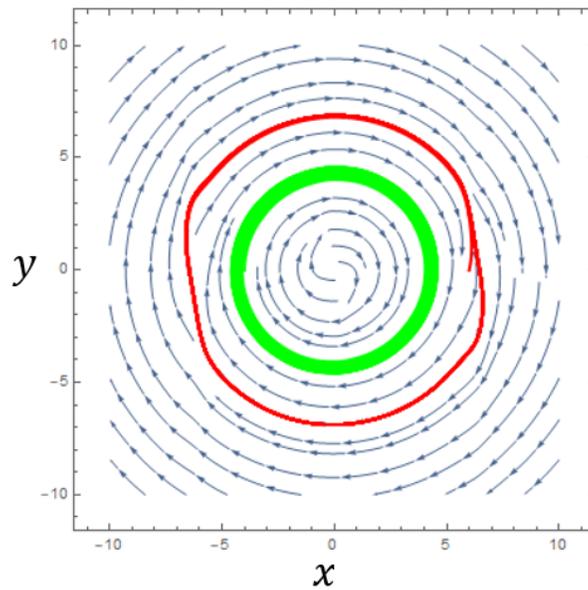


Figura 3.38: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11), usando  $\Phi(x) = \frac{(1-\cos^{12}(x))}{1-\cos(x)}$  con los ciclos límites resaltados, de verde los estables y de rojo los inestables

La siguiente es  $\Phi(x) = \frac{(1+\cos^n(x))}{1+\cos(x)}$ . En general, la función tiene la gráfica mostrada en la Figura 3.39.

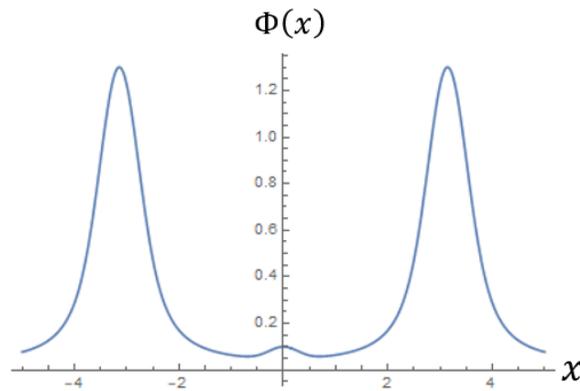


Figura 3.39: Gráfica de la serie geométrica usando signos positivos,  $n = 12$ .

El espacio fase del sistema de Liénard (3.11), usando  $\Phi(x) = \frac{(1+\cos^{13}(x))}{1+\cos(x)}$  con los ciclos límites resaltados, de verde los estables y de rojo los inestables, se muestra en la Figura 3.40.

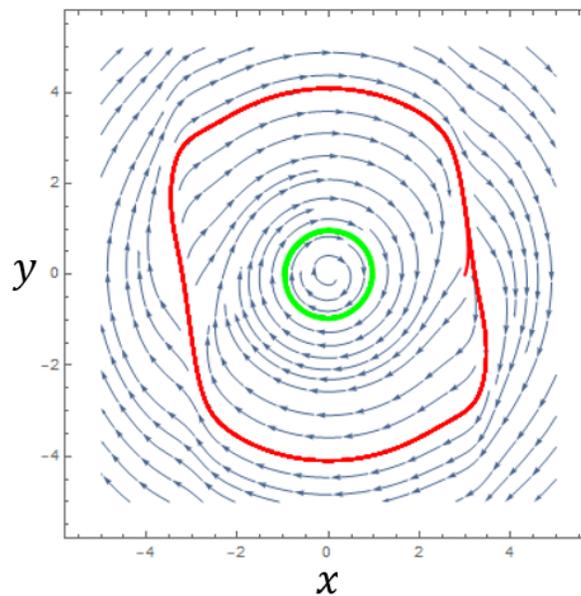


Figura 3.40: Espacio fase de la serie geométrica usando signos positivos.

### SECCIÓN 3.7

## Funciones que no son derivables alrededor de sus puntos críticos

En esta sección se analizarán funciones  $\Phi(x)$  que no son de clase  $C^1$  alrededor de sus puntos críticos.

A estas funciones no les aplica el criterio utilizado en la sección 3.4.3 ni les funciona en general la función de Lyapunov  $V(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ , aun así la hipótesis 1, nos dice que estos sistemas generan ciclos límites y de la misma manera que todos los demás, estarán ubicados en los puntos críticos de  $\Phi(x)$ . Los siguientes diagramas de las figuras 3.41 y 3.42, son muy parecidos a los ya presentados en la sección 3.4.3, pero son útiles para ejemplificar que se tiene algo muy parecido para el caso donde las funciones son suaves alrededor de sus puntos críticos.

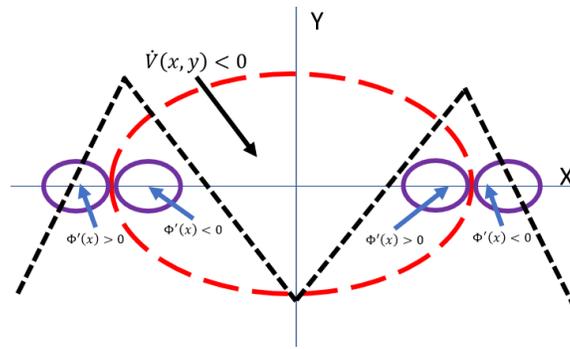


Figura 3.41: Diagrama representando los signos y análisis de  $\dot{V}$  en un ciclo límite estable para  $\Phi(x)$  una función a trozos para la que los valores máximos, sin importar el del origen, no son derivables.

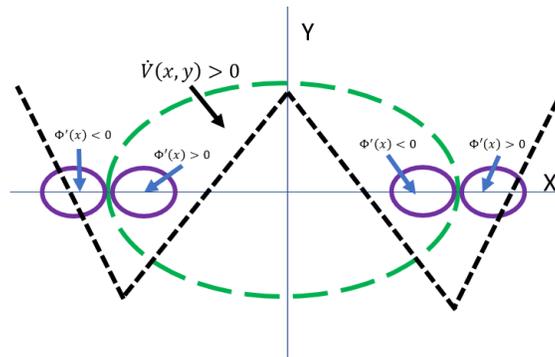


Figura 3.42: Diagrama representando los signos y análisis de  $\dot{V}$  en un ciclo límite estable para  $\Phi(x)$  una función a trozos para la que los valores mínimos, sin importar el del origen, no son derivables.

Se intentó hacer la demostración y el análisis particular de cada caso, pero no se llegó a algo concluyente ni siquiera a un esbozo, el intento se hizo tratando de replicar las demostraciones de los teoremas clásicos sección 2.7.1, viendo en qué momento se podían debilitar las condiciones de continuidad y diferenciabilidad por otro tipo de condiciones.

Aun así, se llegó a concluir que la hipótesis 1 se sigue cumpliendo y, aunque no se pudo hacer su análisis algebraico, se presentaron varios análisis numéricos de estos ejemplos, presentando el diagrama de  $\Phi(x)$  y el espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11) correspondiente.

El hecho de necesitar los máximos y mínimos a pares es para que genere ciclos límite, por ejemplo la función valor absoluto no genera ciclos límite y esto es debido a que no tiene ningún par de puntos críticos, en la Figura 3.43 se puede ver el espacio fase del sistema de Liénard usando  $\Phi(x) = |x|$ .

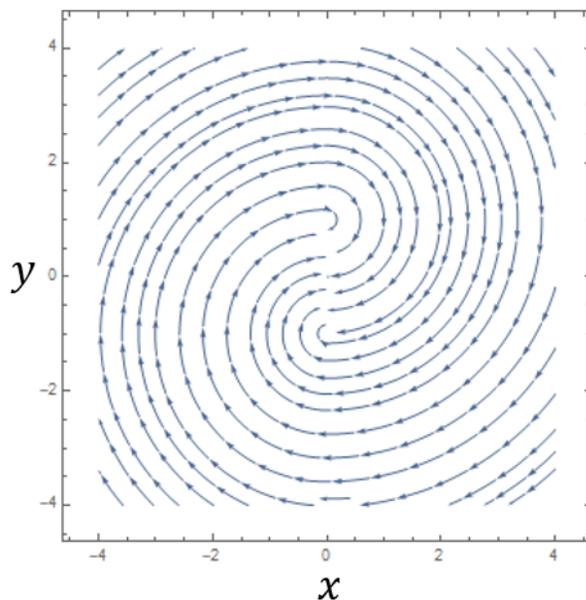


Figura 3.43:  $\Phi(x)$  siendo el valor absoluto de  $x$  ( $\Phi(x) = |x|$ ).

### 3.7.1 1 ciclo límite.

Usando  $\Phi(x)$  como

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & -(x - 3)(1 - \theta(2 - x)) + (x - 1)(-\theta(x - 2) - \theta(-x) + 1) - \\ & (x + 1)(\theta(-x - 2) - \theta(x) - 1) + (x + 3)(1 - \theta(x + 2)), \end{aligned} \tag{3.27}$$

será inestable, pues tiene un par de máximos a pares después del origen, en la Figura 3.44 se observa su gráfica.

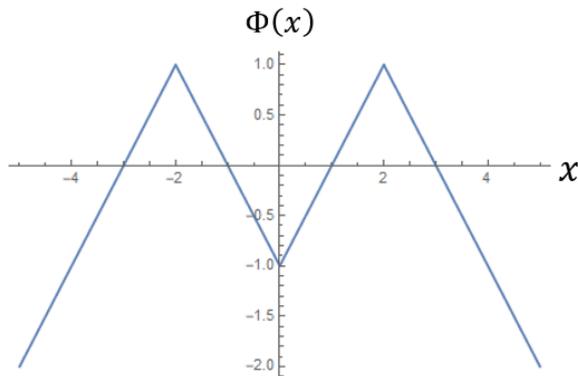


Figura 3.44:  $\Phi(x)$  Ec. (3.27) a trozos con un par de máximos.

El espacio fase del sistema de Liénard (3.11), usando la Ec. (3.27) como  $\Phi(x)$ , se observa en la Figura 3.45.

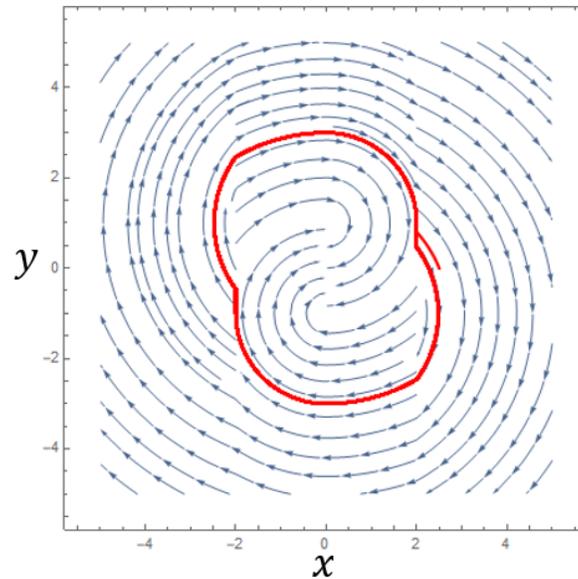


Figura 3.45: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando la función mostrada en la Figura 3.44 como  $\Phi(x)$ .

Si cambiamos  $\Phi(x)$  por  $-\Phi(x)$  se obtiene la gráfica de la Figura 3.46. Lo único que cambia es que el ciclo límite del sistema de Liénard (3.11) es estable, el espacio fase se observa en la Figura 3.47:

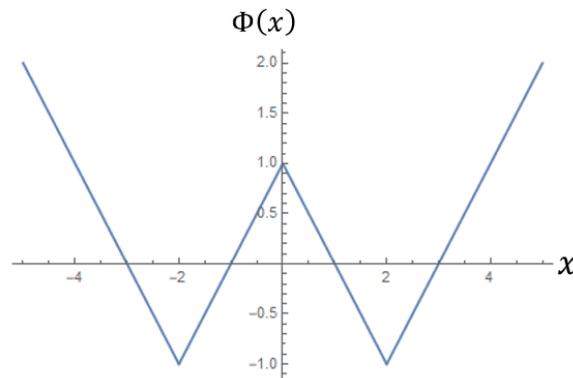


Figura 3.46:  $\Phi(x)$  a trozos con un par de mínimos.

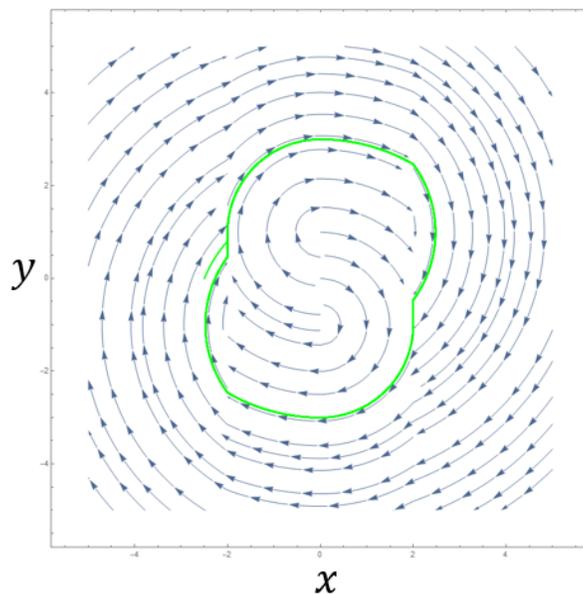


Figura 3.47: Espacio fase del sistema de Liénard (3.11) usando la función mostrada en la Figura 3.46  $\Phi(x)$  .

### 3.7.2 2 ciclos límite.

La función  $\Phi(x)$  no se pondrá, pues es demasiado larga (su gráfica se puede observar en la Figura 3.48), para generar  $\Phi(x)$  solo es seguir replicando lo que ya se hizo anteriormente con las funciones escalón.

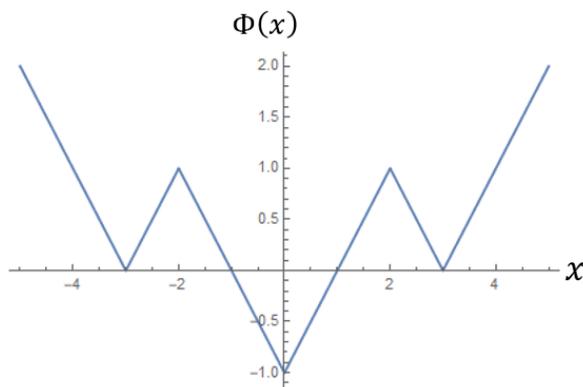


Figura 3.48:  $\Phi(x)$  a trozos con un par de mínimos y máximos de distinto tamaño.

El espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11), usando  $\Phi(x)$  como en la Figura 3.48, se observa en la Figura 3.49.

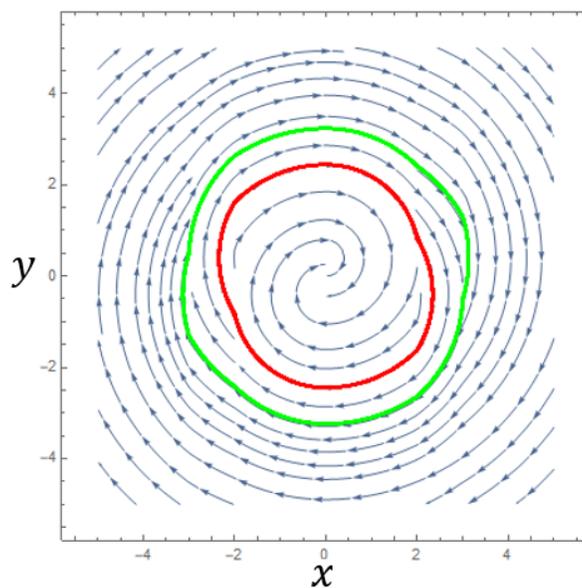


Figura 3.49: Espacio fase del sistema Ec. (3.11) usando  $\Phi(x)$  como la Figura 3.48.

### 3.7.3 3 ciclos límite.

Se genera  $\Phi(x)$  simétrica, con 2 pares de máximos y un par de mínimos, tal como se observa en la Figura 3.50.

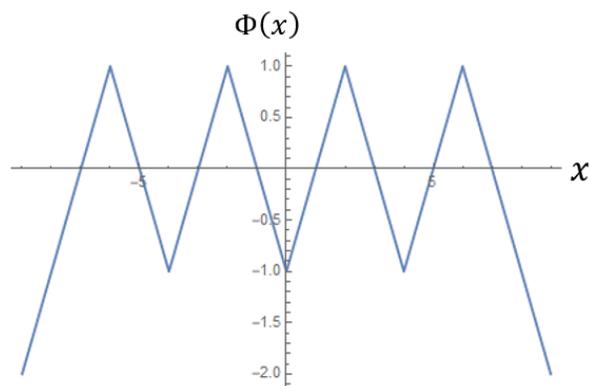


Figura 3.50:  $\Phi(x)$  a trozos con un par de mínimos y 2 pares de máximos.

El espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11) usando  $\Phi(x)$  como en la Figura 3.50 se observa en la Figura 3.51.

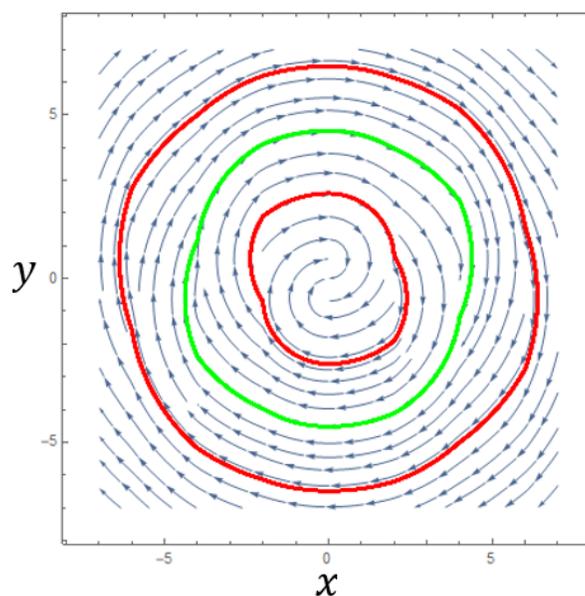


Figura 3.51: Espacio fase del sistema Ec. (3.11) usando  $\Phi(x)$  como la Figura 3.50.

### 3.7.4 2 ciclos límites no simétricos.

$\Phi(x)$  (Figura 3.52) esta vez no es simétrica. El primer ciclo límite sí será simétrico, pues sus máximos son simétricos, pero el segundo ciclo límite inestable es asimétrico y se debe a la asimetría de  $\Phi(x)$ . Esto es algo análogo a lo explorado en la sección 3.5.2, donde los ciclos límite no son siempre simétricos en su espacio fase.

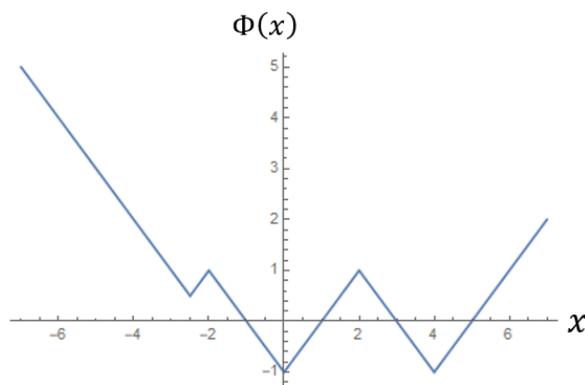


Figura 3.52:  $\Phi(x)$  asimétrica, a trozos con un par de mínimos y máximos de distinto tamaño.

El espacio fase del sistema de Liénard Ec. (3.11), usando  $\Phi(x)$  como en la Figura 3.52,

se observa en la Figura 3.53.

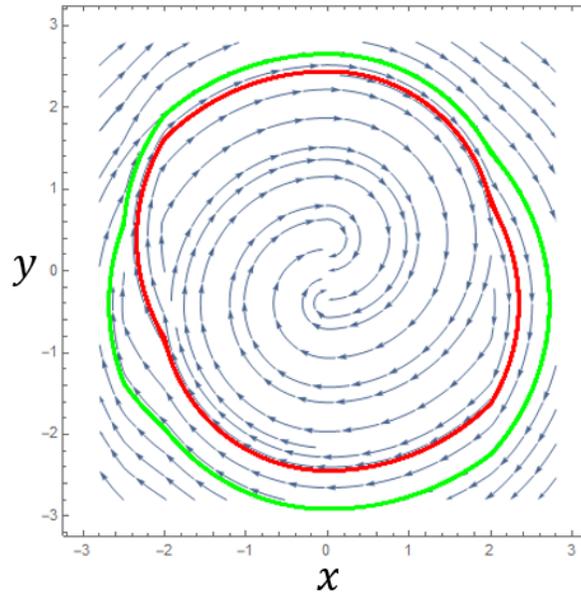


Figura 3.53: Espacio fase del sistema usando  $\Phi(x)$  como la Figura 3.52.

Estos resultados podrían ser el antecedente para poder plantear un teorema más fuerte, es decir, con menores restricciones. Entre ellas está que la función  $\Phi(x)$  no sea de clase  $C^1$ .

### SECCIÓN 3.8

## Comportamiento bajo reflexiones

Esta sección nace debido a la necesidad de poner ejemplos de que ocurre con el sistema de Liénard Ec. (3.1), bajo ciertas características.

La primera es que pasa si reflejamos  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$  en el sistema Ec. (3.11).

El sistema pasa a ser:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \frac{d\Phi(-x)}{dx}, \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}$$

lo que indica que realmente solo cambia la forma de la función  $\Phi(x)$ , haciendo que en el caso de que  $\Phi(x)$  sea una función impar, el sistema de Liénard no cambia en nada, si la función en cambio ya es mas general, el hacer un cambio en una gráfica  $\Phi(x)$  por  $\Phi(-x)$  lo único que ocurre es que la función se refleja respecto al eje  $y$ , por lo que los puntos críticos se reflejaran y lo único que cambiara sera que los ciclos límite en el espacio fase tambien se reflejan con una rotación de 180 grados, pero la dinámica del sistema sera la misma (salvo por esta rotación de 180 grados), esta rotación se debe a que realmente el sistema en si mismo no cambia pues  $-\Phi(-x) = \frac{\Phi(-x)}{dx}$ .

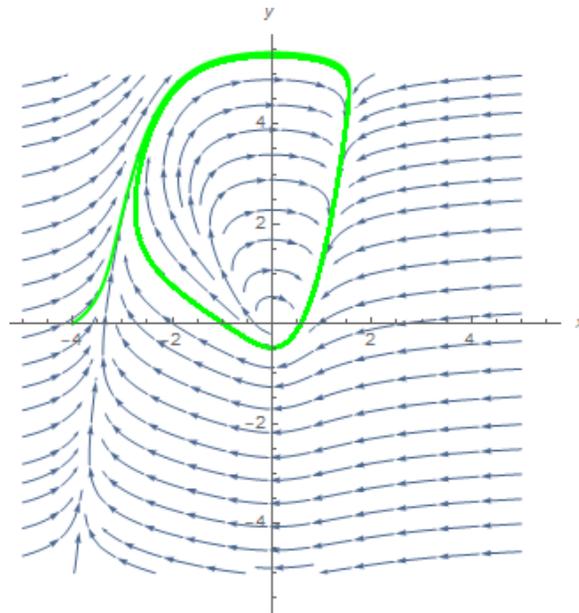


Figura 3.54: Espacio fase de un sistema de Liénard típico sin cambios.

Se puede observar esta rotación tanto en la Figura 3.54 y la Figura 3.55, ambas son la misma Figura solo rotada 180 grados, el sistema de la Figura 3.54 es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (-x + 3x^2 + x^3), \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned}$$

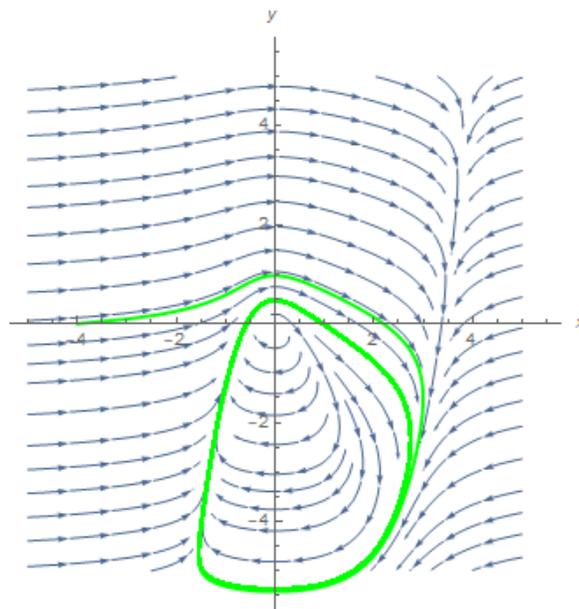


Figura 3.55: Espacio fase de un sistema de Liénard igual al de la Figura 3.54, con el cambio  $x$  a  $-x$  y  $y$  a  $-y$ .

el sistema de la Figura 3.55 es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + (x + 3x^2 - x^3), \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}$$

ambas siguen manteniendo la misma dinámica, excepto por la rotación y siguen cumpliendo la Hipotesis 1.

Otra es que pasa si solo se refleja  $x$  por  $-x$ , la dinámica cambia de tal manera que la reflexión ocurre unicamente respecto al eje  $y$ , pero todo sigue siendo igual, por ejemplo en la Figura 3.56, se observa el mismo sistema que la Figura 3.54, pero con  $x$  cambiando a  $-x$ , el sistema es;

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + (x + 3x^2 - x^3), \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}$$

en la Figura 3.56 se puede observar que a diferencia que a la Figura 3.54, el único cambio que se observa es que hay una reflexión en torno al eje  $y$ .

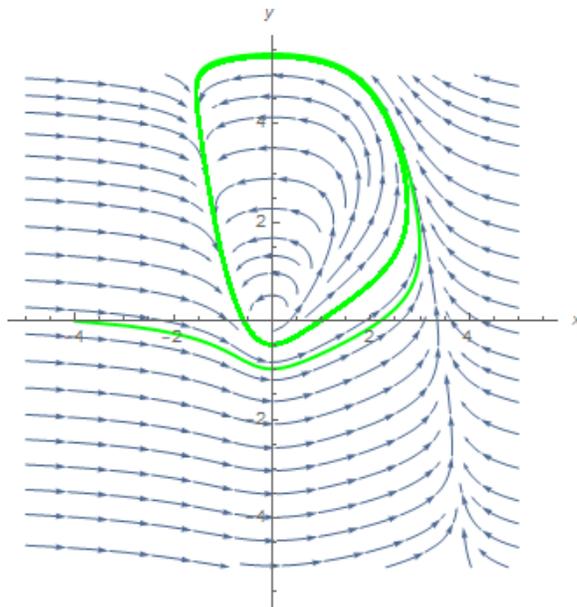


Figura 3.56: Espacio fase de un sistema de Liénard igual al de la Figura 3.54, con el cambio  $x$  a  $-x$ .

Un último ejemplo es que pasaría si tuvieramos un polinomio de grado  $2m + 2$  como  $\Phi(x)$ , que al ser derivado no contenga el término lineal, ¿Aun generaría ciclos límite?, para ello probamos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - (-4x^3 + 6x^5), \\ \dot{y} &= -x,\end{aligned}$$

se observa que en efecto, generará un ciclo límite estable, esto debido a que  $\Phi(x) = -x^4 + x^6$ , tiene un par de mínimos a pares después del origen, cumpliendo con la hipótesis 1, esto se puede observar en la Figura 3.57

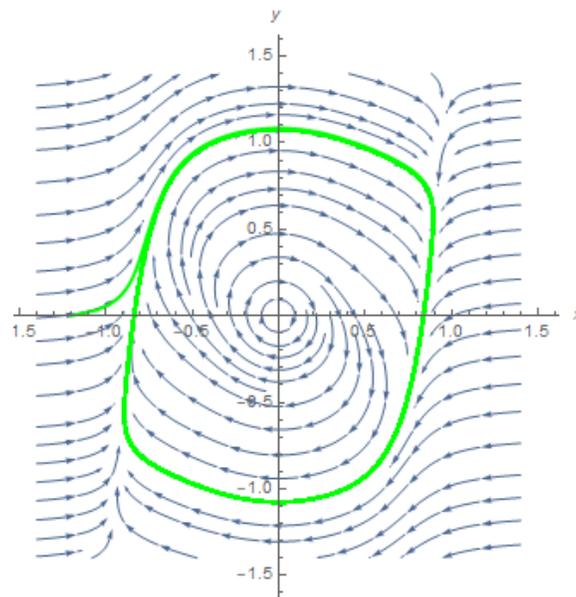


Figura 3.57: Espacio fase de un sistema de Liénard polinomial sin termino líneal en  $\Phi I(x)$ .

---

# Capítulo 4

## Conclusiones

---

La cantidad de ciclos límite que un sistema de Liénard tiene y si estos son estables o inestables y en qué posiciones aparecerán están determinados únicamente por la posición de los máximos y mínimos de la función  $\Phi(x)$ , dicha función se analizó de tal manera de no restringirnos a funciones polinomiales como se hace en la mayoría de la literatura moderna, si no también se analizó y expandió los resultados a funciones más generales tales como:

- Funciones periódicas.
- Funciones truncadas.
- Funciones no diferenciables alrededor de sus puntos críticos.
- Funciones no continuas.
- Funciones polinomiales, tanto simétricas como asimétricas.
- Funciones definidas a trozos.

Donde se observó que los resultados pueden ser generalizados a casi todo tipo de función.

Además de que ahora mismo podemos ya parar de analizar solo sistemas que vienen dados por polinomios o por polinomios a partes y analizar cualquier tipo de sistema y función sin importar si estas son o no polinomiales o continuas en todo el espacio.

Y se construyeron dos métodos para construir funciones polinomiales que tuvieran tantos ciclos límites como se desea así como tener la capacidad de controlar las posiciones, al menos en el eje  $x$ , de donde se ubican.

Se espera que este trabajo quede como antecedente para que en futuras investigaciones se grafiquen los ciclos límite, pues el graficarlos y observarlos es una manera extremadamente sencilla de observar, enseñar y atacar los problemas que tengan que ver con ciclos límite.

A futuro se esperaría poder cambiar la función  $\dot{y} = -g(x)$  a una distinta de  $g(x) = x$ , considerar otras potencias de la  $y$  en  $\dot{x} = y - \Phi'(x)$ , además de poder demostrar explícitamente nuestro resultado y también el por qué si  $\Phi(x)$  no es diferenciable sigue presentando ciclos límite.

## REFERENCIAS

---

- [1] Aubin, D., & Dalmedico, A. D. (2002). Writing the history of dynamical systems and chaos: Longue durée and revolution, disciplines and cultures. *Historia Mathematica*, 29(3), 273-339.
- [2] Hatvani, L. (2019). *Aleksandr Lyapunov, the man who created the modern theory of stability*. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2019(26), 1-9. Recuperado de <https://real.mtak.hu/104728/>
- [3] Han, X., & Kloeden, P. (2017). Lyapunov Stability and Dynamical Systems. In *Attractors Under Discretisation* (pp. 1-30). Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-61934-7-1>
- [4] Han, M.A., & Zhou, X.Y. (2024). On Stability Discrimination of Limit Cycles for Piecewise Smooth Systems. *Acta. Math. Sin.-English Ser.*, 40, 1785–1803. <https://doi.org/10.1007/s10114-024-2266-3>
- [5] Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley.
- [6] Andronov, A. A., Vitt, A. A., & Khaikin, S. E. (1966). *Theory of Oscillators*. Pergamon Press.
- [7] Guckenheimer, J., & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer.
- [8] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I., & Maier, A. G. (1973). *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Wiley.
- [9] Jordan, D. W., & Smith, P. (1977). *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford University Press.
- [10] Kuznetsov, Y. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory* (3rd ed.). Springer.
- [11] Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction* (3rd ed.). Springer.

- 
- [12] Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2004). *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley.
- [13] Arnold, V. I. (2000). *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory from Evolvents to Quasicrystals*. Birkhäuser.
- [14] Yoccoz, J.-C. (2002). Some Questions and Remarks on the Sixteenth Hilbert Problem. *Moscow Mathematical Journal*, 3(3), 1167–1196.
- [15] Arrowsmith, D. K., & Place, C. M. (1990). *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Vol. 1.
- [16] Sandifer, C. E. (2007). *The Early Mathematics of Leonhard Euler*. Mathematical Association of America.
- [17] Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press.
- [18] Kingsland, S. E. (1985). *Modeling Nature: Episodes in the History of Population Ecology*. University of Chicago Press.
- [19] Diacu, F., & Holmes, P. (1996). *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability*. Princeton University Press.
- [20] Kaplan, D., & Glass, L. (1995). *Understanding Nonlinear Dynamics*. Springer.
- [21] Gleick, J. (1987). *Chaos: Making a New Science*. Viking.
- [22] Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company.
- [23] Peitgen, H. O., Jürgens, H., & Saupe, D. (1992). *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer.
- [24] Saet, Y. A., & Viviani, G. L. (1986). On Lienard oscillator models with a pregiven set of limit cycles. *Mathematical Modelling*, 7(2–3), 377-384. Cambridge University Press.
- [25] Zhou, J. (1996). On the existence and uniqueness of periodic solutions for Liénard-type equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 27(12), 1463-1470. Cambridge University Press.
- [26] Quiroz-Juárez, M. A., Jiménez-Ramírez, O., Vázquez-Medina, R., Breña-Medina, V., Aragón, J. L., & Barrio, R. A. (2019). Generation of ECG signals from a reaction-diffusion model spatially discretized. *Scientific Reports*. Nature Research.

- 
- [27] Delgado, J. A. (1999). Ciclos límites en minirobots neurocontrolados. *Ingeniería e Investigación*, 42, 39-43.
- [28] González Hernández, H. G., Montiel Castellanos, M., & Corona Jouanen, A. (1996). Comportamiento caótico en redes neuronales artificiales. *Revista del Centro de Investigación de la Universidad La Salle*.
- [29] Salmerón Marco, M. (2021). Estudio de la dinámica de modelos matemáticos de neuronas. Universidad de Zaragoza, Trabajo de fin de grado en Matemáticas.
- [30] Pérez-Ruzafa, Á., & Marcos, C. (2018). La situación de Mar Menor: seis mil años de historia, 50 años de resistencia y un ejemplo de ecosistema complejo. En *Una Mirada Global Sobre el Mar Menor* (pp. 81-114). Navarro Caballero, Departamento de Ecología e Hidrología, Facultad de Biología Universidad de Murcia.
- [31] Ladino-Martínez, L., & Valverde-Fajardo, J. (2020). Dinámica de un sistema presa-depredador entre dos poblaciones de peces con captura. *Memorias del Congreso Internacional de Ciencias y Computación*, Universidad de los Llanos.
- [32] Cuevas Cubillos, N. (2021). Análisis de la estabilidad de las ecuaciones de Friedmann. Tesis de Licenciatura, Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas, Colombia.
- [33] Llibre, J., & Teixeira, M. A. (2022). *Limit cycles of continuous piecewise differential systems separated by a parabola and formed by a linear center and a quadratic center*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 32(5), 225003. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2022034>
- [34] Li, L. (2014). *Three crossing limit cycles in planar piecewise linear systems with saddle-focus type*. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 70(1), 1–14. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2014.1.70>
- [35] Euzébio, R. D., & Llibre, J. (2015). *On the number of limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two pieces separated by a straight line*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 424(2), 475–486. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.060>
- [36] Freire, E., Ponce, E., Rodrigo, F., & Torres, F. (1998). *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(10), 2073-2097. <https://doi.org/10.1142/S0218127498001676>
- [37] Llibre, J., & Ponce, E. (2012). *Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B*, 19(3), 325-335. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2012.19.325>
- [38] Pedregal, P. (2021). Hilbert's 16th problem. arXiv:2103.07193 [math.DS].

- 
- [39] Ross, C. C. (2004). About differential equations. In *Differential equations*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY. [https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3949-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3949-7_1)
- [40] Ince, E. L. (1956). *Ordinary differential equations* (Ilustrada, íntegra, reimpresa). Courier Corporation.
- [41] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera (4a ed.). Editorial Limusa, S. A. de C. V. Grupo Noriega Editores.
- [42] Teschl, G. (2024). *Ordinary differential equations and dynamical systems* (Vol. 140). American Mathematical Society.
- [43] Birkhoff, G. D. (1927). *Dynamical systems* (Reimpresa, revisada). American Mathematical Society.
- [44] Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2012). *Dynamical systems* (3<sup>a</sup> ed.). Academic Press.
- [45] Verhulst, F. (2012). *Nonlinear differential equations and dynamical systems* (2a ed., Ilustrada). Springer Science & Business Media.
- [46] Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley.
- [47] Hasselblatt, B., & Katok, A. (2003). *A first course in dynamics: With a panorama of recent developments*. Cambridge University Press.
- [48] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems* (3a ed.). Prentice Hall.
- [49] Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2012). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* (3a ed.). Academic Press.
- [50] Perko, L. (1996). *Differential Equations and Dynamical Systems* (2nd ed.). Springer-Verlag, Texts in Applied Mathematics 7.
- [51] Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering* (2a ed.). Westview Press.
- [52] Nekomath. (18 de abril del año 2022). Ecuaciones diferenciales I: El plano traza-determinante. *Nekomath Blog*. Recuperado el 19 de julio de 2024, de <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-el-plano-traza-determinante/>
- [53] Ghaffari, A., Tomizuka, M., & Soltan, R. A. (2009). The stability of limit cycles in nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 56(3), 269-275. <https://doi.org/10.1007>

- [54] Gordillo, F. (2009). Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de Liapunov. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 6(2), 5-16. [https://doi.org/10.1016/S1697-7912\(09\)70088-3](https://doi.org/10.1016/S1697-7912(09)70088-3)
- [55] Miyagi, H., Munda, J. L., & Miyagi, N. (2001). Study on Lyapunov functions for Lienard-type nonlinear systems. *T. IEE Japan*, 121(4), 748-755.
- [56] Arrowsmith, D. K., & Place, C. M. (1990). *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Vol. 1.

# Emmanuel Alfredo Rodríguez Ortiz

## Conteo de Ciclos LImite en los Sistemas de LÍenard.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

### Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:416961057

Fecha de entrega

17 dic 2024, 11:43 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

17 dic 2024, 11:51 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

Conteo de Ciclos LImite en los Sistemas de LÍenard.pdf

Tamaño de archivo

6.2 MB

110 Páginas

22,467 Palabras

102,880 Caracteres

# 15% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

## Fuentes principales

- 15%  Fuentes de Internet
- 7%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

## Marcas de integridad

### N.º de alertas de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**  
30 caracteres sospechosos en N.º de páginas  
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.
-  **Texto oculto**  
4 caracteres sospechosos en N.º de página  
El texto es alterado para mezclarse con el fondo blanco del documento.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
<b>Programa educativo</b>	Maestría en ciencias en ingeniería física	
<b>Título del trabajo</b>	Conteo de ciclos límite en los sistemas de Liénard	
	<b>Nombre</b>	<b>Correo electrónico</b>
<b>Autor/es</b>	Emmanuel Alfredo Rodríguez Ortiz	1803608b@umich.mx
<b>Director</b>	Dr. Joaquín Estevez Delgado	joaquin.estevez@umich.mx
<b>Codirector</b>	Dr. Ulises Uriostegui Legorreta	ulises.uriostegui@umich.mx
<b>Coordinador del programa</b>	Dr. Dagoberto Cardona Ramírez	mae.ciencias.ingenieria.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	Sí	Se utilizó I.A para encontrar sinónimos o para ideas en cuanto a la redacción y escritura de ciertos párrafos.
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Revisión y corrección de estilo	Si	Se utilizó I.A para la corrección ortográfica.
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	Si	Se utilizó I.A para poner todas las referencias en el mismo estilo y contarlas.
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Emmanuel Alfredo Rodríguez Ortiz
Lugar y fecha	Morelia Michoacán, México a 16 de diciembre del 2024.