



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

DOCTORADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

**ÓRBITAS CASI PERIÓDICAS EN EL MODELO DE KUNO CON
INTERFERENCIA REPRODUCTIVA Y EN EL DE CATÁLISIS
ENZIMÁTICA CON SUMINISTRO DE SUSTRATO E INHIBIDOR**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA
FÍSICA**

PRESENTA

JOSÉ LUIS SÁNCHEZ PONCE

DIRECTOR DE TESIS

DR. HOMERO GEOVANI DÍAZ MARÍN

MORELIA, MICHOACÁN, A 8=7-9A 6F9'8E 2024.



Dedicado a mi mamá

AGRADECIMIENTOS:

Agradezco el apoyo y la confianza que me han brindado siempre mis seres queridos. Quiero también dedicar este trabajo a todos ellos. Especialmente, tengo presente las enseñanzas que me han transferido mis padres, todas ellas significan algo muy valioso y me ayudan para seguir hacia adelante.

Agradezco a mis hermanos su afecto incondicional, su amistad y apoyo viven en mí. Todas nuestras vivencias desde la infancia están presentes en los esfuerzos que dediqué a este trabajo.

También dedico este trabajo a mis hijos y a mi esposa. El círculo familiar que comparto con ellos me da felicidad, amor y le da sentido a mi vida. Agradezco el apoyo, la confianza y el amor que me ha dado mi esposa; ella significa algo muy especial para mí en este logro.

Agradezco y comparto este trabajo con todos mis amigos. Con ellos celebraré con mucho gusto cada logro de ellos o mío.

Agradezco de manera especial a mi asesor de tesis, y al mismo tiempo, sinodal, el Dr. Homero Geovani Díaz Marín, su apoyo académico, su gran interés y compromiso para con este trabajo fueron fundamentales para un favorable desempeño y para una realización integral del proyecto.

Agradezco el apoyo brindado por parte de la Coordinación de la investigación Científica, UMSNH, 2024, por los recursos brindados para el proyecto: *Modelos biológicos oscilatorios no autónomos que emplean Ecuaciones Diferenciales Parciales y Ordinarias*.

Agradezco la participación de mis sinodales en este trabajo: el Dr. Carlos Osvaldo Osuna Castro, el Dr. Joaquín Estévez Delgado, el Dr. Petr Zhevandrov y el Dr. Gonzalo Viramontes Gamboa. Su revisión, sus aportaciones y observaciones, y su compromiso con este trabajo fueron muy importantes y sumaron significativamente para la mejora del resultado.

ÓRBITAS CASI PERIÓDICAS EN EL SISTEMA
DE KUNO CON INTERFERENCIA
REPRODUCTIVA Y EN EL DE CATÁLISIS
ENZIMÁTICA CON SUMINISTRO DE
SUSTRATO E INHIBIDOR

RESUMEN:

En este trabajo presentamos una teoría que establece condiciones suficientes para garantizar la existencia de al menos una solución casi periódica en ciertos sistemas. Nosotros trabajamos el modelo competitivo entre dos especies con interferencia reproductiva propuesto por Eizi Kuno en 1992, considerando los coeficientes como funciones casi periódicas, generalizando primeramente el caso constante, pero también el caso periódico. En ese modelo podemos garantizar la existencia de una órbita casi periódica positiva que corresponde a la coexistencia entre las dos especies. Ahora, si en el modelo de Kuno se consideran a los parámetros que corresponden a la interferencia reproductiva iguales a cero, nos encontramos entonces con el conocido modelo competitivo de Lotka-Volterra, entonces aplicamos a este modelo los resultados obtenidos en el modelo de Kuno y se concluye como corolario directo la existencia de una órbita casi periódica positiva. Usando herramientas teóricas sobre el promedio de una función casi periódica podemos probar que el modelo de Lotka-Volterra admite a lo más una solución casi periódica positiva. Tal estabilidad global en el modelo de Lotka-Volterra con coeficientes casi periódicos ya había sido probada y presentada por K. Gopalsamy en 1986. Al comparar nuestro resultado de estabilidad global con el de K. Gopalsamy encontramos que son muy semejantes y las condiciones son esencialmente las mismas. Sin embargo las condiciones de nuestro resultado implican las condiciones del Teorema de Gopalsamy pero el recíproco no sucede. Presentamos entonces otro resultado de estabilidad global y las condiciones ahí requeridas no implican las condiciones del resultado de Gopalsamy, obteniendo entonces un resultado independiente que implica la estabilidad global para ciertos sistemas que no pueden ser resueltos por el Teorema de Gopalsamy. Después, se presentan dos ejemplos de sistemas de Kuno y vemos que coinciden los resultados numéricos con lo que hemos obtenido en la teoría. En los dos ejemplos de sistemas de Kuno que damos, se puede ver, numéricamente, semejanzas cualitativas entre ambos sistemas. En cada caso sucede lo siguiente:

Existe una región D compacta, positivamente invariante y atractora de todas las órbitas

y una subregión $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ en D que queda aislada de los ejes cartesianos y que también es positivamente invariante, ahí se encuentra la solución de la coexistencia. Analíticamente la unicidad de la solución no fue probada, pero numéricamente es evidente. Existen solamente tres soluciones casi periódicas en D , las correspondientes a la exclusión, cada una dentro de D pero se ubican en los ejes, y la solución positiva que está en la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Además, toda órbita converge hacia una de las tres soluciones casi periódicas. Las órbitas en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ convergen hacia la solución ahí dentro, y para las condiciones iniciales que están en D pero fuera de $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, algunas, las que están lo suficientemente cerca de los ejes se van a los ejes, las otras convergen hacia la coexistencia. También presentamos unas gráficas que permiten distinguir, numéricamente, cuáles son las órbitas que convergen hacia la coexistencia y cuáles convergen a la exclusión.

Para el caso de dimensión mayor a dos, también se puede establecer una teoría análoga a la que se presentó sobre sistemas competitivos en dimensión 2, nosotros presentamos el caso de dimensión 4, que nos permite saber, que bajo ciertas condiciones puede garantizarse la existencia de una órbita casi periódica para sistemas que son definidos monótonos. Aplicamos esta teoría a un modelo matemático que corresponde a un fenómeno químico donde una enzima reacciona ante el suministro de un sustrato y un inhibidor. Es el modelo químico de catálisis enzimática con suministro de sustrato e inhibidor oscilante, con oscilación casi periódica. Ahí, se describe a una reacción enzimática bajo un suministro y se estudia cómo las fluctuaciones con cierta periodicidad en las concentraciones del sustrato afectan la actividad enzimática y si se puede conservar el patrón oscilante. Encontramos que en este modelo existe una solución casi periódica positiva. También probamos que el sistema admite a lo más una solución casi periódica y queda probada también la estabilidad global.

Palabras clave: *sistemas competitivos, funciones casi periódicas, sistemas monótonos, estabilidad global.*

ABSTRACT:

In this work, we present a theory that establishes sufficient conditions to guarantee the existence of at least one almost periodic solution in certain systems. We study the competitive model between two species with reproductive interference proposed by Eizi Kuno in 1992, considering the coefficients as almost periodic functions, generalizing first the constant case and also the periodic case. In this model, we can guarantee the existence of a positive almost periodic orbit corresponding to the coexistence of the two species.

Now, if the parameters corresponding to reproductive interference in Kuno's model are set to zero, we encounter the well-known Lotka-Volterra competitive model. We then apply the results obtained from Kuno's model to this case and conclude, as a direct corollary, the existence of a positive almost periodic orbit. Using theoretical tools related to the average of an almost periodic function, we can prove that the Lotka-Volterra model admits at most one positive almost periodic solution. Such global stability in the Lotka-Volterra model with almost periodic coefficients had already been proven and presented by K. Gopalsamy in 1986.

When comparing our global stability result with that of K. Gopalsamy, we find that they are very similar and that the conditions are essentially the same. However, the conditions of our result imply those of Gopalsamy's theorem, but the converse is not true. We then present another global stability result, where the required conditions do not imply those of Gopalsamy's result, obtaining an independent result that guarantees global stability for certain systems that cannot be resolved by Gopalsamy's theorem.

Next, we present two examples of Kuno's systems and demonstrate that the numerical results align with what we have obtained in the theory. In the two examples of Kuno's systems we provide, qualitative similarities between the two systems are numerically evident. In each case, the following occurs:

There exists a compact, positively invariant, and attracting region D for all orbits, as well as a subregion $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ within D , which is isolated from the Cartesian axes and also

positively invariant. The coexistence solution is located there. Analytically, the uniqueness of the solution was not proven, but it is numerically evident. There are only three almost periodic solutions within D : two corresponding to exclusion (each located on one of the axes) and one positive solution found in the region $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Moreover, every orbit converges to one of these three almost periodic solutions. The orbits in $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ converge to the solution within it. For initial conditions in D but outside $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, some orbits close to the axes move toward the axes, while others converge to coexistence. We also present graphs that allow us to numerically distinguish which orbits converge to coexistence and which converge to exclusion.

For the case of dimensions greater than two, an analogous theory to the one presented for two-dimensional competitive systems can also be established. We present the four-dimensional case, which allows us to determine that under certain conditions, the existence of an almost periodic orbit can be guaranteed for systems defined as monotone. We apply this theory to a mathematical model corresponding to a chemical phenomenon where an enzyme reacts to the supply of a substrate and an inhibitor. This is the chemical model of enzymatic catalysis with oscillating substrate and inhibitor supply, exhibiting almost periodic oscillations. Here, an enzymatic reaction under supply is described, and we study how fluctuations with certain periodicity in the substrate concentrations affect enzymatic activity and whether the oscillatory pattern can be preserved. We find that this model has a positive almost periodic solution. We also prove that the system admits at most one almost periodic solution and that global stability is also proven.

Keywords: *competitive systems, almost periodic functions, monotonous systems, global stability.*

Índice general

INTRODUCCIÓN	8
1. SISTEMAS COMPETITIVOS	14
1.1. Sistemas competitivos	14
1.2. Funciones casi periódicas	18
2. EL MODELO DE KUNO	26
2.1. El modelo con interferencia reproductiva de Eizi Kuno	26
2.2. La región invariante y atractora global del sistema.	30
2.3. Las soluciones atractoras de la exclusión	34
2.4. Solución casi periódica positiva de la coexistencia	37
3. APLICACIÓN AL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA	42
3.1. Aplicación al modelo de Lotka-Volterra	43
3.2. Otro Teorema de estabilidad asintótica global en L.V.	53
4. EJEMPLOS NUMÉRICOS DEL MODELO DE KUNO	63
4.1. Curva crítica divisoria	73
5. CATÁLISIS ENZIMÁTICA MONÓTONA CON SUMINISTRO OSCILANTE DE SUSTRATO E INHIBIDOR	84

5.1. Monotonía respecto al octante $K = \mathbb{R}_{\leq 0}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}^2$	84
5.2. Modelo de catálisis enzimática	89

INTRODUCCIÓN

En este trabajo consideramos, primeramente, un modelo de interferencia reproductiva entre dos especies. Los parámetros del modelo incluyen funciones continuas y casi periódicas, las cuales generalizan a las funciones periódicas. El modelo es una generalización del modelo de Lotka-Volterra competitivo, dado que si los parámetros de interferencia reproductiva son igual a cero se tiene el modelo de Lotka-Volterra. El objetivo es encontrar condiciones en el modelo para garantizar una solución casi periódica positiva. Las condiciones que encontramos en este trabajo, se encuentran en el capítulo 2, y son respecto a los datos iniciales de cada población y a los parámetros del sistema, y nos permiten implicar la coexistencia. El análisis gráfico de la interacción entre las dos especies, que presentamos en el capítulo 4, muestra que, al igual que en el modelo de competencia por recursos, el resultado es coexistencia estable o la exclusión gradual de una especie por otra. Tales resultados generalizan los conocidos resultados para el modelo competitivo de Lotka-Volterra con parámetros casi periódicos. La estrategia que usamos para garantizar la existencia de una solución positiva casi periódica en el modelo de Kuno es establecer que ese modelo, admite una *sub-solución* y una *súper solución* y entonces cumple con las condiciones del Teorema 1. Entonces, al probar que el modelo de Kuno admite al menos una solución positiva casi periódica podemos aplicar este resultado e implicar como un corolario que para el caso particular del modelo de Lotka-Volterra también sucede entonces la coexistencia entre las dos especies, resultado ya establecido

en [8] por K. Gopalsamy. El trabajo que hacemos sobre el modelo de Lotka-Volterra lo presentamos en el capítulo 3. Entonces podemos comparar el resultado de K. Gopalsamy con el nuestro y encontramos que las condiciones de nuestro corolario implican las condiciones del resultado de K. Gopalsamy, aunque son condiciones muy semejantes. Esto quiere decir que cualquier modelo de Lotka-Volterra que puede ser resuelto por nuestro corolario también es resuelto por K. Gopalsamy. Sin embargo, aparte del corolario citado, también probamos otro resultado, ya sin pasar por el modelo de Kuno, sino usando directamente el Teorema 1 que nos provee de soluciones casi periódicas, y entonces podemos establecer otro teorema de coexistencia y estabilidad asintótica global, pero este otro resultado ya no es implicado por el resultado de Gopalsamy. De hecho, damos un ejemplo de un sistema que posee coexistencia y estabilidad global gracias a nuestro teorema, pero no cumple las condiciones del Teorema de Gopalsamy sobre el modelo de Lotka-Volterra presentado en [8].

En el estudio de la interacción entre pares de especies, una hipótesis común es introducir competencia puramente interespecífica en el consumo de los recursos disponibles en el ambiente. Por tanto, por falta de recursos puede existir un fenómeno de exclusión de una de las especies en favor de la otra. En otras situaciones no críticas, la coexistencia es un efecto que puede predecirse del modelo. Clásicamente, estas interacciones se abordan mediante modelos del tipo Lotka-Volterra. Sin embargo, en algunos casos, notablemente entre herbívoros, las especies están relacionadas tan cercanamente que tal mecanismo de exclusión no es satisfactorio para explicar la interacción entre pares de especies. Por ejemplo, muchas especies pueden tener el mismo nicho con los mismos recursos y tener una coexistencia estable. Una hipótesis biológica diferente se requiere para explicar tal fenómeno. Algunos modelos por ejemplo asumen interferencia reproductiva.

La interferencia reproductiva se introduce en el sentido más convencional de selección errónea de pareja que reduce la aptitud de una de las especies. Este tipo de interferencia fue considerada por primera vez por Riberio y Spielman en [1]. Notablemente, un modelo continuo pionero fue introducido por Kuno en [11] para explicar los mecanismos de exclusión

entre pares de grupos de especies de mariposas. Si las especies en el estudio están relacionadas cercanamente en el sentido taxonómico, es posible asumir en el modelo una interferencia puramente reproductiva. Tal interferencia reproductiva puede aparecer en diversas formas: por ejemplo, dos especies pueden tener el mismo hábitat y planta huésped pero puede existir un aislamiento mutuo de la temporada reproductiva o de los períodos de vuelo. También puede existir interferencia química producida por la similitud de la comunicación a través de las feromonas sexuales. En general, los tipos de interferencia reproductiva son clasificados como sigue (ver [20]): interferencia química, rivalidad heteroespecífica, cortejo mal dirigido, intento de apareamiento heteroespecífico, elección errónea de la pareja femenina y apareamiento heteroespecífico.

En el modelo original de Kuno también es posible introducir la competencia usual por recursos del ambiente que no se relaciona con actividades reproductivas. La predicción final del modelo puede ser ya sea exclusión o coexistencia estable, dependiendo de las densidades iniciales así como de los parámetros del modelo. Tales parámetros incluyen las tasas de nacimiento y muerte, las tasas de competencia por recursos inter e intraespecíficas, así como también el coeficiente que mide la interferencia reproductiva. Una descripción matemática detallada de los resultados de estabilidad local para el modelo en [13] es dada en [3], estableciendo que tanto la competencia por recursos como la interferencia reproductiva promueven condiciones para la coexistencia o la exclusión. Además encuentran evidencia numérica de una región de coexistencia para el parámetro correspondiente a la interferencia reproductiva.

La interferencia reproductiva ha sido ampliamente observada y estudiada, tanto en la naturaleza como en el laboratorio, en el contexto de invasiones de poblaciones foráneas contra poblaciones autóctonas.

Una relación exhaustiva de evidencia de laboratorio y de campo ha sido recolectada en [20] para hasta de 167 pares de especies. Esta interferencia altera el éxito reproductivo de una o ambas especies. Estudios posteriores de campo tomando en cuenta factores ecológicos tales como temperatura, humedad, temporalidad, distribución espacial, son de importancia primordial para justificar las políticas de preservación para evitar la

extinción de especies nativas por especies invasoras cercanas filogenéticamente. La interferencia reproductiva necesita también ser considerada en programas de reinserción así como en el aumento de interacciones sexuales entre poblaciones desplazadas debido al cambio climático.

El modelo de Kuno ha sido contrastado con datos empíricos en poblaciones de parejas de ácaros [4] (ver también las referencias aquí). En las plantas también hay casos de interferencia reproductiva tales como los berberechos [5], donde ambos procesos de competencia fueron observados: competencia por recursos y competencia reproductiva. Por un lado, las especies invasoras disminuyeron la tasa de germinación de las especies nativas, mientras que éstas últimas dominaron la competencia por recursos en hábitats cercanos al mar. La interferencia reproductiva de dientes de león invasores a nativos es documentada en [6]. En este estudio el éxito de la producción de semillas por polinización indica que la abundancia de invasores tienen un efecto adverso en el éxito reproductivo de plantas autóctonas, volviéndose menos abundantes y acabando siendo desplazadas por las foráneas. También existen indicativos de que la temperatura incrementa la interferencia reproductiva y los polinizadores se vuelven más activos.

Este último ejemplo muestra la influencia de las fenologías de las flores en la interferencia reproductiva. Más generalmente, estando la actividad reproductiva íntimamente ligada a la fenología de las especies, los ciclos de tiempo pueden intervenir en las interferencias reproductivas de especies invasoras. Esto motiva el estudio de la variación de las interacciones interespecíficas en el modelo original de Kuno.

El estudio ecológico de una población en un ambiente fluctuante ha sido extensamente modelado con coeficientes periódicos continuos (por ejemplo, ver [21]), donde el modelo considera la ecuación logística. Más recientemente la descripción de soluciones casi periódicas para la ecuación logística con coeficientes casi periódicos aparece en [13]. El fenómeno oscilatorio para la interacción de dos o más especies en un ambiente fluctuante debido a la introducción de parámetros continuos periódicos dependientes del tiempo fue originalmente propuesta por Gopalsamy en [7] para el modelo clásico de Lotka-Volterra.

Nuestro objetivo a lo largo de este trabajo es proveer resultados matemáticos rigurosos acerca de la exclusión y la coexistencia de dos especies competidoras, en relación con el modelo de Kuno de interferencia reproductiva incorporando coeficientes “oscilatorios” dependientes del tiempo, los cuales son funciones casi periódicas.

La razón para considerar coeficientes casi periódicos es el hecho de que los diferentes factores que originan las diferentes fenologías no necesariamente tienen el mismo período. Es más realista entonces considerar el caso con diferentes frecuencias que no necesariamente tienen el mismo período. Para algunas consideraciones de no sincronidad en interacciones cooperativas entre especies, ver [9]. Esto nos lleva al caso cuasi-periódico, o más generalmente a la incorporación de funciones continuas casi periódicas como coeficientes del sistema no autónomo. Nuestro resultado principal es el Teorema 3 donde describimos condiciones suficientes en los coeficientes para encontrar una región rectangular donde las condiciones iniciales conducen a la coexistencia como una solución casi periódica positiva.

Por otro lado, en el capítulo 5, presentamos un modelo matemático en \mathbb{R}^4 , que describe un fenómeno químico referente a una reacción enzimática bajo un suministro oscilante de un sustrato y un inhibidor. La catálisis enzimática monótona con suministro oscilante de sustrato e inhibidor estudia cómo las fluctuaciones con cierta periodicidad en las concentraciones de sustrato e inhibidor afectan la actividad enzimática en un sistema donde la reacción enzimática puede conservar el patrón oscilante.

Nosotros consideramos la reacción en la que un sustrato S es catalizado por una enzima E , obteniendo un complejo ES del cual extraemos un producto P , y en consecuencia se considera un inhibidor, I . Al tratar con suministro oscilante, obtenemos entonces una red abierta de reacciones, donde consideraremos una fuente oscilatoria que introduce las especies S e I a una velocidad oscilatoria dependiente del tiempo. Nuestro objetivo en este trabajo es extender el estudio de los fenómenos de estabilidad global relacionados con entradas y/o salidas oscilatorias, donde los términos de forzamiento pueden aparecer simultáneamente sin asumir ninguna sincronidad en sus frecuencias. En este modelo también encontramos las condiciones que nos permiten garantizar la existencia de una única solu-

ción casi periódica positiva que es atractora global de todas las órbitas. Esta estabilidad asintótica global permite predecir la evolución del sistema.

Las pruebas y más información acerca de funciones casi periódicas pueden encontrarse en [14,15,16,17]. Para una exposición más reciente de la teoría ver también [18].

Capítulo 1

SISTEMAS COMPETITIVOS

1.1. Sistemas competitivos

Al analizar la dinámica de una sola especie, un modelo más realista para el crecimiento poblacional en muchos casos, más que el modelo exponencial dado por $x' = ax$, $a = cte$, está dado por la ecuación diferencial logística

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

En este caso se considera que el crecimiento poblacional tiene un máximo más allá del cual la población no puede ya expandirse. Esto puede ser debido a cierta limitación del espacio, a factores alimentarios, etc.

Resolviendo la ecuación se obtiene que

$$x(t) = \frac{N}{1 + K \exp(-at)},$$

donde $K = \frac{N-x(0)}{x(0)}$. Es claro que $x(t) \rightarrow N$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Si ahora consideramos un crecimiento poblacional dado por una función de crecimiento logístico, pero además a dicha población se le extrae o recolecta periódicamente una cierta cantidad de individuos de la población, donde dicha cantidad extraída depende del tiempo, entonces nos encontramos con un modelo del tipo

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u) - h(t),$$

siendo $f(u)$ una función no lineal de tipo logística (por ejemplo $f(u) = au - bu^p$, $a, b > 0$, $p \geq 2$) y $h(t)$ es una función continua de periodo T , esto es, $h(t + T) = h(t)$, y además se supone que $\int_0^T h(t) dt > 0$. Así, permitimos que $h(t)$ tome valores negativos, es decir, podrían agregarse de vez en cuando individuos en vez de recolectarse. Sin embargo la resultante debe ser estrictamente una recolección. Además, sin pérdida de generalidad, normalizando, suponemos que $\int_0^T h(t) dt = T$, y así el modelo se puede escribir como

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u(t)) - \epsilon h(t)$$

donde ϵ mide o modula el grado de perturbación de la influencia de la recolección $h(t)$.

Un resultado correspondiente al anterior modelo establece condiciones sobre f que permiten conocer características de la evolución del sistema en términos de la existencia de soluciones periódicas dependiendo del parámetro ϵ . Ver [2].

Suponiendo que se cumple lo siguiente: $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, $f(u) > 0$ para $u \in [0, N]$, $f(N) = 0$, $f'(N) < 0$ y $f''(u) < 0$ para $u \in \mathbb{R}$.

Entonces existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que el sistema tiene exactamente dos soluciones T -periódicas para $\epsilon < \epsilon_0$, una única solución T -periódica para $\epsilon = \epsilon_0$, y no hay soluciones T -periódicas para $\epsilon > \epsilon_0$.

En el caso en que se consideran dos especies interactuando competitivamente y se pretende analizar la evolución de la población de cada una de la especies, o en general dos variables, se consideran los siguientes sistemas de dimensión dos, y es conveniente requerir ciertas condiciones. Para más información sobre sistemas competitivos puede verse [23].

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x(t), y(t)), \\ \dot{y} &= g(t, x(t), y(t)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

con $U \subset \mathbb{R}^2$ abto, $f, g : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ funciones C^1 en U y continuas en t .

Definición 1: Sistema (1.1) es llamado *competitivo* en $\mathbb{R} \times U$ si

$$f_y(t, x, y) \leq 0, \quad g_x(t, x, y) \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, (x, y) \in U.$$

Recordamos que un orden parcial en un conjunto A es una relación \preceq que cumple, para cualesquiera a, b, c en A , las propiedades de reflexividad, es decir $a \preceq a$; antisimetría, es decir que si $a \preceq b$ y $b \preceq a$, entonces $a = b$, y transitividad, si $a \preceq b$ y $b \preceq c$, entonces $a \preceq c$.

Definición 2: Sean $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ en \mathbb{R}^2 , decimos que

$$u \leq_{(IV)} v \text{ si } u_1 \leq v_1 \text{ y } u_2 \geq v_2.$$

Si $u \leq_{(IV)} v$ y $u \neq v$ escribimos $u <_{(IV)} v$. Si $u_1 < v_1$ y $u_2 > v_2$, escribimos $u \ll_{(IV)} v$.

La relación $\leq_{(IV)}$ define un orden parcial en \mathbb{R}^2 .

Definición 3: Una pareja $(a(t), b(t))$ es una *(IV)-sub-solución* de (1.1) si para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \dot{a} &\leq f(t, a(t), b(t)), \\ \dot{b} &\geq g(t, a(t), b(t)). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Similarmente, $(A(t), B(t))$ es una *(IV)-súper-solución* si para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \dot{A} &\geq f(t, A(t), B(t)), \\ \dot{B} &\leq g(t, A(t), B(t)), \end{aligned} \tag{1.3}$$

Una elección de una sub-solución y una súper-solución es *ordenada* si para todo $t \geq 0$, $(a(t), b(t)) \ll_{(IV)} (A(t), B(t))$.

El siguiente lema es demostrado en [10], y establece que el orden parcial $\leq_{(IV)}$ se conserva bajo el flujo del campo del sistema (1.1).

Lema 1: *Considere un sistema que cumple (1.1). Suponga que para todo $t \geq 0$ $(a(t), b(t)) \ll_{(IV)} (A(t), B(t))$ son una sub-solución y una súper-solución ordenada. Si $(x(t), y(t))$ es una solución cualquiera con condición inicial tal que $(a(0), b(0)) \leq_{(IV)} (x(0), y(0)) \leq_{(IV)} (A(0), B(0))$, entonces para cada $t \geq 0$*

$$(a(t), b(t)) \leq_{(IV)} (x(t), y(t)) \leq_{(IV)} (A(t), B(t)). \quad (1.4)$$

1.2. Funciones casi periódicas

Al trabajar con el sistema (1.1), consideramos escenarios donde los factores ambientales pueden fluctuar sin tener necesariamente frecuencias sincronizadas, y con este tratado se incluyen fenómenos más realistas que aquellos en donde se asume una periodicidad sincronizada. Esta es la motivación biológica que propicia que consideremos funciones casi periódicas en vez de periódicas, aunque el primer caso generaliza al segundo. Desde un punto de vista del análisis funcional las funciones casi periódicas pueden presentarse de la siguiente forma:

Empezamos con el espacio de funciones Banach

$$\mathcal{CB} = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ es continua y acotada}\}$$

con la norma del supremo $\|p\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |p(t)|$. Para cada $T > 0$ sea

$$Per(T) = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ es continua y } T\text{-periódica}\}.$$

$Per(T)$ es un subespacio vectorial de \mathcal{CB} .

$$\text{Sea } Per = \bigcup_{T > 0} Per(T).$$

El conjunto Per no es cerrado algebraicamente (con el producto de funciones) ni topológicamente. El álgebra de Banach generada por Per se denota por \mathcal{AP} y a cada elemento de \mathcal{AP} se le llama una función casi periódica. Esto es

$$Per \subset \mathcal{AP} \subset \mathcal{CB}$$

y \mathcal{AP} es el álgebra de Banach más pequeña que satisface esta cadena de inclusiones.

Dos ejemplos de funciones casi periódicas que no son periódicas son

$$p_1(t) = \text{sen } t + \text{sen} \sqrt{2} t,$$

$$p_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{sen} \left(\frac{t}{n} \right).$$

Existen varias definiciones equivalentes de una función casi periódica, entre ellas está la definición de Bohr y la caracterización de Bochner. En esta sección presentamos los principales resultados respecto a funciones casi periódicas. Las demostraciones y más información pueden encontrarse en [14,15,16,17]. Para una exposición más reciente de la teoría puede consultarse [18].

Definición 4: El espacio de *funciones casi periódicas* es la cerradura

$\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ del álgebra \mathcal{T} del espacio de todos los polinomios trigonométricos

$$c_0 + c_1 e^{i\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{i\lambda_n t}$$

cuyo conjunto de frecuencias, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ es arbitrario y $c_k \in \mathbb{R}$ para $k = 1, \dots, n$. Consideramos a \mathcal{T} como un subespacio del espacio de las funciones continuas y acotadas $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con la norma del supremo. A continuación presentamos solamente algunas de las propiedades más importantes del espacio $\mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposición 1:

1. Cada $\phi \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es uniformemente continua.
2. $\mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es una algebra de Banach.
3. Para cada $\phi \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ existe una sucesión de frecuencias $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ cuyos correspondientes coeficientes de Fourier

$$c[\phi, \lambda_k] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \phi(s) \cdot e^{-i\lambda_k s} ds$$

son distintos de cero y no dependen de t_0 . Existe una serie de Fourier asociada:

$$\phi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c[\phi, \lambda_k] e^{i\lambda_k t}.$$

4. Para cada $\phi \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, existe el promedio,

$$\bar{\phi} = M[\phi] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \phi(s) ds,$$

el cual es un funcional lineal bien definido (no depende de $t_0 \in \mathbb{R}$) continuo $M : \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$.

5. Para cada $\phi \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, se cumple la desigualdad de Parseval:

$$M[|\phi|^2] = \sum_{k=1}^{\infty} |c[\phi, \lambda_k]|^2.$$

6. Sean $\phi, \varphi \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, y $a, c \in \mathbb{R}$ constantes, entonces las siguientes funciones también son casi periódicas

$$\phi(t) + c\varphi(t), \phi(t + a), \phi(at), \phi(t) \cdot \varphi(t), 1/\phi(t) \text{ when } \phi(t) \geq \phi_* > 0.$$

7. La primitiva de una función casi periodica es casi periodica si y sólo si es acotada.

Una caracterización del espacio $\mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ se da en la siguiente proposición. Una demostración puede encontrarse en [18], en las Proposiciones 3.6 y 3.7, y también en [19], Lema I.2.1 y Teorema I.2.3.

Proposición 2: Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. $\phi \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. (Propiedad de Bohr) Dada $\phi \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto de números reales $T(\phi, \epsilon) \subset \mathbb{R}$, y una $\ell = \ell(\phi, \epsilon) > 0$, tal que cada intervalo $(a, a + \ell)$ de longitud $\ell > 0$ contiene al menos un ϵ -casi periodo $\tau \in T(\phi, \epsilon)$, tal que a

$$|\phi(t + \tau) - \phi(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. (Propiedad de Bochner) Para cada sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, el conjunto de traslaciones

$$\mathcal{F} = \{\phi_n(t) := \phi(t + h_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

es relativamente compacto, es decir existe una subsucesión $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\phi_{n_k}(t)$ converge uniformemente a

$$\psi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(t + h_{n_k}) \in \mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Definición 5: Una función continua $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es *uniformemente casi periódica* con respecto a $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, si para cada compacto $K \subset D$, y para cada $\epsilon > 0$, existe una longitud $\ell(\epsilon, f, D) > 0$ tal que cualquier intervalo $T(\epsilon, f, D)$ de longitud $\ell(\epsilon, f, D)$ tiene al menos

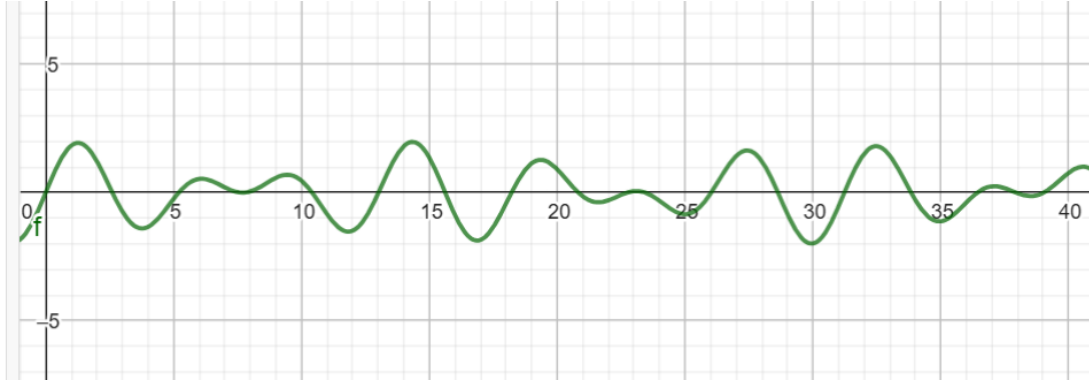


Fig. 1.1: Gráfica de la función $f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$. Es una función casi periódica que no es periódica.

un número de traslación $\tau \in T(\epsilon, f, D)$ tal que

$$|f(t + \tau, x) - f(t, x)| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in D.$$

Se demuestra que, si f tiene una expansión de Fourier real,

$$f(t, x) \sim \bar{f}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a[\lambda_n, x] \cos(\lambda_n t) + b[\lambda_n, x] \sin(\lambda_n t),$$

entonces f es uniformemente casi periódica si las frecuencias λ_n no dependen de x . Ver [18], capítulo VI.

El siguiente teorema es demostrado en [10] y establece condiciones suficientes para la existencia de al menos una solución casi periódica para sistemas competitivos.

Teorema 1: *Suponga que el sistema (1.1) tiene componentes f y g , las cuales son uniformemente casi periódicas con respecto a $(x, y) \in U$*

($U \subset \mathbb{R}^2$ una región). Suponga que f, g son de clase C^1 en U . Si el sistema es competitivo y tiene una (IV)-sub-solución $(a(t), b(t))$ que no sea solución, y una (IV)-súper-solución $(A(t), B(t))$ que tampoco es solución tal que $(a(t), b(t)) \ll_{(IV)} (A(t), B(t))$, entonces el sistema tiene una solución casi periódica $(x(t), y(t))$ en U .

Nosotros usaremos el Teorema 1 para garantizar la existencia de una solución casi periódica en el modelo con interferencia reproductiva de Eizi Kuno, el sistema (2.1) que se presenta en el capítulo 2. En el capítulo 3 establecemos dos resultados de estabilidad asintótica global para el conocido modelo competitivo entre dos especies de Lotka-Volterra, dado por (1.5), donde consideramos los coeficientes como funciones casi periódicas, y usando nuestras herramientas podemos obtener resultados parecidos a los presentados por K. Gopalsamy en [7] y [8].

Sistema Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = x(t) [b_1(t) - a_{11}(t)x(t) - a_{12}y(t)], \tag{1.5}$$

$$\dot{y} = y(t) [b_2(t) - a_{21}(t)x(t) - a_{22}y(t)].$$

En [7] K. Gopalsamy, para el sistema (1.5), supone que los coeficientes $b_i(t), a_{ij}(t) \geq 0, i, j = 1, 2$ son funciones periódicas del mismo periodo, y

establece condiciones suficientes para la existencia de una única solución periódica positiva asintóticamente estable. En [8], K. Gopalsamy, generaliza los resultados de [7] para el caso donde los coeficientes son funciones casi periódicas. En nuestro primer resultado que establece la estabilidad global para el modelo (1.5), el Teorema 4, la parte de existencia de solución casi periódica positiva se implica como corolario de los resultados que obtenemos para el caso más general que es el modelo de Kuno, y las condiciones del Teorema 4 implican las condiciones del Teorema de estabilidad global de K. Gopalsamy. Pero en el segundo resultado que obtenemos, el Teorema 5, no usamos al modelo de Kuno, sino que aplicamos directamente el Teorema 1 para garantizar la existencia de una solución positiva casi periódica sobre (1.5), y también se establece la estabilidad global, pero ese resultado no puede ser implicado por K. Gopalsamy, de hecho presentamos un ejemplo de un modelo de Lotka-Volterra que no puede ser resuelto por el Teorema de K. Gopalsamy pero sí por el Teorema 5 implicándose coexistencia asintóticamente estable.

Capítulo 2

EL MODELO DE KUNO

2.1. El modelo con interferencia reproductiva de Eizi Kuno

En el modelo competitivo entre dos especies propuesto por Eizi Kuno en 1992, el [11], se considera la interferencia reproductiva como un factor adicional de exclusión entre las dos especies. Este modelo generaliza a (1.5), dado que si los parámetros correspondientes a la interferencia reproductiva son nulos se corresponde entonces con el modelo de Lotka-Volterra. En [12] el modelo de Kuno es resuelto para el caso donde todos los coeficientes son constantes. Lo que se pretende es establecer condiciones en este modelo, sobre los coeficientes que son funciones casi periódicas, condiciones que nos garanticen soluciones casi periódicas. Obviamente que al considerar el caso en donde los coeficientes son funciones casi periódicas logramos una generalización del caso periódico.

$$\dot{A}_1 = r_1 A_1 \left(\frac{A_1}{A_1 + \delta_1 A_2} \right) - \alpha_1 A_1 (A_1 + \beta_1 A_2) - d_1 A_1, \quad (2.1)$$

$$\dot{A}_2 = r_2 A_2 \left(\frac{A_2}{A_2 + \delta_2 A_1} \right) - \alpha_2 A_2 (A_2 + \beta_2 A_1) - d_2 A_2.$$

Aquí, $A_1 = A_1(t)$, $A_2 = A_2(t)$ representan las poblaciones de las dos especies que interactúan competitivamente; $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$ representan las tasas de reproducción de A_1 y A_2 ; $d_1 = d_1(t)$, $d_2 = d_2(t)$ son las tasas de mortalidad; $\alpha_1 = \alpha_1(t)$, $\alpha_2 = \alpha_2(t)$ representan la intensidad de competición intraespecífica (competición entre la misma especie); $\beta_1 = \beta_1(t)$, $\beta_2 = \beta_2(t)$ miden la intensidad de competición interespecífica (competición entre diferentes especies) y $\delta_1 = \delta_1(t)$, $\delta_2 = \delta_2(t)$ miden la intensidad de interferencia reproductiva entre una especie y la otra. Suponga que los coeficientes r_i , d_i , α_i , β_i y δ_i son funciones casi periódicas no negativas.

Nuestra estrategia para saber que el sistema (2.1) admite al menos una solución casi periódica no trivial es construir una sub-solución y una súper-solución en el cono no negativo de \mathbb{R}^2 , la región

$$Q_1 = \{(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2 : A_1, A_2 \geq 0\}.$$

A las condiciones iniciales en Q_1 las llamaremos no negativas, y a las

condiciones iniciales del primer cuadrante o cono positivo

$$R_+ = \{(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2 : A_1, A_2 > 0\}$$

las llamaremos positivas.

Denotamos al sistema (2.1) como

$$\dot{A}_1 = f(t, A_1(t), A_2(t)), \tag{2.2}$$

$$\dot{A}_2 = g(t, A_1(t), A_2(t)).$$

Donde

$$f(t, A_1(t), A_2(t)) = r_1 A_1 \left(\frac{A_1}{A_1 + \delta_1 A_2} \right) - \alpha_1 A_1 (A_1 + \beta_1 A_2) - d_1 A_1,$$

$$g(t, A_1(t), A_2(t)) = r_2 A_2 \left(\frac{A_2}{A_2 + \delta_2 A_1} \right) - \alpha_2 A_2 (A_2 + \beta_2 A_1) - d_2 A_2.$$

Primeramente, suponga que para todo $t \geq 0$, se tiene que $r_i - d_i > 0$, $i = 1, 2$. Estamos denotando las derivadas parciales con f_{A_i}, g_{A_i} . Veamos que el sistema (2.1) es competitivo y que el origen es un punto repulsor. Para

esto, note que para cada $h > 0$,

$$\begin{aligned} f(h, 0) &= h(r_1 - \alpha_1 h - d_1), \\ g(0, h) &= h(r_2 - \alpha_2 h - d_2), \\ f(0, h) &= 0 = g(h, 0). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_{A_1}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = r_1 - d_1, \\ g_{A_2}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0, h)}{h} = r_2 - d_2, \\ f_{A_2} &= 0 = g_{A_1}. \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que la matriz jacobiana del sistema en el origen, la cual la denotamos por $J_K(0, 0)$, es la matriz diagonal

$$J_K(0, 0) = \begin{pmatrix} r_1 - d_1 & 0 \\ 0 & r_2 - d_2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Y como estamos suponiendo que para todo $t \geq 0$, $r_i - d_i > 0$, $i = 1, 2$. Entonces los dos eigenvalores de la matriz son reales positivos y por tanto el origen es punto repulsor. Además, es fácil ver que

$$f_{A_2} = -A_1 \left[\frac{\delta_1 r_1 A_1}{(A_1 + \delta_1 A_2)^2} + \alpha_1 \beta_1 \right], \quad g_{A_1} = -A_2 \left[\frac{\delta_2 r_2 A_2}{(A_2 + \delta_2 A_1)^2} + \alpha_2 \beta_2 \right].$$

Por lo tanto, claramente, $f_{A_2}, g_{A_1} \leq 0$. Es decir el sistema (2.1) es competitivo.

2.2. La región invariante y atractora global del sistema.

Para una función $G(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denotamos al ínfimo y al supremo de la función como: $G_* := \inf \{G(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $G^* := \sup \{G(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Lema 2: *Suponga que r_i , d_i , α_i , β_i y δ_i son funciones casi periódicas no negativas de $t \geq 0$, con $r_1^* > d_{1*}$, $\alpha_{i*} > 0$, $i = 1, 2$. Entonces el sistema (2.1) tiene una sub-solución y una súper-solución, dadas por $(N_1, 0)$ y $(0, N_2)$, respectivamente, para ciertas constantes positivas N_1, N_2 .*

Demostración: Una pareja de funciones $(a(t), b(t))$ es una sub-solución si se cumple la ecuación (1.2). Y, la pareja $(A(t), B(t))$ es una súper-solución si se cumple (1.3). Queremos encontrar una sub-solución de la forma $(0, N_2)$, y una súper-solución de la forma $(N_1, 0)$, del sistema (2.1), para ciertas constantes $N_1(t) = N_1 > 0$, $N_2(t) = N_2 > 0$. Empezamos buscando la sub-solución. Para esto, podemos ver que se cumple que

$$\frac{f(t, N_1, 0)}{N_1} = r_1 - \alpha_1 N_1 - d_1 \leq r_1^* - d_{1*} - \alpha_{1*} N_1.$$

Así, si definimos N_1 como

$$N_1 = \frac{r_1^* - d_{1*}}{\alpha_{1*}}, \tag{2.4}$$

entonces pasa que $f(t, N_1, 0) \leq 0$. Además es claro que para esta N_1 se cumple que $g(t, N_1, 0) \equiv 0$. Por lo tanto, para $(A_1(t), A_2(t)) = (N_1, 0)$,

$$(f(t, N_1, 0), g(t, N_1, 0)) \leq_{(IV)} (\dot{A}_1(t), \dot{A}_2(t)) = (0, 0).$$

Así, $(N_1, 0)$ es una súper-solución del sistema (2.1).

Similarmente, podemos ver que

$$\frac{g(t, 0, N_2)}{N_2} = r_2 - \alpha_2 N_2 - d_2 \leq r_2^* - d_{2*} - \alpha_{2*} N_2.$$

Si definimos N_2 como

$$N_2 = \frac{r_2^* - d_{2*}}{\alpha_{2*}}, \quad (2.5)$$

entonces pasa que $g(t, 0, N_2) \leq 0$. Además es evidente que $f(t, 0, N_2) \equiv 0$. Por lo tanto $(0, N_2)$ es una sub-solución del sistema. Esto termina la prueba del lema.

Hipótesis 1 (H1): Para el sistema (2.1), $i = 1, 2$, r_i , d_i , α_i , β_i y δ_i son funciones casi periódicas no negativas de $t \geq 0$ tales que

$$r_i^* > d_{i*} \quad (2.6)$$

$$\alpha_{i*} > 0 \quad (2.7)$$

Lema 3: *Asumiendo (H1), para $N_1 = \frac{r_1^* - d_{1*}}{\alpha_{1*}}$, $N_2 = \frac{r_2^* - d_{2*}}{\alpha_{2*}}$, la región cerrada D en \mathbb{R}^2 definida como*

$$D = \{(A_1, A_2) : 0 \leq A_1 \leq N_1, 0 \leq A_2 \leq N_2\} \quad (2.8)$$

es positivamente invariante. Además, para cada condición inicial positiva su órbita eventualmente cae en D .

Demostración: Primero, vemos que

$$r_1 \left(\frac{N_1}{N_1 + \delta_1 A_2} \right) - \alpha_1(N_1 + \beta_1 A_2) - d_1 \leq r_1 - \alpha_1 N_1 - d_1.$$

Por lo tanto

$$\frac{f(t, N_1, A_2)}{N_1} \leq r_1^* - \alpha_{1*} N_1 - d_{1*} = 0. \quad (2.9)$$

Similarmente, vemos que

$$r_2 \left(\frac{N_2}{N_2 + \delta_2 A_1} \right) - \alpha_2(N_2 + \beta_2 A_1) - d_2 \leq r_2 - \alpha_2 N_2 - d_2.$$

Entonces

$$\frac{g(t, A_1, N_2)}{N_2} \leq r_2^* - \alpha_{2*} N_2 - d_{2*} = 0. \quad (2.10)$$

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) implican que

$$f(t, N_1, A_2) \leq 0, \quad g(t, A_1, N_2) \leq 0, \quad (2.11)$$

por lo tanto,

$$D = \{(A_1, A_2) : 0 \leq A_1 \leq N_1, 0 \leq A_2 \leq N_2\}$$

es positivamente invariante. Ahora, si $A_1 \geq N_1$, entonces

$$A_1 \alpha_1 \left[\left(\frac{r_1^* - d_{1*}}{\alpha_{1*}} \right) - (A_1 + \beta_1 A_2) \right] = A_1 \alpha_1 [N_1 - (A_1 + \beta_1 A_2)] \leq 0.$$

Pero como

$$A_1 \left[r_1 \left(\frac{A_1}{A_1 + \delta_1 A_2} \right) - \alpha_1 (A_1 + \beta_1 A_2) - d_1 \right] \leq A_1 \alpha_1 \left[\left(\frac{r_1 - d_1}{\alpha_1} \right) - (A_1 + \beta_1 A_2) \right]$$

y

$$A_1 \alpha_1 \left[\left(\frac{r_1 - d_1}{\alpha_1} \right) - (A_1 + \beta_1 A_2) \right] \leq A_1 \alpha_1 \left[\left(\frac{r_1^* - d_{1*}}{\alpha_{1*}} \right) - (A_1 + \beta_1 A_2) \right].$$

Por lo tanto

$$f(t, A_1, A_2) = r_1 \left(\frac{A_1}{A_1 + \delta_1 A_2} \right) - \alpha_1 (A_1 + \beta_1 A_2) - d_1 \leq 0. \quad (2.12)$$

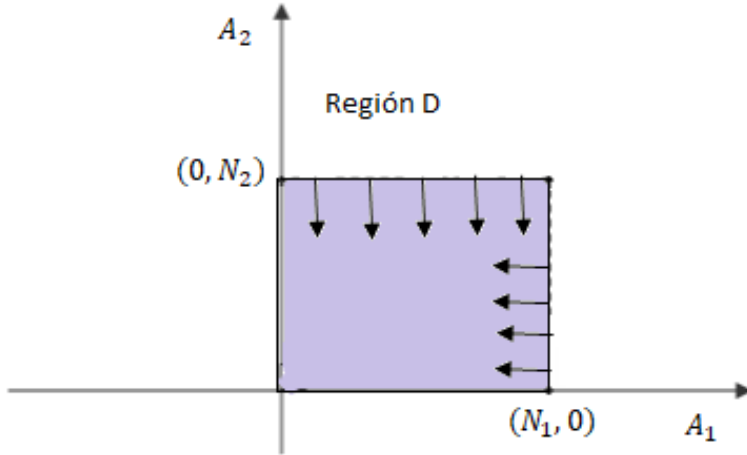


Fig. 2.1: Región atractora global D . La órbita de cada condición inicial en $Q_1 = \{(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2 : A_1, A_2 \geq 0\}$ eventualmente caen en D .

Similarmente, podemos concluir que para cada $t \geq 0$, si $A_1 \geq 0$ y $A_2 \geq N_2$, pasa que $g(t, A_1, A_2) \leq 0$. Por lo tanto, para cada condición inicial positiva fuera de D , su órbita cae eventualmente en D . Esto termina la demostración del lema.

2.3. Las soluciones atractoras de la exclusión

Considerando el caso del sistema (2.1), en el cual la población de la segunda especie es nula, esto es, para cada $t \geq 0$, $A_2(t) = 0$, entonces se obtiene la ecuación diferencial $\dot{A}_1 = A_1(r_1 - d_1 - \alpha_1 A_1)$. Bajo las condiciones que estamos considerando para los coeficientes, esta ecuación admite una única solución casi periódica positiva aislada del cero. Esto se prueba en [13], y se demuestra que tal solución queda oscilando en

un rango en $0 < A_1 \leq N_1$, y cuyo ínfimo es positivo. También, en [13], se demuestra que la solución casi periódica es atractora global de todas las soluciones positivas. Similarmente, en ausencia de la primer especie se obtiene la ecuación diferencial $\dot{A}_2 = A_2 (r_2 - d_2 - \alpha_2 A_2)$, que admite una única solución casi periódica positiva aislada del cero y atractora global de todas las soluciones positivas. La demostración corresponde a resolver la ecuación logística $\dot{A}_1 = A_1 (u_1 - \alpha_1 A_1)$, donde u_1 y α_1 son funciones casi periódicas positivas. Entonces, usando [13] podemos concluir la siguiente proposición.

Proposición 3: *Asuma (H1). Si $u_i(t) = r_i(t) - d_i(t)$, con $i = 1, 2$, entonces, existen dos soluciones de (2.1) casi periódicas de extinción o exclusión en D , $E_1(t) = (A_1(t), 0)$ y $E_2(t) = (0, A_2(t))$, donde $A_i(t)$, es la única solución positiva casi periódica que admite la ecuación logística*

$$\dot{A}_i = A_i (u_i - \alpha_i A_i),$$

inf $A_i(t) > 0$. Además toda órbita distinta del cero que se encuentra en el eje A_i converge a la solución $E_i(t)$.

El Lema 3 nos permite garantizar que las órbitas de condiciones iniciales positivas caen eventualmente en D , y la proposición anterior nos

dice lo mismo para condiciones iniciales que se encuentran en la parte no negativa de los ejes cartesianos. Entonces podemos concluir que todas las órbitas en Q_1 caen eventualmente en D . Esto se establece en el siguiente corolario.

Corolario 1: *Asumiendo (H1), entonces, para cada condición inicial en Q_1 su órbita cae eventualmente en D .*

Teorema 2: *Asumiendo (H1), entonces, en D , definido en (2.8), el sistema (2.1) admite una solución casi periódica. Además, la órbita de cada condición inicial en Q_1 converge asintóticamente a una solución casi periódica en D .*

Demostración: Sean N_1, N_2 dados por (2.4) y (2.5) respectivamente. Dado que $(N_1, 0)$ y $(0, N_2)$ son una sub-solución y una súper-solución en D , aplicando el Teorema 1, se puede garantizar que el sistema admite una solución casi periódica en D . También, por el Teorema 1, concluimos que la órbita de cada condición inicial distinta del origen en Q_1 converge asintóticamente a una solución casi periódica no nula en D . Esto prueba el teorema.

La existencia de al menos una solución casi periódica que nos da el Teorema 2, siendo consistente con la Proposición 3, no debe interpre-

tarse redundante. Pues mientras que la Proposición 3 corresponde a una dimensión, nos da existencia de dos soluciones casi periódicas que se encuentran en los ejes, y la existencia de una solución casi periódica que establece el Teorema 2, no necesariamente es alguna de la proposición 3, entonces es natural buscar si el Teorema 2 puede arrojar una solución casi periódica positiva de coexistencia.

2.4. Solución casi periódica positiva de la coexistencia

Lema 4: *Asuma (H1). Suponga que $r_{i^*} > d_i^*$. Denotamos*

$$N_{i^*} = \frac{r_{i^*} - d_i^*}{\alpha_i^*}. \quad (2.13)$$

Si las siguientes desigualdades se cumplen,

$$N_{i^*} > N_j(\delta_i^* + \beta_i^*), \quad (2.14)$$

$$\frac{\delta_i^* N_j (d_i^* + \alpha_i^* \beta_i^* N_j)}{\alpha_i^*} < \frac{(N_{i^*} - \delta_i^* N_j - \beta_i^* N_j)^2}{4}, \quad (2.15)$$

donde $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Entonces, para

$$\epsilon_i = \frac{N_{i^*} - \delta_i^* N_j - \beta_i^* N_j}{2}, \quad (2.16)$$

la región

$$D(\epsilon_1, \epsilon_2) = \{(A_1, A_2) : \epsilon_1 \leq A_1 \leq N_1, \epsilon_2 \leq A_2 \leq N_2\} \quad (2.17)$$

es positivamente invariante.

Demostración: Claramente $D(\epsilon_1, \epsilon_2) \subset D$ y $0 < N_{i^*} \leq N_i$. Por (2.14), se tiene que $L_i = N_{i^*} - \delta_i^* N_j - \beta_i^* N_j > 0$. Entonces el polinomio cuadrático $P(\epsilon_i) = \epsilon_i(N_{i^*} - \delta_i^* N_j - \beta_i^* N_j - \epsilon_i)$ toma valores positivos en el interior del intervalo $[0, L_i]$ y es cero en los extremos. Entonces, el valor máximo de $P(\epsilon_i)$ está en $(0, L_i)$ se alcanza en $\epsilon_i = \frac{L_i}{2}$. Usando la ecuación (2.15) se tiene que

$$\frac{\delta_i^* N_j (d_i^* + \alpha_i^* \beta_i^* N_j)}{\alpha_i^*} < \epsilon_i (N_{i^*} - \delta_i^* N_j - \beta_i^* N_j - \epsilon_i) \quad (2.18)$$

para $\epsilon_i = \frac{L_i}{2}$.

Ya que $r_{i^*} - \alpha_i^* N_{i^*} = d_i^*$, agrupando términos en (2.18) obtenemos que

$$\alpha_i^* [N_{i^*} \delta_i^* N_j - \beta_i^* \delta_i^* N_j^2 + \epsilon_i (N_{i^*} - \delta_i^* N_j - \beta_i^* N_j - \epsilon_i)] > r_{i^*} \delta_i^* N_j. \quad (2.19)$$

Lo cual es equivalente a que

$$\alpha_i^* (N_{i^*} - \beta_i^* N_j - \epsilon_i) (\delta_i^* N_j + \epsilon_i) > r_{i^*} \delta_i^* N_j. \quad (2.20)$$

Y así

$$\alpha_i^* (N_{i^*} - \epsilon_i) > \frac{r_{i^*} \delta_i^* N_j}{(\delta_i^* N_j + \epsilon_i)} + \alpha_i^* \beta_i^* N_j. \quad (2.21)$$

Considerando que la función $z(A_j) = \frac{r_{i*}\delta_i^*A_j}{(\delta_i^*A_j + \epsilon_i)} + \alpha_i^*\beta_i^*A_j$ es creciente con respecto a la variable A_j , entonces $z(A_j)$ alcanza su valor máximo en el extremo derecho del intervalo $[0, N_j]$, es decir en $A_j = N_j$. Entonces, usando la ecuación (2.21) se obtiene que para todo $A_j \in [0, N_j]$,

$$\alpha_i^*(N_{i*} - \epsilon_i) > \frac{r_{i*}\delta_i^*A_j}{(\delta_i^*A_j + \epsilon_i)} + \alpha_i^*\beta_i^*A_j. \quad (2.22)$$

Sustituyendo $N_{i*} = \frac{r_{i*}-d_i^*}{\alpha_i^*}$ en (2.22) y agrupando términos, se obtiene que

$$r_{i*} \left(1 - \frac{\delta_i^*A_j}{\delta_i^*A_j + \epsilon_i} \right) > \alpha_i^*\epsilon_i + \alpha_i^*\beta_i^*A_j + d_i^*. \quad (2.23)$$

Y por lo tanto,

$$r_i \left(\frac{\epsilon_i}{\delta_i A_j + \epsilon_i} \right) > \alpha_i \epsilon_i + \alpha_i \beta_i A_j + d_i, \quad (2.24)$$

para todo $A_j \in [0, N_j]$.

Si ahora denotamos $F = (h_1, h_2)$, con h_1, h_2 las componentes del campo del sistema (2.1), es decir $h_1 = f$, $h_2 = g$. Entonces se obtiene que

$$h_i(\epsilon_i) = \epsilon_i \left[r_i \left(\frac{\epsilon_i}{\delta_i A_j + \epsilon_i} \right) - (\alpha_i \epsilon_i + \alpha_i \beta_i A_j + d_i) \right] > 0. \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) nos dice que para $i = 1$, existe un $\epsilon_1 > 0$ tal que dentro de la región D y a lo largo del segmento de recta vertical dada por $A_1 = \epsilon_1$, $0 < A_2 \leq N_2$, la componente horizontal del campo F es positiva,

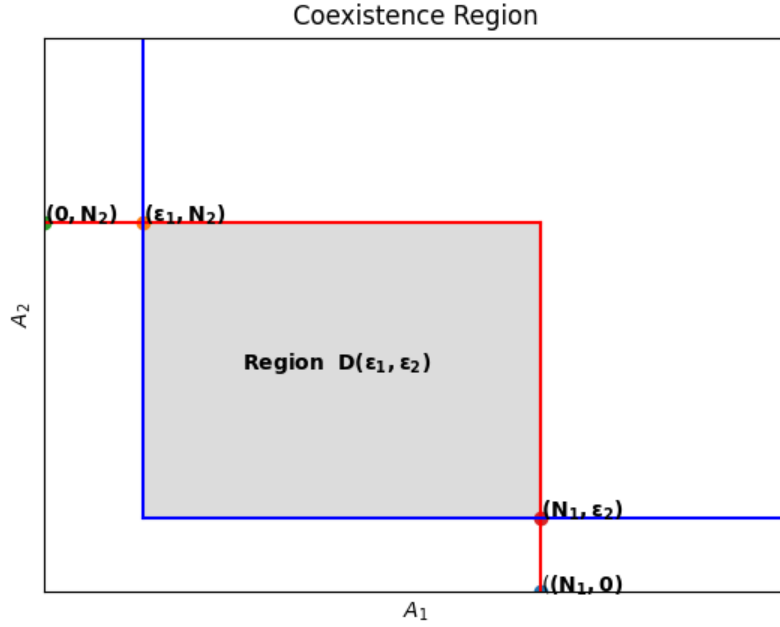


Fig 2.2: La región sombreada es $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, ahí debe existir al menos una solución casi periódica que corresponde a la coexistencia entre las dos especies.

es decir

$$h_1(\epsilon_1) = f(t, \epsilon_1, A_2(t)) > 0. \quad (2.26)$$

Igualmente, para $i = 2$, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que dentro de la región D y a lo largo del segmento de recta horizontal dada por $A_2 = \epsilon_2$, $0A_1 \leq N_1$, la componente vertical del campo F es positiva;

$$h_2(\epsilon_2) = g(t, A_1(t), \epsilon_2) > 0. \quad (2.27)$$

Por lo tanto la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ definida en la ecuación (2.17) es positivamente invariante. Esto termina la demostración del lema.

Hipótesis 2 (H2): En el sistema (2.1) r_i , d_i , α_i , β_i y δ_i son funciones casi periódicas no negativas tales que se cumplen (2.7), (2.14) y (2.15),

y también

$$r_{i^*} > d_i^*. \quad (2.28)$$

Es claro que la hipótesis (H2) implica a la hipótesis (H1).

Teorema 3: *Asuma (H2) para el sistema (2.1). Entonces existe una solución casi periódica positiva en la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ definida en (2.17). Además, cada órbita en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ converge asintóticamente a una solución c.p. ahí.*

Demostración: Primeramente veamos que la pareja con entradas constantes (ϵ_1, N_2) , donde

$$\epsilon_1 = \frac{N_{1^*} - \delta_1^* N_2 - \beta_1^* N_2}{2} > 0,$$

es una sub-solución en $D(\epsilon_1, \epsilon_2) = \{(A_1, A_2) : \epsilon_1 A_1 \leq N_1, \epsilon_2 A_2 \leq N_2\}$. Para ver esto, sustituimos $A_2 = N_2$ en la ecuación (2.26) del Lema 4, y se obtiene que $f(t, \epsilon_1, N_2) \geq 0$, y para $A_1 = \epsilon_1$ en (2.11) del Lema 3 obtenemos que $g(t, \epsilon_1, N_2) \leq 0$. Por lo tanto, para cada $t \geq 0$ se cumple que $(0, 0) \leq_{(IV)} (f(t, \epsilon_1, N_2), g(t, \epsilon_1, N_2))$. Similarmente, usando la ecuación (2.27) del Lema 4 y la ecuación (2.11) del Lema 3, podemos concluir que la pareja con entradas constantes (N_1, ϵ_2) es una súper-solución en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Entonces, aplicando el Teorema 1 sabemos que debe existir una solución casi periódica en $D(\epsilon_1, \epsilon_2) = \{(A_1, A_2) : \epsilon_1 \leq A_1 \leq N_1, \epsilon_2 \leq A_2 \leq N_2\}$. También por el Teorema 1 concluimos que cada órbita en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ converge asintóticamente a alguna solución casi periódica positiva en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Esto termina la prueba del teorema.

Capítulo 3

APLICACIÓN AL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

En el caso de que los coeficientes de intensidad reproductiva δ_1 y δ_2 sean los dos iguales a cero se tiene el modelo competitivo de Lotka-Volterra. Entonces podemos aplicar el Teorema 3 y obtener la existencia de una solución casi periódica positiva. También, pero independiente del Teorema 3 y del modelo de Kuno, probaremos la unicidad de la solución c.p. positiva y que cada órbita positiva es atraída eventualmente hacia tal solución, es decir la estabilidad global. La existencia y unicidad de la solución positiva, y también la estabilidad global ya son resultados obtenidos y presentados por Gopalsamy en [8], pero con nuestros métodos podemos presentar una demostración elemental y obtenemos resultados muy parecidos.

3.1. Aplicación al modelo de Lotka-Volterra

Empezamos usando el Teorema 3 para establecer el siguiente corolario. Las condiciones que se requieren, la (3.4), (3.5) y (3.6) corresponden a la hipótesis (H2), es decir, exactamente las mismas condiciones del Teorema 3 con $\delta_1, \delta_2 = 0$, y así, la existencia de la solución positiva casi periódica en el modelo de Lotka-Volterra es un corolario directo del Teorema 3.

Corolario 2 (Existencia de solución c.p. positiva): *Considera el sistema (2.1) para el caso $\delta_1, \delta_2 = 0$. Para $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, y para cada $t \geq 0$, suponga que r_i , d_i , α_i y β_i son funciones casi periódicas no negativas. Denotamos por*

$$N_i = \frac{r_i^* - d_{i*}}{\alpha_{i*}}, \quad N_{i*} = \frac{r_{i*} - d_i^*}{\alpha_i^*}, \quad e_i = \frac{N_{i*} - \beta_i^* N_j}{2}. \quad (3.1)$$

$$D = \{(A_1, A_2) : 0 \leq A_1 \leq N_1, 0 \leq A_2 \leq N_2\}. \quad (3.2)$$

$$D_0 = \{(A_1, A_2) : e_1 \leq A_1 \leq N_1, e_2 \leq A_2 \leq N_2\}. \quad (3.3)$$

Suponga que se cumplen las condiciones

$$r_{i*} > d_i^* \quad (3.4)$$

$$\alpha_{i*} > 0 \quad (3.5)$$

$$0 \leq \beta_i^* N_j < N_{i^*} \quad (3.6)$$

Haciendo $u_i = r_i - d_i$ y $q_i = \alpha_i \beta_i$, se obtiene el modelo de Lotka-Volterra

$$\dot{A}_1 = A_1 [u_1 - \alpha_1 A_1 - q_1 A_2], \quad (3.7)$$

$$\dot{A}_2 = A_2 [u_2 - \alpha_2 A_2 - q_2 A_1].$$

Entonces existe una solución casi periódica $(A_1^0(t), A_2^0(t))$ en D_0 . Además, para toda condición inicial en Q_1 , el cono no negativo del plano, su órbita converge hacia una solución casi periódica en la región D .

Demostración: Note que, $l_i = N_{i^*} - \beta_i^* N_j > 0$, $e_i = \frac{l_i}{2} > 0$, $u_i = r_i - d_i > 0$ y $q_i = \alpha_i \beta_i \geq 0$. Note que las condiciones (3.4), (3.5) y (3.6) son equivalentes a (H2) cuando $\delta_1, \delta_2 = 0$. Entonces, aplicando el Teorema 3, la región D definida por (3.2) es positiva invariante y atractora global de todas la órbitas en Q_1 . También, podemos usar el Teorema 3 para concluir que toda órbita en Q_1 converge hacia una solución casi periódica en D . Finalmente, por el Teorema 3, debe existir una solución casi periódica $(A_1^0(t), A_2^0(t))$ en la región D_0 definida por (3.3). Esto termina la demostración del corolario.

Con fines de probar la unicidad de la solución casi periódica positiva,

recordamos que para una función casi periódica $X(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ su promedio $M[X]$, o también denotado por \overline{X} se define como

$$\overline{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (3.8)$$

El promedio es un funcional lineal, esto es, se cumple

$$\overline{cX - Y} = c\overline{X} - \overline{Y} \quad (3.9)$$

para cualesquiera funciones casi periódicas X, Y y cualquier constante $c \in \mathbb{R}$.

Además, es fácil ver, por el Teorema fundamental del cálculo, que el promedio de una derivada es cero, esto es, $\overline{X'(t)} = 0$.

El siguiente lema usa la igualdad de Parseval, que establece que

$$\sum |a_k|^2 = \overline{|X|^2},$$

donde $\sum a_k \exp(i\lambda_k t)$ es la serie de Fourier asociada con $X(t)$.

Por lo tanto, si $X \geq 0$ y $\sum |a_k|^2 = 0$, entonces la serie asociada $\sum a_k \exp(i\lambda_k t)$ converge uniformemente en \mathbb{R} a la función $X(t)$ y cada a_k debe ser igual a cero. Por tanto $X \equiv 0$.

Recordamos que más información sobre funciones casi periódicas puede encontrarse en [14,15,16,17,18].

Lema 5: Si $X(t)$ es una función casi periódica no negativa y $\overline{X} = 0$, entonces $X(t)$ es la función cero, esto es, $X \equiv 0$.

Demostración: Como $X(t) \geq 0$, entonces $X(t)^2 \leq 2X(t) \|X\|_\infty$.

Tomando promedio en ambos lados obtenemos

$$\overline{X^2} \leq 2 \|X\|_\infty \overline{X} = 0.$$

Usando la igualdad de Parseval concluimos que $X \equiv 0$. Esto termina la demostración del lema.

En la siguiente proposición se prueba la unicidad de la solución casi periódica positiva para el modelo de Lotka-Volterra. Tal única solución queda aislada de los ejes cartesianos y es atractora global de todas las órbitas positivas, sucediendo entonces la estabilidad global respecto a la coexistencia. Esto termina la demostración del lema.

Proposición 4 (Unicidad de solución positiva c.p.): Suponga que r_i, d_i, α_i y β_i son funciones casi periódicas no negativas de $t \geq 0$, y que

$$\alpha_{i*} > (\alpha_j \beta_j)^* . \tag{3.10}$$

Entonces el modelo (3.7) admite a lo más una solución casi periódica positiva.

Demostración: Sean $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ dos soluciones casi periódicas de (2.1) (cada componente de ambas soluciones depende de t y es positiva) tal que $(A_1, A_2) \leq_{(IV)} (B_1, B_2)$. Entonces, para cada $t \geq 0$, $(B_1 - A_1) \geq 0$ y $(A_2 - B_2) \geq 0$. Entonces, sustituyendo cada una de estas dos soluciones en (2.1) obtenemos que

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} = r_1 - \alpha_1 (A_1 + \beta_1 A_2) - d_1, \quad (3.11)$$

$$\frac{\dot{A}_2}{A_2} = r_2 - \alpha_2 (A_2 + \beta_2 A_1) - d_2, \quad (3.12)$$

$$\frac{\dot{B}_1}{B_1} = r_1 - \alpha_1 (B_1 + \beta_1 B_2) - d_1, \quad (3.13)$$

$$\frac{\dot{B}_2}{B_2} = r_2 - \alpha_2 (B_2 + \beta_2 B_1) - d_2. \quad (3.14)$$

Restando (3.11) y (3.13) se obtiene

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1} - \frac{\dot{B}_1}{B_1} = \alpha_1 (B_1 - A_1) + \alpha_1 \beta_1 (B_2 - A_2). \quad (3.15)$$

Dado que $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{d}{dt}\log(A)$, entonces

$$\overline{\left(\dot{A}_1/A_1\right)} = 0.$$

Esta última relación también ocurre para las otras tres componentes A_2 , B_1 and B_2 . Entonces, tomando el promedio en ambos lados de (3.15) obtenemos que

$$\overline{\alpha_1(B_1 - A_1) + \alpha_1\beta_1(B_2 - A_2)} = 0.$$

Similarmente, usando (3.12) y (3.14) obtenemos que

$$\overline{\alpha_2(B_2 - A_2) + \alpha_2\beta_2(B_1 - A_1)} = 0.$$

Por lo tanto

$$\overline{(\alpha_1 - \alpha_2\beta_2)(B_1 - A_1) + (\alpha_2 - \alpha_1\beta_1)(A_2 - B_2)} = 0. \quad (3.16)$$

Y entonces por la ecuación (3.16) se tiene que

$$0 \leq \overline{\gamma_1(B_1 - A_1) + \gamma_2(B_2 - A_2)} \leq \overline{\Upsilon_1(B_1 - A_1) + \Upsilon_2(A_2 - B_2)} = 0, \quad (3.17)$$

donde, $\gamma_i = \alpha_{i*} - (\alpha_j\beta_j)^*$, y $\Upsilon_i = \alpha_i - \alpha_j\beta_j$, ya que estamos suponiendo en (3.6) que para $i, j = 1, 2, i \neq j$, $\gamma_i = \alpha_{i*} - (\alpha_j\beta_j)^* > 0$.

Entonces, si suponemos que $0 < \overline{(B_1 - A_1)}$ y $0 < \overline{(B_2 - A_2)}$, tendríamos que

$$\overline{\gamma_1(B_1 - A_1) + \gamma_2(B_2 - A_2)} > 0. \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) contradice la ecuación (3.17). Por lo tanto $\overline{(B_1 - A_1)} = 0$ o $\overline{(B_2 - A_2)} = 0$. Pero si uno de los dos es cero, usando la ecuación (3.16), el otro también es cero. Así, obtenemos que

$$\overline{(B_1 - A_1)} = 0 \text{ y } \overline{(B_2 - A_2)} = 0. \quad (3.19)$$

Usando ahora el Lema 5, concluimos que $(B_1 - A_1) = 0$ y $(B_2 - A_2) = 0$. Es decir, $A_1(t) = B_1(t)$ y $A_2(t) = B_2(t)$. Esto termina la demostración de la proposición.

El Teorema 3 nos dice que tanto en el caso general del modelo de Kuno, y en particular en el caso del modelo de Lotka-Volterra, suponiendo (H2), toda órbita converge eventualmente a una órbita casi periódica. A una función que converge hacia una función casi periódica se le denomina asintóticamente casi periódica y hereda el promedio de la función casi periódica a la cual converge, y tal promedio cumple también las propiedades algebraicas de linealidad que se cumplen para el caso casi periódico. Sin embargo, como lo establece el Lema 5, mientras que la única función casi periódica no negativa con promedio igual a cero es la función cero, esto no necesariamente sucede para funciones asintóticamente casi periódicas, pues sí hay funciones asintóticamente casi periódicas estrictamente positivas con promedio nulo. En el capítulo 4 veremos órbitas positivas en el modelo de Kuno que convergen a la exclusión, es decir hacia alguno de los ejes, y por tanto una de sus componentes tendrá promedio cero. Nos interesa usar la demostración de unicidad presentada en la Proposición 4 para implicar que cualesquiera dos órbitas positivas, en el caso de Lotka-Volterra y bajo las condiciones que estamos suponiendo, deben tener el mismo promedio y este debe ser positivo. Para esto presentamos

la definición de una función asintóticamente casi periódica, de su promedio, la propiedad de linealidad del promedio y su derivada.

Definición 6: Una función $F(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *asintóticamente casi periódica* si existen funciones $X(t), H(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$F = X + H, \quad (3.20)$$

con $X(t)$ una función casi periódica y $H(t)$ una función continua tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$. Así, el promedio de F se define como $\overline{F} = \overline{X}$.

Se demuestra que si una función es asintóticamente casi periódica entonces la expresión de (3.20) es única y por tanto su promedio está bien definido. Además es claro que la propiedad de linealidad establecida en la ecuación (3.9) también se cumple para funciones asintóticamente casi periódicas. Por último, se demuestra que si $F(t)$ es una función asintóticamente casi periódica de clase C^1 , que converge hacia una función casi periódica también de clase C^1 , entonces su derivada $F'(t)$ también es asintóticamente casi periódica. La demostración consiste en que al expresar a F como $F = X + H$, con X casi periódica de clase C^1 , entonces $H = F - X$ es de clase C^1 , y entonces $F' = X' + H'$. Pero X' también es casi periódica. Además H' es continua y $\lim_{t \rightarrow \infty} H'(t) = 0$.

Las órbitas del modelo de Lotka-Volterra son asintóticamente casi periódicas y por lo menos de clase C^1 . Además, dado que cualesquiera dos órbitas casi periódicas se pueden comparar respecto al orden $\leq_{(IV)}$, este orden se puede usar para comparar también órbitas asintóticamente casi periódicas, es decir, si $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ son dos órbitas asintóticamente casi periódicas de (3.7) tal que A_i converge a X_i y B_i converge

a Y_i , con X_i, Y_i casi periódicas, decimos que $(A_1, A_2) \leq_{(IV)} (B_1, B_2)$ si $(X_1, X_2) \leq_{(IV)} (Y_1, Y_2)$, y por tanto se cumple que $\overline{(B_1 - A_1)} \geq 0$ y $\overline{(B_2 - A_2)} \geq 0$ (aunque no necesariamente pasa que para cada $t \geq 0$, $(B_1 - A_1) \geq 0$ y $(A_2 - B_2) \geq 0$). Entonces podemos usar la demostración de unicidad, la de la Proposición 4, y sustituir cualesquiera dos órbitas positivas en vez de dos soluciones positivas casi periódicas. Esta sustitución nos permite avanzar íntegramente en la argumentación hasta la ecuación (3.19) que nos deja concluir que dos órbitas positivas cualesquiera tienen el mismo promedio. Por lo tanto podemos establecer el siguiente lema.

Lema 6: *Asumiendo las mismas condiciones de la Proposición 4 se cumple que cualesquiera dos órbitas positivas deben tener el mismo promedio.*

Demostración: Sean $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ dos órbitas positivas de (3.7), entonces cada componente de ambas soluciones depende de t , es positiva y asintóticamente casi periódica. Suponga que las órbitas casi periódicas a las cuales convergen heredan el siguiente orden: $(A_1, A_2) \leq_{(IV)} (B_1, B_2)$. Entonces se cumple que $\overline{(B_1 - A_1)} \geq 0$ y $\overline{(B_2 - A_2)}$. Entonces, sustituyendo cada una de estas dos soluciones en (2.1) obtenemos exactamente las mismas igualdades que en la proposición 4, es decir que se cumplen las ecuaciones (3.11), (3.12), (3.13) y (3.14). Después, replicando idénticamente la argumentación de la proposición 4 se van implicando íntegramente las mismas relaciones y exactamente los mismos resultados, en aquel caso para órbitas positivas casi periódicas y en este caso para cualesquiera dos órbitas positivas. La argumentación se puede repetir tal

cual hasta concluir la relación (3.19) que nos permite implicar que

$$\overline{(B_1 - A_1)} = 0 \text{ y } \overline{(B_2 - A_2)} = 0. \quad (3.21)$$

Por lo tanto las soluciones (A_1, A_2) , (B_1, B_2) tienen el mismo promedio. Esto termina la demostración del lema.

Teorema 4 (Coexistencia y Estabilidad global): *En el modelo (3.7) suponga que r_i , d_i , α_i y β_i son funciones casi periódicas no negativas de $t \geq 0$ tales que las condiciones (3.4), (3.5), (3.6) y (3.10) se valen. Entonces existe una única solución casi periódica positiva $(A_1^0(t), A_2^0(t))$. Tal solución se encuentra en la región definida por*

$$D_0 : e_i \leq A_i \leq N_i, \quad i = 1, 2.$$

Además, toda órbita positiva converge hacia $(A_1^0(t), A_2^0(t))$.

Demostración: El Corolario 2 nos dice que toda órbita del cono no negativo (Q_1) del plano converge hacia una solución casi periódica en la región D definida en (3.2). También el Corolario 2 nos da la existencia de la solución casi periódica positiva $(A_1^0(t), A_2^0(t))$ en la región $D_0 : e_i \leq A_i \leq N_i$, $i = 1, 2$. La Proposición 4 nos dice que $(A_1^0(t), A_2^0(t))$ es la única solución casi periódica positiva en todo el cono positivo del plano. Y por el Lema 6, el promedio de cada órbita positiva es igual al promedio de la solución $(A_1^0(t), A_2^0(t))$ y por tanto positivo. Así, cada órbita positiva converge hacia una solución casi periódica positiva y por la unicidad debe converger hacia $(A_1^0(t), A_2^0(t))$. Esto demuestra la estabilidad global y por tanto queda demostrado el teorema.

3.2. Otro Teorema de estabilidad asintótica global en L.V.

El resultado que establece K. Gopalsamy en [8] es para el modelo de Lotka-Volterra en dimensión n . Y para el caso $n = 2$ queda de la siguiente forma:

Teorema (Gopalsamy): Sean $u_i = r_i - d_i$ y $q_i = \alpha_i \beta_i$ en el sistema (3.7), $r_i, d_i, \alpha_i, \beta_i$ son funciones casi periódicas no negativas. Sean

$$\tilde{N}_i = \frac{u_i^*}{\alpha_{i*}}, \quad \tilde{N}_{i*} = \frac{u_{i*}}{\alpha_i^*}, \quad \tilde{\epsilon}_i = \tilde{N}_{i*} - \frac{q_i^*}{\alpha_i^*} \tilde{N}_j. \quad (3.22)$$

Suponga que se cumplen las siguientes condiciones

$$u_{i*} > 0, \quad (3.23)$$

$$\alpha_{i*} > 0, \quad (3.24)$$

$$u_{i*} > q_i^* \tilde{N}_j, \quad (3.25)$$

$$\alpha_{i*} > q_j^*. \quad (3.26)$$

Entonces existe una única solución positiva casi periódica. Tal solución se encuentra en la región definida por $\tilde{D}_0 : \epsilon \leq A_1, A_2 \leq N$, donde $\epsilon = \min_{i=1,2} \{\epsilon_i\}$ y $N = \min_{i=1,2} \{\tilde{N}_i\}$. Además, la órbita de cada condición inicial positiva converge a tal única solución.

De acuerdo a las definiciones que se tienen en (3.22), y dado que

$$[r_i - d_i]^* \leq r_i^* - d_{i*}, \quad r_{i*} - d_i^* \leq [r_i - d_i]_*, \quad [\alpha_i \beta_i]^* \leq \alpha_i^* \beta_i^*, \quad (3.27)$$

entonces se ve facilmente que se cumple la cadena

$$N_{i*} \leq \tilde{N}_{i*} \leq \tilde{N}_i \leq N_i. \quad (3.28)$$

Tambi3n es claro que los par3metros ϵ_i que nos da el Teorema 3, definidos como $\epsilon_i(\delta_i) = \frac{N_{i*} - \delta_i^* N_j - \beta_i^* N_j}{2}$, para el caso $\delta_i = 0$, quedan los $e_i = \frac{N_{i*} - \beta_i^* N_j}{2}$ que acotan inferiormente a la regi3n donde se encuentra la soluci3n casi peri3dica positiva del Corolario 2, y se cumple que

$$\epsilon_i(0) = e_i \leq \tilde{\epsilon}_i. \quad (3.29)$$

Al comparar el Teorema 4 con el Teorema de Gopalsamy, en ambos casos se prueba la existencia de una soluci3n positiva casi peri3dica en una determinada regi3n rectangular aislada de los ejes. Tal soluci3n, en los dos resultados, es la 3nica soluci3n positiva casi peri3dica y toda 3rbita positiva converge hacia tal soluci3n. Respecto a las condiciones que se requieren en cada resultado, que son ligeramente diferentes, sucede que las condiciones del Teorema 4 implican las condiciones del Teorema de Gopalsamy. En efecto, en el Teorema 4 son las condiciones (3.4), (3.5) y (3.6) las que nos permiten establecer la existencia de la soluci3n positiva, y estas condiciones en conjunto son equivalentes a la Hip3tesis (H2) del Teorema 3 en el caso $\delta_1 = \delta_2 = 0$. En el Teorema de Gopalsamy las condiciones que se requieren para probar la existencia de la soluci3n positiva son las condiciones (3.23), (3.24) y (3.25). Entonces, usando las propiedades que se muestran en (3.27) es f3cil ver que (3.4) implica (3.23), (3.5) implica (3.24) y (3.6) implica (3.25). Estas implicaciones b3sicamente suceden por que nosotros trabajamos con $N_i = \frac{r_i^* - d_{i*}}{\alpha_{i*}}$, $N_{i*} = \frac{r_{i*} - d_i^*}{\alpha_i^*}$, $\epsilon_i(0) = e_i = \frac{N_{i*} - \beta_i^* N_j}{2}$ y Gopalsamy trabaja

con $\tilde{N}_i = \frac{u_i^*}{\alpha_{i*}}$, $\tilde{N}_{i*} = \frac{u_{i*}}{\alpha_i^*}$, $\tilde{\epsilon}_i = \tilde{N}_{i*} - \frac{q_i^*}{\alpha_i^*} \tilde{N}_j$, y las propiedades de los ínfimos y los supremos generan las respectivas implicaciones. Sin embargo, tales implicaciones corresponden solamente a que la región positivamente invariante y atractora global que contiene a la solución positiva casi periódica, en el caso de Gopalsamy es la región $\tilde{D}_0 : \epsilon \leq A_1, A_2 \leq N$, donde $\epsilon = \min_{i=1,2} \{\epsilon_i\}$ y $N = \min_{i=1,2} \{\tilde{N}_i\}$, y en el Teorema 4 es la región $D_0 : e_i \leq A_i \leq N_i, i = 1, 2$, y claramente \tilde{D}_0 está contenida en D_0 . Sobre la condición que implica la unicidad en ambos casos es la misma, que $\alpha_{i*} > (\alpha_j \beta_j)^*$. Entonces, cada sistema de Lotka-Volterra dada por cierta elección de parámetros, si cumple las condiciones del Teorema 4, entonces también es resuelto por el Teorema de Gopalsamy; pero existen sistemas que cumplen las condiciones de Gopalsamy y no pueden ser resueltos por el Teorema 4 porque no se cumplen las condiciones para poderlo aplicar.

En el Teorema 4, la prueba de la existencia de la solución casi periódica positiva es un corolario directo del Teorema 3, pues el modelo de Lotka-Volterra es un caso particular del modelo de Kuno, pero la unicidad es concerniente solamente al caso de Lotka-Volterra, es independiente del Teorema 3 pues para el modelo de Kuno no pudimos presentar una prueba de unicidad. Sin embargo, podemos intentar resolver también el problema de existencia de solución positiva casi periódica en el modelo de Lotka-Volterra sin usar el Teorema 3 y no considerar el modelo de Kuno. Para esto, podemos intentar aplicar directamente el Teorema 1. De hecho, uno de los objetivos principales de este trabajo es patentar la utilidad que puede tener el Teorema 1 al encontrar en cualquier modelo donde sea posible una sub-solución y una súper-solución que cumplan con las condiciones.

La siguiente demostración de existencia de solución positiva casi periódica no considera al modelo de Kuno, sino que aplica directamente el Teorema 1 después de encontrar un conjunto de sub-soluciones y uno de súper-soluciones.

Otra demostración de existencia:

Para $i, j = 1, 2, i \neq j$, sean $\hat{N}_i = \left(\frac{r_i - d_i}{\alpha_i}\right)^* > 0$, $\hat{N}_{i*} = \left(\frac{r_i - d_i}{\alpha_i}\right)_* > 0$, $\alpha_i > 0$, y suponga que $\hat{N}_{i*} - \beta_i^* \hat{N}_j > 0$. Una pareja (A_1, A_2) con entradas constantes no negativas es una súper solución si $f(A_1, A_2) \leq \dot{A}_1 = 0$ y $g(A_1, A_2) \geq \dot{A}_2 = 0$. Ahora, $f = [(r_1 - d_1) - A_1 \alpha_1 - \alpha_1 \beta_1 A_2] A_1$ y $g = [(r_2 - d_2) - A_2 \alpha_2 - \alpha_2 \beta_2 A_1] A_2$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} A_1 \alpha_1 \left(\hat{N}_1 - A_1 - \beta_{1*} A_2 \right) &\geq f \geq A_1 \alpha_1 \left(\hat{N}_{1*} - A_1 - \beta_1^* A_2 \right), \\ A_2 \alpha_2 \left(\hat{N}_2 - A_2 - \beta_{2*} A_1 \right) &\geq g \geq A_2 \alpha_2 \left(\hat{N}_{2*} - A_2 - \beta_2^* A_1 \right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Por tanto si $\left(\hat{N}_1 - A_1 - \beta_{1*} A_2 \right) \leq 0$ entonces $f \leq 0$. Similarmente $\left(\hat{N}_{2*} - A_2 - \beta_2^* A_1 \right) \geq 0$ implica que $g \geq 0$. Es decir, cualquier punto (A_1, A_2) es una súper-solución si se encuentra en la región R_1 definida por

$$\begin{aligned} \left(\hat{N}_1 - A_1 - \beta_{1*} A_2 \right) &\leq 0, \\ \left(\hat{N}_{2*} - A_2 - \beta_2^* A_1 \right) &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Como $\hat{N}_{2*} - \beta_2^* \hat{N}_1 > 0$, el punto $(\hat{N}_1, 0)$ queda debajo de la recta $\left(\hat{N}_{2*} - A_2 - \beta_2^* A_1 \right) = 0$ sobre el segmento vertical, entonces por conti-

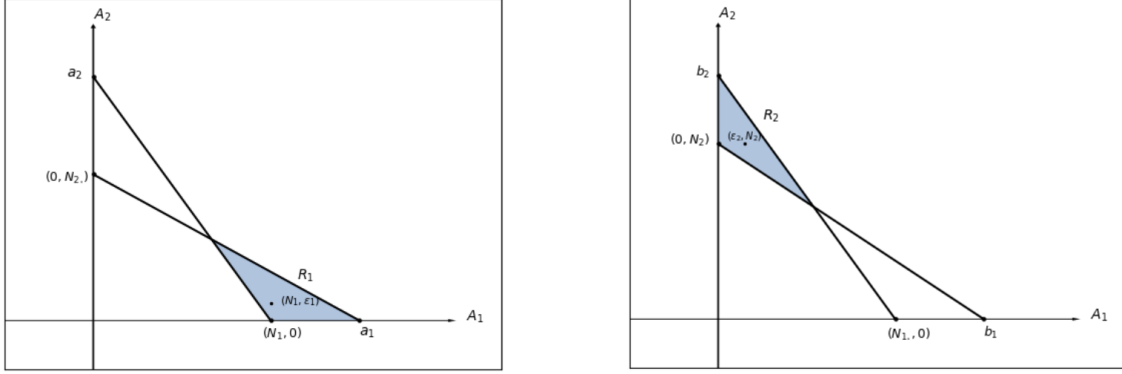


Fig. 3.1: Las regiones de sub y súper soluciones para el modelo de Lotka-Volterra. N_i, \hat{N}_i pueden ser considerados indistintamente.

nidad podemos tomar un punto (\hat{N}_1, \hat{e}_2) en la región de súper-soluciones R_1 dada por (3.31), con $\hat{e}_2 > 0$ una constante. Note que cada punto de la forma (A_1, \hat{e}_2) con $0 < A_1 \leq \hat{N}_1$ queda también debajo de la recta $(\hat{N}_{2*} - A_2 - \beta_2^* A_1) = 0$, es decir $(\hat{N}_{2*} - \hat{e}_2 - \beta_2^* A_1) > 0$ y por tanto $g(A_1, \hat{e}_2) > 0$. Esto quiere decir que la componente vertical del campo (f, g) apunta para arriba en (A_1, \hat{e}_2) . Además \hat{e}_2 puede ser arbitrariamente pequeño, es decir que la súper-solución (\hat{N}_1, \hat{e}_2) puede tomarse arbitrariamente cerca del eje A_1 .

Analogamente, $(\hat{N}_{1*} - A_1 - \beta_1^* A_2) \geq 0$ implica que $f \geq 0$ y también $(\hat{N}_2 - A_2 - \beta_{2*} A_1) \leq 0$ implica que $g \leq 0$. Así, cualquier punto (A_1, A_2) es una sub-solución si se encuentra en la región R_2 definida por

$$\begin{aligned} (\hat{N}_{1*} - A_1 - \beta_1^* A_2) &\geq 0, \\ (\hat{N}_2 - A_2 - \beta_{2*} A_1) &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Como $\hat{N}_{1*} - \beta_1^* \hat{N}_2 > 0$, el punto $(0, \hat{N}_2)$ queda a la izquierda de la recta $(\hat{N}_{1*} - A_1 - \beta_1^* A_2) = 0$ sobre el segmento horizontal, entonces pode-

mos tomar un punto (\hat{e}_1, \hat{N}_2) en la región de sub-soluciones R_2 definida por (3.32). De igual manera, cada punto de la forma (\hat{e}_1, A_2) con $0 < A_2 \leq \hat{N}_2$ queda a la izquierda de la recta $(\hat{N}_{1*} - A_1 - \beta_1^* A_2) = 0$, es decir $(\hat{N}_{1*} - A_1 - \beta_1^* A_2) > 0$ y por tanto $f(\hat{e}_1, A_2) > 0$. Esto quiere decir que la componente horizontal del campo (f, g) apunta para la derecha. También, \hat{e}_1 puede ser arbitrariamente pequeño, es decir que la sub-solución (\hat{e}_1, \hat{N}_2) puede tomarse arbitrariamente cerca del eje A_2 . Entonces se concluye que en la región R_+ : $0 < A_1 \leq \hat{N}_1$, $0 < A_2 \leq \hat{N}_2$ existen súper-soluciones de la forma (\hat{N}_1, \hat{e}_2) y sub-soluciones de la forma (\hat{e}_1, \hat{N}_2) con \hat{e}_1, \hat{e}_2 constantes positivas arbitrariamente cercanas a cero, tal que $g(A_1, \hat{e}_2) > 0$ y $f(\hat{e}_1, A_2) > 0$. Aplicando el Teorema 1, debe de existir una solución casi periódica positiva en R_+ que queda aislada de los ejes cartesianos A_1 y A_2 . También es claro que si $A_1 \geq \hat{N}_1$, entonces

$$A_1 \alpha_1 \left[\left(\frac{r_1 - d_1}{\alpha_1} \right)^* - (A_1 + \beta_1 A_2) \right] = A_1 \alpha_1 \left[\hat{N}_1 - (A_1 + \beta_1 A_2) \right] \leq 0, \quad (3.33)$$

y por lo tanto, $f(A_1, A_2) \leq 0$. Igualmente, si $A_2 \geq \hat{N}_2$, entonces $g(A_1, A_2) \leq 0$. Entonces la región $\hat{D} : 0 \leq A_i \leq \hat{N}_i, i = 1, 2$ es atractora global de todas las órbitas en Q_1 . Con todo esto, podemos establecer el siguiente lema.

Lema 7: *Para $i, j = 1, 2, i \neq j$ sean $\hat{N}_i = \left(\frac{r_i - d_i}{\alpha_i} \right)^* > 0$ y $\hat{N}_{i*} = \left(\frac{r_i - d_i}{\alpha_i} \right)^* > 0, \alpha_i > 0$, y suponga además que $\hat{N}_{i*} - \beta_i^* \hat{N}_j > 0$. Entonces, la región $\hat{D} : 0 \leq A_i \leq \hat{N}_i$ es atractora global de todas las órbitas en Q_1 y para cada \hat{e}_i tal que $0 < \hat{e}_i \leq \hat{N}_{i*} - \beta_i^* \hat{N}_j$, se tiene que la región $\hat{D}_0 : \hat{e}_i \leq A_i \leq \hat{N}_i, i = 1, 2$ es positivamente invariante y los puntos*

(\hat{N}_1, \hat{e}_2) , (\hat{e}_1, \hat{N}_2) son una sub-solución y una súper-solución, respectivamente.

Teorema 5: En el modelo (3.7) suponga que r_i , d_i , α_i y β_i son funciones casi periódicas no negativas de $t \geq 0$. Para $i, j = 1, 2$, $i \neq j$ denotamos por

$$\hat{N}_i = \left(\frac{r_i - d_i}{\alpha_i} \right)^*, \hat{N}_{i*} = \left(\frac{r_i - d_i}{\alpha_i} \right)_*, \hat{e}_i = \hat{N}_{i*} - \beta_i^* \hat{N}_j. \quad (3.34)$$

y suponga que se cumplen las siguientes condiciones

$$\hat{N}_{i*} = \left(\frac{r_i - d_i}{\alpha_i} \right)_* > 0, \quad (3.35)$$

$$\alpha_i > 0, \quad (3.36)$$

$$\hat{N}_{i*} - \beta_i^* \hat{N}_j > 0, \quad (3.37)$$

$$\alpha_{i*} > (\alpha_j \beta_j)^*. \quad (3.38)$$

Entonces existe una única solución positiva $(A_1^0(t), A_2^0(t))$. Tal solución se encuentra en la región definida por $\hat{D}_0 : \hat{e}_i \leq A_i \leq \hat{N}_i$, $i = 1, 2$. Además, toda órbita positiva converge hacia $(A_1^0(t), A_2^0(t))$.

Demostración: Por el lema 7 y el Teorema 1 debe existir una solución casi periódica en la región $D_0 : \hat{D}_0 : \hat{e}_i \leq A_i \leq \hat{N}_i$, $i = 1, 2$. La estabilidad global se concluye de la Proposición 4 que implica que a lo más existe una solución positiva casi periódica y por el Lema 7 que nos dice que la región $\hat{D} : 0 \leq A_i \leq \hat{N}_i$ es atractora global de todas las órbitas en Q_1 y nos permite tomar sub-soluciones (\hat{e}_1, \hat{N}_2) para cualquier \hat{e}_1

positivo pero arbitrariamente cercano a cero y súper-soluciones (\hat{N}_1, \hat{e}_2) para cualquier \hat{e}_2 positivo pero también arbitrariamente cercano a cero, siempre que $0 < \hat{e}_i \leq \hat{N}_{i*} - \beta_i^* \hat{N}_j$. Esto termina la demostración del teorema.

Finalmente, al comparar el Teorema 5 con el Teorema de Gopalsamy, es claro que (3.23) y (3.24) implican a (3.35) y (3.36). La condición para la unicidad es otra vez la misma en ambos casos, $\alpha_{i*} > (\alpha_j \beta_j)^*$, que evidentemente implica que $\alpha_{i*} > 0$, la tercer condición que se usa en la existencia, pero hemos preferido en todos los casos, en los Teoremas 4, 5 y de Gopalsamy seguir presentando las tres condiciones que implican la existencia de la solución positiva casi periódica. Sin embargo, el Teorema 5 es independiente del Teorema de Gopalsamy en el sentido que existen sistemas que cumplen las condiciones del Teorema 5 pero no cumplen las condiciones del Teorema de Gopalsamy, al cumplirse la condición (3.37) pero no cumplirse la condición (3.25). A continuación presentamos un ejemplo.

Considere el sistema dado por la elección:

$$r_1 = r_2 = r = 2.2 + \cos(t) + \text{sen}(t),$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 2 + \cos(t) - \text{sen}(t),$$

$$d_1 = d_2 = d = 0.2,$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0.05.$$

Se tiene que $\frac{d}{dt} \left(\frac{r-d}{\alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2 + \cos(t) + \text{sen}(t)}{2 + \cos(t) - \text{sen}(t)} \right) = 0$ implica que

$$\cos(t) = -\frac{1}{2}. \text{ Así, en } t_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ hay un máximo y un mínimo en } t_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Entonces evaluando obtenemos que

$$\left(\frac{r-d}{\alpha}\right)^* = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \approx 3.73, \text{ y } \left(\frac{r-d}{\alpha}\right)_* = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \approx 0.26.$$

Tambi3n derivando a r , se obtiene que r tiene un m3ximo en $\frac{\pi}{4}$ y $r^* = 2.2 + \sqrt{2}$, y un m3nimo en $\frac{5\pi}{4}$ con $r_* = 2.2 - \sqrt{2}$. La funci3n α tiene un m3ximo en $\frac{7\pi}{4}$ con $\alpha^* = 2 + \sqrt{2}$, y un m3nimo en $\frac{3\pi}{4}$ con $\alpha_* = 2 - \sqrt{2}$. Ahora, dado que estamos en el caso sim3trico sobre los par3metros y β, d son constantes, las condiciones del Teorema 5 quedan as3: la condici3n (3.35) de que $\hat{N}_{i_*} = \left(\frac{r_i - d_i}{\alpha_i}\right)_* > 0$ claramente se cumple pues $\left(\frac{r-d}{\alpha}\right)_* = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} > 0$; la condici3n (3.36) es obvio que se cumple; la condici3n (3.37), que $\hat{N}_{i_*} - \beta_i^* \hat{N}_j > 0$, se reduce a que

$$\left(\frac{r-d}{\alpha}\right)_* > \beta \left(\frac{r-d}{\alpha}\right)^*,$$

y se cumple porque

$$0.26 \approx \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} > 0.05 \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) \approx (0.05) 3.73 = 0.18$$

Por 3ltimo, la condici3n (3.38) para la unicidad, que $\alpha_{i_*} > (\alpha_j \beta_j)^*$ es equivalente a que $\beta < \frac{\alpha_*}{\alpha^*}$, y claramente se cumple porque $0.05 < \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \approx 0.17$. Por lo tanto, para este sistema podemos aplicar el Teorema 5, y entonces debe existir una 3nica soluci3n casi peri3dica en la regi3n $\hat{D}_0 : \hat{e}_i \leq A_i \leq \hat{N}_i, i = 1, 2$, y toda 3rbita positiva converge hacia tal soluci3n. Sin embargo, para el Teorema de Gopalsamy, la condici3n (3.25), que

$u_{i^*} > q_i^* \tilde{N}_j$ en este caso resulta en que

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{r_* - d}{\alpha^*} > \beta \left(\frac{r^* - d}{\alpha_*} \right) = (0.05) \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$

y no se cumple porque

$$0.17 \approx \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \leq 0.05 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \approx (0.05) 5.82 \approx 0.29.$$

Entonces no podemos aplicar el Teorema de Gopalsamy para este caso.

Capítulo 4

EJEMPLOS NUMÉRICOS DEL MODELO DE KUNO

Para aplicar los resultados teóricos obtenidos sobre el modelo de Kuno, vamos a presentar dos ejemplos específicos, y ver que numéricamente los resultados coinciden con lo que establecido. En cada ejemplo, se da una elección de parámetros r_i , d_i , α_i , β_i y δ_i , $i = 1, 2$, los cuales son funciones casi periódicas no negativas que cumplen las condiciones para aplicar el Teorema 3, y entonces garantizar la existencia de una solución positiva casi periódica que corresponde a la coexistencia. Además, en la modelación numérica que obtenemos en estos ejemplos resulta evidente que existe una única solución, y es atractora de casi todas las órbitas, salvo las que convergen hacia los ejes cartesianos. Es decir, para toda condición inicial positiva suficientemente aislada de los ejes, su órbita converge asintóticamente hacia la única orbita casi periódica positiva en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, dada por la solución del Teorema 3, y en otro caso son atraídas hacia la correspondiente solución de la exclusión que nos da la Proposición 3.

EJEMPLO 1

El primer ejemplo está dado por la siguiente elección de parámetros. Los ínfimos y supremos de los parámetros los damos aproximados hasta el orden de milésimas.

$$r_1 = 0.15\sin(\pi t) + 0.12\cos(\sqrt{2}t) + 1.14, \text{ entonces } r_{1*} = 0.865, r_1^* = 1.415$$

$$\delta_1 = 0.1$$

$$\alpha_1 = 0.6$$

$$\beta_1 = 0.02$$

$$d_1 = 0.25$$

$$r_2 = 1.2$$

$$\delta_2 = 0.1$$

$$\alpha_2 = 0.06\sin(t) + 0.075\cos(\sqrt{3}t) + 0.51, \text{ entonces } \alpha_{2*} = 0.375, \alpha_2^* = 0.645$$

$$\beta_2 = 0.005\sin(\sqrt{2}t) + 0.004\cos(\pi t) + 0.05, \text{ entonces } \beta_{2*} = 0.04, \beta_2^* = 0.061$$

$$d_2 = 0.3$$

Sustituyendo los correspondientes valores en $N_i = \frac{r_i^* - d_{i*}}{\alpha_{i*}}$, $N_{i*} = \frac{r_{i*} - d_i^*}{\alpha_i^*}$ obtenemos que $N_1 = 1.94$, $N_{1*} = 1.02$, $N_2 = 2.4$, $N_{2*} = 1.39$.

Así, la región positivamente invariante D , que además es la atractora global de todas las órbitas de la región $Q_1 = \{(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2 : A_1, A_2 \geq 0\}$, es el rectángulo dado por $0 \leq A_1 \leq 1.94$ y $0 \leq A_2 \leq 2.4$

Vemos que

$$N_{1*} - (\delta_1^* + \beta_1^*) N_2 = 1.02 - (0.1 + 0.02) 2.4 = 0.73, \text{ así } \epsilon_1 = 0.36$$

$$\frac{(N_{1*} - (\delta_1^* + \beta_1^*) N_2)^2}{4} = 0.13.$$

$$\frac{\delta_1^* N_2}{\alpha_1^*} (d_1^* + \alpha_1^* \beta_1^* N_2) = \frac{(0.1)2.4}{0.6} [0.25 + 0.6 (0.02) 2.4] = 0.11.$$

Por tanto $\frac{\delta_1^* N_2}{\alpha_1^*} (d_1^* + \alpha_1^* \beta_1^* N_2) < \frac{(N_{1*} - (\delta_1^* + \beta_1^*) N_2)^2}{4}$. Entonces se cumple para $i = 1$ la condición (2.15) de H2.

Por otro lado,

$$N_{2*} - (\delta_2^* + \beta_2^*) N_1 = 1.39 - (0.1 + 0.06) 1.94 = 1.08, \text{ así } \epsilon_2 = 0.54$$

$$\frac{(N_{2*} - (\delta_2^* + \beta_2^*) N_1)^2}{4} = 0.29,$$

$$\frac{\delta_2^* N_1}{\alpha_2^*} (d_2^* + \alpha_2^* \beta_2^* N_1) = \frac{(0.1)1.94}{0.645} (0.3 + 0.64 (0.06) 1.94) = 0.11.$$

Por lo tanto $\frac{\delta_2^* N_1}{\alpha_2^*} (d_2^* + \alpha_2^* \beta_2^* N_1) < \frac{(N_{2*} - (\delta_2^* + \beta_2^*) N_1)^2}{4}$. Entonces se cumple para $i = 2$ la condición (2.15) de H2.

Entonces se cumplen las condiciones del Teorema 3, y la existencia de una solución casi periódica positiva en la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ dada por $0.36 \leq A_1 \leq 1.94$ y $0.54 \leq A_2 \leq 2.4$.

En la figura 4.1 se ve el espacio fase y la órbita de 10 condiciones iniciales. Podemos ver la región D ($0 \leq A_1 \leq 1.94$ y $0 \leq A_2 \leq 2.4$) delimitada por los ejes cartesianos y las líneas rojas. Se ve que todas las órbitas, excepto las que corresponden a las dos condiciones iniciales más cercanas a los ejes, convergen y se acumulan en una región ubicada aproximadamente entre los valores $1.2 \leq A_1 \leq 1.6$, y $0.7 \leq A_2 \leq 0.82$, que es donde se encuentra oscilando la solución positiva atractora. Fuera de D se ven tres condiciones iniciales que eventualmente convergen hacia

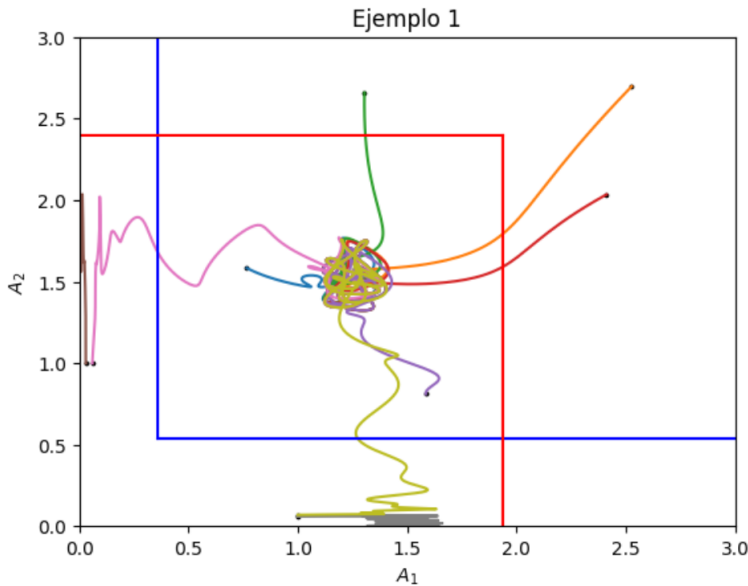


Fig. 4.1: En el espacio fase se ven las órbitas de diez condiciones iniciales random. Todas, excepto la de las condiciones $(0.03,1)$ y $(1,0.06)$, convergen hacia la coexistencia, que oscila aproximadamente entre $1.2 \leq A_1 \leq 1.45$, $1.3 \leq A_2 \leq 1.75$. La órbita de la condición $(1,0.06)$, la más cercana al eje A_1 es la gris y va a la extinción. La órbita de la condición $(0.03,1)$, la más cercana al eje A_2 es la café y se va a la extinción.

D , y sabemos que esto debe ocurrir para todas las condiciones iniciales en Q_1 . De hecho estas tres órbitas convergen hacia $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ y entonces convergen también hacia la solución casi periódica positiva. Dentro de D hay siete condiciones iniciales, tres están en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ y por tanto su órbita converge hacia la solución positiva, y las otras cuatro están en D pero fuera de $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, dos no convergen hacia la solución positiva sino que están suficientemente cerca de los ejes correspondientes, y por lo tanto sus órbitas son atraídas por las soluciones unidimensionales $E_1(t)$ y $E_2(t)$ establecidas en la proposición 3. Las otra dos sí alcanzan a ser atraídas por la coexistencia.

En la figura 4.2 podemos observar la evolución de la componente A_1 . Se presentan veinte condiciones iniciales a $t = 0$, dos de las cuales están muy cerca del eje A_2 , es decir con abscisas pequeñas, las cuales son $(0.03, 1)$

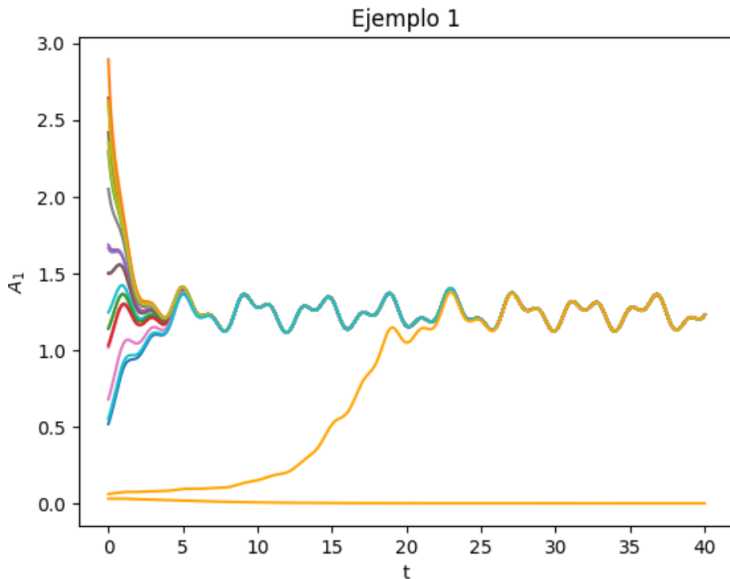


Fig. 4.2: Evolución de la componente A_1 del primer ejemplo. Todas las órbitas, excepto una, convergen hacia la solución positiva. La órbita que no converge a la coexistencia corresponde la condición inicial $(0.03, 1)$.

y $(0.06, 1)$. Estas dos condiciones iniciales, cercanas entre sí, no están en la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, entonces pueden o no converger hacia la solución atractora positiva. La órbita de $(0.03, 1)$ es atraída hacia el eje A_2 , por la solución casi periódica $E_2(t)$. Además a toda condición inicial con altura $A_2 = 1$, y tal que $A_1 \leq 0.03$ le sucede lo mismo, corresponde a la extinción de la primer especie. En el caso de $(0.06, 1)$, vemos que aunque la abscisa es también pequeña, su órbita sí converge hacia la solución positiva y su órbita eventualmente entra en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, pues ocupa superar el rango de $A_1 \geq \epsilon_1 = 0.368$, después, su órbita ya esta prácticamente pegada a la solución positiva atractora. Y cualquier condición inicial de la forma $(A_1, 1)$, con $A_1 \geq 0.06$ su órbita también converge hacia la solución positiva. En la figura 4.4 se ve un zoom sobre las órbitas de $(0.03, 1)$ y $(0.06, 1)$.

En el caso de todas las demás condiciones iniciales dadas, las otras dieciocho, están en un rango random de $0.5 \leq A_1 \leq 3$, se ve claramente

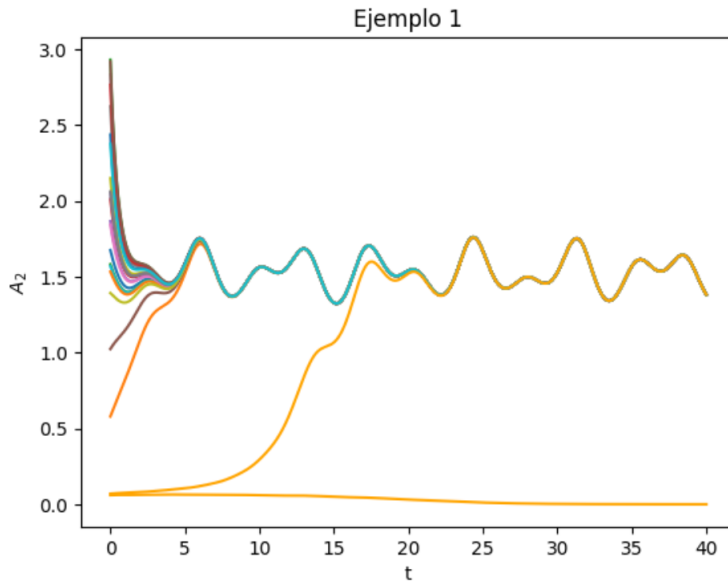


Fig. 4.3: Evolución de la componente A_2 del primer ejemplo. Todas las órbita, excepto la de $(1, 0.06)$, convergen hacia la solución positiva. La órbita de $(1, 0.06)$ es atraída al eje A_1 por la solución E_1 .

que todas las órbitas se pegan a una curva que oscila aproximadamente entre los valores de $1.2 \leq A_1 \leq 1.6$.

En la figura 4.3 podemos ver la evolución de la segunda componente. Cualitativamente es semejante a la evolución de la primer componente que acabamos de describir. En esta figura se ve la órbita también de veinte condiciones iniciales. Y se puede observar que hay dos condiciones iniciales muy cercanas entre sí, y cercanas al eje A_1 , las cuales son $(1, 0.06)$ y $(1, 0.07)$. La órbita de $(1, 0.06)$ converge hacia la exclusión y la de $(1, 0.07)$ sí converge hacia la solución positiva. Esto se puede observar a detalle en la figura 4.5, un zoom sobre estas dos condiciones iniciales. Para las otras dieciocho condiciones iniciales, las cuales corren en un rango random de $0.5 \leq A_2 \leq 3$, se observa claramente que todas las órbitas convergen asintóticamente a la coexistencia.

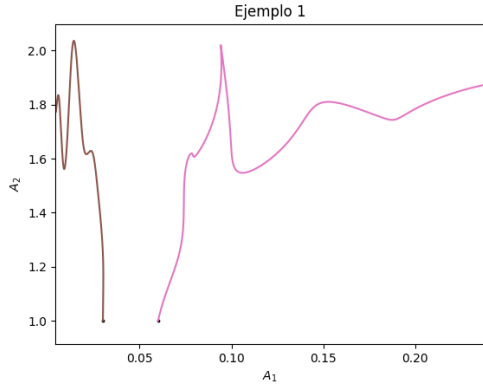


Fig. 4.4: Zoom a las órbitas de $(0.03, 1)$ y $(0.06, 1)$. La primera converge a la extinción de la primer especie. La otra converge a la coexistencia.

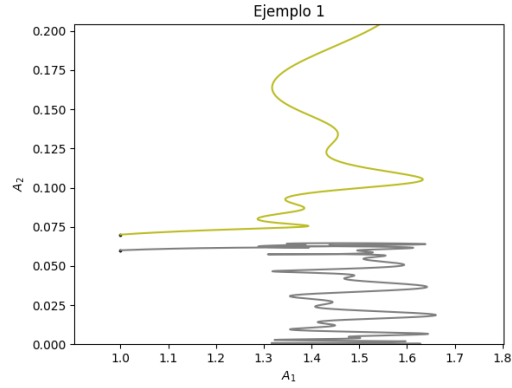


Fig. 4.5: La órbita de $(1, 0.06)$ converge a $E_1(t)$, que corresponde a la extinción de la segunda especie, y la órbita de $(1, 0.07)$ hacia la coexistencia.

EJEMPLO 2

El ejemplo 2 está dado por la siguiente elección de parámetros. En este ejemplo se dan siete parámetros no constantes, los cuales son funciones casi periódicas positivas, ninguno de ellos es una función periódica, y los otros tres parámetros sí son constantes positivas.

$$r_1 = 0.0844\sin(2\pi t) + 0.07174\cos(\sqrt{2}t) + 1.14362$$

$$\delta_1 = 0.05\sin(t) - 0.001\cos(\pi t) + 0.06$$

$$\alpha_1 = 0.0294\sin(\pi t) + 0.0196\cos(\sqrt{2}t) + 0.496$$

$$\beta_1 = 0.005\sin(\sqrt{2}t) + 0.004\cos(\pi t) + 0.05$$

$$d_1 = 0.3$$

$$r_2 = 0.15\sin(\pi t) + 0.12\cos(\sqrt{3}t) + 1.14$$

$$\delta_2 = 0.01215\sin(2\pi t) + 0.00972\cos(\sqrt{2}t) + 0.0729$$

$$\alpha_2 = 0.56$$

$$\beta_2 = 0.025$$

$$d_2 = 0.0144\sin(\sqrt{5}t) + 0.01824\cos(2t) + 0.278$$

Es fácil ver que cada uno de los parámetros dados es positivo y que los ínfimos y supremos son aproximados (hasta el orden de milésimas en los casos de funciones no constantes) a los valores que damos a continuación.

$$r_{1*} = 0.985, r_1^* = 1.3$$

$$\delta_{1*} > 0, \delta_1^* = 0.112$$

$$\alpha_{1*} = 0.447, \alpha_1^* = 0.545$$

$$\beta_{1*} = 0.04, \beta_1^* = 0.061$$

$$d_{1*} = 0.3, d_1^* = 0.3$$

$$r_{2*} = 0.865, r_2^* = 1.415$$

$$\delta_{2*} > 0, \delta_2^* = 0.095$$

$$\alpha_{2*} = 0.56, \alpha_2^* = 0.56$$

$$\beta_{2*} = 0.025, \beta_2^* = 0.025$$

$$d_{2*} = 0.245, d_2^* = 0.31$$

Entonces, sustituyendo estos valores en $N_i = \frac{r_i^* - d_{i*}}{\alpha_{i*}}$, $N_{i*} = \frac{r_{i*} - d_i^*}{\alpha_i^*}$ obtenemos que $N_1 = 2.23$, $N_{1*} = 1.25$, $N_2 = 2.08$, $N_{2*} = 0.99$. Así, la región positivamente invariante D , que es la atractora global de todas las órbitas del primer cuadrante, es

$$D : 0 \leq A_1 \leq 2.23, 0 \leq A_2 \leq 2.089$$

Vemos que

$$N_{1*} - (\delta_1^* + \beta_1^*) N_2 = 1.2568 - (0.112 + 0.061) 2.089 = 0.895403.$$

Entonces $\epsilon_1 = 0.4477$.

$$\frac{(N_{1*} - (\delta_1^* + \beta_1^*) N_2)^2}{4} = 2,$$

$$\frac{\delta_1^* N_2}{\alpha_1^*} (d_1^* + \alpha_1^* \beta_1^* N_2) = \frac{(0.112) 2.089}{0.545} [0.3 + 0.545 (0.061) 2.089] = 0.1586.$$

Entonces

$$\frac{\delta_1^* N_2}{\alpha_1^*} (d_1^* + \alpha_1^* \beta_1^* N_2) < \frac{(N_{1*} - (\delta_1^* + \beta_1^*) N_2)^2}{4}. \text{ Por lo tanto se cumple para } i = 1$$

la condición (2.15) de H2.

Por otro lado,

$$N_{2*} - (\delta_2^* + \beta_2^*) N_1 = 0.991 - (0.095 + 0.025) 2.237 = 0.72256,$$

entonces $\epsilon_2 = 0.36128$.

$$\frac{(N_{2*} - (\delta_2^* + \beta_2^*) N_1)^2}{4} = 0.1305,$$

$$\frac{\delta_2^* N_1}{\alpha_2^*} (d_2^* + \alpha_2^* \beta_2^* N_1) = \frac{(0.095) 2.237}{0.56} (0.31 + 0.56 (0.025) 2.237) = 0.129527.$$

Entonces

$$\frac{\delta_2^* N_1}{\alpha_2^*} (d_2^* + \alpha_2^* \beta_2^* N_1) < \frac{(N_{2*} - (\delta_2^* + \beta_2^*) N_1)^2}{4}. \text{ Por lo tanto se cumple para } i = 2$$

la condición (2.15) de H2.

Por lo tanto se cumplen las condiciones del Teorema 3 de existencia de una solución positiva en la región rectangular $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ dada por $0.4477 \leq A_1 \leq 2, 237$ y $0.36128 \leq A_2 \leq 2.089$

En la figura 4.6 se presenta el espacio fase para diez condiciones iniciales. En este ejemplo encontramos propiedades muy semejantes a las del

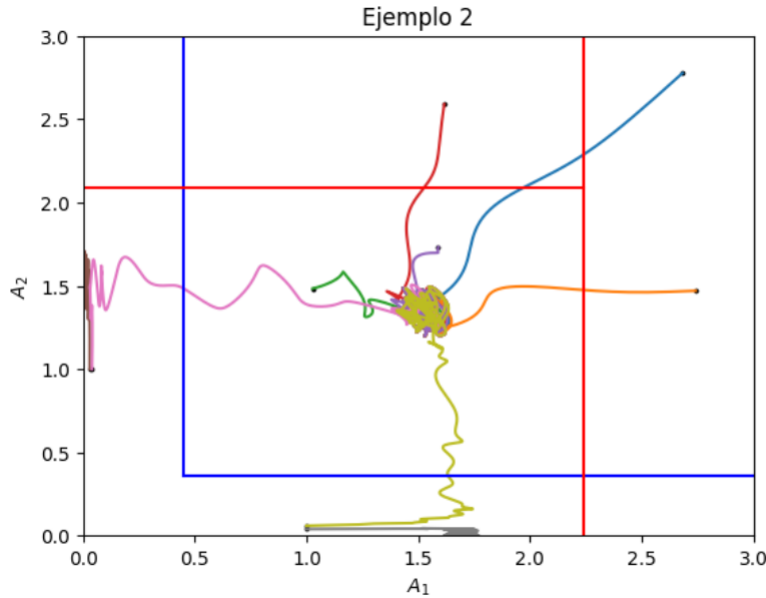


Fig 4.6: En el espacio fase se ven las órbitas de diez condiciones iniciales. Todas, excepto dos, convergen hacia la coexistencia. Las órbitas que convergen hacia E_1 y E_2 son las de $(1, 0.04)$ y $(0.03, 1)$ respectivamente.

ejemplo anterior. Podemos ver que todas las órbitas, excepto las dos que están más cercanas a los ejes, convergen y se acumulan oscilando en una región dentro de $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ ubicada aproximadamente entre los valores $1.4 \leq A_1 \leq 1.6$ y $1.25 \leq A_2 \leq 1.55$ que corresponde al rango de oscilación de las componentes de la solución positiva. Las dos condiciones iniciales más cerca de los ejes son $(1, 0.04)$ cerca del eje A_1 y $(0.03, 1)$ cerca del eje A_2 , están en D pero no están en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, sus órbitas no convergen a la coexistencia sino que son atraídas por las soluciones casi periódicas unidimensionales $E_1(t)$ y $E_2(t)$ establecidas en la Proposición 3. Las órbitas de las otras dos condiciones iniciales, $(0.04, 1)$ y $(1, 0.06)$, aunque son cercanas a los ejes, sí convergen a la solución positiva. Esto se puede ver con zoom en la figura 4.9.

En la figura 4.7 vemos la evolución de la componente A_1 . Se presentan veinte condiciones iniciales (también seleccionadas aleatoriamente), dos de las cuales están muy cercanas entre sí, y también muy cercanas al eje A_2 , y son $(0.03, 1)$ y $(0.04, 1)$. La órbita de la condición inicial en $(0.03, 1)$ no converge hacia la solución positiva, sino que es atraída asintóticamente al eje A_2 por la correspondiente solución $E_2(t)$, lo cual corresponde a la

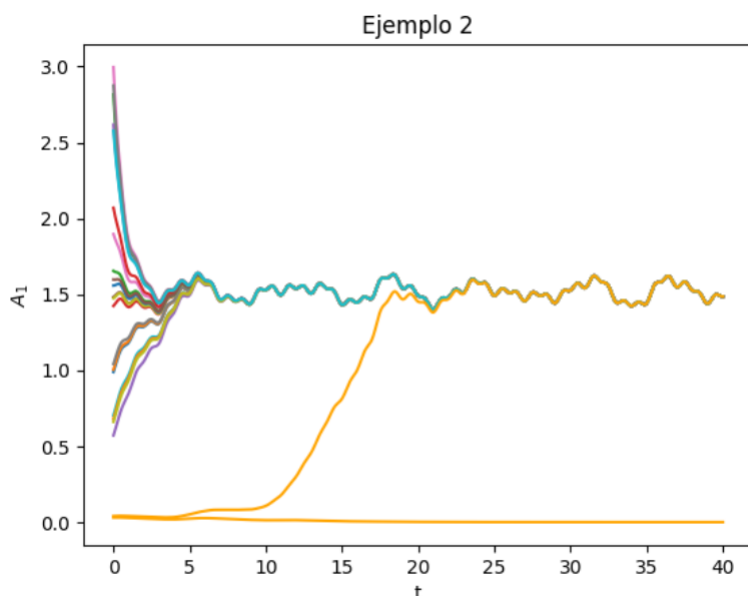


Fig. 4.7: Evolución de la componente A_1 . Se ve como todas las órbitas, excepto una, convergen a la coexistencia. La órbita que no converge es la de la condición inicial $(0.03, 1)$ y es atraída hacia la exclusión.

extinción de la primer especie. En cambio, la órbita de $(0.04, 1)$ sí converge hacia la solución positiva, logra superar el rango de $A_1 \geq \epsilon_1 = 0.447$ y entrar en $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Esto lo podemos ver con más detalle en la figura 4.9, que es un zoom sobre estas dos condiciones iniciales cercanas al eje A_2 . Sobre las otras dieciocho condiciones iniciales, las cuales corren en un rango random con valores entre $0.5 \leq A_1 \leq 4$, se puede ver claramente que todas las órbitas convergen rápidamente hacia la solución positiva atractora.

En la figura 4.8 vemos la evolución de la componente A_2 . Muy parecido a lo anterior, se presentan veinte condiciones iniciales. Dos condiciones iniciales, las cuales son $(1, 0.04)$ y $(1, 0.06)$ están muy cercanas entre sí, y también muy cercanas al eje A_1 . Para la primera su órbita no converge a la solución positiva y es atraída al eje A_1 por la solución c.p. $E_1(t)$, lo cual corresponde a la extinción de la segunda especie, y en el caso de $(1, 0.06)$ su órbita sí converge a la solución positiva. La correspondiente convergencia de estas dos órbitas se puede ver con más detalle en la figura 4.10, un zoom sobre estas dos órbitas. Para las otras dieciocho condiciones iniciales su órbita sí converge a la coexistencia.

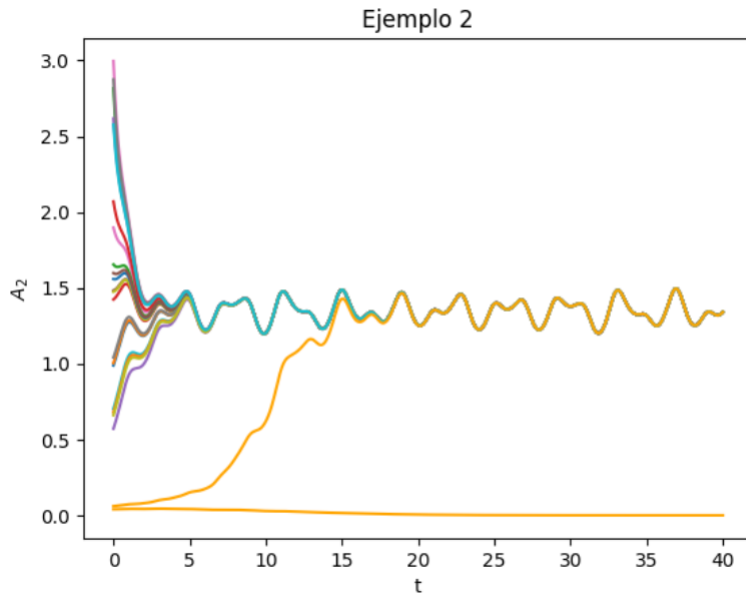


Fig. 4.8: Evolución de la componente A_2 . Se ve que todas las órbitas convergen hacia la solución positiva, excepto la que corresponde a la condición inicial $(1, 0.04)$.

4.1. Curva crítica divisoria

Hemos visto en la modelación numérica que presentamos que hay condiciones iniciales fuera de la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ que también convergen hacia la coexistencia, y que sólo aquellas condiciones iniciales que están lo suficientemente cerca de los ejes, son las que convergen hacia la exclusión correspondiente dada por las soluciones E_1 y E_2 presentadas en la Proposición 3. Es decir, estar dentro de $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ es condición suficiente para converger hacia la coexistencia pero no es condición necesaria. Así, podemos aprovechar los resultados teóricos para aproximarnos numéricamente hacia la curva, que llamaremos la curva crítica divisoria, o simplemente

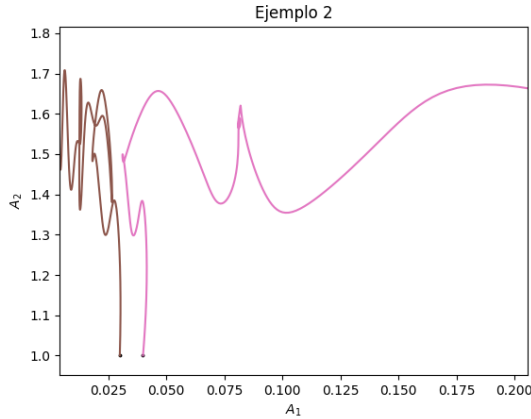


Fig. 4.9: Zoom de las órbitas de las condiciones iniciales $(0.03, 1)$ y $(0.04, 1)$.

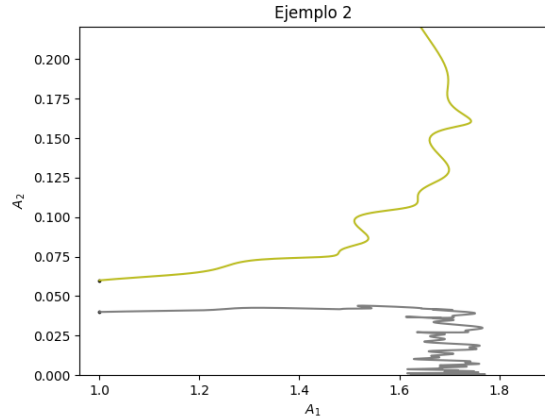


Fig. 4.10: Zoom de las órbitas de las condiciones iniciales $(1, 0.04)$ y $(1, 0.06)$

la curva crítica, en el primer cuadrante, que separa la región de exclusión de la región de coexistencia. Evidentemente sabemos que $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ se encuentra contenida en la región de coexistencia.

En las figuras 4.4 y 4.5 que corresponden al primer ejemplo, y para el segundo ejemplo en la 4.9 y 4.10, podemos ver en cada caso, condiciones iniciales tales que la curva crítica divisoria que buscamos pasa, en el ejemplo 1, entre los puntos $(0.03, 1)$ y $(0.06, 1)$ la componente vertical y entre los puntos $(1, 0.06)$ $(1, 0.07)$ la componenete horizontal, y en el ejemplo 2 lo mismo pero para los puntos $(0.03, 1)$ y $(0.04, 1)$ y entre los puntos $(1, 0.04)$ y $(1, 0.06)$. Usando los resultados teóricos podemos aproximar numéricamente la curva crítica divisoria y encontrar características sobre su comportamiento. En los ejemplos que presentamos podemos ver el tiempo aproximado que le tarda a una condición inicial dada para que su órbita entre a la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, si converge a la coexistencia. En los dos ejemplos se ve que para un tiempo $t = 15$ todas las órbitas ya están prácticamente pegadas a la solución casi periódica de la coexistencia, y les tomó un tiempo menor a ese, entrar a la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Entonces, un método para aproximarnos numéricamente a la curva crí-

tica es construir un algoritmo que distinga las condiciones iniciales cuya órbita logra entrar a la región de coexistencia en un tiempo no mayor a un $t = T$ dado, y establecido de manera conveniente lo suficientemente grande. Analizando un conjunto grande de condiciones iniciales random en la región del primer cuadrante acotada por el rectángulo $0 \leq A_1 \leq 50$ y $0 \leq A_2 \leq 50$, encontramos que cada órbita que converge hacia la coexistencia lo hace en un tiempo no mayor a $t = 22$, y que incluso al tomar condiciones iniciales alejadas un tanto de esa región, tampoco les toma un tiempo mayor a $t = 22$ para converger hacia la coexistencia. Desde luego que la elección de un tiempo que nos garantice con un alto grado de confiabilidad si una órbita converge o no hacia la coexistencia, debe hacerse con cuidado. Y para este caso, consideramos sobradamente confiable establecer un tiempo $T = 100$ como cota superior para seguir la órbita de las condiciones iniciales. Lo que pretendemos presentar entonces es una buena aproximación de la curva crítica distinguiendo las condiciones iniciales que entran a la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ en un tiempo menor o igual a $T = 100$. Tales condiciones iniciales serán representadas de color azul. Por el contrario, si una condición inicial es tal que su órbita no logra entrar a la región $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ después de un tiempo no mayor a $T = 100$ será representada con color rojo.

En las primeras tres figuras de esta sección, las figuras 4.11, 4.12 y 4.13, que corresponden al ejemplo 1, se puede ver la región de coexistencia (la azul) y la región de exclusión (la roja). Podemos ver que la región roja se forma por dos componentes, una horizontal y una vertical. En la figura 4.11 es una escala de valores pequeños menores que 0.9 y puede distinguirse qué tan alejados están los valores ϵ_1 y ϵ_2 de la región roja. Mientras que $\epsilon_1 = 0.36$ y $\epsilon_2 = 0.54$ (aproximadamente), la distancia de

la curva crítica al eje más cercano es menor o igual que 0.04, en ese rectángulo mostrado en la figura. En las figuras 4.12 y 4.13 se ve que dentro de la región $D : 0 \leq A_1 \leq 2.237, 0 \leq A_2 \leq 2.089$, la distancia de la curva crítica al eje más cercano no es mayor que 0.075, y para valores grandes, es decir puntos alejados del origen una distancia del orden de 30, la región de exclusión queda acotada por las rectas $A_1 = 0.1$ y $A_2 = 0.1$, respectivamente para la componente vertical y horizontal de la región roja. Aunque no presentamos imágenes, sabemos que, para puntos cuya altura o abscisa es considerablemente mayor que 30, y que estén en la región de la exclusión, no existe un gran cambio respecto a su distancia al eje correspondiente y sigue estando acotada por el valor 0.1. Resulta interesante que el valor que acota la región de exclusión sea, en el ejemplo 1, del orden del valor de las constantes $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$, es por eso que ponemos como referencia las rectas $A_1 = 0.1$ y $A_2 = 0.1$.

Después se presentan las tres figuras de la curva crítica divisoria correspondiente al ejemplo 2, las figuras 4.14, 4.15 y 4.16. En la primera se ve la curva crítica con sus dos componentes, la horizontal y la vertical, en una escala de valores entre $0 \leq A_1, A_2 \leq 0.8$. En la 4.15 y 4.16 vemos cada componente de la curva crítica con una escala conveniente que nos permite evaluar cómo va cambiando la curva crítica conforme te alejas del origen hacia valores grandes. Podemos observar las semejanzas con el ejemplo 1. Igual que en el ejemplo 1, de los parámetros δ_1 y δ_2 , al tomar sus promedios, $\overline{\delta_1}$ y $\overline{\delta_2}$, resultan en el modelo numérico, cotas superiores asintóticas para la región de exclusión. $\overline{\delta_1} = 0.06$ es cota superior de la componente vertical de la curva crítica y $\overline{\delta_2} = 0.072$ de la componente horizontal. En este ejemplo 2 consideramos los promedios de dichos parámetros, ya que son funciones casi periódicas no constantes y distintas

entre sí.

Cabe entonces la pregunta de cómo se podría encontrar analíticamente ciertos valores de parámetros, como ϵ_1 y ϵ_2 , que garanticen la coexistencia y que puedan mejorar la aproximación hacia la curva crítica. En nuestro caso ϵ_1 y ϵ_2 evidentemente aproximan hasta cierto orden, y puede verse que tal distancia en los ejemplos, tanto para la componente vertical y la horizontal, es del orden de 0.4. Esa brecha de cuatro decimales es la que sería interesante acortar. Después presentamos las curvas críticas que resultan de sustituir los valores de los parámetros δ_1 y δ_2 iguales a cero tanto en el ejemplo 1 como en el ejemplo 2, las figuras 4.17 y 4.18, y como era de esperarse, ya que nos encontramos en el caso de Lotka-Volterra, la región de coexistencia es global, es decir la región de exclusión queda restringida a los ejes cartesianos. Entonces el modelo numérico consiste con los resultados de Gopalsamy en [8] y con nuestro resultado, el Teorema 4.

Finalmente, las cuatro últimas figuras corresponden a una variación de los parámetros δ_1 y δ_2 en los dos ejemplos. Nos interesa saber cómo varía la curva crítica al variar un poco estos parámetros. En cada caso en que hacemos una variación de alguno de los parámetros δ_i , nos aseguramos que el nuevo parámetro también cumpla con las condiciones requeridas del Teorema 3. La variación que hacemos en el ejemplo 1, donde $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$, es cambiar esa elección, y ahora tomar primeramente a $\delta_1 = \delta_2 = 0.07$, y después tomamos otra elección con $\delta_1 = \delta_2 = 0.035$, y comparamos las curvas críticas que se obtienen para esas tres elecciones, la original y las otras dos, y el resultado se ve en las figuras

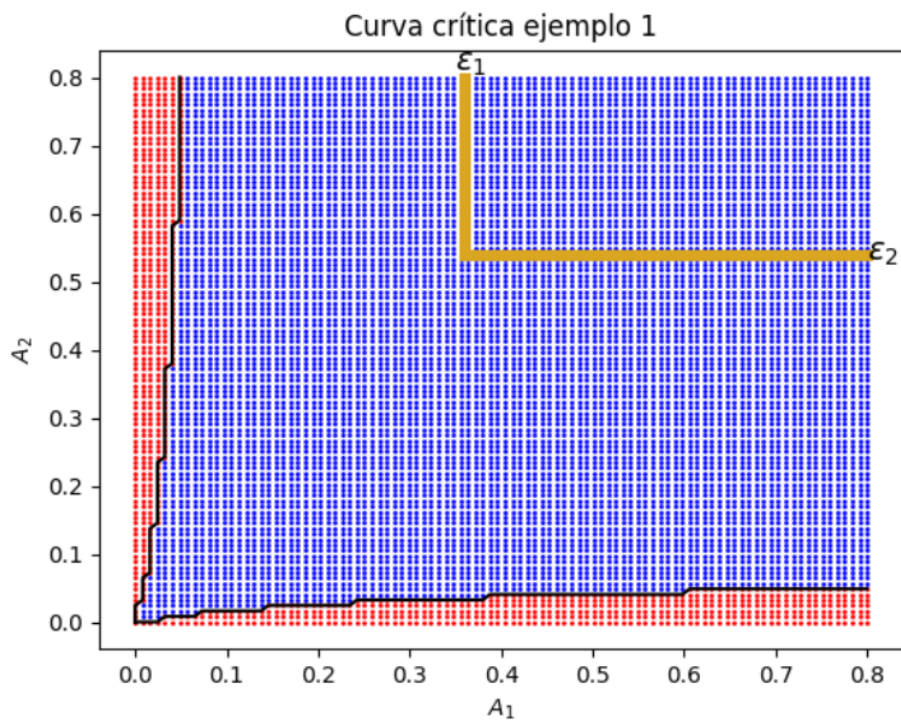


Fig. 4.11: Curva crítica divisoria. Los puntos rojos convergen hacia la exclusión. Los punto azules sí convergen a la coexistencia.

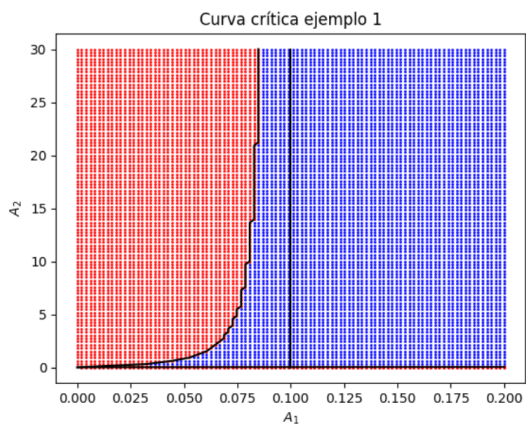


Fig 4.12: Componente vertical de la curva crítica.

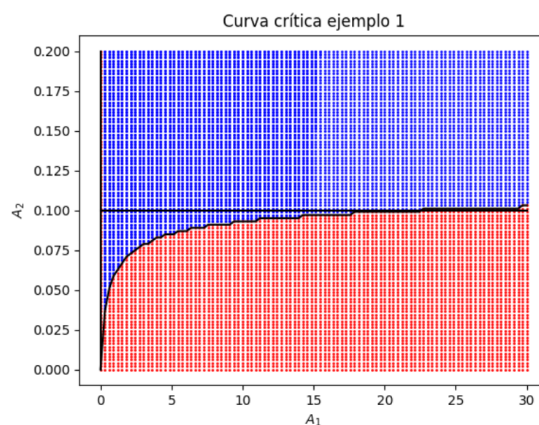


Fig 4.13: Componente horizontal de la curva crítica.



Fig 4.14: Curva crítica divisoria. Los puntos rojos convergen hacia la exclusión. Los puntos azules convergen a la coexistencia.

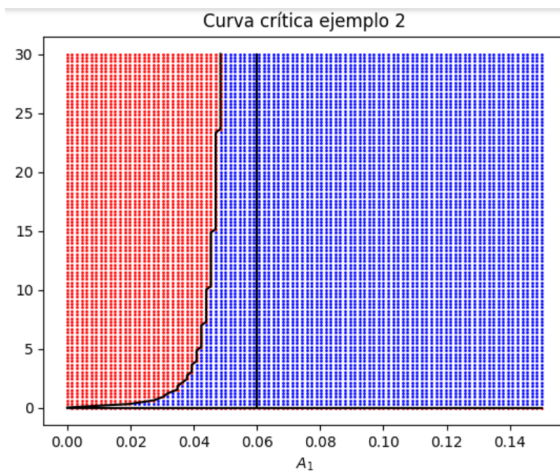


Fig 4.15: Componente vertical de la curva crítica. La recta vertical es $A_1 = \bar{\delta}_1 = 0.06$

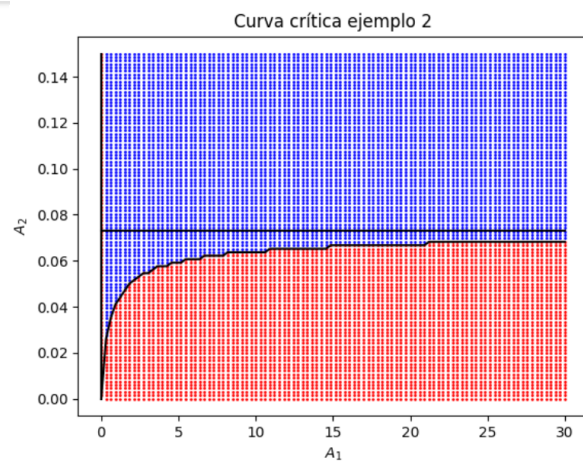


Fig 4.16: Componente horizontal de la curva crítica. la recta horizontal es $A_2 = \bar{\delta}_2 = 0.072$



4.17: Curva divisoria para $\delta_1 = \delta_2 = 0$; Lotka-Volterra.



4.18: Curva divisoria para $\delta_1 = \delta_2 = 0$; Lotka-Volterra.

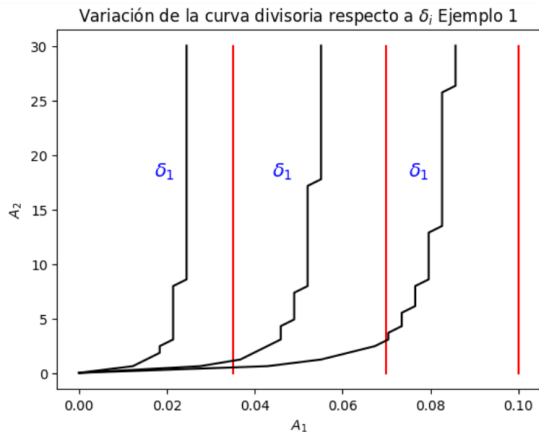


Fig. 4.19: Las componentes verticales de las curvas divisorias para tres elecciones, la original para $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$ queda a la derecha, para $\delta_1 = \delta_2 = 0.07$ queda en medio y para $\delta_1 = \delta_2 = 0.035$ queda hasta la izquierda

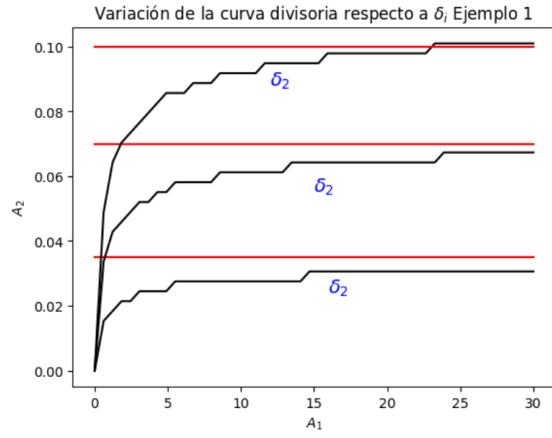


Fig. 4.20: Las componentes horizontales de las curvas divisorias de tres elecciones, la original con $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$ queda hasta arriba, con $\delta_1 = \delta_2 = 0.07$ queda en medio y con $\delta_1 = \delta_2 = 0.035$ queda abajo.

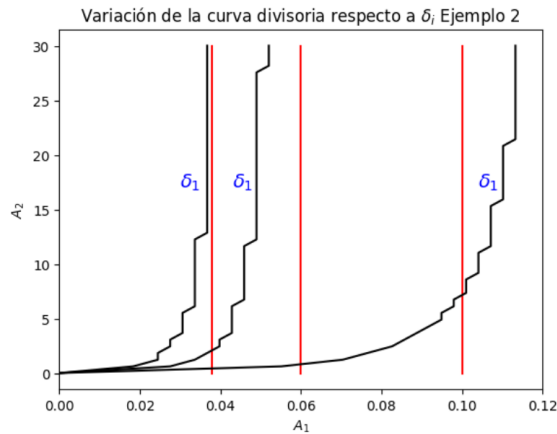


Fig. 4.21: Las componentes verticales de las curvas divisorias para tres elecciones, la original cuyos promedios son $\bar{\delta}_1 = 0.06$ y $\bar{\delta}_2 = 0.072$ queda en medio, para $\delta_1 = 0.038$ y $\delta_2 = 0.048$ queda a la izquierda y para $\delta_1 = 0.1$ y $\delta_2 = 0.09$ queda a la derecha

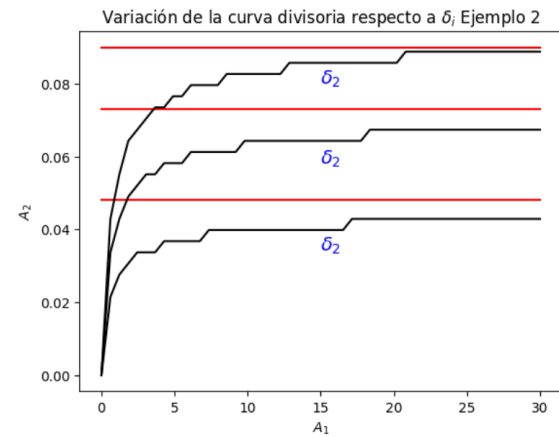


Fig. 4.22: Las componentes horizontales de las curvas divisorias de tres elecciones, la original cuyos promedios son $\bar{\delta}_1 = 0.06$ y $\bar{\delta}_2 = 0.072$ queda en medio para $\delta_1 = 0.038$ y $\delta_2 = 0.048$ queda abajo y para $\delta_1 = 0.1$ y $\delta_2 = 0.09$ queda arriba.

4.19 para la componente vertical y 4.20 para la componente horizontal. Se ve que conforme esta elección es decreciente, también es decreciente la distancia de la curva crítica al eje correspondiente. La variación que hacemos en el ejemplo 2, donde $\delta_1 = 0.05\sin(t) - 0.001\cos(\pi t) + 0.06$, $\delta_2 = 0.01215\sin(2\pi t) + 0.00972\cos(\sqrt{2}t) + 0.0729$, y por tanto sus promedios son los términos constantes 0.06 y 0.0729, respectivamente, es primeramente tomar otra elección con constantes $\delta_1 = 0.038$ y $\delta_2 = 0.048$. Esta nueva elección desde luego cumple las condiciones del Teorema 3 y es tal que cada nuevo δ_i es menor que el promedio de la elección original, respectivamente, pues $0.038 < 0.06$ y $0.048 < 0.0729$. La otra elección que tomamos también es de parámetros constantes que son $\delta_1 = 0.1$ y $\delta_2 = 0.09$. Esta otra elección también cumple las condiciones del Teorema 3 y es tal que cada δ_i es ahora mayor que el promedio de la elección original, respectivamente, pues ahora $0.06 < 0.1$ y $0.0729 < 0.09$. Entonces el algoritmo numérico calcula las tres curvas críticas correspondientes. Presentamos la componente vertical de las tres curvas en la figura 4.21, y la componente horizontal de esas tres mismas curvas en la figura 4.22, y podemos observar que la curva crítica correspondiente a la elección $\delta_1 = 0.038$ y $\delta_2 = 0.048$ queda a la izquierda, respecto a la componente vertical, y abajo, respecto a la componente horizontal de la curva crítica de la elección original $\delta_1 = 0.05\sin(t) - 0.001\cos(\pi t) + 0.06$,

$\delta_2 = 0.01215\sin(2\pi t) + 0.00972\cos(\sqrt{2}t) + 0.0729$, preservándose el orden respecto a los promedios respectivamente, y la curva crítica correspondiente a la elección $\delta_1 = 0.1$ y $\delta_2 = 0.09$ queda a la derecha (componente vertical) y arriba (componente horizontal) respecto a la elección original.

Capítulo 5

CATÁLISIS ENZIMÁTICA MONÓTONA CON SUMINISTRO OSCILANTE DE SUSTRATO E INHIBIDOR

5.1. Monotonía respecto al octante $K = \mathbb{R}_{\leq 0}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}^2$

Generalizando de cierta forma adecuada la noción de sistema competitivo y el orden \leq_{IV} que se da en el caso bidimensional, al pasar a dimensión mayor y arbitraria, digamos $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, para este caso, se define un orden parcial por medio del octante $K = \mathbb{R}_{\leq 0}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, el cual permite definir una K -monotonía, análoga al concepto de competitivo en \mathbb{R}^2 , y se da en términos de la matriz jacobiana del sistema. Entonces se construye la teoría correspondiente al caso general $d = n + m$ para

poder establecer un teorema que garantice la existencia de al menos una solución casi periódica apartir de encontrar una K -sub-solución y una K -súper-solución. Pero en este capítulo solamente presentamos la teoría para el caso $d = 4$, $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Toda la teoría que se presenta en esta sección ya fue presentada y demostrada en [22] y nos servirá para implicar la existencia de una única solución positiva casi periódica y la estabilidad asintótica global del modelo de catálisis enzimática de la siguiente sección.

Consideremos un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x(t), y(t)), \\ \dot{y} &= g(t, x(t), y(t)),\end{aligned}\tag{5.1}$$

con $U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ abierto, $f, g : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ funciones C^1 en U y continuas en t . Una solución de (5.1) es una pareja $(x(t), y(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ que satisface tal ecuación.

Sea

$$K = \{(x_1, x_2; y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \leq 0, y_1, y_2 \geq 0\}.$$

Se define entonces el K -orden parcial en $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ como sigue:

Definición 7: Para $u = (x, y)$ y $v = (x', y')$ en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, decimos que $u \leq_K v$, o equivalentemente $(x, y) \leq_K (x', y')$, si $v - u \in K$. Es

decir, si $u = (x_1, x_2; y_1, y_2)$ y $v = (x'_1, x'_2; y'_1, y'_2)$ entonces $u \leq_K v$ si $x_1 \geq x'_1, x_2 \geq x'_2, y_1 \leq y'_1, y_2 \leq y'_2$.

Si $u \leq_K v$ y $u \neq v$ escribimos $u <_K v$ o $(x, y) <_K (x', y')$, y si además $x_i \neq x'_i, y_i \neq y'_i, i = 1, 2$, escribimos $u \ll_K v$ o $(x, y) \ll_K (x', y')$.

Para el sistema (5.1), sea $J(V)$ la matriz Jacobiana del campo vectorial $V = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$,

$$J(V) = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \partial f_1/\partial y_1 & \partial f_1/\partial y_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \partial f_2/\partial y_1 & \partial f_2/\partial y_2 \\ \partial g_1/\partial x_1 & \partial g_1/\partial x_2 & \partial g_1/\partial y_1 & \partial g_1/\partial y_2 \\ \partial g_2/\partial x_1 & \partial g_2/\partial x_2 & \partial g_2/\partial y_1 & \partial g_2/\partial y_2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Podemos ver a $J(V) = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$, para las submatrices $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \frac{\partial g}{\partial x}$, $S = \frac{\partial g}{\partial y}$.

Definición 8: Decimos que el sistema (5.1) es K -monótono si todas las entradas de las submatrices Q y R son no negativas y se cumplen las desigualdades

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial y_2}, \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \leq 0. \quad (5.3)$$

Entonces si el sistema es monótono su matriz Jacobiana debe verse como algo así:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & - & + & + \\ - & \Delta_2 & + & + \\ + & + & \Delta_3 & - \\ + & + & - & \Delta_4 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

donde el signo de cada elemento de la diagonal no se restringe, el signo positivo denota que la entrada es necesariamente no negativa y el signo negativo que la entrada es menor o igual a cero.

Definición 9: Una pareja de funciones $(a(t), b(t))$, $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una K -sub-solución de (5.1) si para todo $t \geq 0$ se cumple que

$$\left(\dot{a}(t), \dot{b}(t) \right) \leq_K (f(t, a, b), g(t, a, b)). \quad (5.5)$$

Análogamente, una pareja de funciones $(A(t), B(t))$, $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una K -super-solución de (5.1) si para todo $t \geq 0$ se cumple que

$$(f(t, A, B), g(t, A, B)) \leq_K \left(\dot{A}(t), \dot{B}(t) \right). \quad (5.6)$$

Decimos que una K -sub-solución $(a(t), b(t))$ y una K -super-solución $(A(t), B(t))$ son una K -sub-super-solución ordenada si para todo $t \geq 0$

$$(a(t), b(t)) \ll_K (A(t), B(t)).$$

Lema 8: Suponga que $(a(t), b(t)) \ll_K (A(t), B(t))$ son una K -sub-super-solución ordenada de (5.1). If $(x(y), y(t))$ es una solución cualquiera con

condición inicial tal que

$$(a(0), b(0)) \ll_K (x(0), y(0)) \ll_K (A(0), B(0)),$$

entonces para cada $t \geq 0$

$$(a(t), b(t)) \ll_K (x(t), y(t)) \ll_K (A(t), B(t)). \quad (5.7)$$

Teorema 6: Suponga que el sistema (5.1) tiene componentes f y g , las cuales son uniformemente casi periódicas con respecto a $(x, y) \in U$ ($U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ una región). Suponga que f, g son de clase C^1 en U . Si el sistema es K -monótono y tiene una K -sub-solución $(a(t), b(t))$ en U que no sea solución y una K -súper-solución $(A(t), B(t))$ en U que tampoco es solución, con $(a(t), b(t)) \ll_K (A(t), B(t))$, entonces el sistema tiene una solución casi periódica $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ en U tal que para todo $t \geq 0$,

$$(a(t), b(t)) <_K (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) <_K (A(t), B(t)). \quad (5.8)$$

Además, para cualquier solución $(x(t), y(t))$ tal que

$$(a(0), b(0)) \leq_K (x(0), y(0)) \leq_K (A(0), B(0)),$$

se cumple una de las siguientes propiedades:

(a) $(x(t), y(t))$ converge asintóticamente hacia alguna solución casi periódica $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$.

(b) Existen soluciones casi periódicas $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \leq_K (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))$ y $T \geq 0$ tal que $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \leq_K (x(t), y(t)) \leq_K (\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t))$ para todo $t \geq T$.

Entonces, del teorema anterior, podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario 3: *Suponga que se cumplen las condiciones del Teorema 6 para (a_0, b_0) y (A_0, B_0) una K -sub-súper-solución ordenada con entradas constantes. Además asuma que el sistema admite a lo más una solución casi periódica $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ con condición inicial tal que*

$$(a_0, b_0) <_K (\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) <_K (A_0, B_0).$$

Entonces toda condición inicial en el rectángulo R definido por

$$R : (a_0, b_0) <_K (x, y) <_K (A_0, B_0)$$

converge asintóticamente hacia la única solución casi periódica $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ en R .

5.2. Modelo de catálisis enzimática

La catálisis enzimática monótona con suministro oscilante de sustrato e inhibidor se refiere a un escenario en el que una enzima cataliza una reacción química de manera monótona, pero los niveles de sustrato e inhibidor varían de manera oscilante. Las concentraciones del sustrato y del inhibidor fluctúan de manera oscilante a intervalos regulares o de forma periódica. En este tipo de sistema, se puede observar cómo la actividad de la enzima se ve afectada por estas oscilaciones. La dinámica entre la

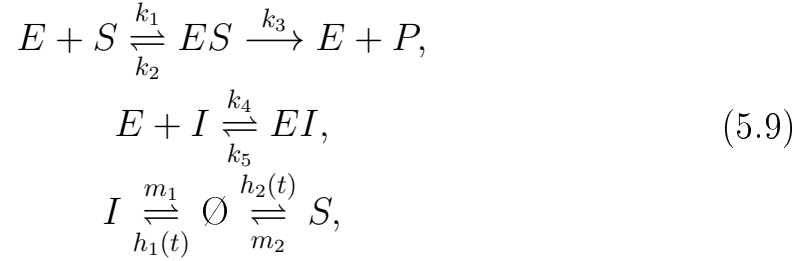
concentración del sustrato y el inhibidor puede influir en la velocidad de la reacción enzimática, y entender esta interacción puede proporcionar información valiosa sobre el comportamiento de la enzima en condiciones no constantes.

Este tipo de estudio puede ser relevante en procesos biológicos donde los metabolitos fluctúan debido a la regulación metabólica o la disponibilidad de recursos. También puede ser importante en el diseño de procesos industriales donde se busca optimizar la actividad enzimática bajo condiciones variables.

En resumen, la catálisis enzimática monótona con suministro oscilante de sustrato e inhibidor estudia cómo las fluctuaciones con cierta periodicidad en las concentraciones de sustrato e inhibidor afectan la actividad enzimática en un sistema donde la reacción enzimática puede conservar el patrón oscilante.

Nosotros consideramos la reacción en la que un sustrato S es catalizado por una enzima E , obteniendo un complejo ES del cual extraemos un producto P , y en consecuencia se considera un inhibidor, I . Al tratar con suministro oscilante, obtenemos entonces una red abierta de reacciones, con la tercera reacción ficticia, donde consideraremos una fuente oscilatoria que introduce las especies S e I a una velocidad dependiente del

tiempo $h_1(t)$ y $h_2(t)$, respectivamente, esto se representa con



donde los k_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ representan los coeficientes de tasa y m_1, m_2 son las tasas de degradación del sustrato y del inhibidor respectivamente. Para conocer más y obtener más información respecto a los sistemas del tipo (5.9) pueden consultarse [24,25], pero ahí se considera el caso cuando los términos de h_1 y h_2 son valores constantes, es decir, la cantidad del sustrato y del inhibidor se suministra a una velocidad constante, mientras que nosotros estamos considerando el caso general en donde esa variación es oscilatoria. Al representar de la siguiente forma las variables

$$\begin{aligned}
 x_0 &= [E], \\
 x_1 &= [S], \\
 x_2 &= [I], \\
 y_1 &= [ES], \\
 y_2 &= [EI],
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde $[\sigma]$ denota la concentración de la sustancia σ , supóngase que $x_0 > 0$, y bajo la ley de acción de masas, y por la ley de conservación dada por

la cantidad global constante de la enzima, entonces $T = x_0 + y_1 + y_2$.

Por lo tanto, para $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4$ nos queda el siguiente sistema acoplado de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -k_1(T - y_1 - y_2)x_1 + k_2y_1 + h_1(t) - m_1x_1, \\
 \dot{x}_2 &= -k_5(T - y_1 - y_2)x_2 + k_4y_2 + h_2(t) - m_2x_2, \\
 \dot{y}_1 &= k_1(T - y_1 - y_2)x_1 - (k_2 + k_3)y_1, \\
 \dot{y}_2 &= k_5(T - y_1 - y_2)x_2 - k_4y_2.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Donde cada constante $k_i, m_1, m_2, T > 0, i = 1, 2, \dots, 5$ y $h_1(t), h_2(t) > 0$ son funciones casi periódicas. Si

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)), y(t) = (y_1(t), y_2(t)), F = (f_1, f_2), G = (g_1, g_2),$$

el sistema (5.11) queda así:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= F(t, x(t), y(t)), \\
 \dot{y} &= G(t, x(t), y(t)),
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
f_1 &= -k_1 (T - y_1 - y_2) x_1 + k_2 y_1 + h_1(t) - m_1 x_1, \\
f_2 &= -k_5 (T - y_1 - y_2) x_2 + k_4 y_2 + h_2(t) - m_2 x_2, \\
g_1 &= k_1 (T - y_1 - y_2) x_1 - (k_2 + k_3) y_1, \\
g_2 &= k_5 (T - y_1 - y_2) x_2 - k_4 y_2.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Calculamos el Jacobiano de (5.13) y nos queda

$$\begin{pmatrix} -k_1 x_0 - m_1 & 0 & k_1 x_1 + k_2 & k_1 x_1 \\ 0 & -k_5 x_0 - m_2 & k_5 x_2 & k_4 + k_5 x_1 \\ k_1 x_0 & 0 & -k_1 x_1 - k_2 - k_3 & -k_1 x_1 \\ 0 & k_5 x_0 & -k_5 x_2 & -k_4 - k_5 x_2 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Note que, dado que $x_0 = (T - y_1 - y_2) > 0$, la matriz (5.14) es de la forma descrita en (5.4) y por tanto el sistema (5.11) es K -monótono.

De acuerdo a la definición 9 y a la ecuación (5.5), y como $h(t) \leq h_1^*$, para tener una K -sub-solución de (5.11) con entradas constantes no negativas $(a, b) = (a_1, a_2; b_1, b_2)$, es suficiente que se cumplan las siguientes

desigualdades

$$\begin{aligned}
0 &\geq h_1^* - k_1 a_1 (T - b_1 - b_2) + k_2 b_1 - m_1 a_1, \\
0 &\geq h_2^* - k_5 a_2 (T - b_1 - b_2) + k_4 b_2 - m_2 a_2, \\
0 &\leq k_1 a_1 (T - b_1 - b_2) - (k_2 + k_3) b_1, \\
0 &\leq k_5 a_2 (T - b_1 - b_2) - k_4 b_2.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Además, si las entradas $b_1, b_2 = 0$, la ecuación (5.15) implica que

$$\begin{aligned}
a_1 &\geq a_1^0 := \frac{h_1^*}{m_1 + k_1 T}, \\
a_2 &\geq a_2^0 := \frac{h_2^*}{m_2 + k_5 T}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Análogamente, se tiene una K -súper-solución con entradas constantes no negativas $(A, B) = (A_1, A_2; B_1, B_2)$ si

$$\begin{aligned}
0 &\leq h_{1*} - k_1 A_1 (T - B_1 - B_2) + k_2 B_1 - m_1 A_1, \\
0 &\leq h_{2*} - k_5 A_2 (T - B_1 - B_2) + k_4 B_2 - m_2 A_2, \\
0 &\geq k_1 A_1 (T - B_1 - B_2) - (k_2 + k_3) B_1, \\
0 &\geq k_5 A_2 (T - B_1 - B_2) - k_4 B_2.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Y si además $A_1, A_2 = 0$ entonces las desigualdades de (5.17) se cumplen para todo $(B_1, B_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Es decir, (5.17) no aporta ninguna nueva relación. Sin embargo, se tiene en general que $T - y_1 - y_2 > 0$, así que

$(0, 0; B_1, B_2)$ es una K -súper solución si

$$0 \leq B_1 + B_2 \leq T. \quad (5.18)$$

Por lo tanto, $(a_1, a_2, 0, 0) = \left(\frac{Tk_2 + h_1^*}{m_1}, \frac{Tk_4 + h_2^*}{m_2}, 0, 0 \right)$ es una K -sub-solución ya que para $i = 1, 2$, $a_i \geq a_i^0$ y $(0, 0, B_1, B_2) = \left(0, 0, \frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right)$ es una K -súper-solución, y claramente

$$p_0 := \left(\frac{Tk_2 + h_1^*}{m_1}, \frac{Tk_4 + h_2^*}{m_2}, 0, 0 \right) \ll_K P^0 := \left(0, 0, \frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right). \quad (5.19)$$

Lema 9: Sean p_0 y P^0 , definidas en (5.19). Sea $R \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^4$ la región definida por $R : p_0 <_K (x_1, x_2, y_1, y_2) <_K P^0$. Entonces, la región R es positivamente invariante y atractora global de todas las órbitas en $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$ y p_0, P^0 son una K -sub-súper-solución ordenada de R .

Demostración: Al evaluar el campo vectorial en las diferentes 8 regiones C_i , donde cada C_i tiene como parte de su frontera una de las 8 caras de R se tienen las siguientes desigualdades:

$$C_1 : 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad y_1 > T/2, \quad 0 \leq y_2 \leq T/2 < 0,$$

$$\frac{dy_1}{dt} |_{C_1} \leq -(k_2 + k_3)y_1 < 0,$$

$$C_2 : 0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad 0 \leq y_1 \leq T/2, \quad y_2 > T/2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} |_{C_2} \leq -k_4 y_2 < 0,$$

$$C_3 : x_1 < 0, 0 \leq x_2 \leq a_2, 0 \leq y_1 \leq T/2, 0 \leq y_2 \leq T/2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} |_{C_3} > k_2 y_1 + h_1 > 0,$$

$$C_4 : 0 \leq x_1 \leq a_1, x_2 > 0, 0 \leq y_1 \leq T/2, 0 \leq y_2 \leq T/2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} |_{C_4} > k_4 y_2 + h_2 > 0,$$

$$C_5 : x_1 > a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, 0 \leq y_1 \leq T/2, 0 \leq y_2 \leq T/2,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} |_{C_5} &< k_2 y_1 + h_1 - m_1 a_1 \\ &\leq k_2 T/2 - m_1 \frac{k_2 T + h_1^*}{m_1} + h_1^* \\ &\leq -k_2 T/2 < 0, \end{aligned}$$

$$C_6 : 0 \leq x_1 \leq a_1, x_2 > a_2, 0 \leq y_1 \leq T/2, 0 \leq y_2 \leq T/2,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} |_{C_6} &< k_4 y_2 + h_2 - m_2 a_2 \\ &\leq k_4 T/2 + h_2^* - m_2 \frac{k_4 T + h_2^*}{m_2} \\ &\leq -k_4 T/2 < 0. \end{aligned}$$

La verificación en las dos regiones faltantes que corresponden a $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ es similar. Esto termina la demostración del lema.

Lema 10: *El sistema (5.11) admite a lo más una solución casi periódica en $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$.*

Demostración: Sean $A(t) = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ y $a(t) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ dos soluciones casi periódicas de (5.11) con componentes no negativas tal que $a <_K A$. Sea $L_i = M[A_i - a_i]$ y $L_{i,j} = M[A_i A_j - a_i a_j]$. Al sustituir $A(t)$ y $a(t)$ en (5.11) y tomar promedios se obtiene que

$$\begin{aligned}
0 &= -k_1 T L_1 + k_1 L_{3,1} + k_1 L_{4,1} + k_2 L_3 - m_1 L_1, & (a) \\
0 &= -k_5 T L_2 + k_5 L_{3,2} + k_5 L_{4,2} + k_4 L_4 - m_2 L_2, & (b) \\
0 &= k_1 T L_1 - k_1 L_{3,1} - k_1 L_{4,1} - (k_2 + k_3) L_3, & (c) \\
0 &= k_5 T L_2 - k_5 L_{3,2} - k_5 L_{4,2} - k_4 L_4. & (d)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Además, por el K -orden, se tiene que $L_1, L_2 \leq 0$; $L_3, L_4 \geq 0$. Al sumar (5.20a) con (5.20c) y (5.20b) con (5.20d) se obtiene que

$$\begin{aligned}
m_1 L_1 + k_3 L_3 &= 0, & (a) \\
m_2 L_2 &= 0. & (b)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

(5.21b) implica que $L_2 = 0$. Al sustituir (5.21a) en (5.20c) y (5.21b) en (5.20b) se obtiene que

$$\begin{aligned}
k_1 (L_{3,1} + L_{4,1}) + k_2 L_3 &= (k_1 T + m_1) L_1 \leq 0, \\
k_5 (L_{3,2} + L_{4,2}) + k_4 L_4 &= (k_5 T + m_2) L_2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Por lo tanto

$$(L_{3,1} + L_{4,1}) \leq -k_2 L_3 \leq 0, (L_{3,2} + L_{4,2}) \leq -k_4 L_4 \leq 0. \quad (5.23)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} M [(A_3 + A_4) A_1] &\leq M [(a_3 + a_4) a_1], \\ M [(A_3 + A_4) A_2] &\leq M [(a_3 + a_4) a_2]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Por otra parte, por el K -orden se tiene que

$$\begin{aligned} (a_3 + a_4) a_1 &\leq (A_3 + A_4) a_1, \\ (a_3 + a_4) a_2 &\leq (A_3 + A_4) a_2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Las ecuaciones de (5.24) y (5.25) implican que

$$\begin{aligned} 0 &\leq M [(A_3 + A_4) (a_1 - A_1)] \leq 0, \\ 0 &\leq M [(A_3 + A_4) (a_2 - A_2)] \leq 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Por lo tanto

$$(A_3 + A_4) (a_1 - A_1) = 0 = (A_3 + A_4) (a_2 - A_2). \quad (5.27)$$

Si $A_3 + A_4 > 0$, se concluye que $L_1 = 0 = L_2$, y entonces también $L_3 = 0 = L_4$. Y si $A_3 + A_4 = 0$ entonces $a = \vec{0} = A$. Esto termina la demostración del lema.

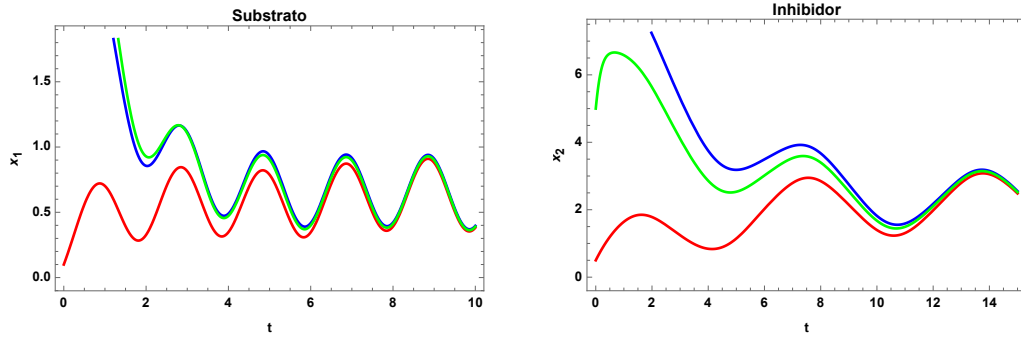


Fig. 5.1: Convergencia asintótica hacia la solución positiva casi periódica.

Entonces podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 7: *En el modelo (5.11) suponga que cada constante $m_1, m_2, T, k_i > 0, i = 1, 2, \dots, 5$ y que $h_1(t), h_2(t) > 0$ son funciones casi periódicas. Entonces (5.11) tiene una única solución casi periódica, la cual tiene promedio positivo y toda órbita en $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$ converge asintóticamente a tal solución.*

Ejemplo Numérico

Tomamos los siguientes términos de forzamiento

$$h_1(t) = 1.1 + \cos(t), \quad h_2(t) = 1.1 + \sin(\pi t).$$

Entonces $h_1^* = 2.1, h_2^* = 2.1, h_{1*} = 0.1, h_{2*} = 0.1$. Para los valores de las tasas de decaimiento nos tomamos $m_1 = m_2 = 1$. Y por último nos tomamos $T = 1$ y $k_1 = 0.95, k_2 = 0.3, k_3 = 0.9, k_4 = 0.8, k_5 = 0.3$. La modelación numérica que se obtiene para este caso muestra una órbita casi periódica positiva que es atractora global. Ver Figura 5.1.

CONCLUSIONES:

Al considerar sistemas dinámicos se pretende estudiar y entender su evolución en el tiempo, y con cierta primordialidad poder conocer características o comportamientos asintóticos que describan o generen cierta predicción de la dinámica. La teoría que permita establecer condiciones para que un sistema dinámico cumpla una propiedad de relevante interés es de un inconmensurable potencial, tanto en lo referente a lo puramente teórico como en lo más práctico y aplicable. En este trabajo se pudo presentar una teoría que puede ser aplicable a una gran variedad de modelos, dados por sistemas de ecuaciones diferenciales que poseen una amplia generalidad y abundante ocurrencia en la naturaleza. La utilidad de los resultados teóricos que usamos y que garantizan la existencia de al menos una solución casi periódica en sistemas con ciertas condiciones quedó patentado al poder aplicar estos resultados a tres sistemas de gran interés y con un muy importante estudio en la literatura científica accesible, el modelo de Kuno, el modelo de Lotka-Volterra y el modelo químico de la catálisis enzimática. En el modelo de Kuno con interferencia reproductiva, al considerarlo con coeficientes casi periódicos, se pudo demostrar que, bajo ciertas condiciones que son naturales y claramente factibles, existe una convergencia asintótica de las órbitas de las condiciones iniciales (las cuales corresponden a los datos iniciales sobre las poblaciones de las dos especies) que no están muy cerca de los ejes cartesianos, a una órbita positiva casi periódica aislada de los ejes, lo cual significa una coexistencia que posee también un comportamiento oscilatorio relacionado con la influencia oscilatoria del

ambiente. Además, era sabido que existen otras dos soluciones casi periódicas en ese modelo, las soluciones de la exclusión, que corresponden, en principio, a la ausencia de una de las dos especies y a la estabilidad global ya demostrada para ese caso, el unidimensional. Sin embargo, para ciertas condiciones iniciales que se encuentran en el cono positivo del plano, sucede que si están relativamente cerca de los ejes, entonces sus órbitas serán atraídas por la correspondiente solución de la exclusión. Al final del trabajo sobre el modelo de Kuno se ve que los resultados teóricos son plenamente consistentes con el análisis numérico obtenido de los ejemplos que presentamos. Además queda evidente, numéricamente, que bajo las condiciones del Teorema 3, existe estabilidad global en una región no acotada y aislada de los ejes cartesianos, hacia la coexistencia dada por la solución casi periódica positiva, y que las que no convergen hacia tal solución positiva, entonces son atraídas hacia las soluciones de la exclusión. Luego entonces, es claro que el Teorema 1 que presentamos en este trabajo permitió establecer resultados importantes sobre el sistema de Kuno con coeficientes casi periódicos. Ya teniendo establecidos los resultados obtenidos sobre el modelo de Kuno, era natural implementarlos directamente al caso particular dado por el modelo competitivo de Lotka-Volterra con coeficientes casi periódicos, y se pudo implicar, relativamente de manera elemental y sencilla, la estabilidad global para ese caso, esto quedó establecido en el Teorema 4. Encontramos también que las condiciones del Teorema 4 implican las condiciones del Teorema de Gopalsamy presentado en el año de 1992 en [8], y por tanto cada sistema que pueda ser resuelto por el Teorema 4 puede también ser resuelto por el Teorema de Gopalsamy. Sin embargo, pudimos construir un nuevo resultado independiente del Teorema de Gopalsamy. En este nuevo resultado, el Teorema 5, se pudo construir la implicación de la existencia directamente del Teorema 1, después se concluye también la estabilidad global para L.V. y puede aplicarse a sistemas en donde no puede aplicarse el resultado de Gopalsamy. Al

final del trabajo, se pudo presentar una teoría, análoga al caso bidimensional, pero en dimensión cuatro, que establece también condiciones para garantizar una solución casi periódica en ciertos modelos. Esta teoría se resume en el Teorema 7 y también la pudimos aplicar a otro sistema dinámico, uno dado por un fenómeno químico en donde una enzima reacciona ante el suministro de un sustrato y de un inhibidor, y dicho suministro presenta cierta oscilación casi periódica respecto al tiempo. Para ese modelo se pudo también probar la estabilidad global hacia una solución casi periódica positiva. Entonces, hemos presentado una variedad de sistemas que poseen al menos una solución casi periódica no trivial, el Teorema 1 ha sido la herramienta principal para ese propósito, y se pudo implicar la unicidad analíticamente en dos de los tres sistemas generales presentados, y en el caso de Kuno la existencia pudo ser probada analíticamente y la estabilidad global en una región no acotada y aislada de los ejes se pudo ver numéricamente.

Bibliografía

- [1] J. M. C. Ribeiro and A. Spielman. The satyr effect: A model predicting parapatry and species extinction. *Amer. Nat.*, 128(4):513-528, 1986.
- [2] Ping Liu, Junping Shi. Periodic solutions of a logistic type population model with harvesting. *J. Math. Anal. Appl.* 369, 2010.
- [3] S. Kishi and T. Nakazawa. Analysis of species coexistence co-mediated by resource competition and reproductive interference. *Popul. Ecol.*, 55:305-313, 2013.
- [4] A. Friedman Takafuji, E. Kuno, and H. Fujimoto. Reproductive interference and its consequences for the competitive interactions between two closely related panonychus spider mites. *Experimental & Applied Acarology*, 21:379-391, 1997.
- [5] K. Takakura and S. Fujii. Reproductive interference and salinity tolerance differentiate habitat use between two alien cocklebur: *Xanthium occidentale* and *x. italicum* (compositae). *Plant. Ecol.*, 206:309-319, 2010.
- [6] K. Takakura, T. Nishida, T. Matsumoto, and S. Nishida. Alien dandelion reduces the seedset of a native congener through frequency-dependent and one-sided effects. *Biol. Invasions*, 11:973-981, 2009.
- [7] K. Gopalsamy. Global asymptotic stability in a periodic Lotka-Volterra system. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 27:67-73, 1985.

- [8] K. Gopalsamy. Global stability in an almost periodic Lotka-Volterra system. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 27:346-360, 1986.
- [9] Díaz-Marín Homero, Osuna Osvaldo, and Villavicencio-Pulido Geiser. An almost periodic model to describe phenology mismatches in mutualistic interactions. Springer Nature, 2022.
- [10] Homero G. Díaz Marín, Osvaldo Osuna. Almost periodic stable Wolbachia-infected mosquito population replacement. *Period. Math. Hungarica*, 2022.
- [11] Eizi Kuno. Competitive exclusion through reproductive interference. *Res. Population Ecology*. 34:275-284, 1992.
- [12] Paton RS, Bonsall MB. The ecological and epidemiological consequences of reproductive interference between the vectors *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus*. *J.R. Soc. Interface*16, 2019.
- [13] M. N. Nakashama. Dynamics of Logistic Equations with non-autonomos Bounded Coefficients. *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 02:1-8, 2000.
- [14] A. S. Besicovitch. *Almost Periodic Functions*. Cambridge University Press, 1932.
- [15] H. Bohr. *Almost Periodic Functions*. Chelsea Publishing Company, New York, 1947.
- [16] C. Corduneanu. *Almost Periodic Functions*. Chelsea Publishing Company, New York, 2nd. edition, 1989.
- [17] A. M. Fink. *Almost Periodic Differential Equations*, volume 377 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1974.
- [18] C. Corduneanu. *Almost Periodic Oscillations and Waves*. Springer-Verlag, 2009.

- [19] T. Yoshizawa. *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, volume 14 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1975.
- [20] J. Gröning and A. Hochkirch. Reproductive interference between animal species. *The Quarterly Review of Biology*, 83(3):258-282, 2008.
- [21] M. Boyce and D. Daley. Population tracking of fluctuating environments and natural selection for tracking ability. *The American Naturalist*, 115(4):480-491, 1980.
- [22] Homero G. Díaz Marín, José L. Sánchez Ponce. Intraspecific and monotone enzyme catalysis with oscillatory substrate and inhibitor supplies. *Springer Journal of Mathematical Chemistry*, 2024.
- [23] M. W. Hirsch. Systems of differential equations that are competitive or cooperative. v. convergence in 3-dimensional systems. *Journal of Differential Equations*, 80(1):94-106, 1989.
- [24] David Angeli, Patrick De Leenheer, Eduardo Sontag. Graph-theoretic characterizations of monotonicity of chemical networks in reaction coordinates. *Journal of Mathematical Biology*, 61:581–616, 2010.
- [25] Angélica Torres, Elisenda Feliu. Symbolic Proof of Bistability in Reaction Networks. *arXiv:1909.13608v2 [q-bio.MN]*, 2020.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	DOCTORADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA	
Título del trabajo	ÓRBITAS CASI PERIÓDICAS EN EL MODELO DE KUNO CON INTERFERENCIA REPRODUCTIVA Y EN EL DE CATÁLISIS ENZIMÁTICA CON SUMINISTRO DE SUSTRATO E INHIBIDOR	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	JOSÉ LUIS SÁNCHEZ PONCE	0001174k@umich.mx
Director	DR. HOMERO GEOVANI DÍAZ MARÍN	homero.diaz@umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	DR. GONZALO VIRAMONTES GAMBOA	gvgamboa@umich.mx

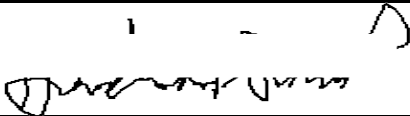
Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	NO	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo




Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	NO	
Traducción a otra lengua	NO	
Revisión y corrección de estilo	NO	
Análisis de datos	NO	
Búsqueda y organización de información	NO	
Formateo de las referencias bibliográficas	NO	
Generación de contenido multimedia	NO	
Otro	NO	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	JOSÉ LUIS SÁNCHEZ PONCE 
Lugar y fecha	MORELIA, MICHOACÁN, 29 DE NOVIEMBRE DEL 2024

José Luis Sánchez Ponce

ÓRBITAS CASI PERIÓDICAS EN EL MODELO DE KUNO CON INTERFERENCIA REPRODUCTIVA Y EN EL DE CATÁLISIS ENZ

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:412560246

Fecha de entrega

4 dic 2024, 9:41 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

4 dic 2024, 9:47 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

ÓRBITAS CASI PERIÓDICAS EN EL MODELO DE KUNO CON INTERFERENCIA REPRODUCTIVA Y EN E....pdf

Tamaño de archivo

4.0 MB

107 Páginas




21,329 Palabras

96,336 Caracteres

5% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 4%  Fuentes de Internet
- 3%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

339 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.