



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Y



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Instituto de Física y Matemáticas



CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Números de Sidon-Ramsey y números de B_h -Ramsey, y Espacio de polígonos degenerados a segmentos

T E S I S

que para optar por el grado de *Doctor en Ciencias Matemáticas*
presenta

Manuel Alejandro Espinosa García

Asesores: Dr. Edgardo Roldán Pensado

Dr. Juan Ahtziri González Lemus

Morelia, Michoacán, México
Abril 2025

Índice general

I	Los números de Sidon-Ramsey y B_h-Ramsey	1
1.	Antecedentes	2
1.1.	Conjuntos de Sidon	2
1.2.	Conjuntos B_h	5
1.3.	Números de Sidon-Ramsey	7
1.4.	Números de B_h -Ramsey	9
2.	Números de Sidon-Ramsey y números B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}$	11
2.1.	Estimación mediante el algoritmo glotón	11
2.2.	Estimación mediante el Lema Local de Lovász asimétrico	12
2.3.	Estimación mediante el Teorema de Hipergráficas Simétricas	16
2.4.	Demostración del Teorema 2.1	17
2.5.	Nuevos números de Sidon-Ramsey en $\mathbb{Z}$	18
2.6.	Números B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}$	20
3.	Números de Sidon-Ramsey y B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}^d$	22
3.1.	Mejoras en números B_h en $\mathbb{Z}^d$	22
3.2.	Números de Sidon-Ramsey y números B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}^d$	25
II	Espacio de polígonos degenerados a segmentos	27
4.	Preliminares	28
4.1.	Espacio de polígonos $P(n)$	29
4.1.1.	Espacio de polígonos simples	29
4.1.2.	Espacio de polígonos convexos	30
4.2.	Espacio de n -segmentos y espacio de n -segmentos convexos	30
5.	La topología y la geometría de $\mathbb{L}(n)$	34
5.1.	La topología de $\mathbb{L}(n)$	34
5.2.	El espacio tangente de $\mathbb{L}(n)$ y las rectas en $\mathbb{L}(n)$	36
5.2.1.	El espacio tangente $T_Z\mathbb{M}(n)$	37
5.2.2.	El espacio tangente $T_Z\mathbb{L}(n)$	38

5.2.3.	Líneas rectas en $\mathbb{M}(n)$	39
5.2.4.	Líneas rectas en $\mathbb{L}(n)$	40
5.3.	Geodésicas en $\mathbb{M}(n)$ y en $\mathbb{L}(n)$	40
5.3.1.	Geodésicas en $\mathbb{M}(n)$	41
5.3.2.	Geodésicas en $\mathbb{L}(n)$	43
6.	La topología de $L(n)$ y $Q(n)$	46
6.1.	Espacio de n -segmentos	46
6.2.	Espacio de n -segmentos convexos	47
6.3.	Estructura simplicial de $\mathcal{L}(n)$ y de $\mathcal{Q}(n)$	50
6.4.	Topología de los espacios $\mathbb{Q}(n)$, $\mathcal{Q}(n)$ y $Q(n)$	53
7.	El orbifold $\mathcal{L}(n)$	62
7.1.	El locus singular en $\mathcal{L}(n)$	64
A.	Resultados topológicos	68
A.1.	Pegado de complejos simpliciales	68
A.2.	Toros de mapeo de $\mathbb{D}^n$	69
A.3.	Orbifolds	70

Resumen

En la primera parte de la tesis se estudian los números de Sidon-Ramsey y los números B_h -Ramsey, que son los problemas tipo Ramsey correspondientes a los conjuntos de Sidon y a los conjuntos B_h . Estos problemas se trabajan en subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Z}^d$.

En la segunda parte de la tesis se estudia el espacio de polígonos degenerados a segmentos. Dicho estudio se realiza combinatoria, topológica y geoméricamente.

Abstract

First part of this thesis is about the study of Sidon-Ramsey numbers and B_h -Ramsey numbers, which are the Ramsey type problems corresponding to Sidon sets and B_h -sets. These problems are worked over finite sets in $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}^d$.

Second part of the thesis study the spaces of polygons degenerated to segments. Combinatorial, topological and geometrical aspects are studied about them.

Problema tipo Ramsey, Sidon-ramsey, B_h -Ramsey, Espacios de polígonos, Espacios de segmentos

Agradecimientos

Al Programa de Becas Nacionales de CONACyT, el cual financió mis estudios de doctorado.

Introducción

Esta tesis se divide en dos partes, cada una trata un problema distinto que fue trabajado durante este doctorado. En la primera parte se trabaja en un par de problemas tipo Ramsey, en particular se trabajó en calcular estimaciones y valores exactos para números de Sidon-Ramsey y números de B_h -Ramsey; esta parte de la tesis fue desarrollada en [15] y [16]. En la segunda parte se estudia la topología y geometría de espacios de polígonos degenerados a segmentos; esto fue desarrollado en [20] y [14].

PARTE I. Los números de Sidon-Ramsey y B_h -Ramsey

Los problemas tipo Ramsey cuestionan el tamaño que debe tener alguna estructura para que ésta cuente con una propiedad particular. Dentro de la teoría de Ramsey existe un conjunto de problemas orientados a la teoría aditiva de números los cuales consisten generalmente en encontrar particiones (coloraciones) de conjuntos de enteros de modo que ninguna de las partes contenga una solución a cierta ecuación planteada (solución monocromática). Dentro de los primeros resultados conocidos en esta área se pueden mencionar:

Teorema de Schür (1916) [39]: Para toda coloración finita de los números naturales existe una solución monocromática a la ecuación $x + y = z$.

Teorema de Van der Waerden (1927) [42]: Para toda coloración finita de los números naturales existe una progresión aritmética monocromática de longitud arbitraria.

Otros resultados tipo Ramsey en teoría aditiva de números se pueden encontrar en [24].

Otra pregunta interesante para este tipo de problemas es determinar, dado un número de colores fijo k , cuál es el menor entero n tal que para cualquier coloración de los enteros en $[1, n]$ con k colores existe alguna solución monocromática a cierta ecuación planteada. A dicha n se le llama el k -ésimo número de Ramsey de dicha ecuación. En general, los números de Ramsey son difíciles de determinar, por mencionar ejemplos, los números de Schür únicamente se conocen cuando $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y los números de van der Waerden se conocen únicamente para progresiones de longitud 3 en el caso de 2, 3 y 4 colores, para progresiones de longitud 4 en el caso de 2 y 3 colores, y para progresiones de longitud 5 en el caso de 2 colores. Así mismo, las cotas inferior y superior conocidas para los números de van der Waerden son de órdenes muy distintos.

En esta primera parte de la tesis nos enfocaremos a estudiar los números de Ramsey para los conjuntos de Sidon y los conjuntos B_h . Además daremos generalizaciones de estos parámetros al considerar coloraciones de “cajas” en $\mathbb{Z}^d$, es decir, en conjuntos de la forma $[1, n_1] \times \cdots \times [1, n_d] \subseteq \mathbb{Z}^d$. Para ser más específicos, los problemas aditivos que se consideran son:

- Un conjunto de Sidon es un conjunto que no contiene soluciones para la ecuación $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Así, nos referiremos al problema de Sidon-Ramsey como el problema que estudia la longitud que debe tener un intervalo de modo que este se pueda partir en alguna cantidad determinada de conjuntos de Sidon.
- Un conjunto B_h es un conjunto que no contiene ninguna solución para la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_h = y_1 + y_2 + \cdots + y_h$. Llamaremos el problema de B_h -Ramsey al problema que estudia la longitud que debe tener un intervalo de modo que este se pueda partir en alguna cantidad determinada de conjuntos B_h .

Nótese que hablar de conjuntos de Sidon es equivalente a hablar de conjuntos B_2 .

En el Capítulo 1 se encuentran las definiciones y resultados preliminares relativos a conjuntos de Sidon, conjuntos B_h , números de Sidon-Ramsey y números B_h -Ramsey.

En el Capítulo 2 se presentarán nuevas estimaciones para los números de Sidon-Ramsey dentro de $\mathbb{Z}$. El Teorema 2.1 establece que la longitud máxima de un intervalo que se puede partir en k conjuntos de Sidon es asintóticamente k^2 . En este capítulo también se dan algunos nuevos valores de números de Sidon-Ramsey. De manera similar, se estudia los números B_h -Ramsey en intervalos, y en el Teorema 2.15 se establece que la longitud máxima de un intervalo que se puede partir en k conjuntos B_h es de orden $k^{\frac{h}{h-1}}$.

El Capítulo 3 está enfocado a estudiar los números de Sidon-Ramsey y B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}^d$. Para ello, se hace primero algunas mejoras a las estimaciones conocidas del tamaño máximo de conjuntos B_h en cajas (ver Teorema 3.1). Posteriormente, estimamos los parámetros mencionados a partir de las estimaciones y construcciones conocidas en el estudio de estos parámetros en $\mathbb{Z}$.

PARTE II. Espacio de polígonos degenerados a segmentos

Los espacios de polígonos se han estudiado con diversos fines en distintas áreas de las matemáticas. Para esto, primero se hablará un poco acerca de qué es el espacio de polígonos.

Sea $n \geq 3$ entero. Podemos pensar que un punto $(z_1, \dots, z_n)$ en $\mathbb{C}^n$ representa al polígono en $\mathbb{C}$ con vértices en $z_1, \dots, z_n$ y lados $\overline{z_1 z_2}, \dots, \overline{z_n z_1}$ (donde para $a, b \in \mathbb{C}$, $\overline{ab}$ denota al segmento que tiene de extremos a a y b). Entonces, el conjunto de n -ágonos en $\mathbb{C}$ está equipado con la topología de $\mathbb{C}^n$ (en general, los n -ágonos degenerados a un punto no son considerados). Dos polígonos se consideran equivalentes si son semejantes y tienen la misma orientación. Al espacio que se obtiene de los n -ágonos no degenerados a un punto módulo

polígonos equivalentes le llamaremos el espacio de polígonos. Aquellos n -ágonos degenerados a segmentos se llamarán n -segmentos y serán el tema central de esta parte de la tesis; aquellos n -segmentos que son puntos límite de polígonos convexos se llamarán n -segmentos convexos. El estudio de los n -segmentos surgió a partir del estudio del espacio de polígonos convexos, siendo la principal razón que, un polígono es límite al mismo tiempo de polígonos convexos positivamente orientados y de polígonos convexos negativamente orientados si y sólo si dicho polígono es un n -segmento (ver Teorema 6.7).

Dentro del espacio de polígonos podemos considerar una amplia variedad de subespacios interesantes, tanto por sus propiedades como espacio, como aquellas inherentes a los polígonos que contiene. Algunos subespacios de polígonos que han sido estudiados son: el espacio de polígonos simples (ver [19]); el espacio de polígonos convexos (ver [18]); el espacio de polígonos con longitud de sus lados fijos (linkages) (ver [27]), los cuales se mencionarán con más detalle a continuación; y el espacio de n -segmentos (ver [20] y [14]).

Dado $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ con todas sus coordenadas positivas, consideramos $\hat{X}(r)$ al conjunto de n -ágonos $(z_1, \dots, z_n)$ tales que $|z_{j+1} - z_j| = r_j$ módulo rotaciones y traslaciones. Por otro lado, $X(r)$ denota al espacio de polígonos simples en $\hat{X}(r)$. El espacio $X(r)$ es llamado linkages y ha sido ampliamente estudiado.

En [27], Kapovich y Millson estudian la topología de $\hat{X}(r)$, y demostraron que es una variedad si y sólo si no hay elección de $u_j \in \{0, 1\}$ tales que se satisfaga la ecuación

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{u_j} r_j = 0 \quad (1)$$

(notemos que esto implica que $\hat{X}(r)$ es una variedad si y sólo si no contiene n -segmentos). Además, en caso de tener $r, s \in \mathbb{R}^n$ tales que en el segmento cerrado entre r y s no haya puntos que cumplan con la ecuación (1), entonces $\hat{X}(r)$ y $\hat{X}(s)$ son difeomorfos.

En [28], Kapovich y Millson realizan un estudio similar, pero esta vez considerando n -ágonos viviendo en $\mathbb{R}^3$. En este caso, también se obtiene que el espacio que conforman los n -ágonos en $\mathbb{R}^3$ con longitudes de lados determinadas por $r \in \mathbb{R}^n$ es variedad si y sólo si no se satisface la ecuación (1) para ninguna elección de u_j 's. En caso de ser variedad, resulta ser una variedad analítica compleja con singularidades aisladas, las cuales se generan en los puntos r que para los que $X(r)$ contiene n -segmentos.

Los linkages han sido estudiados en diversos trabajos. En [11], Connelly, Demaine y Rote demostraron que cualquier polígono simple se puede deformar continuamente a un polígono convexo, de manera que en cada momento el polígono es simple y la longitud de los lados es invariante; más general, demostraron que $X(r)$ se retrae por deformación al subespacio de $X(r)$ conformado únicamente por polígonos convexos. En [40], Shimamoto y Wootters demostraron que el espacio $X(r)$ no siempre es contraíble, dando como contraejemplo a $X((6, 4, 2, 4))$. Resulta ser que para $n = 4$, $X(r)$ no es contraíble si y sólo si $X(r)$ contiene algún 4-segmentos [20]. Otros resultados relativos a linkages se pueden encontrar en [3] y [6], y algunas aplicaciones en robótica se pueden ver en [23].

Como fue mencionado, esta parte de la tesis se enfocará en estudiar a los n -segmentos. En el Capítulo 4 abarcamos los preliminares necesarios para estudiar los espacios de polígonos

degenerados a segmentos. Aquí mencionamos los aspectos más importantes de los espacios de polígonos simples y polígonos convexos. Al igual, se introduce la noción de n -segmentos convexos (n -segmentos que son límite de polígonos convexos).

En el Capítulo 5, describiremos la topología del conjunto de n -segmentos dentro de $\mathbb{C}^n$, demostrando que es una variedad diferenciable (ver Corolario 5.4). En la Sección 5.2, estudiaremos su espacio tangente y sus geodésicas, donde observaremos que este espacio contiene gran parte de su tangente. Algunos resultados acerca de las geodésicas que no son rectas serán tratados en la Sección 5.3.

En el Capítulo 6 estudiaremos las topologías del espacio de n -segmentos y del espacio de n -segmentos convexos dentro del espacio de polígonos (ver Proposición 6.1 y Corolario 6.34, respectivamente), lo cual nos permitirá calcular la topología que forman los n -segmentos convexos dentro de $\mathbb{C}^n$ (ver Corolario 6.33). En el proceso, trabajaremos con una estructura simplicial que resultará ser un doble cubriente del espacio de n -segmentos, el cual respetará la estructura simplicial al restringirse a los n -segmentos convexos.

Finalmente, en el Capítulo 7 estudiaremos la topología del espacio de n -segmentos módulo reetiquetamiento, para esto, en el espacio de polígonos consideraremos la relación de equivalencia generada al considerar que los polígonos $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ y $(z_2, \dots, z_n, z_1)$ son equivalentes. Este espacio resulta ser un orbifold esférico (ver Teorema 7.5). En el Teorema 7.12 será descrito el locus singular de dicho orbifold. Para la definición de orbifold esférico y de locus singular ver Apéndice A.3.

Parte I

Los números de Sidon-Ramsey y B_h -Ramsey

Capítulo 1

Antecedentes

En este primer capítulo comenzaremos dando las definiciones de conjuntos de Sidon y conjuntos B_h , así como los resultados conocidos más importantes en relación a estos. En [35] se puede encontrar información muy amplia acerca de estos conjuntos. También se dará la definición de los números de Sidon-Ramsey y los primeros resultados conocidos al respecto (se puede leer más en [29] y [43]). Finalmente, se introduce el parámetro de números de B_h -Ramsey.

1.1. Conjuntos de Sidon

Definición 1.1. *Se dice que un subconjunto A de un grupo abeliano G es un conjunto de Sidon si la ecuación $a + b = c + d$ no tiene soluciones no triviales para $a, b, c, d \in A$.*

Algunas propiedades que cumplen los conjuntos de Sidon y que se pueden observar fácilmente se mencionan a continuación. Haremos uso de estas observaciones de manera regular.

Observación 1.2. *Los conjuntos de Sidon tienen las siguientes propiedades:*

- *Si X es un subconjunto de $\mathbb{Z}$ tal que su proyección en $\mathbb{Z}_m$ es un conjunto de Sidon, entonces X es un conjunto de Sidon en $\mathbb{Z}$.*
- *Si X es un conjunto de Sidon en G entonces $X + g$ es un conjunto de Sidon para cualquier $g \in G$.*
- *Si X es un conjunto de Sidon en G y $g \in G \setminus \{0\}$, entonces $|X \cap (X + g)| \leq 1$.*

Los conjuntos de Sidon han sido estudiados principalmente en $\mathbb{Z}^d$ y en $\mathbb{Z}_n$. Particularmente, en $\mathbb{Z}$ el estudio se ha enfocado en dos vertientes: estudiar la mayor densidad que puede tener un conjunto de Sidon en los enteros positivos; y estudiar el tamaño máximo que puede tener un conjunto de Sidon en $[1, n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$, siendo estos últimos los conjuntos que serán de mayor interés en esta tesis. Se denota por $F_2(n)$ al tamaño del mayor conjunto de

n en	[1]	[2,3]	[4,6]	[7,11]	[12,17]	[18,25]	[26,34]	[35,44]
$F_2(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8
n en	[45,55]	[56,72]	[73,85]	[86,106]	[107,127]	[128,151]	[152,177]	[178,199]
$F_2(n)$	9	10	11	12	13	14	15	16

Tabla 1.1: Valores de $F_2(n)$ para $1 \leq n \leq 199$. Estos y más valores se pueden consultar en [43], pp. 132.

Sidon contenido en $[1, n]$. El problema ha sido estudiado computacionalmente para encontrar los valores de $F_2(n)$ cuando n es pequeña, algunos de estos valores que se conocen se encuentran en la siguiente tabla:

Con respecto a una cota superior para $F_2(n)$, Erdős y Turán fueron los primeros en presentar una estimación no trivial, demostrando que

$$F_2(n) < n^{1/2} + O(n^{1/4})$$

(ver [13]). Posteriormente, Lindström, mediante métodos elementales demostró que

$$F_2(n) < n^{1/2} + n^{1/4} + 1$$

(ver [30]). Ruzsa logró el mismo resultado que Lindström con métodos que usan la energía aditiva (ver [38]), y Cilleruelo redujo la cota a

$$F_2(n) < n^{1/2} + n^{1/4} + 1/2$$

usando algunas ideas de la demostración de Ruzsa (ver [10]). Posteriormente, Balogh, Füredi y Roy mejoraron significativamente la estimación a

$$F_2(n) \leq n^{1/2} + 0.998n^{1/4} + O(1)$$

(ver [2]). Finalmente, la mejor cota superior que se conoce actualmente se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 1.3 (Carter, Hunter, O'Bryant; [7]). *Para toda $n \in \mathbb{N}$ se satisface la desigualdad*

$$F_2(n) \leq n^{1/2} + 0.98183n^{1/4} + O(1). \quad (1.1)$$

Para el caso de la cota inferior es necesario dar construcciones de conjuntos de Sidon. La primera de estas construcciones se debe a Erdős y Turán, quienes demostraron que para todo número primo p existe un conjunto de Sidon de tamaño p contenido en $[1, 2p^2]$, con lo que se puede concluir usando el teorema de los números primos que

$$\sqrt{n/2}(1 + o(1)) \leq F_2(n)$$

(ver [13]). Posteriormente se encontraron otras construcciones que, junto con el teorema de los números primos, implican la estimación

$$n^{1/2}(1 - o(1)) \leq F_2(n). \quad (1.2)$$

Dichas construcciones se reducen a los siguientes teoremas y se pueden levantar a $\mathbb{Z}$ preservando la propiedad de ser conjunto de Sidon:

Teorema 1.4 (Singer; [41]). *Para todo q potencia de primo existe un conjunto de Sidon de tamaño $q + 1$ en $\mathbb{Z}_{q^2+q+1}$.*

Teorema 1.5 (Bose; [4]). *Para todo q potencia de primo existe un conjunto de Sidon de tamaño q en $\mathbb{Z}_{q^2-1}$.*

Teorema 1.6 (Ruzsa; [38]). *Para todo p primo existe un conjunto de Sidon de tamaño $p - 1$ en $\mathbb{Z}_{p^2-p}$.*

Para tratar el problema del tamaño de conjuntos de Sidon en $\mathbb{Z}^d$, consideraremos el parámetro $F_2(n_1, n_2, \dots, n_d)$ que denota la mayor cardinalidad que puede tener un conjunto de Sidon contenido en la caja $[1, n_1] \times [1, n_2] \times \dots \times [1, n_d] \subset \mathbb{Z}^d$. En particular, cuando $n_1 = n_2 = \dots = n_d$, diremos que la caja es simétrica. En el caso de la cota superior, primero podemos encontrar un teorema de Lindström para cajas simétricas, el cual afirma que

$$F_2(\underbrace{n, n, \dots, n}_{d \text{ veces}}) \leq n^{d/2} + O\left(n^{\frac{d^2}{2(d+1)}}\right) \quad (1.3)$$

para toda $n, d \in \mathbb{N}$ (ver [32]). Para cajas en general tenemos el siguiente resultado de Cilleruelo, el cual recupera la cota de Lindström en el caso de que la caja sea simétrica:

Teorema 1.7 (Cilleruelo; [10]). *Sean $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}$, $N_0 = 1$, $N_j = \prod_{i=1}^j n_i$ y $N = N_d$. Sea s el menor entero tal que $N^{1/2} \leq n_s^{d-s+2} N_{s-1}$. Entonces se satisface*

$$F_2(n_1, n_2, \dots, n_d) \leq N^{1/2} \left(1 + O\left(\left(\frac{N_{s-1}}{N^{1/2}}\right)^{\frac{1}{d-s+2}}\right) \right). \quad (1.4)$$

Para tratar la cota inferior, Cilleruelo presenta una función que manda conjuntos de Sidon en $[0, n_1 n_2 \dots n_d - 1]$ a conjuntos de Sidon en $[0, n_1 - 1] \times [0, n_2 - 1] \times \dots \times [0, n_d - 1]$ (ver [10]). Para la definición esta función, primero hay que observar que todo entero $a \in [0, n_1 n_2 \dots n_d - 1]$ se puede representar de manera única en la base $(n_1, n_2, \dots, n_d)$, es decir,

$$a = a_1 + a_2 n_1 + a_3 n_1 n_2 + \dots + a_d n_1 n_2 \dots n_{d-1}$$

donde $0 \leq a_j < n_j$ para todo $1 \leq j \leq d$. Con lo anterior, la función está definida por

$$\varphi(a) = (a_1, a_2, \dots, a_d). \quad (1.5)$$

Finalmente, como trasladados de conjuntos de Sidon siguen siendo conjuntos de Sidon, se tiene que todo conjunto de Sidon en $[1, n_1 n_2 \dots n_d]$ se puede mandar a un conjunto de Sidon en $[1, n_1] \times [1, n_2] \times \dots \times [1, n_d]$, de donde se sigue la cota

$$F_2(n_1 n_2 \dots n_d) \leq F_2(n_1, n_2, \dots, n_d). \quad (1.6)$$

1.2. Conjuntos B_h

Una generalización directa de los conjuntos de Sidon son los conjuntos B_h . Para estos conjuntos se van a considerar sumas de h elementos en lugar de sumas de dos elementos.

Definición 1.8. Dada $h \geq 2$ y dado un grupo abeliano G , se dice que $A \subset G$ es un conjunto B_h si para cualesquiera $x_1, x_2, \dots, x_h, y_1, y_2, \dots, y_h \in A$ tales que $x_1 + \dots + x_h = y_1 + \dots + y_h$, entonces se satisface que $(x_1, x_2, \dots, x_h)$ es una permutación de $(y_1, y_2, \dots, y_h)$.

Nótese que cuando $h = 2$ la definición coincide con la de conjuntos de Sidon. Para los conjuntos B_h es de interés el mismo tipo de preguntas que para los conjuntos de Sidon, en este caso consideraremos el parámetro $F_h(n_1, n_2, \dots, n_d)$ como la cardinalidad del mayor conjunto B_h contenido en $[1, n_1] \times [1, n_2] \times \dots \times [1, n_d]$. Algo que se puede revisar rápidamente es que los conjuntos B_h cumplen las mismas propiedades elementales que los conjuntos de Sidon:

Observación 1.9. Los conjuntos B_h tienen las siguientes propiedades:

- Si X es un subconjunto de $\mathbb{Z}$ tal que su proyección en $\mathbb{Z}_m$ es un conjunto B_h , entonces X es un conjunto B_h en $\mathbb{Z}$.
- Si X es un conjunto B_h en G entonces $X + g$ es un conjunto B_h para cualquier $g \in G$.
- Si X es un conjunto B_h en G y $g \in G \setminus \{0\}$, entonces $|X \cap (X + g)| \leq 1$.

Ahora se mencionarán algunas construcciones conocidas de conjuntos B_h , los cuales sirven para dar cotas inferiores. La primera de estas es una generalización de la construcción de Bose (Teorema 1.5), la segunda es una generalización de la construcción de Singer (Teorema 1.4) y la tercera es una generalización que combina la construcción de Ruzsa (Teorema 1.6) y las ideas usadas por Bose y Chowla para las primeras construcciones de conjuntos B_h :

Teorema 1.10 (Bose, Chowla; [5]). Para todo q potencia de primo y $h \geq 2$ entero, existe un conjunto B_h de tamaño q en $\mathbb{Z}_{q^h-1}$.

Teorema 1.11 (Bose, Chowla; [5]). Para todo q potencia de primo y $h \geq 2$ entero, existe un conjunto B_h de tamaño $q + 1$ en $\mathbb{Z}_{\frac{q^{h+1}-1}{q-1}}$.

Teorema 1.12 (Gomez, Trujillo; [17]). Para todo p primo y $h \geq 3$ entero, existe un conjunto B_h de tamaño p en $\mathbb{Z}_{p^h-p}$.

De la misma manera que con conjuntos de Sidon, estas construcciones implican la estimación

$$n^{1/h}(1 - o(1)) \leq F_h(n). \quad (1.7)$$

En el caso de la cota superior, el primero en dar una estimación no trivial fue Lindström para los conjuntos B_4 , quien demostró que

$$F_4(n) \leq (8n)^{1/4}(1 + o(1))$$

(ver [31]). Este resultado fue generalizado para toda $h \geq 3$. En el caso de que h sea par, $h = 2t$, Jia demostró que

$$F_{2t}(n) \leq t^{\frac{1}{2t}}(t!)^{\frac{2}{2t}}n^{\frac{1}{2t}} + O(n^{\frac{1}{4t}}),$$

y para el caso en que h sea impar, $h = 2t - 1$, Chen probó que

$$F_{2t-1}(n) \leq (t!)^{\frac{2}{2t-1}}n^{\frac{1}{2t-1}} + O(n^{\frac{1}{2(2t-1)}})$$

(ver [26] y [8]). Posteriormente, Green mejoró estas cotas a los valores establecidos en el siguiente teorema:

Teorema 1.13 (Green; [25]). *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $h \geq 3$ un entero. Se tiene que:*

$$F_h(n) \leq \begin{cases} \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} + o(n^{\frac{1}{3}}) & \text{si } h = 3, \\ 7^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}} + o(n^{\frac{1}{4}}) & \text{si } h = 4, \\ \frac{h}{2e} n^{1/h} + o_h(n^{1/h}) & \text{si } h > 4. \end{cases} \quad (1.8)$$

En el caso de conjuntos B_h en cajas, se puede construir una cota inferior del mismo modo que para conjuntos de Sidon. Para eso, veremos que la función definida por Cilleruelo en la ecuación (1.5) también mapea conjuntos B_h en intervalos a conjuntos B_h en cajas. Sea $n = n_1 n_2 \cdots n_d$ y sea $\varphi : [1, n] \rightarrow [1, n_1] \times [1, n_2] \times \cdots \times [1, n_d]$ la función correspondiente a la base $(n_1, n_2, \dots, n_d)$ que mapea conjuntos de Sidon en conjuntos de Sidon. Supongamos que φ no manda conjuntos B_h en conjuntos B_h , eso quiere decir que existe un conjunto B_h y algunos elementos $x_1, x_2, \dots, x_h, y_1, y_2, \dots, y_h$ en dicho conjunto, tales que

$$x_1 + \cdots + x_h \neq y_1 + \cdots + y_h \quad \text{y} \\ \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_h) = \varphi(y_1) + \cdots + \varphi(y_h).$$

Sea $\varphi(x_j) = (x_{j,1}, \dots, x_{j,d})$ y $\varphi(y_j) = (y_{j,1}, \dots, y_{j,d})$ para $1 \leq j \leq h$. Entonces, tenemos que

$$(x_{1,1} + \cdots + x_{h,1}, \dots, x_{1,d} + \cdots + x_{h,d}) = (y_{1,1} + \cdots + y_{h,1}, \dots, y_{1,d} + \cdots + y_{h,d}),$$

lo que nos lleva a una contradicción, ya que esto implica la igualdad

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_h &= \\ &= (x_{1,1} + \cdots + x_{h,1}) + (x_{1,2} + \cdots + x_{h,2})n_1 + \cdots + (x_{1,d} + \cdots + x_{h,d})n_1 n_2 \cdots n_{d-1} \\ &= (y_{1,1} + \cdots + y_{h,1}) + (y_{1,2} + \cdots + y_{h,2})n_1 + \cdots + (y_{1,d} + \cdots + y_{h,d})n_1 n_2 \cdots n_{d-1} \\ &= y_1 + \cdots + y_h. \end{aligned}$$

Del mismo modo que con los conjuntos de Sidon, lo anterior implica la cota inferior

$$F_h(n_1 n_2 \cdots n_d) \leq F_h(n_1, n_2, \dots, n_d). \quad (1.9)$$

Para la cota superior, se tienen las siguientes estimaciones únicamente para el caso en que la caja es simétrica:

Teorema 1.14 (Rackham, Šarka; [36]). Sean $h, d, n \in \mathbb{N}$, con $h \geq 2$. Se satisface que:

$$F_h(\underbrace{n, n, \dots, n}_{d \text{ veces}}) \leq \begin{cases} t^{\frac{d}{2t}} (t!)^{\frac{2}{2t}} n^{\frac{d}{2t}} + O\left(n^{\frac{d^2}{2t(d+1)}}\right) & \text{si } h = 2t, \\ t^{\frac{d-1}{2t-1}} (t!)^{\frac{2}{2t-1}} n^{\frac{d}{2t-1}} + O\left(n^{\frac{d^2}{(2t-1)(d+1)}}\right) & \text{si } h = 2t - 1. \end{cases} \quad (1.10)$$

Teorema 1.15 (Rackham, Šarka; [36]). Sean $h, d, n \in \mathbb{N}$, con h suficientemente grande. Se satisface que:

$$F_h(\underbrace{n, n, \dots, n}_{d \text{ veces}}) \leq \begin{cases} (\pi d)^{\frac{d}{4t}} (1 + \varepsilon(t)) t^{\frac{d}{4t}} (t!)^{\frac{2}{2t}} n^{\frac{d}{2t}} + O\left(n^{\frac{d^2}{2t(d+1)}}\right) & \text{si } h = 2t, \\ (\pi d)^{\frac{d}{2(2t-1)}} (1 + \varepsilon(t)) t^{\frac{d-2}{2(2t-1)}} (t!)^{\frac{2}{2t-1}} n^{\frac{d}{2t-1}} + O\left(n^{\frac{d^2}{(2t-1)(d+1)}}\right) & \text{si } h = 2t - 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

En la Sección 3.1 daremos otra estimación para números B_h (Teorema 3.1) que es una generalización de los teoremas 1.7 y 1.14, la cual da una estimación en el caso de que las cajas no sean simétricas.

1.3. Números de Sidon-Ramsey

Al igual que con otros problemas de densidad, el problema de Sidon se puede trasladar a la teoría de Ramsey. Liang, Li, Xiu y Xu fueron los primeros en introducir el concepto de números de Sidon-Ramsey (ver [29]).

Definición 1.16. Sea $k \in \mathbb{N}$. El número de Sidon-Ramsey de k se define como el menor entero n tal que dada cualquier coloración del intervalo $[1, n]$ con k colores, existe algún subconjunto monocromático el cual no es un conjunto de Sidon. Este parámetro se denotará por $SR(k)$.

De manera computacional, encontraron el valor para algunos de los números de Sidon-Ramsey. Para $2 \leq k \leq 5$, Liang, Li, Xiu y Xu determinaron el valor de $SR(k)$:

$$SR(2) = 8 \quad SR(3) = 15 \quad SR(4) = 25 \quad SR(5) = 36$$

(ver [29]). En el mismo trabajo dieron cotas para $SR(k)$ cuando $6 \leq k \leq 19$. Estas estimaciones fueron mejoradas a los valores mostrados a continuación (ver [43]):

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
inferior	50	65	81	97	114	133	157	170	186	190	209	229	306	
superior	55	70	97	118	141	166	193	235	267	301	337	355	415	457

Tabla 1.2: Cota superior e inferior para $SR(k)$ cuando $6 \leq k \leq 19$.

Es posible obtener una cota superior para los números de Sidon-Ramsey a partir de la cota superior para $F_2(n)$ y usando el principio de las casillas, esto se plantea en el siguiente teorema. Además, esto permite demostrar la existencia de los números $SR(k)$ para todo número natural k .

Teorema 1.17 (Liang, Li, Xiu, Xu; [29]). *Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $t \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{F_2(t)-1}{t-1} > k$. Entonces $SR(k) \leq (t-1)k + 1$.*

Otra manera de demostrar la existencia de los números de Sidon-Ramsey es usando el siguiente teorema.

Teorema 1.18 (Rado; [37]). *Sea A una matriz en los enteros. Para cualquier $r \in \mathbb{N}$ y cualquier coloración de $\mathbb{N}$ con r colores, el sistema $Ax = 0$ tiene solución monocromática si existe una partición de las columnas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que, para $s_i = \sum_{c_j \in C_i} c_j$, se satisface:*

- $s_1 = 0$,
- Para toda $i \geq 2$, s_i es una combinación racional de los $c \in \bigcup_{j < i} C_j$.

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

satisface el teorema de Rado, considerando a C_1 como el conjunto conformado por las primeras cuatro columnas y C_2 por las últimas dos. Por el teorema de Rado, sabemos que para cualquier coloración finita de $\mathbb{N}$, existe una solución monocromática al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a + b - c - d &= 0, \\ a - c + e &= 0, \\ a - d + f &= 0. \end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que para cualquier coloración finita de $\mathbb{N}$ hay una solución monocromática a la ecuación $a + b = c + d$, de la cual sabemos además que $a \notin \{c, d\}$, pues $a - c, a - d < 0$ (por la segunda y tercer ecuación). Por lo tanto, tenemos una solución monocromática no trivial a la ecuación $a + b = c + d$, lo cual implica la existencia de los números $SR(k)$ para cualquier natural k .

Por otro lado, la primer cota inferior no trivial para los números de Sidon-Ramsey se deriva del siguiente teorema, con el cual se obtiene una cota inferior que asintóticamente es menor que $ck \log k$:

Teorema 1.19 (Xu, Liang, Luo; [43]). *Si $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \geq b$, entonces $SR(a+b) \geq SR(a) + SR(b) + b - 1$.*

Proposición 1.20. *El Teorema 1.19 no puede dar una estimación inferior para los números de Sidon-Ramsey que sea más grande que $ck \log k$.*

Demostración. Sea $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K$ o no hay cota inferior establecida o, si la hay, es usando la fórmula recursiva del Teorema 1.19 (nótese que $K > 5$, pues $\text{SR}(k)$ se conoce para $k \leq 5$). Sea $\tau(k)$ la mejor estimación inferior que se puede obtener de esta manera. Sea $c > 1$ tal que $\tau(k) \leq ck \log_2 k$ para toda $2 \leq k \leq K$. Veamos entonces que $\tau(k) \leq ck \log_2 k$ para $k > K$. Supongamos que es cierto para todo $2 \leq k \leq M$, entonces, se satisface

$$\tau(M+1) = \max \left\{ \tau(a) + \tau(M+1-a) + M+1-a-1 : \frac{M+1}{2} \leq a \leq M \right\}.$$

Si $a < M$ tenemos que

$$\begin{aligned} \tau(a) + \tau(M+1-a) + M+1-a-1 & \\ & \leq ca \log_2 a + c(M+1-a) \log_2(M+1-a) + M+1-a-1 \\ & \leq ca \log_2 a + c(M+1-a)(\log_2(M+1-a) + 1) - 1 \\ & < ca \log_2(M+1) + c(M+1-a)(\log_2(\frac{M+1}{2}) + 1) - 1 \\ & < c(M+1) \log_2(M+1). \end{aligned}$$

Si $a = M$ tenemos que

$$\begin{aligned} \tau(a) + \tau(M+1-a) + M+1-a-1 &= \tau(M) + \tau(1) + 1 - 1 \\ &\leq cM \log_2 M + 3 \leq c(M+1) \log_2(M+1), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se cumple ya que $M \geq 5$.

Así concluimos que $\tau(k) \leq ck \log_2 k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo que se concluye la demostración. ■

En el Capítulo 2 se dan mejoras a las cotas de los números de Sidon-Ramsey, y se concluirá que $\text{SR}(k) \sim k^2$. Se extenderá la lista de valores conocidos de los números de Sidon-Ramsey y se mejorará la cota para algunos valores. En el Capítulo 3 se introducirán los números de Sidon-Ramsey para dimensiones altas y se darán algunas estimaciones para estos números.

1.4. Números de B_h -Ramsey

Del mismo modo que con el problema de Sidon, el problema de densidad de los números B_h se puede trasladar a la teoría de Ramsey. En [15] introducimos los números de B_h -Ramsey y damos resultados las primeras estimaciones para estos números. Estos números se definen como sigue:

Definición 1.21. Sean $k, h \in \mathbb{N}$ con $h \geq 3$. El número de B_h -Ramsey de k se define como el menor entero n tal que dada cualquier coloración del intervalo $[1, n]$ con k colores, existe algún subconjunto monocromático el cual no es un conjunto B_h . Este parámetro se denotará por $\text{BR}_h(k)$.

La existencia de los números de B_h -Ramsey también se puede ver como consecuencia del Teorema de Rado. Consideramos la matriz de $h+1$ renglones de tamaño $3h$, donde el primer renglón tiene 1's en las primeras h entradas, -1 's en las siguientes h entradas, y 0's en las últimas entradas; y el j -ésimo renglón, para $j \in \{2, 3, \dots, h+1\}$, tiene 1 en las columnas 1 y $2h+j-1$, tiene -1 en la columna $h+j-1$, y tiene 0's en las demás columnas. Esta matriz satisface las condiciones del Teorema de Rado con la partición dada por: C_1 conformado por las primeras $2h$ columnas, y C_2 conformado por las últimas h columnas. Así, esta matriz nos dice que para cualquier coloración de los números naturales con una cantidad finita de colores, existe una solución monocromática a la ecuación $x_1 + x_2 + \dots + x_h = y_1 + y_2 + \dots + y_h$, y el j -ésimo renglón, para $j \in \{2, 3, \dots, h+1\}$ nos dicen que x_1 es distinto a y_{j-1} , o visto de otra manera, existe solución monocromática no trivial para la ecuación

$$x_1 + x_2 + \dots + x_h = y_1 + y_2 + \dots + y_h,$$

y por lo tanto, existen los números $BR_h(k)$.

En la Sección 2.6 se trabaja el caso de números BR_h en $\mathbb{Z}$, donde mostramos que $BR_h(k)$ es de orden $k^{\frac{h}{h-1}}$. En el Capítulo 3 se estudian los conjuntos B_h -Ramsey para dimensiones altas, y se dará estimaciones para estos números.

Capítulo 2

Números de Sidon-Ramsey y números B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}$

Existen varios métodos con los que se puede mejorar la cota inferior para los números de Sidon-Ramsey propuesta en el Teorema 1.19, en este capítulo serán planteados algunos de ellos. En el siguiente teorema encontramos la mejor estimación que obtuvimos para los números de Sidon-Ramsey en $\mathbb{Z}$, la cual demostramos en la Sección 2.4. En el caso de la cota inferior, la prueba consiste en realizar particiones en conjuntos de Sidon para grupos cíclicos finitos particulares; dicha demostración, dada la conexión que tienen los conjuntos de Sidon con las gráficas libres de C_4 , recuerda en gran parte a la prueba del Teorema 3 presentado por Cheng y Graham en [9]. Para la cota superior, realizamos los cálculos necesarios para dar una fórmula cerrada a partir del Teorema 1.17.

Teorema 2.1 (Espinosa, Montejano, Roldán, Suárez; [15]). *Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se satisface la estimación*

$$k^2 - O(k^{1+c}) \leq \text{SR}(k) \leq k^2 + Ck^{3/2} + O(k), \quad (2.1)$$

donde $c \leq 0.525$ depende de la distribución de los números primos y $C \leq 1.96366$ depende de la mejor cota superior para conjuntos de Sidon.

2.1. Estimación mediante el algoritmo glotón

Mian y Chowla implementaron el algoritmo glotón para obtener conjuntos de Sidon infinitos en $\mathbb{N}$ (ver [34]). Esta idea se puede usar para obtener conjuntos de Sidon en cualquier conjunto en $\mathbb{N}$. En particular, usaremos este algoritmo para construir recursivamente conjuntos de Sidon en $[1, n]$ que creen una partición.

Proposición 2.2. *Dado $X \subset [1, n]$, se puede construir un conjunto de Sidon $S \subset X$ de tamaño al menos $|X|^{1/3}$.*

Demostración. La construcción se realiza de la siguiente manera:

- Sea s_1 el menor entero en X . Agregamos s_1 a S .

- Mientras $|S|^3 < |X|$, consideramos $s \in X$ que no se pueda representar de la forma $s_a + s_b - s_c$ para ningunos $s_a, s_b, s_c \in S$ y lo agregamos a S .

De este modo, conseguimos un conjunto de Sidon $S \subset X$ de cardinalidad mayor o igual que $|X|^{1/3}$. ■

Realizando repetidamente la construcción anterior se puede deducir el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe c_ε tal que*

$$c_\varepsilon k^{3/2-\varepsilon} \leq \text{SR}(k) \quad (2.2)$$

se satisface para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Llamemos $X = [1, n]$ y sea $t = 1$. Construiremos de manera recurrente conjuntos de Sidon como se plantea en la proposición 2.2, siguiendo el siguiente algoritmo:

1. Mientras $t\varepsilon < \frac{1}{3}$ y $|X| \geq n^{1-t\varepsilon}$, podemos encontrar un conjunto de Sidon de tamaño al menos $|X|^{\frac{1-t\varepsilon}{3}}$ y sea X' el conjunto formado por X al quitarle los elementos de dicho conjunto de Sidon. Consideremos ahora $X = X'$.
2. Si $t\varepsilon < \frac{1}{3}$ y $|X| < n^{1-t\varepsilon}$, cambiamos $t = t + 1$ y volvemos al paso anterior.
3. Si $t\varepsilon \geq \frac{1}{3}$, distribuimos los elementos de X en $|X|$ singuletes, y cada uno de ellos lo consideraremos un conjunto de Sidon y se acaba el algoritmo.

Notemos que con este algoritmo, para cada $1 \leq t < \frac{1}{3\varepsilon}$ se construyen a lo más

$$\frac{n^{1-(t-1)\varepsilon} - n^{1-t\varepsilon}}{n^{\frac{1-t\varepsilon}{3}}} \leq n^{2/3+\varepsilon/3}.$$

En el último paso del algoritmo, se construyen a lo más $n^{\frac{2}{3}}$ conjuntos de Sidon. De este modo, se demuestra que $[1, n]$ se puede partir en $(\frac{1}{3\varepsilon} + 1)n^{2/3+\varepsilon/3}$ conjuntos de Sidon, llamemos k a este número. Despejando, tenemos que $n = c_\varepsilon k^{\frac{3}{2+\varepsilon}} \geq c_\varepsilon k^{\frac{3}{2}-\frac{3\varepsilon}{4}}$, y tomando $\varepsilon = \frac{3\varepsilon}{4}$ se concluye la demostración. ■

2.2. Estimación mediante el Lema Local de Lovász asimétrico

El Lema Local de Lovász es una herramienta probabilista que es usada en algunos problemas tipo Ramsey. La mejor cota inferior conocida para los números de Ramsey diagonales se obtiene a partir de este lema. Para dar una estimación de los números de Sidon-Ramsey usaremos la versión asimétrica del Lema Local de Lovász.

Definición 2.4. *Dados $E, E_1, E_2, \dots, E_m$ eventos en un espacio de probabilidad. Se dice que E es mutuamente independiente de $E_1, \dots, E_m$ si para cualesquiera $J_1, J_2 \subset [1, m]$ disjuntos se satisface que*

$$\mathbb{P} \left(E \cap \bigcap_{j \in J_1} E_j \cap \bigcap_{j \in J_2} \overline{E_j} \right) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in J_1} E_j \cap \bigcap_{j \in J_2} \overline{E_j} \right),$$

donde $\overline{E_t}$ denota su complemento.

Teorema 2.5 (Lema Local de Lóvasz (versión asimétrica); [12]). *Sean $E_1, E_2, \dots, E_m$ eventos de un espacio de probabilidad, y para cada $1 \leq j \leq m$ sea $I_j \subset [m] \setminus \{j\}$ tal que $\{E_t : t \in I_j\}$ es un conjunto mutuamente independiente a E_j . Supongamos que existen $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_m < 1$ tales que*

$$\mathbb{P}(E_j) \leq x_j \prod_{\substack{t \in [m] \setminus I_j \\ t \neq j}} (1 - x_t)$$

para toda $j \leq m$. Entonces

$$\mathbb{P} \left(\bigwedge_{j=1}^m \overline{E_j} \right) \geq \prod_{j=1}^m (1 - x_j) > 0.$$

Con la finalidad de usar el Lema Local de Lóvasz a los números de Sidon-Ramsey, consideramos la notación siguiente:

Definición 2.6. *Para $n \in \mathbb{N}$ fija denotamos*

$$S_3 = \{\{a, b, c\} \subset [1, n] : a < b < c \text{ y } a + c = 2b\}, \quad (2.3)$$

$$S_4 = \{\{a, b, c, d\} \subset [1, n] : a < b < c < d \text{ y } a + d = b + c\}. \quad (2.4)$$

Para $Y \subset [1, n]$ e $i \in \{3, 4\}$ denotamos

$$S_i(Y) = \{X \in S_i : Y \subset X\}.$$

Observación 2.7. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $x, y, z \in [1, n]$ distintos. Se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq S_4(\{x, y, z\}) \leq 3, \\ 0 &\leq S_3(\{x, y\}) \leq 3, \\ \frac{n}{2} - 4 &\leq S_4(\{x, y\}) \leq \frac{3n}{2} - 3, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 &\leq S_3(\{x\}) \leq n, \\ \frac{1}{4}(n^2 - 21n - 18) &\leq S_4(\{x\}) \leq \frac{3n^2 - 7}{8}. \end{aligned}$$

Demostración. De analizar las soluciones para la ecuación $x + y = z + w$ se deduce que $0 \leq S_4(\{x, y, z\}) \leq 3$ y $0 \leq S_3(\{x, y\}) \leq 3$.

Para el caso $S_4(\{x, y\})$ podemos considerar $1 \leq x < y \leq n$ fijos y buscaremos elementos $1 \leq a < b \leq n$ para completen la cuarteta, por lo que basta analizar los casos $x + y = a + b$ y $y - x = b - a$. La ecuación $x + y = a + b$ tiene

$$\left\lfloor \frac{x + y - 1}{2} \right\rfloor - 1 - \max\{0, x + y - n - 1\} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{x + y - 1}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{2n - (x + y - 1)}{2} \right\rfloor - 1 \right\}$$

soluciones, ya que hay $\left\lfloor \frac{x+y-1}{2} \right\rfloor - 1$ parejas de números positivos que suman $x + y$ distintas de (x, y) , pero no debemos considerar los $\max\{0, x + y - n - 1\}$ casos en que uno de los elementos de la pareja exceda n . Cuando consideramos la ecuación $y - x = b - a$ se encuentran a lo más $n - (y - x) - i$ soluciones, donde $i \in \{1, 2, 3\}$ depende de cuántas de las parejas $(2x - y, x), (x, y), (y, 2y - x)$ debemos evitar en la elección de a y b . Tenemos entonces un total de

$$\left\lfloor \frac{x + y - 1}{2} \right\rfloor - 1 - \max\{0, x + y - n - 1\} + n - (y - x) - i$$

soluciones, que inferiormente se acota por $\frac{n}{2} - 4$ y superiormente por $\frac{3n}{2} - 3$.

En el caso $S_3(\{x\})$ basta analizar dos casos para completar la terna, el primero cuando $a + b = 2x$ con $1 \leq a < b \leq n$ y el segundo cuando $a + x = 2b$. En el primer caso, la ecuación es equivalente a $b - x = x - a$, lo que implica directamente que hay $\min\{x - 1, n - x\}$ soluciones, ya que $1 \leq a < x$ y $x < b \leq n$. Para la ecuación $a + x = 2b$ encontramos tantas soluciones como números pares en $[x + 1, x + n]$, exceptuando el caso $a = x$, dando un total de $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ o $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$. Podemos concluir entonces que

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \leq S_3(\{x\}) \leq n.$$

En el caso de $S_4(\{x\})$ consideramos $n - 1$ casos para contar el número de soluciones de $a + x = b + c$, dependiendo del valor de $a \neq x$, lo que da $\min \left\{ \left\lfloor \frac{a+x-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2n-(a+x-1)}{2} \right\rfloor \right\}$ soluciones en cada caso. Se puede ver que el máximo y mínimo son alcanzados cuando $x = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ y $x = n$, respectivamente. De aquí obtenemos la estimación

$$\frac{n^2 - 21n - 18}{4} \leq S_4(\{x\}) \leq \frac{3n^2 + 1}{8} - n. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.8. *Los números de Sidon-Ramsey satisfacen la estimación $\Omega(k^{3/2}) \leq \text{SR}(k)$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $k \leq n$ número natural. Considérese una k -coloración aleatoria independiente y uniforme de $[1, n]$. Sean S_3 y S_4 como en la Definición 2.6, y para cada $S \in S_3 \cup S_4$ fíjese un elemento $r_S \in S$ cualquiera. Para cada $S \in S_3 \cup S_4$ denotemos por A_S al evento de que S sea monocromático y denotamos

$$\mathcal{I}_S = \{A_T : T \in S_3 \cup S_4, T \cap (S \setminus \{r_S\}) = \emptyset\} \text{ y} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{D}_S = \{A_T : T \neq S \text{ y } A_T \notin \mathcal{I}_S\} \quad (2.6)$$

Veamos que A_S es mutuamente independiente a $\mathcal{I}_S$ para toda S . Para ello, consideremos $I_1, I_2 \subset \mathcal{I}_S$ disjuntos y sea c un color fijo. Como fijar el color de uno de los números no cambia la probabilidad de que alguno de los eventos sea o no monocromático, se satisfacen las igualdades

$$\mathbb{P}\left(A_S \wedge \bigwedge_{A_T \in I_1} A_T \wedge \bigwedge_{A_U \in I_2} \overline{A_U}\right) = \mathbb{P}\left(A_S \wedge \bigwedge_{A_T \in I_1} A_T \wedge \bigwedge_{A_U \in I_2} \overline{A_U} \mid r_S \text{ tiene color } c\right)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_S) \mathbb{P}\left(\bigwedge_{A_T \in I_1} A_T \wedge \bigwedge_{A_U \in I_2} \overline{A_U}\right) &= \mathbb{P}(A_S | r_S \text{ tiene color } c) \times \\ &\quad \mathbb{P}\left(\bigwedge_{A_T \in I_1} A_T \wedge \bigwedge_{A_U \in I_2} \overline{A_U} \mid r_S \text{ tiene color } c\right). \end{aligned}$$

Para concluir que es mutuamente independiente basta ver que los lados derechos de las igualdades anteriores son iguales, ya que $(A_S | r_S \text{ tiene color } c)$ depende únicamente de la elección de los colores de los números en $S \setminus \{r_S\}$, y que $\left(\bigwedge_{A_T \in I_1} A_T \wedge \bigwedge_{A_U \in I_2} \overline{A_U} \mid r_S \text{ tiene color } c\right)$ depende únicamente de la elección de los colores de los números en $[1, n] \setminus \{r_S\}$.

Ahora, queremos aplicar el Lema Local de Lovász en su versión asimétrica (Teorema 2.5) para demostrar que

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge_{S \in S_3 \cup S_4} \overline{A_S}\right) > 0,$$

lo que nos diría que hay una k -coloración de $[1, n]$ de Sidon. Para esto, necesitamos encontrar $0 \leq x_S < 1$ para toda $S \in S_3 \cup S_4$, tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} = \mathbb{P}(A_S) &\leq x_S \prod_{T: A_T \in \mathcal{D}_S} (1 - x_T) \quad \text{si } |S| = 3, \\ \frac{1}{k^3} = \mathbb{P}(A_S) &\leq x_S \prod_{T: A_T \in \mathcal{D}_S} (1 - x_T) \quad \text{si } |S| = 4. \end{aligned} \tag{2.7}$$

De la Observación 2.7 podemos ver que $|\{A_T \in \mathcal{D}_S : |T| = 4\}| = \Theta(n^2)$ y $|\{A_T \in \mathcal{D}_S : |T| = 3\}| = \Theta(n)$, lo que nos permite simplificar el problema a considerar $x_S = x_3$ si $|S| = 3$ y $x_S = x_4$ si $|S| = 4$ para algunos $0 \leq x_3, x_4 < 1$. También por la Observación 2.7 podemos ver que si $S = \{r_S, x, y, z\} \in S_4$ se tiene que

$$|\{A_T \in \mathcal{A}_S : |T| = 4\}| \leq S_4(\{x\}) + S_4(\{y\}) + S_4(\{z\}) \leq 3 \left(\frac{3n^2 - 7}{8}\right) < \frac{9n^2}{8} \text{ y} \tag{2.8}$$

$$|\{A_T \in \mathcal{A}_S : |T| = 3\}| \leq S_3(\{x\}) + S_3(\{y\}) + S_3(\{z\}) \leq 3n, \tag{2.9}$$

y cuando $S = \{r_S, x, y\} \in S_3$ se tiene que

$$|\{A_T \in \mathcal{A}_S : |T| = 4\}| \leq S_4(\{x\}) + S_4(\{y\}) \leq 3 \left(\frac{3n^2 - 7}{8} \right) < \frac{3n^2}{4} \quad y \quad (2.10)$$

$$|\{A_T \in \mathcal{A}_S : |T| = 3\}| \leq S_3(\{x\}) + S_3(\{y\}) \leq 2n. \quad (2.11)$$

Por estas desigualdades y la ecuación (2.7), basta encontrar $0 \leq x_3, x_4 < 1$ que satisfagan

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^3} &\leq x_4(1 - x_3)^{3n}(1 - x_4)^{\frac{9n^2}{8}} \quad y \\ \frac{1}{k^2} &\leq x_3(1 - x_3)^{2n}(1 - x_4)^{\frac{3n^2}{4}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Comparando estas dos desigualdades tenemos que se optimiza el valor de k cuando $x_3 = x_4^{2/3}$. Fijando $x_4 = \frac{9n^2}{8}$ obtenemos que lo anterior se satisface si

$$n \leq \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{e}} - \varepsilon \right) k^{3/2},$$

donde $\varepsilon \rightarrow 0$ mientras $k \rightarrow \infty$. ■

2.3. Estimación mediante el Teorema de Hipergráficas Simétricas

El Teorema de Hipergráficas Simétricas es un resultado probabilístico para hipergráficas. En general, este resultado da una estimación para el mínimo número de partes en las que se necesita partir a los vértices de una hipergráfica para que ninguna de las partes contenga una hiperarista. Una implicación particular del Teorema de Hipergráficas Simétricas que es más fácil de enunciar es el siguiente resultado algebraico. Es importante mencionar que la estimación obtenida por dicha implicación para los números de Sidon-Ramsey es la misma que la estimación que se puede obtener usando el Teorema de Hipergráficas Simétricas:

Teorema 2.9 (Lovász; [33]). *Sea G un grupo finito y $A \subset G$. Entonces existe $B \subset G$ tal que $AB = G$ y*

$$|B| \leq \frac{1 + \log|A|}{|A|} |G|.$$

Para aplicar este resultado para encontrar estimaciones de los números de Sidon-Ramsey, tomaremos alguna de las construcciones que mencionamos en la Sección 1.1 sobre conjuntos cíclicos.

Teorema 2.10. *Los números de Sidon-Ramsey cumplen la cota*

$$\frac{k^2}{\log^2 k} (1 - o(1)) \leq \text{SR}(k).$$

Demostración. Sea q potencia de primo y S el conjunto de Sidon de tamaño $q + 1$ dentro de $\mathbb{Z}_{q^2+q+1}$ propuesto por Singer, Teorema 1.4 (de manera análoga, podríamos demostrar esta cota usando la construcción de Bose, Teorema 1.5; o la construcción de Ruzsa, Teorema 1.6). Por el Teorema 2.9, sabemos que existe

$$|B| \subset \mathbb{Z}_{q^2+q+1} \quad (2.13)$$

tal que $S + B = \mathbb{Z}_{q^2+q+1}$ y $|B| \leq \frac{1+\log(q+1)}{q+1}(q^2 + q + 1)$. Para cada $b \in B$ consideremos el conjunto $S_b = S + \{b\}$. Como cada S_b es un trasladado de S , cada uno de estos conjuntos es un conjunto de Sidon, y de esta forma podemos ver que con $|B|$ conjuntos de Sidon cubrimos $\mathbb{Z}_{q^2+q+1}$. De la ecuación (2.13) que $q^2 + q + 1 = \frac{k^2}{\log^2(k)}(1 - o(1))$. De lo anterior y por el teorema de los números primos podemos concluir la prueba. ■

2.4. Demostración del Teorema 2.1

Demostración de la cota superior

Como vimos en el Teorema 1.3, tenemos que $F_2(n) \leq n^{1/2} + 0.98183n^{1/4} + O(1)$. Por principio de casillas, podemos deducir que el intervalo $[1, n]$ no puede partirse en menos de

$$k \geq \frac{n}{F_2(n)} \geq \frac{n}{n^{1/2} + 0.98183n^{1/4} + O(1)}$$

conjuntos de Sidon. Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{n^{1/2}}{1 + 0.98183n^{-1/4} + O(n^{-1/2})} \\ &= n^{1/2}(1 - 0.98183n^{-1/4} + O(n^{-1/2})) \\ &= (n^{1/4} - 0.490915)^2 + O(1). \end{aligned}$$

Si resolvemos la ecuación anterior para n obtenemos que

$$n \leq ((k + O(1))^{1/2} + 0.490915)^4 = k^2 + 1.96366k^{3/2} + O(k),$$

con lo que se concluye la demostración.

Demostración de la cota inferior

Esta prueba se realizará partiendo de la construcción de Singer (Teorema 1.4). Tomemos q potencia de número primo y sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{q+1}\}$ el conjunto de Sidon de tamaño $q + 1$ propuesto por Singer dentro de $\mathbb{Z}_{q^2+q+1}$. Consideremos los conjuntos de Sidon $S_j = S - s_j$ para $1 \leq j \leq q + 1$. Todos estos contienen al 0, y ningún par de conjuntos coinciden en algún

otro número, pues los trasladados de un conjunto de Sidon se intersectan en a lo más un elemento. Así tenemos que

$$\left| \bigcup_{j=1}^{q+1} S_j \right| = \left| \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^{q+1} S_j \setminus \{0\} \right| = 1 + (q+1)q = q^2 + q + 1,$$

es decir, $\mathbb{Z}_{q^2+q+1}$ se puede partir en $q+1$ conjuntos de Sidon. Consideremos k entero positivo. Por el teorema de los números primos sabemos que hay un primo entre $k - O(k^c)$ y k para $c \geq 0.525$ (ver [1]). De esto y considerando el levantamiento a $\mathbb{Z}$ de la partición de Sidon-Ramsey construida a partir del conjunto de Singer podemos concluir que

$$k^2 - O(k^{1.525}) \leq \text{SR}(k).$$

2.5. Nuevos números de Sidon-Ramsey en $\mathbb{Z}$

Otro trabajo que se realizó en esta tesis es la obtención de nuevos números de Sidon-Ramsey, en particular, obtuvimos los valores exactos de $\text{SR}(6)$ y $\text{SR}(7)$. También se obtuvieron mejoras para las cotas de $\text{SR}(8)$ y $\text{SR}(9)$ establecidas previamente. Para esta parte del trabajo se hizo uso de la computadora. En general, los procesos consisten en encontrar todos los conjuntos de Sidon de algún tamaño particular en ciertos intervalos, y posteriormente intentar unir algunos de ellos para que formen una partición de Sidon-Ramsey. Se platica un poco de dichos algoritmos al final de esta sección.

Teorema 2.11 (Espinosa, Pellicer; [16]). *El número $\text{SR}(6)$ es 51.*

Demostración. La partición

$$\begin{array}{ll} \{1, 13, 15, 26, 31, 34, 35, 41\} & \{4, 6, 14, 28, 29, 33, 40, 46, 49\} \\ \{2, 5, 11, 18, 22, 23, 37, 45, 47\} & \{9, 12, 19, 21, 27, 43, 44, 48\} \\ \{3, 7, 8, 24, 30, 32, 39, 42\} & \{10, 16, 17, 20, 25, 36, 38, 50\} \end{array}$$

muestra que $\text{SR}(6) > 50$. Además, se realizó una búsqueda exhaustiva para ver que ésta era la única partición en 6 partes de $[1, 50]$, y no puede extenderse a $[1, 51]$, por lo que $\text{SR}(6) \leq 51$. ■

Teorema 2.12 (Espinosa, Pellicer; [16]). *El número $\text{SR}(7)$ es 66.*

Demostración. La partición

$$\begin{array}{ll} \{1, 3, 15, 22, 30, 33, 46, 50, 55, 56\} & \{6, 10, 16, 29, 38, 41, 43, 58, 59\} \\ \{2, 9, 17, 21, 26, 27, 47, 49, 60, 63\} & \{8, 25, 31, 32, 35, 40, 51, 53, 65\} \\ \{4, 7, 13, 23, 24, 28, 36, 54, 61\} & \{11, 18, 19, 37, 39, 42, 48, 52, 64\} \\ \{5, 12, 14, 20, 34, 44, 45, 57, 62\} & \end{array}$$

muestra que $SR(7) > 65$. Para encontrar la cota superior, primero hay que recordar que $F_2(66) = 10$ (ver Tabla 1.1). Esto quiere decir que cualquier partición de $[1, 66]$ en 7 partes debe contener al menos 3 partes de tamaño 10. En total hay 1601160 ternas disjuntas de conjuntos de Sidon de tamaño 10, y ninguna de ellas se puede completar con 4 partes de tamaño 9. Cualquier otra partición necesitaría al menos 4 partes de tamaño 10. En total hay 12435 cuartetos, y ninguna de ellas se puede completar con otros 3 conjuntos de Sidon para cubrir $[1, 66]$. Por lo tanto concluimos que $SR(7) = 66$. ■

Proposición 2.13 (Espinosa, Pellicer; [16]). *Se tiene que $SR(8) \leq 86$.*

Demostración. Sabemos que $F_2(86) = 12$ (ver Tabla 1.1). Hay 2 conjuntos de Sidon de tamaño 12 en $[1, 86]$, y no son disjuntos. Por lo tanto, cualquier partición de Sidon-Ramsey del $[1, 86]$ tiene a lo más una parte de tamaño 12. Si se usa uno de estos conjuntos, debe completarse con al menos una cuarteta de conjuntos de Sidon de tamaño 11. De los 102484 conjuntos de Sidon de tamaño 11 en $[1, 86]$, se puede construir 3266 cuartetos disjuntos para cada una de las elecciones del conjunto de Sidon de tamaño 12. Ninguno de estas elecciones se puede extender a una partición de $[1, 86]$ (no es posible añadir ningún conjunto de Sidon de tamaño 11 y tampoco es posible completar con una terna de conjuntos de Sidon de tamaño 10). Por otro lado, si no elegimos ningún conjunto de Sidon de tamaño 12, se necesitan al menos 6 conjuntos de Sidon de tamaño 11. Existen 4030 de estas sextetas pero a ninguna de estas se les puede añadir un conjunto de Sidon de tamaño 11 y tampoco se puede completar con dos conjuntos de Sidon de tamaño 10. Así se tiene que no existe partición de Sidon-Ramsey en 8 partes de $[1, 86]$. ■

Proposición 2.14 (Espinosa, Pellicer; [16]). *Se tiene que $SR(9) \leq 111$.*

Demostración. Primero recordemos que $F_2(111) = 13$ (ver Tabla 1.1). Para conseguir una partición de $[1, 111]$ en 9 conjuntos de Sidon, necesitaríamos al menos tres conjuntos de Sidon de tamaño 13. Como hay 28 conjuntos de Sidon de tamaño 13 dentro de $[1, 111]$ pero ninguna terna de estos es disjunta, concluimos que $SR(9) \leq 111$. ■

Por otro lado, para $k = 7$ tenemos que $[1, 65] = [1, SR(7) - 1]$ cuenta con una partición no balanceada, es decir, algunas de sus partes tienen diferencia de tamaño al menos dos. Dicha partición consiste en tres partes de tamaño 10, cuatro partes de tamaño 9 y una parte de tamaño 8, dada por

$$\begin{array}{ll} \{1, 3, 15, 22, 30, 33, 46, 50, 55, 56\} & \{6, 19, 23, 24, 34, 43, 57, 59, 65\} \\ \{2, 9, 17, 21, 26, 27, 47, 49, 60, 63\} & \{8, 10, 20, 36, 37, 40, 45, 51, 58\} \\ \{4, 7, 12, 16, 31, 41, 42, 48, 62, 64\} & \{13, 18, 25, 29, 35, 38, 53, 61\}. \\ \{5, 11, 14, 28, 32, 39, 44, 52, 54\} & \end{array}$$

Este es el primer k donde sucede este fenómeno y surge la pregunta de que tan “desbalanceada” puede ser una k -partición de Sidon-Ramsey en $[1, SR(k) - 1]$.

Algoritmo 1

Este primer algoritmo determina todos los conjuntos de Sidon en cierto intervalo $[1, n]$ de tamaño a lo más k . Esto se hará de manera recursiva, usando conjuntos de Sidon en $[1, m]$ para construir conjuntos de Sidon en $[1, m + 1]$.

Sea $k \geq 1$, y sea $S_{1,k}$ el conjunto de todos los conjuntos de Sidon con a lo más k elementos en $\{1\}$. Nótese que $S_{1,k}$ consiste exclusivamente de $\emptyset$ y $\{1\}$. De manera recursiva se construyen los conjuntos $S_{m,k}$ (que denota el conjunto de todos los conjuntos de Sidon de tamaño a lo más k en $[1, m]$) de la siguiente manera:

1. A $S_{m,k}$ se le añaden todos los elementos de $S_{m-1,k}$.
2. Para cada conjunto en $S_{m-1,k}$ de tamaño a lo más $k - 1$ se le añade el elemento m , y si forma un conjunto de Sidon lo agregamos a $S_{m,k}$.

Finalmente, $S_{n,k}$ es el conjunto buscado.

Algoritmo 2

Este algoritmo sirve para encontrar todos los conjuntos de Sidon de tamaño k en $[1, n]$ que contienen al 1 y al n .

Primero observemos que si $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ es un conjunto de Sidon con $1 = x_1 < x_2 < \dots < x_k = n$, entonces X está completamente determinado por la $(k - 1)$ -tupla $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_k - x_{k-1})$. Resulta que una de estas $(k - 1)$ -tuplas $(y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ determinan un conjunto de Sidon si y sólo si, para cualesquiera $j_1 \leq j_2$ y $j_3 \leq j_4$ con $\{j_1, j_2\} \neq \{j_3, j_4\}$, se tiene que

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} y_j \neq \sum_{j=j_3}^{j_4} y_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{k-1} y_j = n - 1.$$

Entonces, para encontrar un conjunto de Sidon lo que se hacía era encontrar tuplas $(y_1, \dots, y_{k-1})$ que sumen $n - 1$ y tales que $y_1 < y_2 < \dots < y_{k-1}$, y se busca cuales de sus permutaciones induce un conjunto de Sidon.

2.6. Números B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}$

Del mismo modo que para los números de Sidon-Ramsey, podemos obtener una estimación superior para los números $BR_h(k)$ con principio de casillas, ésta vez usando la cota de Green para los números $F_h(n)$ (ver Teorema 1.13). Al igual, para la cota inferior, se procederá de manera similar que con los números de Sidon-Ramsey, usando en este caso trasladados de los conjuntos propuestos por Gómez y Trujillo (ver Teorema 1.12). La estimación obtenida está en el siguiente teorema:

Teorema 2.15 (Espinosa, Montejano, Roldán, Suárez; [15]). *Sean k, h enteros positivos con $h \geq 3$, entonces*

$$k^{\frac{h}{h-1}} - O(k^{1+\frac{c}{h-1}}) \leq \text{BR}_h(k) \leq (C_h + o(1))k^{\frac{h}{h-1}},$$

donde $c \leq 0.525$ depende de la distribución de los números primos y donde $C_3 \leq \sqrt{7/2}$, $C_4 \leq \sqrt[3]{7}$ y $C_h \leq \left(\frac{h}{2e}\right)^{\frac{h}{h-1}}$ para $h \geq 5$ depende de las mejores cotas superiores para los números B_h .

Demostración. Primero trabajaremos la cota superior para los números de B_h -Ramsey. La mejor cota para números F_h está dada por el Teorema 1.13 que establece que

$$F_h(n) \leq c_h n^{1/h} + o(n^{1/h}),$$

donde $c_3 = \sqrt[3]{7/2}$, $c_4 = \sqrt[4]{7}$ y $c_h = \frac{h}{2e}$. Usando el principio de las casillas, se deduce que el intervalo $[1, n]$ no se puede partir en menos de

$$k \geq \frac{n}{F_h(n)} \geq \frac{n}{c_h n^{1/h} + o(n^{1/h})}$$

conjuntos B_h . Resolviendo esta ecuación para n , tenemos que

$$n \leq \left(c_h^{\frac{h}{h-1}} + o(1) \right) k^{\frac{h}{h-1}},$$

con lo que se demuestra la cota superior.

Para k fijo sea p el menor primo tal que $p^{h-1} - 1 \leq k$. Por el teorema de Gómez-Trujillo sabemos que para todo p primo y $h \geq 3$ existe un X conjunto B_h de tamaño p en $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^{h-1}-1}$. Esta construcción es de la forma

$$X = \{(a, f(a)) : a \in \mathbb{Z}_p\}.$$

Como los trasladados de conjuntos B_h son conjuntos B_h , tenemos que los conjuntos $X_j = X + (0, j)$ para $0 \leq j < p^{h-1} - 1$ son conjuntos B_h disjuntos. Además, por su cardinalidad, podemos ver que estos forman una partición B_h -Ramsey de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^{h-1}-1} \cong \mathbb{Z}_{p^h-p}$. Luego, como B_h de $\mathbb{Z}_m$ induce una partición en conjuntos B_h en $[1, m]$ podemos inducir una partición de B_h -Ramsey en $[1, p^h-p]$ en $p^{h-1}-1$ partes. Por el teorema de los números primos, podemos deducir que $p = (k+1)^{\frac{1}{h-1}} - O((k+1)^{\frac{0.525}{h-1}})$, lo que implica

$$\begin{aligned} \text{BR}_h(k) &\geq \text{BR}_h(p^{h-1} - 1) \geq p^h - p \\ &= ((k+1)^{\frac{1}{h-1}} - O((k+1)^{\frac{0.525}{h-1}}))^h - (k+1)^{\frac{1}{h-1}} + O((k+1)^{\frac{0.525}{h-1}}) \\ &= (k+1)^{\frac{h}{h-1}} - O((k+1)^{\frac{1.525}{h-1}}). \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Números de Sidon-Ramsey y B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}^d$

En este capítulo se mostrarán primero estimaciones de los números B_h en $\mathbb{Z}^d$ para el caso en que las cajas sean asimétricas. Luego, usaremos esta y otras estimaciones, al igual que la función φ (ecuación (1.5)) para establecer cotas en los números de Sidon-Ramsey y B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}^d$.

3.1. Mejoras en números B_h en $\mathbb{Z}^d$

En esta sección se combinarán ideas de Cilleruelo ([10]) y de Rackham y Šarka ([36]) para obtener la siguiente estimación para los números B_h :

Teorema 3.1 (Espinosa, Montejano, Roldán, Suárez; [15]). *Sean $h \geq 2$ y $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_d$ enteros positivos, y sean $N_0 = 1$, $N_j = \prod_{i=1}^j n_i$ para $1 \leq j \leq d$, $N = N_d$, y sea s el menor entero tal que $N^{1/h} \leq n_s^{d-s+2} N_{s-1}$. Entonces para $h \geq 2$ se satisface*

$$F_h(n_1, \dots, n_d) \leq \begin{cases} (t!)^{\frac{2}{h}} t^{\frac{d}{h}} N^{\frac{1}{h}} \left(1 + O \left(\left(\frac{N_{s-1}}{N^{\frac{1}{h}}} \right)^{\frac{1}{d-s+2}} \right) \right) & \text{if } h = 2t, \\ (t!)^{\frac{2}{h}} t^{\frac{d-1}{h}} N^{\frac{1}{h}} \left(1 + O \left(\left(\frac{N_{s-1}}{N^{\frac{1}{h}}} \right)^{\frac{1}{d-s+2}} \right) \right) & \text{if } h = 2t - 1. \end{cases}$$

Este teorema coincide con la cota de Cilleruelo (Teorema 1.7) para conjuntos de Sidon y para $h \geq 3$ en el caso de cajas simétricas coincide con la cota de Rackham y Šarka (Teorema 1.14). En el caso de que h sea grande y la caja sea “suficientemente simétrica”, el Teorema 1.15 puede darnos una mejor estimación. Para demostrar este teorema trabajaremos con la energía aditiva y mencionaremos algunos lemas a su alrededor.

Definición 3.2. *Dados dos subconjuntos A, B de un grupo aditivo G , y $g \in G$, se define la energía aditiva entre A y B como*

$$\sum_{g \in G} d_A(g) d_B(g),$$

donde

$$d_X(g) = |\{(x, x') : x, x' \in X, x - x' = g\}|.$$

Lema 3.3 (Cilleruelo, [10]). *Sea G un grupo aditivo y $A, B \subset G$. Entonces*

$$|A|^2 \leq \frac{|A+B|}{|B|^2} \sum_{g \in G} d_A(g) d_B(g).$$

El siguiente lema es una generalización de los Lemas 4.2.1 y 4.3.1 de [36]. Ambos lemas consideran un conjunto B simétrico pero este hecho no es usado en la prueba. Para esto, denotaremos por tA al conjunto de sumas de t elementos de A (no necesariamente distintos), y por $t * A$ al conjunto formado por las sumas de t elementos distintos de A .

Lema 3.4 (Rackham, Šarka; [36]). *Sea $h \geq 2$, sea A un conjunto B_h en $\mathbb{Z}^d$ y sea $B = [0, i_1 - 1] \times [0, i_2 - 1] \times \cdots \times [0, i_d - 1]$.*

1. *Si $h = 2t$, entonces*

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} d_{tA}(z) d_B(z) \leq |B|^2 + O(|B||A|^{h-1}).$$

2. *Si $h = 2t - 1$, entonces*

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} d_{t * A}(z) d_B(z) \leq \frac{|A|}{t} |B|^2 + O(|B||A|^h).$$

Ahora sí, con estos lemas se pueden seguir las ideas de Cilleruelo, Rackham y Šarka para demostrar el Teorema 3.1.

Demostración del Teorema 3.1

Primero trabajaremos el caso cuando $h = 2t$. Sea A un conjunto B_h en $X = \prod_{j=1}^d [1, n_j] \subset \mathbb{Z}^d$ y definimos $r_j = 0$ para $j < s$, y $r_j = \lfloor tn_j M \rfloor$ para $j \geq s$ y $0 < M < 1$. Aplicando los Lemas 3.3 y 3.4 con tA y $B = [0, r_1] \times [0, r_2] \times \cdots \times [0, r_d]$ tenemos que

$$\frac{|tA|^2 |B|^2}{|tA + B|} \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} d_{tA}(z) d_B(z) \leq |B|^2 + O(|B||A|^{2t-1}).$$

El número de elementos en tA es $\binom{|A|-1+t}{t}$. Una estimación sencilla para este coeficiente binomial es $\frac{|A|^t}{t!} \leq \binom{|A|-1+t}{t}$, de donde se sigue que $\frac{|A|^t}{t!} \leq |tA|$. De manera similar tenemos que $\frac{|A|}{h!} \leq |hA|$, y como $hA \subset hX$ se implica que $|A| \leq (h!|hX|)^{1/h} = O_h(N^{1/h})$. Gracias a lo anterior podemos obtener la estimación

$$\frac{|A|^{2t} |B|^2}{(t!)^2 |tA + B|} \leq |B|^2 + O_h(|B||A|^{2t-1}) \leq |B|^2 + O_h(|B||N|^{\frac{h-1}{h}}),$$

o de manera equivalente

$$|A|^{2t} \leq (t!)^2 |tA + B| \left(1 + O_h \left(\frac{N^{\frac{h-1}{h}}}{|B|} \right) \right).$$

Nótese que $tA + B \subset [1, tn_1 + r_1] \times \cdots \times [1, tn_d + r_d]$. Como $r_j \leq tn_j M < r_j + 1$ entonces

$$\begin{aligned} |tA + B| &\leq \prod_{j=1}^d (tn_j + r_j) = t^d N \prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{r_j}{tn_j} \right) = t^d N \prod_{j=s}^d \left(1 + \frac{r_j}{tn_j} \right) \\ &\leq t^d N (1 + M)^{d-s+1} = t^d N (1 + O(M)) \end{aligned}$$

y

$$|B| = \prod_{j=s}^d (1 + r_j) \geq \prod_{j=s}^d tn_j M = t^{d-s+1} \frac{N}{N_{s-1}} M^{d-s+1}.$$

Concluimos entonces que

$$|A|^{2t} \leq (t!)^2 t^d N (1 + O(M)) \left(1 + O \left(\frac{N^{\frac{h-1}{h}} N_{s-1}}{N M^{d-s+1}} \right) \right).$$

Para minimizar esta última expresión, tomamos $M = (N_{s-1}/N^{1/h})^{1/(d-s+2)}$ y s el menor entero tal que $N^{1/h} \leq n_s^{d-s+2} N_{s-1}$. Con esto, tenemos que

$$|A|^{2t} \leq (t!)^2 t^d N \left(1 + O \left(\left(\frac{N_{s-1}}{N^{\frac{1}{h}}} \right)^{\frac{1}{d-s+2}} \right) \right).$$

Concluimos la demostración de este caso sacando la raíz $2t$ -ésima a la última expresión.

La prueba para el caso $h = 2t - 1$ es muy similar a la del caso $h = 2t$. Sea A un conjunto B_h contenido en X , $1 \leq s \leq d$ y $0 < M < 1$. Tomamos M , r_j y B como en el otro caso. Aplicando el Lema 3.3 con $t * A$ y B , y usando el Lema 3.4 obtenemos que

$$\frac{|t * A|^2 |B|^2}{|t * A + B|} \leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} d_{t * A}(z) d_B(z) \leq \frac{|A|}{t} |B|^2 + O(|B| |A|^{2t-1}).$$

El número de elementos en $t * A$ es $\binom{|A|}{t}$. Los coeficientes binomiales se pueden estimar elementalmente por $\frac{|A|^t}{t!} (1 - \frac{c_t}{|A|}) \leq |t * A|$, donde c_t depende únicamente de t . Usando esto y que $|B| = O(N)$, $\frac{|A|^h}{h!} \leq h^d N$ y $|A| = \Omega(N^{\frac{1}{h}})$ (lo último se sigue de las estimaciones de las

ecuaciones (1.7) y (1.9)) tenemos que

$$\begin{aligned}
 |A|^{2t} &\leq \frac{(t!)^2 |A|}{t} |t * A + B| \left(\frac{1}{1 - \frac{c_t}{|A|}} \right)^2 \left(1 + O \left(\frac{|A|^{2t-2}}{|B|} \right) \right) \\
 &= \frac{(t!)^2 |A|}{t} |t * A + B| \left(1 + O \left(\frac{1}{|A|} \right) \right) \left(1 + O \left(\frac{|A|^{2t-2}}{|B|} \right) \right) \\
 &= \frac{(t!)^2 |A|}{t} |t * A + B| \left(1 + O \left(\frac{1}{N^{\frac{1}{h}}} \right) \right) \left(1 + O \left(\frac{N^{\frac{h-1}{h}}}{|B|} \right) \right) \\
 &= \frac{(t!)^2 |A|}{t} |t * A + B| \left(1 + O \left(\frac{N^{\frac{h-1}{h}}}{|B|} \right) \right).
 \end{aligned}$$

De manera similar que en el caso par, podemos ver que $|B| \geq t^{d-s+1} \frac{N}{N_{s-1}} M^{d-s+1}$ y $|t * A + B| \leq t^d N(1 + O(M))$. Entonces

$$|A|^{2t-1} \leq \frac{(t!)^2}{t} t^d N(1 + O(M)) \left(1 + O \left(\frac{N^{\frac{2t-2}{2t-1}} N_{s-1}}{N M^{d-s+1}} \right) \right).$$

Para minimizar esta expresión, tomamos $M = (N_{s-1}/N^{1/h})^{1/(d-s+2)}$ y s el menor entero que satisface $N^{1/h} \leq n_s^{d-s+2} N_{s-1}$. Entonces

$$|A|^{2t-1} \leq (t!)^2 t^{d-1} N \left(1 + O \left(\left(\frac{N_{s-1}}{N^{\frac{1}{h}}} \right)^{\frac{1}{d-s+2}} \right) \right).$$

La demostración se concluye tomando la raíz $(2t-1)$ -ésima de la última expresión.

3.2. Números de Sidon-Ramsey y números B_h -Ramsey en $\mathbb{Z}^d$

Para poder presentar los resultados relacionados a números de Ramsey en $\mathbb{Z}^d$ para $d \geq 2$ es conveniente acotar el número de partes necesarias a partir de las dimensiones de la caja. Consideraremos entonces, para $h \geq 2$, el parámetro $\text{br}_h(n_1, n_2, \dots, n_d)$ como el mayor entero k tal que no existe una partición B_h -Ramsey en k conjuntos B_h de la caja $X = [1, n_1] \times [1, n_2] \times \dots \times [1, n_d] \subset \mathbb{Z}^d$. Para $h = 2$, $\text{br}_h(n_1, \dots, n_d)$ es el problema Sidon-Ramsey en $\mathbb{Z}^d$; y en el caso de que $d = 1$, este parámetro satisface que $\text{br}_2(\text{SR}(k)) = k$ y que $\text{br}_h(\text{BR}_h(k)) = k$ para $h \geq 2$. Para el parámetro $\text{br}_h(n_1, n_2, \dots, n_d)$ se puede obtener el siguiente teorema.

Teorema 3.5 (Espinosa, Montejano, Roldán, Suárez; [15]). *Sean $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_d$ enteros positivos, $N_0 = 1$, $N_i = \prod_{j \leq i} n_j$ para $1 \leq i \leq d$, $N = N_d$, y $1 \leq s \leq d$ el menor entero que*

satisface $N^{1/h} \leq n_s^{d-s+2} N_{s-1}$. Definimos

$$\gamma_h(n_1, \dots, n_d) = \begin{cases} \frac{N^{\frac{h-1}{h}}}{(t!)^{\frac{2}{h}} t^{\frac{d}{h}}} \left(1 - O \left(\left(\frac{N_{s-1}}{N^{\frac{1}{h}}} \right)^{\frac{1}{d-s+2}} \right) \right) & \text{si } h = 2t, \\ \frac{N^{\frac{h-1}{h}}}{(t!)^{\frac{2}{h}} t^{\frac{d-1}{h}}} \left(1 - O \left(\left(\frac{N_{s-1}}{N^{\frac{1}{h}}} \right)^{\frac{1}{d-s+2}} \right) \right) & \text{si } h = 2t - 1, \end{cases}$$

entonces

$$\gamma_h(n_1, \dots, n_d) \leq \text{br}_h(n_1, \dots, n_d) \leq N^{\frac{h-1}{h}} \left(1 + O \left(N^{\frac{-1+c}{h}} \right) \right),$$

donde $c \leq 0.525$ depende del teorema de los números primos.

Demostración. La cota inferior se obtiene de aplicar el principio de casillas con la cota del Teorema 3.1. Para el caso $h = 2t$, tenemos que la caja X se puede partir en no menos de

$$k \geq \frac{|X|}{F_h(n_1, \dots, n_d)} \geq \frac{N}{(t!)^{\frac{2}{h}} t^{\frac{d}{h}} N^{\frac{1}{h}} \left(1 + O \left(\left(\frac{N_{s-1}}{N^{\frac{1}{h}}} \right)^{\frac{1}{d-s+2}} \right) \right)}$$

conjuntos B_h . Simplificando esta última expresión podemos concluir el primer caso de la prueba. Para el caso $h = 2t - 1$ se procede de manera análoga.

La cota superior se sigue del Teorema 2.15 (Teorema 2.1 para $h = 2$) y de que las particiones en conjuntos B_h (conjuntos de Sidon) de $[1, N]$ se pueden mapear a particiones en conjuntos B_h (conjuntos de Sidon) de $[1, n_1] \times [1, n_2] \times \dots \times [1, n_d]$. Estos teoremas nos dicen que $k^{\frac{h}{h-1}} - O(k^{1+\frac{c}{h-1}}) \leq \text{BR}_h(k)$, que es equivalente a

$$\text{br}_h(N) \leq N^{\frac{h-1}{h}} \left(1 + O \left(N^{\frac{-1+c}{h-1}} \right) \right).$$

Luego, como el mapeo mencionado implica

$$\text{br}_h(n_1, n_2, \dots, n_d) \leq \text{br}_h(N),$$

podemos concluir con la cota superior del teorema. ■

Del teorema anterior se deduce que $\text{br}_h(n_1, n_2, \dots, n_d) = \Theta \left((n_1 n_2 \dots n_d)^{\frac{h-1}{h}} \right)$. Además podemos notar que la cota inferior depende de la mejor cota superior para el número F_h y algunas mejoras en esta cota se pueden obtener en este caso. Por ejemplo, para h suficientemente grande y cajas “suficientemente simétricas”, es posible mejorar la estimación usando el Teorema 1.15 en lugar del Teorema 3.1.

Parte II

Espacio de polígonos degenerados a segmentos

Capítulo 4

Preliminares

Dado $n \geq 3$ un entero fijo podemos pensar en un polígono de n lados (n -ágono) en el plano $\mathbb{C}$ como un punto $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, donde los vértices del n -ágono se corresponden con los puntos $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, y los lados del polígono corresponden a los segmentos $\overline{z_1 z_2}, \overline{z_2 z_3}, \dots, \overline{z_{n-1} z_n}$ y $\overline{z_n z_1}$, donde $\overline{ab}$ denota al segmento en $\mathbb{C}$ comprendido entre a y b . De este modo, el conjunto de n -ágonos se equipa con la topología usual de $\mathbb{C}^n$.

Definición 4.1. Denotaremos al grupo afín complejo por

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} := \{f_{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = az + b, \text{ con } a \in \mathbb{C}^* \text{ y } b \in \mathbb{C}\},$$

donde $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. El grupo afín complejo actúa en el conjunto de n -ágonos de manera diagonal. Es decir, para $f_{a,b} \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ y $Z = (z_1, \dots, z_n)$ la acción hace la asignación

$$(f_{a,b}, Z) \mapsto (az_1 + b, \dots, az_n + b).$$

Esta última expresión también será denotada por $aZ + \vec{b}$, donde $\vec{b}$ representa al vector $(b, b, \dots, b)$. Diremos que dos polígonos Z y W son equivalentes si la acción del grupo afín manda Z en W .

No es difícil ver que la acción del grupo afín complejo en el conjunto de n -ágonos define una relación de equivalencia, ya que: el grupo afín cuenta con la función identidad, el inverso de una función afín es a su vez una función afín, y la composición de dos funciones afines es una función afín.

Definición 4.2. Se define el espacio de polígonos de n vértices como

$$P(n) := (\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}_n) / \mathcal{A}_{\mathbb{C}},$$

con la topología cociente, donde

$$\mathcal{D}_n = \{\vec{z} = (z, z, \dots, z) \in \mathbb{C}^n\}$$

denota al conjunto diagonal, conformado por los polígonos degenerados a un punto. Denotaremos por $\eta : \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}_n \rightarrow P(n)$ a la proyección natural.

4.1. Espacio de polígonos $P(n)$

Se puede notar que para todo polígono en $\mathbb{C}^n$, existe otro polígono que es equivalente a él con la primer coordenada igual a 0. Por ejemplo, dado un polígono $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, basta con considerar al polígono $Z - \vec{z}_1 = (0, z_2 - z_1, \dots, z_n - z_1)$.

Definición 4.3. Se denotará por $V_n = \{(0, z_2, \dots, z_n)\}$ al conjunto de polígonos en $\mathbb{C}^n$ cuya primer coordenada es 0.

Se puede notar que dos polígonos $Z = (0, z_2, \dots, z_n)$ y $W = (0, w_2, \dots, w_n)$ en V_n son equivalentes si y sólo si existe $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $aZ = W$. De aquí podemos deducir la estructura de $P(n)$.

Observación 4.4. El espacio $P(n)$ es biholomorfo a $\mathbb{CP}^{n-2}$. Esto se sigue de que

$$P(n) = (\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}_n) / \mathcal{A}_{\mathbb{C}} = (V_n \setminus \{\vec{0}\}) / \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^* = \mathbb{CP}^{n-2},$$

donde $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^* = \{f_{a,0} \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}} : a \in \mathbb{C}^*\}$. Podemos darnos cuenta de que si consideramos la restricción de η a la esfera unitaria de dimensión $2n-3$ dentro de V_n , obtenemos la fibración generalizada compleja de Höpf.

Para nuestros fines, será necesario que demos algunos resultados básicos de polígonos simples y polígonos convexos.

4.1.1. Espacio de polígonos simples

Definición 4.5. Todo polígono $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ define una curva poligonal cerrada $\overline{z_1 z_2} \cup \overline{z_2 z_3} \cup \dots \cup \overline{z_n z_1}$ y la denotaremos por $\mathfrak{c}(Z)$.

Definición 4.6. Un polígono $Z \in \mathbb{C}^n$ se dice que es simple si todos sus vértices son distintos y $\mathfrak{c}(Z)$ es una curva de Jordan. $\mathbb{S}(n) \subset \mathbb{C}^n$ denota al espacio de polígonos simples.

Se dice que un polígono Z simple es positivamente orientado si el orden en que aparecen sus vértices en $\mathfrak{c}(Z)$ es en contra de las manecillas del reloj, y es negativamente orientado si aparecen en el sentido de las manecillas del reloj.

Definición 4.7. Se denotarán por $\mathbb{S}^+(n)$ y $\mathbb{S}^-(n)$ a los conjuntos de polígonos simples positivamente orientados y negativamente orientados, respectivamente.

En [19] se demuestra que $\mathbb{S}^+(n)$ y $\mathbb{S}^-(n)$ son abiertos, conexos y homeomorfos entre sí. Denotaremos por $S(n), S^+(n), S^-(n) \subset P(n)$ a las proyecciones $\eta(\mathbb{S}(n)), \eta(\mathbb{S}^+(n)), \eta(\mathbb{S}^-(n))$, respectivamente. Se sigue que $S^+(n)$ y $S^-(n)$ son abiertos, conexos y homeomorfos entre sí.

4.1.2. Espacio de polígonos convexos

Definición 4.8. Para todo $Z \in \mathbb{S}(n)$ se tiene que $\mathfrak{c}(Z)$ divide a $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{c}(Z)$ en dos regiones, una de ellas acotada (consecuencia del Teorema de la Curva de Jordan). Denotaremos por $\mathfrak{cl}(Z)$ a la unión de $\mathfrak{c}(Z)$ y la región acotada de $\mathbb{C} \setminus \mathfrak{c}(Z)$.

Definición 4.9. Se dice que un polígono simple Z es convexo si para cualesquiera dos puntos $p, q \in \mathfrak{cl}(Z)$ se satisface que $\overline{pq} \subset \mathfrak{cl}(Z)$. Denotaremos por $\mathbb{K}(n) \subset \mathbb{S}(n)$ al conjunto de polígonos convexos. Denotaremos por $\mathbb{K}^+(n) = \mathbb{K}(n) \cap \mathbb{S}^+(n)$ y $\mathbb{K}^-(n) = \mathbb{K}(n) \cap \mathbb{S}^-(n)$ a los polígonos convexos positiva y negativamente orientados, respectivamente.

En [18] se ve que $\mathbb{K}^+(n)$ y $\mathbb{K}^-(n)$ son espacios conexos. Sus proyecciones al cociente las denotaremos por $K(n) := \eta(\mathbb{K}(n))$, $K^+(n) := \eta(\mathbb{K}^+(n))$ y $K^-(n) := \eta(\mathbb{K}^-(n))$, siendo las últimas dos conexas y difeomorfas a $\mathbb{R}^{2n-4}$ (ver [18]). En particular, sabemos que todos los triángulos son polígonos convexos, por lo que $\mathbb{K}(3) = \mathbb{S}(3)$ (esta igualdad también se da en los subconjuntos de triángulos convexos positivos y convexos negativos, así como en el cociente $P(3)$).

4.2. Espacio de n -segmentos y espacio de n -segmentos convexos

Definición 4.10. Se dice que un polígono $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}_n$ es un n -segmento si sus vértices $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ son colineales. El conjunto conformado por todos los n -segmentos se denotará por $\mathbb{L}(n) \subseteq \mathbb{C}^n$.

Definición 4.11. Se denota por $M : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ al isomorfismo lineal que hace la asignación $M(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_2, \dots, z_n, z_1)$.

Denotaremos por $\partial\mathcal{X}$ y $cl(\mathcal{X})$ a la frontera y la cerradura de un conjunto $\mathcal{X}$, respectivamente.

En el Teorema 4.12 se demostrará que $\mathbb{L}(n) \subseteq \partial\mathbb{S}^+(n) \cap \partial\mathbb{S}^-(n)$. En particular se tiene que $\mathbb{L}(3) = \partial\mathbb{S}^+(3) \cap \partial\mathbb{S}^-(3)$. Esto sucede ya que todo $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \mathcal{D}_3$ es un triángulo o un triángulo degenerado a un segmento. Para $n > 3$ se tiene que $\mathbb{L}(n) \subsetneq \partial\mathbb{S}^+(n) \cap \partial\mathbb{S}^-(n)$, pues hay n -ágonos que no están en $\mathbb{L}(n)$ que se pueden aproximar tanto por polígonos simples positivamente orientados como por polígonos simples negativamente orientados. Por ejemplo, $Z = (1, 0, i, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$ no es un n -segmento y puede aproximarse con los n -ágonos simples positivamente orientados

$$Z_\varepsilon = \left(1, \varepsilon(1+i), i, 0, \frac{\varepsilon}{n-3}, \frac{2\varepsilon}{n-3}, \frac{3\varepsilon}{n-3}, \dots, \frac{(n-4)\varepsilon}{n-3} \right)$$

cuando $\varepsilon > 0$ tiende a 0, y por los n -ágonos simples negativamente orientados Z_ε cuando $\varepsilon < 0$ tiende a 0.

Teorema 4.12. $\mathbb{L}(n)$ está contenido en $\partial\mathbb{S}^+(n) \cap \partial\mathbb{S}^-(n)$.

Demostración. Como $\partial\mathbb{S}^+(n) \cap \partial\mathbb{S}^-(n)$ es un conjunto cerrado y los n -segmentos con algunos vértices iguales son límite de n -segmentos con todos sus vértices distintos, entonces es suficiente demostrar el teorema para n -segmentos en $\mathbb{L}(n)$ con todos sus vértices distintos.

Sea $\varepsilon > 0$ y $Z \in \mathbb{L}(n)$ un n -segmento con todos sus vértices distintos. Demostraremos que existe $W \in \mathbb{S}^+(n)$ tal que $\|W - Z\| < \varepsilon\sqrt{n}$. Esto implicaría que el n -ágono W' obtenido de reflejar W por la línea en $\mathbb{C}$ que contiene Z satisface que $W' \in \mathbb{S}^-(n)$ y $\|W' - Z\| < \varepsilon\sqrt{n}$. Con lo anterior, tendríamos que $Z \in \partial\mathbb{S}^+(n) \cap \partial\mathbb{S}^-(n)$ y por lo tanto $\mathbb{L}(n) \subset \partial\mathbb{S}^+(n) \cap \partial\mathbb{S}^-(n)$. Procederemos entonces a demostrar la existencia de dicho polígono W .

Por otro lado, podemos restringirnos al caso en que $\text{cl}(Z) = [0, 1]$, $z_1 = 0$ y $z_k = 1$ (cualquier otro caso es análogo, ya que todo n -segmento se puede llevar a uno de esta forma mediante una transformación afín y algunas aplicaciones de la función M , y estas transformaciones preservan sucesiones de polígonos convergentes).

Consideremos entonces $Z = (0, x_2, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n)$ con $\text{cl}(Z) = [0, 1]$. Construiremos una curva poligonal simple que aproxima los primeros k vértices de Z y que está contenido en el semiplano inferior. Procediendo de manera análoga construimos una curva poligonal simple que aproxima a los vértices restantes de Z y que está contenida en el semiplano superior. Así, el n -ágono W que buscamos será la unión de estas dos curvas poligonales.

Si $k = 2$, la curva poligonal de z_1 a z_k es $\overline{01}$. Supongamos que $2 < k \leq n$. La construcción se hará construyendo recursivamente los vértices $z_1, z_2, \dots, z_k$. Sean $1 = l_0 < l_1 < \dots < l_r = k$ tales que, para toda $1 \leq m \leq r - 1$, los vértices $z_{l_m} \in Z$ tienen las siguientes propiedades (ver Figura 4.1):

- I. Si $l_{m-1} < s < l_m$, entonces $z_s \in \overline{z_{s-1}z_{l_m}}$.
- II. Si m es impar, entonces $z_{l_{m+1}} \in \overline{0z_{l_m}} = \overline{z_1z_{l_m}}$.
- III. Si m es par, entonces $z_{l_{m+1}} \in \overline{z_{l_m}1} = \overline{z_{l_m}z_k}$.

Si $l_1 = k$ (i.e. los primeros k vértices aparecen en orden creciente), tomamos $w_2 = z_2 - i\varepsilon$, y para $2 < s < k$, w_s es el número complejo en el segmento $\overline{w_21}$ con parte real z_s .

Si $l_1 < k$, tomaremos $w_{l_1} = z_{l_1} - i\varepsilon$. Si $l_r = k$, definiremos los w_{l_j} para $j < r$ como: para j par, $w_{l_2} = z_{l_2} - i(z_{l_2}\varepsilon/2z_{l_1})$, $w_{l_4} = z_{l_4} - i(z_{l_2}z_{l_4}\varepsilon/2z_{l_1}z_{l_3})$, etc; y para j impar $w_{l_3} = z_{l_3} - i(z_{l_2}\varepsilon/2z_{l_1})$, $w_{l_5} = z_{l_5} - i(z_{l_2}z_{l_4}\varepsilon/2z_{l_1}z_{l_3})$, etc. Luego, tomamos $z_{l_r} = z_k = 1$. Esto define una poligonal simple de 0 hasta 1 dada por $\overline{w_{l_0}w_{l_1}}, \overline{w_{l_1}w_{l_2}}, \overline{w_{l_2}w_{l_3}}, \dots, \overline{w_{l_{r-1}}w_{l_r}}$ contenida en el semiplano inferior. Para los vértices restantes entre 1 y k , si $l_{j-1} < s < l_j$, entonces tomamos w_s en el segmento $\overline{w_{l_{j-1}}w_{l_j}}$ con parte real z_s . Así, tenemos que $\overline{w_1w_2} \cup \overline{w_2w_3} \cup \dots \cup \overline{w_{k-1}w_k}$ es una poligonal simple contenida en el semiplano inferior y que satisface $|w_s - z_s| \leq \varepsilon$ (ver Figura 4.1). Procediendo de manera similar, podemos construir una poligonal en el hemisferio superior $\overline{w_kw_{k+1}} \cup \overline{w_{k+1}w_{k+2}} \cup \dots \cup \overline{w_nw_1}$ con $|w_s - z_s| \leq \varepsilon$. Así, el n -ágono $W = (0, w_2, \dots, w_{k-1}, 1, w_{k+1}, \dots, w_n)$ es simple, positivamente orientado y satisface que $\|W - Z\| \leq \varepsilon\sqrt{n}$. ■

Definición 4.13. Diremos que un n -segmento es convexo si está en $\partial\mathbb{K}(n)$. Al espacio de n -segmentos convexos lo denotaremos por $\mathbb{Q}(n)$.

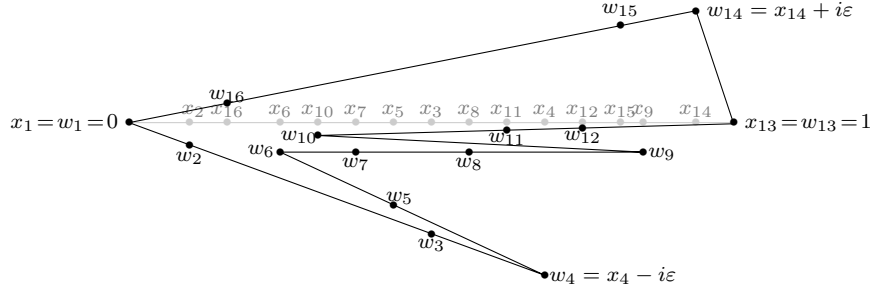


Figura 4.1: En la figura se muestra un 16-ágono de color negro que se aproxima a un 16-segmento de color gris y con vértices distintos. Para la poligonal de la parte inferior al 16-segmento, tenemos que $l_1 = 4$, $l_2 = 6$, $l_3 = 9$, $l_4 = 10$ y $l_5 = k = 13$. Para la poligonal del semiespacio superior, tenemos que $l_1 = 1$, y por lo tanto, x_{14} , x_{15} y x_{16} aparecen en orden decreciente en $[0, 1]$.

La proyección natural preserva n -segmentos y n -segmentos convexos, por lo que podemos definir las proyecciones de los espacios de segmentos y de segmentos convexos por $L(n) := \eta(\mathbb{L}(n)) \subset P(n)$ y $Q(n) := \eta(\mathbb{Q}(n)) \subset P(n)$, respectivamente. En [20] se estudia la topología de los espacios de n -segmentos y de n -segmentos convexos, además de estudiar propiedades de los vértices que caracterizan a los n -segmentos convexos. Al igual que sucede que todo triángulo es convexo, tenemos que todos los 3-segmentos son convexos, es decir, $\mathbb{Q}(3) = \mathbb{L}(3)$. Para $n \geq 4$ la contención $\mathbb{Q}(n) \subseteq \mathbb{L}(n)$ es propia (ver Figura 4.2).

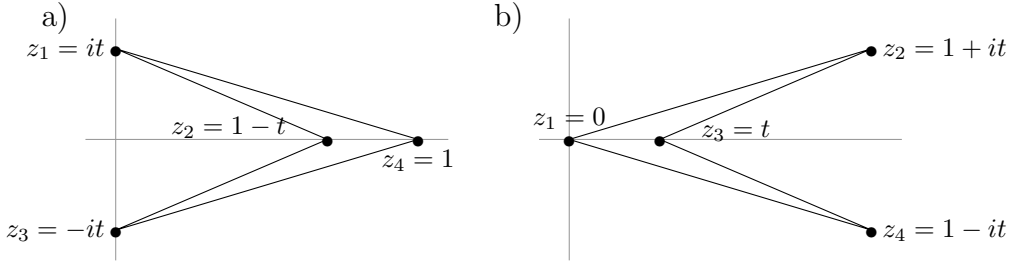


Figura 4.2: La figura muestra dos formas de aproximar al 4-segmento $(0, 1, 0, 1)$ por polígonos simples a) $(it, 1 - t, -it, 1)$ y b) $(0, 1 + it, t, 1 - it)$. Los cuadriláteros $(it, 1, -it, 1 - t)$ positivamente orientados y los cuadriláteros $(0, 1 + it, t, 1 - it)$ negativamente orientados se aproximan a $(0, 1, 0, 1)$ cuando $t \rightarrow 0$. No es posible aproximar a este 4-segmento por cuadriláteros convexos.

Notación 4.14. Denotaremos por $\mathbb{D}^n$ al disco unitario cerrado de $\mathbb{R}^n$.

En el Corolario 6.8 se demuestra que $Q(n) = \partial K^+(n) \cap \partial K^-(n)$, lo cual vuelve fundamental estudiar a $Q(n)$ para poder comprender el espacio $cl(K(n))$, la cerradura del conjunto $K(n)$ en $P(n)$. En [21] se demuestra que $cl(K(4))$ es la unión de dos discos cerrados $\mathbb{D}^4$ que se pegan por una banda de Möbius en sus fronteras (la banda se describe en el Ejemplo 6.23).

Notemos que Z y W son dos polígonos equivalentes si y sólo si $M(Z)$ y $M(W)$ son equivalentes. Esto nos permite asegurar que lo siguiente está bien definido.

Definición 4.15. *Se define $\mu : P(n) \rightarrow P(n)$ el difeomorfismo que satisface $\mu \circ \eta = \eta \circ M$.*

Se puede pensar al cociente $P(n)/\langle \mu \rangle$ como el espacio de polígonos $P(n)$, olvidándonos de sus etiquetas.

Definición 4.16. *Se define el espacio de segmentos sin etiquetas como $\mathcal{L}(n) := \eta(\mathbb{L}(n))/\langle \mu \rangle$.*

Capítulo 5

La topología y la geometría de $\mathbb{L}(n)$

Para describir al espacio $\mathbb{L}(n)$ y algunas de sus propiedades, nos apoyaremos de V_n , el conjunto de segmentos cuya primer coordenada es el 0. Para ello, usaremos la notación

$$\mathbb{M}(n) := \mathbb{L}(n) \cap V_n.$$

Como para todo segmento X en $\mathbb{M}(n)$ se tiene que X vive en una recta por el 0 en $\mathbb{C}$, sabemos que existe $a \in \mathbb{C}^*$ tal que aX está totalmente contenido en el eje real de $\mathbb{C}$. Así, todo $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{L}(n)$ es equivalente a algún segmento dentro de $V_n \cap \mathbb{R}^n := \{(0, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{V}_n : x_j \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto, tenemos que $\eta^{-1}(\eta(\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\})) = \mathbb{L}(n)$.

5.1. La topología de $\mathbb{L}(n)$

Definición 5.1. Dado $A \subset \mathbb{R}^m$ tal que $-A = A$, denotaremos por $\mathcal{C}_A$ al toro de mapeo de la función $-id_A$

$$(A \times [0, 1]) / \{(X, 0) \sim (-X, 1)\}.$$

Lema 5.2. El conjunto de n -segmentos $\mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}$, donde $\mathbb{S}^{2n-3}$ es la esfera unitaria en V_n , es homeomorfo a $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^{n-2}}$.

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{S}^{n-2} \times [0, \pi]) / \{(X, 0) \sim (-X, \pi)\} &\rightarrow \mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3} \\ [(X, \theta)] &\mapsto e^{i\theta} \tilde{X}, \end{aligned}$$

donde, para $X = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-2}$, $\tilde{X}$ denota a $(0, x_2, \dots, x_n)$. Esta función está bien definida pues

$$\psi([(X, 0)]) = e^{i0} \tilde{X} = e^{i\pi} (\widetilde{-X}) = \psi([(-X, \pi)])$$

para todo $X \in \mathbb{S}^{n-2}$. Además, ψ es biyectiva ya que para todo $\tilde{Y} \in \mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}$ existe un único $\theta \in [0, \pi)$ tal que $e^{-i\theta} \tilde{Y}$ está en $\mathbb{S}^{n-2}$. Por otro lado, ψ es diferenciable pues lo es en cada coordenada.

Ahora, consideremos la rama de la función argumento en $\mathbb{C}$ con $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$. Sea $\vartheta : \mathbb{C}^* \rightarrow [0, \pi]$ definida como

$$\vartheta(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \text{ es real y positivo,} \\ \pi & \text{si } z \text{ es real y negativo,} \\ \arg(z) & \text{si } \operatorname{Im}(z) > 0, \\ \arg(-z) & \text{si } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \hat{\psi} : \mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3} &\rightarrow (\mathbb{S}^{n-2} \times [0, \pi]) / \{(X, 0) \sim (-X, \pi)\} \\ Z &\mapsto [(e^{-i\vartheta(z_k)}(z_2, \dots, z_n), \vartheta(z_k))], \end{aligned}$$

donde z_k es alguna coordenada no nula de Z . Podemos ver que $\hat{\psi}$ está bien definida ya que si $\arg(z_k) \notin \{0, \pi\}$ y $\arg(z_j) = \arg(z_k) \pm \pi$, entonces $\vartheta(z_k) = \vartheta(z_j)$, y en el caso en que $\arg(z_k) \in \{0, \pi\}$ y $\arg(z_j) = \arg(z_k) \pm \pi$, tenemos que $[(e^{-i\vartheta(z_k)}(z_2, \dots, z_n), \vartheta(z_k))] = [(e^{-i\vartheta(z_j)}(z_2, \dots, z_n), \vartheta(z_j))]$. Esta función es biyectiva, pues un n -segmento en $\mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}$ está determinado de manera única por el ángulo que forma $\mathfrak{c}(Z)$ con el eje real y por la posición de las coordenadas $z_2, \dots, z_n$ respecto al origen en la recta por el origen que forma ángulo $\vartheta(z_k)$ respecto al eje real. $\hat{\psi}$ también es diferenciable puesto que lo es coordenada a coordenada. ■

Corolario 5.3. $\mathbb{M}(n) \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad de dimensión n difeomorfa a $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^{n-2}} \times \mathbb{R}$.

Demostración. Basta con demostrar que $\mathbb{M}(n)$ es difeomorfo a $(\mathbb{L}(n) \cap V_n) \times \mathbb{R}$. Para ello, tomaremos la función

$$\begin{aligned} \Upsilon : (\mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{M}(n) \\ (Z, r) &\mapsto e^r Z. \end{aligned}$$

Esta función es una biyección pues cada elemento $Z \in \mathbb{M}(n)$ está determinado de manera única por su norma y el vector $\frac{Z}{\|Z\|} \in \mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}$, y es diferenciable pues es diferenciable en cada una de sus coordenadas.

Por otro lado, la función

$$\begin{aligned} \hat{\Upsilon} : \mathbb{M}(n) &\rightarrow (\mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}) \times \mathbb{R} \\ Z &\mapsto \left(\frac{Z}{\|Z\|}, \ln\|Z\| \right). \end{aligned}$$

Esta función es inversa de Υ y es diferenciable ya que lo es en cada una de sus coordenadas.

Como la dimensión de $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^{n-2}}$ es $n - 1$ se sigue que la dimensión de $\mathbb{M}(n)$ es n . ■

Corolario 5.4. $\mathbb{L}(n) \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad diferenciable difeomorfa a $\mathbb{M}(n) \times \mathbb{C}$.

Demostración. La función

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{M}(n) \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{L}(n) \\ ((0, z_2, \dots, z_n), b) &\mapsto (b, z_2 + b, \dots, z_n + b)\end{aligned}$$

es biyectiva y diferenciable (pues es diferenciable en cada coordenada). La inversa de esta función está dada por el mapeo

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (0, z_2 - z_1, \dots, z_n - z_1),$$

la cual también es diferenciable. ■

5.2. El espacio tangente de $\mathbb{L}(n)$ y las rectas en $\mathbb{L}(n)$

Para poder hablar de la geometría de $\mathbb{L}(n)$ usaremos el producto punto usual de $\mathbb{R}^{2n}$, ajustando la notación para $\mathbb{C}^n$, como se muestra a continuación:

Definición 5.5. Sean $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n), W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Se definirá el producto interno como

$$\langle\langle Z, W \rangle\rangle := \sum_{j=1}^n z_j \cdot w_j,$$

donde $z \cdot w$ es el producto punto interno usual del plano, es decir, para $z = x_z + iy_z$ y $w = x_w + iy_w$ tenemos $z \cdot w = x_z x_w + y_z y_w$.

Definición 5.6. Sea $\mathfrak{M}$ una variedad diferenciable de dimensión k en $\mathbb{R}^m$, sea $x \in \mathfrak{M}$, y sea $\psi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{M}$ diferenciable donde U una vecindad abierta del 0, tal que $\psi(0) = x$. Dada $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable, diremos que el vector $(\psi \circ \gamma)'(0)$ en $\mathbb{R}^m$ es un vector tangente de $\mathfrak{M}$ en x . El espacio tangente de $\mathfrak{M}$ en x se denota por $T_x \mathfrak{M}$ y está definido como el conjunto de todos los vectores tangentes de x .

En las siguientes subsecciones vamos a determinar las curvas $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{M}(n)$ o $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{L}(n)$ que nos ayudarán a describir el espacio tangente en cada uno de los puntos de dichas variedades. Es un hecho conocido que el espacio tangente de una variedad en un punto es un subespacio vectorial de la misma dimensión que la variedad. En ocasiones, se estará haciendo un abuso de notación al referirnos como espacio tangente al subespacio afín $Z + T_Z \mathbb{L}(n)$ (o $Z + T_Z \mathbb{M}(n)$).

Para esta sección nos será útil denotar los siguientes conjuntos, ya que nos ayudarán a construir parte del espacio tangente, pues están conformados por rectas contenidas en $\mathbb{L}(n)$.

Definición 5.7. Sea $Z = z(0, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{M}(n)$, donde $z \in \mathbb{C}^*$ y $c_j \in \mathbb{R}$ y sea $\vec{b} \in \mathcal{D}_n$. Definimos los conjuntos:

a. $\mathbb{C}_{Z+\vec{b}}^* := \{ \lambda Z + \vec{b} \in \mathbb{L}(n) : \lambda \in \mathbb{C}^* \}.$

$$b. \mathbb{R}_{Z+\vec{b}}^{n-1} := \{z(0, c_2 + x_2, \dots, c_n + x_n) + \vec{b} \in \mathbb{L}(n) : (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{-(c_2, \dots, c_n)\}\}.$$

$$c. \mathcal{D}_{Z+\vec{b}} := \{Z + \vec{b} + \vec{\omega} \in \mathbb{L}(n) : \vec{\omega} \in \mathcal{D}_n\}.$$

Es sencillo notar que $\mathbb{C}_{Z+\vec{b}}^*$ es una copia isométrica de $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{R}_{Z+\vec{b}}^{n-1}$ es un subespacio afín real de dimensión $n-1$ de $\mathbb{C}^n$, y $\mathcal{D}_{Z+\vec{b}}$ es una traslación de $\mathcal{D}_n$ por el vector $Z + \vec{b}$. En particular, $\mathbb{C}_Z^* := \mathbb{C}_{Z+\vec{0}}^*$ y $\mathbb{R}_Z^{n-1} := \mathbb{R}_{Z+\vec{0}}^{n-1}$ están contenidos en $\mathbb{M}(n)$.

Observación 5.8. Para todo $Z \in \mathbb{M}(n)$ tenemos que

- Para $b \in \mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}_{Z+\vec{b}}^* \cap \mathbb{M}(n) = \mathbb{R}_{Z+\vec{b}}^{n-1} \cap \mathbb{M}(n) = \emptyset$.
- Para $b \in \mathbb{C}$, $\mathcal{D}_{Z+\vec{b}} \cap \mathbb{M}(n) = \{Z\}$, $\mathcal{D}_{Z+\vec{b}} \cap \mathbb{C}_{Z+\vec{b}}^* = \{Z + \vec{b}\}$, $\mathcal{D}_{Z+\vec{b}} \cap \mathbb{R}_{Z+\vec{b}}^{n-1} = \{Z + \vec{b}\}$, y $\mathbb{C}_{Z+\vec{b}}^* \cap \mathbb{R}_{Z+\vec{b}}^{n-1} = \{rZ + \vec{b} : r \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cong \mathbb{R}^*$.

5.2.1. El espacio tangente $T_Z\mathbb{M}(n)$

Consideremos las cartas de coordenadas

$$\mathcal{U}_k := \{z(0, r_2, \dots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \dots, r_n) : z = x + iy \in \mathbb{C}^*, r_m \in \mathbb{R}\}$$

en $\mathbb{M}(n)$. Trabajaremos con las cartas $\varphi_k : \mathcal{U}_k \rightarrow \mathbb{R}^n$ que hace la asignación

$$z(0, r_2, \dots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \dots, r_n) \mapsto (r_2, \dots, r_{k-1}, x, y, r_{k+1}, \dots, r_n).$$

Determinaremos el espacio tangente en los puntos de $\mathcal{U}_2$, para las otras cartas los cálculos son análogos. Dado $Z = \zeta(0, 1, c_3, \dots, c_n) \in \mathcal{U}_2$, consideramos las curvas

$$\alpha_j(s) := \begin{cases} (1 + is)Z & \text{para } j = 1, \\ \zeta(0, 1, c_3, \dots, c_{j-1}, c_j + s, c_{j+1}, \dots, c_n) & \text{para } 2 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (5.1)$$

Se puede ver que todas estas curvas son diferenciables y satisfacen $\alpha_j(0) = Z$. Además, sus derivadas

$$\{\alpha'_1(0), \alpha'_2(0), \dots, \alpha'_n(0)\} = \{iZ, \zeta e_2, \dots, \zeta e_n\} \quad (5.2)$$

forman una base ortogonal de $T_Z\mathbb{M}(n)$, donde e_j es el j -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$, es decir, el vector en $\mathbb{C}^n$ con su j -ésima coordenada igual a 1 y las otras $n-1$ coordenadas iguales a 0. Para ver que es una base ortogonal, basta ver que

$$\langle\langle \alpha'_i(0), \alpha'_j(0) \rangle\rangle = \begin{cases} \langle\langle iZ, \zeta e_j \rangle\rangle = \langle\langle i\zeta c_j e_j, \zeta e_j \rangle\rangle = c_j[(i\zeta) \cdot \zeta] = 0 & \text{si } i = 1 \text{ y } j > 1, \\ \langle\langle \zeta e_i, \zeta e_j \rangle\rangle = |\zeta|^2 \langle\langle e_i, e_j \rangle\rangle = 0 & \text{si } i, j > 1 \text{ distintos.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Proposición 5.9. Los conjuntos $\mathbb{C}_Z^* \cup \{\vec{0}\}$ y $\mathbb{R}_Z^{n-1} \cup \{\vec{0}\}$ son subespacios de $T_Z\mathbb{M}(n)$, y estos tienen como bases ortogonales a los conjuntos

$$\{\alpha'_1(0), Z = \alpha'_2(0) + c_3\alpha'_3(0) + \dots + c_n\alpha'_n(0)\} \quad \text{y} \quad \{\alpha'_2(0), \alpha'_3(0), \dots, \alpha'_n(0)\},$$

respectivamente.

Demostración. De la ecuación (5.3) se sigue que $\{\alpha'_2(0), \alpha'_3(0), \dots, \alpha'_n(0)\}$ es un conjunto ortogonal, al igual que se sigue que $\alpha'_1(0)$ y $\alpha'_2(0) + c_3\alpha'_3(0) + \dots + c_n\alpha'_n(0)$ son ortogonales. De la Definición 5.7 se sigue que $\mathbb{C}_Z^* \cup \{\vec{0}\}$ y $\mathbb{R}_Z^{n-1} \cup \{\vec{0}\}$ contienen a dichos conjuntos, respectivamente, y por lo tanto son bases ortogonales de ellos, y por lo tanto, están contenidos en $T_Z\mathbb{M}(n)$. ■

5.2.2. El espacio tangente $T_Z\mathbb{L}(n)$

Para el caso de $\mathbb{L}(n)$, consideraremos las cartas de coordenadas

$$\hat{\mathcal{U}}_k := \{z(0, r_2, \dots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \dots, r_n) + \vec{b} : z = x + iy \in \mathbb{C}^*, r_m \in \mathbb{R}, b = u + iv \in \mathbb{C}\}.$$

En este caso, las cartas serán $\hat{\varphi}_k : \hat{\mathcal{U}}_k \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ con la asignación

$$z(0, r_2, \dots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \dots, r_n) + \vec{b} \mapsto (r_2, \dots, r_{k-1}, x, y, r_{k+1}, \dots, r_n, u, v).$$

Nuevamente, determinaremos el espacio tangente únicamente en los puntos de $\hat{\mathcal{U}}_2$, ya que en las otras cartas el procedimiento es análogo. Sea $\hat{Z} = Z + \vec{b} \in \hat{\mathcal{U}}_2$, con $Z = \zeta(0, 1, c_3, \dots, c_n) \in \mathcal{U}_2$ y $\vec{b} \in \mathcal{D}_n$. Consideraremos las $n+2$ curvas

$$\hat{\alpha}_j(s) := \begin{cases} \alpha_j(s) + \vec{b} & \text{para } 1 \leq j \leq n, \\ \hat{Z} + s\vec{1} & \text{para } j = n+1, \\ \hat{Z} + s\vec{i} & \text{para } j = n+2. \end{cases}$$

donde α_j son como en la ecuación (5.1) para $1 \leq j \leq n$. Para toda $1 \leq j \leq n+2$, estas curvas satisfacen $\hat{\alpha}_j(0) = \hat{Z}$. En el caso que $1 \leq j \leq n$, se tiene que $\hat{\alpha}'_j(0) = \alpha'_j(0)$, y para $j \in \{n+1, n+2\}$ tenemos que $\hat{\alpha}'_{n+1}(0) = \vec{1}$ y $\hat{\alpha}'_{n+2}(0) = \vec{i}$. El conjunto

$$\{\hat{\alpha}'_1(0), \hat{\alpha}'_2(0), \dots, \hat{\alpha}'_n(0), \hat{\alpha}'_{n+1}(0), \hat{\alpha}'_{n+2}(0)\} = \{iZ, \zeta e_2, \dots, \zeta e_n, \vec{1}, \vec{i}\} \quad (5.4)$$

forma una base no ortogonal de $T_Z\mathbb{L}(n)$. Para ver que forman una base basta ver que no hay una combinación lineal real no trivial de ellos que sea igual a $\vec{0}$, pues si lo hubiera, existirían $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n+2} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n+2} \chi_j \hat{\alpha}'_j(0) = \vec{0},$$

pero en este caso, tendríamos que

$$0 = \left[\sum_{j=1}^{n+2} \chi_j \hat{\alpha}'_j(0) \right] \cdot e_1 = \sum_{j=1}^{n+2} (\chi_j \hat{\alpha}'_j(0)) \cdot e_1 = \chi_{n+1} \hat{\alpha}'_{n+1}(0) + \chi_{n+2} \hat{\alpha}'_{n+2}(0) = \chi_{n+1} + i\chi_{n+2},$$

por lo que $\chi_{n+1} = \chi_{n+2} = 0$; luego, como los vectores $\{\hat{\alpha}'_1(0), \dots, \hat{\alpha}'_n(0)\}$ son ortogonales (ver ecuación (5.3)), se sigue que no existe dicha combinación lineal. Se puede notar que la base no es ortogonal ya que $\langle \hat{\alpha}'_2(0), \hat{\alpha}'_{n+1}(0) \rangle = \zeta \cdot 1$ y $\langle \hat{\alpha}'_2(0), \hat{\alpha}'_{n+2}(0) \rangle = \zeta \cdot i$, y no puede suceder que ambos sean iguales a 0.

Proposición 5.10. *Los conjuntos $\mathbb{C}_{Z+\vec{b}}^* \cup \{\vec{b}\}$, $\mathbb{R}_{Z+\vec{b}}^{n-1} \cup \{\vec{b}\}$ y $\mathcal{D}_{Z+\vec{b}}$ son subespacios afines contenidos en el espacio tangente $Z + \vec{b} + T_{Z+\vec{b}}\mathbb{L}(n)$. Sus trasladados al origen, tienen como bases ortogonales a los conjuntos*

$$\{\hat{\alpha}'_1(0), \hat{Z} = \hat{\alpha}'_2(0) + c_3\hat{\alpha}'_3(0) + \cdots + c_n\hat{\alpha}'_n(0)\},$$

$$\{\hat{\alpha}'_2(0), \hat{\alpha}'_3(0), \dots, \hat{\alpha}'_n(0)\} \quad \text{y} \quad \{\hat{\alpha}'_{n+1}(0), \hat{\alpha}'_{n+2}(0)\},$$

respectivamente.

Demostración. Notemos primero que los trasladados al origen de los conjuntos $\mathbb{C}_{Z+\vec{b}}^* \cup \{\vec{b}\}$, $\mathbb{R}_{Z+\vec{b}}^{n-1} \cup \{\vec{b}\}$ y $\mathcal{D}_{Z+\vec{b}}$ coinciden con $\mathbb{C}_Z^* \cup \{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}_Z^{n-1} \cup \{\vec{0}\}$ y $\mathcal{D}_n$. Por la Proposición 5.9, se sigue que los conjuntos $\{\hat{\alpha}'_1(0), \hat{Z} = \hat{\alpha}'_2(0) + c_3\hat{\alpha}'_3(0) + \cdots + c_n\hat{\alpha}'_n(0)\}$ y $\{\hat{\alpha}'_2(0), \hat{\alpha}'_3(0), \dots, \hat{\alpha}'_n(0)\}$ son bases de $\mathbb{C}_Z^* \cup \{\vec{0}\}$ y $\mathbb{R}_Z^{n-1} \cup \{\vec{0}\}$, y por su definición, es claro que $\{\hat{\alpha}'_{n+1}(0), \hat{\alpha}'_{n+2}(0)\}$ es base ortogonal de $\mathcal{D}_n$. Se concluye la contención ya que $Z + \vec{b} \in Z + \vec{b} + T_{Z+\vec{b}}\mathbb{L}(n)$ y $Z + \vec{b}$ está contenido en cada uno de los espacios afines $\mathbb{C}_{Z+\vec{b}}^* \cup \{\vec{b}\}$, $\mathbb{R}_{Z+\vec{b}}^{n-1} \cup \{\vec{b}\}$ y $\mathcal{D}_{Z+\vec{b}}$. ■

5.2.3. Líneas rectas en $\mathbb{M}(n)$

En el Teorema 5.12 describiremos conjuntos dentro de $\mathbb{M}(n)$ que contienen muchas rectas. La siguiente proposición será de ayuda para esto.

Proposición 5.11. *Sean $Z, W \in \mathbb{M}(n)$. El segmento de recta $\sigma(t) = (1-t)Z + tW$, para $t \in [0, 1]$, está contenido en $\mathbb{M}(n)$ si y sólo si $W \in (\mathbb{R}_Z^{n-1} \cup \mathbb{C}_Z^*) \setminus \{rZ : r \in (-\infty, 0]\}$.*

Demostración. Se puede ver que para cualquier $W \in (\mathbb{R}_Z^{n-1} \cup \mathbb{C}_Z^*) \setminus \{rZ : r \in (-\infty, 0]\}$ tenemos que σ está contenida en $\mathbb{M}(n)$. Además, para cualquier $W \in \{rZ : r \in (-\infty, 0]\}$ tenemos que $\vec{0} \in \sigma$, lo cual no está contenido en $\mathbb{M}(n)$. Sea $Z = (0, z_2, \dots, z_n)$ y tomemos $W = (0, w_2, \dots, w_n) \notin \mathbb{R}_Z^{n-1} \cup \mathbb{C}_Z^*$. Tenemos dos casos:

I—No existe $2 \leq j \leq n$ tal que $z_j \neq 0$ y $w_j \neq 0$ suceden de manera simultánea. Como $W \notin \mathbb{R}_Z^{n-1}$, entonces para todo $0 < t < 1$, el n -ágono $\sigma(t) = (1-t)Z + tW$ tiene dos vértices no nulos, los cuales no son colineales con el $0 \in \mathbb{C}$, por lo tanto, este no es un n -segmento.

II—Existe $2 \leq j \leq n$ tal que $z_j \neq 0$ y $w_j \neq 0$ suceden de manera simultánea. Como $W \notin \mathbb{C}_Z^*$, existe $m \neq j$, tal que $z_m = rz_j$ y $w_m = sw_j$ para distintos $r, s \in \mathbb{R}^*$. Por otro lado, como $W \notin \mathbb{R}_Z^{n-1}$, tenemos que $\frac{z_j}{w_j} \notin \mathbb{R}$. Entonces, para $0 < t < 1$, los vértices $(1-t)z_j + tw_j$ y $(1-t)z_m + tw_m = (1-t)rz_j + tsw_j$ del polígono no son colineales con el 0. Concluimos que $\sigma(t) = (1-t)Z + tW$ no es un n -segmento. ■

Teorema 5.12. *Para todo $Z \in \mathbb{M}(n)$ hay $n = \dim(\mathbb{M}(n))$ líneas ortogonales contenidas en $\mathbb{M}(n) \cap T_Z\mathbb{M}(n)$. Además, hay espacios isométricos a $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\vec{0}\}$ y a $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ contenidos en $\mathbb{M}(n) \cap T_Z\mathbb{M}(n)$.*

Demostración. Sea $Z = \zeta(0, c_2, c_3, \dots, c_n) \in \mathbb{M}(n)$. Los espacios generados por

$$\{\alpha'_2(0), \alpha'_3(0), \dots, \alpha'_n(0)\} \quad \text{y} \quad \{\alpha'_1(0), Z = c_2\alpha'_2(0) + c_3\alpha'_3(0) + \cdots + c_n\alpha'_n(0)\}$$

están contenidos en $T_Z\mathbb{M}(n)$, donde las derivadas α'_j son las funciones de la ecuación (5.2). Dichos espacios corresponden a $\mathbb{R}_Z^{n-1} \cup \{\vec{0}\}$ y a $\mathbb{C}_Z^* \cup \{\vec{0}\}$, respectivamente. Se sigue que $\mathbb{R}_Z^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\vec{0}\}$ y $\mathbb{C}_Z^* \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ están contenidos en $\mathbb{M}(n) \cap T_Z\mathbb{M}(n)$. Tomando $n-1$ rectas ortogonales en $\mathbb{R}_Z^{n-1}$ por Z que no cruzan por $\vec{0}$, y la recta $(1+it)Z$ contenida en $\mathbb{C}_Z^*$ obtenemos las n rectas ortogonales en $\mathbb{M}(n) \cap T_Z\mathbb{M}(n)$. ■

5.2.4. Líneas rectas en $\mathbb{L}(n)$

Al igual que con $\mathbb{M}(n)$, describiremos conjuntos dentro de $\mathbb{L}(n)$ que contienen muchas rectas (ver Teorema 5.14). Para esto, nos ayudaremos de la siguiente proposición.

Proposición 5.13. *Sea $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n), W = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{L}(n)$. El segmento de recta $\sigma(t) = (1-t)Z + tW$, para $t \in [0, 1]$, está contenido en $\mathbb{L}(n)$ si y sólo si $W - \vec{w}_1 \in (\mathbb{R}_{Z-\vec{z}_1}^{n-1} \cup \mathbb{C}_{Z-\vec{z}_1}^*) \setminus \{r(Z - \vec{z}_1) : r \in \mathbb{R}, r \leq 0\}$.*

Demostración. Tomemos $\sigma(t) = (1-t)Z + tW$ y $\hat{\sigma}(t) = (1-t)(Z - \vec{z}_1) + t(W - \vec{w}_1)$. Se tiene que el segmento de recta $\sigma(t) - \hat{\sigma}(t) = (1-t)\vec{z}_1 + t\vec{w}_1$, para $t \in [0, 1]$, está contenido en la diagonal $\mathcal{D}_n \subset \mathbb{C}^n$. Entonces, $\sigma(t) \in \mathcal{D}_n$ si y sólo si $\hat{\sigma}(t) \in \mathcal{D}_n$, y por lo tanto, $\sigma(t) \in \mathbb{L}(n)$ si y sólo si $\hat{\sigma}(t) \in \mathbb{M}(n)$. La prueba se concluye usando la Proposición 5.11. ■

Teorema 5.14. *Para todo $\hat{Z} \in \mathbb{L}(n)$ hay $n+2 = \dim(\mathbb{L}(n))$ líneas rectas linealmente independientes contenidas en la intersección $\mathbb{L}(n) \cap T_{\hat{Z}}\mathbb{L}(n)$. Además, hay espacios isométricos a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ contenidos en $\mathbb{L}(n) \cap T_{\hat{Z}}\mathbb{L}(n)$.*

Demostración. Sea $\hat{Z} = Z + \vec{b} \in \mathbb{L}(n)$, con $Z = \zeta(0, c_2, c_3, \dots, c_n) \in \mathbb{M}(n)$ y $\vec{b} \in \mathcal{D}_n$. Los espacios generados por

$$\{\alpha'_2(0), \alpha'_3(0), \dots, \alpha'_{n+1}(0), \alpha'_{n+2}(0)\} \quad \text{y} \quad \{\alpha'_1(0), Z = \alpha'_2(0) + c_3\alpha'_3(0) + \dots + c_n\alpha'_n(0)\}$$

están contenidos en $T_{\hat{Z}}\mathbb{L}(n)$, donde las funciones α'_j 's son las funciones en la ecuación (5.4). Dichos espacios corresponden a $R := \langle \mathbb{R}_{\hat{Z}}^{n-1} \cup \{\vec{0}\}, \mathcal{D}_{\hat{Z}} \cup \{\vec{0}\} \rangle$ y a $\mathbb{C}_{\hat{Z}}^* \cup \{\vec{0}\}$, respectivamente. Nótese que $R \setminus \mathbb{L}(n) = \mathcal{D}_{\hat{Z}} \cong \mathbb{R}^2$. Entonces $R \setminus \mathcal{D}_{\hat{Z}} \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}_{\hat{Z}}^* \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ están contenidos en $\mathbb{L}(n) \cap T_{\hat{Z}}\mathbb{L}(n)$. Podemos tomar $n+1$ rectas ortogonales en $R \setminus \mathcal{D}_{\hat{Z}}$ que pasen por $\hat{Z}$ y junto con la recta $(1+ti)Z + \vec{b} \subset \mathbb{C}_{\hat{Z}}^*$, obtenemos $n+2$ rectas por $\hat{Z}$ contenidas en $\mathbb{L}(n)$ que afínmente generan una copia de $\mathbb{R}^{n+2}$. ■

5.3. Geodésicas en $\mathbb{M}(n)$ y en $\mathbb{L}(n)$

Recordemos que las geodésicas γ de una variedad están caracterizadas por tener velocidad constante y por ser su segunda derivada ortogonal al plano tangente. En base a esto, calcularemos las ecuaciones que caracterizan las geodésicas en $\mathbb{M}(n)$ y en $\mathbb{L}(n)$ y se darán algunos resultados adicionales que sirven para construir geodésicas en estas variedades a partir de alguna geodésica dada previamente.

Las geodésicas de $\mathbb{M}(n)$ contenidas en $\mathbb{C}_Z^*$ o en $\mathbb{R}_Z^{n-1}$ son rectas. Como $-Z \in \mathbb{C}_Z^*$ para todo $Z \in \mathbb{M}(n)$, pero el $\vec{0} \in \mathcal{D}_n$ está contenido en el segmento de recta entre Z y $-Z$, concluimos que $\mathbb{M}(n)$ no es geodésicamente convexo. De manera similar se puede determinar que $\mathbb{L}(n)$ no es geodésicamente convexo. Por lo mismo, ni $\mathbb{M}(n)$ ni $\mathbb{L}(n)$ son geodésicamente completos.

5.3.1. Geodésicas en $\mathbb{M}(n)$

Supongamos que

$$\begin{aligned}\gamma &: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}_2 \\ t &\mapsto z(t)(0, 1, r_3(t), \dots, r_n(t))\end{aligned}$$

es una geodésica de $\mathbb{M}(n)$ con condiciones iniciales $\gamma(0) = Z$ y $\gamma'(0) \in T_Z \mathbb{M}(n)$. Necesitamos que $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ sea constante y que se satisfagan las condiciones $\langle \gamma''(t), v_j(t) \rangle = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$, donde $v_j(t) := \alpha'_j(0)(t)$ es la derivada del vector α_j de $T_{\gamma(t)} \mathbb{M}(n)$ definidas en la ecuación (5.1). Estas ecuaciones son:

(I). $\langle \gamma''(t), v_1(t) \rangle = \langle \gamma''(t), i\gamma(t) \rangle = 0$: Tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= z''(t) \cdot iz(t) + \sum_{j=3}^n ([r_j''(t)z(t) + 2r_j'(t)z'(t) + r_j(t)z''(t)] \cdot ir_j(t)z(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\left(1 + \sum_{j=3}^n r_j(t)^2 \right) [z'(t) \cdot iz(t)] \right].\end{aligned}$$

Equivalentemente podemos decir que existe una constante $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(1 + \sum_{j=3}^n (r_j(t))^2 \right) [z'(t) \cdot iz(t)] = k_1.$$

(II). $\langle \gamma''(t), v_2(t) \rangle = \langle \gamma''(t), z(t)e_2 \rangle = 0$: Esto es equivalente a

$$z''(t) \cdot z(t) = 0. \quad (5.5)$$

Entonces la curva $z: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ es ortogonal a su aceleración.

(III). $\langle \gamma''(t), v_j(t) \rangle = \langle \gamma''(t), z(t)e_j \rangle = 0$ para $3 \leq j \leq n$: Tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= r_j''(t)\|z(t)\|^2 + 2r_j'(t)(z'(t) \cdot z(t)) + r_j(t)(z''(t) \cdot z(t)) \\ &= r_j''(t)\|z(t)\|^2 + 2r_j'(t)(z'(t) \cdot z(t)),\end{aligned}$$

donde la última ecuación se sigue de aplicar la ecuación (5.5). Esto equivale a

$$r_j'(t) \|z(t)\|^2 = k_j, \quad (5.6)$$

donde $k_j \in \mathbb{R}$ es constante. De estas ecuaciones se sigue que las funciones $r_j: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfacen:

- a) Si $r'_j(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $r'_j \equiv 0$ pues $z(t)$ no puede anularse, y por lo tanto, $r_j(t)$ es una función constante.
- b) Si $r'_j(t_0) \neq 0$ para algún t_0 , entonces $r'_j(t)$ es siempre positiva o siempre negativa, y por lo tanto $r_j(t)$ es una función monótona.
- c) Si $r'_j(t) \neq 0$, entonces para toda $m \neq j$ tal que $r'_m(t) \neq 0$, existe una constante $K_m \in \mathbb{R}$, tal que $r_m(t) = \frac{k_m}{k_j} r_j(t) + K_m$.

(IV). $\langle\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle\rangle = \|\gamma'(t)\|^2 = k_0$ es constante: Tenemos que

$$k_0 = \sum_{j=3}^n (r'_j(t))^2 \|z(t)\|^2 + \sum_{j=3}^n 2r'_j(t)r_j(t)z(t) \cdot z'(t) + \left(1 + \sum_{j=3}^n r_j^2(t)\right) \|z'(t)\|^2.$$

Usando la ecuación (5.6) y el procedimiento que se usó para obtenerlo, tenemos que

$$\frac{k_0 - \sum_{j=3}^n k_j \left(\frac{r_j(t)}{r'_j(t)}\right)' r'_j(t)}{1 + \sum_{j=3}^n r_j(t)^2} = \|z'(t)\|^2.$$

Se puede verificar que las rectas de $\mathbb{M}(n)$ satisfacen las condiciones (I), (II), (III) y (IV). Además de las rectas, no fue posible encontrar otras geodésicas de $\mathbb{M}(n)$, ni siquiera para el caso $n = 3$. El siguiente resultado muestra cómo encontrar geodésicas no triviales en $\mathbb{M}(n)$ a partir de geodésicas no triviales en $\mathbb{M}(3)$:

Teorema 5.15. *Sea $\beta(t) = z(t)(0, 1, r(t)) \subset \mathcal{U}_2$ una geodésica de $\mathbb{M}(3)$ que no es una línea recta, y sea*

$$\gamma(t) = z(t)(0, 1, a_3 s_3(t), a_4 s_4(t), \dots, a_n s_n(t)) \subset \mathbb{M}(n),$$

una curva, donde $a_j \in \mathbb{R}$ es constante y $s_j(t) \equiv 1$ o $s_j(t) \equiv r(t)$. Entonces $\gamma(t)$ es una geodésica en $\mathbb{M}(n)$ si y sólo si

$$1 + \sum_{j \in A_1} a_j^2 = \sum_{j \in A_2} a_j^2,$$

donde $A_1 = \{3 \leq j \leq n : s_j(t) \equiv 1\}$ y $A_2 = \{3 \leq j \leq n : s_j(t) \equiv r(t)\}$.

Demostración. La geodésica $\beta(t) = (0, z(t), r(t)z(t)) \subset \mathcal{U}_2$ satisface las ecuaciones

$$0 = z''(t) \cdot z(t), \quad k = r'(t) \|z(t)\|^2, \quad k_1 = [z'(t) \cdot iz(t)] (1 + r(t)^2),$$

$$k_0 = (1 + r^2(t)) \|z'(t)\|^2 + (r'(t))^2 \|z(t)\|^2 + 2r'(t)r(t) (z(t) \cdot z'(t)),$$

donde $k, k_1, k_0 \in \mathbb{R}$ y $k_0 > 0$.

Nótese que

$$\frac{d}{dt} [z'(t) \cdot iz(t)] = z''(t) \cdot iz(t).$$

Como $z(t)$ no es una recta, sabemos que $z''(t)$ no es idénticamente 0. De aquí, y como $z''(t) \cdot z(t) = 0$, concluimos que $z''(t) \cdot iz(t)$ no es idénticamente 0 y por lo tanto, $z'(t) \cdot iz(t)$ no es constante, es decir $k_1 \neq 0$.

$\Rightarrow$] Sea $A := 1 + \sum_{j \in A_1} a_j^2$ y $A' := \sum_{j \in A_2} a_j^2$. De la Condición **(I)** para $\gamma(t)$ y las condiciones para $\beta(t)$ tenemos que

$$\frac{k_1}{1 + (r(t))^2} = z'(t) \cdot iz(t) = \frac{\kappa_1}{A + A'r(t)^2}, \quad (5.7)$$

para algún $\kappa_1 \in \mathbb{R}$. $r(t)$ no es constante, ya que en este caso tendríamos que $(z'(t) \cdot iz(t))' = z''(t) \cdot iz(t) = 0 = z''(t) \cdot z(t)$, lo que implicaría que $\beta(t)$ sea una línea recta. Por lo tanto, se sigue que $A = A'$.

$\Leftarrow$] Es suficiente demostrar que la curva $\gamma(t)$ satisface las condiciones **(I)**, **(II)**, **(III)** y **(IV)**.

Condición (I): Se sigue de la ecuación (5.7) y de que $A = 1 + \sum_{j \in A_1} a_j^2 = \sum_{j \in A_2} a_j^2 = A'$, donde $\kappa_1 = Ak_1$.

Condición (II): La ecuación que nos da esta condición es la misma para $\beta(t)$ y para $\gamma(t)$.

Condición (III): Consideremos primero el caso en que $s_j(t) \equiv 1$. Como $r'_j(t) \equiv 0$, concluimos que $r'_j(t) \|z(t)\|^2$ es la función constante 0.

Ahora, consideremos el caso cuando $s_j(t) \equiv r(t)$. En este caso la condición también se satisface ya que $a_j s'_j(t) \|z(t)\|^2 = a_j k$ es constante.

Condición (IV): Nótese que

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \|z'(t)\|^2 + \sum_{j=3}^n \|(a_j s_j(t) z(t))'\|^2 \\ &= \|z'(t)\|^2 + \sum_{j \in A_1} \|(a_j z(t))'\|^2 + \sum_{j \in A_2} \|(a_j r(t) z(t))'\|^2 \\ &= \left(1 + \sum_{j \in A_1} a_j^2\right) \|z'(t)\|^2 + \sum_{j \in A_2} a_j^2 \|(r(t) z(t))'\|^2 \\ &= A (\|z'(t)\|^2 + r^2(t) \|z'(t)\|^2 + 2r'(t)r(t)(z(t) \cdot z'(t)) + (r'(t))^2) = Ak_0, \end{aligned}$$

lo cual es constante. ■

5.3.2. Geodésicas en $\mathbb{L}(n)$

Supongamos ahora que $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) + \vec{\lambda}(t)$ es una geodésica en $\hat{\mathcal{U}}_2 \subset \mathbb{L}(n)$ con condiciones iniciales $\hat{\gamma}(0) = Z$ y $\hat{\gamma}'(0) \in T_Z \mathbb{L}(n)$, donde $\gamma(t) \subset \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{M}(n)$ y $\vec{\lambda}(t)$ es una curva contenida en $\mathcal{D}_n$. Usaremos la notación $\hat{v}_j(t) := \hat{\alpha}'_j(0)(t)$ para toda $1 \leq j \leq n+2$, donde $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\hat{\alpha}'_j$ son las derivadas de los vectores $\hat{\alpha}_j$ en $T_{\hat{\gamma}(t)} \mathbb{L}(n)$ dadas en la ecuación (5.4). De manera similar que con las geodésicas en $\mathbb{M}(n)$, será suficiente que se satisfaga que $\langle\langle \hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}'(t) \rangle\rangle$ es constante y que $\langle\langle \hat{\gamma}''(t), v_j(t) \rangle\rangle = 0$ para toda $1 \leq j \leq n+2$. Estas condiciones se reducen a lo siguiente:

(I'). $\langle\langle \hat{\gamma}''(t), v_1(t) \rangle\rangle = \langle\langle \gamma''(t) + \vec{\lambda}''(t), i\gamma(t) \rangle\rangle = 0$: Tenemos que

$$0 = \left[\left(1 + \sum_{j=3}^n r_j^2(t) \right) z''(t) + 2 \left(\sum_{j=3}^n r_j(t) r_j'(t) \right) z'(t) + \left(1 + \sum_{j=3}^n r_j(t) \right) \lambda''(t) \right] \cdot iz(t). \quad (5.8)$$

(II'). $\langle\langle \hat{\gamma}''(t), v_2(t) \rangle\rangle = \langle\langle \gamma''(t) + \vec{\lambda}''(t), z(t)e_2 \rangle\rangle = 0$: Esto es equivalente a

$$z''(t) \cdot z(t) + \lambda''(t) \cdot z(t) = 0.$$

(III'). $\langle\langle \hat{\gamma}''(t), v_j(t) \rangle\rangle = \langle\langle \gamma''(t) + \vec{\lambda}''(t), z(t)e_j \rangle\rangle = 0$ para $3 \leq j \leq n$: De aquí y de la ecuación (5.8) tenemos que

$$0 = z(t) \cdot [r_j''(t)z(t) + 2r_j'(t)z'(t) + (r_j(t) - 1)z''(t)].$$

(IV'). $\langle\langle \hat{\gamma}''(t), v_{n+1}(t) \rangle\rangle = \langle\langle \hat{\gamma}''(t), v_{n+2}(t) \rangle\rangle = 0$: De aquí podemos deducir que

$$0 = \left(1 + \sum_{j=3}^n r_j(t) \right) z''(t) + 2 \left(\sum_{j=3}^n r_j'(t) \right) z'(t) + \left(\sum_{j=3}^n r_j''(t) \right) z(t) + n\lambda''(t).$$

(V'). $\langle\langle \hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}'(t) \rangle\rangle = \|\gamma'(t) + \vec{\lambda}'(t)\|^2 = k_0$ es constante: Tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=3}^n (r_j'(t))^2 \|z(t)\|^2 + \sum_{j=3}^n 2r_j'(t)r_j(t)z(t) \cdot z'(t) + \left(1 + \sum_{j=3}^n r_j^2(t) \right) \|z'(t)\|^2 \\ & + \left(\sum_{j=3}^n r_j'(t) \right) z(t) \cdot \lambda'(t) + \left(1 + \sum_{j=3}^n r_j(t) \right) z'(t) \cdot \lambda'(t) + n\|\lambda'(t)\|^2 = k_0, \end{aligned}$$

lo cual es constante.

El siguiente resultado nos dará una relación entre las geodésicas de $\mathbb{M}(n)$ con las geodésicas de $\mathbb{L}(n)$.

Proposición 5.16. *Sea $\gamma(t)$ una geodésica en $\mathbb{M}(n)$. Entonces $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) + \vec{\lambda}(t)$ es una geodésica de $\mathbb{L}(n)$ (donde $\vec{\lambda}(t)$ es una curva en $\mathcal{D}_n$) si y sólo si $\lambda''(t) \equiv 0$, $\langle\langle \gamma''(t), \vec{1} \rangle\rangle \equiv 0$ y $\langle\langle \gamma''(t), \vec{i} \rangle\rangle \equiv 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$] La Condición (I) para γ y la Condición (I') para $\hat{\gamma}$ implican que

$$\left(1 + \sum_{j=3}^n r_j(t) \right) \lambda''(t) \cdot iz(t) = 0.$$

Tomaremos dos casos:

Caso $1 + \sum_{j=3}^n r_j(t) = 0$: En este caso se satisface que la derivada de $1 + \sum_{j=3}^n r_j(t)$ es idénticamente 0. Usando esto en la Condición **(IV')** obtenemos que $\lambda''(t) \equiv 0$.

Caso $\lambda''(t) \cdot iz(t) = 0$: De las condiciones **(II)** y **(II')** deducimos que $\lambda''(t) \cdot z(t) = 0$. Como $z(t) \neq 0$, concluimos que $\lambda''(t) \equiv 0$.

En ambos casos concluimos que $\lambda''(t) \equiv 0$. De esto último y de la Condición **(IV')**, deducimos que $\langle\langle \gamma''(t), v_{n+1}(t) \rangle\rangle = \langle\langle \gamma''(t), v_{n+2}(t) \rangle\rangle \equiv 0$. Como $v_{n+1}(t) \perp v_{n+2}(t)$ concluimos que $\langle\langle \gamma''(t), \vec{1} \rangle\rangle \equiv 0$ y $\langle\langle \gamma''(t), \vec{i} \rangle\rangle \equiv 0$.

$\Leftarrow$] Notemos que las condiciones **(I')**, **(II')** y **(III')** son implicaciones directas de las condiciones **(I)**, **(II)** y **(III)** y por el hecho de que $\lambda''(t) \equiv 0$.

Por otro lado, la Condición **(IV')** se sigue de que $\lambda''(0) \equiv 0$, $\langle\langle \gamma''(t), \vec{1} \rangle\rangle \equiv 0$ y $\langle\langle \gamma''(t), \vec{i} \rangle\rangle \equiv 0$.

Podemos ver que la Condición **(V')** es equivalente a demostrar que $\|\gamma'(t)\|^2 + \|\vec{\lambda}'(t)\|^2 + 2\langle\langle \gamma'(t), \vec{\lambda}'(t) \rangle\rangle$ es constante. Como γ es una geodésica y $\lambda'' \equiv 0$, obtenemos que $\|\gamma'(t)\|$ y $\|\vec{\lambda}'(t)\|$ son funciones constantes. Además, como $\lambda'(t) \equiv a$ para algún $a \in \mathbb{C}$, deducimos que $\langle\langle \gamma'(t), \hat{\lambda}'(t) \rangle\rangle = \langle\langle \gamma'(t), \vec{a} \rangle\rangle$. Finalmente, la Condición **(V')** se satisface ya que

$$\frac{d}{dt} \langle\langle \gamma'(t), \vec{a} \rangle\rangle = \langle\langle \gamma''(t), \vec{a} \rangle\rangle + \langle\langle \gamma'(t), \frac{d}{dt} \vec{a} \rangle\rangle = \langle\langle \gamma''(t), \vec{a} \rangle\rangle = 0. \quad \blacksquare$$

Capítulo 6

La topología de $L(n)$ y $Q(n)$

6.1. Espacio de n -segmentos

Comenzaremos haciendo una descripción topológica de $L(n)$. Denotaremos por $\mathbb{R}^*$ a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposición 6.1. *Para toda $n \geq 3$ se tiene que $L(n)$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^{n-2}$.*

Demostración. Recordemos que la acción diagonal de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ en $\mathbb{C}^n$ deja invariante al conjunto de n -segmentos. Para todo $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{L}(n)$ existe un $\theta \in [0, 2\pi)$ de modo que $W = e^{2\pi i}(Z - \vec{z}_1)$ pertenece a $V_n \cap \mathbb{R}^n$. Además, todo elemento en $V_n \cap \mathbb{R}^n \cong \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\vec{0}\}$ es un n -segmento. Como dos n -segmentos Z y W en $V_n \cap \mathbb{R}^n$ son semejantes si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}^*$ tales que $Z = aW$, concluimos que

$$\eta(\mathbb{L}(n)) \cong \eta(V_n \cap \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n-1} / \left\{ Z \underset{a \in \mathbb{R}^*}{\sim} aW \right\} \cong \mathbb{RP}^{n-2}.$$

■

Proposición 6.2. $L(n) \subset \partial S^+(n) \cap \partial S^-(n)$.

Demostración. Se sigue del Teorema 4.12, y del hecho de que el paso al cociente η preserva n -segmentos y la orientación de los n -ágonos. ■

Definición 6.3. *Dado un n -segmento $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ diremos que z_j es un final de Z si z_j está en uno de los dos extremos del segmento $\mathbf{cl}(Z)$.*

Todo n -segmento tiene desde dos hasta n finales. Por ejemplo, el segmento $(2i, 0, i, 2i, -i, 2i)$ tiene 4 finales, una en $-i$ y tres en $2i$. Notemos que cada n -segmento Z tienen dos representaciones donde sus finales son 0 y 1. Dado un n -segmento con finales distintos en z_a y en z_b , los dos representantes estarán dados por

$$\frac{1}{z_b - z_a}(Z - \vec{z}_a) \quad \text{y} \quad \frac{1}{z_a - z_b}(Z - \vec{z}_b).$$

Esto hace natural considerar el doble cubriente para el espacio de n -segmentos que definimos a continuación.

Definición 6.4. Denotaremos al espacio de n -segmentos con finales en 0 y 1 como

$$\mathcal{L}(n) = \{Z \in \mathbb{L}(n) : \mathbf{cl}(Z) = [0, 1]\}.$$

Observación 6.5. Tenemos que para cualquier $Z \in \mathcal{L}(n)$, $1 - Z$ es el único n -segmento equivalente a Z dentro de $\mathcal{L}(n)$. Además, como $\mathcal{L}(n)$ es conexo y es un doble cubriente de $L(n) \cong \mathbb{RP}^{n-2}$ podemos concluir que $\mathcal{L}(n) \cong \mathbb{S}^{n-2}$.

Ejemplo 6.6. En el plano $\{[0, 1, z_3] : z_3 \in \mathbb{C}\} \subset P(3)$, el conjunto $\eta(\mathbb{S}^+(3))$ es el semiplano superior, y el conjunto $\eta(\mathbb{S}^-(3))$ es el semiplano inferior, y aquellos tales que $z_3 \in \mathbb{R}$ pertenecen a $L(3)$. El punto al infinito $[0, 0, 1] \in P(3) \cong \mathbb{CP}^1$ es un 3-segmento (ver el lado derecho de la Figura 6.1), y el círculo $L(3) = \mathbb{R} \cup \{[0, 0, 1]\}$ es la frontera de $\eta(\mathbb{S}^+(3))$ y de $\eta(\mathbb{S}^-(3))$. Concluimos que en $\mathbb{C}^3$ se satisface $\mathbb{L}(3) \cup \{(z, z, z)\} = \partial\mathbb{S}^+(3) = \partial\mathbb{S}^-(3)$. Es claro que $\mathcal{L}(3) \cong \mathbb{S}^1$ ya que $\mathcal{L}(3)$ está conformado por la unión de los intervalos $\overline{(1, 0, 0)(1, 1, 0)}$, $\overline{(1, 1, 0)(0, 1, 0)}$, $\overline{(0, 1, 0)(0, 1, 1)}$, $\overline{(0, 1, 1)(0, 0, 1)}$, $\overline{(0, 0, 1)(1, 0, 1)}$ y $\overline{(1, 0, 1)(1, 0, 0)}$ (ver Figura 6.1).

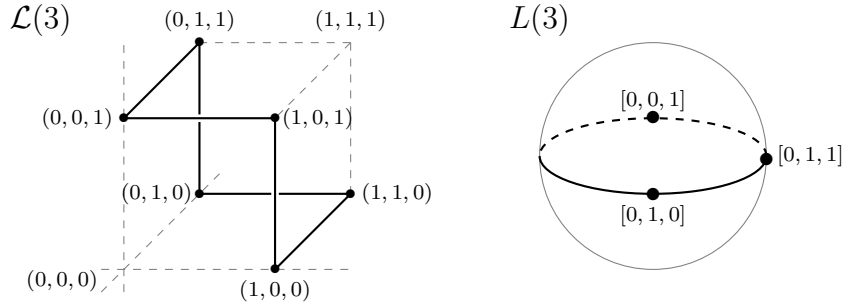


Figura 6.1: Del lado izquierdo, las líneas en negro representan al espacio $\mathcal{L}(3)$ dentro del cubo $[0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$. Del lado derecho, la 2-esfera representa el espacio proyectivo $P(3) \cong \mathbb{CP}^1$, donde el ecuador corresponde al espacio $L(3)$.

6.2. Espacio de n -segmentos convexos

Teorema 6.7. $\mathbb{Q}(n) \cup \mathcal{D}_n = \partial\mathbb{K}^+(n) \cap \partial\mathbb{K}^-(n)$.

Demostración. Es claro que la diagonal $\mathcal{D}_n$ está contenida en $\partial\mathbb{K}^+(n) \cap \partial\mathbb{K}^-(n)$. Tomemos $Z \in \mathbb{Q}(n)$. Por definición, existe una sucesión de polígonos en $\mathbb{K}(n)$ que converge a Z . Esto implica que podemos generar una subsucesión $\{Z_m\}$ en $\mathbb{K}^+(n)$ (o en $\mathbb{K}^-(n)$) que converge a Z . De aquí podemos construir la sucesión $\{\hat{Z}_m\}$ obtenida al reflejar los polígonos de la sucesión $\{Z_m\}$ respecto a la línea en $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbf{cl}(Z)$. Los elementos de $\{\hat{Z}_m\}$ están

contenidos en $\mathbb{K}^-(n)$. Con todo lo anterior, podemos concluir que $Z \in \partial\mathbb{K}^+(n) \cap \partial\mathbb{K}^-(n)$, y por lo tanto, $Q(n) \subseteq \partial\mathbb{K}^+(n) \cap \partial\mathbb{K}^-(n)$.

Ahora, tomemos $Z \in \partial\mathbb{K}^+(n)$ y $\{Z_m\} \subset \mathbb{K}^+(n)$ una sucesión convergente a Z . Como la sucesión $\{\mathbf{cl}(Z_m)\}$ converge al conjunto $\mathbf{cl}(Z)$ con la métrica de Hausdorff, entonces el conjunto $\mathbf{cl}(Z)$ es convexo. Entonces sucede una de las dos siguientes opciones:

1. El interior de $\mathbf{cl}(Z)$ es vacío. Por lo tanto, $\mathbf{cl}(Z) = \mathbf{c}(Z)$ y Z es un n -segmento convexo o un polígono degenerado a un punto, entonces $Z \in \partial\mathbb{K}^-(n)$.
2. El interior de $\mathbf{cl}(Z)$ no es vacío. Por lo tanto, su frontera, $\mathbf{c}(Z)$ es una curva de Jordan orientada positivamente, y por lo tanto, Z no pertenece a $\partial\mathbb{K}^-(n)$.

Concluimos que si $Z \in \partial\mathbb{K}^+(n) \cap \partial\mathbb{K}^-(n)$, entonces Z también pertenece a $Q(n) \cup \mathcal{D}_n$. ■

Corolario 6.8. $Q(n) = \partial K^+(n) \cap \partial K^-(n)$.

Demostración. Se sigue del Teorema 6.7 y de que el paso al cociente η preserva n -segmentos convexos y la orientación de los polígonos (recordemos que los polígonos degenerados a puntos no se consideran en el paso al cociente). ■

Observación 6.9. El conjunto $Q(n)$ es un conjunto cerrado dentro de $\mathbb{L}(n)$, esto se sigue de que $Q(n) = \mathbb{L}(n) \cap \partial\mathbb{K}(n)$

Los vértices de los segmentos convexos aparecen en un orden particular, algo que llamaremos orden cíclico. El siguiente enunciado describe con detalle esta propiedad.

Teorema 6.10. Sea $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{L}(n)$ con finales distintos en z_j y z_k , con $1 \leq j < k \leq n$. Entonces $Z \in Q(n)$ si y sólo si para toda $s \in \{j+1, j+2, \dots, k-1\}$ se tiene que $z_s \in \overline{z_{s-1}z_k}$, y para toda $s \in \{k+1, k+2, \dots, n, 1, \dots, j-1\}$ se tiene que $z_s \in \overline{z_{s-1}z_j}$.

Demostración. Como $Q(n)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{L}(n)$, es suficiente demostrar este resultado para n -segmentos con todos sus vértices distintos. Consideraremos el caso en que $j = 1$ ya que en los otros casos se procede de manera análoga. Usaremos la notación de la prueba del Teorema 4.12 y partes de esta.

⇐] Sea $\varepsilon > 0$ y sea $Z_0 = (0, x_2, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(n)$ de modo que $Z = aZ_0 + b$. Tenemos que los n -ágonos $W_0 = (0, w_2, \dots, w_{k-1}, 1, w_{k+1}, \dots, w_n)$, donde $w_s = x_s - i\varepsilon$, para $s \in \{2, \dots, k-1\}$, y $w_s = x_s + i\varepsilon$ para $s \in \{k+1, \dots, n-1\}$, es un polígono convexo que satisface $\|Z_0 - W_0\| < \varepsilon\sqrt{n}$. Así, el polígono $aW_0 + b$ es convexo y satisface

$$\|Z - aW_0 - b\| = \|aZ_0 - aW_0\| < \varepsilon|a|\sqrt{n}.$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluimos que $Z \in Q(n)$.

⇒] Si sucediera que $l_1 < k$, tendríamos que todo n -ágono simple W suficientemente cercano a Z , va a satisfacer que el ángulo en w_{l_1} o en w_{l_2} de $\mathbf{c}(W)$ es mayor a π (contiene un zigzag). Por lo tanto, $\mathbf{cl}(W)$ no sería convexo. Entonces $l_1 = k$ y las condiciones mencionadas se siguen para $s \in \{2, 3, \dots, k-1\}$. Se procede de manera análoga para los $s \in \{k+1, k+2, \dots, n-1\}$. ■

Observación 6.11. Sea $Z \in \mathbb{Q}(n)$ y sea z_j un final de Z . Con el Teorema 6.10 se puede deducir que si $\{z_j, z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}\}$ son los vértices de Z que satisfacen $|z_{j_i} - z_j| < \varepsilon$, entonces el conjunto $\{j, j_1, \dots, j_k\}$ consta de números consecutivos módulo n .

Teorema 6.12. Sea $n \geq 4$. Un n -segmento convexo está en $\partial\mathbb{Q}(n) \subset \mathbb{L}(n)$ si y sólo si satisface una de las siguientes condiciones:

1. existe j tal que $z_j = z_{j+1}$ y no son finales,
2. existe j tal que $z_{j-1} = z_j = z_{j+1}$ y son finales.

Demostración. Basta demostrar que esto es cierto para n -segmentos de la forma $(0, z_2, \dots, z_n)$ en $\mathbb{L}(n)$ con coordenadas reales, ya que las transformaciones afines dejan invariante $\mathbb{L}(n)$ y $\mathbb{Q}(n)$. Sea entonces $Z \in \mathbb{L}(n)$ y sean z_a y z_b finales distintos de Z . Denotemos $u = z_b - z_a$.

$\Leftarrow$] Si $z_j = z_{j+1}$ y no es un final de Z , entonces alguno de los conjuntos de n -segmentos

$$\begin{aligned} &\{(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j + tu, z_{j+1} - tu, z_{j+2}, \dots, z_n) : t < 0\} \\ &\{(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j + tu, z_{j+1} - tu, z_{j+2}, \dots, z_n) : t > 0\} \end{aligned}$$

está conformado únicamente por n -segmentos no convexos. Si $z_{j-1} = z_j = z_{j+1}$ es un final, entonces alguno de los conjuntos de n -segmentos

$$\begin{aligned} &\{(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j + tu, z_{j+1}, \dots, z_n) : t < 0\} \\ &\{(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j + tu, z_{j+1}, \dots, z_n) : t > 0\} \end{aligned}$$

está conformado únicamente por n -segmentos no convexos. En cualquiera de los casos, tenemos que Z se puede aproximar por n -segmentos no convexos, por lo que $Z \in \partial\mathbb{Q}(n)$.

$\Rightarrow$] Sea $Z \in \partial\mathbb{Q}(n)$. Sea $\{Z_m = (z_{m,1}, \dots, z_{m,n})\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de n -segmentos no convexos que converge a Z . Podemos asumir que z_a y z_b son finales distintos de Z . Sean $\mathcal{Z}_a = \{j : z_j = z_a\}$ y $\mathcal{Z}_b = \{j : z_j = z_b\}$. Para m suficientemente grande, se tiene que los finales distintos de Z_m están, uno en $\mathcal{Z}_a$ y el otro en $\mathcal{Z}_b$. Esto implica que una subsucesión de $\{Z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tiene los mismos finales, por lo que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $z_{m,a}$ y $z_{m,b}$ son finales distintos de Z_m .

Sean t_j para $1 \leq j \leq n$ tales que

$$Z = (z_a + t_1 u, z_a + t_2 u, \dots, z_a + t_n u).$$

Del Teorema 6.10 y del hecho de que Z es n -segmento convexo, tenemos que las siguientes desigualdades se satisfacen

$$\begin{aligned} 0 &= t_a \leq t_{a+1} \leq t_{a+2} \leq \dots \leq t_b = 1, \\ 0 &= t_a \leq t_{a-1} \leq t_{a-2} \leq \dots \leq t_b = 1. \end{aligned}$$

Sea $u_m = z_{m,b} - z_{m,a}$ y $t_{m,j}$ para $1 \leq j \leq n$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$Z_m = (z_{m,a} + t_{m,1} u_m, z_{m,a} + t_{m,2} u_m, \dots, z_{m,a} + t_{m,n} u_m).$$

Usando el Teorema 6.10, y el hecho de que Z_m es n -segmento no convexo, tenemos que no todas las desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &= t_{m,a} \leq t_{m,a+1} \leq t_{m,a+2} \leq \cdots \leq t_{m,b} = 1, \\ 0 &= t_{m,a} \leq t_{m,a-1} \leq t_{m,a-2} \leq \cdots \leq t_{m,b} = 1, \end{aligned}$$

se satisfacen. Así, tenemos que existe una desigualdad que no se satisface en una infinidad de Z_m 's, sin pérdida de generalidad digamos que la desigualdad $t_{m,a+u} \leq t_{m,a+u+1}$ es la que no se satisface. Como $t_{a+u} \leq t_{a+u+1}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{m,a+u} = z_{a+u}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{m,a+u+1} = z_{a+u+1}$ y $z_{m,a+u} > z_{m,a+u+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, se concluye que $t_{a+u} = t_{a+u+1}$. En el caso de que z_{a+u} no es final ya acabamos, pues estaríamos en el caso 1. Si no se reduce al caso 1, podemos asumir que los vértices en Z que son iguales y que tienen índices consecutivos son finales de Z . Bajo esta suposición, si no sucede tampoco el caso 2, tendríamos que $|Z_a|, |Z_b| \in \{1, 2\}$. Es fácil ver en este caso que Z_m satisface el Teorema 6.10 para m suficientemente grande, lo que contradice que sea límite de n -segmentos convexos. Por lo tanto se debe satisfacer la propiedad 1 o la propiedad 2. ■

Corolario 6.13. *Sea $n \geq 4$. Se tiene que $Q(n)$ es un conjunto cerrado en $L(n)$ y su interior $Q^\circ(n)$ es no vacío.*

Demostración. El resultado es corolario del Teorema 6.12, ya que η preserva el interior y la frontera de los n -ágonos convexos. Esto sucede ya que un n -segmento convexo Z en $P(n)$ está en la frontera de $Q(n)$ si y sólo si Z es límite de polígonos simples no convexos en $P(n)$, y esto sucede si y sólo si los n -segmentos en $\eta^{-1}(Z)$ son límites de polígonos simples no convexos en $\mathbb{C}^n$. ■

Con la finalidad de determinar la topología de $Q(n)$ estudiaremos su doble cubriente dentro de $\mathcal{L}(n)$.

Definición 6.14. *Se denotará por $\mathcal{Q}(n)$ al conjunto de n -segmentos convexos en $\mathcal{L}(n)$, es decir, al conjunto $\mathcal{Q}(n) \cap \mathcal{L}(n)$.*

6.3. Estructura simplicial de $\mathcal{L}(n)$ y de $\mathcal{Q}(n)$

En esta sección daremos a $\mathcal{L}(n)$ estructura de complejo simplicial. La restricción de este complejo simplicial a $\mathcal{Q}(n)$ es a su vez un complejo simplicial, el cual nos ayudará a describir la topología de $\mathcal{Q}(n)$ y la de $Q(n)$. Denotaremos por $\mathcal{S}_n$ al grupo de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$, y denotaremos

$$E_n := \left(0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right) \in \mathcal{L}(n).$$

Definición 6.15. *Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Se define*

- a. $\sigma(E_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{L}(n)$ como el n -segmento dado por $a_{\sigma(1)} = 0$, $a_{\sigma(2)} = 1/(n-1)$, $\dots$, $a_{\sigma(n-1)} = (n-2)/(n-1)$, $a_{\sigma(n)} = 1$.
- b. Para $1 \leq j < n$, se define $\sigma_j = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(n)$ como el n -segmento dado por $0 = x_{\sigma(1)} = x_{\sigma(2)} = \dots = x_{\sigma(j)}$ y $x_{\sigma(j+1)} = \dots = x_{\sigma(n)} = 1$.
- c. $\Delta_\sigma := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(n) : 0 = x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \dots \leq x_{\sigma(n)} = 1\}$.

Observación 6.16. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Entonces $\Delta_\sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un $(n-2)$ -simplejo con vértices en $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, y con baricentro en $\sigma(E_n)$. Los n -segmentos en el interior de Δ_σ son aquellos que tiene todos sus vértices distintos y que satisfacen el orden de vértices determinado por σ . Además, las caras de Δ_σ corresponden a n -segmentos con algunos vértices iguales. Por ejemplo, el conjunto de n -segmentos dado por

$$\{(x_1, \dots, x_7) \in \mathcal{L}(n) : 0 = x_3 \leq x_6 = x_2 = x_7 \leq x_4 \leq x_1 = x_5 = 1\}$$

es una 3-cara del simplejo

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(n) : 0 = x_3 \leq x_6 \leq x_2 \leq x_7 \leq x_4 \leq x_1 \leq x_5 = 1\}.$$

Proposición 6.17. Sea $X \in \Delta_\sigma$ para $\sigma \in \mathcal{S}_n$. La menor cara de Δ_σ que contiene a X es la cara formada por los vértices en

$$\sigma_X := \{\sigma_j : x_{\sigma(j)} < x_{\sigma(j+1)}\}.$$

Demostración. Sea $X \in \Delta_\sigma$ y sea $\hat{\Delta}$ la menor cara de Δ_σ que contiene a X .

Por ser Δ_σ un simplejo, cualquier elemento W contenido en la cara de vértices $\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_k}$ está generado como combinación convexa de estos vértices, i.e., existen $0 \leq \kappa_1, \dots, \kappa_k$ con $\kappa_1 + \dots + \kappa_k = 1$ tales que $W = \kappa_1 \sigma_{j_1} + \dots + \kappa_k \sigma_{j_k}$. Además, W es interior de dicha cara si y sólo si ninguno de los coeficientes κ_t es 0.

Como X está en Δ_σ , tenemos que $X = \kappa_1 \sigma_1 + \dots + \kappa_{n-1} \sigma_{n-1}$. Los coeficientes κ_j están determinados de manera única por X (se puede ver que $\kappa_j = x_{\sigma(j+1)} - x_{\sigma(j)}$). Concluimos que si $x_{\sigma(j)} = x_{\sigma(j+1)}$, entonces X no es punto interior de una cara con un vértice en σ_j ; y en caso de que $x_{\sigma(j)} < x_{\sigma(j+1)}$, si X es combinación convexa de algunos vértices de Δ_σ , se tiene que σ_j debe ser uno de estos vértices. ■

Teorema 6.18. $\mathcal{L}(n)$ es un complejo simplicial formado por $n!$ simplejos de dimensión $n-2$.

Demostración. Es claro que cualquier n -segmento Z en $\mathcal{L}(n)$ pertenece a algún simplejo Δ_σ , basta considerar σ que satisfaga el orden de las coordenadas de Z . Además, de la Definición 6.15.c tenemos que todo elemento en Δ_σ es un n -segmento. Por lo tanto, $\mathcal{L}(n) = \cup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \Delta_\sigma$, la unión de $n!$ simplejos.

Para ver que esto da una estructura de complejo simplicial, basta ver que para cualesquiera $\sigma, \lambda \in \mathcal{S}_n$ permutaciones distintas, se cumple que Δ_σ y Δ_λ se intersectan en una cara. Como $\sigma(E_n)$ y $\lambda(E_n)$ tienen distinto orden de vértices, por la Observación 6.16 sabemos que los simplejos Δ_σ y Δ_λ sólo pueden intersectarse en sus fronteras. El proceso para demostrar esto

será ver que si $X \in \Delta_\sigma \cap \Delta_\lambda$, entonces la mínima cara de Δ_σ que contiene a X coincide con la mínima cara de Δ_λ que contiene a X . De la Proposición 6.17 se tiene que las caras mínimas de Δ_σ y Δ_λ que contienen a X son las caras generadas por los vértices en σ_X y en λ_X , respectivamente. Será suficiente demostrar que $\sigma_X = \lambda_X$. Como $X \in \Delta_\sigma$ y $X \in \Delta_\lambda$, tenemos que $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \dots \leq x_{\sigma(n)}$ y $x_{\lambda(1)} \leq x_{\lambda(2)} \leq \dots \leq x_{\lambda(n)}$. En particular, esto implica que $x_{\sigma(j)} < x_{\sigma(j+1)}$ si y sólo si $x_{\lambda(j)} < x_{\lambda(j+1)}$, además de que $\{\sigma(1), \dots, \sigma(j)\} = \{\lambda(1), \dots, \lambda(j)\}$. Lo anterior implica que $\sigma_j \in \sigma_X$ si y sólo si $\lambda_j \in \lambda_X$, i.e., $\sigma_X = \lambda_X$. Concluimos que Δ_σ y Δ_λ se intersectan en una cara. Por lo tanto $\mathcal{L}(n)$ es un complejo simplicial. ■

Corolario 6.19. *El conjunto $\{\eta(\Delta_\sigma) : \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ determina una estructura simplicial de $L(n)$ conformada por $n!/2$ simplejos.*

Demostración. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Si $\hat{\sigma}$ es la permutación dada por $\hat{\sigma}(j) = \sigma(n+1-j)$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que $Z \in \Delta_\sigma$ si y sólo si $(1-Z) \in \Delta_{\hat{\sigma}}$ (ver Observación 6.5). Además, como $x_{\sigma(1)} = 0$ para todo elemento en Δ_σ y $x_{\hat{\sigma}(1)} = 1$ para todo elemento en $\Delta_{\hat{\sigma}}$ tenemos que $\Delta_\sigma \cap \Delta_{\hat{\sigma}} = \emptyset$. Con lo anterior y como $\mathcal{L}(n)$ es el doble cubriente de $L(n)$, tenemos que $\eta(\Delta_\sigma) = \eta(\Delta_{\hat{\sigma}}) \subset L(n)$ es un simplejo. Podemos concluir que $L(n)$ es una estructura simplicial conformada por $n!/2$ simplejos. ■

Teorema 6.20. *$Q(n)$ es un complejo simplicial conformado por $n2^{n-2}$ simplejos de dimensión $(n-2)$. En particular, es un subcomplejo de $\mathcal{L}(n)$.*

Demostración. Del Teorema 6.12 se sigue que $Q(n)$ es cerrado en $\mathcal{L}(n)$. Notemos que si, para alguna $\sigma \in \mathcal{S}_n$, algún n -segmento en el interior de Δ_σ es convexo, entonces $\Delta_\sigma \subseteq Q(n)$, ya que todos los elementos de Δ_σ tienen el mismo orden cíclico.

Sea $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in Q(n)$. Construiremos un n -segmento convexo W con todos sus vértices distintos de modo que si σ es la permutación de $\mathcal{S}_n$ tal que Δ_σ contiene a W en su interior, entonces $Z \in \Delta_\sigma$. Para construir W modificaremos mínimamente los vértices de Z , de modo que si hay varios vértices de Z iguales a z , distribuiremos estos vértices cerca de z de manera que se mantenga el orden cíclico. Con esta finalidad, definimos $\mathcal{V}_Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Supongamos que $|\mathcal{V}_Z| = m$, y sean $0 = v_1 < v_2 < \dots < v_m = 1$ todos los elementos de $\mathcal{V}_Z$. Definiremos los conjuntos $\mathcal{V}_j = \{k \in \{1, 2, \dots, n\} : z_k = v_j\}$ para cada $1 \leq j \leq m$. Del Teorema 6.10 deducimos que $\mathcal{V}_1 = \{a_1, a_1 + 1, \dots, a_1 + t_1 - 1\}$ y $\mathcal{V}_m = \{b_m, b_m + 1, \dots, b_m + s_m - 1\}$ están conformados por índices consecutivos; y $\mathcal{V}_j = \{a_j, a_j + 1, \dots, a_j + t_j - 1\} \cup \{b_j, b_j + 1, \dots, b_j + s_j - 1\}$, para cualquier $1 < j < m$, es decir, está conformado por dos conjuntos de índices consecutivos (alguno de ellos posiblemente vacío). Estos $\mathcal{V}_j$ son disjuntos por pares y son una partición de $\{1, 2, \dots, n\}$, además de que se satisface que $a_j + t_j = a_{j+1}$ y $b_j + s_j = b_{j-1}$. Construiremos un n -segmento convexo W con todas sus coordenadas distintas de la siguiente manera: sea $\varepsilon = \inf\{v_{t+1} - v_t : 1 \leq t \leq m-1\}$. Vamos a definir a los vértices de W de modo que

$$w_k = \begin{cases} v_j + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\hat{t} + \frac{1}{2}}{t_j} & \text{para } k = a_j + \hat{t} \in \{a_j, a_j + 1, \dots, a_{j+1} - 1\}, \\ v_j - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\hat{s} - \frac{1}{2}}{s_j} & \text{para } k = b_j + \hat{s} \in \{b_j, b_j + 1, \dots, b_{j-1} - 1\}. \end{cases}$$

Con lo anterior, tenemos que los vértices con índices en $\mathcal{V}_j$ están contenidos en el intervalo $(v_j - \frac{\varepsilon}{2}, v_j + \frac{\varepsilon}{2})$ y se preserva el orden cíclico. De este modo ya tenemos un Δ_σ dentro de $\mathcal{Q}(n)$ que contiene a Z . Por lo anterior, concluimos que $\mathcal{Q}(n)$ es la unión de algunos simplejos Δ_σ , por lo que es un subcomplejo simplicial de $\mathcal{L}(n)$.

Ahora veremos para qué permutaciones $\sigma \in \mathcal{S}_n$ se cumple que $\sigma(E_n) \in \mathcal{Q}(n)$. Del Teorema 6.10 sabemos que si $\sigma(1) = j$, entonces $\sigma(2) \in \{j+1, j-1\}$ ya que se debe mantener el orden cíclico en los vértices de $\sigma(E_n)$. En general, también sabemos que si $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} = \{m, m+1, \dots, m+k-1\}$ para algún $2 \leq k \leq n-2$, entonces $\sigma(k+1) \in \{m-1, m+k\}$, para que se mantenga el orden cíclico. Así, las permutaciones σ tales que $\sigma(E_n) \in \mathcal{Q}(n)$ se pueden contar de la siguiente manera: $\sigma(1)$ es cualquier valor entre 1 y n . Al ya haber elegido $\sigma(1)$ tenemos dos opciones para elegir $\sigma(2)$; después de esto, tenemos dos opciones para elegir $\sigma(3)$; y así tenemos siempre dos opciones para elegir $\sigma(k)$ al ya haber elegido $\sigma(1), \sigma(2), \dots$, y $\sigma(k-1)$, para $2 \leq k \leq n-1$. Finalmente, para $\sigma(n)$ queda una única opción. Por lo tanto, hay $n2^{n-2}$ permutaciones $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tales que $\sigma(E_n) \in \mathcal{Q}(n)$. ■

Definición 6.21. Dada una permutación $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que $\Delta_\sigma \subset \mathcal{Q}(n)$ le llamaremos *permutación convexa*.

Corolario 6.22. Los simplejos $\eta(\Delta_\sigma)$ para $\sigma \in \mathcal{S}_n$ permutación convexa definen una estructura simplicial en $\mathcal{Q}(n) \subset L(n)$, la cual está conformada por $n2^{n-3}$ simplejos de dimensión $n-2$.

Demostración. Nótese que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es convexa, entonces $\hat{\sigma}$ (definido como en la prueba del Corolario 6.19) también es convexa. El resultado se sigue del Corolario 6.19 y del Teorema 6.20. ■

Ejemplo 6.23. En la Figura 6.2 se da una representación gráfica de las estructuras simpliciales de $\mathcal{L}(4)$ y de $\mathcal{Q}(4)$. No es difícil ver que los únicos simplejos no convexos en $\mathcal{L}(4)$ son $\Delta_{(23)}, \Delta_{(132)}, \Delta_{(1342)}, \Delta_{(234)}, \Delta_{(14)}, \Delta_{(124)}, \Delta_{(1243)}$ y $\Delta_{(143)}$, y además la unión de los primeros cuatro de estos simplejos forman un disco cerrado, al igual que la unión de los últimos cuatro de estos simplejos. Estos discos cerrados son ajenos, y su frontera está conformada por n -segmentos convexos. De esto y de que $\mathcal{L}(4) \cong \mathbb{S}^2$ (ver Observación 6.5) se deduce que $\mathcal{Q}(4)$ es homeomorfo a la banda $([0, 1] \times [0, 1]) / \{(x, 0) \sim (x, 1)\}$. El cociente $\mathcal{Q}(4) = \mathcal{Q}(4) / \{Z \sim 1-Z\}$ es homeomorfo a una banda de Möbius dentro del plano proyectivo $L(n)$. Ver Figura 6.2 para más detalles.

Observación 6.24. Nótese que en la estructura simplicial de $\mathcal{Q}(4)$ hay 0-simplejos que están en el interior de $\mathcal{Q}(4)$. Para $n \geq 5$ este fenómeno no sucede, es decir, todo 0-simplejo de $\mathcal{Q}(n)$ está en su frontera para $n \geq 5$ (esto se sigue de que cada uno de estos 0-simplejos satisfacen la condición 2 del Teorema 6.12).

6.4. Topología de los espacios $\mathcal{Q}(n)$, $\mathcal{Q}(n)$ y $\mathcal{Q}(n)$

Comenzaremos describiendo la topología de $\mathcal{Q}(n)$ a partir de su estructura simplicial.

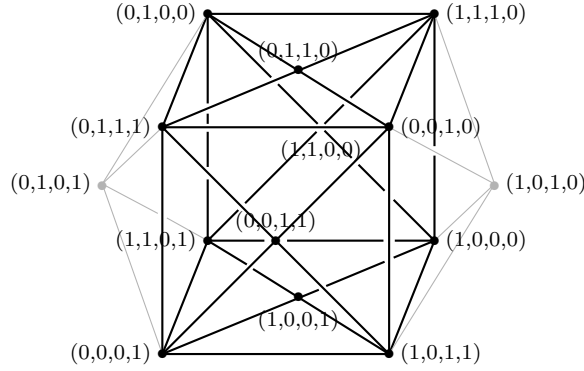
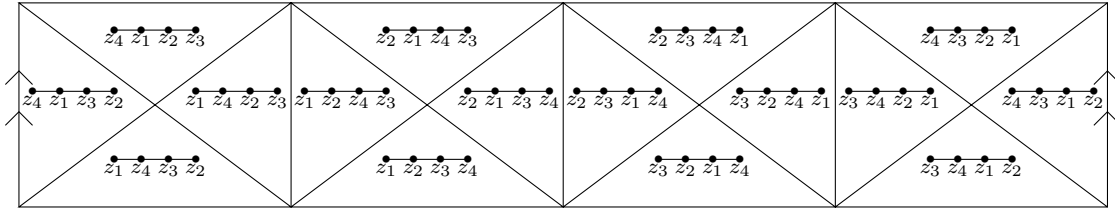
a) $Q(4) \subseteq \mathcal{L}(4)$ b) $Q(4)$ 

Figura 6.2: En la Figura (a) tenemos una representación de la estructura simplicial de la esfera $\mathcal{L}(4)$. El anillo en negro corresponde al conjunto $Q(4)$, y en gris el resto de $\mathcal{L}(4)$. La Figura (b) es una representación de la estructura simplicial de la banda $Q(4)$. En el interior de los simplejos se muestra el orden que deben llevar los 4-segmentos en dichos simplejos. La banda de Möbius correspondiente a $Q(4)$ se obtiene de tomar la mitad izquierda de la banda y pegar los extremos de esta tira con un medio giro. En ambos dibujos se puede ver como los 0-simplejos $(0,0,1,1)$, $(1,0,0,1)$, $(1,1,0,0)$ y $(0,1,1,0)$ son puntos interiores de $Q(4)$.

Definición 6.25. Sea $\mathcal{J} = \{k+1, k+2, \dots, k+j\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Denotaremos algunos subconjuntos de permutaciones por

$$\mathcal{S}_n(\mathcal{J}) := \{\sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma \text{ convexo}, \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\} = \mathcal{J}\},$$

lo cual nos permite definir

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n) := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n(\mathcal{J})} \Delta_{\sigma}.$$

En particular, si $\mathcal{J} = \{j\}$, denotaremos $\mathcal{Q}_j(n) := \mathcal{Q}_{\{j\}}(n)$.

Nótese que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es una permutación convexa y $1 \leq j < n$ y $\mathcal{J} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$, entonces

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n) = \left(\bigcup_{\substack{\lambda \in \mathcal{S}_n \\ \sigma_j \in \Delta_{\lambda}}} \Delta_{\lambda} \right) \cap \mathcal{Q}(n).$$

Lema 6.26. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$ una permutación convexa y sea $1 \leq j < n$. Si $\mathcal{J} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$ está conformado por enteros consecutivos módulo n , entonces $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n)$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^{n-2}$.

Demostración. La demostración procederá por inducción sobre n . Por simplicidad, sólo consideraremos el caso en que $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, j\}$ ya que los otros casos son análogos. Además podemos suponer que $j \leq \frac{n}{2}$, pues el conjunto de n -segmentos tales que sus últimas coordenadas son $z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n$ es homeomorfo al conjunto de n -segmentos cuyas primeras coordenadas son $z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n$.

El caso $n = 3$ se deduce de manera sencilla, ya que $\mathcal{Q}_1(3) = \Delta_{id} \cup \Delta_{(2,3)}$, lo cual es unión de dos 1-simplejos que se pegan por el 0-simplejo $(0, 1, 1)$, por lo tanto, $\mathcal{Q}_1(3) \cong \mathbb{D}^1$. Para el caso $n = 4$, con ayuda de la Figura 6.2.b podemos ver que $\mathcal{Q}_1(4)$ y $\mathcal{Q}_{\{1,2\}}(4)$ son homeomorfos a $\mathbb{D}^2$.

Supongamos entonces que la proposición es cierta para $4 \leq n < k$. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_k(\mathcal{J})$. De la Observación 6.11 se sigue que $\sigma(j+1) \in \{j+1, n\}$. Por lo tanto, para $\mathcal{J}^+ = \mathcal{J} \cup \{j+1\}$ y $\mathcal{J}^- = \mathcal{J} \cup \{n\}$, se tiene que $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n) = \mathcal{Q}_{\mathcal{J}^+}(n) \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n)$.

Sea

$$\mathcal{N} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n) : x_n = \max\{x_1, \dots, x_j\}\}.$$

Claramente $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n)$. La asignación $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \max\{x_1, \dots, x_j\})$ define un homeomorfismo de $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n-1)$ a $\mathcal{N}$. Por hipótesis de inducción, concluimos que $\mathcal{N}$ es homeomorfo al disco $\mathbb{D}^{n-3}$. Para cualquier $\lambda \in \mathcal{S}_n(\mathcal{J})$ tal que $\Delta_\lambda \subseteq \mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n)$, se tiene que $\sigma_j \in \Delta_\lambda$ y que $\Delta_\lambda \cap \mathcal{N}$ es la $(n-3)$ -cara de Δ_λ opuesta a σ_j . Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es el subsimplejo de $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n)$ conformado por la unión de todas las $(n-3)$ -caras de este tipo. Podemos concluir que $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n) = \cup_{p \in N} \overline{p\sigma_j}$, y como los segmentos sólo se intersectan en σ_j concluimos que $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n) \cong \mathbb{D}^{n-2}$. De manera análoga se puede demostrar que $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}^+}(n) \cong \mathbb{D}^{n-2}$.

Notemos que $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n) \cap \mathcal{Q}_{\mathcal{J}^+}(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n) : x_{j+1} = x_n\}$, entonces la proyección sobre sus primeras $n-1$ coordenadas da un homeomorfismo de $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n) \cap \mathcal{Q}_{\mathcal{J}^+}(n)$ a $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n-1)$. Por la hipótesis de inducción esta intersección es homeomorfa a $\mathbb{D}^{n-3}$.

Como demostramos que $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n)$ y $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}^+}(n)$ son complejos simpliciales homeomorfos a $\mathbb{D}^{n-2}$, y la intersección de ellos es un subsimplejo de ambos homeomorfo a $\mathbb{D}^{n-3}$, por el Teorema A.2, concluimos que su unión, $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n) = \mathcal{Q}_{\mathcal{J}^-}(n) \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{J}^+}(n)$, es homeomorfa a $\mathbb{D}^{n-2}$. ■

Teorema 6.27. Para $n \geq 4$ se tiene que $\mathcal{Q}(n) \subset \mathcal{L}(n)$ es una subvariedad con frontera.

Demostración. Como $\mathcal{Q}(4)$ es un anillo (ver Figura 6.2) tenemos que $\mathcal{Q}(4)$ es una subvariedad con frontera en $\mathcal{L}(4)$. Supongamos entonces que $n \geq 5$. Como $\mathcal{Q}(n) \subset \mathcal{L}(n)$ es un subcomplejo simplicial de dimensión $n-2$ (Teorema 6.20), entonces sus puntos interiores tienen vecindades homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-2}$.

Tomemos el 0-simplejo $\sigma_j \in \mathcal{Q}(n)$ para algún $\sigma \in \mathcal{S}_n$, y sea $\mathcal{J} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(j)\}$ (ver Definición 6.15.b). De la Observación 6.24 tenemos que $\sigma_j \in \partial\mathcal{Q}(n)$, por lo que $\sigma_j \in \partial\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n)$. Por lo tanto, del Lema 6.26 y de que $\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n)$ es una vecindad de σ_j en $\mathcal{Q}(n)$, se sigue que σ_j tiene una vecindad homeomorfa al semiespacio superior cerrado $\{(x_1, \dots, x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2} : x_{n-2} \geq 0\}$ de $\mathbb{R}^{n-2}$.

Si $Z \in \partial\mathcal{Q}(n)$ no es un 0-simplejo, entonces existe un simplejo $\Delta_\lambda \subseteq \mathcal{Q}(n)$ que contiene a Z . Por lo tanto, Δ_λ tiene una cara propia que contiene a Z en su interior (ver Teorema 6.20). Sea $\lambda_j \in \Delta_\lambda$ un 0-simplejo de dicha cara y $\mathcal{J} = \{\lambda(1), \dots, \lambda(j)\}$. Entonces $Z \in \partial\mathcal{Q}_{\mathcal{J}}(n)$ y por el Lema 6.26, Z tiene una vecindad homeomorfa al semiespacio superior cerrado. ■

Observación 6.28. $\mathcal{Q}_j(n)$ es el conjunto de todos los n -segmentos en $\mathcal{Q}(n)$ con su j -ésima coordenada igual 0. De esto es fácil ver que $\mathcal{Q}(n) = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{Q}_j(n)$ y $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{Q}_j(n) = \emptyset$ (ya que no consideramos polígonos degenerados a un punto).

Definición 6.29. Denotaremos por T^m al producto $\mathbb{D}^{m-1} \times \mathbb{S}^1$. Consideraremos $\mathbb{D}^0$ igual a un punto.

En el Teorema 6.32 se demuestra que $\mathcal{Q}(n) \cong T^{n-2}$. Esto nos permitirá describir posteriormente las topologías de los espacios $\mathcal{Q}(n)$ y $\mathcal{Q}(n)$. Algunos resultados necesarios se pueden encontrar en los apéndices A.1 y A.2.

Lema 6.30. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que Δ_σ tiene un subconjunto propio no vacío contenido en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$. Sean $j_1 < j_2 < \dots < j_d$ tales que el conjunto $\Lambda = \{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \dots, \sigma_{j_d}\}$ intersecta a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ y a su complemento. Sea $\tau \in \mathcal{S}_n$ tal que $\Lambda \subset \Delta_\tau$. Entonces $\lambda^{-1}(1) < \lambda^{-1}(n)$ si y sólo si $\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(n)$.

Demostración. Notemos primero que todos los n -segmentos contenidos en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ tienen su primer y última coordenada iguales a 0; y que, en particular, se tiene que $\lambda_{j_t} = \sigma_{j_t}$ para toda $t \in \{1, \dots, d\}$; y σ_{j_d} pertenece a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, mientras que σ_{j_1} está en su complemento.

Tomemos $j = \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(n)\}$, entonces σ_t pertenece a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ si y sólo si $t \geq j$. Recordemos que, por la convexidad, los 0-simplejos de $\mathcal{Q}(n)$ satisfacen que sus coordenadas con entrada igual a 0 son consecutivas, y lo mismo pasa con sus entradas iguales a 1 (ver Teorema 6.10). Denotaremos la a -ésima coordenada de σ_b por $(\sigma_b)_a$. Sea k tal que $j_{k-1} < j \leq j_k$, entonces, una de las siguientes opciones sucede:

1. si $(\sigma_{k-1})_1 = 0$ y $(\sigma_{k-1})_n = 1$, tenemos que $(\tau_{k-1})_1 = 0$ y $(\tau_{k-1})_n = 1$. Por lo tanto, $\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(n)$ y $\tau^{-1}(1) < \tau^{-1}(n)$;
2. si $(\sigma_{k-1})_n = 0$ y $(\sigma_{k-1})_1 = 1$, tenemos que $(\tau_{k-1})_n = 0$ y $(\tau_{k-1})_1 = 1$. Por lo tanto, $\sigma^{-1}(n) < \sigma^{-1}(1)$ y $\tau^{-1}(n) < \tau^{-1}(1)$;
3. si $(\sigma_{k-1})_n = (\sigma_{k-1})_1 = 1$, entonces $(\tau_{k-1})_n = (\tau_{k-1})_1 = 1$. Sea ℓ tal que $(\sigma_j)_\ell = 1$ (nótese que $\ell \notin \{1, n\}$). Se satisface exactamente una de las dos siguientes condiciones:

$$(\sigma_{j-1})_\ell = (\sigma_{j-1})_{\ell+1} = \dots = (\sigma_{j-1})_n = 1 \quad \text{ó} \quad (\sigma_{j-1})_\ell = (\sigma_{j-1})_{\ell-1} = \dots = (\sigma_{j-1})_1 = 1.$$

Si sucede la primera de las opciones, implicaría que $\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(n)$, y al mismo tiempo sucedería que $(\tau_{j-1})_\ell = (\tau_{j-1})_{\ell+1} = \dots = (\tau_{j-1})_n = 1$ y por lo tanto, $\tau^{-1}(1) < \tau^{-1}(n)$. En el segundo caso, tendríamos que $\sigma^{-1}(n) < \sigma^{-1}(1)$, y al mismo tiempo sucedería que $(\tau_{j-1})_\ell = (\tau_{j-1})_{\ell-1} = \dots = (\tau_{j-1})_1 = 1$ y por lo tanto, $\tau^{-1}(n) < \tau^{-1}(1)$.

En cualquiera de los casos se ve que la equivalencia propuesta en el enunciado sucede. ■

Observación 6.31. En otras palabras, el lema que se acaba de demostrar nos dice que si Δ es un j -simplejo de $\mathcal{Q}(n)$ que intersecta a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ y a su complemento, entonces, para todas las permutaciones $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tales que $\Delta \subset \Delta_\sigma$ se satisface que $\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(n)$, o para todas las permutaciones $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tales que $\Delta \subset \Delta_\sigma$ se satisface que $\sigma^{-1}(n) < \sigma^{-1}(1)$.

Teorema 6.32. *El espacio $\mathcal{Q}(n)$ es homeomorfo a T^{n-2} .*

Demostración. Para $n = 3$ y $n = 4$ el resultado se sigue de los ejemplos 6.6 y 6.23, respectivamente. La demostración para $n \geq 5$ lo dividiremos en cuatro pasos:

Paso 1 - Descripción de una estructura simplicial abstracta auxiliar:

Construiremos una estructura simplicial $\mathcal{K}$ de manera recursiva mediante un algoritmo, comenzando con la descripción de los 0-simplejos, después de los 1-simplejos, y siguiendo así hasta describir al final los $(n - 2)$ -simplejos. El algoritmo es el siguiente:

1. Tomaremos $j = 0$, y consideraremos el complejo simplicial vacío $\mathcal{K}$. Consideraremos $\mathcal{K}^{(1)}$ y $\mathcal{K}^{(n)}$ dos conjuntos vacíos.
2. Para cada j -simplejo Δ en $\mathcal{Q}(n)$ disjunto a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, consideraremos un j -simplejo K_Δ en $\mathcal{K}$, que tendrá como caras propias a los simplejos en $\mathcal{K}$ que se corresponden a las caras propias de Δ .
3. Para cada j simplejo Δ en $\mathcal{Q}(n)$ contenido en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, consideraremos dos simplejos en $\mathcal{K}$, a los cuales denotaremos por $K_{\Delta,1}$ y $K_{\Delta,n}$. $K_{\Delta,1}$ tendrá como caras propias a los simplejos que fueron contruidos a partir de caras propias de Δ y que estén contenidos en $\mathcal{K}^{(1)}$. Por otro lado, $K_{\Delta,n}$ tendrá como caras propias a los simplejos que fueron contruidos a partir de caras propias de Δ y que estén contenidos en $\mathcal{K}^{(n)}$. Después de esto, agregaremos a $K_{\Delta,1}$ y $K_{\Delta,n}$ a los conjuntos $\mathcal{K}^{(1)}$ y $\mathcal{K}^{(n)}$, respectivamente.
4. Para cada j -simplejo Δ en $\mathcal{Q}(n)$ que intersecta a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ y a su complemento, consideraremos un j -simplejo K_Δ en $\mathcal{K}$. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tal que $\Delta \subset \Delta_\sigma$. Si $\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(n)$, entonces las caras propias de K_Δ serán los simplejos en $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^{(n)}$ correspondientes a las caras propias de Δ ; en este caso, agregamos al simplejo K_Δ al conjunto $\mathcal{K}^{(1)}$. Si $\sigma^{-1}(n) < \sigma^{-1}(1)$, entonces las caras propias de K_Δ serán los simplejos en $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^{(1)}$ correspondientes a las caras propias de Δ ; en este caso, agregamos al simplejo K_Δ al conjunto $\mathcal{K}^{(n)}$. Por la Observación 6.30 se tiene que esta parte de la construcción está bien definida, ya que la elección de un σ de modo que Δ_σ contenga al simplejo Δ deja invariante el orden de $\sigma^{-1}(1)$ y $\sigma^{-1}(n)$.
5. Si $j = n - 2$, terminamos. Si no, cambiamos j por $j + 1$ y volvemos al paso 2.

Veamos que el algoritmo anterior en verdad nos describe una estructura simplicial. Esto sucede ya que:

- I. para cada simplejo $\Delta \in \mathcal{Q}(n)$: si Δ es disjunto a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces sus caras también son disjuntas a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$; si Δ está contenido en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces sus caras también están contenidas en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$; si Δ intersecta al conjunto $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ y a su complemento, y $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es tal que $\Delta \subset \Delta_\sigma$ y $\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(n)$, entonces tenemos que todas las caras propias de Δ están contenidas en los simplejos de $\mathcal{Q}(n)$ que se corresponden con simplejos de $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^{(n)}$; y finalmente, si Δ intersecta al conjunto $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ y a su complemento, y $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es tal que $\Delta \subset \Delta_\sigma$ y $\sigma^{-1}(n) < \sigma^{-1}(1)$, entonces tenemos que todas las caras propias de Δ están contenidas en los simplejos de $\mathcal{Q}(n)$ que se corresponden con simplejos de $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^{(1)}$,

II. si $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, se tiene que $K_1 \cap K_2$ también pertenece a $\mathcal{K}$, ya que:

- si $K_1, K_2 \in \mathcal{K} \setminus (\mathcal{K}^{(1)} \cup \mathcal{K}^{(n)})$, entonces existen Δ_1 y Δ_2 simplejos en $\mathcal{Q}(n)$ tales que $K_1 = K_{\Delta_1}$ y $K_2 = K_{\Delta_2}$. En este caso, $K_1 \cap K_2 = K_{\Delta_1} \cap K_{\Delta_2} = K_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$,
- si $K_1, K_2 \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^{(n)}$ y exactamente uno de ellos, digamos K_1 , pertenece a $\mathcal{K}^{(1)}$, entonces existen Δ_1 y Δ_2 simplejos en $\mathcal{Q}(n)$ tales que $K_1 = K_{\Delta_1,1}$ y $K_2 = K_{\Delta_2}$, entonces $K_1 \cap K_2 = K_{\Delta_1,1} \cap K_{\Delta_2} = K_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$,
- si $K_1, K_2 \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^{(1)}$ y exactamente uno de ellos pertenece a $\mathcal{K}^{(n)}$, se resuelve como el caso anterior,
- si $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^{(1)}$, entonces existen Δ_1 y Δ_2 simplejos en $\mathcal{Q}(n)$ tales que $K_1 = K_{\Delta_1,1}$ y $K_2 = K_{\Delta_2,1}$, entonces: si $\Delta_1 \cap \Delta_2$ intersecta a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces $K_1 \cap K_2 = K_{\Delta_1,1} \cap K_{\Delta_2,1} = K_{\Delta_1 \cap \Delta_2,1}$; y si $\Delta_1 \cap \Delta_2$ no intersecta a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces $K_1 \cap K_2 = K_{\Delta_1,1} \cap K_{\Delta_2,1} = K_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$,
- si $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^{(n)}$, se puede proceder de manera análoga al caso anterior,
- si $K_1 \in \mathcal{K}^{(1)}$ y $K_2 \in \mathcal{K}^{(n)}$, entonces existen $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_1$, entonces existen Δ_1 y Δ_2 simplejos en $\mathcal{Q}(n)$ tales que $K_1 = K_{\Delta_1,1}$ y $K_2 = K_{\Delta_2,n}$, entonces: si $\Delta_1 \cap \Delta_2$ se intersectan en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, ya que esta intersección tendría que pertenecer a $\mathcal{K}^{(1)}$ y a $\mathcal{K}^{(n)}$, los cuales son disjuntos; y si $\Delta_1 \cap \Delta_2$ no intersecta a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces $K_1 \cap K_2 = K_{\Delta_1,1} \cap K_{\Delta_2,n} = K_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$.

Por lo tanto, $\mathcal{K}$ es un complejo simplicial.

Consideraremos ahora los subcomplejos simpliciales $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$ de $\mathcal{K}$, de modo que, si el $(n-2)$ -simplejo K_Δ (o $K_{\Delta,1}$, o $K_{\Delta,n}$) satisface que el $(n-2)$ -simplejo Δ está contenido en $\mathcal{Q}_j(n)$, entonces K_Δ y sus caras pertenecerán a $\mathcal{K}_j$.

Paso 2 - Descripción de $\mathcal{K}_j$ y su frontera:

Pensaremos en la realización geométrica de $\mathcal{K}$. Notemos primero que el complejo simplicial $\mathcal{K}_j$ es igual al complejo simplicial $\mathcal{Q}_j(n)$, por lo tanto, la realización geométrica de $\mathcal{K}_j$ es homeomorfa a $\mathcal{Q}_j(n) \cong \mathbb{D}^{n-2}$ (ver Lema 6.26).

Ahora, demostraremos que, si $j < k$, entonces $\mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}_k \cong \mathbb{D}^{n-2-(k-j)}$, y esto está contenido en $\mathcal{K}_{k-1}$. Notemos que hay dos formas de que el n -segmento $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ esté en dicha intersección:

Caso 1. si $x_j = x_{j+1} = \dots = x_k = 0$,

Caso 2. si $x_k = x_{k+1} = \dots = x_n = x_1 = \dots = x_j$.

En el caso 1, se puede ver que el subconjunto obtenido es homeomorfo a $\mathcal{K}_j(n - (k - j))$ usando el mapeo

$$(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, 0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

y por lo tanto es homeomorfo a $\mathbb{D}^{n-2-(k-j)}$. Para el caso 2 se puede ver que los elementos de esa forma están contenidos en $\mathcal{K}_n$ y en $\mathcal{K}_1$, pero estos conjuntos son disjuntos ya que $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}^{(1)}$ y $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}^{(n)}$, los cuales son disjuntos.

Además podemos ver que $\mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}_k \subseteq \partial \mathcal{K}_j \cap \partial \mathcal{K}_k$, ya que este fenómeno sucede en $\mathcal{Q}(n)$, es decir, sucede que $\mathcal{Q}_j(n) \cap \mathcal{Q}_k(n) \subseteq \partial \mathcal{Q}_j(n) \cap \partial \mathcal{Q}_k(n)$ pues en caso contrario se intersectarían en su interior y tendríamos un Δ_σ contenido en $\mathcal{Q}_j(n)$ y en $\mathcal{Q}_k(n)$.

Paso 3 - Topología de $\mathcal{K}$:

Demostraremos, inductivamente, que

$$\bigcup_{t=1}^j \mathcal{K}_t \cong \mathbb{D}^{n-2}.$$

Para $j = 1$ la afirmación se sigue de que $\mathcal{K}_t \equiv \mathbb{D}^{n-2}$ para cualquier t . Supongamos entonces que la afirmación es cierta para alguna $j < n$, y demostraremos que esto es cierto para $j + 1$. Notemos que

$$\left(\bigcup_{t=1}^j \mathcal{K}_t \right) \cap \mathcal{K}_{j+1} = \mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}_{j+1} \quad (6.1)$$

ya que $\mathcal{K}_t \cap \mathcal{K}_{j+1} \subseteq \mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}_{j+1}$. Además,

$$\left(\bigcup_{t=1}^j \mathcal{K}_t \right) \cap \mathcal{K}_{j+1} \subseteq \partial \mathcal{K}_{j+1} \quad \text{y} \quad \left(\bigcup_{t=1}^j \mathcal{K}_t \right) \cap \mathcal{K}_{j+1} \subseteq \partial \left(\bigcup_{t=1}^j \mathcal{K}_t \right);$$

lo primero sucede por la ecuación (6.1) y del hecho de que $\mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}_{j+1} \subseteq \partial \mathcal{K}_j \cap \partial \mathcal{K}_{j+1}$ demostrado en el **Paso 2**; y lo segundo sucede ya que si $\mathcal{K}_{j+1}$ intersectara al interior de $\bigcup_{t=1}^j \mathcal{K}_t$ implicaría que existe $k < j+1$ tales que $\mathcal{K}_k$ y $\mathcal{K}_j$ se intersectan en su interior, lo cual es una contradicción pues vimos en el **Paso 2** que sólo se intersectan en sus fronteras.

Como $\bigcup_{t=1}^j \mathcal{K}_t$ y $\mathcal{K}_{j+1}$ son complejos simpliciales homeomorfos a $\mathbb{D}^{n-2}$ cuya intersección es un subcomplejo simplicial contenida en sus fronteras y es homeomorfa a $\mathbb{D}^{n-3}$, podemos concluir por el Teorema A.2 que $\bigcup_{t=1}^{j+1} \mathcal{K}_t$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^{n-2}$.

Con lo anterior, queda demostrado que $\mathcal{K}$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^{n-2}$.

Paso 4 - Topología de $\mathcal{Q}(n)$:

Denotemos por $\mathcal{K}^-$ y $\mathcal{K}^+$ a los subcomplejos simpliciales de $\mathcal{K}^{(1)}$ y $\mathcal{K}^{(n)}$ que corresponden a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, respectivamente. Sea $\sim_{\mathcal{K}}$ la relación de equivalencia entre los elementos de $\mathcal{K}^-$ y $\mathcal{K}^+$ la cual, para cualquier Δ simplejo en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, relaciona $K_{\Delta,1}$ con $K_{\Delta,n}$. Para cada simplejo $K \in \mathcal{K}$, denotaremos por $[K]$ al simplejo correspondiente en $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}}$. En este caso, si un simplejo K_{Δ^*} tiene como cara al simplejo $K_{\Delta,1}$ (o $K_{\Delta,n}$) en $\mathcal{K}$, entonces, en $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}}$, el simplejo $[K_{\Delta^*}]$ tiene como cara al simplejo $[K_{\Delta,1}]$ (o $[K_{\Delta,n}]$). De este modo, se ve que $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}}$ es cerrado bajo contensión; y además, como para cualesquiera $K_{\Delta_1,1}$ y $K_{\Delta_2,n}$ se tiene que $[K_{\Delta_1,1}] \cap [K_{\Delta_2,n}] = [K_{\Delta_1 \cap \Delta_2}]$. Por lo anterior, podemos deducir que $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}}$ es una estructura simplicial.

Veamos que $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}} \cong \mathcal{Q}(n)$, para esto consideremos la función $\mathcal{P}_0$ que hace una asignación de los vértices de $\mathcal{Q}(n)$ en los vértices de $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}}$, dada por

$$\mathcal{P}_0(\Delta) = \begin{cases} [K_{\Delta}] & \text{para todo 0-simplejo } \Delta \text{ en } \mathcal{Q}(n) \setminus (\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)), \\ [K_{\Delta,1}] = [K_{\Delta,n}] & \text{para todo 0-simplejo } \Delta \text{ en } \mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n). \end{cases}$$

Usaremos también la notación $[K_\Delta]$ para referirnos al vértice $[K_{\Delta,1}] = [K_{\Delta,n}]$. Definiremos a partir de $\mathcal{P}_0$ una función $\mathcal{P}$ que va de los simplejos de $\mathcal{Q}(n)$ a los simplejos de $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}}$, de modo que si Δ es un j -simplejo de $\mathcal{Q}(n)$ que tiene por vértices a los 0-simplejos $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_j$, entonces su imagen es el simplejo en $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}}$ que tiene como vértices a los 0-simplejos $\mathcal{P}_0(\Delta_0), \mathcal{P}_0(\Delta_1), \dots, \mathcal{P}_0(\Delta_j)$. Veamos que esto está bien definido ya que:

- si Δ es disjunto a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces K_Δ es el simplejo en $\mathcal{K}$ que tiene por vértices a los simplejos $K_{\Delta_0}, K_{\Delta_1}, \dots, K_{\Delta_j}$, y por lo tanto, el simplejo $[K_\Delta]$ tiene por vértices a los simplejos $[K_{\Delta_0}] = \mathcal{P}_0(\Delta_0), [K_{\Delta_1}] = \mathcal{P}_0(\Delta_1), \dots, [K_{\Delta_j}] = \mathcal{P}_0(\Delta_j)$,
- si Δ intersecta a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ y a su complemento, y $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es tal que $\Delta \subseteq \Delta_\sigma$ y $\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(n)$, y los vértices $\Delta_0, \dots, \Delta_t$ son los vértices de Δ dentro de $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces $K_{\Delta,1}$ es el simplejo en $\mathcal{K}$ que tiene por vértices a los 0-simplejos $K_{\Delta_0,1}, K_{\Delta_1,1}, \dots, K_{\Delta_t,1}, K_{\Delta_{t+1}}, K_{\Delta_{t+2}}, \dots, K_{\Delta_j}$, y por lo tanto, el simplejo $[K_\Delta]$ tiene por vértices a los simplejos $[K_{\Delta_0}] = \mathcal{P}_0(\Delta_0), [K_{\Delta_1}] = \mathcal{P}_0(\Delta_1), \dots, [K_{\Delta_j}] = \mathcal{P}_0(\Delta_j)$,
- si Δ intersecta a $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ y a su complemento, y $\sigma \in \mathcal{S}_n$ es tal que $\Delta \subseteq \Delta_\sigma$ y $\sigma^{-1}(n) < \sigma^{-1}(1)$, se procede de manera análoga al caso anterior,
- si Δ está contenido en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, entonces $K_{\Delta,1}$ y $K_{\Delta,n}$ son los simplejos en $\mathcal{K}$ que tienen por vértices a los simplejos $K_{\Delta_0,1}, K_{\Delta_1,1}, \dots, K_{\Delta_j,1}$, y a los simplejos $K_{\Delta_0,n}, K_{\Delta_1,n}, \dots, K_{\Delta_j,n}$, respectivamente; por lo tanto, el simplejo $[K_\Delta]$ tiene por vértices a los simplejos $[K_{\Delta_0}] = \mathcal{P}_0(\Delta_0), [K_{\Delta_1}] = \mathcal{P}_0(\Delta_1), \dots, [K_{\Delta_j}] = \mathcal{P}_0(\Delta_j)$.

Con lo anterior también podemos ver que dado un simplejo Δ en $\mathcal{Q}(n)$ y una cara Δ^* de Δ , tenemos que los vértices de $[K_{\Delta^*}]$ es subconjunto de los vértices de $[K_\Delta]$. Tenemos además que la función $\mathcal{P}$ es biyectiva, pues $\mathcal{P}(\Delta) = [K_\Delta]$. Por lo tanto, podemos concluir que $\mathcal{P}$ define un homeomorfismo.

Recordemos que $\mathcal{K} \cong \mathbb{D}^{n-2}$, y que $\mathcal{Q}(n) \cong \mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}}$. Además, tenemos que

- $\mathcal{K}^- \cong \mathcal{K}^+ \cong \mathbb{D}^{n-3}$: estos conjuntos corresponden a las copias de $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$ en $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_n$, respectivamente,
- $\mathcal{K}^-$ y $\mathcal{K}^+$ son disjuntos: esto sucede ya que $\mathcal{K}^-$ y $\mathcal{K}^+$ están contenidos en $\mathcal{K}^{(1)}$ y $\mathcal{K}^{(n)}$, respectivamente, los cuales son disjuntos,
- $\mathcal{K}^-$ y $\mathcal{K}^+$ están contenidos en $\partial\mathcal{K}$: esto sucede ya que para todo $(n-3)$ -simplejo Δ contenido en $\mathcal{Q}_1(n) \cap \mathcal{Q}_n(n)$, existen exactamente dos permutaciones $\sigma_1, \sigma_n \in \mathcal{S}_n$ tales que $\Delta \subseteq \Delta_{\sigma_1}$ y $\Delta \subseteq \Delta_{\sigma_n}$, los cuales satisfacen que $\Delta_{\sigma_1} \subseteq \mathcal{Q}_1(n)$ y $\Delta_{\sigma_n} \subseteq \mathcal{Q}_n(n)$, y por lo tanto, los únicos $(n-2)$ -simplejos que contienen a $K_{\Delta,1}$ y $K_{\Delta,n}$ son $K_{\Delta_{\sigma_1},1}$ y $K_{\Delta_{\sigma_n},n}$, respectivamente; por lo tanto cualquier $(n-3)$ -simplejo $K_{\Delta,1}$ en $\mathcal{K}^-$ (o $K_{\Delta,n}$ en $\mathcal{K}^+$) está contenido en un solo $(n-2)$ -simplejo, y por lo tanto está en la frontera de $\mathcal{K}$.

Con lo anterior, por el Teorema A.3 y del hecho de que $\mathcal{Q}(n)$ es orientable, tenemos que $\mathcal{K}/\sim_{\mathcal{K}} \cong T^{n-2}$ y, por lo tanto, $\mathcal{Q}(n) \cong T^{n-2}$. ■

Corolario 6.33. *El espacio $\mathbb{Q}(n)$ es difeomorfo a $\mathcal{C}_{T^{n-2}} \times \mathbb{R}^3$.*

Demostración. Consideremos la función

$$\varsigma : \mathcal{L}(n) \rightarrow \mathbb{S}^{n-2}$$

$$Z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto \frac{1}{\|Z - \vec{z}_1\|} ((z_2, \dots, z_n) - \vec{z}_1).$$

Claramente ς es un homeomorfismo.

Sean ψ , Υ y Ψ los difeomorfismos de las pruebas del Lema 5.2, Corolario 5.3 y Corolario 5.4, respectivamente. Tenemos que $\psi((\varsigma(\mathcal{Q}(n)) \times [0, \pi]) / \{(X, 0) \sim (-X, \pi)\})$ es el conjunto de n -segmentos convexos en $\mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}$ ya que las funciones ς y ψ no alteran el orden cíclico de los vértices, es decir, dicha imagen es $\mathbb{Q}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3} \cong \mathcal{C}_{T^{n-2}}$. También tenemos que la imagen $\Upsilon((\mathbb{Q}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}) \times \mathbb{R})$ es el conjunto $\mathbb{Q}(n) \cap \mathbb{M}(n)$, pues $Z \in \mathbb{L}(n) \cap \mathbb{S}^{2n-3}$ es convexo si y sólo si y para cualquier $r \in \mathbb{R}$ se tiene que $\Upsilon((Z, r))$ es un n -segmento convexo. De lo anterior tenemos que $\mathcal{Q}(n) \cap \mathbb{M}(n) \cong T^{n-2} \times \mathbb{R}$. De manera similar, deducimos que $\mathbb{Q}(n) = \Psi(\mathcal{Q}(n) \cap \mathbb{M}(n)) \cong \mathcal{C}_{T^{n-2}} \times \mathbb{R}^3$. ■

Corolario 6.34. *El espacio $Q(n)$ es homeomorfo a $\mathcal{C}_{\mathbb{D}^{n-3}}$ para n par, y homeomorfo a T^{n-2} para n impar.*

Demostración. Por el Teorema 6.32 sabemos que $\mathcal{Q}(n) \cong T^{n-2}$. Por otro lado, sabemos que $Q(n) \cong \mathcal{Q}(n) / \{X \sim -X\}$. Por el Teorema A.4, se tiene que $Q(n)$ es homeomorfo a T^{n-2} o a $\mathcal{C}_{\mathbb{D}^{n-3}}$.

Para n impar, se tiene que $T^{n-2} \cong \mathcal{C}_{\mathbb{D}^{n-3}}$, por lo que $Q(n)$ es homeomorfo a T^{n-2} en este caso. Para n par, podemos observar que el mapeo $X \mapsto -X$ en $\mathbb{S}^{n-2}$ no preserva orientación, por lo tanto, $Q(n) \cong \mathcal{C}_{\mathbb{D}^{n-3}}$ en este caso. ■

Capítulo 7

El orbifold $\mathcal{L}(n)$

En este capítulo demostraremos que $\mathcal{L}(n)$ es un orbifold esférico y describiremos su locus singular (para las definiciones de orbifold y locus singular, ver Apéndice A.3).

Recordemos que $\mathcal{L}(n) \cong \mathbb{S}^{n-2}$ es el doble cubriente de $L(n) \cong \mathbb{S}^{n-2}/\{X \sim -X\}$. Sea $\hat{\mu}$ el levantamiento de la función $\mu|_{L(n)}$ al conjunto $V_n \cap \mathbb{R}^n$ dado por

$$\hat{\mu}(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = (0, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_2, -x_2),$$

es decir, se satisface $\mu \circ \eta = \eta \circ \hat{\mu}$. De este punto en adelante, pensaremos en $V_n \cap \mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\vec{0}\}$, al identificar cada n -segmento $(0, x_2, \dots, x_n)$ con el punto $(x_2, \dots, x_n)$, y denotaremos por $\mathcal{M}$ a la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ asociada a $\hat{\mu}$.

Proposición 7.1. *Los eigenvalores de $\mathcal{M}$ son $e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{2\frac{2\pi i}{n}}, \dots, e^{(n-1)\frac{2\pi i}{n}}$, y los eigenvectores asociados son*

$$B_k = (e^{k\frac{2\pi i}{n}} - 1, e^{2k\frac{2\pi i}{n}} - 1, \dots, e^{(n-1)k\frac{2\pi i}{n}} - 1), \text{ para } k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{M}_j = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de tamaño $j \times j$ con -1 's en cada entrada de la primer columna, 1 's en las entradas inmediatamente arriba de la diagonal y 0 's en todas las otras entradas. Notemos que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{n-1}$. Se puede usar inducción para ver que el polinomio característico de $\mathcal{M}_j$ es el polinomio ciclotómico de grado j . Esto es fácil verlo para $j = 1$. Suponiendo que es cierto para $\mathcal{M}_{k-1}$ y procediendo por menores podemos llegar a que

$$\det[\lambda I_k - \mathcal{M}_k] = \lambda \det[\lambda I_{k-1} - \mathcal{M}_{k-1}] + 1 = \lambda(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \dots + 1) + 1 = \lambda^k + \lambda^{k-1} + \dots + 1.$$

Así tenemos que los eigenvalores de $\mathcal{M}$ son las $n-1$ raíces n -ésimas de la unidad distintas de 1. Se sigue que los eigenvectores son $\mathcal{M}(B_k) = e^{k\frac{2\pi i}{n}} B_k$, para todo $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. ■

Definición 7.2. Sea $R_\theta \in GL_2(\mathbb{R})$ la matriz de rotación de ángulo θ , en sentido antihorario. Denotaremos por $\mathcal{R}_n \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ a la matriz dada por:

- a. si n es impar, $\mathcal{R}_n$ está conformado por bloques de tamaño 2×2 en la diagonal dados por las matrices de rotación $R_{1, \frac{2\pi}{n}}, R_{2, \frac{2\pi}{n}}, \dots, R_{\frac{n-1}{2}, \frac{2\pi}{n}}$, y el resto de las entradas son 0's.
- b. si n es par, $\mathcal{R}_n$ está conformado por bloques de tamaño 2×2 en la diagonal dados por las matrices de rotación $R_{1, \frac{2\pi}{n}}, R_{2, \frac{2\pi}{n}}, \dots, R_{\frac{n-2}{2}, \frac{2\pi}{n}}$, en la última entrada de la diagonal hay un -1 , y en las entradas restantes hay 0's.

De la Proposición 7.1 tenemos que los isomorfismos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{R}_n$ son conjugados. De hecho, $\mathcal{R}_n = \mathcal{B}_n^{-1} \mathcal{M} \mathcal{B}_n$, con $\mathcal{B}_n \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ la matriz conformada por las columnas $C_1, S_1, \dots, C_{\frac{n-1}{2}}, S_{\frac{n-1}{2}}$ para n impar y las columnas $C_1, S_1, \dots, C_{\frac{n-2}{2}}, S_{\frac{n-2}{2}}, -C_{\frac{n}{2}}$ para n par, donde

$$C_j = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi j}{n} - 1 \\ \cos \frac{2\pi j}{n} - 1 \\ \vdots \\ \cos \frac{(n-1)2\pi j}{n} - 1 \end{pmatrix} \quad y \quad S_j = \begin{pmatrix} -\sin \frac{2\pi j}{n} - 1 \\ -\sin \frac{2\pi j}{n} - 1 \\ \vdots \\ -\sin \frac{(n-1)2\pi j}{n} - 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 7.3. Dados dos elementos g y h de un grupo, denotaremos por $\langle g, h \rangle$ al grupo generado por g y h .

Definición 7.4. Se denotará por $\nu : \mathbb{S}^{n-2} \rightarrow \mathbb{S}^{n-2}$ a la función que hace la asignación $X \mapsto -X$.

Teorema 7.5. El espacio $\mathcal{L}(n)$ es homeomorfo al orbifold esférico $\mathbb{S}^{n-2}/\langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$.

Demostración. Como $\mathcal{M}$ es el levantamiento de μ a $\mathbb{R}^{n-1}$ y es conjugado a $\mathcal{R}_n$, entonces el cociente $\mathcal{L}(n) = L(n)/\langle \mu \rangle = (\mathbb{S}^{n-2}/\langle \nu \rangle)/\langle \mu \rangle$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-2}/\langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$. Es claro que $\langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$ es un subgrupo del grupo ortogonal $O(n-1)$ y por lo tanto $\mathcal{L}(n)$ es un orbifold. ■

Para los siguientes resultados estaremos usando las nociones de espacios lente y espacios orbifold lentes (ver Apéndice A.3).

Proposición 7.6. Sea n impar. El espacio $\mathcal{L}(n)$ es homeomorfo a $L_{2n}(n+2, n+4, \dots, 2n-1)$ y por lo tanto, $\mathcal{L}(n)$ es una variedad para n primo.

Demostración. Como n y 2 son coprimos, entonces el grupo $\langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$ es isomorfo al grupo cíclico $\langle \nu \mathcal{R}_n \rangle$. Identificaremos $\mathbb{R}^{n-1}$ y $\mathbb{C}^{\frac{n-1}{2}}$ bajo la asignación $(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) \mapsto (x_1 + ix_2, \dots, x_{n-2} + ix_{n-1})$. El generador $\nu \mathcal{R}_n$ en $\mathbb{C}^{\frac{n-1}{2}}$ hace el mapeo

$$(z_1, z_2, \dots, z_{\frac{n-1}{2}}) \mapsto (e^{2\pi i(\frac{n+2}{2n})} z_1, e^{2\pi i(\frac{n+4}{2n})} z_2, \dots, e^{2\pi i(\frac{2n-1}{2n})} z_{\frac{n-1}{2}}).$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(n) = \mathbb{S}^{n-2} / \langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle = \mathbb{S}^{n-2} / \langle \nu \mathcal{R}_n \rangle$ es homeomorfo al espacio $L_{2n}(n+2, n+4, \dots, n+(n-1))$. Nótese que para números primos $n \geq 3$, $2n$ es coprimo con cada uno de los enteros $n+2, n+4, \dots, 2n-1$. Por lo tanto, en caso de que n sea primo se tiene que $L_{2n}(n+2, n+4, \dots, 2n-1)$ es un espacio lente, y por lo tanto, variedad. ■

Ejemplo 7.7. Los primeros tres espacios de n -segmentos sin etiquetas son:

- Para $n = 3$ tenemos que todo elemento de $\mathcal{L}(3)$ está representado por algún punto $\eta((0, 1, x))$ para $0 \leq x \leq 1$, y además $x = 0$ y $x = 1$ representan el mismo punto, por lo tanto

$$\mathcal{L}(3) \cong L(3) / \langle \mu \rangle \cong \left\{ \eta((0, 1, x)) \in P(3) : x \in [0, 1] \right\} / \left\{ \eta((0, 1, 0)), \eta((0, 1, 1)) \right\} \cong \mathbb{S}^1.$$

- Para $n = 4$ se tiene que

$$\mathcal{L}(4) \cong \mathbb{S}^2 / \langle \mathcal{R}_4, \nu \rangle \cong \mathbb{D}^2.$$

Esto se puede ver en la Figura 7.1.

- Para $n = 5$, por la Proposición 7.6, podemos deducir que

$$\mathcal{L}(5) \cong L_{10}(7, 9).$$

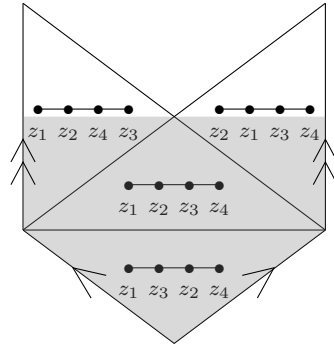


Figura 7.1: En la figura se muestran cuatro simplejos de $\mathcal{L}(4)$, llamemos $\mathcal{F}$ a la cerradura de la región gris. Se tiene que $\mathcal{F}$ es una región fundamental para la acción de $\langle \mathcal{R}_4, \nu \rangle$ en $\mathcal{L}(4)$, o visto de otra forma, $\eta|_{\mathcal{F}}$ es inyectiva, y $\eta(\mathcal{F})$ es una región fundamental para la acción μ en $L(4)$. Haciendo los pegados indicados en la figura se puede ver que $\mathcal{L}(4) \cong \mathbb{D}^2$.

7.1. El locus singular en $\mathcal{L}(n)$

Observación 7.8. Cuando n es primo, tenemos que $\mathcal{L}(n)$ es una variedad, y en este caso el locus singular es vacío.

Consideraremos de ahora en adelante que n es un número compuesto. Como

$$\mathcal{L}(n) \cong L(n)/\langle \mu \rangle \cong \mathbb{S}^{n-2}/\langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$$

(ver Teorema 7.5), el conjunto de puntos singulares coincide con el conjunto de puntos fijos de $L(n)$ por algún elemento no trivial en $\langle \mu \rangle$, lo cual a su vez equivale al conjunto de puntos fijos en $\mathbb{S}^{n-2}$ por algún elemento no trivial de $\langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$.

Sea $X \in L(n)$, $j \in \mathbb{N}$ y $MCD(j, n) = g$. Entonces $\mu^j(X) = X$ si y sólo si $\mu^g(X) = X$. Por lo tanto, únicamente es necesario estudiar el locus singular cuando j es un divisor de n . De ahora en adelante, supondremos que $n = jk$ con $0 < j < n$.

Definición 7.9. Usaremos la notación

$$\ell_+^j(n) := \{X \in \mathbb{S}^{n-2} : \mathcal{R}_n^j(X) = X\} \quad \text{y} \quad \ell_-^j(n) := \{X \in \mathbb{S}^{n-2} : \mathcal{R}_n^j(X) = -X\}.$$

Además, denotaremos $\ell^j(n) = \ell_+^j(n) \cup \ell_-^j(n)$.

Teorema 7.10. Sea j un divisor propio de n , y $k = \frac{n}{j}$. Entonces $\ell^j(n)$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^{j-2}$ para k impar, y es homeomorfo a $\mathbb{S}^{j-2} \cup \mathbb{S}^{j-1}$ para k par.

Demostración. Tomemos $n = jk$, con $j < n$. Para n impar tenemos que $\mathcal{R}_n^j$ está conformado por los bloques $R_{1, \frac{2\pi}{k}}, R_{2, \frac{2\pi}{k}}, \dots, R_{\frac{n-1}{2}, \frac{2\pi}{k}}$ en la diagonal; y para n par está conformado por los bloques $R_{1, \frac{2\pi}{k}}, R_{2, \frac{2\pi}{k}}, \dots, R_{\frac{n-2}{2}, \frac{2\pi}{k}}$ y la entrada $(-1)^j$ en la diagonal (esto se sigue de la Definición 7.2).

Para determinar $\ell_+^j(n)$ basta encontrar el subconjunto de $\mathbb{R}^{n-1}$ que fija $\mathcal{R}_n^j$, y para esto basta determinar los bloques $R_{m, \frac{2\pi}{k}}$ que son la identidad. Para determinar $\ell_-^j(n)$ se procede de manera similar, salvo que buscaremos bloques que sean la identidad negativa. Además, para n par también debemos considerar el signo de la última entrada en la diagonal, dado por $(-1)^j$.

Para n es impar tenemos que j y k son impares. Entonces, los bloques $R_{m, \frac{2\pi}{k}}$ correspondientes a $m \in \{k, 2k, \dots, \frac{(j-1)k}{2}\}$ conforman los bloques identidad de tamaño 2×2 en la diagonal de $\mathcal{R}_n^j$. Además, no hay bloques de tamaño 2×2 que sean igual a la identidad negativa. En este caso, concluimos que $\ell_+^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-2}$ y $\ell_-^j(n) = \emptyset$.

Si n es par y k es impar, entonces j es par. En este caso, los bloques $R_{m, \frac{2\pi}{k}}$ que corresponden a $m \in \{k, 2k, \dots, \frac{(j-2)k}{2}\}$ conforman los bloques identidad de tamaño 2×2 en la diagonal de $\mathcal{R}_n^j$, y además, la entrada $(-1)^j$ es un 1 en la diagonal de esta matriz. Por otro lado, no hay bloques de tamaño 2×2 que sean igual a la identidad negativa. En este caso también concluimos que $\ell_+^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-2}$ y $\ell_-^j(n) = \emptyset$.

Para n y k pares, y j impar, los bloques $R_{m, \frac{2\pi}{k}}$ que corresponden a $m \in \{k, 2k, \dots, \frac{(j-1)k}{2}\}$ conforman los bloques identidad de tamaño 2×2 en la diagonal de $\mathcal{R}_n^j$. Por otro lado, los bloques $R_{m, \frac{2\pi}{k}}$ correspondientes a $m \in \{\frac{k}{2}, \frac{3k}{2}, \dots, \frac{(j-2)k}{2}\}$ conforman a los bloques de tamaño 2×2 que son iguales a la identidad negativa en la diagonal de $\mathcal{R}_n^j$, y además, $(-1)^j$ es otra entrada en la diagonal que es igual a -1 . En este caso, tenemos que $\ell_+^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-2}$ y $\ell_-^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-1}$.

El caso restante es cuando n , k y j son pares. Los bloques $R_{m, \frac{2\pi}{k}}$ que corresponden a $m \in \{k, 2k, \dots, \frac{(j-2)k}{2}\}$ conforman los bloques identidad de tamaño 2×2 que están en la diagonal de $\mathcal{R}_n^j$, y además, la entrada $(-1)^j$ es otro 1 en la diagonal de esta matriz. Por otro lado, los bloques $R_{m, \frac{2\pi}{k}}$ correspondientes a $m \in \{\frac{k}{2}, \frac{3k}{2}, \dots, \frac{(j-1)k}{2}\}$ conforman los bloques de tamaño 2×2 que son iguales a la identidad negativa en la diagonal de $\mathcal{R}_n^j$. Para este caso, tenemos que $\ell_+^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-2}$ y $\ell_-^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-1}$. ■

Definición 7.11. Dado un conjunto X , se denotará por $\mathcal{C}_X$ al cono

$$X \times [0, 1] / (X \times \{1\}).$$

Teorema 7.12. El cociente $\ell^j(n) / \langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$ es homeomorfo a:

1. $\mathcal{L}(j)$ para k impar.
2. $\mathcal{L}(j) \cup L_{2j}(1, 3, 5, \dots, j-1)$ para k y j pares.
3. $\mathcal{L}(j) \cup (\mathcal{C}_{L_j(1, 3, \dots, j-2)} / \{([X], 1) \sim ([-X], 1)\})$, donde $[X] \in L_j(1, 3, \dots, j-2)$ denota la clase de $X \in \ell_-^j(n)$ con última coordenada igual a 0, para k par y j impar.

Demostración. El grupo $\langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$ actúa en la esfera $\ell_+^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-2}$ de la misma manera que el grupo $\langle \mathcal{R}_j, \nu \rangle$ actúa en este mismo conjunto (ver Teorema 7.10). Entonces, para cualquiera de los casos tenemos que $\ell_+^j(n) / \langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle \cong \mathcal{L}(j)$ (ver Teorema 7.5).

Si k es impar, tenemos que $\ell_-^j(n) = \emptyset$, por lo que el primer inciso del teorema queda demostrado. Para k par tenemos que $\ell_-^j(n)$ es una copia de $\mathbb{S}^{j-1}$. Como $\mathcal{R}_n^j$ actúa igual que ν en $\ell_-^j(n)$, tenemos que $\ell_-^j(n) / \langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle \cong \ell_-^j(n) / \langle \mathcal{R}_n \rangle$. Notemos que $\mathcal{R}_n$ restringido a $\ell_-^j(n)$ tiene orden $2j$. Consideraremos los siguientes dos casos:

- *Caso j par:* Si identificamos al subespacio real de dimensión j que contiene a $\ell_-^j(n)$ con $\mathbb{C}^{\frac{j}{2}}$, la acción $\mathcal{R}_n$ actúa en $\ell_-^j(n)$ como

$$(z_1, z_2, \dots, z_{\frac{j}{2}}) \mapsto (e^{2\pi i(\frac{1}{2j})} z_1, e^{2\pi i(\frac{3}{2j})} z_2, \dots, e^{2\pi i(\frac{j-1}{2j})} z_{\frac{j}{2}}).$$

En este caso concluimos que $\ell_-^j(n) / \langle \mathcal{R}_n \rangle \cong L_{2j}(1, 3, 5, \dots, j-1)$ (ver Proposición 7.6).

- *Case j impar:* Como $\mathcal{R}_n^j$ coincide con ν en $\ell_-^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-1}$, tenemos que el hemisferio superior de $\mathbb{S}^{j-1}$ contiene a elementos de todas las clases de $\ell_-^j(n) / \langle \mathcal{R}_n \rangle$ ya que la entrada $(n-1, n-1)$ de la matriz $\mathcal{R}_n$ es -1 (ver prueba del Teorema 7.10). Sea $S_r \subset \ell_-^j(n)$ el conjunto de puntos de $\ell_-^j(n) \cong \mathbb{S}^{j-1}$ tal que la última coordenada es $r \in [-1, 1]$. Notemos que $\mathcal{R}_n(S_r) = S_{-r}$. Trabajaremos en tres casos dependiendo del valor de r :

1. Los bloques de $\mathcal{R}_n$ que actúan en S_0 son los bloques $R_{m, \frac{2\pi}{k}}$ correspondientes a $m \in \{k, 3k, \dots, \frac{(j-2)k}{2}\}$ (ver la prueba del Teorema 7.10). Por lo tanto, $S_0 / \langle \mathcal{R}_n \rangle$ es homeomorfo al espacio $L_{2j}(1, 3, \dots, j-2)$.

2. Si $0 < r < 1$, la acción del grupo $\langle \mathcal{R}_n \rangle$ en S_r es la misma que la del grupo $\langle \mathcal{R}_n^2 \rangle$ (las potencias impares de $\mathcal{R}_n$ envían S_r en $-S_r$, lo cual estaría contenido en el hemisferio inferior de $\mathbb{S}^{j-1}$). Por lo tanto, $S_r / \langle \mathcal{R}_n \rangle = S_r / \langle \mathcal{R}_n^2 \rangle$, y podemos concluir que en este caso, $S_r / \langle \mathcal{R}_n \rangle$ es homeomorfo a $L_j(1, 3, \dots, j-2)$ (ver la prueba del Teorema 7.10).
3. Como $S_1 = \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$, entonces $S_1 / \langle \mathcal{R}_n \rangle$ es un punto.

Para todo m se tiene que $2m = j + l$ para algún l impar, por lo tanto, tenemos que $\mathcal{R}_n^{2m}(X) = \mathcal{R}_n^{j+l}(X) = -\mathcal{R}_n^l(X)$, de donde se sigue que $L_{2j}(1, 3, \dots, j-2)$ es homeomorfo a $L_j(1, 3, \dots, j-2) / \{[X] \sim [-X]\}$. Haciendo los pegados correspondientes al variar r en el intervalo $[0, 1]$, podemos concluir que $\ell_-^j(n) / \langle \mathcal{R}_n \rangle$ es homeomorfo a $\mathcal{C}_{L_j(1,3,\dots,j-2)} / \{([X], 0) \sim ([-X], 0)\}$. ■

Notemos que si m divide a j se tiene que $\ell^m(n) \subset \ell^j(n)$ y $\ell^m(n) / \langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle \subset \ell^j(n) / \langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$. En la siguiente figura se muestra un diagrama que muestra las contenciones de estos espacios cuando $n = 20$.

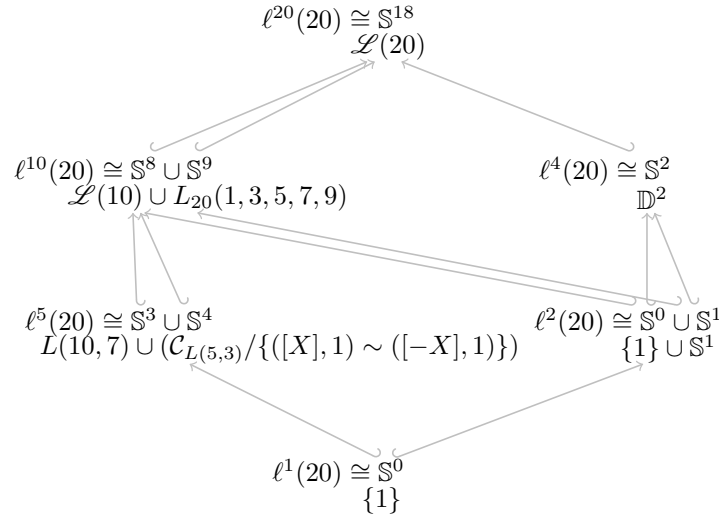


Figura 7.2: Los conjuntos de 20-segmentos fijos por alguna potencia j que divide a 20. El primer renglón de cada nodo del diagrama representa a los conjuntos $\ell^j(20) = \ell_+^j(20) \cup \ell_-^j(20)$, mientras que el segundo renglón muestra el cociente $\ell^j(20) / \langle \mathcal{R}_n, \nu \rangle$. Las flechas indican las contenciones entre estos conjuntos/espacios. En el diagrama usamos que $L_5(1, 3) = L(5, 3)$, $\mathcal{L}(4) = \mathbb{D}^2$ y $\mathcal{L}(5) = L(10, 7)$ (ver Ejemplo 7.7).

Apéndice A

Resultados topológicos

En este apéndice se mencionan propiedades topológicas que son útiles para el desarrollo de la tesis. Las secciones [A.1](#) y [A.2](#) son necesarias en la construcción de la topología de $\mathcal{Q}(n)$. La Sección [A.3](#) es una introducción a las definiciones generales usadas en el Capítulo [7](#).

A.1. Pegado de complejos simpliciales

En este apéndice daremos unos teoremas útiles en el pegado de complejos simpliciales. Comenzaremos por una observación que es un resultado conocido.

Observación A.1. Sean $D_1 \cong D_2 \cong \mathbb{D}^m$, y sea $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ un homeomorfismo. Se tiene que el homeomorfismo h se puede extender a un homeomorfismo $h' : D_1 \rightarrow D_2$.

La observación anterior se sigue de que, al tener un homeomorfismo $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$, el homeomorfismo que extiende h a todo D_1 está dada por

$$h'(x) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } x = \vec{0}, \\ \|x\|h(x/\|x\|) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El siguiente resultado se puede encontrar en [\[22, Teorema A.2\]](#).

Teorema A.2. Sean K_0 y K_1 complejos simpliciales finitos homeomorfos a $\mathbb{D}^m$. Si $K_0 \cap K_1 = \partial K_0 \cap \partial K_1 \cong \mathbb{D}^{m-1}$ y dicha intersección es un subcomplejo simplicial de K_0 y de K_1 , entonces $K_0 \cup K_1 \cong \mathbb{D}^m$.

Demostración. Sea $D = \{(x_1, \dots, x_m) : \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} \leq 1\} \cong \mathbb{D}^m$, y sea $f : K_0 \cap K_1 \rightarrow \{(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) \in D\} \cong \mathbb{D}^{m-1}$ un homeomorfismo. Sea $\hat{f} = f|_{\partial(K_0 \cap K_1)}$. Por la Observación [A.1](#), existen homeomorfismos $f_0 : cl(\partial K_0 \setminus (K_0 \cap K_1)) \rightarrow \{(x_1, \dots, x_m) \in \partial D : x_m \leq 0\}$ y $f_1 : cl(\partial K_1 \setminus (K_0 \cap K_1)) \rightarrow \{(x_1, \dots, x_m) \in \partial D : x_m \geq 0\}$ que son extensiones de $\hat{f}$. Como $S_0 := \{(x_1, \dots, x_m) \in \partial D : x_m \leq 0\} \cup \{(x_1, \dots, x_m) \in D : x_m = 0\} \cong \mathbb{S}^{m-1}$ y también $S_1 := \{(x_1, \dots, x_m) \in \partial D : x_m \geq 0\} \cup \{(x_1, \dots, x_m) \in D : x_m = 0\} \cong \mathbb{S}^{m-1}$, por la Observación [A.1](#), se tiene que existen $F_0 : K_0 \rightarrow \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in D : x_m \leq 0\}$ y

$F_1 : K_1 \rightarrow \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in D : x_m \geq 0\}$ homeomorfismos que extienden a $\hat{f} \cup f_0$ y $\hat{f} \cup f_1$, respectivamente. Con esto, se tiene que $F_0 \cup F_1$ es un homeomorfismo de $K_0 \cup K_1 \rightarrow D$, con lo que se concluye la prueba. ■

Teorema A.3. *Sea K un complejo simplicial finito homeomorfo a $\mathbb{D}^m$. Sean K_0 y K_1 subcomplejos simpliciales disjuntos contenidos en ∂K , tales que $K_0 \cong K_1 \cong \mathbb{D}^{m-1}$. Sea $f : K_0 \rightarrow K_1$ un homeomorfismo. Entonces, si el espacio $K/\{x \sim f(x) : x \in K_0\}$ es orientable, se tiene que este cociente es homeomorfo a T^m .*

Demostración. Comenzaremos construyendo un homeomorfismo $H : K \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{D}^{m-1}$, tal que $H(K_0) = \{0\} \times \mathbb{D}^{m-1}$ y $H(K_1) = \{1\} \times \mathbb{D}^{m-1}$.

Nótese que $\partial K \cong \mathbb{S}^{m-1}$ es un complejo simplicial. Como $K_0 \cong \mathbb{D}^{m-1}$ es un subcomplejo simplicial de $\partial K \cong \mathbb{S}^{m-1}$, tenemos que $cl(\partial K \setminus K_0)$ es homeomorfa a $\mathbb{D}^{m-1}$. Luego, como se tiene que $K_1 \cong \mathbb{D}^{m-1}$ es un subcomplejo simplicial contenido en el interior del disco $cl(\partial K \setminus K_0)$, se tiene que existe un homeomorfismo $h : cl(\partial K \setminus (K_0 \cup K_1)) \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{S}^{m-2}$, donde $h(\partial K_0) = \{0\} \times \mathbb{S}^{m-2}$ y $h(\partial K_1) = \{1\} \times \mathbb{S}^{m-2}$. Por otro lado, por la Observación A.1, existen homeomorfismos $h_0 : K_0 \rightarrow \{0\} \times \mathbb{D}^{m-1}$ y $h_1 : K_1 \rightarrow \{1\} \times \mathbb{D}^{m-1}$ que extienden a $h|_{\partial K_0}$ y a $h|_{\partial K_1}$. Con todo lo anterior, podemos definir un homeomorfismo $\hat{H} : \partial K \rightarrow \partial([0, 1] \times \mathbb{D}^{m-1})$ dado por

$$\hat{H}(x) = \begin{cases} h_0(x) & \text{si } x \in K_0, \\ h(x) & \text{si } x \in \partial K \setminus (K_0 \cup K_1), \\ h_1(x) & \text{si } x \in K_1. \end{cases}$$

Finalmente, por la Observación A.1, como $\partial([0, 1] \times \mathbb{D}^{m-1}) \cong \mathbb{S}^{m-1}$, $K \cong \mathbb{D}^m$ y $\hat{H}$ es un homeomorfismo entre ∂K y $\partial([0, 1] \times \mathbb{D}^{m-1})$, se tiene que existe un homeomorfismo $H : K \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{D}^{m-1}$ que es extensión de $\hat{H}$.

Sea $\hat{f} : \{0\} \times \mathbb{D}^{m-1} \rightarrow \{1\} \times \mathbb{D}^{m-1}$ el homeomorfismo dado por $\hat{f} = H \circ f \circ H^{-1}|_{\{0\} \times \mathbb{D}^{m-1}}$. Entonces se tiene que $K/\{x \sim f(x) : x \in K_0\} \cong ([0, 1] \times \mathbb{D}^{m-1})/\{x \sim \hat{f}(x) : x \in H^{-1}(K_0)\}$. Por el Teorema A.4, ya que este cociente es orientable, se concluye que $([0, 1] \times \mathbb{D}^{m-1})/\{x \sim \hat{f}(x) : x \in H^{-1}(K_0)\}$ es homeomorfo a T^m . ■

A.2. Toros de mapeo de $\mathbb{D}^n$

Es un hecho conocido que existen uno o dos tipos de isotopías de $\mathbb{D}^n$ en $\mathbb{D}^n$, una si n es par y dos si n es impar. En el caso de que n sea impar, los dos tipos de isotopía están dados por los mapeos $id_{\mathbb{D}^n}$ y $-id_{\mathbb{D}^n}$.

Para el siguiente teorema, recordemos que $T^{n+1} = \mathbb{D}^n \times \mathbb{S}^1 \cong (\mathbb{D}^n \times [0, 1])/\{(x, 0) \sim (x, 1)\}$ y que $\mathcal{C}_{\mathbb{D}^n} = (\mathbb{D}^n \times [0, 1])/\{(x, 0) \sim (-x, 1)\}$

Teorema A.4. *Sean n par y $h : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ un homeomorfismo. Sabemos que existe una isotopía H entre h con la función $id_{\mathbb{D}^n}$ o con la función $-id_{\mathbb{D}^n}$. Entonces*

$$(\mathbb{D}^n \times [0, 1])/\{(x, 0) \sim (h(x), 1)\} \cong \begin{cases} T^{n+1} & \text{si } h \text{ es isotópico a } id_{\mathbb{D}^n}, \\ \mathcal{C}_{\mathbb{D}^n} & \text{si } h \text{ es isotópico a } -id_{\mathbb{D}^n}. \end{cases}$$

En el caso que n sea impar, el cociente es homeomorfo a T^{n+1} .

Demostración. Dados dos homeomorfismos h_1 y h_2 de $\mathbb{D}^n$ en $\mathbb{D}^n$, se sabe que si h_1 es isotópico a h_2 , entonces

$$(\mathbb{D}^n \times [0, 1]) / \{(x, 0) \sim (h_1(x), 1)\} \cong (\mathbb{D}^n \times [0, 1]) / \{(x, 0) \sim (h_2(x), 1)\}.$$

Por lo tanto, basta considerar los casos cuando $h \cong id_{\mathbb{D}^n}$ y $h \cong -id_{\mathbb{D}^n}$, con los cuales se tiene que el cociente buscado es homeomorfo a T^{n+1} o $\mathbb{C}_{\mathbb{D}^n}$, respectivamente.

El caso impar se sigue de que el homeomorfismo h es isotópico a la función identidad. ■

A.3. Orbifolds

Los orbifolds son una generalización de variedad que aparecen al hacer un cociente por una acción de un grupo finito sobre una variedad. Localmente, se puede pensar que las vecindades de los puntos del orbifold son homeomorfas a un cociente de $\mathbb{R}^n$ por una acción lineal de orden finita.

Definición A.5. Sea X un espacio topológico Hausdorff con base numerable. Una carta orbifold en el espacio X es un par de abiertos $U_j \subseteq X$ y $V_j \subseteq \mathbb{R}^n$, junto con una función continua $\rho_j : V_j \rightarrow U_j$ y un grupo finito Γ_j actuando sobre V_j , de manera que:

- La acción deja invariante a V_j . Dicha acción es lineal y fiel.
- La acción deja invariante al mapeo ρ_j , y define un homeomorfismo $\hat{\rho}_j : V_j / \Gamma_j \mapsto U_j$.

Definición A.6. Un orbifold es un espacio topológico Hausdorff con base numerable X , junto a una colección de cartas orbifold (dadas por U_j , V_j , ρ_j y Γ_j , para alguna colección de $j \in \mathfrak{J}$), donde los U_j son cerrados bajo intersección finita, y tales que para cualesquiera $j, k \in \mathfrak{J}$ con $U_k \subseteq U_j$, se satisface:

- Existe $f_{kj} : \Gamma_k \rightarrow \Gamma_j$ homomorfismo inyectivo.
- Hay un homeomorfismo $\varrho_{kj} : V_k \rightarrow W_{kj} \subseteq V_j$ que es Γ_k -equivariante, para algún abierto W_{kj} . Dicho homeomorfismo es llamado un mapeo de pegado.
- Los mapeos de pegado son compatibles con las cartas, es decir, $\rho_j \circ \varrho_{kj} = \rho_k$.
- Los mapeos de pegado son únicos hasta composición por elementos de Γ_j , es decir, cualquier otro mapeo de pegado de V_k a V_j es de la forma $g \circ \varrho_{kj}$, para algún $g \in \Gamma_j$.

En particular se dice que un orbifold es un orbifold esférico si se puede obtener como el cociente de una esfera por un grupo de simetrías que actúa sobre ésta.

Definición A.7. El locus singular de un orbifold X es el conjunto de puntos $x \in X$ tal que no existe una vecindad de x homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición A.8. Sean $p, q_1, \dots, q_n$ números enteros tales que $\text{MCD}(p, q_1, q_2, \dots, q_n) = 1$, y sea $\mathbb{S}^{2n-1}$ la esfera unitaria en $\mathbb{C}^n$. Sea $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por

$$G(z_1, z_2, \dots, z_n) = (e^{2\pi i \frac{q_1}{p}} z_1, e^{2\pi i \frac{q_2}{p}} z_2, \dots, e^{2\pi i \frac{q_n}{p}} z_n)$$

Con esto se define el espacio lente orbifold $L_p(q_1, \dots, q_n) := \mathbb{S}^{2n-1} / \langle G \rangle$.

Proposición A.9. El lente orbifold $L_p(q_1, \dots, q_n)$ es variedad si para todo $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que $\text{MCD}(p, q_t) = 1$.

Demostración. Sea G como en la definición anterior. En caso de que para todo $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ se satisfaga que $\text{MCD}(p, q_t) = 1$, entonces G es una acción libre. Sea $\langle G \rangle = \{g_1, \dots, g_p\}$. Sea $x \in \mathbb{S}^{2n-1}$ y $\rho : V \rightarrow U$ una carta orbifold de x . Como el espacio es Hausdorff y la acción es libre, se tiene que para cualquier punto $x \in \mathbb{S}^{2n-1}$ el conjunto $\{g_1 x, \dots, g_p x\}$ se puede separar por abiertos $V_1, \dots, V_n$. Sea

$$\hat{V} = \bigcap_{j=1}^p g_j^{-1} V_j.$$

Se tiene que $\rho|_{V \cap \hat{V}}$ es un encaje. Por lo tanto, todo punto tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^{2n-1}$. ■

Los espacios lente orbifold que son variedades se les llama espacios lente.

Bibliografía

- [1] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz. The difference between consecutive primes II. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 83(3):532–562, 2001. URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1112/plms/83.3.532>, doi:10.1112/plms/83.3.532.
- [2] J. Balogh, Z. Füredi, and S. Roy. An upper bound on the size of Sidon sets. *Amer. Math. Monthly*, 130(5):437–445, 2023. doi:10.1080/00029890.2023.2176667.
- [3] T. Biedl, E. Demaine, M. Demaine, and et al. Locked and unlocked polygonal chains in three dimensions. *Discrete Comput. Geom.*, 26(3):269–281, 2001. doi:10.1007/s00454-001-0038-7.
- [4] R. C. Bose. An affine analogue of Singer’s theorem. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 6:1–15, 1942.
- [5] R. C. Bose and S. Chowla. Theorems in the additive theory of numbers. *Comment. Math. Helv.*, 1962/63.
- [6] J. Cantarella and H. Johnston. Nontrivial embeddings of polygonal intervals and unknots in 3-space. *J. Knot Theory Ramifications*, 7(8):1027–1039, 1998. doi:10.1142/S0218216598000553.
- [7] D. Carter, Z. Hunter, and K. O’Bryant. On the diameter of finite sidon sets. *Acta Mathematica Hungarica*, 2025. URL: <https://doi.org/10.1007/s10474-024-01499-8>.
- [8] S. Chen. On the size of finite Sidon sequences. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121(2):353–356, 1994. doi:10.2307/2160407.
- [9] F. R. K. Chung and R. L. Graham. On multicolor Ramsey numbers for complete bipartite graphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 18:164–169, 1975. doi:10.1016/0095-8956(75)90043-x.
- [10] J. Cilleruelo. Sidon sets in $\mathbb{N}^d$. *J. Combin. Theory Ser. A*, 117(7):857–871, 2010. URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/j.jcta.2009.12.003>, doi:10.1016/j.jcta.2009.12.003.

- [11] R. Connelly, E. D. Demaine, and G. Rote. Straightening polygonal arcs and convexifying polygonal cycles. volume 30, pages 205–239. 2003. U.S.-Hungarian Workshops on Discrete Geometry and Convexity (Budapest, 1999/Auburn, AL, 2000). doi: [10.1007/s00454-003-0006-7](https://doi.org/10.1007/s00454-003-0006-7).
- [12] P. Erdős and L. Lovász. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. In *Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday)*, Vols. I, II, III, volume Vol. 10 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 609–627. North-Holland, Amsterdam-London, 1975.
- [13] P. Erdős and P. Turán. On a problem of Sidon in additive number theory, and on some related problems. *J. London Math. Soc.*, 16:212–215, 1941. URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1112/jlms/s1-16.4.212>, doi: [10.1112/jlms/s1-16.4.212](https://doi.org/10.1112/jlms/s1-16.4.212).
- [14] M. A. Espinosa-García, A. Gonzalez, and Y. Villicaña-Molina. The manifold of polygons degenerated to segments. *arXiv 2405.13789*, 2024. URL: <https://arxiv.org/abs/2405.13789>.
- [15] M. A. Espinosa-García, A. Montejano, E. Roldán-Pensado, and J. D. Suárez. Sidon-Ramsey and B_h -Ramsey numbers. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 30(104), 2024. doi: [10.1007/s40590-024-00676-7](https://doi.org/10.1007/s40590-024-00676-7).
- [16] M. A. Espinosa-García and D. Pellicer. Update on Sidon-Ramsey numbers. 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2309.08553>.
- [17] C. A. Gómez Ruiz and C. A. Trujillo Solarte. A new construction of modular B_h -sequences. *Mat. Enseñ. Univ. (N. S.)*, 19(1):53–62, 2011.
- [18] A. González. Topological properties of the spaces of simple and convex polygons up to orientation-preserving similarities, 2014.
- [19] A. González. Fundamental group of spaces of simple polygons. *Rocky Mountain J. Math.*, 48(6):1871–1886, 2018. doi: [10.1216/rmj-2018-48-6-1871](https://doi.org/10.1216/rmj-2018-48-6-1871).
- [20] A. González and M. A. Espinosa-García. Spaces of polygons degenerated to segments. *Topology Appl.*, 322:Paper No. 108332, 15, 2022. doi: [10.1016/j.topol.2022.108332](https://doi.org/10.1016/j.topol.2022.108332).
- [21] A. González and J. L. López-López. Compactness of spaces of convex and simple quadrilaterals. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 94(3):507–521, 2016. doi: [10.1017/S0004972716000368](https://doi.org/10.1017/S0004972716000368).
- [22] A. González and M. Sedano-Mendoza. Moduli space of simple polygons. *arXiv 2303.15406*, 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2303.15406>.
- [23] D. H. Gottlieb. Robots and fibre bundles. *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A*, 38:219–223, 1986.

- [24] R. L. Graham, B. L. Rothschild, and J. H. Spencer. *Ramsey theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1990. A Wiley-Interscience Publication.
- [25] B. Green. The number of squares and $B_h[g]$ sets. *Acta Arith.*, 100(4):365–390, 2001. doi:10.4064/aa100-4-6.
- [26] X. D. Jia. On finite Sidon sequences. *J. Number Theory*, 44(1):84–92, 1993. doi:10.1006/jnth.1993.1037.
- [27] M. Kapovich and J. Millson. On the moduli space of polygons in the Euclidean plane. *J. Differential Geom.*, 42(1):133–164, 1995. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214457034>.
- [28] M. Kapovich and J. J. Millson. The symplectic geometry of polygons in Euclidean space. *J. Differential Geom.*, 44(3):479–513, 1996. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214459218>.
- [29] M. Liang, X. Li, B. Xiu, and X. Xu. On Sidon-Ramsey numbers. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 10(4):884–887, apr 2013. doi:10.1166/jctn.2013.2784.
- [30] B. Lindström. An inequality for B_2 -sequences. *J. Combinatorial Theory*, 6:211–212, 1969.
- [31] B. Lindström. A remark on B_4 -sequences. *J. Combinatorial Theory*, 7:276–277, 1969.
- [32] B. Lindström. On B_2 -sequences of vectors. *J. Number Theory*, 4:261–265, 1972. URL: [https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/0022-314X\(72\)90052-2](https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/0022-314X(72)90052-2), doi:10.1016/0022-314X(72)90052-2.
- [33] L. Lovász. On the ratio of optimal integral and fractional covers. *Discrete Math.*, 13(4):383–390, 1975. doi:10.1016/0012-365X(75)90058-8.
- [34] A. M. Mian and S. Chowla. On the B_2 sequences of Sidon. *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A*, 14:3–4, 1944.
- [35] K. O’Bryant. A complete annotated bibliography of work related to Sidon sequences. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2004. DS11:Jul.
- [36] L. Rackham and P. Šarka. B_h sequences in higher dimensions. *Electron. J. Combin.*, 17(1):Research Paper 35, 15, 2010. doi:10.37236/307.
- [37] R. Rado. Note on combinatorial analysis. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 48:122–160, 1943. URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1112/plms/s2-48.1.122>, doi:10.1112/plms/s2-48.1.122.

- [38] I. Z. Ruzsa. Solving a linear equation in a set of integers I. *Acta Arith.*, 65(3):259–282, 1993. URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.4064/aa-65-3-259-282>, doi:10.4064/aa-65-3-259-282.
- [39] I. Schur. Über kongruenz $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 25:114–116, 1916. URL: <http://eudml.org/doc/145475>.
- [40] D. Shimamoto and M. Wootters. Configuration spaces of convex and embedded polygons in the plane. *Geom. Dedicata*, 172:121–134, 2014. doi:10.1007/s10711-013-9910-x.
- [41] J. Singer. A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43(3):377–385, 1938. URL: <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.2307/1990067>, doi:10.2307/1990067.
- [42] B. L. van der Waerden. Beweis einer baudeischen vermutung. *Nieuw. Arch. Wisk.*, 15:212–216, 1927.
- [43] X. Xu, M. Liang, and H. Luo. *Ramsey theory: unsolved problems and results*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2018. doi:10.1515/9783110576702.

Manuel Alejandro Espinosa García

Números de Sidon-Ramsey y números de Bh-Ramsey, y Espacio de polígonos degenerados a segmentos.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:442784204

Fecha de entrega

26 mar 2025, 8:53 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

26 mar 2025, 9:03 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

Números de Sidon-Ramsey y números de Bh-Ramsey, y Espacio de polígonos degenerados a seg....pdf

Tamaño de archivo

1.0 MB

86 Páginas

31.958 Palabras

130.225 Caracteres

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Doctorado en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	Números de Sidon-Ramsey y Bh-Ramsey, y Espacio de polígonos degenerados a segmentos.	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Manuel Alejandro Espinosa García	esgama@matmor.unam.mx
Director	Edgardo Roldán Pensado	eroldan@matmor.unam.mx
Codirector	Juan Ahtziri González Lemus	ahtziri@ciimat.mx
Coordinador del programa	Elmar Wagner	elmar.wagner@umich.mx

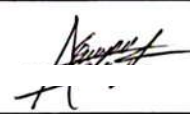
Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Manuel Alejandro Esp. 
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, a 25 de Marzo del 2025