CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

CONVERGENCIA EN GRUPOS p-COMPACTOS

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

DAVID VALENCIA GÓMEZ

TUTOR DE TESIS

DR. ULISES ARIET RAMOS GARCÍA

MÓRELIA, MICHOACÁN. MAYO DE 2025

Resumen

En la presente tesis se realiza un estudio sobre la convergencia en grupos p-compactos. Específicamente se analiza la convergencia en la ultrapotencia de grupos numerables discretos con la topología de Bohr extendida. Demostraremos que si $\mathbb{G}$ es un grupo Abeliano numerable, existe $p \in \omega^*$ tal que $\left(Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ es un grupo topológico p-compacto con sucesiones convergentes no triviales que no es compacto. Además, si p es un ultrafiltro selectivo las sucesiones débilmente independientes no son convergentes en $\left\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$.

Abstract

In this thesis, we study the convergence of p-compact groups. Specifically, we analyze the convergence in the ultrapower of countable discrete groups with the extended Bohr topology. We will show that if $\mathbb{G}$ is a countable Abelian group, then there exists $p \in \omega^*$ such that $\left(Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ is a compact p-compact topological group with non-trivial convergent sequences that is not compact. Furthermore, if p is a selective ultrafilter, then weakly independent sequences are not convergent in $\left\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$.

Palabras clave: ultrapotencia, grupos topológicos, p-compactos, p-convergencia, sucesiones convergentes.

Índice general

0.1. Agradecimientos III

0.2. Introducción 1

Capítulo 1. Preliminares 4

1.1. Ultrafiltros e Ideales 5

1.2. Estructuras algebraicas 9

1.3. Espacios topológicos 12

1.4. Espacios Polacos, conjuntos analíticos, determinación de juegos y ultrafiltros selectivos 17

1.5. Grupos topológicos 23

1.6. Integral y medida de Haar en grupos topológicos 29

1.7. Dualidad de Pontryagin y el Teorema de Aproximación de E. Hewitt y S. Zuckerman 30

1.8. Topología de Bohr 36

1.9. Ultraproductos, límites y ultralímites de estructuras lógicas 45

Capítulo 2. Grupos topológicos p-compactos 50

2.1. Ultrapotencias de grupos topológicos 50

2.2. Grupos p-compactos con sucesiones convergentes no triviales 65

2.3. Filtros sin la propiedad de Baire 71

2.4. Sucesiones no convergentes en la ultrapotencia 75

Conclusiones 79

Bibliografía 84

El presente trabajo se lo dedico a mi familia por el enorme esfuerzo que hicieron para pagar mis estudios universitarios.

A mi amada esposa por darme el tiempo necesario para escribirla.

Y a mi hija Isabela que recién acaba de ingresar a la familia.

0.1. Agradecimientos

La realización de esta tesis es producto del trabajo en equipo con mi tutor de tesis el Dr. Ulises Ariet Ramos García y los útiles comentarios del Dr. Michael Hrusak. A quienes les estoy enteramente agradecido. Igualmente me gustaría agradecer al Dr. Rodrigo Hernández Gutiérrez por sus correcciones puntuales a esta tesis.

Quiero agradecer a mis compañeros y amigos: Norberto, Miguel, Jorge, Mario, David, Yaqui y Nidia con quienes compartí momentos inolvidables.

También quiero agradecer al Centro de Ciencias Matemáticas de la UNAM por el apoyo que me brindó en diversas actividades en las que participé. A la Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico que me brindó durante mis estudios del doctorado. La investigación fue apoyada por la beca 848116 de CONACYT y la subvención IN104419 y IN108122 de PAPIIT.

Le agradezco al Dr. Eugenio Balanzario Gutiérrez por introducirme a la ciencia de datos, que me permitió conseguir trabajo.

Finalmente le agradezco a grupo Coppel, en especial a mis jefes Gaby y Javier, por darme la flexibilidad para poder culminar los tramites administrativos.

0.2. Introducción

Un problema central de la teoría general de grupos topológicos fue formulado por W. W. Comfort en [**5**] en el año 1966, la cuestión es la siguiente: ¿existen dos grupos topológicos numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto? En 1980 el matemático E. K. van Douwen, en [**31**], demuestra que todo grupo Booleano numerablemente compacto sin sucesiones convergentes no triviales contiene dos subgrupos numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto, y que bajo axioma de Martín dicho grupo Booleano existe. Por esta razón, en el mismo artículo, E. K. van Douwen hace la siguiente pregunta ¿existe un grupo Booleano numerablemente compacto sin sucesiones convergentes no triviales? De este modo, una respuesta afirmativa a la pregunta de E. K. van Douwen provee una respuesta en el mismo sentido al problema de W. W. Comfort.

Ambos problemas han sido estudiados en las ultimas décadas. Mucho de este trabajo se debe a A. H. Tomita, S. García Ferreira y S. Watson en [**12, 11, 28, 27, 29, 30**] y por otros autores como W. W. Comfort, S. U. Raczkowski, F. J. Trigos-Arrieta, D. Dikranjan, V. I. Malykhin y L. B. Shapiro en [**4, 8, 9, 18, 25**].

En [**15**] (2021) M. Hrušák, J. van Mill, U. A. Ramos-García y S. Shelah, probaron que existe en ZFC un grupo Booleano infinito numerablemente compacto sin sucesiones convergentes no triviales. Consecuentemente, debido a lo mencionado anteriormente, dieron una respuesta afirmativa tanto al problema de E. K. van Douwen como al de W. W. Comfort.

En este mismo artículo, se construyó un grupo Booleano infinito p-compacto no compacto con sucesiones convergentes no triviales. Más específicamente, ellos probaron que existe en ZFC un ultrafiltro $p \in \omega^*$ tal que la ultrapotencia iterada ω_1 veces del grupo booleano $\left\langle [\omega]^{<\omega}, \Delta, \emptyset \right\rangle$ con la topología de Bohr extendida, $\left(Ult_p^{\omega_1}\left([\omega]^{<\omega}\right), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$, es un grupo topológico p-compacto con sucesiones convergentes no triviales que no es compacto. En este trabajo, extenderemos este resultado

demostrando que si $\mathbb{G}$ es un grupo Abeliano numerable, existe $p \in \omega^*$ tal que $\left(Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ es un grupo topológico p-compacto con sucesiones convergentes no triviales que no es compacto.

Además, en el mismo artículo **[15]**, se prueba que (Aplicando el Lema 3.6 y la Afirmación 3.7) las siguientes oraciones son equivalentes:

(1) Existe $p \in \omega^*$ tal que $(\mathsf{Ult}_p([\omega]^{<\omega}), \tau_{\overline{\text{Bohr}}})$ tiene sucesiones convergentes no triviales.

(2) Existe una sucesión $\langle \Phi_n \colon n \in \omega \rangle \subset \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ y una función $H \colon \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$ tal que para cualquier $n \in \omega$ la familia

$$\{[\omega]^{<\omega} \setminus \text{Ker}(\Phi_n)\} \cup \{\text{Ker}(\Phi) \colon \ H(\Phi) \leqslant n\}$$

es centrada.

(3) Existe una sucesión $\langle \Phi_n \colon n \in \omega \rangle \subset \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ y una función $H \colon \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$ tal que la colección

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \omega} \{A^1_{\Phi_n, n}\} \cup \{A^0_{\Phi, n} \colon H(\Phi) \leqslant n\}$$

forma una familia centrada que genera un filtro libre. Donde $A^0_{\Phi,n} = \{k \in \omega \colon \Phi(f_n(k)) = 0\}$ y $A^1_{\Phi,n} = \{k \in \omega \colon \Phi(f_n(k)) = 1\}$ para toda $(\Phi, n) \in \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2) \times \omega$. Y, $\langle f_n \colon n \in \omega \rangle \subset ([\omega]^{<\omega})^\omega$ es una sucesión que satisface la propiedad de que para cada $F \in [\omega]^{<\omega}$ y $\sigma \colon F \to [\omega]^{<\omega}$ existe $k \in \omega$ tal que $f_i(k) = \sigma(i)$ para toda $i \in F$.

Con este resultado, los autores concluyeron sin prueba (Observación 3.8 en **[15]**) que si $\mathcal{F}$ es el filtro generado por $\mathbb{A}$, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro F_σ. Pero, en esta tesis probaremos que esta observación es falsa. Probaremos que si $\mathcal{F}$ es cualquier filtro con $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de Baire.

Nuevamente, en **[15]** los autores demostraron que si $p \in \omega^*$ es selectivo entonces

$$\left(Ult_p^{\omega_1}\left([\omega]^{<\omega}\right), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$$

es un grupo topológico p-compacto sin sucesiones convergentes no triviales. Este resultado deja abierta una nueva versión del problema de E. K. van Douwen, reformulada para los grupos p-compactos, a saber: ¿existe, en ZFC, un grupo p-compacto sin sucesiones convergentes no triviales?

En el presente trabajo mostraremos algunos casos particulares en que este resultado se puede extender a cualquier grupo Abeliano numerable $\mathbb{G}$. En particular demostraremos que si p es un ultrafiltro selectivo, las sucesiones débilmente independientes no son convergentes en $\left\langle ult_p\left(\mathbb{G}\right), \tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$.

El capítulo uno nos brindará las herramientas necesarias para poder abordar y comprender el problema que estudiaremos. Mientras que en el capítulo segundo se demostrarán los resultados propios de esta tesis.

Cabe resaltar que gran parte de los resultados principales presentados en esta tesis fueron sometidos y publicados en [**23**].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo nos brindará las herramientas necesarias para poder abordar más adelante la cuestión de los grupos topológicos p-compactos con sucesiones convergentes no triviales. Veremos algunas propiedades básicas de los grupos topológicos, la topología de Bohr, la dualidad de Pontryagin, el teorema de aproximación de E. Hewitt & S. Zuckerman y la construcción de las ultrapotencias de estructuras lógicas.

La notación que utilizaremos es estándar dentro de la teoría de conjuntos y a lo largo de este capítulo se le irá presentando al lector. Como es usual usaremos el símbolo $\in$ para referirnos a la pertenencia en conjuntos, $\subseteq$ denota a la contención, $\cap$ a la intersección conjuntista, usaremos $\cup$ para la unión, el símbolo $\setminus$ denota al complemento relativo, $\sqcup$ refiere a la unión ajena y ω al conjunto de los números naturales. Si X es un conjunto entonces $\mathcal{P}(X)$ denota a la colección de todos los subconjuntos de X, para referirnos únicamente a los subconjuntos finitos de X usaremos $[X]^{<\omega}$; en cambio $[X]^{\omega}$ denota a los subconjuntos numerables de X. Por otra parte, usaremos $\omega^{<\omega}$ para referirnos a las funciones finitas con valores en ω y cuyo dominio es un número natural.

El lector puede consultar el libro de M. Tkachenko y A. V. Arkhangelskii [**26**] y el libro de E. Hewitt and K. A. Ross [**13**] para profundizar en los grupos topológicos. Para la parte de ultrafiltros, un buen recurso es el libro de T. Bartoszyński y H. Judah [**1**]. En general estos libros le pueden ayudar al lector para consultar los resultados básicos de los temas tratados en el presente trabajo.

1.1. Ultrafiltros e Ideales

El lector puede consultar el libro de T. Bartoszyński y H. Judah [**1**] para profundizar en el tema de ultrafiltros e ideales.

Intuitivamente un ultrafiltro sobre X es una colección formada por algunos conjuntos grandes de X; es decir, los ultrafiltros capturan nuestra idea intuitiva de conjuntos grandes. Formalmente la definición es la siguiente:

Sea X un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es un *filtro* sobre X si $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ es cerrado por intersecciones finitas y por supraconjuntos. Si un filtro es $\subseteq$-maximal diremos que es un *ultrafiltro*. Además, si satisface que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ entonces diremos que $\mathcal{F}$ es *libre* y denotaremos por ω^* al conjunto de todos los ultrafiltros libres sobre ω. Equivalentemente, $\mathcal{F}$ es un filtro libre si y sólo si

$$Fr(X) = \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\} \subseteq \mathcal{F}.$$

Es bien conocido que los filtros y ultrafiltros satisfacen las siguientes propiedades:

1. Dado $\mathcal{F}$ un filtro no puede suceder que tanto $A \in \mathcal{F}$ como $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

2. Si $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$.

3. Sea $\mathcal{F}$ un filtro tal que $A \notin \mathcal{F}$ y $(X \setminus A) \notin \mathcal{F}$, entonces

$$\langle \mathcal{F}(A) \rangle = \left\{ X \subseteq I : \exists \mathcal{F}_0 \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \left((\cap \mathcal{F}_0) \cap A \subseteq X \right) \right\}$$

es el filtro más pequeño, respecto a la contención, tal que $\mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \langle \mathcal{F}(A) \rangle$. A $\langle \mathcal{F}(A) \rangle$ se le conoce como el *filtro generado* de $\mathcal{F}$ y A.

4. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto X, entonces para todo $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \mathcal{U}$ si y sólo si $X \setminus A \notin \mathcal{U}$.

5. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto X, entonces para todo $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \mathcal{U}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

6. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X y $A \subseteq X$ tal que para todo $F \in \mathcal{U}$ se cumple que $F \cap A \neq \emptyset$, entonces $A \in \mathcal{U}$.

Decimos que $p \in \omega^*$ es un *P-punto* si para cualquier partición de ω, $\{I_n : n \in \omega\}$, o existe $N \in \omega$ tal que $I_N \in p$ o existe $X \in p$ tal que $|X \cap I_n| < \omega$ para toda $n \in \omega$. Por otra parte, diremos que $p \in \omega^*$ es un *Q-punto* si para cualquier partición $\{I_n : n \in \omega\}$ de ω con $|I_n| < \omega$ existe $X \in p$ tal que $|X \cap I_n| \leq 1$ para toda n. Ahora bien, decimos que $p \in \omega^*$ es un ultrafiltro *selectivo* si p es tanto P-punto como Q-punto. Equivalentemente, los ultrafiltros selectivos satisfacen el siguiente teorema.

TEOREMA 1.1.1 (Teorema 4.5.2 [**1**]). *Sea p un ultrafiltro sobre ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *p es Ramsey: Si $c : [\omega]^2 \longrightarrow \{0,1\}$ existe $U \in p$ e $i \in \{0,1\}$ tal que $c\left[[U]^2\right] = \{i\}$; es decir, U es i-homogéneo.*
2. *Para cualquier conjunto $A \subseteq [\omega]^2$ existe $X \in p$ tal que $[X]^2 \subseteq A$ o $[X]^2 \cap A = \emptyset$*
3. *p es selectivo.*
4. *Para cualquier partición de ω, $\{I_n : n \in \omega\}$, o existe $n \in \omega$ tal que $I_n \in p$ o bien existe $X \in p$ tal que $|X \cap I_n| \leq 1$ para toda n.*
5. *Para cualquier sucesión $\subseteq$-decreciente $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq p$ existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \in p$ tal que $x_n \in X_n$ para toda n.*

DEMOSTRACIÓN. $1 \implies 2\rfloor$ Sea $A \subseteq [\omega]^2$. Definimos $c : [\omega]^2 \longrightarrow 2$ como $c(\{x,y\}) = 0$ si y sólo si $\{x,y\} \in A$. Al ser p un ultrafiltro de Ramsey existe $X \in p$ que es i-homogéneo. Si X es $0-$homogéneo entonces $[X]^2 \subseteq A$, en cambio si X es 1-homogéneo entonces $[X]^2 \cap A = \emptyset$.

$2 \Longrightarrow 3\rfloor$ Sea $\{I_n : n \in \omega\}$ una partición de ω. Definimos

$$A = \{\{n,k\} : \exists m \in \omega\,(n,k \in I_m)\}$$

Por 2, existe $X \in p$ tal que $[X]^2 \subseteq A$ o $[X]^2 \cap A = \emptyset$.

Caso I: $[X]^2 \subseteq A$. Entonces $\exists N \in \omega\,(X \subseteq I_N)$ (pues si $x \in I_n$ y y $y \in I_m$ entonces $\{x,y\} \notin A$). Luego, al ser p un filtro, $I_N \in p$.

Caso II: $[X]^2 \cap A = \emptyset$. Entonces para toda $n \in \omega$ $|I_n \cap X| \leq 1$.

De los casos anteriores se sigue que p es un P-punto.

Si $\{I_n : n \in \omega\}$ es una partición con $|I_n| < \omega$ entonces el caso I no puede darse, por lo que en tal caso siempre sucede el caso II; por consiguiente, p es un $Q-$punto.

$3 \Longrightarrow 4\rfloor$ Se sigue directamente de la definición de P-punto y Q-punto.

$4 \Longrightarrow 5\rfloor$ Sea $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq p$ una sucesión $\subseteq$-decreciente. En caso de que $X_\omega := \bigcap_{n\in\omega} X_n \in p$, es claro que si consideramos $\{x_n \colon n \in \omega\}$ una enumeración de X_ω se obtiene lo deseado. En otro caso $X_\omega \notin p$ y definimos por recursión una partición $\{I_n : n \in \omega\}$ de ω de la siguiente manera $I_0 = (\omega \setminus X_0) \cup X_\omega$ y $I_{n+1} = X_n \setminus X_{n+1}$. Por 4) existe $N \in \omega$ tal que $I_N \in p$ o bien existe $X \in p$ tal que $|X \cap I_n| \leq 1$ para toda n. Sin embargo, note que para toda $n \in \omega$ se tiene que $I_n \notin p$, por consiguiente, existe $X \in p$ tal que $|X \cap I_n| \leq 1$ para toda $n \in \omega$. Sin perder generalidad podemos suponer de hecho que $|X \cap I_n| = 1$ para cada $n \in \omega$. Como p no es principal, $\omega\setminus(X \cap I_0) = \omega\setminus\{x_0\} \in p$; luego existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} = X \setminus \{x_0\} \in p$ tal que $x_n \in X_n$ para toda $n \geq 1$ donde $\{x_n\} = X \cap I_{n+1}$.

$5 \Longrightarrow 1\rfloor$ Sea $c : [\omega]^2 \longrightarrow 2$ una coloración y consideremos $K_0 = c^{-1}[\{0\}]$. Para cada $n \in \omega$ definimos $X_n = \{k > n : \{n,k\} \in K_0\}$. Como p es un ultrafiltro existe $Y \in p$ tal que $X_n \in p$ para toda $n \in Y$ o $\omega \setminus X_n \in p$ para toda $n \in Y$. Sin perdida de generalidad supongamos que $X_n \in p$ para toda $n \in Y$. Para toda $n \in \omega$ definimos $X_n^{'} = \bigcap_{i\in Y\cap n} X_i$; de esta manera $\left\{X_n^{'} : n \in \omega\right\} \subseteq p$

es una familia decreciente. Por 5) existe $\{x_n : n \in \omega \cap Y\} \in p$ tal que $x_n \in X_n^{'}$. Notemos que si $x_n < x_m$ y $n, m \in Y$ entonces $x_m \in X_{x_n}$, y por lo tanto $\{x_n, x_m\} \in K_0$. De lo anterior deducimos que $\{x_n : n \in \omega \cap Y\} \in p$ es 0-homogéneo. □

Sea p un filtro y $T \subseteq \omega^{<\omega}$ un árbol. Decimos que T es un *árbol de ramificación en* p si para toda $t \in T$ se tiene que $succ(t) \in p$, donde $succ(t) = \{n \in \omega \colon t^\frown n \in T\}$ denota el conjunto de sucesores del nodo t. Una de las proposiciones mas útiles para poder demostrar propiedades donde intervienen los ultrafiltros selectivos es la siguiente:

PROPOSICIÓN 1.1.2. *Sea p un ultrafiltro sobre ω. a) p es selectivo, si y sólo si, b) Para todo árbol de ramificación en p, $T \subseteq \omega^{<\omega}$, existe $f \in \omega^\omega$ con $f \in [T]$ tal que $f[\omega] \in p$.*

DEMOSTRACIÓN. $a) \Longrightarrow b)$. Sea $T \subseteq \omega^{<\omega}$ un árbol de ramificación en p. Sin perdida de generalidad podemos considerar que T es un árbol conformado por funciones finitas crecientes. Como T es de ramificación en p, $|T| = \omega$ y p es selectivo, existe $X \in p$ tal que $X \subseteq^* succ(t)$ para cada $t \in T$. Consideremos $g \in \omega^\omega$ definida de la siguiente manera $g(0) = 0$ y $g(n+1)$ es el mínimo $k > g(n)$ tal que si $img(t) \subseteq g(n)$ entonces $X \setminus k \subseteq succ(t)$ (existe $g(n+1)$ porque el conjunto $\{t \in T : img(t) \subseteq g(n)\}$ es finito). Como p es selectivo, existe $U \in p$ tal que $|U \cap X \cap [g(n), g(n+1))| \leq 1$ para toda $n \in \omega$. Dado que U es un ultrafiltro $U_0 = U \cap X \cap [g(2n), g(2n+1)) \in p$ o bien $U_1 = U \cap X \cap [g(2n+1), g(2n+2)) \in p$. Por construcción observemos que U_i, con $i \in \{0, 1\}$, está contenido en alguna rama de T.

$b) \Longrightarrow a)$. Sea $\{I_n : n \in \omega\}$ una partición sobre ω, tal que para toda $n \in \omega$ $I_n \notin p$. Consideremos $T \subseteq \omega^{<\omega}$ un árbol tal que si $t \in T$ y $dom(t) = n$ entonces $succ(t) = \bigcup \{I_n : \forall m \in dom(t)(t(m) \notin I_n)\}$. Como para toda $n \in \omega$, $I_n \notin p$ y $|t| < \omega$; se sigue que $succ(t) \in p$. Por lo que T es un árbol de ramificación en p.

Aplicando la hipótesis, existe $f \in \omega^\omega$ con $f \in [T]$ tal que $X = f[\omega] \in p$. Por la definición de $succ(t)$ se tiene que $|X \cap I_n| \leq 1$ para toda n. De lo que concluimos que p es selectivo. □

Contrario a los ultrafiltros, los ideales capturan nuestra idea intuitiva de conjuntos pequeños. La definición formal es la siguiente:

Sea X un conjunto e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{I}$ es un *ideal* sobre X si $X \notin \mathcal{I}$, $\emptyset \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ es cerrado por uniones finitas y por subconjuntos; equivalentemente $\mathcal{I}$ es un ideal si y sólo si

$$\mathcal{I}^* = \{A \subseteq X : (X \setminus A) \in \mathcal{I}\}$$

es un filtro. A $\mathcal{I}^*$ se le conoce como el *filtro dual* del ideal $\mathcal{I}$. Asimismo, decimos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un ideal libre si $\mathcal{I}^*$ es un filtro libre; esto es equivalente a pedir que $[X]^{<\omega} \subseteq \mathcal{I}$. Además, si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un ideal, diremos que $\mathcal{I}$ es *alto* si para cualquier subconjunto infinito $A \in [X]^{\omega}$ existe $B \in \mathcal{I}$ tal que $A \cap B$ es infinito. Por otra parte definimos los conjuntos $\mathcal{I}$*-positivos* de X como $\mathcal{I}^+ = \{A \subseteq X : A \notin \mathcal{I}\}$.

1.2. Estructuras algebraicas

Decimos que $\langle \mathbb{G}, \cdot, e\rangle$ es un *grupo* si la operación $\cdot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}$ definida como $\cdot(x, y) = x \cdot y$ es asociativa, $e \in \mathbb{G}$ es el elemento neutro de la operación $\cdot$ (a e también lo podemos denotar como 1) y todos los elementos de $\mathbb{G}$ tienen elemento inverso. Si $g \in \mathbb{G}$, entonces denotaremos por g^{-1} a su elemento inverso. Cuando la operación $\cdot$ es conmutativa entonces diremos que el grupo es Abealiano y usaremos preferentemente el símbolo $+$ para referirnos a la operación del grupo, $-g$ para denotar al inverso de g y 0 para referirnos al elemento neutro.

Veremos a continuación algunos ejemplos de grupos:

a) $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ es un grupo donde $\mathbb{Z}$ denota al conjunto de los números enteros.

b) $\langle \mathbb{Q}, +, 0\rangle$ es un grupo donde $\mathbb{Q}$ denota al conjunto de los números racionales.

c) $\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle$ es un grupo donde $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales.

d) $\langle \mathbb{C}, +, 0\rangle$ es un grupo donde $\mathbb{C}$ denota al conjunto de los números complejos.

e) $\langle \mathbb{T}, \cdot, 1\rangle$ es un grupo donde $\mathbb{T}$ denota el círculo unitario complejo.

f) $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ no es un grupo donde $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los números naturales.

g) $\langle \mathbb{Z}_n, +, 0\rangle$ es un grupo donde $\mathbb{Z}_n$ denota al conjunto $\{0, ..., n-1\}$ y $n \in \mathbb{N}$.

h) $\langle \mathbb{Z}_{p^\infty}, \cdot, 1\rangle$ es un grupo donde $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es el conjunto de todas las raíces p^n-ésimas raíces de la unidad tal que p es un número primo y $n \in \mathbb{N}$.

i) $\langle [\omega]^{<\omega}, \triangle, \emptyset\rangle$ es un grupo donde $[\omega]^{<\omega}$ es el conjunto de los conjuntos finitos de ω y $\triangle$ es la diferencia simétrica.

Como podemos observar en los ejemplos, hay grupos que están contenidos en otros grupos. Si $\langle \mathbb{G}, +, 0\rangle$ es un grupo, $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{G}$, $0 \in \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ es cerrado por la operación $+$ y $\mathbb{H}$ es cerrado por elementos inversos entonces decimos que $\mathbb{H}$ es un subgrupo de $\mathbb{G}$; lo que denotamos como $\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$. Por ejemplo $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son subgrupos de $\mathbb{R}$ pero $\mathbb{Z}_n$ no es un subgrupo de $\mathbb{R}$. Ahora bien si $\langle \mathbb{G}, +, 0\rangle$ es un grupo y $A \subseteq \mathbb{G}$ entonces $\langle A\rangle_{\mathbb{G}}$ denota al subgrupo más pequeño de $\mathbb{G}$ que contiene a A; en particular

$$\langle A\rangle_{\mathbb{G}} = \left\{ \sum_{i \leq n} z_i a_i : \forall i \leq n \, (z_i \in \mathbb{Z} \text{ y } a_i \in A) \right\}$$

También usaremos la notación $span_{\mathbb{Z}}(A)$ para denotar al conjunto generado por A, $\langle A\rangle_{\mathbb{G}}$. En algunas ocasiones, cuando tenemos un subgrupo $\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$, queremos analizar las propiedades de los elementos que se encuentran fuera del subgrupo $\mathbb{H}$; de forma intuitiva queremos encontrar un nuevo grupo que tenga a $\mathbb{H}$ como elemento neutro. No podemos lograr esto con todos los subgrupos pero si lo podemos hacer si el subgrupo tiene una propiedad adicional a la que llamamos normalidad. Diremos que $\mathbb{H}$ es un *subgrupo normal* de $\mathbb{G}$, $\mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{G}$, si $\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$ y para cualquier $g \in \mathbb{G}$ se tiene que los conjunto $g\mathbb{H} = \{gh : h \in \mathbb{H}\}$ y $\mathbb{H}g = \{hg : h \in \mathbb{H}\}$ son iguales (a estos conjuntos se les conoce como clases laterales izquierdas y derechas respectivamente); en notación aditiva las clases laterales se denotan como $g + \mathbb{H}$ y $\mathbb{H} + g$ respectivamente. Si $\langle \mathbb{G}, \cdot, e\rangle$ es un grupo y $\mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{G}$, construimos un nuevo grupo $\langle \mathbb{G}/_{\mathbb{H}}, \cdot, \mathbb{H}\rangle$ al que llamamos grupo cociente de $\mathbb{G}$ entre $\mathbb{H}$; donde $\mathbb{G}/_{\mathbb{H}} = \{g\mathbb{H} : g \in \mathbb{G}\}$,

el elemento neutro es $\mathbb{H}$ y la operación se define de la siguiente manera $g_0\mathbb{H} \cdot g_1\mathbb{H} = g_0 g_1 \mathbb{H}$. En particular, cuando $\mathbb{G}$ es un grupo *Abeliano* (es decir cuando se satisface que $a + b = b + a$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{G}$) todos sus subgrupos son normales; de ahí que $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{R}$.

Una herramienta muy útil para el análisis de grupos es ver al grupo en sus distintas presentaciones; puede ocurrir que dos conjuntos sean distintos pero su estructura de grupo es la misma. Sean $\langle \mathbb{G}, +_{\mathbb{G}}, 0_{\mathbb{G}} \rangle$ y $\langle \mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}} \rangle$ dos grupos, decimos que una función $h : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{H}$ es un *homomorfismo* si h respeta la estructura de grupos; es decir, $h(0_{\mathbb{G}}) = 0_{\mathbb{H}}$ y $h(a +_{\mathbb{G}} b) = h(a) +_{\mathbb{H}} h(b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{G}$. Si el homomorfismo h es inyectivo entonces decimos que h es un *encaje* de grupos y si h es biyectivo entonces decimos que h es un *isomorfismo* de grupos (en tal caso diremos que $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$ son *isomorfos* como grupos, lo que denotamos como $\mathbb{G} \cong \mathbb{H}$). Intuitivamente cuando $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$ son isomorfos, tienen la misma estructura de grupos. Un ejemplo muy importante para el desarrollo de este trabajo es que el grupo cociente $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ es isomorfo al círculo unitario complejo $\mathbb{T}$. Denotaremos por $Hom(\mathbb{G}, \mathbb{H})$ el conjunto de todos los homomorfismos de $\mathbb{G}$ a $\mathbb{H}$. En particular a los elementos de $Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ se les llaman *caracteres* y cuando $\mathbb{G}$ es un grupo Abeliano infinito se satisface que $|Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})| = 2^{|\mathbb{G}|}$. Además, si $\mathbb{G}$ es un grupo Abeliano, $\mathbb{H} \leqslant \mathbb{G}$ un subgrupo y $h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{T}$ es un homomorfismo entonces existe $\hat{h} : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{T}$ un homomorfismo que extiende a h.

A continuación veremos otras estructuras algebraicas con mayor estructura que los grupos.

Decimos que $\langle R, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ es un *campo* si $\langle R, +, 0 \rangle$ y $\langle R, \cdot, 1 \rangle$ son grupos Abelianos y las operaciones $+$ y $\cdot$ se distribuyen; es decir $a(b+c) = ab+ac$ para cualesquiera $a, b, c \in R$. Así, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ y $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ son ejemplos de campos. Por otra parte, diremos que V es un *espacio vectorial* sobre el campo K si existen dos operaciones $+ : V \times V \longrightarrow V$ y $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ (a esta operación se le conoce como multiplicación por escalares) tal que $\langle V, +, 0 \rangle$ es un grupo Abeliano, la operación $\cdot$ es asociativa, $\cdot$ tiene elemento neutro y se distribuye con la suma $+$.

Como puede observarse los espacios vectoriales tienen mayor estructura que los grupos. Desde mi punto de vista el desarrollo de la teoría de los espacios vectoriales es gracias a la independencia lineal de sus elementos. Decimos que $A \subseteq V$, donde V es un espacio vectorial sobre el campo K, es un *conjunto linealmente independiente* si para cualquier $a_1, ..., a_n \in A$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tales que $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0$ entonces $\lambda_i = 0$ para toda $i \leq n$. Si bien en los grupos no siempre se puede definir una multiplicación por escalares, sólo se logra definir una multiplicación sobre los números enteros, existe un concepto de independencia para grupos Abelianos; que resulta ser más débil que la independencia lineal, como lo veremos a continuación. Sea $\langle G, +, 0\rangle$ un grupo Abeliano y $A \subseteq G$, decimos que A es un *conjunto independiente* si para cualesquiera $a_1, ..., a_n \in A$ y $z_1, ..., z_n \in \mathbb{Z}$ tales que $z_1 a_1 + ... + z_n a_n = 0$ entonces $z_i a_i = 0$ para toda $i \leq n$. Se puede demostrar que todo grupo Abeliano no numerable G contiene un subconjunto independiente de la misma cardinalidad que G.

1.3. Espacios topológicos

Decimos que $\langle X, \tau\rangle$ es un *espacio topológico* si $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X cerrada por uniones, por intersecciones finitas y tal que $\emptyset, X \in \tau$. A τ se le llama *topología* de X, a los elementos de τ se le llaman *conjuntos abiertos* y a los complementos de los abiertos se les conoce como *conjuntos cerrados*. Si $\tau = \mathcal{P}(X)$ decimos que τ es la *topología discreta* o bien que el espacio X es discreto; de este modo todo conjunto con la topología discreta es un espacio topológico. Otros ejemplos de espacios topológicos son los espacios normados.

Sea X un espacio vectorial sobre el campo K. Decimos que $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una *norma* si se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $\|0_X\| = 0$

b) $|\lambda| \, \|x\| = \|\lambda x\|$ para toda $\lambda \in K$ y $x \in X$.

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Si $\|\cdot\|$ es una norma sobre X entonces decimos que $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ es un *espacio normado*. En tal caso podemos definir $d_{\|\cdot\|} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$ que define una métrica sobre X.

Diremos que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una *métrica* si satisface las siguientes 3 propiedades:

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

En el caso en que en la propiedad 1 solamente se satisfaga una implicación; a saber, si $x = y$ entonces $d(x, y) = 0$ y se cumplan las demás propiedades, decimos que d es una *pseudométrica*.

Si d es una métrica sobre X entonces decimos que $\langle X, d\rangle$ es un *espacio métrico*. En tal caso, para toda $x \in X$ y $\epsilon > 0$ definimos la vecindad de radio ϵ alrededor de x como el conjunto

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Así,

$$\tau_d = \{U \subseteq X : \forall x \in U \exists \epsilon > 0 (B_d(x, \epsilon) \subseteq U)\}$$

define una topología para X.

Si tomamos $\|\cdot\| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida como $\|x + iy\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces $\|\cdot\|$ es una norma; por consiguiente $\left\langle \mathbb{C}, \tau_{d_{\|\cdot\|}} \right\rangle$ es un espacio topológico. A esta topología se le conoce como *topología euclidiana*.

Consideremos ahora $X = \{a, b\}$ y $\tau_S = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ (a esta topología se le conoce como topología de *Sierpinski*) entonces $\langle X, \tau_S\rangle$ es un espacio topológico. Como podemos observar en este ejemplo no existe $U \in \tau_S$ tal que $b \in U$ y $a \notin U$; en cambio X con la topología discreta τ_d si cumple que sus puntos se pueden separar por abiertos. Estos ejemplos dan pie a las siguientes definiciones.

- Un espacio topológico X será llamado T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un subconjunto abierto U tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.
- Diremos que un espacio topológico X es un espacio T_1 si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existen abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.
- Un espacio topológico X es un espacio de *Hausdorff* o T_2 si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existen abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- Decimos que un espacio topológico es *regular* si para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existen $U, V \in \tau$ tales que $F \subseteq U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si el espacio X es regular y T_0 entonces decimos que X es T_3
- Un espacio topológico X es *completamente regular* si para cualquier subconjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \notin F$, existe una función $f : X \longrightarrow [0, 1]$ continua tal que $f[F] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$. Si el espacio X es completamente regular y T_0 entonces decimos que X es $T_{3\frac{1}{2}}$ o *Tychonoff*.
- Decimos que X es un *espacio normal* si para cualesquiera subconjuntos cerrados $P, Q \subseteq X$ existen abiertos $U, V \in \tau$ tal que $P \subseteq U$, $Q \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si el espacio X es normal y T_1 entonces decimos que X es T_4

Sean $\langle X, \tau_X \rangle$ y $\langle Y, \tau_Y \rangle$ espacios topológicos. Decimos que $f : X \longrightarrow Y$ es una *función continua* si $f^{-1}[U] \in \tau_X$ para toda $U \in \tau_Y$. Por otra parte, diremos que $f : X \longrightarrow Y$ es una *función abierta* si $f[U] \in \tau_Y$ para toda $U \in \tau_X$. Si $f : X \longrightarrow Y$ resulta ser biyectiva, continua y abierta entonces decimos que f es un *homeomorfismo*; en tal caso decimos que X y Y son *homeomorfos* (lo que denotamos como $X \cong Y$). En particular, si $X \cong f[Y]$ diremos que f es un *encaje*.

En algunas ocasiones es más cómodo trabajar con subconjuntos particulares de las topologías que con las topologías en sí. Decimos que $B \subseteq \tau$ es una *base* para la topología si para todo $A \in \tau$ existe $C \subseteq B$ tal que $A = \bigcup C$. Por otra parte, decimos que una subcolección S de una topología τ

es una *subbase* si $B = \{\bigcap A : A \subseteq S \text{ y } 0 < |A| < \omega\}$ es una base. Usar bases o subbases nos servirá para simplificar algunas demostraciones y propiedades.

A continuación construiremos topologías haciendo uso de funciones. Sea $\{\langle X_i, \tau_i\rangle : i \in I\}$ una colección de espacios topológicos, X un conjunto y $\mathcal{F} = \{f_i : X \longrightarrow X_i\}$ una colección de funciones. A la topología sobre X que tiene como subbase al conjunto $\left\{f_i^{-1}[U_i] : U_i \in \tau_i \wedge i \in I\right\}$ se le conoce como *topología débil* inducida por la familia $\mathcal{F}$. Podemos observar que esta topología es útil cuando queremos dotar a X de una topología que haga a todas las funciones de $\mathcal{F}$ continuas. Una propiedad importante de la topología débil es la siguiente: X es completamente regular si y sólo si X tiene la topología débil inducida por la familia de funciones continuas de X al $[0, 1]$.

Supongamos que $\langle X, \tau_X\rangle$ es un espacio topológico y $\pi : X \longrightarrow Y$ es una función. A la topología sobre Y que tiene como base al conjunto $\left\{U \subseteq Y : \pi^{-1}[U] \in \tau_X\right\}$ se le conoce como *topología cociente*.

Una de las propiedades más importantes en los espacios topológicos es la compacidad. Decimos que un espacio topológico es *compacto* si toda familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita (es decir, la intersección finita de sus elementos es no vacía) tiene intersección no vacía. Dado X un espacio topológico Tychonoff, podemos construir un espacio más grande K que lo contenga y que tenga la propiedad de ser compacto. Decimos que (K, h) es una *compactación* de X si $h : X \longrightarrow K$ es un encaje, K es compacto y $h[X] \subseteq K$ es un conjunto denso. Una de las compactaciones más importantes es la compactación de *Stone-Čech* a la que denotamos como βX, esta compactación tiene la propiedad de que si $f : X \longrightarrow Z$ es continua y Z es compacto, entonces existe $\overline{f} : \beta(X) \longrightarrow Z$ una función continua que extiende a f.

Un debilitamiento de la compacidad es la *compacidad numerable*. Decimos que un espacio topológico es *numerablemente compacto* si toda sucesión del espacio tiene un punto de acumulación. A continuación veremos la noción de p-compacidad que es de suma importancia para este trabajo.

Sea $p \in \omega^*$, G un espacio topológico y $\langle x_n : n \in \omega \rangle \in G$. Decimos que $x \in X$ es el *p-límite* de la sucesión $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ si para toda vecindad U de x se tiene que $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$. El p-límite es único cuando el espacio X es Hausdoff, en tal caso lo denotaremos de la siguiente manera $x = p\text{-}\lim_{n\in\omega} x_n$. Si G es un espacio tal que todas sus sucesiones tienen un p-límite entonces diremos que G es un espacio *p-compacto*. Como lo probaremos a continuación, la propiedad de la p-compacidad es más débil que la compacidad; es decir, todo espacio compacto es p-compacto para todo $p \in \omega^*$.

PROPOSICIÓN 1.3.1. *Si X es un espacio topológico compacto y $p \in \omega^*$ entonces X es p-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$. Por ser p un filtro se tiene que el conjunto

$$\{cl(\{x_n : n \in F\} : F \in p\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita. Dado que el espacio es compacto existe $x \in X$ tal que $x \in \bigcap\{cl(\{x_n : n \in F\}) : F \in p\}$. Si existe $U \in V(x)$ tal que $F = \{n \in \omega : x_n \in U\} \notin p$, contradice el hecho de que $x \in cl(\{x_n : n \in \omega \setminus F\})$. □

También se puede demostrar que un espacio X es numerablemente compacto si y sólo si toda sucesión tiene un p-límite para algún ultrafiltro p. A continuación se demuestra dicho resultado.

PROPOSICIÓN 1.3.2. *Sea X un espacio topológico. X es numerablemente compacto si y sólo si toda sucesión tiene un p-límite para algún ultrafiltro p.*

DEMOSTRACIÓN. $\Longrightarrow\rfloor$ Sea $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión. Como el espacio es numerablemente compacto, entonces $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ tiene un punto de acumulación digamos x. Observe que el conjunto $\{\{n \in \omega : x_n \in U\} : U \in V(x)\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, por lo que puede extenderse a un ultrafiltro p y por construcción se tiene que $x = p\text{-}\lim_{n\in\omega} x_n$.

$\Longleftarrow\rfloor$ Sea $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión y veamos que tiene un punto de acumulación. Por hipótesis sabemos que dicha sucesión tiene un p-límite x, es decir $x = p\text{-}\lim_{n\in\omega} x_n$. Por la definición de p-límite se puede observar que x es un punto de acumulación de la sucesión pues si $U \in V(x)$ entonces

$$\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$$

y dado que $\emptyset \notin p$ entonces $\{n \in \omega : x_n \in U\} \neq \emptyset$; lo que implica que $\{x_n : n \in \omega\} \cap U \neq \emptyset$. □

Denotaremos por $\beta_p X$ a la β_p-*compactación* del espacio X, es decir

$$\beta_p X = \bigcap \{Y \subseteq \beta(X) : X \subseteq Y \text{ y } Y \text{ es } p\text{-compacto}\}$$

es un espacio topológico que es p-compacto, X es denso en $\beta_p X$; además satisface que si $f : X \longrightarrow Z$ es continua y Z es p-compacto, entonces existe $\overline{f} : \beta_p(X) \longrightarrow Z$ una función continua que extiende a f.

1.4. Espacios Polacos, conjuntos analíticos, determinación de juegos y ultrafiltros selectivos

Un espacio Polaco es un espacio topológico completamente metrizable y separable. Es decir, un espacio polaco es un espacio topológico cuya topología esta inducida por una métrica completa y contiene un subconjunto denso numerable. Recordemos que, en un espacio métrico, la separabilidad equivale al segundo axioma de numerabilidad; por consiguiente, un espacio polaco puede definirse, alternativamente, como un espacio topológico completamente metrizable y segundo numerable; es decir, con una base numerable.

Dado un conjunto X, decimos que $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ forma una σ-*álgebra* si $\emptyset, X \in B$ y es cerrada por uniones, intersecciones y complementos. En particular, diremos que $A \subseteq X$ es un conjunto *Boreliano*, lo que denotaremos como $A \in Borel(X)$, si A pertenece a la sigma álgebra generada por la topología

τ. Por otra parte, diremos que $A \subseteq X$ es *analítico* si existe Y un espacio Polaco y $B \subseteq Y \times X$ un conjunto Borel tal que $\pi_X[B] = A$.

En particular, diremos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es *analítico* si $\{\chi_A(A) : A \in \mathcal{I}\} \subseteq 2^\omega$ es un conjunto analítico, donde $\chi_A : \omega \longrightarrow \{0,1\}$ es la función característica de A definida como

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in A, \text{ y} \\ 0, & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

1.4.1. Determinación de juegos. Sea A un conjunto con $|A| \geq 2$, $T \subseteq A^{<\omega}$ un árbol bien podado al que llamaremos el árbol del juego y $X \subseteq [T]$. Definimos el juego *global* $G(T, X)$ con conjunto de gane X de la siguiente manera:

- En la primera jugada, el jugador I elige un un punto $a_0 \in A$ tal que $\langle a_0 \rangle \in T$
- Enseguida el jugador II elige un punto $a_1 \in A$ tal que $\langle a_0, a_1 \rangle \in T$ y así sucesivamente.

Diremos que el jugador I gana si $\bar{a} = \langle a_0, ... \rangle \in X$.

En el caso en que alguno de los dos jugadores tenga una estrategia ganadora, diremos que el juego global $G(T, X)$ está determinado. Formalmente una estrategia ganadora para el jugador I es un árbol $T' \subseteq T$ tal que:

1. si $t \in T'$ y $|t|$ es par entonces $succ_{T'}(t) = succ_T(t)$. Esto garantiza cualquier respuesta del jugador II.
2. Todas las ramas de T' hacen ganar al jugador I. Es decir, $[T'] \subseteq X$.

Similarmente se define que estrategia es ganadora para el jugador II.

Por otra parte, si $G(T, X)$ es un juego global donde el jugador II no tiene una estrategia ganadora. Decimos que $p = \langle a_0, ..., a_{2n-1} \rangle \in T$ es una jugada no perdedora para el jugador I si el jugador II no tiene estrategia ganadora en el juego $G(T_p, X_p)$ donde $T_p = \{s : p \frown s \in T\}$ y $X_p = \{x : p \frown x \in X\}$. Observemos que si $p = \langle a_0, ..., a_{2n-1} \rangle \in T$ es una jugada no perdedora,

entonces existe $\langle a_{2n}\rangle \in T_p$ tal que para cualquier $\langle a_{2n}, a_{2n+1}\rangle \in T_p$ entonces $p \frown \langle a_{2n}, a_{2n+1}\rangle$ es una jugada no perdedora.

TEOREMA 1.4.1 (Gale-Stewart, 1953). *Si X es un conjunto cerrado o abierto entonces el juego global $G(T, X)$ está determinado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un conjunto cerrado y supongamos que el jugador II no tiene estrategia ganadora. Construiremos una estrategia que será ganadora para el jugador 1. Sea σ una estrategia para el jugador I tal que para toda $p = \langle a_0, ..., a_{2n-1}\rangle \in \sigma$ es una jugada no perdedora par el jugador I. Veamos que esta estrategia es ganadora. Si existe $\bar{a} \in [\sigma] \setminus X$ entonces, como X es cerrado, existe $n \in \omega$ tal que $[\bar{a} \restriction_{2n}] \subseteq [\sigma] \setminus X$ pero esto implica que $\bar{a} \restriction_{2n}$ es una jugada perdedora que es una contradicción. Por lo tanto, σ es una jugada ganadora para el jugador I.

Si X es un conjunto abierto, $[T] \setminus X$ es cerrado y consideremos el juego $G(T, [T] \setminus X)$ donde hemos probado que este juego está determinado. Esto induce que el juego $G(T, X)$ está determinado. □

Este teorema de Gale-Stewart puede generalizarse donde el conjunto de gane X es un conjunto Borel.

TEOREMA 1.4.2 (Martin, **[19]**). *Sea $T \subseteq A^{<\omega}$ un árbol bien podado y $X \subseteq [T]$ un conjunto Borel. El juego global $G(T, X)$ está determinado.*

1.4.2. Teorema de Mathias. Uno de los teoremas más importantes que relaciona los ideales analíticos altos con los ultrafiltros selectivos es el famoso teorema de Mathias. A continuación definiremos un juego introducido en **[21]** que nos permitirá demostrar el teorema de Mathias aplicando el teorema de determinación de Martin 1.4.2. El lector puede consultar **[21]** y **[33]** para tener un panorama más amplio y detallado de esta sección.

Sea p un ultrafiltro e $\mathcal{I}$ un ideal. Consideremos el juego $G(p, \mathcal{I})$ definido de la siguiente manera: En cada paso k del juego, el jugador I elije un elemento $U_k \in p$ y el jugador II elije un elemento

$n_k \in U_k$. Al finalizar el juego, el jugador II gana si $\langle n_k : k \in \omega \rangle \in \mathcal{I}^+$. Consecuentemente, el jugador I gana si $\langle n_k : k \in \omega \rangle \in \mathcal{I}$.

Este juego $G(p, \mathcal{I})$ define un juego global $G(T, X)$ definido de la siguiente manera: Sea $A = \mathcal{P}(\omega)$ y $T \subseteq A^{<\omega}$ tal que si $t = \langle B_0, B_1, ..., B_n \rangle \in T$, $B_i \in p$ cuando i es par y $|B_i| = 1$ con $B_i \subseteq B_{i-1}$ cuando i es impar. Por otra parte, definimos el conjunto de paga $X \subseteq A^\omega$ de la siguiente manera: $x = \langle B_i : i \in \omega \rangle \in X$ si y sólo si $\bigcup_{i<\omega} B_{2i+1} \in \mathcal{I}$. Es claro observar que el juego $G(p, \mathcal{I})$ está determinado si y sólo si el juego $G(T, X)$ está determinado. A continuación construiremos un juego auxiliar con conjunto de paga Borel cuya determinación implique la determinación del juego $G(T, X)$.

Definimos la función $f : [T] \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$ dada por $f(x) = \bigcup_{i<\omega} B_{2i+1}$. Notemos que f es continua y $X = f^{-1}(\mathcal{I})$. De esta manera, como $\mathcal{I}$ es analítico y f es una función continua, entonces X también es un conjunto analítico; por consiguiente, existe G un conjunto G_δ en $[T] \times 2^\omega$ tal que la proyección $\pi_1(G) = X$. Observemos que el juego $G(T, X)$ induce el juego general $G(T \times 2^{<\omega}, G)$. Por el teorema de determinación de Martín, el juego $G(T \times 2^{<\omega}, G)$ está determinado, esto a su vez implica que $G(T, X)$ está determinado; de ahí que el juego $G(p, \mathcal{I})$ está determinado.

Por la definición del juego $G(p, \mathcal{I})$ y la definición de estrategia ganadora, podemos observar que:

1. El jugador I tiene estrategia ganadora en el juego $G(p, \mathcal{I})$ si y sólo si existe un árbol $T' \subseteq \omega^{<\omega}$ de ramificación en p (que define la estrategia ganadora) tal que $Img(x) \in \mathcal{I}$ para toda rama $x \in [T']$
2. El jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G(p, \mathcal{I})$ si y sólo si existe un árbol $T' \subseteq \omega^{<\omega}$ de ramificación en p (que define la estrategia ganadora) tal que $Img(x) \in \mathcal{I}^+$ para toda rama $x \in [T']$

LEMA 1.4.3. *Si II tiene estrategia ganadora en el juego $G(p, \mathcal{I})$ entonces I no es alto.*

DEMOSTRACIÓN. Si II tiene estrategia ganadora en el juego $G(p,\mathcal{I})$ entonces existe un árbol $T' \subseteq \omega^{<\omega}$ de ramificación en p (que define la estrategia ganadora) tal que $Img(x) \in \mathcal{I}^+$ para toda rama $x \in [T']$. Consideremos una enumeración $T' = \{t_n : n < \omega\}$ y definimos los conjuntos $A_n = \bigcap_{m\leq n} succ(t_m)$ para toda $n < \omega$. Observemos que esta sucesión $\langle A_n : n < \omega\rangle$ es una sucesión decreciente de elementos de p (por lo que son no vacíos). Por otra parte, notemos que para toda $I \in \mathcal{I}$ existe $n \in \omega$ tal que $I \cap A_n = \emptyset$, pues en caso contrario, usando que T' define la estrategia, existiría $x \in [T']$ tal que $Img(x) \in \mathcal{I}$.

Sea $x \in [T']$ una rama tal que $Img(x) \subseteq^* A_n$ para toda $n \in \omega$. Dado que para toda $I \in \mathcal{I}$ existe $n \in \omega$ tal que $I \cap A_n = \emptyset$ y el ideal $\mathcal{I}$ es alto, entonces $|I \cap Img(x)| < \omega$. Esto concluye que el ideal I no es alto. □

La prueba del siguiente teorema se puede consultar en [**21**] y en [**33**].

TEOREMA 1.4.4. *(Mathias* [**20**]*) Sea $p \in \omega^*$ un ultrafiltro. $p \in \omega^*$ es selectivo si y sólo si $p \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$ para todo ideal $\mathcal{I}$ libre, analítico y alto.*

DEMOSTRACIÓN. $\Longrightarrow\rfloor$ Supongamos que p es selectivo e $\mathcal{I}$ es un ideal analítico alto. Por el Lema 1.4.3, el jugador II no tiene estrategia ganadora en el juego $G(p,\mathcal{I})$. Por el Teorema de Martin 1.4.2, el juego $G(p,\mathcal{I})$ está determinado; de lo que se infiere que el jugador I tiene estrategia ganadora en el juego $G(p,\mathcal{I})$, de ahí que exista un árbol $T' \subseteq \omega^{<\omega}$ de ramificación en p (que define la estrategia ganadora) tal que $Img(x) \in \mathcal{I}$ para toda rama $x \in [T']$. Como p es selectivo, aplicando Proposición 1.1.2 existe una rama $x \in [T']$ tal que $Img(x) \in p$. Por lo anterior, $Img(x) \in p \cap \mathcal{I}$.

$\Longleftarrow\rfloor$ Sea $p \in \omega^*$ un ultrafiltro tal que $p \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$ para todo ideal $\mathcal{I}$ libre, analítico y alto. Para demostrar que p es selectivo, consideremos una partición sobre ω, $\{I_n : n \in \omega\}$ tal que para toda $n \in \omega$ $I_n \notin p$. Consideremos el ideal $\mathcal{I}$ generado por los selectores de la partición. Este ideal es analítico pues el conjunto de los selectores infinitos de la partición es un conjunto cerrado. Además,

dado que los selectores finitos pertenecen a $\mathcal{I}$, entonces el ideal generado $\mathcal{I}$ contiene a todos los conjuntos finitos. Por otra parte, todo conjunto infinito contiene un selector infinito; esto implica que $\mathcal{I}$ es alto. Por lo tanto, $\mathcal{I}$ es un ideal libre, analítico y alto.

Aplicando la hipótesis, $p \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$. Como p es un ultrafiltro, p intersecta la base que genera a I; es decir, existe en p un selector de la partición $\{I_n : n \in \omega\}$. De lo que podemos concluir que p es selectivo.

□

1.4.3. Espacios de Baire y la Propiedad de Baire. A continuación daremos una breve introducción a los espacios de Baire y a la propiedad de Baire. Cabe señalar que esta propiedad nos será de utilidad para demostrar algunos teoremas en el capítulo 2.

Sea X un espacio topológico, decimos que $A \subseteq X$ es denso en ninguna parte si $int(cl(A)) = \emptyset$. Asimismo, diremos que un conjunto es magro si es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Un espacio topológico es un espacio de Baire si sucede que la intersección de una familia de conjuntos abiertos densos es un conjunto denso. Equivalentemente, un espacio topológico es de Baire si y sólo si todo conjunto abierto no vacío no es magro. Un ejemplo clásico de espacios de Baire son los espacios Polacos.

Por otra parte, decimos que $A \subseteq X$ tiene la propiedad de Baire si existe U un abierto tal que la diferencia simétrica de A con U ($A \triangle U$) es un conjunto magro. En particular, si X es un espacio Polaco, entonces los conjuntos Borel, analíticos y coanalíticios tiene la propiedad de Baire. Además, diremos que una función $f : X \to Y$ es Baire medible si la imagen inversa de un conjunto con la propiedad de Baire en Y tiene la propiedad de Baire en X.

El teorema de Sierpinski nos muestra la relación que existe entre filtros y la propiedad de Baire. Este teorema nos dice que: Si p es un filtro sobre ω, entonces p es magro o no tiene la propiedad de

Baire. Además, si p es un ultrafiltro entonces p no tiene la propiedad de Baire. La demostración de este teorema junto con un análisis más detallado de la propiedad de Baire se puede consultar en [**1**].

1.5. Grupos topológicos

El lector puede consultar el libro de M. Tkachenko y A. V. Arkhangelskii [**26**] y el libro de E. Hewitt and K. A. Ross [**13**] para profundizar en los grupos topológicos.

Un *grupo topológico* es una cuarteto $\langle G, \tau, \cdot, e\rangle$ tal que:

1. $\langle G, \tau\rangle$ es un espacio topológico.
2. $\langle G, \cdot, e\rangle$ es un grupo con elemento neutro e.
3. La función $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ es continua. Es decir, para cualquier abierto $U \subseteq G$ con $x \cdot y \in U$ existen abiertos $V \subseteq G$ y $W \subseteq G$ tales que $x \in V$, $y \in W$ y

$$VW = \{a \cdot b : a \in V, b \in W\} \subseteq U$$

4. La función $(\ )^{-1} : G \times G \longrightarrow G$ es continua. Es decir, para cualquier abierto $U \subseteq G$ con $x^{-1} \in U$ existe $V \subseteq G$ abierto tal que $x \in V$ y $V^{-1} = \left\{a^{-1} : a \in V\right\} \subseteq U$.

Podemos observar que las traslaciones, izquierdas y derechas ($g \longmapsto ag$ y $g \longmapsto ga$), e inversiones $g \longmapsto g^{-1}$ son homeomorfismos de G. Por esta razón, si U es un abierto y $g \in G$ entonces gU también es un abierto. Por consiguiente, si $\mathcal{U}$ es una base para el elemento neutro e entonces $\{gU : U \in \mathcal{U}\}$ es una base local para g. Así, $\{gU : U \in \mathcal{U}, g \in G\}$ es una base para el grupo G.

Por la continuidad de las operaciones de grupo se puede demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1 (Teorema 4.5 [**13**]). *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{U}$ una base para el elemento neutro e. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. *Para toda $U \in \mathcal{U}$ hay $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$.*
2. *Para toda $U \in \mathcal{U}$ hay $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.*

3. *Para toda* $U \in \mathcal{U}$ *y* $x \in U$ *hay* $V \in \mathcal{U}$ *tal que* $xV \subseteq U$.

4. *Para toda* $U \in \mathcal{U}$ *y* $x \in G$ *hay* $V \in \mathcal{U}$ *tal que* $xVx^{-1} \subseteq U$.

Conversamente, si G *es un grupo y* $\mathcal{U}$ *es una familia de subconjuntos de* G *con la propiedad de la intersección finita y que satisface las propiedades* 1., 2., 3. *y* 4., *entonces la familia de conjuntos* $\{xU : U \in \mathcal{U}\}$ *es una subase para una topologia sobre* G *que lo vuelve un grupo topológico. Si además se satisface:*

5. *Si* $U, V \in \mathcal{U}$, *existe* $W \in \mathcal{U}$ *tal que* $W \subseteq U \cap V$.

Entonces $\{xU : U \in \mathcal{U}\}$ *es una base para una topologia sobre* G *que lo vuelve un grupo topológico*

A continuación enunciaremos otras propiedades básicas:

I) Si A es un conjunto abierto de G y B es cualquier subconjunto de G entonces AB y BA son conjuntos abiertos de G.

Demostración. En efecto, Si A es un conjunto abierto entonces $AB = \bigcup_{b\in B} Ab$ y $BA = \bigcup_{b\in B} bA$ son conjuntos abiertos pues son uniones arbitrarias de conjuntos abiertos. □

II) Si A,$B \subseteq G$ son conjunto compactos entonces AB es compacto.

Demostración. Esto es claro ya que si A y B con compactos entonces $A \times B$ es un conjunto compacto. Luego, la imagen bajo el producto también será un conjunto compacto; es decir $\cdot[A \times B] = AB$ es compacto. □

III) Todo grupo topológico tiene una base local $\mathcal{U}$ para e que consiste de conjuntos simétricos; es decir, si $U \in \mathcal{U}$ entonces $U = U^{-1}$.

Demostración. Dado W un abierto con $e \in W$ definimos $U = W \cap W^{-1} \subseteq W$ y satisface que $U = U^{-1}$. □

IV) Si $A \subseteq G$ es cerrado y $B \subseteq G$ es compacto entonces AB es cerrado y BA es cerrado.

Demostración. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in D} \subseteq AB$ una red que converge a x_0. Para cada $\alpha \in D$, $x_\alpha = y_\alpha z_\alpha$ con $y_\alpha \in A$ y $z_\alpha \in B$. Como B es compacto, existe $D' \subseteq D$ tal que $(z_\alpha)_{\alpha\in D'} \longrightarrow z_0$. Así $(y_\alpha)_{\alpha\in D'} \longrightarrow x_0 z_0^{-1}$, como A es cerrado entonces $x_0 z_0^{-1} \in A$. Por lo tanto $x_0 = \left(x_0 z_0^{-1}\right) z_0 \in AB$. Analogamente para el otro caso. □

V) Si $H \leqslant G$ (H es un subgrupo de G) entonces $cl\,(H) \leqslant G$.

Demostración. Recordemos que si una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua entonces para toda $A \subseteq X$ se tiene que $f\,[cl\,(A)] \subseteq cl\,(f\,[A])$, de esta proposición inferimos lo siguiente:

$cl\,(H) \cdot cl\,(H) \subseteq cl\,(H \cdot H) = cl\,(H)$ y $(cl\,(H))^{-1} \subseteq cl\left(H^{-1}\right) = cl\,(H)$. Esto quiere decir que $cl\,(H)$ es invariante bajo el producto e inversos; es decir, $cl\,(H) \leqslant G$. □

VI) Si $H \trianglelefteq G$ (H es un subgrupo normal de G) entonces $cl\,(G) \trianglelefteq G$.

Demostración. Si $H \trianglelefteq G$, entonces $gcl\,(H)\,g^{-1} \subseteq cl\left(gHg^{-1}\right) \subseteq cl\,(H)$; es decir $cl\,(H) \trianglelefteq G$. □

VII) Si $H \leqslant G$ entonces la función cociente canónica $q : G \longrightarrow G/_H$ es abierta, donde $G/_H$ tiene la topología cociente.

Demostración. Sea $U \subseteq G$ abierto. Notemos que $q^{-1}\,[q\,[U]] = UH = \bigcup_{h\in H} Uh$ que es un abierto, luego $q\,[U]$ es un abierto en el cociente. □

VIII) Si $H \trianglelefteq G$ entonces el espacio cociente $G/_H$ es un grupo topológico. Más aún, si $\mathcal{U}$ es una base para el elemento neutro $e \in G$ entonces $\{q\,[u] : u \in \mathcal{U}\} = \{uH : u \in \mathcal{U}\}$ es una base para el elemento neutro H de $G/_H$.

Demostración. Se sigue de VII) □

IX) Sea $H \trianglelefteq G$. El grupo $G/_H$ es discreto si y sólo si H es abierto.

Demostración. Si $G/_H$ es discreto entonces $\{H\}$ es abierto, luego $\pi^{-1}[\{H\}] = H$ es un abierto; donde π es la función cociente canónica. Por otra parte si H es abierto entonces xH es un abierto y como la función cociente es abierta entonces $\pi[xH] = \{xH\}$ es un abierto. Así $G/_H$ es discreto. □

X) Sea $H \trianglelefteq G$. El grupo $G/_H$ es T_0 si y sólo si H es cerrado.

Demostración. Si $G/_H$ es T_0 entonces los puntos son cerrados por lo que $\{H\}$ es cerrado, luego $\pi^{-1}[\{H\}] = H$ es un cerrado; donde π es la función cociente canónica. Conversamente si H es cerrado entonces $\pi^{-1}[\{xH\}] = xH$ que es un cerrado porque es el producto de un cerrado con un compacto. Por consiguiente, todos los puntos en $G/_H$ son cerrados; esto implica que el espacio es T_0. □

Proposición 1.5.2 (Teorema 8.2, [**13**]). *Sea G un grupo con elemento neutro e y $\{U_n : n \in \omega \setminus \{0\}\} \subseteq V(e)$ una familia de vecindades simétricas tales que $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces existe d una pseudométrica izquierda invariante tal que:*

1. *$d(x,y) = 0$ si y sólo si $y^{-1}x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$*
2. *Si $y^{-1}x \in U_k$ entonces $d(x,y) \leq 2^{-k}$*
3. *Si $y^{-1}x \notin U_k$ entonces $d(x,y) \geq 2^{-k}$*
4. *Si para todo $x \in G$ y $n \in \omega$ se cumple que $xU_nx^{-1} = U_n$ entonces d es derecha invariante y*

$$d(x,y) = d\left(x^{-1}, y^{-1}\right)$$

Demostración. Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ definimos $V_{2^{-n}} = U_n$, si $r \in D$, donde D es el conjunto de los números diádicos, con $r = 2^{-l_1} + ... + 2^{-l_r} < 1$ (con $\{l_i : i \leq r\} \subseteq \omega$) entonces definimos $V_r = V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2}} ... V_{2^{-l_r}}$ y si $r \geq 1$ definimos $V_r = G$. Observemos que si $r < s$ entonces $V_r \subseteq V_s$. Para cada $x \in G$ definimos $\varphi(x) = \text{ínf}\{r \in \mathbb{R} : \forall d \in D(d \geq r \longrightarrow x \in V_d\}$ y $d : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$

como $d(x,y) = \sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\}$. Notemos que d es una pseudométrica y es izquierda invariante ya que

$$d(ax,ay) = \sup\{|\varphi(gax) - \varphi(gay)| : g \in G\} = sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\} = d(x,y)$$

Además satisface las propiedades buscadas:

1. $d(x,y) = 0$ si y sólo si para toda $g \in G$ se cumple que $|\varphi(gx) - \varphi(gy)| = 0$, en particular para $g = y^{-1}$ se tiene que $\varphi\left(y^{-1}x\right) = 0$; lo que implica que $y^{-1}x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Inversamente, si $y^{-1}x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$ entonces $\varphi\left(y^{-1}x\right) = 0$, lo que implica que

$$d(x,y) = \sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\} \leq \left|\varphi\left(y^{-1}x\right) - \varphi\left(y^{-1}y\right)\right| = \varphi\left(y^{-1}x\right) = 0$$

Supongamos que $\sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\} > \varphi\left(y^{-1}x\right)$. Entonces, por definición de supremo, existe $g \in G$ tal que $|\varphi(gx) - \varphi(gy)| > \varphi\left(y^{-1}x\right)$. Sin perdida de generalidad supongamos que $|\varphi(gx) - \varphi(gy)| = \varphi(gx) - \varphi(gy)$; por consiguiente $\varphi\left(y^{-1}x\right) < \varphi(gx) - \varphi(gy)$. Como D es denso, existe r_y diadico tal que $r_y < \varphi(gx) - \varphi(gy)$ y $y^{-1}x \in V_{r_y}$. Dado que $\varphi(gy) < \varphi(gx) - r_y$, y por la densidad de D, existe r_g diadico tal que $r_g < \varphi(gx) - r_y$ y $gy \in V_{r_g}$. Así, $gx = gyy^{-1}x \in V_{r_g+r_y}$ que contradice el hecho de que $r_g + r_y < \varphi(gx)$.

2. Si $y^{-1}x \in U_k = V_{2^{-k}}$ entonces $d(x,y) \leq \varphi\left(y^{-1}x\right) \leq 2^{-k}$.

3. Si $y^{-1}x \notin U_k = V_{2^{-k}}$ entonces, como la familia es decreciente, para toda $n \geq k$ $y^{-1}x \notin U_n = V_{2^{-n}}$; de ahí que $d(x,y) \geq 2^{-k}$ (sale siguiendo las definiciones)

4. si para todo $x \in G$ y $n \in \omega$ se cumple que $aU_na^{-1} = U_n$ entonces $\varphi\left(axa^{-1}\right) = \varphi(a)$, de ahí que

$$d(xa,ya) = \sup\{|\varphi(gxa) - \varphi(gya)| : g \in G\} = \left\{\left|\varphi\left(agxaa^{-1}\right) - \varphi\left(agyaa^{-1}\right)\right| : g \in G\right\} =$$

$$= \sup\{|\varphi(agx) - \varphi(agy)| : g \in G\} = \sup\{|\varphi(gx) - \varphi(gy)| : g \in G\} = d(x,y)$$

Es decir, d es derecha invariante. Por ser d izquierda y derecha invariante se sigue que

$$d(x,y) = d(x^{-1}x, x^{-1}y) = d(e, x^{-1}y) = d(y^{-1}, x^{-1}yy^{-1}) = d(y^{-1}, x^{-1}) = d(x^{-1}, y^{-1})$$

□

TEOREMA 1.5.3 (Birkhoff-Kakutani, Teorema 8.3 [**13**]). *Sea G un grupo topológico T_0 con elemento neutro e. Entonces G es metrizable si y sólo si existe una base numerable de e.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que si e tiene una base numerable entonces G es metrizable. Ya que la implicación inversa es trivial, pues con la métrica se pueden definir bolas de radio racional con centro en e; y esta colección será nuestra base nuemrable buscada. Así procedemos a demostrar la implicación restante.

Sea $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq V(e)$. Por la Proposición 1.5.2 existe $d : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ una pseudométrica que cumple las propiedades $1-4$. Como G es un grupo T_0 entonces $\{e\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, de ahí que, por 1, $d(x,y) = 0$ si y sólo si $y^{-1}x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{e\}$ que equivale a que $y = x$. Por consiguiente d es una métrica. Además d es compatible con la topología ya que, por 2 y 3, $B_d\left(e, 2^{-k}\right) = U_k$. Así, podemos concluir que d es metrizable. □

PROPOSICIÓN 1.5.4 (Teorema 8.4, [**13**]). *Si G es T_0 entonces G es Tychonoff.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo topológico, $F \subseteq G$ cerrado y $a \notin F$. Consideremos $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq V(e)$ tales que $U_{n+1} \subseteq U_n$ y $aU_n \cap F = \emptyset$, dicha familia existe porque F es cerrado y $a \notin F$.

Por la Proposición 1.5.2 existe d una pseudométrica generada por dicha familia que cumple que si $y^{-1}x \notin U_n$ entonces $d(x,y) \geq 2^{-n}$. Definimos $f(x) = \text{mín}\{1, 2d(a,x)\}$. Observemos que $f(a) = \text{mín}\{1, 2d(a,a)\} = 0$ y si $x \in F$ entonces $a^{-1}x \notin U_1$ luego $d(x,a) \geq 2^{-1}$; por consiguiente, $f(x) = 1$.

De lo anterior podemos concluir que G es Tychonoff.

□

Diremos que un grupo topológico X es *totalmente acotado* si para cualquier vecindad U del elemento neutro e existe un subconjunto finito $F \subseteq X$ tal que $X = U \cdot F$. Se puede demostrar que un grupo topológico discreto es totalmente acotado si y sólo si es finito.

1.6. Integral y medida de Haar en grupos topológicos

Como lo explica el título de esta sección, introduciremos la medida y la integral de Haar en grupos topológicos. Para un análisis más detallado de esta sección se puede consultar el capítulo 4 en [**13**]. Comenzaremos definiendo algunos conjuntos y notaciones que nos serán de utilidad.

Sea X un espacio topológico, $C(X)$ denotará el conjunto de todas las funciones continuas acotadas que van de X a los números complejos $\mathbb{C}$.

Sea G un grupo, E cualquier conjunto no vacío, $f : G \longrightarrow E$ y $g \in G$. Definimos la función ${}_gf : G \longrightarrow E$ como ${}_gf(x) = f(gx)$. Esta función ${}_gf$ se conoce como la traslación izquierda de f por g. Análogamente podemos definir la traslación derecha.

Para cada función $f : G \longrightarrow E$ podemos definir la función $f^* : G \longrightarrow E$ como $f^*(x) = f(x^{-1})$. Esta función f^* se conoce como inversión.

Teorema 1.6.1 ([**13**]). *Sea G un grupo localmente compacto y Hausdorff. Entonces existe un funcional I sobre $C(G)$ tal que:*

I) Si $f \neq 0$ entonces $I(f) > 0$.

II) $I(f+g) = I(f) + I(g)$ *para toda* $f, g \in C(G)$

III) $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ *para toda* $\alpha \geq 0$ *y* $f \in C(G)$

IV) $I({}_g f) = I(f)$ *para toda* $f \in C(G)$ *y* $g \in G$

V) Si $J \neq 0$ *es cualquier funcional sobre* $C(G)$ *que satisface las condiciones I)-IV) entonces* $J = cI$ *alguna* $c \geq 0$.

A la funcional I que satisface las propiedades anteriores se le conoce como la integral de Haar invariante por la izquierda. De forma análoga podemos construir la integral de Haar invariante por la derecha.

DEMOSTRACIÓN. La demostración se puede consultar siguiendo la sección 15 en [[**13**]], en particular el teorema 15.5 y la observación 15.7. □

Por el teorema de representación de Riesz existe una medida μ tal que $I(f) = \int_G f(x)d\mu$. A esta medida la conocemos como la medida de Haar y denotaremos por $\int_G f(x)d\mu$ a la integral de Haar.

1.7. Dualidad de Pontryagin y el Teorema de Aproximación de E. Hewitt y S. Zuckerman

Dado un grupo topológico $\langle G, \cdot_G, 0_G \rangle$, un *carácter* de G es un homomorfismo $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$. Denotaremos por $G^* = Hom_C(G, \mathbb{T})$ al conjunto de todos los caracteres continuos de G a $\mathbb{T}$ y por $Hom(G, \mathbb{T})$ al conjunto de todos los caracteres de G a $\mathbb{T}$. Observemos que G^* es un grupo con la operación $h_1 * h_2(x) = h_1(x)\, h_2(x)$. Observemos que cuando G es discreto, $G^* = Hom(G, \mathbb{T})$.

Definimos el grupo dual de Pontryagin de G como el grupo G^* dotado de la topología compacto abierta. Es decir, los conjuntos de la forma

$$P(K, \epsilon) = \{\chi \in G^* : \forall x \in K(\|\chi(x)\| < \epsilon)\}$$

donde $K \subseteq G$ es compacto y $\epsilon > 0$, forman una sub-base para el elemento neutro de G^*. Observemos que si G es un grupo Abeliano compacto, G^* es discreto. En cambio, si G es un grupo discreto entonces su grupo dual de Pontryagin $G^* = Hom(G, \mathbb{T}) = Hom_C(G, \mathbb{T})$ cuya topología en este caso coincide con la topología producto. El teorema de L. S. Pontryagin y E. van Kampen nos dice que si G es discreto o compacto entonces G y G^{**} son isomorfos como grupos y como espacios topológicos; en particular el mapeo evaluación $\psi : G \longrightarrow G^{**}$ definido como $\psi(g)(\chi) = \chi(g)$ nos da el isomorfismo. Denotaremos por $\dot{g}$ a $\psi(g)$.

Intuitivamente el teorema de L. S. Pontryagin y E. van Kampen nos dice que los caracteres continuos de G^* son aquellos que se definen vía la evaluación de los elementos de G, pero ¿que pasa con los caracteres que no son continuos? El teorema de E. Hewitt y S. Zuckerman responde a esta pregunta: Sea S un grupo y $\Sigma \leqslant Hom(S, \mathbb{T})$. Si $\chi \in Hom(\Sigma, \mathbb{T})$, $\sigma_0, \sigma_2, ..., \sigma_{m-1} \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$, entonces existe un elemento $s \in S$ tal que $\|\chi(\sigma_j) - \sigma_j(s)\| < \epsilon$ para cada $j \in m$. La demostración de este teorema se expone a continuación y también se puede consultar en **[14]**.

Antes de comenzar con la prueba del teorema de E. Hewitt y S. Zuckerman, primero demostremos una proposición que nos será de utilidad para nuestro propósito y recordaremos el teorema de Stone-Weierstrass versión compleja.

PROPOSICIÓN 1.7.1. *[Lema 23.19,* **[13]***/ Sea $\langle \mathbb{G}, \cdot, 1 \rangle$ un grupo localmente compacto, μ la medida de Haar del grupo $\mathbb{G}$ tal que $\mu(\mathbb{G}) = \int_{\mathbb{G}} 1 d\mu = 1$ y $\chi \in Hom_C(\mathbb{G}, \mathbb{T})$. Si $\chi \neq 1$ entonces $\int_{\mathbb{G}} \chi(x)\, d\mu = 0$ y si $\chi = 1$ entonces $\int_{\mathbb{G}} \chi(x)\, d\mu = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente si $\chi = 1$ entonces $\int_{\mathbb{G}} \chi(x)\, d\mu = 1$. Por lo que basta demostrar que si $\chi \neq 1$ entonces $\int_{\mathbb{G}} \chi(x)\, d\mu = 0$.

Como $\chi \neq 1$, existe $g \in \mathbb{G}$ tal que $\chi(g) \neq 1$. Por consiguiente,

$$\int_{\mathbb{G}} \chi(x)\, d\mu = \int_{\mathbb{G}} \chi(gx)\, d\mu = \int_{\mathbb{G}} \chi(g)\chi(x)\, d\mu = \chi(g) \int_{\mathbb{G}} \chi(x)\, d\mu$$

Dado que $\chi(g) \neq 1$, se sigue que $\int_{\mathbb{G}} \chi(x)\, d\mu = 0$. □

A continuación veremos el teorema de Stone-Weierstrass en su versión compleja. Para esto primero veremos algunas definiciones importantes. Sea Y un espacio topológico y $C(Y, \mathbb{C})$ el espacio de funciones continuas con valores complejos con la topología uniforme, decimos que un conjunto $D \subseteq C(Y, \mathbb{C})$ separa puntos si para cualesquiera $x, y \in Y$ distintos existe $f \in D$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Además, diremos que $D \subseteq C(Y, \mathbb{C})$ es cerrada por conjugación si siempre que $f \in D$ entonces $\overline{f} \in D$, donde $\overline{f}$ se define como $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$. Finalmente, diremos que $\mathcal{L} \subseteq C(Y, \mathbb{C})$ es un álgebra si es cerrada por la suma, la multiplicación y la multiplicación escalar.

TEOREMA 1.7.2. *(Teorema de Stone-Weierstrass versión compleja) Sea Y un espacio topológico. Si D es un álgebra sobre el espacio de funciones continuas con valores complejos $C(X, \mathbb{C})$ con la topología uniforme que contienen a las funciones constantes (o la función constante 1 pertenece a D), separa puntos y es cerrada por conjugación, entonces $\mathcal{L}$ el álgebra generada por D es un conjunto denso en $C(X, \mathbb{C})$ con la topología uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba del teorema de Stone-Weierstrass en su versión real se puede consultar en el teorema 3.3 de la sección 3 del capítulo 13 en **[10]** y la adecuación de la prueba en su versión compleja se encuentra como observación al final de la sección 3. □

TEOREMA 1.7.3. *(E. Hewitt y S. Zuckerman, Teorema 1* **[14]***) Sea S un grupo, y Σ un grupo de caracteres de S. Si χ is cualquier carácter de Σ, $\sigma_0, \sigma_2, ..., \sigma_{m-1} \in \Sigma$ y ϵ es cualquier número real positivo, entonces existe un elemento $s \in S$ tal que $\|\chi(\sigma_j) - \sigma_j(s)\| < \epsilon$ para cada $j \in m$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el homomorfismo $\Phi : S \longrightarrow \prod_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{T}$ definido como

$$\Phi(s) = \{\sigma(s)\}_{\sigma \in \Sigma}$$

Observemos que $S^* = \Phi[S]$ es un subgrupo de $\prod_{\sigma\in\Sigma}\mathbb{T}$ y por consiguiente $cl(S^*)$ es un subgrupo cerrado, y por lo tanto compacto, de $\prod_{\sigma\in\Sigma}\mathbb{T}$.

Notemos que para cualquier punto $v = \{v(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma} \in cl(S^*)$, $\sigma_0, \sigma_2, ..., \sigma_{m-1} \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$, existe $s^* \in S^*$ tal que $\|v(\sigma_j) - s^*(\sigma_j)\| < \epsilon$ para toda $j < m$. Consideremos $s \in S$ tal que $\Phi(s) = s^*$, así para toda $\sigma \in \Sigma$ se tiene que $s^*(\sigma) = \sigma(s)$. Por consiguiente, $\|v(\sigma_j) - \sigma_j(s)\| < \epsilon$ para toda $j < m$. Así basta demostrar que $Hom(\Sigma, \mathbb{T}) = cl(S^*)$.

A continuación probaremos que los elementos de la $cl(S^*) \subseteq Hom(\Sigma, \mathbb{T})$. Sean $v \in cl(S^*)$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$, sabemos que existe $s \in S$ tal que $\|v(\sigma_1) - \sigma_1(s)\| < \frac{\epsilon}{3}$, $\|v(\sigma_2) - \sigma_2(s)\| < \frac{\epsilon}{3}$ y

$$\|v(\sigma_1\sigma_2) - (\sigma_1(s)\sigma_2(s))\| = \|v(\sigma_1\sigma_2) - \sigma_1\sigma_2(s)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

Por consiguiente

$$\|v(\sigma_1\sigma_2) - (v(\sigma_1)v(\sigma_2))\| \leq$$

$$\|v(\sigma_1\sigma_2) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)\| + \|\sigma_1(s)\sigma_2(s) - \sigma_1(s)v(\sigma_2)\| + \|\sigma_1(s)v(\sigma_2) - v(\sigma_1)v(\sigma_2)\| \leq$$

$$\|v(\sigma_1\sigma_2) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)\| + \|\sigma_1(s)\|\,\|\sigma_2(s) - v(\sigma_2)\| + \|v(\sigma_2)\|\,\|\sigma_1(s) - v(\sigma_1)\| =$$

$$\|v(\sigma_1\sigma_2) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)\| + \|\sigma_2(s) - v(\sigma_2)\| + \|\sigma_1(s) - v(\sigma_1)\| < \epsilon$$

Como esto es valido para toda $\epsilon > 0$, podemos concluir que $v(\sigma_1\sigma_2) = v(\sigma_1)v(\sigma_2)$; de lo que podemos inferir que v es un carácter de Σ.

A continuación probaremos que $Hom(\Sigma, \mathbb{T}) \subseteq cl(S^*)$.

Para cada $\sigma \in \Sigma$ definimos $\pi_\sigma : cl(S^*) \longrightarrow \mathbb{T}$ como $\pi_\sigma(v) = v(\sigma)$; es decir π_σ es la proyección sobre la coordenada σ, lo que implica que π_σ es continua. Dado que Σ es un grupo y se satisface que $v(\sigma_1\sigma_2) = v(\sigma_1)v(\sigma_2)$ y $\overline{v(\sigma)} = v(\sigma^{-1})$ (en notación multiplicativa) se sigue que $\mathcal{L}$, la mínima álgebra que contiene al conjunto $\{\pi_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, es una sub-álgebra del álgebra de las funciones continuas de $cl\left(S^*\right)$ a $\mathbb{C}$; es decir, $\mathcal{L}$ es una sub-álgebra de $C\left(cl\left(S^*\right), \mathbb{C}\right)$. Concretamente los elementos de $\mathcal{L}$ se pueden escribir como combinaciones lineales de proyecciones. Como $\mathcal{L}$ es un álgebra generada, sus elementos se obtienen iterando la operación de producto y de suma a partir de las proyecciones. Pero como $v(\sigma_1\sigma_2) = v(\sigma_1)v(\sigma_2)$ los elementos de $\mathcal{L}$ se pueden escribir como combinaciones lineales de proyecciones. Además, si $v_0, v_1 \in cl\left(S^*\right)$ son tales que $v_0 \neq v_1$, entonces existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $v_0(\sigma) \neq v_1(\sigma)$; es decir, $\mathcal{L}$ separa puntos.

En resumen $\mathcal{L}$ separa puntos, es cerrada por conjugación y la función identidad pertenece a $\mathcal{L}$. Aplicando el teorema de Stone-Weierstrass para funciones complejas, se sigue que $\mathcal{L}$ es denso en $C\left(cl\left(S^*\right), \mathbb{C}\right)$ con la topología uniforme.

Afirmamos que $Hom_C\left(cl\left(S^*\right), \mathbb{T}\right) = \{\pi_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$. Dado que $\mathcal{L}$ es denso $C\left(cl\left(S^*\right), \mathbb{C}\right)$ con la topología uniforme. Si χ es un carácter continuo de $cl\left(S^*\right)$ (distinto de las proyecciones) y $\epsilon > 0$, entonces existen $\{\sigma_i : i \leq n\} \subseteq \Sigma$ distintos y $\{\alpha_i : i \leq n\} \subseteq \mathbb{C}$ tal que para todo $v \in cl\left(S^*\right)$ se cumple que $\left\|\chi(v) - \sum_{i \leq n} \alpha_i \cdot \pi_{\sigma_i}(v)\right\| < \epsilon$. Por otra parte, sea μ la medida de Haar sobre $cl\left(S^*\right)$ con $\mu\left(cl\left(S^*\right)\right) = 1$. Se tiene que

$$\int_{cl(S^*)} \left\|\chi(v) - \sum_{i \leq n} \alpha_i \cdot \pi_{\sigma_i}(v)\right\|^2 d\mu =$$

$$\int_{cl(S^*)} \left(\chi(v) - \sum_{i \leq n} \alpha_i \cdot \pi_{\sigma_i}(v)\right)\left(\overline{\chi(v)} - \sum_{i \leq n} \overline{\alpha_i} \cdot \overline{\pi_{\sigma_i}(v)}\right) d\mu =$$

$$\int_{cl\left(S^*\right)} \chi\left(v\right) \overline{\chi\left(v\right)} d\mu - \sum_{i\leq n} \overline{\alpha_i} \cdot \int_{cl\left(S^*\right)} \chi\left(v\right) \overline{\pi_{\sigma_i}\left(v\right)} d\mu -$$

$$\sum_{i\leq n} \alpha_i \cdot \int_{cl\left(S^*\right)} \pi_{\sigma_i}\left(v\right) \overline{\chi\left(v\right)} d\mu + \sum_{i\leq n} \sum_{j\leq n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \cdot \int_{cl\left(S^*\right)} \pi_{\sigma_i}\left(v\right) \overline{\pi_{\sigma_j}\left(v\right)} d\mu$$

Dado que χ es un carácter continuo de $cl\left(S^*\right)$ distinto de las proyecciones (esto implica que no es la función identidad), aplicando la proposición 1.7.1, se tiene que

$$\int_{cl\left(S^*\right)} \left\| \chi\left(v\right) - \sum_{i\leq n} \alpha_i \cdot \pi_{\sigma_i}\left(v\right) \right\|^2 d\mu = 1 + 0 + 0 + \sum_{i\leq n} \left\|\alpha_i\right\|^2 = 1 + \sum_{i\leq n} \left\|\alpha_i\right\|^2$$

esto contradice el hecho de que $\left\| \chi\left(v\right) - \sum_{i\leq n} \alpha_i \cdot \pi_{\sigma_i}\left(v\right) \right\| < \epsilon$ para toda ϵ. Por lo tanto,

$$Hom_C\left(cl\left(S^*\right), \mathbb{T}\right) = \left\{\pi_\sigma : \sigma \in \Sigma\right\}.$$

Aplicando el teorema de dualidad de Pontryagin y lo anterior se tiene que

$$cl\left(S^*\right) \cong_\psi Hom\left(Hom_C\left(cl\left(S^*\right), \mathbb{T}\right), \mathbb{T}\right) = Hom\left(\left\{\pi_\sigma : \sigma \in \Sigma\right\}, \mathbb{T}\right)$$

Sea $\chi \in Hom\left(\Sigma, \mathbb{T}\right)$. Veamos que $\chi \in cl\left(S^*\right)$. Definimos

$$\hat{\chi} : \left\{\pi_\sigma : \sigma \in \Sigma\right\} \longrightarrow \mathbb{T}$$

como $\hat{\chi}\left(\pi_\sigma\right) = \chi\left(\sigma\right)$, podemos observar que $\hat{\chi} \in Hom\left(\left\{\pi_\sigma : \sigma \in \Sigma\right\}, \mathbb{T}\right)$. Como

$$cl\left(S^*\right) \cong_\psi Hom\left(\left\{\pi_\sigma : \sigma \in \Sigma\right\}, \mathbb{T}\right)$$

existe $v \in cl\left(S^*\right)$ tal que $\psi(v) = \hat{\chi}$. Por consiguiente, $\chi(\sigma) = \hat{\chi}(\pi_\sigma) = \psi(v)(\pi_\sigma) = \pi_\sigma(v) = v(\sigma)$ para todo $\sigma \in \Sigma$. De lo cual se concluye que $\chi = v \in cl\left(S^*\right)$. Por lo tanto, $Hom(\Sigma, \mathbb{T}) \subseteq cl(S^*)$. $\square$

Otro teorema importante dentro de la teoría de dualidad es el teorema de W. W. Comfort y K. A. Ross. Este teorema nos dice que el grupo dual de un grupo G cuya topología es inducida por H, un subgrupo de caracteres de G, es el mismo grupo H.

TEOREMA 1.7.4. *(W. W. Comfort y K. A. Ross,* **[3]***) Sea G un grupo Abeliano discreto, H un subgrupo de $Hom(G, \mathbb{T})$ y τ_H la topología débil inducida por H. Si H separa puntos entonces $(G, \tau_H)^* = Hom_C((G, \tau_H), \mathbb{T}) = H$.*

La demostración del teorema se puede consultar en **[3]**.

1.8. Topología de Bohr

Para profundizar en esta sección, el lector puede consultar el capítulo 9 del libro de M. Tkachenko y A. V. Arkhangelskii **[26]**.

Usando el grupo dual de Pontryagin G^* podemos dotar a G una nueva topología. La topología de *Bohr* sobre G es la topología débil inducida por la familia G^*, a esta topología la denotaremos como τ_{Bohr}.

Observemos que los conjuntos de la forma $U(g_0, h, \epsilon) = \{g \in G : \|h(g) - h(g_0)\| < \epsilon\}$, con $h \in Hom_C(G, \mathbb{T})$, $g_0 \in G$ y $\epsilon > 0$, son abiertos básicos para el elemento $g_0 \in G$. De esta manera es claro observar que G con la topología de Bohr es Hausdorff si y sólo si $Hom_C(G, \mathbb{T})$ separa puntos.

Con la finalidad de que las pruebas sean más accesibles, en lo sucesivo pensaremos al círculo $\mathbb{T}$ como el cociente $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$. Asimismo podemos definir la norma en $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ de la siguiente manera: $||(r + \mathbb{Z}) - (t + \mathbb{Z})|| = inf\{||(r + n) - (t + m)|| : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

PROPOSICIÓN 1.8.1. *$\langle G, \tau_{Bohr}\rangle$ es un grupo topológico. Si G es discreto o compacto entonces $\langle G, \tau_{Bohr}\rangle$ es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que las operaciones son continuas en la topología:

I) La operación $\cdot$ es continua

Sea $a, b \in G$, $h \in Hom_C(G, \mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$. Veamos que

$$U(a, h, \frac{\epsilon}{2}) \cdot U(b, h, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq U(a \cdot b, h, \epsilon)$$

Si $c \cdot d \in U(a, h, \frac{\epsilon}{2}) \cdot U(b, h, \frac{\epsilon}{2})$ entonces

$$\|h(c \cdot d) - h(a \cdot b)\| = \|h(c) + h(d) - h(a) - h(b)\|$$

$$\leq \|h(c) - h(a)\| + \|h(d) - h(b))\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

II) la operación $(\ )^{-1}$ es continua

Sea $a \in G$, $h \in Hom_C(G, \mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$. Veamos que $U(a, h, \epsilon) \subseteq U(a^{-1}, h, \epsilon)$.

Si $c \in U(a, h, \epsilon)$ entonces $\left\|h(c^{-1}) - h(a^{-1})\right\| = \|-1(h(c)) - (h(a))\| = \|h(c) - h(a)\| < \epsilon$

Los puntos *I* y *II* demuestran que $\langle G, \tau_{Bohr}\rangle$ es un grupo topológico. Por otra parte, sabemos que si G es discreto o compacto $Hom_C(G, \mathbb{T})$ separa puntos (Corolario 1.1.8 y Teorema 9.4.11 en **[26]**), lo que implica que $\langle G, \tau_{Bohr}\rangle$ es Hausdorff.

□

Sea $r_G : G \longrightarrow \mathbb{T}^{G^*}$ la función diagonal definida como $r_G(g) = \chi(g)$ para todo carácter $\chi \in G^*$. Esta función resulta ser continua e inyectiva. Como $\mathbb{T}^{G^*}$ es compacto, entonces $bG = cl(r_G(G))$ también es compacto. Al grupo bG se le conoce como la *compactificación de Bohr*.

PROPOSICIÓN 1.8.2 (Proposición 9.9.1, **[26]**). *$\langle G, \tau_{Bohr}\rangle$ es un grupo totalmente acotado. Consecuentemente, si G es infinito entonces $\langle G, \tau_{Bohr}\rangle$ no es discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Como r_G es continua e inyectiva y $r_G(G) \leqslant bG$ es un subgrupo de un conjunto compacto y en particular es un subgrupo de un grupo totalmente acotado, entonces G es totalmente acotado o precompacto. Consecuentemente, G es totalmente acotado e infinito, esto implica que G no es discreto. □

LEMA 1.8.3 (Colorario 9.9.8, **[26]**). *Si G y H son grupos discretos Abelianos y $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, entonces $f : \langle G, \tau_{Bohr}\rangle \longrightarrow \langle H, \tau_{Bohr}\rangle$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que como G y H son discretos, el homomorfismo f es continuo. Por lo que si $\chi : H \longrightarrow \mathbb{T}$ es un caracter de H, entonces $\chi \circ f : G \longrightarrow \mathbb{T}$ también es un caracter de G.

De esta manera, si $\chi^{-1}[U]$ es un sub-básico de $\langle H, \tau_{Borh}\rangle$, donde U es un abierto de $\mathbb{T}$ entonces $(\chi \circ f)^{-1}[U]$ es un sub-básico de $\langle G, \tau_{Bohr}\rangle$. Con lo que se concluye que $f : \langle G, \tau_{Bohr}\rangle \longrightarrow \langle H, \tau_{Bohr}\rangle$ es continua.

□

Aplicando el lema anterior se puede demostrar la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.8.4 (Proposición 9.9.9, **[26]**). *Si G es un grupo discreto Abeliano y $H \leqslant G$ entonces*

a) H es cerrado en (G, τ_{Bohr}).

b) (H, τ_{Bohr}) es un subgrupo topológico de (G, τ_{Bohr}).

c) $(G/H, \tau_{Bohr}) \cong (G, \tau_{Bohr}) / (H, \tau_{Bohr})$.

DEMOSTRACIÓN. *a*) Como G es discreto, $G/_H$ es discreto; por lo que podemos asociarle la topología de Bohr a este grupo. Dado que $\langle G/_H, \tau_{Borh}\rangle$ es Hausdorff, H es un conjunto compacto en $\langle G/_H, \tau_{Borh}\rangle$ pues es un punto. Por el Lema 1.8.3 el homomorfismo $f : \langle G, \tau_{Borh}\rangle \longrightarrow \langle G/_H, \tau_{Borh}\rangle$ es continuo. Por consiguiente $H = Ker(f)$ es compacto en (G, τ_{Bohr}), y por ende es un cerrado.

b) Observemos que la restricción a H de un carácter de G es un carácter de H, así que $\tau_{Bohr}(G) \restriction_H \subseteq \tau_{Bohr}(H)$. Por otra parte, como el grupo $\mathbb{T}$ es divisible todo carácter de H se puede extender a G (Teorema 1.1.6, [**26**]); así que $\tau_{Bohr}(H) \subseteq \tau_{Bohr}(G) \restriction_H$. Esto implica que las operaciones restringidas a H también son continuas, de lo que se infiere que (H, τ_{Bohr}) es un grupo topológico.

c) Los elementos de $(G, \tau_{Bohr}) / (H, \tau_{Bohr})$ son clases de equivalencia que tienen la forma de una clase lateral; es decir $[g] = g+H$; por lo que $(G/H, \tau_{Bohr})$ y $(G, \tau_{Bohr}) / (H, \tau_{Bohr})$ tienen los mismos elementos. Observemos que la función identidad es el isomorfismo buscado entre $(G/H, \tau_{Bohr})$ y $(G, \tau_{Bohr}) / (H, \tau_{Bohr})$. □

Para facilitar la notación, si G es un grupo Abeliano discreto denotaremos por $G^\sharp$ a (G, τ_{Bohr}). Además, si $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo entre grupos Abelianos discretos, denotaremos por $f^\sharp$ al mismo mapeo f pero considerado de $G^\sharp$ a $H^\sharp$.

PROPOSICIÓN 1.8.5 (Proposición 9.9.21, [**26**]). *Si G es un grupo Abeliano discreto entonces todo conjunto independiente de G es cerrado y discreto como subespacio en $G^\sharp$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto independiente y $x \in A$. Por la Proposición 1.8.4 sabemos que el subgrupo $H = \langle A \setminus \{x\}\rangle$ es cerrado en $G^\sharp$ y $A \cap (G \setminus H) = \{x\}$; de lo que podemos concluir que A es discreto como subespacio en $G^\sharp$.

Ahora veamos que A es cerrado en $G^\sharp$. Supongamos que existe $y \in cl(A) \setminus A$. Como $y \in cl(A) \subseteq cl(\langle A\rangle) \subseteq \langle A\rangle$ entonces existe un conjunto finito $B \subseteq A$ tal que $y \in \langle B\rangle$. Observemos que

$y \neq 0$. Supongamos por reducción al absurdo que $y = 0$. Como A es un conjunto independiente, podemos considerar un homomorfismo $\phi \in Hom(G, \mathbb{T})$ tal que $||\phi(a)|| \geq \frac{1}{4}$ para toda $a \in A$. Este homomorfismo se puede definir de la siguiente manera:

- Si a es un elemento de torsión de orden n. Entonces definimos $\phi(a) = \frac{l}{n} + \mathbb{Z}$ tal que $||\phi(\frac{l}{n} + \mathbb{Z})|| \geq \frac{1}{4}$
- Si a no es de torsión. Entonces definimos $\phi(a) = t$ tal que t es un irracional que cumple que $||\phi(t)|| \geq \frac{1}{4}$

De este modo el abierto $U(0, \phi, \frac{1}{4})$ testifica que $0 \notin cl(A)$, por lo que $y \neq 0$.

A continuación probaremos por reducción al absurdo que $y \notin \langle A \setminus B \rangle$. Si $y \in \langle A \setminus B \rangle$ entonces existirían $N, M \in \omega$, $\{a_i : i \leq N\} \subseteq A$ y $\{b_j : j \leq M\} \subseteq B$ tales que $\sum_{i \leq N} a_i = y = \sum_{j \leq M} b_j$. Como A es un conjunto independiente, entonces $y = 0$ lo cual es falso. Por consiguiente, $y \notin \langle A \setminus B \rangle$. Así, $U = G \setminus \langle A \setminus B \rangle$ es un abierto de y y satisface que $U \cap A \subseteq B$. Esto implica que $|U \cap A| \leq |B| < \omega$ que contradice el hecho de que $y \in cl(A)$. Por lo tanto A es un conjunto cerrado.

□

Teorema 1.8.6 (Colorario 9.9.22, **[26]**). *(K.P. Hart y J. van Mill) Si G es un grupo Abeliano discreto, entonces $G^\sharp$ contiene un subconjunto cerrado y discreto de tamaño $|G|$.*

Demostración. Sabemos que todo grupo Abeliano incontable G contiene un subconjunto A independiente tal que $|A| = |G|$ (Proposición 9.9.20, **[26]**). Aplicando la Proposición 1.8.5, A es un conjunto cerrado y discreto en $G^\sharp$ de tamaño $|G|$.

Si G es finito entonces él mismo es un conjunto cerrado y discreto en $G^\sharp$ de tamaño $|G|$.

Ahora supongamos que G es numerable. Dado que todo grupo topológico compacto es finito o no contable y G es numerable, se sigue que $G^\sharp$ no es compacto. Ahora bien, como $G^\sharp$ es numerable y no

es compacto; $G^\sharp$ no es numerablemente compacto. Así, finalmente, como $G^\sharp$ no es numerablemente compacto y G es numerable, G es un conjunto cerrado discreto en $G^\sharp$. □

Las siguientes proposiciones nos serán de gran utilidad para poder demostrar el teorema de Leptin: Si G es un grupo Abeliano discreto, entonces todos los conjuntos compactos en $G^\sharp$ son finitos. Consecuentemente, $G^\sharp$ es sin sucesiones convergentes no triviales.

PROPOSICIÓN 1.8.7 (Lema 9.9.26, [**26**]). *Para todo conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{Z}$, existe un homomorfismo $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que la imagen $\varphi(A)$ es un conjunto denso en $\mathbb{T}$.*

DEMOSTRACIÓN. Encontraremos un elemento $t \in \mathbb{T}$ tal que el conjunto $A_t = \{t^n : n \in A\}$ es denso en $\mathbb{T}$. Sea $\{s_k : k \in \omega\}$ un subconjunto denso en $\mathbb{T}$. Basta con elegir t tal que para toda $k \in \omega$ existe $n \in A$ tal que $\|t^n - s_k\| \leq 2^{-k}$.

Por recursión construiremos una familia de intervalos cerrados $\{I_n : n \in \omega\}$ decrecientes tal que para toda $k \in \omega$, $r \in I_n$ existe $n_k \in A$ tal que $\|r^{n_k} - s_k\| \leq \frac{1}{2^k}$.

Sea I_0 un intervalo cerrado no vacío tal que su longitud $l_0 = l(I_0) \leq 1$ tal que $1 \notin I_0$. Existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \cdot l_0 \geq 2\pi$ y por lo tanto $[I_0^{n_0}] = \{x^{n_0} : x \in I_0\} = \mathbb{T}$. Supongamos que ya hemos definido los intervalos $I_0 \supseteq ... \supseteq I_k$ tales que $l(I_i) = l_i \leq 2^{-i}$ para toda $i \leq k$. Existe $n_k \in A$ tal que $|n_k| \cdot l_k \geq 2\pi$, lo que implica que $[I_k^{n_k}] = \mathbb{T}$. Consideremos x_k en I_k tal que $x_k^{n_k} = s_k$ y sea I_{k+1} un intervalo cerrado que contenga a x_k tal que $I_{k+1} \subseteq I_k$, $l(I_{k+1}) \leq 2^{-(k+1)}$ y $\|x^{n_k} - s_k\| \leq 2^{-k}$ para toda $x \in I_{k+1}$; lo que finaliza la construcción recursiva.

Por la compacidad de $\mathbb{T}$, existe $t \in \bigcap_k I_k$ y por construcción se satisface que para toda $k \in \omega$ existe $n \in A$ tal que $\|t^n - s_k\| \leq 2^{-k}$. □

PROPOSICIÓN 1.8.8 (Lema 9.9.27, [**26**]). *Sea A un conjunto infinito de un grupo Abeliano de torsión G. Si los ordenes de los elementos de A son no acotados, entonces existe un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que $\varphi(A)$ es un conjunto denso en $\mathbb{T}$.*

Demostración. Sea G un grupo de torsión, A un conjunto infinito cuyos elementos tienen ordenes no acotados y $\{z_n : n \in \omega\}$ un conjunto denso en $\mathbb{T}$.

Por recursión construiremos $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq A$ y $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ una familia de homomorfismos tales que:

$I)$ $x_{n+1} \notin \langle \{x_i : i \leq n\} \rangle$

$II)$ $\varphi_n : \{x_i : i \leq n\} \longrightarrow \mathbb{T}$

$III)$ $\varphi_n \subseteq \varphi_{n+1}$

$IV)$ $\forall n \in \omega \left(\|\varphi_n(x_n) - z_n\| \leq \frac{1}{2^n} \right)$

Supongamos que ya hemos definido $\{x_i : i \leq n\}$ y $\{\varphi_i : i \leq n\}$. Observemos que para toda $n \in \omega$ existe $N \in \omega$ tal que para toda $m \geq N$ existe $l_m \in \omega$ tal que $\left\| \frac{l_m}{m} - z_{n+1} \right\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Así, para $n+1$ existe $N \in \omega$ tal que para toda $m \geq N$ existe $l_m \in \omega$ tal que $\left\| \frac{l_m}{m} - z_{n+1} \right\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Como A es un conjunto infinito cuyos elementos tienen ordenes no acotados, podemos encontrar

$$x_{n+1} \in A \setminus \{x_i : i \leq n\}$$

tal que el orden de x_{n+1}, que denotaremos por $o(x_{n+1})$, es tal que $o(x_{n+1}) \geq N$. Definimos $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{l_{o(x_{n+1})}}{o(x_{n+1})}$ y para toda $i \leq n$ definimos $\varphi_{n+1}(x_i) = \varphi_n(x_n)$. De esta forma se cumple que

$$\|\varphi_{n+1}(x_{n+1}) - z_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Definimos ahora el homomorfismo $\varphi_\omega : \bigoplus_{n \in \omega} \langle x_n \rangle \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que $\varphi_\omega(x_n) = \varphi_n(x_n)$. Este homomorfismo cumple que para toda $n \in \omega$ se cumple que $\|\varphi_\omega(x_n) - z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Como $\mathbb{T}$ es divisible, podemos extender el homomorfismo φ_ω un homomorfismo φ tal que $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{T}$. Dado que $\{z_n : n \in \omega\}$ es un conjunto denso se tiene que $\varphi[\{x_n : n \in \omega\}]$ también es un conjunto denso, por lo que $\varphi[A]$ es denso.

□

Sea G un grupo Abeliano de Torsión. Decimos que G es es de *torsión acotada* si existe m tal que $mx = 0$ para toda $x \in G$. Al mínimo m con esta propiedad se le llama exponente de G.

PROPOSICIÓN 1.8.9 (Lema 9.9.28, [**26**]). *Supongamos que G es un grupo Abeliano discreto de torsión acotada. Entonces todos los conjuntos compactos en $G^\sharp$ son finitos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por reducción al absurdo que existe $C \subseteq G$ compacto infinito. Veamos que C contiene un subconjunto infinito independiente A. Sea A un subconjunto independiente maximal de C. Si A fuese finito entonces $H = \langle A \rangle$ es un subgrupo finito de G (es finito por ser G de torsión acotada); por lo que puede tomarse $x \in C \setminus H$ y así $A \cup \{x\} \subseteq C$ es un conjunto independiente, lo que contradice la maximalidad de A. Por consiguiente A es infinito. Por la Proposición 1.8.5 A es cerrado y discreto. Por consiguiente A es compacto infinito y discreto que es una contradicción. □

PROPOSICIÓN 1.8.10 (Lema 9.9.29, [**26**]). *Si G es un grupo Abeliano discreto finitamente generado, entonces todos los conjuntos compactos en $G^\sharp$ son finitos.*

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que de la Proposición 1.8.7 todos los conjuntos compactos de $\mathbb{Z}^\sharp$ son finitos. En caso contrario si A es un conjunto compacto infinito de $\mathbb{Z}^\sharp$, por la Proposición 1.8.7 existe $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ un homomorfismo tal que $\varphi(A)$ es denso. Dado que la topología de Bohr vuelve continuas a todos los homomorfismos, $\varphi : \mathbb{Z}^\sharp \longrightarrow \mathbb{T}$ es continua.

Como $\varphi : \mathbb{Z}^\sharp \longrightarrow \mathbb{T}$ es continua y A es un conjunto compacto infinito de $\mathbb{Z}^\sharp$ entonces $\varphi(A)$ es compacto (y por lo tanto cerrado) y denso, lo que implica que $\varphi(A) = \mathbb{T}$ lo que contradice la cardinalidad de $\mathbb{Z}$.

Sea G un grupo Abeliano finitamente generado. Entonces $G \cong \mathbb{Z}^n \bigoplus_{i \leq n} \mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$. De este modo si C es un subconjunto compacto entonces por el argumento anterior tiene todas sus proyecciones finitas; por consiguiente C es finito. □

TEOREMA 1.8.11 (Leptin, Teorema 9.9.30 [**26**]). *Si G es un grupo Abeliano discreto, entonces todos los conjuntos compactos en $G^\sharp$ son finitos. En particular, $G^\sharp$ es sin sucesiones convergentes no triviales.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por reducción al absurdo que existe $C \subseteq G^\sharp$ un conjunto compacto infinito. Sin perdida de generalidad podemos asumir que G es numerable. De no ser así, podemos considerar $S \in [C]^\omega$ y $L = \langle S \rangle \subseteq G^\sharp$. Por la Proposición 1.8.4 se tiene que $L^\sharp$ es un subgrupo cerrado de $G^\sharp$. Dado que $S \subseteq C \cap L$, $C \cap L$ es un subconjunto compacto infinito del grupo contable $L^\sharp$.

Sea A un subconjunto independiente maximal de C. Por la Proposición 1.8.5 se tiene que A es cerrado y discreto en $G^\sharp$. Como A es cerrado y está contenido en un compacto, entonces A es compacto; pero al ser discreto se sigue que A es finito. Sea $H = \langle A \rangle$ y consideremos el homomorfismo canónico $\pi : G \longrightarrow G/_H$, por el Lema 1.8.3 se tiene que $\pi^\sharp : G^\sharp \longrightarrow (G/_H)^\sharp$ es continua. En consecuencia $D = \pi^\sharp(C)$ es compacto en $(G/_H)^\sharp$. Veamos que $K = \langle D \rangle$ es un grupo de torsión infinito. Para ver que K es infinito basta probar que D es infinito. Si D fuese finito existiría $F \subseteq G$ finito tal que $\pi(F) = D$, entonces $C \subseteq H + F \subseteq \langle A \cup F \rangle$, que contradice la Proposición 1.8.10. Ahora veamos que K es un grupo de torsión. Sea $y \in K$ y $x \in C$ tal que $\pi(x) = y$. Como A es un subconjunto maximal e independiente, existe n tal que $nx \in \langle A \rangle = H$. Entonces $ny = \pi(nx)$ pertenece al elemento neutro de $G/_H$.

Si los elementos de D son acotados, entonces K es un grupo de torsión acotada. Así D es un subconjunto compacto de $K^\sharp$ lo que contradice la Proposición 1.8.9. En cambio, si los ordenes de los elementos de D son no acotados, entonces por Proposición 1.8.8 existe un carácter $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que $\varphi(D)$ es denso en $\mathbb{T}$. Como φ es continua como un homomorfismo de $K^\sharp$ a $\mathbb{T}$ y $D \subseteq K^\sharp$

es compacto entonces $\varphi(D)$ es cerrado, por lo que $\varphi(D) = \mathbb{T}$ que contradice el hecho de que D es contable. □

Con el Teorema de Leptin 1.8.11 sabemos que $G^\sharp$ es sin sucesiones convergentes no triviales. Esta es precisamente una buena razón para elegir esta topología y extenderla a un ultraproducto, ya que esto nos garantiza que la base $G^\sharp$ es sin sucesiones convergentes no triviales. En el capítulo 2 veremos como extender esta topología al ultraproducto.

1.9. Ultraproductos, límites y ultralímites de estructuras lógicas

Para un análisis más detallado de esta sección se puede consultar [**2**].

Sea I un conjunto de indices, $\{A_i : i \in I\}$ una colección de conjuntos no vacíos,

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \left\{ f \in (\cup_{i \in I} A_i)^I : \forall i \in I (f(i) \in A_i) \right\}$$

y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ un filtro. Definimos $\sim_{\mathcal{F}}$ una relación sobre A de la siguiente manera: $f \sim_{\mathcal{F}} g$ si y sólo si $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$. Como es usual denotaremos por $[f]$ a la clase de equivalencia, es decir, $[f] = \{g \in A : f \sim_{\mathcal{F}} g\}$. Se puede demostrar que esta relación es de equivalencia.

Sea τ un tipo de semejanza, es decir τ es un conjunto de símbolos de relaciones $\{R_\gamma : \gamma < \rho\}$, símbolos de funciones, $\{f_\gamma : \gamma < \beta\}$ y símbolos de constantes $\{c_\gamma : \gamma < \eta\}$, y $\{\mathfrak{A}_\mathfrak{i} : i \in I\}$ un conjunto de estructuras del mismo tipo de semejanza τ tal que

$$\mathfrak{A}_\mathfrak{i} = \left\langle A_i, \left\{P^i_\gamma : \gamma < \rho\right\}, \left\{g^i_\gamma : \gamma < \beta\right\}, \left\{d^i_\gamma : \gamma < \eta\right\} \right\rangle$$

para toda $i \in I$. La interpretación de la estructura se da de la siguiente manera $R^{\mathfrak{A}_\mathfrak{i}}_\gamma = P^i_\gamma$, $f^{\mathfrak{A}_\mathfrak{i}}_\gamma = g^i_\gamma$ y $c^{\mathfrak{A}_i}_\gamma = d^i_\gamma$.

Consideremos $A_{\mathcal{F}} = A/\sim_{\mathcal{F}}$ y definimos una nueva estructura

$$\mathfrak{A} = \left\langle A_{\mathcal{F}}, \{P_\gamma : \gamma < \rho\}, \{g_\gamma : \gamma < \beta\}, \left\{\left[f_{c_\gamma}\right] : \gamma < \eta\right\}\right\rangle$$

a la que llamaremos *producto* o *producto reducido*, cuya interpretación sobre el lenguaje de tipo τ está definida de la siguiente manera:

1. Para cada $\gamma < \eta$ tenemos que $c_\gamma^{\mathfrak{A}} = \left[f_{c_\gamma}\right]$ donde para toda $i \in I$ se tiene que $f_{c_\gamma}(i) = c_\gamma^{\mathfrak{A}_i} = d_\gamma^i$.
2. Para cada $\gamma < \beta$ tenemos que $g_\gamma = f_\gamma^{\mathfrak{A}} : A_{\mathcal{F}}^{\delta(\gamma)} \longrightarrow A_{\mathcal{F}}$ y es definida de la siguiente manera

$$f_\gamma^{\mathfrak{A}}([f_1], ..., \left[f_{\delta(\gamma)}\right]) = \left[g_{f_\gamma}\right]$$

   donde para toda $i \in I$ se cumple que $g_{f_\gamma}(i) = f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), ..., f_{\delta(\gamma)}(i))$
3. Para cada $\gamma < \rho$ tenemos que $P_\gamma = R_\gamma^{\mathfrak{A}} \subseteq A_{\mathcal{F}}^{\mu(\gamma)}$ y es tal que

$$\left\langle [f_1], ..., \left[f_{\mu(\gamma)}\right]\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si } \left\{i \in I : \left\langle f_1(i), ..., f_{\mu(\gamma)}(i)\right\rangle \in R_\gamma^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in \mathcal{F}$$

al producto reducido lo denotaremos como $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{A}_i$

Se puede demostrar que la construcción del producto reducido está bien definida; es decir, no depende de los representantes. Dado un producto reducido $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{A}_i$, si $\mathcal{F}$ sea un ultrafiltro entonces al producto reducido se le llamara *ultraproducto* y lo denotaremos como $ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$. En caso de que para toda $i \in I$ se tenga que $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ al ultrapoducto se le conoce como *ultrapotencia* y se le denota como $ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$.

Observemos que una sucesión en $\prod_{i\in I} A_i/\sim_{\mathcal{F}}$ es de la forma $\alpha = \langle [f_1], ..., [f_k], ...\rangle$, que a su vez define una sucesión en A_i que denotaremos como $\alpha^i = \langle f_1(i), ..., f_k(i), ...\rangle$. Además, la valuación de una variable x_k por la sucesión α es $\alpha(x_k) = [f_k]$ y por la sucesión α^i es $\alpha^i(x_k) = f_k(i)$. Por

consiguiente, si definimos $[f](i) = f(i)$ se puede demostrar por inducción sobre la complejidad de los términos que $\alpha(t_k)(i) = \alpha^i(t_k)$ donde t_k es un termino del lenguaje con tipo de semejanza τ. El siguiente teorema nos brinda una relación entre el ultraproducto y la sucesión de estructuras que se usan para construir el ultraproducto.

TEOREMA 1.9.1 (Łós [**17**]). *Sea I un conjunto, $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ un conjunto de estructuras del mismo tipo τ, $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, $ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$ su respectivo ultraproducto, φ una fórmula en el lenguaje y α una sucesión, entonces $ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i \models_\alpha \varphi$ si y sólo si $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{\alpha^i} \varphi\} \in \mathcal{F}$.*

De manera intuitiva este teorema nos dice que una fórmula se satisface en el ultrapoducto $ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}_i$ si dicha fórmula se satisface en "casi todas" las estructuras $\mathfrak{A}_i$ módulo el ultrafiltro $\mathcal{F}$. En particular, en el caso de las ultrapotencias $ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$, el teorema de Łós nos dice que $ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A} \models \varphi[e(a_0), ..., e(a_n)]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_n]$ para cualesquiera $a_0, ..., a_n \in \mathfrak{A}$, donde $e : \mathfrak{A} \longrightarrow ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$ se define como $e(a) = [f_a]$ tal que $f_a(i) = a$ para toda $i \in I$; es decir $\mathfrak{A}$ se encaja elementalmente en su ultrapotencia lo que denotamos como $\mathfrak{A} \preccurlyeq ult_{\mathcal{F}}\mathfrak{A}$.

Si $\{\nu_i : i \in \omega\}$ es un conjunto de cardinales y $\{\mathcal{F}_i : i \in \omega$ y $\mathcal{F}_i$ es un ultrafiltro sobre $\nu_i\}$ entonces podemos construir de forma recursiva la n-esima ultrapotencia iterada de $\mathfrak{A}$ de la siguiente manera: $ult^0(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ y si $n \in \omega$ definimos $ult^{n+1}(\mathfrak{A}) = ult_{\mathcal{F}_n}(ult^n(\mathfrak{A}))$. Sin embargo, buscamos definir la α-ésima ultrapotencia iterada de $\mathfrak{A}$ para todo ordinal α. El problema, como se puede observar, radica cuando α es límite. No obstante, este detalle podemos solucionarlo con una técnica conocida como límite de cadenas elementales que se mostrará a continuación.

Sean $\{\mathfrak{A}_i : i \in \nu\}$ un conjunto de estructuras, con ν un ordinal y A_i el dominio de la estructura $\mathfrak{A}_i$. Decimos que $\langle \mathfrak{A}_i : i \in \nu \rangle$ es una cadena de estructuras elementales si existe $\{e_{i,j} : i, j \in \nu\}$ un conjunto de encajes elementales tales que $e_{i,j} : A_i \longrightarrow A_j$ y $e_{i,k} = e_{j,k} \circ e_{i,j}$ para cada $i < j < k < \nu$. Sea $S = \{\langle i, a\rangle : a \in A_i$ e $i \in \nu\}$ y definimos la relación $\sim$ sobre S de la siguiente manera: $\langle i, a\rangle \sim \langle j, b\rangle$ si y sólo si existe $k \in \nu$ con $i, j \leq k$ tal que $e_{i,k}(a) = e_{j,k}(b)$. Esta relación $\sim$ resulta ser

una relación de equivalencia. Definimos la estructura $\mathfrak{A}$ conocida como el límite de la cadena, cuyo dominio es $A = S/_{\sim}$, de la siguiente manera:

1. Si c_γ es un símbolo de constante, entonces $(c_\gamma)^{\mathfrak{A}} = \left[\left\langle i, (c_\gamma)^{\mathfrak{A}_i}\right\rangle\right]$ para cualquiera $i \in \nu$.
2. Si f_γ es un símbolo de función y $[\langle i_{a_1}, a_1\rangle], ..., \left[\left\langle i_{a_{\delta(\gamma)}}, a_{\delta(\gamma)}\right\rangle\right] \in A$, entonces

$$f_\gamma^{\mathfrak{A}}([\langle i_{a_1}, a_1\rangle], ..., \left[\left\langle i_{a_{\delta(\gamma)}}, a_{\delta(\gamma)}\right\rangle\right]) = f_\gamma^{\mathfrak{A}_i}(b_1, ..., b_{\delta(\gamma)})$$

   donde $b_1, ..., b_{\delta(\gamma)} \in A_i$ para alguna $i \in \nu$ y satisfacen que $\langle i, b_1\rangle \sim \langle i_{a_1}, a_1\rangle$,...,$\left\langle i, b_{\delta(\gamma)}\right\rangle \sim \left\langle i_{a_{\delta(\gamma)}}, a_{\delta(\gamma)}\right\rangle$.
3. Si R_γ es un símbolo de relación y $[\langle i_{a_1}, a_1\rangle], ..., \left[\left\langle i_{a_{\mu(\gamma)}}, a_{\mu(\gamma)}\right\rangle\right] \in A$, entonces,

$$\left\langle [\langle i_{a_1}, a_1\rangle], ..., \left[\left\langle i_{a_{\mu(\gamma)}}, a_{\mu(\gamma)}\right\rangle\right]\right\rangle \in (R_\gamma)^{\mathfrak{A}}$$

   si y sólo si $\left\langle b_1, ..., b_{\mu(\gamma)}\right\rangle \in (R_\gamma)^{\mathfrak{A}_i}$ con $b_1, ..., b_{\mu(\gamma)} \in A_i$ para alguna $i \in \nu$ tal que

$$\langle i, b_1\rangle \sim \langle i_{a_1}, a_1\rangle, ..., \left\langle i, b_{\mu(\gamma)}\right\rangle \sim \left\langle i_{a_{\mu(\gamma)}}, a_{\mu(\gamma)}\right\rangle.$$

Dada $\langle \mathfrak{A}_i : i \in \nu\rangle$ una cadena elemental denotaremos al límite de la cadena como $\lim_{i\longrightarrow\nu} \mathfrak{A}_i$. Observemos que para cada $i \in \nu$ se tiene que $\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \lim_{i\longrightarrow\nu} \mathfrak{A}_i$ con el encaje elemental

$$e^i_{\lim(\nu)} : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \varinjlim_{i\longrightarrow\nu} \mathfrak{A}_i$$

dado por

$$e^i_{lim(\nu)}(a) = [\langle i, a\rangle]$$

A continuación construiremos las ultrapotencias iteradas.

Dada $\mathfrak{A}$ una estructura, $\{\nu_\alpha : \alpha \in OR\}$ una clase de cardinales,

$$\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in OR \text{ y } \mathcal{F}_\alpha \text{ es un ultrafiltro sobre } \nu_\alpha\}$$

definiremos por recursión la γ-ésima ultrapotencia iterada de $\mathfrak{A}$ de la siguiente manera:

I) Si $\gamma = 0$, $ult^\gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$

II) Si $\gamma = \alpha + 1$, $ult^\gamma(\mathfrak{A}) = ult_{\mathcal{F}_\alpha}(ult^\alpha(\mathfrak{A}))$

III) Si γ es límite, entonces $ult^\gamma(\mathfrak{A}) = \lim_{\alpha \longrightarrow \gamma} ult^\alpha(\mathfrak{A})$. A esta ultrapotencia iterada se le conoce como ultralímite de $\mathfrak{A}$.

Observemos que para que las ultrapotencias iteradas estén bien definidas se requiere que cuando γ sea límite $\langle ult^\alpha(\mathfrak{A}) : \alpha \in \gamma\rangle$ sea una cadena elemental. Para esto, definiremos por recursión el conjunto

$$\left\{e_{\beta,\alpha} : ult^\beta(\mathfrak{A}) \longrightarrow ult^\alpha(\mathfrak{A}) : \alpha, \beta \in OR\right\}$$

de encajes elementales de la siguiente manera:

I) $e_{\alpha,\alpha+1} : ult^\alpha(\mathfrak{A}) \longrightarrow ult^{\alpha+1}(\mathfrak{A})$ es el encaje canónico

II) Si $\beta < \alpha + 1$ y $e_{\beta,\alpha}$ ya ha sido definido, entonces $e_{\beta,\alpha+1} = e_{\alpha,\alpha+1} \circ e_{\beta,\alpha}$

III) Si $\beta < \alpha$ y α es límite entonces $e_{\beta,\alpha} = e^{\beta}_{\lim(\alpha)}$.

Capítulo 2

Grupos topológicos p-compactos

2.1. Ultrapotencias de grupos topológicos

En esta sección definiremos las ultrapotencias iteradas sobre un grupo topológico $\mathbb{G}$ y extenderemos la topología de Bohr a estas estructuras como se presenta en **[15]**. Cabe señalar que esta construcción es un caso particular de las ultrapotencias iteradas sobre una estructura lógica.

Sea $\mathbb{G}$ un grupo topológico y $p \in \omega^*$ un ultrafiltro. Definimos la *α-ésima ultrapotencia* de $\mathbb{G}$, $ult_p^\alpha(\mathbb{G})$, recursivamente de la siguiente manera:

Si $\alpha = 0$ definimos la ultrapotencia de $\mathbb{G}$ a la α-ésima potencia como $ult_p^\alpha(\mathbb{G}) = \mathbb{G}$.

Si $\alpha = \beta + 1$ definimos la ultrapotencia de $\mathbb{G}$ a la α-ésima potencia como

$$ult_p^\alpha(\mathbb{G}) = ult_p\left(ult_p^\beta(\mathbb{G})\right).$$

Si α es un ordinal límite definimos la ultrapotencia de $\mathbb{G}$ a la α-ésima potencia como

$$ult_p^\alpha(\mathbb{G}) = \lim_{\beta \longrightarrow \alpha} ult_p^\beta(\mathbb{G}).$$

Observemos que para que las ultrapotencias iteradas estén bien definidas se requiere que cuando γ sea límite, $\left\langle ult_p^\alpha(\mathbb{G}) : \alpha \in \gamma \right\rangle$ sea una cadena elemental. Para esto, definiremos por recursión el conjunto

$$\left\{ e_{\beta,\alpha} : ult_p^\beta(\mathbb{G}) \longrightarrow ult_p^\alpha(\mathbb{G}) : \alpha, \beta \in OR \right\}$$

de encajes elementales de la siguiente manera:

I) $e_{\alpha,\alpha+1} : ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}) \longrightarrow ult_p^{\alpha+1}(\mathbb{G})$ es el encaje canónico.

II) Si $\beta < \alpha + 1$ y $e_{\beta,\alpha}$ ya ha sido definido, entonces $e_{\beta,\alpha+1} = e_{\alpha,\alpha+1} \circ e_{\beta,\alpha}$.

III) Si $\beta < \alpha$ y α es límite entonces $e_{\beta,\alpha} = e^{\beta}_{\lim(\alpha)}$, donde $e^{\beta}_{lim(\alpha)}$ es definido como en la sección 1.9.

Por lo anterior, la construcción de las ultrapotencias iteradas queda bien definida. Haciendo un abuso de notación podemos pensar que cuando α es un ordinal límite.

$$\lim_{\beta \longrightarrow \alpha} ult_p^{\beta}(\mathbb{G}) = \bigcup_{\beta<\alpha} ult_p^{\beta}(\mathbb{G}).$$

Denotaremos por $ult_p^{\alpha^-}(\mathbb{G})$ a la unión $\bigcup_{\beta<\alpha} ult_p^{\beta}(\mathbb{G})$.

Por otra parte, como $\mathbb{G}$ es un grupo, $\mathbb{G} \preccurlyeq ult_p(\mathbb{G})$ y los axiomas de grupos se pueden escribir en un lenguaje de primer orden, entonces la ultrapotencia $ult_p^{\alpha}(\mathbb{G})$ también es un grupo. Por la misma razón, $ult_p^{\alpha}(\mathbb{G})$ también es Abeliano.

Para propósitos de esta investigación nos es suficiente con enfocarnos en el grupo Abeliano

$$ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G}) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}).$$

Observemos que si $[f] \in ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G})$ entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $[f] \in ult_p^{\alpha}(\mathbb{G})$; denotaremos por $ht([f])$ al mínimo ordinal que satisfaga esta propiedad.

Ahora buscamos extender la topología de Bohr a las ultrapotencias. Sea $\phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$, podemos extender este homomorfismo a un homomorfismo $\overline{\phi}^{(\alpha)} : ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathbb{T}$, con α un ordinal, de la siguiente manera:

I) Si $\alpha = 0$ definimos $\overline{\phi}^{(\alpha)} = \phi$.

II) Si $\alpha > 0$ y $\overline{\phi}^{(\beta)}$ ha sido definido para todo $\beta < \alpha$, entonces definimos el homomorfismo

$$\overline{\phi}^{(\alpha^-)} : ult_p^{\alpha^-}(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathbb{T}$$

como $\overline{\phi}^{(\alpha^-)}([f]) = \overline{\phi}^{(\beta)}([f])$ donde $ht([f]) = \beta$. Además, definimos el homomorfismo

$$\overline{\phi}^{(\alpha)} : ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathbb{T}$$

como $\overline{\phi}^{(\alpha)}([f]) = p\text{-}\lim_{n\in\omega} \overline{\phi}^{(\alpha^-)}(f(n))$. Notemos que $ht(f(n)) < ht([f])$ para toda $n \in \omega$; por lo que $\overline{\phi}^{(\alpha)}$ está bien definida.

Para evitar que la notación sea muy engorrosa, usaremos la notación $\overline{\phi}$ para referirnos a $\overline{\phi}^{\alpha}$.

Por la continuidad de las operaciones del grupo $\mathbb{G}$, la definición de p-límite y aplicando inducción sobre $\alpha < \omega_1$ se tiene que $\overline{\phi}^{(\alpha)} \in Hom\left(ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right)$.

Denotaremos por

$$\overline{Hom}\left(ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right) = \left\{\overline{\phi}^{(\alpha)} : \phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})\right\}$$

y denotaremos por $\tau_{\overline{Bohr}}^{\alpha}$ a la topología débil sobre $ult_p^{\alpha}(\mathbb{G})$ inducida por la familia $\overline{Hom}(ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}), \mathbb{T})$; además, usaremos $\tau_{\overline{Bohr}}$ para referirnos a la topología $\tau_{\overline{Bohr}}^{\omega_1}$. Esta topología vuelve a la ultrapotencia $ult_p^{\alpha}(\mathbb{G})$ un grupo topológico.

Como no podemos garantizar que dicha topología sea Hausdorff, para cada α sea

$$K_{\alpha} = \bigcap \left\{Ker\left(\overline{\phi}^{(\alpha)}\right) : \overline{\phi}^{(\alpha)} \in \overline{Hom}\left(ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right)\right\}$$

y definimos

$$Ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}) = ult_p^{\alpha}(\mathbb{G})/_{K_{\alpha}}$$

el cuál, por construcción, es un grupo topológico Hausdorff con la topología cociente. Sea $\pi : ult_p^{\alpha}(\mathbb{G}) \longrightarrow Ult_p^{\alpha}(\mathbb{G})$ el cociente canónico.

La siguiente proposición nos muestra como son las funciones que determinan elementos del ultraproducto que no pertenecen al grupo $\mathbb{G}$.

PROPOSICIÓN 2.1.1. *Sea p un ultrafiltro selectivo y $\mathbb{G}$ un grupo. Si $[f] \in ult_p(\mathbb{G}) \setminus \mathbb{G}$ entonces existe $U \in p$ tal que $f \restriction_U$ es una función inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la partición $\left\{f^{-1}[\{g\}] : g \in \mathbb{G}\right\}$. Como $[f] \notin \mathbb{G}$ se tiene que $f^{-1}[\{g\}] \notin p$ para toda $g \in \mathbb{G}$. Dado que p es selectivo existe $U \in p$ tal que $\left|U \cap f^{-1}[\{g\}]\right| \leq 1$; por consiguiente $f \restriction_U$ es una función inyectiva. □

A continuación definiremos el ideal de Kronecker que nos será útil para demostrar que: si p es selectivo, entonces $\left\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$ es Hausdorff.

DEFINICIÓN 2.1.2. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable, $\mathbb{G}^+ = \{g \in \mathbb{G} : g \neq 0\}$ y*

$$Kr\left(\mathbb{G}^+\right) = \left\{A \subseteq \mathbb{G}^+ : \exists \phi \in Hom\left(\mathbb{G}, \mathbb{T}\right), \exists M \in \mathbb{Z}^+ \forall a \in A \left(\|\phi(a)\| \geq \frac{1}{M}\right)\right\}.$$

Definimos el ideal de Kronecker sobre $\mathbb{G}^+$ como $\mathcal{I}_{Kr}\left(\mathbb{G}^+\right) = \langle Kr\left(\mathbb{G}^+\right)\rangle$; es decir $\mathcal{I}_{Kr}\left(\mathbb{G}^+\right)$ es el ideal generado por $Kr\left(\mathbb{G}^+\right)$.

Observemos que se cumplen las siguientes propiedades

I) $Kr\left(\mathbb{G}^+\right)$ es cerrado por subconjuntos.

II) $Kr\left([\omega]^{<\omega}\right)$ no contiene a todos los subconjuntos finitos de $[\omega]^{<\omega}$. En efecto, si $n \neq m \in \omega$ entonces el conjunto

$$\{\{n\}, \{m\}, \{n\} + \{m\}\} = \{\{n\}, \{m\}, \{n, m\}\} \notin Kr(\mathbb{G}^+).$$

ya que si $\phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \cong Hom(\mathbb{G}, 2)$ es tal que $\phi(\{n\}) = 1$ y $\phi(\{m\}) = 1$ entonces $\phi(\{n\} + \{m\}) = 0$.

III) Si $\mathbb{G}$ es un grupo Abeliano numerable y $g \in \mathbb{G}$, entonces $\{g\} \in Kr\left(\mathbb{G}^+\right)$. En particular, $\mathcal{I}_{Kr}\left(\mathbb{G}^+\right)$ es libre. Es claro ya que $Hom\left(\mathbb{G}, \mathbb{T}\right)$ separa puntos tomando a $\mathbb{G}$ como un conjunto discreto.

IV) $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ *es alto. Esto se cumple por el teorema de Leptin, ya que de este teorema se sigue que* $(\mathbb{G}, \tau_{Bohr})$ *es sin sucesiones convergentes no triviales; y en particular, no existen sucesiones convergentes al 0. Por consiguiente, si* $B \in [\mathbb{G}^+]^\omega$ *entonces existe* $A \in [B]^\omega$, $\phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ *y* $M \geq 4$ *tal que* $\|\phi(a)\| \geq \frac{1}{M}$*; es decir,* $A \in Kr(\mathbb{G}^+)$*. Por lo tanto,* $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ *es alto.*

Proposición 2.1.3. *Si* $\mathbb{G}$ *es un grupo Abeliano numerable,* $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ *es un ideal propio.*

Demostración. Si $\mathbb{G}^+ \in \mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ entonces existen $n \in \omega$, $\{\phi_i : i \leq n\} \subseteq Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y $M_i \geq 4$ tal que para toda $g \in \mathbb{G}^+$ existe $i \leq n$ para el cual se satisface que $\|\phi_i(g)\| \geq \frac{1}{M_i}$. Notemos que para cada $i \leq n$ el conjunto

$$V(\phi_i, M_i) = \left\{ g \in \mathbb{G}^+ : \|\phi_i(g)\| < \frac{1}{M_i} \right\}$$

es un abierto en la topología τ_{Bohr}; por consiguiente, $\bigcap_{i \leq n} V(\phi_i, M_i) \in \tau_{Bohr}$. Sin embargo, observemos que $\{0\} = \bigcap_{i \leq n} V(\phi_i, M_i)$; lo que implica que τ_{Bohr} es una topología discreta, lo cuál es falso. □

Proposición 2.1.4. *Si* $\mathbb{G}$ *es un grupo Abeliano numerable, el ideal de Kronecker* $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ *forma un ideal propio, libre, analítico y alto.*

Demostración. Por las observaciones anteriores sabemos que el ideal de Kronecker $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ forma un ideal propio, libre y alto.

Por otra parte, recordemos que al conjunto potencia $\mathcal{P}(\mathbb{G}^+)$ lo podemos identificar con el conjunto $2^{\mathbb{G}^+}$ que con la topología de conos es un espacio Polaco ya que $\mathbb{G}$ es numerable.

De este modo, $\mathcal{P}(\mathbb{G}^+) \times Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+$ también es un espacio polaco puesto que $Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \leqslant \mathbb{T}^{\mathbb{G}}$ al ser un conjunto compacto segundo numerable implica que también es Polaco y los espacios $\mathcal{P}(\mathbb{G}^+)$ y $\mathbb{Z}^+$ son Polacos.

Observemos que el ideal $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ es la proyección sobre $\mathcal{P}(\mathbb{G}^+)$ del conjunto

$$\{\langle A,\phi,M\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{G}^+)\times Hom(\mathbb{G},\mathbb{T})\times\mathbb{Z}^+ : \exists N\in\omega, \exists\{A_i : i<N\}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{G}^+), \exists\{\phi_i : i<N\}$$

$$\forall i<N\forall a\in A_i(\|\phi_i(a)\|\geq\frac{1}{M})\}$$

Este conjunto es Borel F_σ gracias a que para cada $M\geq 4$ el conjunto

$$\left\{\langle A,\phi\rangle\in\mathcal{P}\left(G^+\right)\times Hom\left(G,\mathbb{T}\right):\forall a\in A\left(\|\phi\left(a\right)\|\geq\frac{1}{M}\right)\right\}$$

es un conjunto cerrado.

Por lo tanto $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ es un conjunto analítico. □

Proposición 2.1.5. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable y $p\in\omega^*$. Si p es selectivo, entonces $\left\langle ult_p(\mathbb{G}),\tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$ es Hausdorff.*

Demostración. Como $\left\langle ult_p(\mathbb{G}),\tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$ es un grupo para demostrar que es Hausdorff basta demostrar que todos sus puntos se pueden separar del [0] con un abierto en la topología de Bohr. Para lograr esto demostraremos que si $[f]\in ult_p(\mathbb{G})$ distinto del [0] existe un homomorfismo $\phi\in Hom(\mathbb{G},\mathbb{T})$ y $M\geq 4$ tal que $||\overline{\phi}([f])||\geq\frac{1}{M}$.

Sea $f:\omega\longrightarrow\mathbb{G}$. Si f es constante en un elemento del ultrafiltro, entonces $[f]\in\mathbb{G}$. Como $Hom\left(\mathbb{G},\mathbb{T}\right)$ separa puntos, existe $\phi\in Hom\left(\mathbb{G},\mathbb{T}\right)$ y $M\geq 4$ tal que $\|\phi\left([f]\right)\|\geq 0$. Por lo que podemos suponer que f no es constante en un elemento del ultrafiltro.

Dado que p es selectivo y f no es constante en un elemento del ultrafiltro, existe $U\in p$ tal que $f\restriction_U$ es inyectiva, $0\notin f[U]$ y el ultrafiltro $f\restriction_U[p]=\left\{A\subseteq\mathbb{G}^+ : f^{-1}[A]\cap U\in p\right\}$ es selectivo. Tomando en cuenta que $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$ es un ideal libre, analítico, alto y $f\restriction_U[p]$ es un ultrafiltro selectivo, aplicando el teorema de Mathias, $f\restriction_U[p]\cap\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)\neq\emptyset$. Dado que p es un ultrafiltro y $\mathcal{I}_{Kr}(\mathbb{G}^+)$

es la cerradura de $Kr(\mathbb{G}^+)$ bajo la operación unión $\bigcup : \mathcal{P}(\mathbb{G}^+) \times \mathcal{P}(\mathbb{G}^+) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{G}^+)$, entonces $f \restriction_U [p] \cap Kr(\mathbb{G}^+) \neq \emptyset$. Por consiguiente, existe $V \in p$ con $V \subseteq U$ tal que $f[V] \in Kr(\mathbb{G}^+)$; es decir, existe $\psi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y $M \geq 4$ tal que $\|\psi(f(n))\| \geq \frac{1}{M}$ para toda $n \in V$. Por consiguiente, $\|\psi([f])\| \geq \frac{1}{M}$.

De lo anterior podemos concluir que $\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}} \rangle$ es Hausdorff. □

Proposición 2.1.6. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable y $p \in \omega^*$. $\langle ult_p^2(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}} \rangle$ es Hausdorff si y sólo si $\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}} \rangle$ no tiene sucesiones, no constantes en un elemento del ultrafiltro, cuyo p-límite es igual a 0.*

Demostración. $\Longrightarrow\rfloor$ Supongamos que $ult_p^2(\mathbb{G})$ es Hausdorff y sea $\langle [f_n] : n \in \omega \rangle \subseteq ult_p(\mathbb{G}) \setminus \{0\}$ una sucesión sin repeticiones. Consideremos $f : \omega \longrightarrow ult_p(\mathbb{G})$ definida como $f(n) = [f_n]$, y observemos que $[f] \in ult_p^2(\mathbb{G}) \setminus \{0\}$. Como $ult_p^2(\mathbb{G})$ es Hausdorff existe $\phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y $M \geq 4$ tal que $\left\|\overline{\phi}([f])\right\| \geq \frac{1}{M}$. Por la definición de $\overline{\phi}$, existe $U \in p$ tal que para toda $n \in U$ se cumple que $\left\|\overline{\phi}([f_n])\right\| \geq \frac{1}{2M}$.

$\Longleftarrow\rfloor$ Supongamos que $\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}} \rangle$ no tiene sucesiones, no constantes en un elemento del ultrafiltro, que tengan al 0 como p-límite. Como $\langle ult_p^2(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}} \rangle$ es grupo topológico, basta demostrar que los elementos de $ult_p^2(\mathbb{G})$ se pueden separar del 0. Sea $[f] \in ult_p^2(\mathbb{G}) \setminus \{0\}$. Como $\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}} \rangle$ es Hausdorff, entonces podemos suponer que $[f] \in ult_p^2(\mathbb{G}) \setminus ult_p(\mathbb{G})$; en particular f es una sucesión no constante en un elemento del ultrafiltro. Aplicando la hipótesis, existen $\phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$, $M \geq 4$ y $U \in p$ tal que para toda $n \in U$ se cumple que $\left\|\overline{\phi}(f(n))\right\| \geq \frac{1}{M}$; esto implica que $\left\|\overline{\phi}([f])\right\| = \left\|p\text{-}\lim_{n \in U} \overline{\phi}([f_n])\right\| \geq \frac{1}{M}$. Por lo tanto, $\langle ult_p^2(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}} \rangle$ es Hausdorff. □

Definición 2.1.7 (Folklore). *Sean $p, q \in \omega^*$ definimos su* producto de Fubini *como el ultrafiltro*

$$p \otimes q = \left\{ A \subseteq \omega \times \omega : \left\{ n \in \omega : A^{(n)} \in p \right\} \in q \right\}$$

donde $A^{(n)} = \{m \in \omega : \langle n, m\rangle \in A\}$

DEFINICIÓN 2.1.8 ([**7**]). *Decimos que* $p \in \omega^*$ *es* Hausdorff *si y sólo si para cualesquiera* $f, g : \omega \longrightarrow \omega$ *tal que* $\{n \in \omega : f(n) \neq g(n)\} \in p$, *existe* $U \in p$ *para el cual* $f[U] \cap g[U] = \emptyset$.

PROPOSICIÓN 2.1.9 (M. Di Nasso y M. Forti, [**22**]). *Si* $p \in \omega^*$, *entonces* $p^2 = p \otimes p$ *no es Hausdorff .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $f, g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ definidas como $f(n, m) = n$ y $g(n, m) = m$. Observemos que $\{\langle n, m\rangle : f(n, m) = g(n, m)\} = \{\langle n, n\rangle : n \in \omega\} \notin p^2$. Ahora probaremos que no existe $U \in p$ para el cual $f[U] \cap g[U] = \emptyset$. Sea $U \in p^2$.

Consideremos los siguientes dos conjuntos

$$A = \left\{n \in \omega : U^{(n)} \in p\right\} \in p$$

y

$$B = \bigcup_{n \in A} U^{(n)} \in p$$

Observemos que $A \subseteq f[U]$ y $B \subseteq g[U]$. Esto implica que $f[U] \cap g[U] \supseteq A \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto p^2 no es Hausdorff. □

PROPOSICIÓN 2.1.10. *Sea* $\mathbb{G}$ *un grupo Abeliano numerable y* $p \in \omega^*$. *Si* $\left\langle ult_p^2(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$ *es Hausdorff entonces* $p^2 = p \otimes p$ *es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathbb{G}$ es numerable, sin perdida de generalidad, supongamos que $\mathbb{G} = \omega$. Sean $f, g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ tales que $\{\langle n, m\rangle : f(n, m) \neq g(n, m)\} \in p^2$; es decir,

$$V = \{n \in \omega : \{m \in \omega : f(n, m) \neq g(n, m)\} \in p\} \in p$$

Para cada $n \in V$ definimos las siguientes funciones $\overline{f}_n, \overline{g}_n : \omega \longrightarrow \omega$ como $\overline{f}_n(m) = f(n,m)$ y $\overline{g}_n(m) = g(n,m)$. Además, definimos $\overline{f}, \overline{g} : \omega \longrightarrow ult_p^2(\omega)$ como $\overline{f}(n) = \overline{f}_n$ y $\overline{g}(n) = \overline{g}_n$. Como $V \in p$, $\left[\overline{f}_n\right] \neq [\overline{g}_n]$ para cada $n \in V$; y por consiguiente $\left[\overline{f}\right] \neq [\overline{g}]$. Dado que $\left\langle ult_p^2(\omega), \tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$ es Hausdorff, existen $\phi \in Hom(\omega, \mathbb{T})$ y $\epsilon, \delta > 0$ tal que $\overline{\phi}\left(\left[\overline{f}\right]\right) \in V_\epsilon$, $\overline{\phi}([\overline{g}]) \in V_\delta$ y $V_\epsilon \cap V_\delta = \emptyset$. Por la definición de $\overline{\phi}$, existe $U \in p$ tal que para cada $n \in U$ existe $U_n \in p$ de tal forma que $\phi\left(\overline{f}_n(m)\right) = \phi(f(n,m)) \in V_\epsilon$ y $\phi(\overline{g}_n(m)) = \phi(g(n,m)) \in V_\delta$ para cualesquiera $m \in U_n$. Tomemos $A = \{\langle n, m\rangle : n \in U \text{ y } m \in U_n\} \in p^2$ y observemos que $\phi[f[A]] \subseteq V_\epsilon$ y $\phi[g[A]] \subseteq V_\delta$. Como $V_\epsilon \cap V_\delta = \emptyset$ concluimos que $f[A] \cap g[A] = \emptyset$. □

Corolario 2.1.11. *$\left\langle ult_p^2(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$ nunca es Hausdorff y $\left\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right\rangle$ tiene sucesiones, no constantes en un elemento del ultrafiltro, que tengan al 0 como p-límite.*

Demostración. Se sigue de las proposiciones anteriores. □

A continuación veremos algunas propiedades características de la $ult_p(\mathbb{Z})$

Observación 2.1.12. *$ult_p(\mathbb{Z})$ es un grupo libre de torsión que no es divisible.*

Demostración. Sea $[f] \in ult_p(\mathbb{Z}) \setminus [0]$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$. Observemos que $n \cdot [f] = [n \cdot f] \neq [0]$ pues los valores que toma la función f son distintos de 0 módulo un elemento del ultrafiltro y el grupo $\mathbb{Z}$ es libre de torsión.

Por otra parte, la función $p : \omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida como $p(n) = p_0$, donde p_0 es un primo, no es divisible. □

Sabemos que todo grupo Abeliano puede ser encajado en un grupo divisible y también sabemos que todo grupo Abeliano divisible libre de torsión es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Por consiguiente la ultrapotencia $ult_p^\alpha(\mathbb{Z})$ se encaja en un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Además, como lo veremos a continuación, $ult_p(\mathbb{Z})$ contiene una copia de $\mathbb{Q}$.

PROPOSICIÓN 2.1.13. *$ult_p(\mathbb{Z})$ contiene una copia de $\mathbb{Q}$.*

DEMOSTRACIÓN. A continuación encontraremos un subgrupo de la ultrapotencia $ult_p(\mathbb{Z})$ que es divisible. Para cada $k \in \omega \setminus \{0\}$, sea $a_k : \omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida como

$$a_k = \begin{cases} 0 & n < k \\ \\ \frac{n!}{k} & n \geq k \end{cases}$$

y sea $\alpha_k = [a_k]$. Consideremos $H = \langle \{\alpha_k : k \in \omega\} \rangle$, probaremos a continuación que H es divisible (esto implica que H es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$). Observemos que

$$\{n \in \omega : ka_k(n) \neq a_1(n)\} \subseteq \{1, ..., k-1\}$$

y por lo tanto es un conjunto finito. De ahí que su complemento $\{n \in \omega : ka_k(n) = a_1(n)\} \in p$, lo que significa que $k\alpha_k = \alpha_1$. En general se tiene que $d\alpha_{dm} = \alpha_m$.

Sea $\alpha = \sum_{0<i\leq m} n_i\alpha_i \in H$ y $k \in \mathbb{Z}$. Sea $N = k \cdot m.c.m(1, ..., m)$, observemos que

$$\alpha = \sum_{0<i\leq m} n_i\alpha_i = \left(\sum_{0<i\leq m} n_i k \frac{N}{jk} \right) \alpha_N = k \left(\sum_{0<i\leq m} n_i \frac{N}{jk} \right) \alpha_N$$

Por lo tanto H es divisible. □

Las siguientes proposiciones nos brindarán algunas propiedades de $\left(ult_p^\alpha(\mathbb{Z}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$.

PROPOSICIÓN 2.1.14. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo numerable. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

I) $(\mathbb{G}, \tau_{Bohr})$ es un conjunto denso en $\left(ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$.

II) $(\mathbb{G}, \tau_{Bohr})$ no es un conjunto cerrado en $\left(ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$.

III) El complemento de $\mathbb{G}$ es denso en $\left(ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$.

IV) $(\mathbb{G}, \tau_{Bohr})$ no es un conjunto abierto en $\left(ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$.

Demostración.

I) Procederemos por inducción sobre α. Si $\alpha = 0$ entonces $\mathbb{G} = ult_p^0(\mathbb{G})$, por lo que $\mathbb{G}$ es denso en $ult_p^0(\mathbb{G})$.

Sea $\alpha > 0$ y supongamos por inducción que el resultado es cierto para todo $\beta < \alpha$. Sean $[h] \in ult_p^\alpha(\mathbb{G})$, $\varphi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$ tal que $U([h], \varphi, \epsilon) = \{[f] \in ult_p^\alpha(\mathbb{G}) : ||\overline{\varphi}([f]) - \overline{\varphi}([h])|| < \epsilon\}$ es un abierto sub-básico de $[h]$. Por definición de $\overline{\varphi}$ existe $A \in p$ tal que $h(n) \in U([h], \varphi, \frac{\epsilon}{2})$ para toda $n \in A$; es decir $||\overline{\varphi}(h(n)) - \overline{\varphi}([h])|| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \in A$. Por definición de la ultrapotencia, para cada $n \in A$ existe $\beta_n < \alpha$ tal que $h(n) \in ult_p^{\beta_n}(\mathbb{G})$. Aplicando la hipótesis de inducción para toda $n \in A$ existe $g_n \in \mathbb{G}$ tal que $g_n \in U(h(n), \varphi, \frac{\epsilon}{2})$; es decir $||\overline{\varphi}(g_n) - \overline{\varphi}(h(n))|| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \in A$. Aplicando la desigualdad del triangulo obtenemos que

$$||\overline{\varphi}(g_n) - \overline{\varphi}([h])|| \leq ||\overline{\varphi}(g_n) - \overline{\varphi}(h(n))|| + ||\overline{\varphi}(h(n)) - \overline{\varphi}([h])|| < \epsilon.$$

Por consiguiente $g_n \in U([h], \varphi, \epsilon) \cap \mathbb{G}$ para toda $n \in A$. De lo anterior podemos conluir que $\mathbb{G}$ es denso en $ult_p^\alpha(\mathbb{G})$.

II) Como $(\mathbb{G}, \tau_{Bohr})$ es denso en $\left(ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$, entonces $(\mathbb{G}, \tau_{Bohr})$ no puede ser un conjunto cerrado; ya que de lo contrario el complemento de $\mathbb{G}$ tendría que ser abierto y $\mathbb{G}$ al ser denso tendría que intersectarlo lo que es una contradicción.

III) Sean $[h] \in ult_p^\alpha(\mathbb{G})$, $\varphi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y $\epsilon > 0$ y consideremos al abierto sub-básico $U([h], \varphi, \epsilon)$. Si $[h] \notin \mathbb{G}$ entonces ya terminamos, por lo que podemos suponer que $[h] = g \in \mathbb{G}$. Sabemos, por la proposición 1.8.2, que $\mathbb{G}$ con la topología de Bohr no es discreto; por lo que existen $\{g_n : n \in \omega\} \subseteq U([h], \varphi, \frac{\epsilon}{2}) \cap \mathbb{G}$ distintos entre ellos. Consideremos la función $f : \omega \longrightarrow \mathbb{G}$ definida como $f(n) = g_n$. Dado que f no es constante en un elemento del ultrafiltro, ya que sus valores son distintos, entonces $[f] \notin \mathbb{G}$. Por otra parte, como $\{g_n : n \in \omega\} \subseteq U([g], \frac{\epsilon}{2})$, $||\overline{\varphi}(g_n) - \overline{\varphi}(g)|| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dado que $\overline{\varphi}([f]) = p\text{-}lim_{n\in\omega}\varphi(g_n)$ se tiene que $||\overline{\varphi}([f]) - \overline{\varphi}(g)|| < \epsilon$; es decir, $[f] \in U([g], \varphi, \epsilon)$. Con lo que concluimos que el complemento de $\mathbb{G}$ es denso en $ult_p^\alpha(\mathbb{G})$.

IV) Como el complemento de $\mathbb{G}$ es denso, si $\mathbb{G}$ fuese abierto, entonces su complemento tendría que intersectarlo lo que es una contradicción.

$$U = \{[h] \in \mathbb{G} : \|\overline{\varphi}([h]) - \overline{\varphi}(g)\| < \epsilon\} = \{n \in \mathbb{G} : \|\overline{\varphi}(n) - \overline{\varphi}(g)\| < \epsilon\} \subseteq \mathbb{G}$$

Consideremos $f : \omega \longrightarrow U$ biyectiva y observemos que $[f] \in U \setminus \mathbb{G}$. □

PROPOSICIÓN 2.1.15. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable y $\alpha \leq \omega_1$. Entonces $\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ no es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que $Ult_p^\alpha(\mathbb{G}) = ult_p^\alpha(\mathbb{G})/_{K_\alpha}$, la familia

$$\overline{Hom}\left(ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right) = \left\{\overline{\phi}^{(\alpha)} : \phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})\right\}$$

induce una familia $Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right) = \left\{\phi'^{(\alpha)} : \phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})\right\}$ definida de la siguiente manera:

Sea $\pi : ult_p^\alpha(\mathbb{G}) \longrightarrow Ult_p^\alpha(\mathbb{G})$ el cociente canónico. Para cada $\phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ definimos $\phi' : Ult_p^\alpha(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathbb{T}$ como $\phi'(\pi([f])) = \overline{\phi}^{(\alpha)}([f])$. Observemos que el homomorfismo ϕ' está bien definido gracias a la definición de K_α.

Notemos que por construcción $\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ tiene la topología débil definida por la familia $Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right)$.

Como $Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right)$ separa puntos, aplicando el teorema de W. W. Comfort y K. A. Ross (Teorema 1.7.4), $\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)^* = Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right)$.

Si suponemos, para llegar a una contradicción, que $\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ es compacto, entonces por el teorema de dualidad de Pontryagin y van Kampen (Sección 1.7) obtenemos que su grupo dual

$\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)^*$ es discreto y que

$$\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right) \cong \left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)^{**} = Hom_C(Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right)).$$

Esto implica que los homomorfismos continuos sobre el grupo discreto $\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)^*$ sean todos los homomorfimos, es decir $Hom_C(Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right)) = Hom(Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right), \mathbb{T})$. Por consiguiente, $\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right) \cong Hom(Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right), \mathbb{T})$.

Sin embargo, como $\alpha \leq \omega_1$, $\mathbb{G}$ es numerable y $ult_p(\mathbb{G}) = \mathbb{G}^\omega/_{\sim_p}$, entonces aplicando inducción transfinita obtenemos que $|(ult_p^\alpha(\mathbb{G})| \leq \omega^\omega = 2^\omega$. Además, al ser $Ult_p^\alpha(\mathbb{G})$ un cociente de $ult_p^\alpha(\mathbb{G})$ se tiene que $|Ult_p^\alpha(\mathbb{G})| \leq ult_p^\alpha(\mathbb{G})$. De ambas desigualdades obtenemos que $|Ult_p^\alpha(\mathbb{G})| \leq 2^\omega$. Por otra parte, como $|Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})| = |Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right)|$ entonces $|\mathbb{T}|^{Hom(\mathbb{G},\mathbb{T})} = |\mathbb{T}|^{|Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}),\mathbb{T}\right)|}$. Aplicando las desigualdades anteriores obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)| &\leq 2^\omega < 2^{2^\omega} \leq |\mathbb{T}|^{Hom(\mathbb{G},\mathbb{T})} = |\mathbb{T}|^{|Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}),\mathbb{T}\right)|} \\ &= |Hom(Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right), \mathbb{T})|, \end{aligned}$$

lo que contradice que $\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right) \cong Hom(Hom'\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T}\right), \mathbb{T})$. De lo que concluimos, por reducción al absurdo, que $\left(Ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ no es compacto. □

Construiremos a continuación una nueva topología para las ultrapotencias. Esta construcción se puede consultar con profundidad en [**6**].

Sea (X, τ) un espacio topológico y $p \in \omega^*$. Para cada $U \in \tau$ definimos

$$U_p^* = \{[f] \in ult_p(X) : \exists A \in p(f[A] \subseteq U)\}$$

y $\tau^* = \{U_p^* : U \in \tau\}$. Observemos que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $X^* = ult_p(X)$
2. $\emptyset^* = \emptyset$
3. $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$

Por las propiedades anteriores τ^* es una base para la $ult_p(X)$.

DEFINICIÓN 2.1.16. *Si (X, τ) un espacio topológico, entonces $ult_p(X, \tau)$ detonará al espacio $ult_p(X)$ dotado de la topología generada por τ^*.*

Este espacio $ult_p(X, \tau)$ puede no ser Hausdorff, por lo que introducimos la siguiente relación. $x \sim_H y$ si y sólo si para cualesquiera $U, V \in \tau$ si $x \in U^*$ y $y \in V^*$ entonces $U^* \cap V^* \neq \emptyset$. Esta relación es reflexiva y simétrica pero la transitividad puede fallar, por lo que consideramos H la cerradura transitiva de la relación $\sim_H$. Por consiguiente $Ult_p(X, \tau) = ult_p(X, \tau)/_H$ es un espacio Hausdorff.

La demostraciones de las siguientes proposiciones se pueden consultar en **[6]**.

PROPOSICIÓN 2.1.17 (Proposición 2.9, **[6]**). *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces X es un subespacio de $Ult_p(X, \tau)$.*

DEFINICIÓN 2.1.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Para cada $\alpha \leq \omega_1$, definimos recursivamente el espacio topológico $Ult_p^\alpha(X, \tau)$ y la topología τ_α como sigue:*

- $Ult_p^0(X, \tau) = X$ y $\tau_0 = \tau$.
- Si $\alpha = \beta + 1$ definimos $Ult_p^\alpha(X, \tau) = Ult_p(Ult_p^\beta(X, \tau), \tau_\beta)$ y $\tau_\alpha = \tau_\beta^*$.
- Si α es límite $Ult_p^\alpha(X, \tau^*) = \bigcup_{\beta \in \alpha} Ult_p^\beta(X, \tau)$ y

$$\tau_\alpha = \{U \subseteq Ult_p^\alpha(X, \tau) : \forall \beta < \alpha (U \cap Ult_p^\beta(X, \tau) \in \tau_\beta)\}$$

TEOREMA 2.1.19 (Teorema 2.13, **[6]**). *$Ult_p^{\omega_1}(X,\tau) \cong \beta_p X$ para cualquier espacio (X,τ)*

TEOREMA 2.1.20 (Teorema 4.10, **[6]**). *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano discreto. $Ult_p(\mathbb{G},\tau_{Bohr})$ es un grupo topológico si y sólo si $\mathbb{G}$ es precompacto y $\mathbb{G}^*$ es de torsión.*

COROLARIO 2.1.21. $(Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{Z}),\tau_{\overline{Bohr}}) \ncong Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{Z},\tau_{Bohr}) \cong \beta_p(\mathbb{Z},\tau_{Bohr})$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $(Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{Z}),\tau_{\overline{Bohr}})$ es un grupo topológico pero

$$\mathbb{Z}^* = Hom(\mathbb{Z},\mathbb{T}) \cong \mathbb{T}$$

no es un grupo de torsión. □

COROLARIO 2.1.22. $(Ult_p^{\omega_1}([\omega]^{<\omega}),\tau_{\overline{Bohr}}) = Ult_p^{\omega_1}([\omega]^{<\omega},\tau_{Bohr}) \cong \beta_p([\omega]^{<\omega},\tau_{Bohr})$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que $Hom([\omega]^{<\omega},\mathbb{T}) = Hom([\omega]^{<\omega},\{0,\frac{1}{2}\})$ por lo que los abiertos de la forma $U(\varphi,i) = \{g \in [\omega]^{<\omega} : \varphi(g) = i\}$ para cualesquiera $\varphi \in Hom([\omega]^{<\omega},\{0,\frac{1}{2}\})$ e $i \in \{0,\frac{1}{2}\}$ forman una base para la topología en $([\omega]^{<\omega},\tau_{Bohr})$. Así los abiertos de la forma

$$U^*(\varphi,i) = \{[f] \in ult_p([\omega]^{<\omega}) : \exists A \in p(f[A] \subseteq U(\varphi,i)\}$$

forman una base para $ult_p([\omega]^{<\omega},\tau_{Bohr})$ y los abiertos de la forma

$$\overline{U}(\varphi,i) = \left\{[f] \in ult_p([\omega]^{<\omega}) : p\text{-}\lim_n \varphi(f(n)) = i\right\}$$

forman una base para $(ult_p([\omega]^{<\omega}),\tau_{\overline{Bohr}})$. Notemos que $U^*(\varphi,i) = \overline{U}(\varphi,i)$, lo que implica que $(ult_p([\omega]^{<\omega}),\tau_{\overline{Bohr}}) = ult_p([\omega]^{<\omega},\tau_{Bohr})$; por inducción obtenemos que

$$(ult_p^{\omega_1}([\omega]^{<\omega}),\tau_{\overline{Bohr}}) = ult_p^{\omega_1}([\omega]^{<\omega},\tau_{Bohr})$$

Observando que la relación $\sim_{H_\alpha} = \bigcap_{\overline{\varphi}\in\overline{Hom}(ult_p^\alpha([\omega]^{<\omega}),\mathbb{T})} ker(\overline{\varphi})$ entonces

$$Ult_p^{\omega_1}([\omega]^{<\omega}), \tau_{\overline{Bohr}}) = Ult_p^{\omega_1}([\omega]^{<\omega}, \tau_{Bohr})$$

□

2.2. Grupos p-compactos con sucesiones convergentes no triviales

En la presente sección demostraremos que si $\mathbb{G}$ es un grupo Abeliano numerable, entonces existen ultrafiltros $p \in \omega^*$ para los cuales $Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G})$, con la topología $\tau_{\overline{Bohr}}$, tiene sucesiones convergente no triviales. Así $Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G})$, con la topología $\tau_{\overline{Bohr}}$, es un grupo topológico p-compacto no compacto con sucesiones convergentes no triviales. Por la naturaleza de la topología $\tau_{\overline{Bohr}}$, recordemos que, $Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G})$ es un grupo topológico p-compacto; por lo que sólo basta demostrar que tiene una sucesión convergente. Además, como los homomorfismos en $\overline{Hom}(ult_p^\beta(\mathbb{G}), \mathbb{T})$ son extensiones de homomorfismos de $\overline{Hom}(ult_p^\alpha(\mathbb{G}), \mathbb{T})$ con $\beta \geq \alpha$; entonces de existir una sucesión convergente no trivial en $Ult_p^\alpha(\mathbb{G})$ también será una sucesión convergente no trivial en $Ult_p^\beta(\mathbb{G})$. De este modo, basta con probar que $Ult_p(\mathbb{G})$ tenga sucesiones convergentes no triviales para garantizar que $Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{G})$ también las tiene.

Introduciremos a continuación la notación que nos será de gran utilidad para esta sección.

Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable y $(\phi, m) \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+$, definiremos los siguientes conjuntos:

$$U_{\phi,m} = \left\{ a \in \mathbb{G} : \|\phi(a)\| < \frac{1}{m} \right\}$$

y

$$U^*_{\phi,m} = \left\{ a \in \mathbb{G} : \|\phi(a)\| > \frac{1}{m} \right\}$$

Sea $\langle f_n : n \in \omega \rangle \subseteq \mathbb{G}^\omega$ tal que para cada $F \in [\omega]^{<\omega}$ y $\sigma : F \longrightarrow \mathbb{G}$ existe $k \in \omega$ de tal manera que $f_i(k) = \sigma(i)$ para toda $i \in F$. Definimos los siguientes conjuntos

$$A_{\phi,m,n} = \left\{ k \in \omega : \|\phi(f_n(k))\| < \frac{1}{m} \right\}$$

y

$$A^*_{\phi,m,n} = \left\{ k \in \omega : \|\phi(f_n(k))\| > \frac{1}{m} \right\}$$

PROPOSICIÓN 2.2.1. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable con elemento neutro $0_\mathbb{G}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

I) Existe $p \in \omega^*$ tal que $\left(Ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ tiene una sucesión convergente no trivial.

II) Existe una sucesión $\langle \phi_n : n \in \omega \rangle \subseteq Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y un mapeo $H : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \omega$ tal que para toda $n \in \omega$ la familia $\left\{U^*_{\phi_n,4}\right\} \cup \{U_{\phi,m} : H(\phi, m) \leq n\}$ es centrada.

III) Existe una sucesión $\langle \phi_n : n \in \omega \rangle \subseteq Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y un mapeo $H : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \omega$ tal que la colección $\mathbb{A} = \bigcup_{n\in\omega} \left\{A^*_{\phi_n,4,n}\right\} \cup \{A_{\phi,m,n} : H(\phi, m) \leq n\}$ es centrada.

DEMOSTRACIÓN. *I) $\Longrightarrow$ II)⌋* Sea $\langle [f_n] : n \in \omega \rangle \subseteq Ult_p(\mathbb{G})$ una sucesión $\tau_{\overline{Bohr}}$ convergente al $[0]$. Como esta sucesión es no trivial y por el Teorema de Leptin 1.8.11 $(\mathbb{G}, \tau_{Bohr})$ es sin sucesiones convergentes no triviales, podemos suponer sin perdida de generalidad que $\langle [f_n] : n \in \omega \rangle \subseteq Ult_p(\mathbb{G}) \setminus \mathbb{G}$; ya que a lo mas habría una cantidad finita de la sucesión contenida en $\mathbb{G}$. Además, dado que esta sucesión pertenece a $Ult_p(\mathbb{G})$, podemos encontrar $N \in [\omega]^\omega$ tal que para cada $n \in N$ existe $\phi_n \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ tal que $\left\|\overline{\phi_n}([f_n])\right\| \neq 0$. Ahora bien, para cada $n \in N$ podemos encontrar $m_n \in \mathbb{Z}$ tal que $\left\|m_n \cdot \overline{\phi_n}([f_n])\right\| > \frac{1}{4}$. Como $m_n \cdot \overline{\phi_n} = \overline{m_n \cdot \phi_n}$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $\left\|\overline{\phi_n}([f_n])\right\| > \frac{1}{4}$.

Dado que $\langle [f_n] : n \in \omega \rangle \subseteq Ult_p(\mathbb{G})$ es una sucesión $\tau_{\overline{Bohr}}$ convergente, para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ existe un mapeo $H_m : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \longrightarrow \omega$ tal que para cada $\phi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y $n \geq H_m(\phi)$ se sigue

que $\left\|\overline{\phi}([f_n])\right\| < \frac{1}{m}$. Definimos $H(\phi, m) = H_m(\phi)$ para cualesquiera $(\phi, m) \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+$. De esta manera si $n \in \omega$ entonces $\left\|\overline{\phi_n}([f_n])\right\| > \frac{1}{4}$ y $\left\|\overline{\phi}([f_n])\right\| < \frac{1}{m}$ cuando $H(\phi, m) \leq n$; así si $\left\{\left(\phi^i, m_i\right) : i \in F, H\left(\phi^i, m_i\right) \leq n\right\}$ es un conjunto finito entonces existe $U \in p$ tal que $\|\phi_n(f_n(k))\| > \frac{1}{4}$ y $\left\|\phi^i(f_n(k))\right\| < \frac{1}{m_i}$ para toda $k \in U$ e $i \in F$. Dado que f_n no es contante en un elemento del ultrafiltro entonces $f_n[U] \in [\mathbb{G}]^\omega$ y notemos que $f_n[U] \subseteq U^*_{\phi_n,4} \cap \bigcap \left\{U_{\phi^i,m_i} : i \in F\right\}$. Por consiguiente, la familia $\left\{U^*_{\phi_n,4}\right\} \cup \{U_{\phi,m} : H(\phi, m) \leq n\}$ es centrada.

$II) \Longrightarrow III)\rfloor$ Veamos que la colección $\bigcup_{n\in\omega} \left\{A^*_{\phi_n,4,n}\right\} \cup \{A_{\phi,m,n} : H(\phi, m) \leq n\}$ forma una familia centrada. Sea $n \in \omega$ y para cada $i < n$ fijemos $\left\{\left(\phi^j, m_j\right) : j < n_i\right\} \subseteq H^{-1}[i+1]$ un conjunto finito. Dado que para cada $n \in \omega$ la familia $\left\{U^*_{\phi_n,4}\right\} \cup \{U_{\phi,m} : H(\phi, m) \leq n\}$ es centrada, para cada $n \in \omega$ el conjunto de las funciones de elección

$$\Sigma_n = \left\{\sigma : n \longrightarrow \bigcup_{i<n} \left(U^*_{\phi_i,4} \cap \bigcap_{j<n_i} U_{\phi^j,m_j}\right) : \sigma(i) \in U^*_{\phi_i,4} \cap \bigcap_{j<n_i} U_{\phi^j,m_j}\right\}$$

es un conjunto infinito. Por otra parte, por la definición de la sucesión $\langle f_n : n \in \omega\rangle$, para cada $n \in \omega$ y $\sigma \in \Sigma_n$ existe $k \in \omega$ tal que $f_i(k) = \sigma(i) \in U^*_{\phi_i,4} \cap \bigcap_{j<n_i} U_{\phi^j,m_j}$ para toda $i < n$. Por la definición de los conjuntos $U_{\phi,m}$, $U^*_{\phi,m}$, $A_{\phi,m,n}$ y $A^*_{\phi,m,n}$, si $f_i(k) \in U^*_{\phi_i,4} \cap \bigcap_{j<n_i} U_{\phi^j,m_j}$ para toda $i < n$ entonces $k \in \bigcap_{i<n} \left(A^*_{\phi_i,4,i} \cap \bigcap_{j<n_i} A_{\phi^j,m_j,i}\right)$. Por consiguiente, como el conjunto Σ_n es infinito podemos asegurar que $\bigcap_{i<n} \left(A^*_{\phi_i,4,i} \cap \bigcap_{j<n_i} A_{\phi^j,m_j,i}\right)$ es un conjunto infinito; por lo que $\mathbb{G} = \bigcup_{n\in\omega} \left\{A^*_{\phi_n,4,n}\right\} \cup \{A_{\phi,m,n} : H(\phi, m) \leq n\}$ es una familia centrada.

$III) \Longrightarrow I)\rfloor$ Ya que la familia $\mathbb{A}$ es centrada podemos considerar p un ultrafiltro que extiende a dicha familia.

A continuación probaremos que el ultrafiltro es libre. Sea $k \in \omega$ y veamos que hay alguien en la familia centrada para el cual k no pertenece. Si existe $n \in \omega$ tal que $f_n(k) = 0_{\mathbb{G}}$ entonces $k \notin A^*_{\phi_n,4,n} \in p$. Si para toda $n \in \omega$ se cumple que $f_n(k) \neq 0_{\mathbb{G}}$ entonces la sucesión $\langle f_n(k) : n \in \omega\rangle$ es no trivial y por lo tanto no es τ_{Bohr}-convergente a e. Por esta razón, existe $(\phi, m) \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+$

tal que $\|\phi(f_n(k))\| \geq \frac{1}{m}$ para una infinidad de n's. Elegimos $n \in \omega$ tal que $H(\phi, m) \leq n$ y entonces $k \notin A_{\phi,m,n} \in p$.

Notemos que la definición de la familia centrada nos garantiza las siguientes propiedades:

$I)$ $\left\|\overline{\phi_n}([f_n])\right\| > \frac{1}{4}$ para toda $n \in \omega$

$II)$ La sucesión $\langle [f_n] : n \in \omega \rangle$ es $\tau_{\overline{Bohr}}$ convergente a $0_{\mathbb{G}}$

Estas dos propiedades nos garantizan que $\langle [f_n] : n \in \omega \rangle$ es una sucesión convergente no trivial. Tomando una subsucesión, si fuese necesario, podemos suponer que $\langle [f_n] : n \in \omega \rangle \in Ult_p(\mathbb{G})$. $\square$

Denotaremos por $\mathbb{Z}_{\geqslant 4}$ al conjunto de enteros mayores iguales a 4. Esta definición nos será de gran utilidad para el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable y*

$$\{\phi\} \cup \left\{\phi^j : j < m\right\} \subseteq Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \setminus \{0\}$$

$\phi \notin \left\langle \left\{\phi^j : j < m\right\} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$ *si y sólo si* $U^*_{\phi,4} \cap \bigcap_{j<m} U_{\phi^j, m_j} \neq \emptyset$ *para cualesquiera* $\langle m_j : j < m \rangle \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant 4}$.

DEMOSTRACIÓN. $\Longrightarrow\rfloor$ Supongamos que $\phi \notin \left\langle \left\{\phi^j : j < m\right\} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$ y $\langle m_j : j < m \rangle \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant 4}$. Consideremos $\chi : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{T}$ un homomorfismo tal que $\chi\left[\left\{\phi^j : j < m\right\}\right] \subseteq \{0 + \mathbb{Z}\}$ y $\chi(\phi) = t + \mathbb{Z}$ donde $\|t + \mathbb{Z}\| > \frac{1}{4}$. Este homomorfismo existe porque $\phi \notin \left\langle \left\{\phi^j : j < m\right\} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$.

Consideremos ϵ tal que $0 < \epsilon < \frac{1}{m}$ donde $m = \max(\{m_j : j < m\} \cup \{4\})$ y

$$\epsilon < \min\left\{\left\|\chi(\phi) - \left(\frac{1}{4} + \mathbb{Z}\right)\right\|, \left\|\chi(\phi) - \left(\frac{3}{4} + \mathbb{Z}\right)\right\|\right\}$$

Por el teorema E. Hewitt y S. Zuckerman 1.7.3 existe $g \in Hom_C(Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}), \mathbb{T}) \cong \mathbb{G}$ tal que $\|\chi(\phi) - \phi(g)\| = \|\chi(\phi) - g(\phi)\| < \epsilon$ y $\left\|\chi\left(\phi^j\right) - \phi^j(g)\right\| = \left\|\chi\left(\phi^j\right) - g\left(\phi^j\right)\right\| < \epsilon$ para toda $j < m$. Por lo tanto $\|\phi(g)\| > \frac{1}{4}$ y $\left\|\phi^j(g)\right\| < \frac{1}{m_j}$ para cada $j \leq m$. Por lo tanto $g \in U^*_{\phi,4} \cap \bigcap_{j<m} U_{\phi^j, m_j}$.

$\Longleftarrow\rfloor$ Supongamos que $\phi \in \left\langle \left\{ \phi^j : j < m \right\} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$ y $U^*_{\phi,4} \cap \bigcap_{j<m} U_{\phi^j,m_j} \neq \emptyset$ para cualesquiera

$$\langle m_j : j < m \rangle \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant 4}.$$

Por hipótesis, existen $\langle n_j : j < m \rangle \subseteq \mathbb{Z}^+$ tales que $\phi = \sum_{j<m} n_j \phi^j$. Consideremos $m > 4 \cdot n_1 \cdot ... \cdot n_{m-1}$, aplicando la hipótesis, existe $g \in U^*_{\phi,4} \cap \bigcap_{j<m} U_{\phi^j,m}$ pero esto es imposible ya que $\|\phi(g)\| = \left\| \sum_{j<m} n_j \phi^j(g) \right\| < \sum_{j<m} \frac{n_j}{m} \leq \frac{1}{4}$. □

TEOREMA 2.2.3. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable. Entonces existe $p \in \omega^*$ tal que*

$$\left(Ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$$

tiene sucesiones convergentes no triviales.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.2.1 basta demostrar que existe una sucesión

$$\langle \phi_n : n \in \omega \rangle \subseteq Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$$

y un mapeo $H : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \omega$ tal que para toda $n \in \omega$ la familia

$$\left\{ U^*_{\phi_n,4} \right\} \cup \{ U_{\phi,m} : H(\phi, m) \leq n \}$$

es centrada.

Sea $\{\phi_\alpha : \alpha \in 2^\omega = |Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})|\}$ un conjunto independiente maximal. Consideremos

$$H : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \longrightarrow \omega$$

definida como

$$H(\phi) = \min\{n \in \omega : \exists k \in \mathbb{Z}\,(k \cdot \phi \in \langle\{\phi_i : i < n\} \cup \{\phi_\alpha : \omega \leq \alpha < 2^\omega\}\rangle_{\mathbb{Z}})\}$$

Observemos que H está bien definida porque $\{\phi_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$ es un conjunto independiente maximal. Probaremos a continuación que $\left\{U^*_{\phi_n,4}\right\} \cup \left\{U_{\phi^j,m_j} : H(\phi^j, m_j) \leq n\right\}$ es centrada para toda $n \in \omega$. Sea $n \in \omega$ y tomemos $\left\{\phi^j : j < m\right\} \subseteq H^{-1}[n+1]$, de acuerdo a la Proposición 2.2.2 es suficiente con probar que $\langle\phi_n\rangle_{\mathbb{Z}} \cap \left\langle\left\{\phi^j : j < m\right\}\right\rangle_{\mathbb{Z}} = \{0\}$. Por reducción al absurdo supongamos que hay

$$\{k\} \cup \left\{k^j : j < m\right\} \subseteq \mathbb{Z}$$

tal que $k \cdot \phi_n = \sum_{j<m} k^j \cdot \phi^j$. Dado que $H\left(\phi^j\right) \leq n$ para cada $j < m$, existen $\{n_j : j < m\} \subseteq n+1$ y $\{z_j : j < m\} \subseteq \mathbb{Z}$ tal que

$$z_j \cdot \phi^j \in \langle\{\phi_i : i < n_j\} \cup \{\phi_\alpha : \omega \leq \alpha < 2^\omega\}\rangle_{\mathbb{Z}}$$

consideremos $z = z_0 \cdot ... \cdot z_j$ y observemos que

$$z \cdot k_j \cdot \phi^j \in \langle\{\phi_i : i < n_j\} \cup \{\phi_\alpha : \omega \leq \alpha < 2^\omega\}\rangle_{\mathbb{Z}}$$

por lo tanto

$$z \cdot k \cdot \phi_n = \sum_{j<m} z \cdot k_j \cdot \phi^j \in \langle\{\phi_i : i < n\} \cup \{\phi_\alpha : \omega \leq \alpha < 2^\omega\}\rangle_{\mathbb{Z}}$$

pero esto contradice el hecho de que $\{\phi_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$ es un conjunto independiente maximal. Por consiguiente $\langle\phi_n\rangle_{\mathbb{Z}} \cap \left\langle\left\{\phi^j : j < m\right\}\right\rangle_{\mathbb{Z}} = \{0\}$, usando la Proposición 2.2.2 $U^*_{\phi_n,4} \cap \bigcap_{j<m} U_{\phi^j,m_j} \neq \emptyset$. Sea $a \in U^*_{\phi_n,4} \cap \bigcap_{j<m} U_{\phi^j,m_j}$ y $M \in \omega$ tal que $\left\|\phi_n(a) + \frac{1}{M}\right\| > \frac{1}{4}$ y $\left\|\phi^j(a) + \frac{1}{M}\right\| < \frac{1}{m_j}$ para toda $j < m$. Consideremos $K = U_{\phi_n,M} \cap \bigcap_{j<m} U_{\phi^j,M}$. Dado que la topología de Bohr no es discreta y $0_{\mathbb{G}} \in K$

entonces K es un conjunto infinito, lo que implica que $a+K$ también es un conjunto infinito y notemos que $a+K \subseteq U^*_{\phi_n,4} \cap \bigcap_{j<m} U_{\phi^j,m_j}$. Así hemos probado que $\left\{U^*_{\phi_n,4}\right\} \cup \left\{U_{\phi^j,m_j} : H(\phi^j, m_j) \leq n\right\}$ es una familia centrada para cada $n \in \omega$. Aplicando la Proposición 2.2.1 concluimos que $\left(Ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ tiene sucesiones convergentes no triviales. □

2.3. Filtros sin la propiedad de Baire

En esta sección estudiaremos el caso cuando el grupo $\mathbb{G}$ es el grupo Booleno $[\omega]^{<\omega}$. Aplicando el Lema 2.2.1 relativizado al grupo Booleano $\mathbb{G} = [\omega]^{<\omega}$ se obtiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) Existe un ultrafiltro $p \in \omega^*$ tal que $\left(Ult^{\omega_1}_p([\omega]^{<\omega}), \tau_{\overline{\text{Bohr}}}\right)$ tiene una sucesión convergente no trivial.

2) Existe una sucesión $\langle \phi_n \colon n \in \omega \rangle \subset \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ y un mapeo $H \colon \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$ tal que para cualquier $n \in \omega$ la familia $\mathbb{U}_n = \{U^*_{\phi_n}\} \cup \{U_\phi \colon H(\phi) \leqslant n\}$ es centrada, donde $U_\phi = \text{Ker}(\phi)$ y $U^*_\phi = [\omega]^{<\omega} \setminus \text{Ker}(\phi)$.

3) Existe una sucesión $\langle \phi_n \colon n \in \omega \rangle \subset \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ y un mapeo $H \colon \text{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$ tal que la colección $\mathbb{A} = \bigcup_{n\in\omega}\{A^*_{\phi_n,n}\} \cup \{A_{\phi,n} \colon H(\phi) \leqslant n\}$ forma una familia centrada, donde $A_{\phi,n} = \{k \in \omega \colon \phi(f_n(k)) = 0\}$, $A^*_{\phi,n} = \{k \in \omega \colon \phi(f_n(k)) = 1\}$ para toda $\phi \in \text{Hom}(\mathbb{G}, 2)$ y $n \in \omega$; y $\langle f_n \colon n \in \omega \rangle \subset ([\omega]^{<\omega})^\omega$ satisface que para cada $F \in [\omega]^{<\omega}$ y $\sigma \colon F \to [\omega]^{<\omega}$ existe $k \in \omega$ tal que $f_i(k) = \sigma(i)$ para toda $i \in F$.

En esta sección, probaremos que el mapeo H no es Baire medible y que cualquier filtro $\mathcal{F}$ que contenga a la familia $\mathbb{A}$ no tiene la propiedad de Baire.

Lema 2.3.1. *Sea $H_n \colon Hom([\omega]^{<\omega}, 2) \to \mathcal{P}(\omega)$ definida como $H_n(\phi) = A_{\phi,n}$ para toda $\phi \in Hom([\omega]^{<\omega}, 2)$. H_n es una función continua para cada $n \in \omega$.*

Demostración. Sea $n, m \in \omega$ y $\phi \in Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right)$. Consideremos $s = (\chi_{A^0_{\phi,n}}) \restriction_m \in 2^m$, donde $\chi_{A_{\phi,n}}$ denota la función característica de $A_{\phi,n}$, y el conjunto finito

$$F_m = \{f_n(k) : k \in m\} \in \left([\omega]^{<\omega}\right)^{<\omega}.$$

Por consiguiente,

$$(H_n)^{-1}[s] = \left\{\psi \in Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right) : \forall x \in F_m\left(\psi(x) = \phi(x)\right)\right\}$$

es un conjunto abierto. □

Para demostrar los siguientes teoremas ocuparemos de un teorema muy importante en la teoría descriptiva que enunciaremos a continuación.

Teorema 2.3.2. *(Teorema de Pettis, Teorema 9.9* **[16]***) Sea G un grupo topológico, Si $A \subseteq G$ tiene la propiedad de Baire y no es magro, entonces $AA^{-1} = \{xy^{-1} : x, y \in A\}$ contiene una vecindad abierta del elemento neutro.*

Demostración. La demostración se puede consultar en el Teorema 9.9 en **[16]** □

Teorema 2.3.3. *Sea $\langle \phi_n : n \in \omega\rangle \subset Hom([\omega]^{<\omega}, 2)$ una sucesión y un mapeo $H : Hom([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$ tal que para cada $n \in \omega$ la familia $\mathbb{U}_n = \{U^*_{\phi_n}\} \cup \{U_\phi : H(\phi) \leqslant n\}$ es centrada. Entonces H no es Baire medible.*

Demostración. Sea $n \in \omega$. Dado que $\mathbb{U}_n$ es centrada, si $\{\phi_j : j < m\} \subset H^{-1}[n+1]$ entonces $\bigcap_{j<m} U_{\phi_j} \cap U^*_{\phi_n} \neq \emptyset$. Aplicando la Proposición 2.2.2, $\phi_n \notin \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\{\phi_i : i < n\})$; por consiguiente $\phi_n \notin H^{-1}[n+1]$. En particular, $n < H(\phi_n)$.

Sea $\mathbb{H}_n = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(H^{-1}[n+1])$ y $A_n = H^{-1}[n+1]$. Dado que $n < H(\phi_n)$, nosotros podemos definir recursivamente una sucesión estrictamente creciente $\langle n_i : i \in \omega\rangle$ donde $n_0 = H(\phi_0)$ y $n_i = H\left(\phi_{n_{i-1}}\right)$

para toda $i > 0$. Por lo anterior, $\phi_{n_i} \in \mathbb{H}_{n_{i+1}} \setminus \mathbb{H}_{n_i}$; así que, $\langle \mathbb{H}_{n_i} : i < \omega \rangle$ es una sucesión creciente de subgrupos de $\mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ tal que $Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right) = \bigcup_{i\in\omega} A_{n_i} = \bigcup_{i\in\omega} \mathbb{H}_{n_i}$.

Con la finalidad de encontrar una contradicción, supongamos que H es Baire medible; por consiguiente, A_{n_i} tiene la propiedad de Baire para toda $i < \omega$. Dado que $Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right)$ es un espacio de Baire, existe $i_0 \in \omega$ tal que $A_{n_{i_0}}$ es no magro. Aplicando el teorema de Pettis 2.3.2, $A_{n_{i_0}} - A_{n_{i_0}}$ contiene una vecindad abierta del elemento neutro. Dado que $A_{n_{i_0}} - A_{n_{i_0}} \subseteq \mathbb{H}_{n_{i_0}}$, $\mathbb{H}_{n_{i_0}}$ es un subgrupo que contiene una vecindad abierta del elemento neutro; lo que implica que $\mathbb{H}_{n_{i_0}}$ es un conjunto abierto. Por lo tanto, $\langle \mathbb{H}_{n_i} : i \geq i_0 \rangle$ es una cubierta abierta infinita del grupo compacto $Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right)$ sin subcubierta finita; lo que es una contradicción. Por lo tanto H no es Baire medible. □

Siguiendo la misma idea de la demostración anterior obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.4. *Sea* $\langle \phi_n : n \in \omega \rangle \subset Hom([\omega]^{<\omega}, 2)$ *una sucesión y un mapeo* $H : Hom([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$ *tal que la colección*

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n\in\omega} \{A^*_{\phi_n,n}\} \cup \{A_{\phi,n} : H(\phi) \leqslant n\}$$

forma una familia centrada que genera un filtro libre. Si $\mathcal{F}$ *es un filtro que contiene a la familia* $\mathbb{A}$ *entonces* $\mathcal{F}$ *no tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Sea $W_n = Span_{\mathbb{Z}}\left\{(H_n)^{-1}[\mathcal{F}]\right\}$ un subgrupo de $Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right)$.

Afirmación 2.3.5. *Si* $\phi \in W_n$ *entonces* $A_{\phi,n} \in \mathcal{F}$. *Por lo tanto* $W_n = (H_n)^{-1}[\mathcal{F}]$.

Demostración. Si $\phi \in W_n$, existe $\left\{\phi^j : j < m\right\} \subseteq (H_n)^{-1}[\mathcal{F}]$ tal que $\phi = \sum_{j<m} \phi^j$. Dado que $\left\{\phi^j : j < m\right\} \subseteq (H_n)^{-1}[\mathcal{F}]$, $\left\{A_{\phi^j,n} : j < m\right\} \subseteq \mathcal{F}$; por lo tanto $\bigcap_{j<m} A_{\phi^j,n} \in \mathcal{F}$. Ahora, probaremos que $\bigcap_{j<m} A_{\phi^j,n} \subseteq A_{\phi,n}$. Si $k \in \bigcap_{j<m} A_{\phi^j,n}$, $\phi^j(f_n(k)) = 0$ para cada $j < m$; Así que, $\phi(f_n(k)) =$

$\sum_{j<m} \phi^j (f_n(k)) = 0$. Por lo tanto $\bigcap_{j<m} A_{\phi^j,n} \subseteq A_{\phi,n}$. Dado que $\mathcal{F}$ es un filtro, $A_{\phi,n} \in \mathcal{F}$. Entonces, $\phi \in (H_n)^{-1}[\mathcal{F}]$. □

Afirmación 2.3.6. *Las siguientes oraciones son verdaderas:*

a) $n < H(\phi_n)$ *para cada* $n \in \omega$

b) $H^{-1}[n+1] \subseteq W_n$

c) $\phi_n \notin W_n$ *para cada* $n \in \omega$

Demostración. a) Sea $n \in \omega$ y supongamos que $H(\phi_n) \leq n$. Dado que $\mathbb{A}$ es una familia centrada, $A^*_{\phi_n,n} \cap A_{\phi_n,n} \neq \emptyset$ pero esto es imposible. Así que, $n < H(\phi_n)$.

b) Note que

$$H_n\left[H^{-1}[n+1]\right] = \{A_{\phi,n} : H(\phi) \leq n\} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathcal{F}.$$

Así que, $H^{-1}[n+1] \subseteq W_n$

c) Supongamos por reducción al absurdo que existe $n \in \omega$ tal que $\phi_n \in W_n$. Aplicando la Afirmación 2.3.5, $A_{\phi_n,n} \in \mathcal{F}$. Pero $A^*_{\phi_n,n} \in \mathbb{A} \subseteq \mathcal{F}$ y $\emptyset = A^*_{\phi_n,n} \cap A_{\phi_n,n} \in \mathcal{F}$, lo que es una contradicción. □

Para cada $n \in \omega$, sea $\mathbb{H}_n = \bigcap_{m \geq n} W_m$ un subgrupo de $Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right)$. Definimos recursivamente una sucesión estrictamente creciente $\langle n_i : i \in \omega \rangle$ donde $n_0 = H(\phi_0)$ y $n_i = H\left(\phi_{n_{i-1}}\right)$ para toda $i > 0$. Aplicando la Afirmación 2.3.6 *a*), la sucesión $\langle n_i : i \in \omega \rangle$ es estrictamente creciente. Aplicando la Afirmación 2.3.6 y la definición $\mathbb{H}_n$ obtenemos que los siguientes enunciados son verdaderos:

I) $\phi_0 \in \bigcap_{n \geq n_0} H^{-1}[n+1] \subseteq \bigcap_{n \geq n_0} W_n = \mathbb{H}_{n_0}$ y $\phi_0 \notin \mathbb{H}_0$.

II) Si $i \in \omega$, $\phi_{n_i} \in \bigcap_{n \geq n_{i+1}} H^{-1}[n+1] \subseteq \bigcap_{n \geq n_{i+1}} W_n = \mathbb{H}_{n_{i+1}}$ y $\phi_{n_i} \notin \mathbb{H}_{n_i}$

Por lo tanto, $\langle \mathbb{H}_{n_i} : i \in \omega \rangle$ es una $\subseteq$-sucesión estrictamente creciente de subgrupos de $Hom([\omega]^{<\omega}, 2)$.

Afirmación 2.3.7. $Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right) = \bigcup_{i \in \omega} \mathbb{H}_{n_i}$

DEMOSTRACIÓN. Si $\phi \in Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right)$, existe $i \in \omega$ tal que $H(\phi) \leq n_i$. Así que, $\phi \in \bigcap_{n \geq n_i} H^{-1}[n+1] \subseteq W_n = \mathbb{H}_{n_i}$ □

Con la finalidad de obtener una contradicción, supongamos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Baire. Dado que H_n es una función continua, H_n es Baire medible. Así que, $W_n = (H_n)^{-1}[\mathcal{F}]$ y $\mathbb{H}_n = \bigcap_{m \geq n} W_m$ tiene la propiedad de Baire para cada $n \in \omega$. Por otra parte, dado que $Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right)$ es un espacio de Baire y aplicando la Afirmación 2.3.7 , existe $i_0 \in \omega$ tal que $\mathbb{H}_{n_{i_0}}$ es no magro. Aplicando el teorema de Pettis 2.3.2, $\mathbb{H}_{n_{i_0}}$ contiene una vecindad abierta del elemento neutro. Dado que $\mathbb{H}_{n_{i_0}}$ es un subgrupo y contiene una vecindad abierta del elemento neutro, $\mathbb{H}_{n_{i_0}}$ es un conjunto cerrado y abierto. Por lo tanto, $\langle \mathbb{H}_{n_i} : i \geq i_0 \rangle$ es una cubierta abierta infinita del grupo compacto $Hom\left([\omega]^{<\omega}, 2\right)$ sin subcubierta finita; lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de Baire. □

2.4. Sucesiones no convergentes en la ultrapotencia

En la presente sección demostraremos que si p es un ultrafiltro selectivo, las sucesiones debilmente independientes no son convergentes en $\left\langle ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}} \right\rangle$.

Recordemos que el teorema de L. S. Pontryagin y E. van Kampen nos dice que si G es discreto o compacto entonces G y G^{**} son isomorfos como grupos y como espacios topológicos; en particular el mapeo evaluación $\psi : G \longrightarrow G^{**}$ definido como $\psi(g)(\chi) = \chi(g)$ nos da el isomorfismo. Denotaremos por $\dot{g}$ a $\psi(g)$ y por $S = \overline{Hom}(ult_p(\mathbb{G}), \mathbb{T})$, $\Sigma = \left\{ [\dot{f}] \restriction_S : [f] \in ult_p(\mathbb{G}) \right\}$, $\dot{\mathbb{G}} = \{\dot{g} : Hom(ult_p(\mathbb{G}), \mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{T} : g \in \mathbb{G}\}$ y $\dot{\mathbb{G}} \restriction_S = \{\dot{g} \restriction_S : g \in \mathbb{G}\}$.

Notemos que $\dot{\mathbb{G}} \restriction_S \cong \mathbb{G}$. Esto es claro ya que por el teorema de dualidad de Pontryagin sabemos que

$$\mathbb{G} \cong \mathbb{G}^{**} = Hom(Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}), \mathbb{T}) = Hom(\{\phi \restriction_G : \phi \in S\}, \mathbb{T}) = \dot{\mathbb{G}} \restriction_S$$

por lo que sin perdida de generalidad podemos suponer que $\dot{\mathbb{G}} \restriction_S = \mathbb{G}$.

DEFINICIÓN 2.4.1. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo y $G \leqslant \mathbb{G}$. Decimos que $\{g_n : n \in \omega\}$ es* débilmente independiente sobre G *si $g_{n+1} \notin \langle G \cup \{g_i : i \leq n\}\rangle_{\mathbb{G}}$ para toda $n \in \omega$.*

LEMA 2.4.2. *Sea $p \in \omega^*$, $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano, $\langle g_n : n \in \omega\rangle \subseteq \mathbb{G}$, $G \leqslant \mathbb{G}$ y $\phi \in Hom(G, \mathbb{T})$. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

I) Si $\langle g_n : n \in \omega\rangle$ es un conjunto débilmente independiente sobre G, entonces existe $\psi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ tal que $\phi \subseteq \psi$ y $\|\psi(g_n)\| \geq \frac{1}{4}$ para toda $n \in \omega$.

II) Si $\langle g_n : n \in \omega\rangle$ es un conjunto débilmente independiente sobre G y $A, B \in [\omega]^{\omega}$ son tales que $A \sqcup B = \omega$, entonces existe $\psi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ tal que $\phi \subseteq \psi$, $\psi(g_n) = 0$ para toda $n \in A$ y $\|\psi(g_n)\| \geq \frac{1}{4}$ para toda $n \in B$.

DEMOSTRACIÓN. *I*) Definimos ψ de la siguiente manera: $\psi \restriction_G = \phi$ y

a) $\psi(g_n) = \frac{1}{2}$ si no existe $k \in \omega^+$ tal que $k \cdot g_n \in \langle G \cup \{g_i : i < n\}\rangle_{\mathbb{G}}$ (observe que esto implica que el orden de g_n es infinito).

b) $\psi(g_n) = \frac{l}{k} + \frac{\psi(k\cdot g_n)}{k}$, donde $\left\| \frac{l}{k} + \frac{\psi(k\cdot g_n)}{k} \right\| \geq \frac{1}{4}$, $l < k$ y escogemos

$$k = \min\{k \geq 2 : k \cdot g_n \in \langle G \cup \{g_i : i < n\}\rangle_{\mathbb{G}}\}$$

Para el resto de elementos de $\mathbb{G}$ el homormorfismo se puede extender ya que $\mathbb{T}$ es divisible y $\mathbb{G}$ es un grupo Abeliano.

II) Definimos ψ de la siguiente manera: $\psi \restriction_G = \phi$ y

a) si $n \in B$ entonces procedemos según el caso *I*)

b) si $n \in A$ entonces definimos $\psi(g_n) = 0$

Para el resto de elementos de $\mathbb{G}$ el homormorfismo se puede extender ya que $\mathbb{T}$ es divisible y $\mathbb{G}$ es un grupo Abeliano. □

PROPOSICIÓN 2.4.3. *Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable, $p \in \omega^*$ selectivo y $\langle [f_i] : i \in \omega \rangle \subseteq ult_p(\mathbb{G})$. Si $\left\{ [\dot{f}_i] \restriction_S : i \in \omega \right\}$ es un conjunto débilmente independiente con respecto a $\mathbb{G}$ entonces existe $\psi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ tal que $\left\| \overline{\psi} ([f_i]) \right\| \geq \frac{1}{8}$ para toda $i \in \omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin perdida de generalidad supongamos que la enumeración que muestra que $\left\{ [\dot{f}_i] \restriction_S : i \in \omega \right\}$ es débilmente independiente con respecto a $\mathbb{G}$ es la dada. Por el Lema 2.4.2 podemos encontrar $\phi_0 \in Hom(\Sigma, \mathbb{T})$ tal que $\phi_0 [\mathbb{G}] = \{0\}$ y $\left\| \phi_0 \left([\dot{f}_i] \restriction_S \right) \right\| \geq \frac{1}{4}$ para toda $i \in \omega$.

Construiremos a continuación un árbol $T \subseteq \omega^{<\omega}$ de ramificación en p, $\langle I_t : t \in T \rangle$ una familia de cerrados del grupo dual $\mathbb{G}^*$ y $\{\phi_t : t \in T\} \subseteq Hom(\Sigma, \mathbb{T})$ tal que:

1. $I_\emptyset = \mathbb{G}^*$ y $\phi_\emptyset = \phi_0$.
2. Si $t \subseteq s$ entonces $I_s \subseteq I_t$.
3. $\left\| \phi_t \left([\dot{f}_i] \restriction_S \right) \right\| \geq \frac{1}{4}$ para toda $i \in \omega$
4. $\phi_t \in int(I_t)$.
5. Para cada $t \in T_n$, con $n > 0$, y $\chi \in I_t$, $\|\chi (f_i (t(n-1)))\| > \frac{1}{8}$ para toda $i < n$.

Supongamos por inducción que hemos construido T_n, $\langle I_t : t \in T_n \rangle$ y $\langle \phi_t : t \in T_n \rangle$ con $n \in \omega$. Sea $t \in T_n$. Como $\mathbb{G}^* \leqslant \mathbb{T}^{\mathbb{G}}$ y $\phi_t \in int(I_t)$ existen $\{g_j : j \leq l\} \subseteq \mathbb{G}$ y $\epsilon_t > 0$ tal que $\bigcap_{i \leq l} \pi_{g_j}^{-1} [B(\phi_t(g_j), \epsilon_t)] \subseteq I_t$ donde $\pi_g : \mathbb{T}^{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathbb{T}$ es la proyección canónica en el factor g. Aplicando el teorema de E. Hewitt y S. Zuckerman, con S, Σ, $\{g_j : j \leq l\} \cup \left\{ [\dot{f}_i] \restriction_{\mathcal{S}} : i \leq n \right\} \subseteq \Sigma$, $\epsilon = \min \left\{ \left\| \phi_t \left([\dot{f}_i] \restriction_{\mathcal{S}} \right) - \frac{1}{8} \right\|, \epsilon_t : i \leq n \right\}$ y $\chi = \phi_t$, entonces existe $\varphi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ tal que para cada $i \leq n$ y $j \leq l$

$$\left\| \overline{\varphi} \left([\dot{f}_i] \restriction_{\mathcal{S}} \right) - \phi_t \left([\dot{f}_i] \restriction_{\mathcal{S}} \right) \right\| = \left\| [\dot{f}_i] \restriction_{\mathcal{S}} (\overline{\varphi}) - \chi \left([\dot{f}_i] \restriction_{\mathcal{S}} \right) \right\| < \epsilon \leq \left\| \phi_t \left([\dot{f}_i] \restriction_{\mathcal{S}} \right) - \frac{1}{8} \right\|$$

y

$$\|\overline{\varphi}(g_j) - \phi_t(g_j)\| = \|\dot{g_j} \restriction_{\mathcal{S}} (\overline{\varphi}) - \chi(g_j)\| < \epsilon \leq \epsilon_t$$

en particular, $\left\{k \in \omega : \|\varphi(f_i(k))\| > \frac{1}{8}\right\} \in p$ para cada $i \leq n$. Definimos

$$succ(t) = \bigcap_{i \leq n} \left\{k \in \omega : \|\varphi(f_i(k))\| > \frac{1}{8}\right\} \in p$$

Por el Lema 2.4.2 para toda $k \in succ(t)$ podemos encontrar $\phi_{t^\frown k} \in Hom(\Sigma, \mathbb{T})$ tal que $\phi_{t^\frown k} \restriction_{\mathbb{G}} = \varphi$ y $\left\|\phi_{t^\frown k}\left([\dot{f}_i] \restriction_{\mathcal{S}}\right)\right\| \geq \frac{1}{4}$ para toda $i \in \omega$. Observemos que para toda $k \in succ(t)$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $i \leq n$ y $j \leq l$ si $r \in \overline{B}(\varphi(f_i(k)), \delta)$ y $s \in \overline{B}(\varphi(g_j), \delta)$ entonces $\|r\| > \frac{1}{8}$ y $\|s - \phi_t(g_j)\| < \epsilon_t$. Por la dualidad de Pontryagin $\{f_i(k) : i \leq n\} \cup \{g_j : j \leq l\} \subseteq \mathbb{G}^{**}$, es decir se pueden ver como funciones continuas; por consiguiente para toda $k \in succ(t)$ definimos

$$I_{t^\frown k} = \bigcap_{i \leq n} f_i(k)^{-1}\left[\overline{B}(\varphi(f_i(k)), \delta)\right] \cap \bigcap_{j \leq l} g_j{}^{-1}\left[\overline{B}(\varphi(g_j), \delta)\right]$$

Observemos que $I_{t^\frown k} \subseteq I_t$, $\phi_{t^\frown k} \restriction_{\mathbb{G}} = \varphi \in int(I_{t^\frown k})$ y si $\chi \in I_{t^\frown k}$ entonces $\|\chi(f_i(t(n-1)))\| > \frac{1}{8}$ para toda $i \leq n$. Esto finaliza la recursión.

Como T es un árbol de ramificación en p y p es un ultrafiltro selectivo, existe $f \in \omega^\omega$ tal que $f[\omega] \in p$. Dado que $\{I_{f\restriction_n} : n \in \omega\}$ es una familia decreciente de cerrados sobre el espacio compacto $\mathbb{G}^*$, existe $\psi \in \bigcap_{n\in\omega} I_{f\restriction_n}$. Por la propiedad 5, tenemos que para cada $n > i$ $\|\psi(f_i(f \restriction_n (n-1)))\| > \frac{1}{8}$ como $f[\omega] \in p$ entonces $\left\|\overline{\psi}([f_i])\right\| \geq \frac{1}{8}$. □

Conclusiones

En este trabajo hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 2.2.3. Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable. Entonces existe $p \in \omega^*$ tal que

$$\left(Ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$$

tiene sucesiones convergentes no triviales.

Para lograr el resultado anterior, primero demostramos la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1: Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable con elemento neutro $0_{\mathbb{G}}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

I) Existe $p \in \omega^*$ tal que $\left(Ult_p(\mathbb{G}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ tiene una sucesión convergente no trivial.

II) Existe una sucesión $\langle \phi_n : n \in \omega \rangle \subseteq Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y un mapeo $H : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \omega$ tal que para toda $n \in \omega$ la familia $\left\{U^*_{\phi_n,4}\right\} \cup \{U_{\phi,m} : H(\phi, m) \leq n\}$ es centrada.

III) Existe una sucesión $\langle \phi_n : n \in \omega \rangle \subseteq Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ y un mapeo $H : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \omega$ tal que la colección $\mathbb{A} = \bigcup_{n\in\omega} \left\{A^*_{\phi_n,4,n}\right\} \cup \{A_{\phi,m,n} : H(\phi, m) \leq n\}$ es centrada.

Gracias a esta proposición pudimos observar y demostrar los siguientes teoremas

Teorema 2.3.3: Sea $\langle \phi_n : n \in \omega \rangle \subset \mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ una sucesión y un mapeo $H : \mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$ tal que para cada $n \in \omega$ la familia $\mathbb{U}_n = \{U^*_{\phi_n}\} \cup \{U_\phi : H(\phi) \leqslant n\}$ es centrada. Entonces H no es Baire medible.

Teorema 2.3.4: Sea $\langle \phi_n \colon n \in \omega \rangle \subset \mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2)$ una sucesión y un mapeo $H \colon \mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$ tal que la colección

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \omega} \{A^*_{\phi_n, n}\} \cup \{A_{\phi, n} \colon H(\phi) \leqslant n\}$$

forma una familia centrada que genera un filtro libre. Si $\mathcal{F}$ es un filtro que contiene a la familia $\mathbb{A}$ entonces $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de Baire.

Como se puede observar estos dos teoremas anteriores están relativizados al grupo Booleano $[\omega]^{<\omega}$, por lo que queda pendiente demostrar los mismos resultados generalizándolos a todo grupo Abeliano $\mathbb{G}$. Sin embargo, al buscar generalizarlos a todo grupo Abeliano la función H se vuelve más compleja, ya que en el caso general $H : Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T}) \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \omega$ y en el caso particular del grupo Booleano $H \colon \mathrm{Hom}([\omega]^{<\omega}, 2) \to \omega$.

En **[15]** los autores demostraron que si $p \in \omega^*$ es selectivo entonces $\left(Ult_p^{\omega_1}\left([\omega]^{<\omega}\right), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ es un grupo topológico p-compacto sin sucesiones convergentes no triviales. Generalizar este teorema a todo grupo Abeliano sigue siendo una tarea pendiente. En esta tesis demostramos la siguiente proposición:

Proposición 2.4.3: Sea $\mathbb{G}$ un grupo Abeliano numerable, $p \in \omega^*$ selectivo y $\langle [f_i] : i \in \omega \rangle \subseteq ult_p(\mathbb{G})$. Si $\left\{ [\dot{f}_i] \restriction_S \colon i \in \omega \right\}$ es un conjunto débilmente independiente con respecto a $\mathbb{G}$ entonces existe $\psi \in Hom(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ tal que $\left\| \overline{\psi}\left([f_i]\right) \right\| \geq \frac{1}{8}$ para toda $i \in \omega$.

Esta proposición nos indica que si queremos demostrar la versión general se tendrá que demostrar el caso cuando la sucesión $\langle [f_i] : i \in \omega \rangle$ esté contenida en el generado de $\langle \mathbb{G} \cup F \rangle$ con F un conjunto finito de elementos en la ultrapotencia $ult_p(\mathbb{G})$. Adicionalmente, se puede utilizar como hipótesis que la sucesión sea p-separada; ya que se busca demostrar que $Ult_p(\mathbb{G})$ es sin sucesiones convergentes no triviales. Considero, desde mi punto de vista, que hace falta encontrar una relación entre ser una sucesión p-separada y tener alguna estructura algebraica en $ult_p(\mathbb{G})$. En el caso del grupo Booleano $[\omega]^{<\omega}$ se tiene la ventaja de que también tienen una estructura de espacio vectorial, en particular

fue el concepto de independencia lineal lo que les permitió a los autores en **[15]** poder iterar esta propiedad en los distintos niveles de la ultrapotencia iterada $ult_p^{\omega_1}\left([\omega]^{<\omega}\right)$. Ejemplo de esto es la siguiente proposición que se demuestra en **[15]** (Proposición 3.12)

Proposición: Sea $p \in \omega^*$ un ultrafiltro. Entonces:

(1) p es Q-punto si y sólo si para cualquier función finito a uno $f\colon \omega \to [\omega]^{<\omega}$ existe $U \in p$ tal que $f \restriction_U$ es linealmente independiente.

(2) Los siguientes enunciados son equivalentes:

   (a) p es selectivo;

   (b) para cualquier función $f\colon \omega \to [\omega]^{<\omega}$ que no es constante en un elemento de p existe $U \in p$ tal que $f \restriction_U$ es linealmente independiente;

   (c) Para cualquier conjunto p-independiente $\{f_n\colon n \in \omega\}$ de funciones $f_n\colon \omega \to [\omega]^{<\omega}$, existe $U \in p$ y una función $g\colon \omega \to \omega$ tal que $f \restriction_{U \setminus g(n)}$ es uno a uno para toda $n \in \omega$, $f_n[U \setminus g(n)] \cap f_m[U \setminus g(m)] = \varnothing$ si $n \neq m$, y

$$\bigsqcup_{n\in\omega} f_n[U \setminus g(n)]$$

   es linealmente independiente.

Por otra parte, cabe señalar que esta Proposición 2.4.3 está alineada a la búsqueda de contestar de forma negativa la siguiente pregunta:

Pregunta (5.7 en **[15]**): Asumiendo que $p \in \omega^*$ es un ultrafiltro selectivo. ¿La ultrapotencia

$$\left(Ult_p^{\omega_1}(\mathbb{Z}), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$$

tiene sucesiones convergentes no triviales?

En el artículo [**15**] también se enuncian otras preguntas que siguen quedando abiertas, que incluiremos aquí ya que estas son relevantes porque pueden marcar el curso de futuras investigaciones.

Pregunta (5.1 en [**15**]): ¿Existe en ZFC un grupo topológico Haussdorff p-compacto sin sucesiones convergentes no triviales?

En [**15**] los autores demostraron que existe en ZFC un grupo topológico Haussdorff numerablemente compacto sin sucesiones convergentes no triviales, lo que contesta la pregunta de E. K. van Douwen. Así, la Pregunta 5.1 del citado trabajo es una nueva versión más fuerte de la pregunta de E. K. van Douwen.

Pregunta (5.2 en [**15**]): ¿La existencia de un ultrafiltro $p \in \omega^*$ tal que la ultrapotencia

$$\left(Ult_p^{\omega_1}\left([\omega]^{<\omega}\right), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$$

es sin sucesiones convergentes no triviales es equivalente a que exista un ultrafiltro selectivo?

Recordemos que en el articulo [**15**] se demuestra que si $p \in \omega^*$ es un ultrafiltro selectivo entonces la ultrapotencia $\left(Ult_p^{\omega_1}\left([\omega]^{<\omega}\right), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ es sin sucesiones convergentes no triviales, por lo que la Pregunta 5.2 es una cuestión sobre el converso de la implicación.

Pregunta (5.3 en [**15**]): ¿Es consistente con ZFC que la ultrapotencia $\left(Ult_p^{\omega_1}\left([\omega]^{<\omega}\right), \tau_{\overline{Bohr}}\right)$ contenga una sucesión convergente no trivial para todo ultrafiltro $p \in \omega^*$?

Pregunta (5.4 en [**15**]): ¿Es consistente con ZFC que exista un grupo topológico p-compacto sin sucesiones convergentes no triviales de tamaño $< \mathfrak{c}$?

La siguiente pregunta central de 1955 se debe a A. D. Wallace [**32**]:

Pregunta (5.5 en [**15**]): ¿Todo semigrupo numerablemente compacto cancelativo por los dos lados es un grupo?

Es bien sabido que un contraejemplo se puede construir recursivamente dentro de cualquier grupo topológico numerablemente compacto que no sea de torsión sin sucesiones convergentes no triviales [**24, 29**]. Por lo tanto:

Pregunta (5.6 en [**15**]): ¿Existe en ZFC un grupo topológico numerablemente compacto sin sucesiones convergentes que no sea de torsión?

Cabe señalar que en el artículo [**15**] se construyó un grupo topológico numerablemente compacto sin sucesiones convergentes que es Booleano, que en particular implica que el grupo es de torsión. Por lo que los autores preguntan si es posible hallar un grupo que no sea de torsión con las propiedades mencionadas. El hecho de que no se sepa hasta este momento cómo modificar (en ZFC) tal construcción para obtener un ejemplo que no sea de torsión parece algo sorprendente.

Para concluir, nos gustaría mencionar que los resultados presentados en el presente trabajo están motivados en poder continuar con el estudio iniciado en [**15**] pero llevando dicho estudio hacia un contexto más general.

Bibliografía

1. Tomek Bartoszyński and Haim Judah, *Set theory*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995, On the structure of the real line. MR 1350295 (96k:03002)
2. John Lane Bell and Alan B Slomson, *Models and ultraproducts: An introduction*, Courier Corporation, 2006.
3. Ross K. Comfort, W., *Topologies induced by groups of characters*, Fundamenta Mathematicae **55** (1964), no. 3, 283–291 (eng).
4. W. W. Comfort, S. U. Raczkowski, and F. J. Trigos-Arrieta, *Making group topologies with, and without, convergent sequences*, Appl. Gen. Topol. **7** (2006), no. 1, 109–124. MR 2284939
5. WW Comfort, *Letter to ka ross*, 1966.
6. César Corral, *Ultrapowers of topological spaces*, Topology and its Applications **272** (2020), 107063.
7. Maryvonne Daguenet-Teissier, *Ultrafiltres à la façon de Ramsey*, Trans. Amer. Math. Soc. **250** (1979), 91–120. MR 530045
8. Dikran Dikranjan, *Countably compact groups satisfying the open mapping theorem*, Topology Appl. **98** (1999), no. 1-3, 81–129, II Iberoamerican Conference on Topology and its Applications (Morelia, 1997). MR 1719996
9. Dikran Dikranjan and Dmitri Shakhmatov, *Forcing hereditarily separable compact-like group topologies on abelian groups*, Topology Appl. **151** (2005), no. 1-3, 2–54. MR 2139740
10. James Dugundji, *Topology. reprinting of the 1966 original*, 1978.
11. S. Garcia-Ferreira and A. H. Tomita, *Countably compact groups and p-limits*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **9** (2003), no. 2, 309–321. MR 2029279
12. S. Garcia-Ferreira, A. H. Tomita, and S. Watson, *Countably compact groups from a selective ultrafilter*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 3, 937–943. MR 2113947
13. Edwin Hewitt and Kenneth A Ross, *Abstract harmonic analysis: Volume i structure of topological groups integration theory group representations*, vol. 115, Springer Science & Business Media, 2012.

14. Edwin Hewitt and HS Zuckerman, *A group-theoretic method in approximation theory*, Annals of Mathematics (1950), 557–567.

15. Michael Hrušák, Jan van Mill, U Ramos-García, and Saharon Shelah, *Countably compact groups without non-trivial convergent sequences*, Transactions of the American Mathematical Society **374** (2021), no. 2, 1277–1296.

16. Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995. MR 1321597

17. Jerzy Łoś, *Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres*, Mathematical interpretation of formal systems, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955, pp. 98–113. MR 0075156

18. V. I. Malykhin and L. B. Shapiro, *Pseudocompact groups without convergent sequences*, Mat. Zametki **37** (1985), no. 1, 103–109, 139. MR 792239

19. Donald A Martin, *Borel determinacy*, Annals of Mathematics **102** (1975), no. 2, 363–371.

20. A.R.D. Mathias, *Happy families*, Annals of Mathematical Logic **12** (1977), no. 1, 59–111.

21. David Meza, *Ideals and filters on countable sets*, Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de México, 2009.

22. Mauro Nasso and Marco Forti, *Hausdorff ultrafilters*, Proceedings of the American Mathematical Society **134** (2006).

23. Ulises Ariet Ramos-García and David Valencia-Gómez, *Convergent sequences in iterated ultrapowers as p-compact groups*, Topology and its Applications **351** (2024), 108932.

24. Desmond Robbie and Sergey Svetlichny, *An answer to A. D. Wallace's question about countably compact cancellative semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), no. 1, 325–330. MR 1328373

25. MG Tkachenko, *Countably compact and pseudocompact topologies on free abelian groups*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika **34** (1990), no. 5, 68–75.

26. Mikhail Tkachenko and A. V. Arkhangelskii, *Topological groups and related structures*, (2008).

27. A. H. Tomita, *Countable compactness and finite powers of topological groups without convergent sequences*, Topology Appl. **146/147** (2005), 527–538. MR 2107169

28. A. H. Tomita and S. Watson, *Ultraproducts, p-limits and antichains on the Comfort group order*, Topology Appl. **143** (2004), no. 1-3, 147–157. MR 2080287

29. Artur H. Tomita, *The Wallace problem: a counterexample from* $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$ *and p-compactness*, Canad. Math. Bull. **39** (1996), no. 4, 486–498. MR 1426694

30. Artur Hideyuki Tomita, *On finite powers of countably compact groups*, Comment. Math. Univ. Carolin. **37** (1996), no. 3, 617–626. MR 1426926

31. Eric K. van Douwen, *The product of two countably compact topological groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980), no. 2, 417–427. MR 586725

32. A. D. Wallace, *The structure of topological semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 95–112. MR 67907

33. Giovanni Arquímides Wences Nájera, *El teorema de determinación de martin y algunas aplicaciones*, 2009.

David Valencia Gómez

CONVERGENCIA EN GRUPOS p-COMPACTOS.pdf

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega
trn:oid:::3117:409457016

Fecha de entrega
25 nov 2024, 3:42 p.m. GMT-6

Fecha de descarga
25 nov 2024, 3:46 p.m. GMT-6

Nombre de archivo
CONVERGENCIA EN GRUPOS p-COMPACTOS.pdf

Tamaño de archivo
1.0 MB

97 Páginas

28,281 Palabras

115,201 Caracteres

13% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

12% Fuentes de Internet
4% Publicaciones
0% Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

Caracteres reemplazados
860 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Posgrado conjunto en ciencias matemáticas	
Título del trabajo	Convergencia en grupos p-compactos	
	Nombre	**Correo electrónico**
Autor/es	David Valencia Gómez	1726424x@umich.mx
Director	Ulises Ariet Ramos García	ariet@matmor.unam.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Reynaldo Rojas Hernández	reynaldo.hernandez@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	**Uso (sí/no)**	**Descripción**
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	**Uso (sí/no)**	**Descripción**
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	David Valen
Lugar y fecha	Morelia Michoacan, 25 de noviembre 2024