



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ESTRUCTURA INTERNA DE LOS DIQUARKS USANDO UN
MODELO ALGEBRAICO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestra en Ciencias en el Área de
Física

PRESENTA:

María Guadalupe Morales Trejo

DIRECTOR:

Dr. Adnan Bashir

Morelia, Michoacán, Febrero 2025



*A mi mamá, quien ha dado tanto de si para que el día de hoy yo sea quien soy.
Gracias para siempre mamá.*

Resumen

En este trabajo adaptamos el modelo algebraico propuesto en el artículo “ Pseudoscalar mesons: Light front wave functions, GPDs, and PDFs” para el estudio de la estructura interna del diquark- $0_{[ud]}^+$. El modelo nos permite definir la *función de onda del frente de luz* (LFWF) en términos de $\Lambda^2(\omega)$ -una función propia del modelo- y la *amplitud de distribución partónica* (PDA), cuya estructura ya se encuentra en la literatura y sabemos tiene un comportamiento exponencial. Una vez que la LFWF está en términos de la PDA se calcula la *distribución de partones generalizada* (GPD). La importancia de la función $\Lambda^2(\omega)$ radica en que la manera en que la definimos nos permitirá resolver ciertas integrales para llegar a una expresión computable de la GPD. Posterior a tener la distribución de partones generalizada, tomamos el límite cuando $\xi = t = 0$ para llegar a la *función de distribución partónica* (PDF). Por otro lado, al integrar la GPD de -1 a 1 en x obtendremos el *factor de forma electromagnético* (FF), a partir del cuál es posible extraer información del radio de carga del diquark. Por último, el modelo también nos permite llegar a una expresión para la *densidad espectral*, que al normalizarla nos conduce al valor de la *constante de decaimiento*.

Palabras clave: *Modelo algebraico, funcion de distribución partónica, amplitud de distribución partónica, diquarks.*

Resumen

In this paper we adapt the algebraic model proposed in the article “Pseudoscalar mesons: Light front wave functions, GPDs, and PDFs” for the study of the internal structure of diquark-0+ [ud] . The model allows us to define the *light front wave function* (LFWF) in terms of $\Lambda^2(\omega)$ -a model function- and the *parton distribution amplitude* (PDA), whose structure is already found in the literature and is known to have an exponential behavior. Once the LFWF is in terms of the PDA, the *generalized parton distribution* (GPD) is calculated. The importance of the function $\Lambda^2(\omega)$ is that the way we define it will allow us to solve certain integrals to arrive at a computable expression of the GPD. After having the generalized pion distribution, we take the limit when $\xi = t = 0$ to arrive at the *parton distribution function* (PDF). On the other hand, by integrating the GPD from -1 to 1 in x we obtain the *electromagnetic form factor* (FF), from which it is possible to extract information on the charge radius of the diquark. Finally, the model also allows us to obtain an expression for *spectral densities*, which, when normalized, leads to the value of the *decay constant*.

Keywords: *Algebraic model, parton distribution function, parton distribution amplitude, diquarks.*

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Introducción	I
I Teoría de Grupos	5
1. Requerimientos Matemáticos	6
1.1. Breve repaso de teoría de grupos	7
1.1.1. Grupos de Lie	9
1.1.1.1. Principales subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$	10
1.1.1.2. Principales subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$	13
1.1.2. Álgebras de Lie	14
1.1.2.1. Álgebras de Lie relevantes	16
1.1.3. ¿Cómo se aplica a QFT?	18
1.1.3.1. Grupos de Lie operando sobre campos cuánticos	21
2. Composición de partículas	24
2.1. Hadrones: Agrupaciones de quarks	24
2.1.1. Producto $2 \otimes \bar{2}$	26
2.1.2. Producto $3 \otimes \bar{3}$	29
2.2. ¿Qué pasa con el color?	32
2.3. El diquark	33
II Estructura interna de las partículas	37
3. Describiendo los quarks perturbativamente	38
3.1. Interacción Fuerte	39
3.1.1. Resultados de la teoría	40
3.1.1.1. Reglas de Feynman para QCD	41
3.2. Experimentos de partículas	42
3.2.1. Punto de intersección	49

3.2.2. Otro experimento importante en QCD	50
3.2.3. Dispersión de Compton Profundamente Virtual	50
3.2.3.1. Distribución de partones generalizada	51
4. Estudiando los quarks de manera no perturbativa	54
4.1. Ecuaciones de Schwinger Dyson	56
4.2. Ecuaciones de Bethe-Salpeter	58
III Modelo Algebraico para el diquark	60
5. Modelo Algebraico	61
5.1. Función de Onda de Bethe-Salpeter	61
5.2. Función de onda del Frente de Luz	69
5.3. Amplitud de distribución partónica	76
5.3.1. Constante de decaimiento del diquark	77
5.3.2. Importancia de la función Λ_ω^2	78
5.4. Distribución partónica generalizada	82
5.4.1. Límite de la GPD para $\xi = 0$	91
5.5. Función de distribución partónica	91
5.6. Factor de forma electromagnético	92
5.6.1. Radio de carga electromagnético	92
5.7. Calculando la densidad espectral	92
6. Implementación Numérica	101
6.1. Analizando los límites del modelo	102
6.2. Primer modelo, tomando $P^2 = m_{0+}^2$	105
6.2.1. Factor de forma	106
6.2.1.1. Radio de carga	107
6.2.2. Densidad espectral y constante de decaimiento	110
6.2.3. Conclusiones del modelo	111
6.3. Segundo modelo, tomando $P^2 = -m_{0+}^2$	112
6.3.1. Optimizando los valores de las masas	112
6.3.2. Funciones de distribución con las masas optimizadas	117
6.3.3. Conclusiones del modelo	120
Conclusiones	121
Apéndices	123
A. Parametrización de Feynman	124
B. Programa en Python	129
Agradecimientos	145

Bibliografía

150

Introducción

ALBERTO
“El cine de mi infancia siempre huele a
pis.”

SALVADOR
Y a jazmín.

ALBERTO
Y a brisa de verano.

Dolor y gloria,
Pedro Almodóvar

La simetría ha sido un referente para el estudio de la naturaleza; podemos atribuirle especificaciones simétricas a fenómenos físicos, o se pueden derivar consecuencias de un suceso físico con base en sus propiedades simétricas. Un ejemplo de esto último es la invariancia, una característica que poseen las ecuaciones físicas, la cual nos dice que ante algún cambio concreto las ecuaciones siguen describiendo el mismo fenómeno físico. Los primeros casos del estudio de la invariancia en ecuaciones se remonta a mediados del siglo XIX, cuando el matemático alemán Gustav Jacobi desarrolló un procedimiento para llegar a las soluciones de las ecuaciones de momento usando la peculiar estrategia de aplicar transformaciones a las variables que dejan las ecuaciones de Hamilton invariantes, obteniendo una versión más sencilla de las ecuaciones, pero que describen lo mismo [1]. Este caso marcó un precedente importante en el estudio de la física, ahora se planteaba su análisis desde las propiedades de sus transformaciones.

Las matemáticas de la teoría de grupos resultaron ser una herramienta fundamental en el estudio de invariancia ante transformaciones. Los precursores en este campo fueron los matemáticos alemanes Hilbert, Weyl, Klein y la matemática Emmy Noether. Un ejemplo de este estudio son las invariancias ante transformaciones del grupo de Lie, un tema central en teoría cuántica de campos.

Aplicar simetrías al mecanismo lagrangiano resulta bastante conveniente; en este caso se observa que el lagrangiano es invariante ante transformaciones de un grupo de Lie en concreto, y al demandar su invariancia local aparecen campos de norma que permiten la interacción entre las partículas. Garantizar la invariancia del lagrangiano -garantizar su simetría- implica que las ecuaciones de movimiento derivadas a partir del lagrangiano no cambiarán al cambiar el marco de referencia, es decir, la física será igual.

Siguiendo esta última idea se tiene que el Lagrangiano que describe los campos libres de espín $\frac{1}{2}$ son invariantes ante transformaciones del grupo $U(1)$, y al demandar invariancia local aparece un nuevo término en el lagrangiano que resulta ser el responsable de la interacción entre campos de espín $\frac{1}{2}$ y campos de espín 1, este término se le conoce como un campo de norma y es justamente el campo electromagnético. Esta misma lógica funciona para el estudio de la invariancia en la fuerza débil y la fuerte, las cuales son invariantes ante transformaciones del grupo $SU(2)$ y $SU(3)$, respectivamente, y cuentan con su propio campo de norma que permite la interacción. Además, el teorema de Noether nos dice que existe una conexión directa entre una simetría en el sistema y una cantidad conservada. En el caso de la fuerza electromagnética la cantidad conservada es la carga eléctrica, en la fuerza débil es la carga de isospin y en la fuerza fuerte es la carga de color.

Ahora que ya hablamos de la relevancia que tienen las simetrías en la descripción del universo y sus implicaciones, hablaremos brevemente de la “arena” en la que se dan estas interacciones ¹. Esta “arena” en física se compone por un espacio externo, el espacio tiempo, y tres espacios internos, el espacio de carga, el espacio de isospin y el espacio de color. En la

¹Esta breve explicación de la “arena” física se tomó del libro *Physics from Finance: A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles*, [2], el cual se recomienda ampliamente revisar por la belleza de su simpleza al describir las interacciones fundamentales.

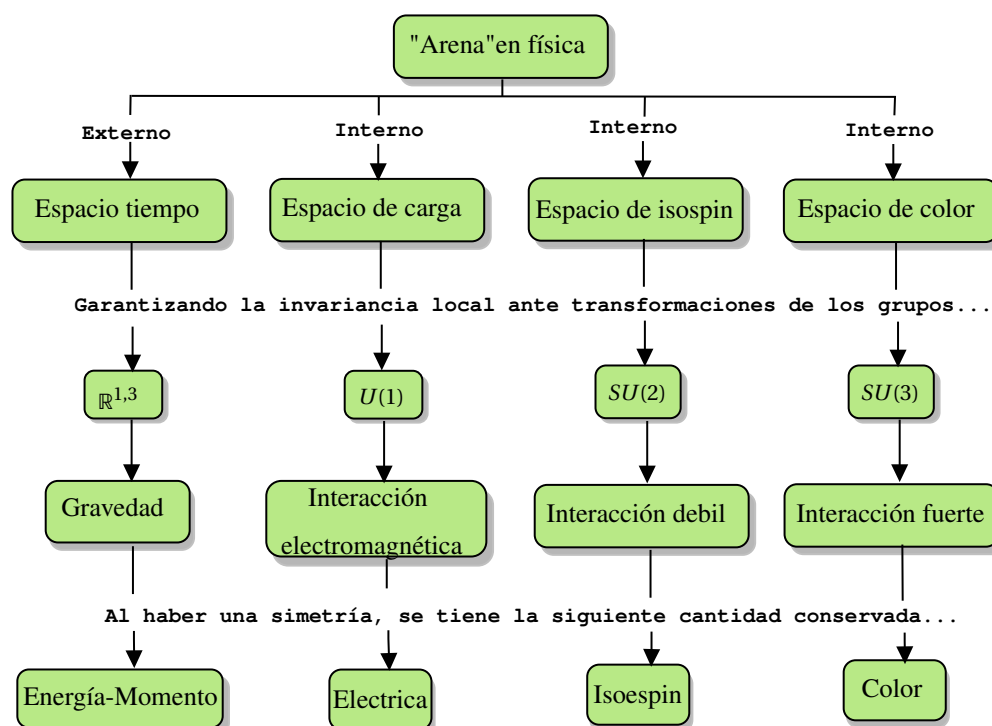


Figura 1: “Arena” física en la que se dan las interacciones entre partículas [2].

figura 1 se representa visualmente esta idea.

La teoría que describe las interacciones fuertes es conocida como la Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés), y la partícula por la cual se dan estas interacciones es el gluón. Esta teoría fue desarrollada a mediados de los 70 por David Politzer, Frank Wilczek y David Gross; es responsable, entre otras cosas, de la unión de tres quarks para formar protones y neutrones [3]. Usualmente se estudia utilizando la teoría de perturbaciones, sin embargo, la constante de acoplamiento en QCD crece a distancias grandes (bajas energías), así que la aproximación perturbativa solo es válida a distancias cortas (altas energías). No obstante, en el esquema no perturbativo suceden fenómenos físicos que requieren ser estudiados; ejemplo de esto son el rompimiento dinámico de la simetría quiral y el confinamiento de los quarks.

Una vez ya mencionada la teoría que estudia las interacciones fuertes, hablaremos un poco de los diquarks, el tema central de este trabajo de tesis. Un diquark es un estado de dos quarks agrupados dentro de un barión. Su introducción se remonta a los fundamentos del propio modelo de quarks. Tenía como propósito proporcionar una descripción alternativa de los bariones como estados ligados de un quark y un diquark. Durante los últimos años el avance en la teoría y los resultados experimentales han mostrado que las correlaciones de dos quarks (diquark) tienen un papel muy importante en el estudio de la física de hadrones

[4], razón por la cual en este trabajo tomamos el modelo algebraico propuesto en [5] para estudiar la estructura interna del diquark- $0_{[ud]}^+$.

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 hablamos un poco de teoría de grupos, de los grupos y álgebras de Lie y su relación en la descripción de las fuerzas fundamentales. El paso siguiente a tratar, de manera ligada a teoría de grupos, es el estudio del modelo de quarks, el cual se aborda en el capítulo 2, donde se habla un poco del modelo de quarks para mesones y para los diquarks, tomando en cuenta su descripción por color y sabor. En el capítulo 3 revisamos la teoría de QCD perturbativa, abordando el lagrangiano de QCD, sus interacciones, los principales experimentos y sus funciones de distribución que se pueden llegar a observar. Una vez que analizamos la parte perturbativa, en el capítulo 4 revisamos un poco de las herramientas que se utilizan para la descripción no perturbativa, en este caso hablamos de las ecuaciones de Schwinger-Dyson y las ecuaciones de Bethe-Salpeter. En la última parte se revisa el trabajo realizado en este proyecto de tesis, siendo el capítulo 5 el referido a la parte de los cálculos analíticos y el capítulo 6 a los resultados numéricos.

Parte I

Teoría de Grupos

Capítulo 1

Requerimientos Matemáticos

STALKER

Permite que todo se vuelva realidad. Permíteles creer. Y permíteles reírse de sus pasiones. Porque lo que ellos llaman pasión no es en realidad, ninguna energía interior sino tan solo la fricción entre sus almas y el mundo exterior. Pero, más que nada, permíteles creer en sí mismos y se vuelvan indefensos como niños. Porque la debilidad es grande y la fuerza no es nada...

El stalker se abre paso por la cornisa de un muro, aparentemente se trata de una presa. Su monólogo interno continúa.

STALKER

...Cuando un hombre nace, es débil y flexible, cuando muere, es rígido e insensible. Cuando un árbol crece, es tierno y dócil, pero cuando está seco y rígido, muere. Rigidez y fortaleza son compañeras de la muerte, la docilidad y vulnerabilidad son la personificación de la vida.

Stalker,
Andréi Tarkovski

En la primer parte de esta tesis vamos a hablar de teoría de grupos, ya que la Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en ingles) se describe en este contexto. Como primera instancia vamos a introducir los conceptos matemáticos requeridos para comprender como se estructura la teoría con la cual describimos las partículas, que, en este caso, nos interesa estudiar los quarks.

1.1. Breve repaso de teoría de grupos

En física nos interesa describir cómo se comporta cierto objeto bajo algún conjunto particular de transformación, ya que esas transformaciones nos proporcionan algún observable físico. Por ejemplo, el operador del momento angular genera una rotación, mientras que el operador de momento lineal genera una traslación.

Como ya mencionamos, estas transformaciones las denotamos como *operadores*, en particular, un **operador lineal** es un mapeo $A : X \rightarrow Y$ de un **espacio normado** $(X, \|\cdot\|_X)$ a otro $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Se llama lineal si

$$A(u + \lambda v) = A(u) + \lambda A(v) \text{ para todo } u, v \in X \text{ y } \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \quad (1.1)$$

donde, de acuerdo a la proposición de Riesz, $A : X \rightarrow Y$ cumple con las siguientes afirmaciones, las cuales son equivalentes

- i) A es continua
- ii) A es acotada
- iii) Existe una constante $c \geq 0$ tal que $\|A(u)\|_Y \leq c\|u\|_X$ para todo $u \in X$

El conjunto de todos los operadores lineales y acotados de X a Y forman un **espacio vectorial** complejo (real)

$$L(X, Y) := \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ es lineal y acotado}\} \quad (1.2)$$

El que tengamos un espacio vectorial implica que tenemos una norma

$$\|A\| \equiv \|A\| = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X \leq 1}} \|A(u)\|_Y < \infty, \quad A \in L(X, Y) \quad (1.3)$$

si $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son espacios normados sobre \mathbb{K} , entonces, $L(X, Y), \|A\|$ también es un espacio normado sobre \mathbb{K} , además, si $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es completo, el espacio normado $L(X, Y), \|A\|$ también es completo.

Si $X = Y$ tenemos el espacio vectorial $L(X)$ completo con su respectiva norma

$$L(X) = L(X, X) := \{A : X \rightarrow X \mid A \text{ es lineal y acotado}\} \quad (1.4)$$

Entonces, para poder entender cómo se transforman ciertos objetos primero necesitamos estudiar como tal las transformaciones. A este conjunto de transformaciones se les da el nombre de **grupo**.

Grupo

Un grupo G , [6], es un conjunto de elementos con la operación de multiplicación que satisfacen los siguientes axiomas:

1. REQUERIMIENTOS MATEMÁTICOS

- i) **Cerradura.** Si $A, B \in G \Rightarrow A \cdot B \in G$
- ii) **Identidad.** La matriz identidad $\mathbb{1} \in G$ satisface $\mathbb{1} \cdot A = A \cdot \mathbb{1} = A$ para todo $A \in G$
- iii) **Inverso.** Para todo $A \in G$ existe la inversa $A^{-1} \in G$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}$

además, si tenemos que A y B son elementos de G y tenemos que $A \cdot B = B \cdot A$, nuestro grupo es **abeliano**, es decir, sus elementos conmutan; por el contrario, cuando los elementos no conmutan llamaremos a nuestro grupo **no abeliano**.

Existen varias formas de representar los elementos de un grupo, en concreto, en este trabajo nos vamos a centrar en representaciones matriciales, es decir, nos vamos a centrar en los **grupos matriciales** (general linear groups), definidos en [7]

$$GL(n, \mathbb{k}) := \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{k}) \mid \det A \neq 0\} \quad (1.5)$$

donde $Mat(n \times n, \mathbb{k})$ denota el conjunto de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} . $GL(n, \mathbb{k})$ satisface las propiedades antes mencionadas para ser un grupo. Debemos tomar en cuenta que $GL(n, \mathbb{k})$ no forma un espacio vectorial, solo es un grupo, concretamente, es un subconjunto de $L(X)$, siendo X un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{k} cuyos elementos son matrices de $n \times n$. Es un subconjunto porque se compone solamente de los operadores lineales invertibles de X .

En este tipo de grupo vamos a trabajar con matrices actuando sobre vectores, por lo tanto, es necesario hacer una breve aclaración sobre la terminología de productos tensoriales. En el **Apéndice A** realizamos un breve repaso de esta notación.

El grupo visto como una transformación

Como ya hemos hablado, los grupos $GL(n, \mathbb{k})$ son un subconjunto del espacio vectorial de operadores lineales $L(X)$, pero este grupo matricial no forma un espacio vectorial. Sin embargo, nos da una pista de que los elementos de $GL(n, \mathbb{k})$ son operadores lineales cuyos elementos son matrices invertibles. Estos operadores (matrices) del grupo $GL(n, \mathbb{k})$ realizan un mapeo tal que si A es un elemento de nuestro grupo matricial

$$A: X \rightarrow X$$

donde X es un espacio vectorial ya sea en \mathbb{R} ó \mathbb{C} . Así, al aplicar nuestro operador A a un vector $v \in X$ tenemos

$$Av = v' \quad (1.6)$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}$$

En la primera línea de la ecuación (1.6) vemos la forma abstracta de la expresión; mientras que la segunda nos muestra la misma expresión pero en notación matricial. Esta transformación, la matriz, rota el vector v (que tiene 3 dimensiones) a una nueva posición descrita como v' .

En concreto, esto es lo que hace cualquier elemento de nuestro grupo $GL(n, \mathbb{k})$, realiza una transformación, en este caso una rotación, a un campo (un vector) del espacio vectorial en que estemos trabajando. En otras palabras, el grupo actúa en espacios vectoriales.

1.1.1. Grupos de Lie

Existe una gran gama de formas para caracterizar un grupo en particular, anteriormente ya vimos que una clasificación es saber si son abelianos o no; otra terminología es saber si es **infinito**, cuya definición es que el grupo debe tener un infinito número de elementos. Ahora vamos a revisar que implica que el grupo se pueda definir como un grupo de Lie.

Un grupo de Lie es un grupo G con la propiedad que G es una variedad diferenciable para la cual el mapeo $G \times G \rightarrow G$ es C^∞ -diferenciable [7]. En otras palabras, es un grupo cuyos elementos son funciones continuas y suaves de uno o más parámetros que varían de manera continua y suave.

Dado que el mapeo $\text{Det}(\text{Mat}(n \times n, \mathbb{k})) \rightarrow \mathbb{k}$ (para $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}) es continuo, entonces, $GL(n, \mathbb{k})$ es diferenciable de dimensión n^2 para el caso de \mathbb{R} , n^2 porque trabajamos con matrices del tipo $n \times n$, esta dimensión en el plano real se expresa como \mathbb{R}^{n^2} . Por otra parte, $GL(n, \mathbb{C})$ es diferenciable de dimensión n^2 en el plano de los complejos ó de dimensión $2n^2$ en el plano de los reales, siendo $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. Con esto podemos concluir que, dado que la multiplicación matricial es diferenciable en \mathbb{R}^{n^2} y \mathbb{C}^{n^2} , entonces, $GL(n, \mathbb{k})$ con $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} son **Grupos de Lie**.

Ahora que sabemos que nuestro grupo matricial es un grupo de Lie, necesitamos caracterizar aun más los elementos matriciales con los que vamos a trabajar; para empezar, solo vamos a trabajar con subgrupos de $GL(n, \mathbb{k})$ cerrados. A continuación vamos a definir los principales subgrupos de $GL(n, \mathbb{k})$ que también son grupos de Lie y tienen relevancia en nuestro trabajo.

Grupo ortogonal $O(n)$

El que sea ortogonal implica que los elementos (matrices) del grupo matricial son reales y la transpuesta de la matriz es igual a su inversa, $A^T = A^{-1}$. Debemos recordar que la magnitud de un vector no cambia bajo transformaciones ortogonales [8], como lo es una rotación.

$$O(n) := \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{I} \} \quad (1.7)$$

Grupo ortogonal especial $SO(n)$

El grupo ortogonal especial es un subgrupo de $O(n)$, ya que, nuevamente, se compone de las matrices que cumplen la condición de ortogonalidad, $A^T = A^{-1}$, pero además tienen otra característica, el determinante de cada matriz en el grupo es igual a la unidad.

$$SO(n) := \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \} \quad (1.8)$$

Grupo unitario $U(n)$

Los grupos unitarios son análogos a los grupos ortogonales pero con números complejos. En concreto, un grupo matricial es unitario si para cada elemento A contenido en el grupo, tenemos $A^{-1} = A^\dagger$, donde A^\dagger indica la transpuesta conjugada de la matriz A , también expresada como A^* en álgebra lineal.

$$U(n) := \left\{ A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^\dagger A = \mathbb{1} \right\} \quad (1.9)$$

Grupo unitario especial $SU(n)$

Al igual que el grupo $SO(n)$ ¹, el grupo unitario especial es un subgrupo de $U(n)$ cuyos elementos matriciales cumplen con la característica $A^{-1} = A^\dagger$, pero además, el que sea especial implica que cada uno de sus elementos debe tener determinante 1.

$$SU(n) := \{ A \in U(n) \mid \det(A) = 1 \} \quad (1.10)$$

Ahora vamos a ver ejemplos concretos de estos subgrupos de $GL(n, \mathbb{K})$ que tienen relevancia en la física, recordando que todos son grupos de Lie.

1.1.1.1. Principales subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$

Empezaremos revisando los subgrupos $SO(2)$ y $SO(3)$, los cuales representan rotaciones en 2 y 3 dimensiones, respectivamente. La característica de estos grupos es que sus matrices de rotación se componen de elementos reales.

¹Debemos tener cuidado con la interpretación de n en $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ y $SU(n)$, pues n indica la dimensión espacial de las rotaciones, mas no es la dimensión del grupo, ésta esta dada por la dimensión del álgebra de Lie, la cual la veremos más adelante. Sin embargo, es necesario aclarar que n no es la dimensión de nuestro grupo ni contiene restricción alguna respecto al espacio vectorial en que se puede aplicar. Por ejemplo $SO(3)$ se puede aplicar en 1 dimensión al igual que en 2 o 3, solamente cambiará su representación matricial.

Grupo $SO(2)$

Para obtener la representación más común de este grupo necesitamos tomar en cuenta nuestro sistema de refencia original y el sistema de referencia rotado, como se muestra en la figura 1.1,

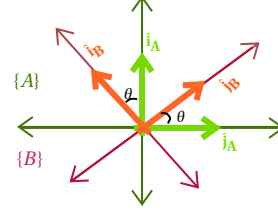


Figura 1.1: Marco de referencia rotado en 2D.

en este caso tenemos en verde nuestro sistema coordenado original $\{A\}$ con sus vectores base \hat{i}_A y \hat{j}_A . Si este sistema lo rotamos un ángulo θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj obtenemos el sistema coordenado $\{B\}$ ahora con sus vectores base \hat{i}_B y \hat{j}_B . Para saber como roto $\{B\}$ respecto a $\{A\}$ necesitamos ver como giran los vectores unitarios del sistema $\{B\}$ respecto a $\{A\}$, es decir, necesitamos encontrar \hat{i}_B^A y \hat{j}_B^A . Sabemos que para obtener la proyección del vector unitario \hat{i}_B con respecto a \hat{i}_A se utiliza el producto punto, pero, como solo estamos en 2 dimensiones podemos usar simplemente trigonometría y encontramos que

$$\begin{aligned}\hat{i}_B^A &= \hat{i}_{B_x} + \hat{i}_{B_y} = \cos\theta + \sin\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \\ \hat{j}_B^A &= \hat{j}_{B_x} + \hat{j}_{B_y} = -\sin\theta + \cos\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

que podemos agrupar en una matriz, de tal manera que

$$R_B^A = [\hat{i}_B^A \quad \hat{j}_B^A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

esta matriz nos dice como roto nuestro sistema coordenado $\{B\}$ con respecto de $\{A\}$, también se le conoce como una matriz de rotación.

Grupo $SO(3)$

Para este caso tendremos que obtener la matriz de rotación en 3 dimensiones. Nuevamente, en la imagen 1.2 tenemos el sistema coordenado original $\{A\}$ y el sistema rotado $\{B\}$

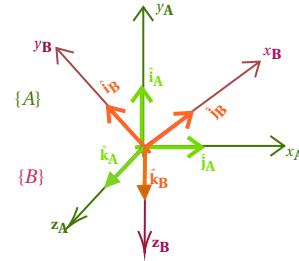


Figura 1.2: Marco de referencia rotado en 3D.

ahora, para obtener la matriz de rotación genérica que nos indique como se encuentra el sistema coordenado $\{B\}$ con respecto a $\{A\}$ necesitamos proyectar los vectores unitarios de $\{B\}$ en $\{A\}$ mediante el producto punto, tomando θ_{ab} como el ángulo entre los vectores \vec{a} y

\vec{b} , es decir

$$R_B^A = [\hat{i}_B^A \quad \hat{j}_B^A \quad \hat{k}_B^A] = \begin{bmatrix} \hat{i}_B \cdot \hat{i}_A & \hat{j}_B \cdot \hat{i}_A & \hat{k}_B \cdot \hat{i}_A \\ \hat{i}_B \cdot \hat{j}_A & \hat{j}_B \cdot \hat{j}_A & \hat{k}_B \cdot \hat{j}_A \\ \hat{i}_B \cdot \hat{k}_A & \hat{j}_B \cdot \hat{k}_A & \hat{k}_B \cdot \hat{k}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i_B i_A} & \cos\theta_{j_B i_A} & \cos\theta_{k_B i_A} \\ \cos\theta_{i_B j_A} & \cos\theta_{j_B j_A} & \cos\theta_{k_B j_A} \\ \cos\theta_{i_B k_A} & \cos\theta_{j_B k_A} & \cos\theta_{k_B k_A} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Esta matriz de rotación en 3D nos indica cómo rota un sistema con respecto a otro, pero cualquier rotación compuesta la podemos descomponer en rotaciones con respecto a cada uno de los ejes. Esto lo podemos hacer dejando fijo un eje y rotando su plano perpendicular. Así, las matrices de rotación para los ejes x , y y z son

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13a)$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.13b)$$

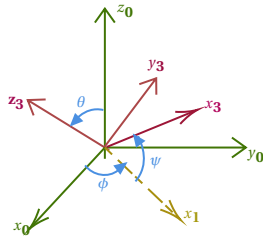
$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.13c)$$

Ahora bien, si dejamos pasar el tiempo es muy probable que ocurran varias rotaciones en el sistema coordenado original; cuando esto pasa podemos describir el sistema coordenado rotado usando los ángulos de Euler ϕ , θ y ψ ó los ángulos de Tait-Brian. Éstos ángulos nos permiten describir el sistema cuando ocurren 3 rotaciones, en particular, usando los ángulos de Euler se tienen 6 posibles combinaciones al rotar los ejes:

$$\begin{array}{ccc} X_\phi Z_\theta X_\psi & Y_\phi X_\theta Y_\psi & Z_\phi Y_\theta Z_\psi \\ X_\phi Y_\theta X_\psi & Y_\phi Z_\theta Y_\psi & Z_\phi X_\theta Z_\psi \end{array} \quad (1.14)$$

donde renombramos las matrices para tener una notación simplificada, en el caso de X tenemos $R_X(\theta) = X_\theta$.

Para ejemplificar estas rotaciones tomaremos el caso particular ZXZ con un sistema coordenado original $\{0\}$ y un sistema rotado $\{3\}$.



A la figura 1.3 se le aplican las siguientes rotaciones

1. Se rota por el eje Z_0 con el ángulo ϕ
2. Se rota por el eje X_1 ¹ con el ángulo θ
3. Se rota por el eje Z_3 con el ángulo ψ .

Figura 1.3: Rotación para el caso $Z_\phi X_\theta Z_\psi$.

¹ X_1 es la imagen de X_0 después de la primera rotación.

Con esto, la matriz de rotación del sistema $\{3\}$ respecto al sistema coordenado $\{0\}$

$$\begin{aligned}
 R_3^0 &= Z_0(\phi) X_1(\theta) Z_3(\psi) = Z(\phi) X(\theta) Z(\psi) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c\phi c\psi - c\theta s\phi s\psi & -c\phi s\psi - c\theta s\phi c\psi & s\phi s\theta \\ c\psi s\phi + c\phi c\theta s\psi & c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & c\psi s\theta & c\theta \end{pmatrix} \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

1.1.1.2. Principales subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$

Ahora veremos los principales subgrupos de $GL(n, \mathbb{C})$ formados por elementos complejos que operan sobre un vectores complejos generando una transformación sobre el vector preservando su magnitud. En general, son rotaciones en el plano complejo.

Grupo $U(1)$

Es el grupo del círculo, se compone de todos los números complejos de valor absoluto 1. Describe rotaciones en un plano de 2 dimensiones. Una manera de representar $U(1)$ es

$$U(1) = e^{i\theta} \quad (1.16)$$

en mecánica cuántica se le asocia a la fase de la amplitud de probabilidad.

Grupo $SU(2)$

Es asociado a rotaciones en 3 dimensiones y se representa por matrices de 2×2 con componentes complejos que pueden operar en componentes vectoriales en un espacio vectorial complejo. Si tenemos que a y b son complejos, podemos representar este grupo como

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Re} + i a_{Im} & b_{Re} + i b_{Im} \\ -b_{Re} + i b_{Im} & a_{Re} - i a_{Im} \end{bmatrix}, \quad aa^* + bb^* = 1 \quad (1.17)$$

donde $*$ representa el complejo conjugado. Ahora, si redefinimos $a_{Re} = \alpha_0$, $b_{Im} = \alpha_1$, $b_{Re} = \alpha_2$ y $a_{Im} = \alpha_3$ como en [8], tenemos

$$M = i \begin{bmatrix} -i\alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -i\alpha_0 - \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Este grupo es muy importante para la descripción de la fuerza debil. También se le asocia a la propiedad del espín del electrón en mecánica cuántica.

Grupo $SU(3)$

Este grupo esta formado por matrices 3×3 que tienen componentes complejos y pueden operar en vectores de tres componentes en un espacio vectorial complejo. Pueden existir varias representaciones de este grupo con que se cumpla que si A es un elemento de $SU(3)$ entonces

$$A^\dagger A = I \quad ; \quad Det(A) = 1 \quad (1.19)$$

Existen varias representaciones de $SU(3)$, algunas más complicadas que otras, pero la representación que resulta de utilidad en teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en ingles) es la matriz de Gell-Mann [8]

$$A(\alpha_i) = i \begin{bmatrix} -i + \alpha_3 + \frac{\alpha_8}{\sqrt{3}} & \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_4 - i\alpha_5 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -i - \alpha_3 + \frac{\alpha_8}{\sqrt{3}} & \alpha_6 - i\alpha_7 \\ \alpha_4 + i\alpha_5 & \alpha_6 + i\alpha_7 & -i - \frac{2\alpha_8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad |\alpha_i| \ll 1 \quad (1.20)$$

donde α_i es un conjunto de 8 variables independientes muy pequeñas.

1.1.2. Álgebras de Lie

Hasta este punto hemos dicho que un grupo de Lie es un conjunto de elementos que cumplen con los axiomas de cerradura, identidad y la existencia del elemento inverso. Sin embargo, un grupo de Lie al mismo tiempo es una variedad diferenciable. Una variedad n -dimensional implica que todos los vecinos de un punto de la variedad se ven como un espacio n -dimensional; por ejemplo, el grupo $SO(3)$ es una variedad diferenciable de 3 dimensiones.

Gracias a esta nueva implicación sabemos que podemos pensar los grupos de Lie de manera matricial o de manera geométrica. Cuando la variedad es el círculo de los números complejos, la línea tangente a la identidad será el nuevo espacio coordenado plano, que es justamente el álgebra de Lie. Ahora, si hacemos un mapeo exponencial del álgebra de Lie generamos cada punto de la variedad, es decir, del grupo de Lie. Para ejemplificarlo de manera visual tenemos la la figura 1.4 donde la esfera representa el grupo de Lie $SO(3)$ y el plano tangente a esta variedad es el **álgebra de Lie** $\mathfrak{so}(3)$. Ésta álgebra es un espacio vectorial que se origina en el punto de la variedad donde se encuentra la identidad, en este caso representada por un punto negro en el centro del espacio plano. A partir de aquí los vectores tangentes de $\mathfrak{so}(3)$ se mapean con la exponencial y generan todos los puntos del grupo $SO(3)$.

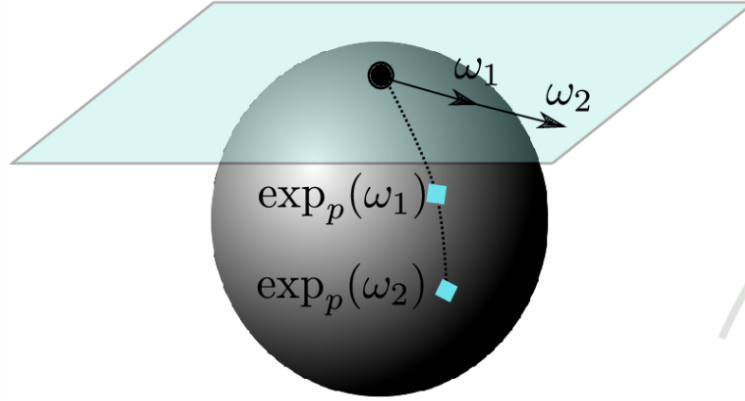


Figura 1.4: Variedad diferenciable de $SO(3)$ con su espacio plano tangente a la identidad [9]

El espacio tangente a la variedad se genera con un conjunto de vectores base llamados **generadores** y la cantidad de estos vectores necesarios para crear el espacio depende de cada variedad. En el ejemplo de la figura 1.4 solo se consideran 2 generadores para que nos sea más fácil de visualizar, aunque en realidad el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ tiene 3 generadores, lo que nos daría un espacio plano de 3 dimensiones tangente a la variedad $SO(3)$ en el punto de la identidad. Podemos intuir que estos generadores se obtienen a partir de una derivada, en concreto

$$x_j = -i \left. \frac{\partial A_j(\theta_j)}{\partial \theta_j} \right|_{\theta_j=0} \quad (1.21)$$

donde x_j son los generadores, A_j son las matrices de rotación, el subíndice j representa la cantidad de parámetros independientes y θ_j son los parámetros independientes de cada grupo. El $(-i)$ es un factor que se le agrega en la convención física debido a que en mecánica cuántica normalmente se trabaja con operadores hermitianos para que al momento de operar nos den eigenvalores reales; en la convención matemática se omite este factor. Dos propiedades muy importantes de los generadores es que son matrices con traza cero y hermitianas¹

$$\begin{aligned} \text{Tr}(x_j) &= 0 \\ (x_j^T)^* &= x_j^\dagger = x_j \end{aligned} \quad (1.22)$$

Con los vectores base del álgebra, x_i , podremos generar el espacio vectorial plano de j dimensiones tangente a la variedad, y si queremos regresar este espacio curvo basta con hacer un mapeo exponencial de los generadores, tal que

$$A_j(\theta_j) = e^{i\theta_j x_j} \quad (1.23)$$

¹En notación matemática, sin el factor $(-i)$, los generadores son antisimétricos y no tienen traza, así mismo, en el mapeo exponencial no aparece el factor imaginario, simplemente es $A_j(\theta_j) = e^{\theta_j x_j}$.

Al estar en la variedad los axiomas que definen a un grupo nos indican cómo se comportarán los elementos que lo conforman, pero al pasar al espacio tangente el **bracket de Lie** ocupará esta función. El bracket de Lie se denota como $[x_1, x_2]$ donde $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$ ¹ y satisface

- i) **Cerradura.** Si $x_1, x_2 \in \mathfrak{g} \Rightarrow [x_1, x_2] \in \mathfrak{g}$
- ii) **Bilinealidad.** $[ax_1 + bx_2, x_3] = a[x_1, x_3] + b[x_2, x_3]$
- ii) **Alternabilidad.** $[x_1, x_1] = 0$
- iii) **Identidad de Jacobi.** $[x_1, [x_2, x_3]] + [x_2, [x_3, x_1]] + [x_3, [x_1, x_2]] = 0$

Estas propiedades del bracket de Lie vienen de las propiedades de multiplicación en el grupo de Lie, así que ahora podemos centrarnos a trabajar en su totalidad en el álgebra de Lie, ya que resulta más fácil trabajar en un espacio plano que en un espacio curvo. Para el caso particular de grupos de Lie matriciales el bracket de Lie es simplemente el conmutador entre los generadores

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1, \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{g} \quad (1.24)$$

El bracket de Lie también pertenece a \mathfrak{g} y nos arroja una combinación lineal de los generadores bases, es decir

$$[x_i, x_j] = i \sum_k f_{ij}^k x_k \quad (1.25)$$

donde los coeficientes f_{ij}^k de la combinación lineal son los **coeficientes de estructura** del álgebra de Lie. A continuación mostraremos algunas álgebras de Lie relevantes, aunque no se profundizará en los detalles. Para un mayor entendimiento de este tema se pueden revisar los libros [8] y [6] así como la serie de videos [10] que resultan muy ilustrativos.

1.1.2.1. Álgebras de Lie relevantes

Álgebra $\mathfrak{so}(3)$

Para encontrar las 3 matrices generadoras de $\mathfrak{so}(3)$ aplicamos la ecuación (1.21) a las

¹De aquí en adelante este tipo de caligrafía en minúscula nos hará referencia a que se tiene un álgebra de Lie.

matrices de rotación (1.13)

$$x_1 = -i \frac{\partial R_Z(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = -i \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{\theta=0} = i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.26a)$$

$$x_2 = -i \frac{\partial R_Y(\psi)}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} = -i \frac{\partial}{\partial \psi} \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \Big|_{\psi=0} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.26b)$$

$$x_3 = -i \frac{\partial R_X(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \Big|_{\phi=0} = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.26c)$$

notamos que efectivamente las matrices que generan el espacio tangente son hermíticas y su traza es cero. Y por otro lado, la relación de conmutación para los generadores es

$$[x_i, x_j] = -\epsilon_{ijk} x_k \quad (1.27)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita. Al aplicar el mapeo exponencial de (1.23) a los generadores x_i con $i = 1, 2, 3$ regresamos a las matrices de rotación $R_Z(\theta)$, $R_Y(\psi)$ y $R_X(\phi)$ de $SO(3)$.

Álgebra $\mathfrak{su}(2)$

El álgebra $\mathfrak{su}(2)$ tiene tres matrices generadoras, que son precisamente las matrices de Pauli, definidas como:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

en esta ocasión los generadores los nombramos σ_i debido a que las matrices de Pauli normalmente se etiquetan de esta manera, y por lo ya mencionado, sabemos que surgen de calcular la derivada de las matrices de rotación de $SU(2)$. Al conmutar estas matrices σ_i obtenemos la siguiente relación de conmutación

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i2\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (1.29)$$

donde el factor $2\epsilon_{ijk}$ es nuestra constante de estructura. Debemos tomar en cuenta que los generadores y las constantes de estructura pueden cambiar dependiendo de la parametrización del grupo de Lie que elijamos, sin embargo, el espacio vectorial del álgebra de Lie para un grupo de Lie en específico es el mismo para cualquier parametrización.

Álgebra $\mathfrak{su}(3)$

Los generadores del álgebra $\mathfrak{su}(3)$ son justamente las ocho **matrices de Gell-Mann** λ_i definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.30)$$

que al conmutarlas se forma la siguiente relación

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i2f_{ijk}\lambda_k \quad (1.31)$$

donde el factor f_{ijk} es antisimétrico y toma ciertos valores específicos dados en la tabla 1.1

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678	Otros
f_{ijk}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Tabla 1.1: Valores que f_{ijk} toma al conmutar las matrices λ_i en $\mathfrak{su}(3)$ [8]

Nos damos cuenta en (1.31) que la constante de estructura es $2f_{ijk}$, en otros textos renombran los generadores como $\frac{1}{2}\lambda_i$ y ese cambio hace que sus generadores simplemente sean f_{ijk} . Otro punto importante que podemos notar es que al tener ocho matrices generadoras el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ es de ocho dimensional.

1.1.3. ¿Cómo se aplica a QFT?

Hasta ahora hemos hablado de los grupos y álgebras de Lie ¿pero cómo se aplica todo esto en teoría cuántica de campos?.

Sabemos que la materia esta formada por un conjunto de partículas elementales que interactúan entre sí a través de cuatro fuerzas fundamentales: electromagnética, débil, fuerte y gravitacional. Para comprender mejor esta teoría tomamos en cuenta que el espacio donde yacen y se dan las interacciones se le conoce como el **espacio-tiempo**, pero podemos tomar en consideración que localmente existen tres espacios internos (de carga, de isospin y

de color) con los que podemos representar las partículas. En cada uno de estos espacios internos se presentan simetrías ante ciertas transformaciones del grupo de Lie. En concreto, su lagrangiano es invariante ante transformaciones locales de norma, que es otra manera de decir que el lagrangiano no cambia si opera sobre el un grupo de Lie en específico.

Para que se cumpla la invariancia necesitamos introducir nuevos campos, llamados campos de norma, que resultan ser justamente los campos que permiten la interacción. Además, al tener una simetría, sabemos que una cantidad se conserva. El espacio interno de carga resulta ser simétrico ante transformaciones del grupo $U(1)$ y la cantidad conservada es la carga eléctrica. Al pasar al espacio de isospin tenemos que presenta invariancia ante el grupo de Lie $SU(2)$ y su cantidad conservada es la carga de isospin. Por otro lado, el espacio interno de color resulta simétrico cuando opera sobre el el grupo $SU(3)$, teniendo la carga de color como la cantidad que se conserva. Finalmente, el espacio-tiempo, que resulta ser el espacio externo, presenta simetría traslacional y su cantidad conservada es lo que llamamos energía-momento.

Los campos de fermiones los vamos a denotar por la letra griega Ψ y difieren unos con otros por el **isospin**, la **quiralidad** y **color**. El isospin es un vector de dos entradas dado como $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para el quark up y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para el quark down; de igual manera tendríamos el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para representar el neutrino del electron y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para el electrón, esto es porque en el espacio de isospin tratan ciertas partículas como si fueran simplemente dos estados de una misma partícula [2]. La quiralidad se denota como R ó L , es decir, quiralidad a la izquierda o a la derecha por sus iniciales en ingles. Por último, usando iniciales en ingles para tener concordancia con otros textos, el vector que nos describe el color es $\begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$. Así, por ejemplo, para describir un quark up verde con quiralidad a la izquierda tendremos

$$\Psi_{ug}^L = \psi_u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_W \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S \quad (1.32)$$

donde ψ_u es la solución general a la ecuación de Dirac para el quark up y los subíndices W y S se refieren a que esos vectores son los que se ven modificados ante interacciones debiles y fuertes respectivamente, [8]. Cabe mencionar que ψ_u es la parte del campo que nos da información del espacio-tiempo y contiene vectores columna en $4D^1$. Otro ejemplo de un campo de fermiones es el del electrón con quiralidad a la izquierda, donde ψ_e ahora es la

¹Normalmente no se menciona, pero ψ_u también nos brinda información del espacio interno de la carga por medio de la función exponencial imaginaria, este espacio interno es de una dimensión. Geométricamente todo número complejo de longitud uno yace en un círculo de radio uno en el plano de los complejos [2].

1. REQUERIMIENTOS MATEMÁTICOS

solución general para el campo de electrones

$$\Psi_e^L = \psi_e \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_W \quad (1.33)$$

notemos que no tiene la parte de color debido a que el electrón no interactúa fuertemente. Así que, en esencia, un campo de fermiones es un producto tensorial de vectores de 1D, 2D, 3D y 4D

$$\Psi_{fermion} = \Psi_{\text{espacio de carga}} \otimes \Psi_{\text{espacio de isospin}} \otimes \Psi_{\text{espacio de color}} \otimes \Psi_{\text{espacio-tiempo}} \quad (1.34)$$

La relación $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ del modelo estándar simbolizan la acción de estos tres grupos actuando en estos campos. El grupo $U(1)$ actuando en (1.34) solo afectará la parte referente al espacio de carga, $SU(2)$ solo actuará en sobre el vector del espacio de isospin, mientras que $SU(3)$ únicamente tendrá ingerencia en la parte de color, ignorando el resto¹. Como ya mencionamos, estos grupos de simetría nos llevan a la conservación de la carga eléctrica, débil y de color. Así mismo, las simetrías de transformación locales nos llevan a los términos de interacción en el lagrangiano.

Cada vector recibe un nombre de acuerdo al número de componentes que tiene, en la tabla 1.2 mostramos la manera habitual de nombrarlos, gracias a la cual podemos decir que el campo (1.33) es doblete en el campo de isospin y singlete en el campo de color.

No. de componentes	Nombre
1	singlete
2	doblete
3	triplete
n	multiplete

Tabla 1.2: Nombres de los vectores de acuerdo al número de componentes

Una última observación que debemos hacer es que en QFT los campos también son operadores [8], debido a que las componentes del multiplete del campo crean y destruyen estados de multipartículas.

¹La parte del campo referente al espacio tiempo puede ser afectado bajo transformaciones del grupo de Poincaré $P(1,3)$ [11].

1.1.3.1. Grupos de Lie operando sobre campos cuánticos

En una teoría cuántica de campos tendremos dos tipos de operadores: los que al aplicarlos al multiplete nos arrojan eigenvalores observables, y los que generaran un nuevo eigenestado, es decir, los operadores de escalera. En secciones anteriores aprendimos que los campos cuánticos se componen de multipletes que podemos rotar usando los grupos de Lie, pero resulta conveniente usar las álgebras de Lie formadas por generadores para trabajar sobre un espacio no curvo. Llevando esta línea de análisis, podemos concluir que las matrices generadoras son las que van a operar sobre nuestros campos. En concreto, los generadores que son matrices diagonales son los que al operar sobre el multiplete y va a arrojar un eigenvalor, mientras que la combinación del resto de generadores no diagonales actuarán como operadores de escalera. El subgrupo de matrices diagonales forman por si mismos un álgebra de Lie llamado **subálgebra de Cartán** y su importancia es que los eigenvalores que arroja son observables y en este caso van a ser justamente las cargas conservadas en cada espacio y nos da una manera de identificar cada partícula.

En el espacio de isospin solo se tendrá un solo eigenvalor debido a que vimos en (1.28) que $\mathfrak{su}(2)$ solo tiene una matriz generadora diagonal, sin embargo, para el caso de $\mathfrak{su}(3)$ notamos en (1.30) que se tienen 2 matrices diagonales y por lo tanto 2 eigenvalores que describirán la carga de color. Las matrices diagonales se multiplican por el factor $\frac{g_{W(S)}}{2}$ para respetar la conversión que normalmente se usa, donde $g_{W(S)}$ representa la constante de acoplamiento de cada fuerza. Ejemplificando esta transformación del álgebra de Cartán de $\mathfrak{su}(3)$ en el campo que presentamos en (1.32) tendremos que la transformación opera sobre el triplete de color

$$\begin{aligned} \frac{g_S}{2} \lambda_3 \Psi_{ug}^L &= \frac{g_S}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_W \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S = -\frac{g_S}{2} \psi_u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_W \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S \\ \frac{g_S}{2} \lambda_8 \Psi_{ug}^L &= \frac{g_S}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \psi_u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_W \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S = \frac{g_S}{2\sqrt{3}} \psi_u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_W \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S \end{aligned} \quad (1.35)$$

así, tenemos que los eigenvalores para identificar cualquier campo de quarks verde serán $\left(-\frac{g_S}{2}, \frac{g_S}{2\sqrt{3}}\right)$. La tabla 1.3 presenta los eigenvalores resultantes de la transformación para cada base del espacio de color.

Quark	Transformación	Carga de color
Rojo	$\frac{g_s}{2} \lambda_{3,8} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_S$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$
Verde	$\frac{g_s}{2} \lambda_{3,8} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$
Azul	$\frac{g_s}{2} \lambda_{3,8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_S$	$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Tabla 1.3: Transformación al espacio de color y su carga conservada. Suele ignorarse el factor g_s .

El espacio de isospin se transformará de la misma manera, solo que ahora $\left(\frac{g_W}{2}\right) \sigma_3$ forma el subálgebra de Cartán de $\mathfrak{su}(2)$ y será la que actúe sobre nuestros campos. La tabla 1.4 muestra los resultados de esta transformación para la primera generación de quarks recordando que R implica quiralidad derecha y L quiralidad izquierda.

Quark	Transformación	Carga de isospin
L up	$\frac{g_W}{2} \sigma_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_W$	$+\frac{1}{2}$
L down	$\frac{g_W}{2} \sigma_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_W$	$-\frac{1}{2}$
R up	$\frac{g_W}{2} \sigma_3 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$	0
R down	$\frac{g_W}{2} \sigma_3 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$	0

Tabla 1.4: Transformación al espacio de isospin y su carga conservada. Suele ignorarse el factor g_W .

En el caso del quark up y down con quiralidad izquierda la matriz generadora tiene dimensiones de 2×2 porque opera sobre un vector en 2D. Sin embargo, al operar sobre un singlete, que es el caso donde los quarks tienen quiralidad derecha, la matriz generadora opera en su representación de 1D, que justamente es $[0]$. Un punto importante a mencionar es que las antipartículas tienen la misma carga pero con signo contrario a sus partículas correspondientes.

Como mencionamos al inicio, contamos con dos tipos de operadores: los que reescalan nuestro eigenvector, y los que lo cambian. Hasta ahora hemos hablado del primer tipo, el cual nos ayuda a clasificar nuestras partículas, no obstante, el segundo también resulta de

gran importancia por su característica de convertir una partícula en otra. Todas las matrices generadoras no diagonales (y sus combinaciones) del álgebra de Lie son las que nos van a permitir este tipo de transformaciones. Para mostrar este efecto de manera ilustrativa tomaremos el ejemplo dado en [8] usando λ_1 y λ_2 del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$

$$\left(\frac{\lambda_1}{2} + i\frac{\lambda_2}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_s \quad (1.36a)$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{2} - i\frac{\lambda_2}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_s \quad (1.36b)$$

en (1.36a) notamos que la suma de estos generadores transforma un quark verde en un quark rojo, actúa como un operador de “subida”, pero al aplicar la resta de estos mismos generadores al quark rojo, llegamos a que nos regresa el campo de quarks verde, es decir, actúa como un operador de “bajada”.

En este primer capítulo podemos palpar la trascendencia que presenta la teoría de grupos en el estudio de una teoría cuántica de campos. A continuación veremos un ejemplo en el que estas simetrías nos pueden ayudar a clasificar los mesones y diquarks de acuerdo a sus números cuánticos, en el llamado modelo de quarks.

Capítulo 2

Composición de partículas

INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Debió ser aterrador.

PEG

Si, lo fue. En Bedford, las cosas fueron
difíciles. Tengo 71 años y todavía me duele.
Porque mis huesos y órganos se desarrollaban,
así que ese dolor está en lo profundo. Está
recubierto por tejido, calcita y músculo.
Para quitarlo, tendrían que deshacerme por
completo.

Solos-Episodio 3:Peg,
Sam Taylor

2.1. Hadrones: Agrupaciones de quarks

A finales de 1940 comenzaron a registrarse en los rayos cósmicos todo un “zoológico” de cientos de nuevas partículas, razón por la cual se volvió necesario buscar esquemas de clasificación que explicaran su comportamiento. Es aquí cuando surge el **modelo de quarks**, un esquema desarrollado por Gell-Mann en el que propone que estas nuevas partículas, **hadrones**, están compuestas por constituyentes más elementales que denominó **quarks**. En este modelo Gell-Mann clasificaba los hadrones en dos tipos: **mesones**, formados por un quark y un antiquark; y **leptones**, formados por tres quarks. A pesar del escepticismo inicial de varios físicos, el modelo provó su veracidad al predecir una nueva partícula que llamaron Ω^- . Esta partícula se descubrió experimentalmente en 1964 dando prestigio al modelo y el premio nobel a Gell-Mann en 1969 por su contribución en el estudio de la clasificación e interacción de partículas elementales. En este trabajo no vamos a centrarnos en cómo llegó Gell-Mann al modelo, sino que, de manera reducida, vamos a estudiar cómo funciona en

la clasificación de los mesones pseudoescalares utilizando lo aprendido de teoría de grupos.

Hasta ahora hemos mencionado que los grupos de Lie son transformaciones que nos muestran simetrías existentes en el universo. Hemos mencionado la relación directa que tienen con las interacciones fundamentales; hemos dicho que al operar sobre los campos pueden cambiar el campo ó arrojar eigenvalores que nos permitan clasificar los campos cuánticos de cada partícula. Siguiendo esa línea, en esta sección vamos a ver que al operar el álgebra de Cartán sobre campos cuánticos de **sabor**, que son los mismos que hemos llamado anteriormente campos de isospin, obtenemos los eigenvalores que nos ayudarán a clasificar las partículas compuestas. Para esto es necesario recordar la definición de **matrices irreducibles**.

Una matriz reducible es aquella que mediante una transformación de bases se puede transformar en una matriz diagonal por bloques; mientras que una matriz irreducible es aquella que no puede ser transformada a la forma diagonal por bloques. Por ejemplo, en la ecuación (2.1) la matriz M es reducible mediante una transformación de bases a la matriz M' , la cual ya es irreducible

$$M = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \rightarrow M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & b_{11} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde la matriz M' , que es de dimensión 5, se puede expresar como una **suma directa** de dos matrices, una 2×2 y la otra 1×1

$$M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & b_{11} \end{bmatrix} = A \oplus B \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = [b_{11}] \quad (2.2)$$

a las matrices A y B se les conoce como submatrices. Si la matriz M' actúa sobre un vector de 3 dimensiones, las submatrices operan de manera independiente; la matriz A opera sobre las primeras dos componentes y la matriz B sobre la última componente del vector

$$M'v = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \oplus [b_{11}] [v_3] \quad (2.3)$$

esto nos dice que el vector v , que originalmente sabíamos que era un vector de un espacio de 5D, realmente se compone de dos subespacios, uno de 2D y el otro de 1 dimensión, a estos dos subespacios se les conoce como **espacios invariantes**. Con este ejemplo podemos observar la importancia de trabajar con matrices irreducibles, nos muestran una simetría del sistema que con otra representación no podríamos saber. En concreto, cuando tenemos una matriz diagonal actuando sobre un vector, lo que realmente pasará es que cada submatriz, que son representaciones de grupo en diferentes dimensiones, actuará independientemente en diferentes componentes del vector en subespacios diferentes.

2.1.1. Producto $2 \otimes \bar{2}$

Ahora que sabemos cómo opera una matriz irreducible sobre un vector, recordamos que el objetivo es describir la composición de quarks. Para esto necesitamos evocar los números cuánticos de los quarks ligeros, llamados así porque tienen masas “parecidas” y menores que el resto de los quarks. En la tabla 2.1 mostramos los estos números cuánticos para el quark *up* (u), *down* (d) y *strange* (s), donde la hipercarga se describe como

$$Y = \frac{Q - I_3}{2} = B + S \quad (2.4)$$

Quark	Espin j	N. Barionico B	Carga Q	Isoespin total (I)	Isoespin en z (I_3)	Extrañeza S	Hipercarga Y
u	1/2	1/3	2/3	1/2	1/2	0	1/3
d	1/2	1/3	-1/3	1/2	-1/2	0	1/3
s	1/2	1/3	-1/3	0	0	-1	-2/3

Tabla 2.1: Números cuánticos de los quarks ligeros

Los campos de color¹ se describen en términos de los números cuánticos o en forma vectorial, la interpretación de cada representación no la vamos a tratar en este trabajo, sin embargo se puede revisar en [8]. A continuación mostramos dichas representaciones

$$u = |I, I_3\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = |I, I_3\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

El producto tensorial dado por la composición de dos partículas formadas por los quarks u y d y sus antipartículas, usando la representación vectorial de sus campos de color, se puede expresar como

$$\begin{aligned}
 (A_1 u + A_2 d) \otimes (B_1 \bar{u} + B_2 \bar{d}) &= \left(A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \otimes \left(B_1 \begin{bmatrix} \bar{1} \\ 0 \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right) \\
 &= A_1 B_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} \\ 0 \end{bmatrix} + A_1 B_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{1} \end{bmatrix} + A_2 B_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} \\ 0 \end{bmatrix} + A_2 B_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{1} \end{bmatrix} \\
 &= C_1 u\bar{u} + C_2 u\bar{d} + C_3 \bar{u}d + C_4 d\bar{d}
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹Recordamos que ya habíamos mencionado como se definen los vectores u y d en el primer capítulo, los mencionamos como vectores que formaban el espacio de isospin, pero para no caer en confusiones con el número cuántico de isospin vamos a mencionarlos ahora como vectores de color que conforman el espacio de color. Notemos que para 3D se agrega el quark s de tres entradas con un 1 en la tercer componente, $s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

donde $A_{1,2}$ y $B_{1,2}$ son los coeficientes de cada combinación lineal, relacionan la nueva base vectorial con la anterior. La ecuación (2.6) forma la base vectorial en 4D para el estado combinado. También podemos representar las cuatro bases vectoriales como componentes en un vector en 4D que habita en un espacio de 4D, llamándole multiplete de cuatro entradas. Por comodidad aplicamos una transformación específica a nuestro multiplete para trabajar en un espacio con bases diferentes, recordando que esta transformación no afecta la física del sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u\bar{u} \\ \bar{u}d \\ u\bar{d} \\ d\bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u\bar{d} \\ \bar{u}d \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Ahora, para poder aplicar el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ a esta composición de quarks y antiquarks, expresada como por el multiplete (2.7), ocupamos la teoría de la representación matricial del **producto directo** y la suma directa. Existen muchas posibilidades de combinatorias en diferentes espacios con matrices de diferentes dimensiones que nos van a arrojar la suma de subespacios independientes y en diferentes dimensiones. Estas relaciones se construyen usando las tablas de Young, que aquí no discutiremos pero se puede encontrar información en [12], [13]. En concreto, para la combinación quark-antiquark, mostrada en (2.7), vamos a tener que sobre ella actuará la siguiente descomposición matricial, siendo \times el símbolo que usaremos para representar el producto directo de matrices y \otimes el símbolo para el producto tensorial entre vectores

$$2 \times \bar{2} = 3 \oplus 1 \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) nos dice que al operar los grupos $SU(2) \times SU(2)$ en lugar de tener una matriz resultante de 4D, tendremos la suma de submatrices irreducibles, una de 3D y la otra de 1D. Al aplicar (2.8) sobre (2.7) podemos concluir que el multiplete de estados realmente se compone de dos subespacios invariantes de diferentes dimensiones, un triplete y un singlete

$$(2 \times \bar{2}) \begin{bmatrix} -u\bar{d} \\ \bar{u}d \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \end{bmatrix} = \mathfrak{su}(3) \begin{bmatrix} -u\bar{d} \\ \bar{u}d \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \end{bmatrix} + \mathfrak{u}(1) \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \right] \quad (2.9)$$

con esta última expresión notamos que podemos clasificar nuestro multiplete (2.7) de dos maneras. La primera es usando el RHS de la ecuación (2.9) y aplicando el subálgebra de Cartán sobre el triplete y el singlete. En este caso vamos a aplicar el subálgebra de Cartán $\mathfrak{su}(3)$ sobre ambos; usando λ_3 y λ_8 de (1.30) como su representación en 3D actuando sobre el triplete y su representación en 1D sobre el singlete, donde los generadores $\lambda_3, 8$ en 1D son la matriz [0]. En la tabla 2.2 se muestran los eigenvalores resultados de una transformación en

2. COMPOSICIÓN DE PARTÍCULAS

$\mathfrak{su}(3)$, estos eigenvalores nos dan una manera de nombrar cada una de las componentes del multiplete, sin embargo, no es la clasificación que normalmente se observa en la literatura.

Transformación	Eigenvalores
$\lambda_{3,8_{3D}}(-u\bar{d})$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{2}\lambda_{3,8_{3D}}(\bar{u}d)$	$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{2}\lambda_{3,8_{3D}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{2}\lambda_{3,8_{1D}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})\right)$	$(0, 0)$

Tabla 2.2: Transformación $\mathfrak{su}(3)$ sobre el multiplete resultado de la composición de dos partículas formadas por los quarks u y d y sus antipartículas.

La otra manera de clasificar (2.7) es usando el LHS de la ecuación (2.9), es decir, operando $\mathfrak{su}(2)$ sobre el multiplete. Al hacer esta transformación podremos observar que los generadores de $\mathfrak{su}(2)$ rotan las primeras tres componentes del multiplete, pero al actuar sobre la última componente el eigenvalor da cero, es decir, el último estado no se rota. Con esto comprobamos que los primeros tres estados forman un subespacio independiente de 3 dimensiones y el último estado vive en un subespacio de 1D. Notemos que la visualización de estos dos subespacios no resulta evidente en la representación del multiplete dada en (2.6), aquí yace la importancia del cambio de base hecha en (2.7). La tabla 2.3 registra los eigenvalores arrojados para el triplete, obviando que todos números cuánticos que caracterizan al singlete son cero.

Estado	Partícula	Isoespin T. I	Isoespin en z (I_3)	Carga Q	Hipercarga $Y = \frac{Q-I_3}{2}$
$-u\bar{d}$	π^+	1	1	+1	0
$\bar{u}d$	π^-	1	-1	-1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	π^0	1	0	0	0

Tabla 2.3: Transformación $\mathfrak{su}(2)$ sobre el multiplete resultado de la composición de dos partículas formadas por los quarks u y d y sus antipartículas.

notamos que a cada estado se le atribuye una partícula distinta, en concreto, las partículas que surgen de esta composición son los piones con $Q = \{+1, -1, 0\}$. Estos eigenvalores son los que comúnmente se presentan para clasificar el multiplete (2.7). Diagramáticamente se representan en la figura 2.1

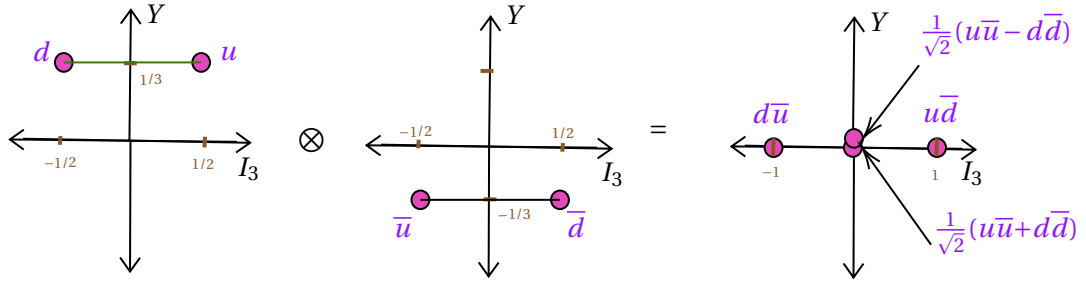


Figura 2.1: Multiplete dado por la composición de dos partículas formadas por los quarks u y d y sus antipartículas.

2.1.2. Producto $3 \otimes \bar{3}$

Como ya vimos, los hadrones son estados compuestos que agrupan quarks de diferentes sabores¹. Dependiendo de la combinación de quarks se clasificarán en diferentes tipos de hadrones. En la sección anterior vimos que la composición de dos partículas formadas por los quarks u y d y sus antipartículas nos arroja la clasificación para los piones. Ahora agregaremos el quark *strange* (s) para así llegar a una clasificación completa de los mesones, ya que lo que buscamos es lograr agrupar las partículas con características similares. Las representaciones de los quarks que formarán la composición son tripletes de color

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La composición de dos partículas formadas por los quarks u , d y s y sus antipartículas nos generará nueve estados que podemos agrupar en un multiplete. La transformación que va a operar sobre este multiplete viene dada por el producto directo de matrices del grupo $SU(3)$, que, haciendo uso nuevamente de las tablas de Young, se iguala a la suma directa de matrices las cuales actúan en diferentes dimensiones

$$3 \times \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (2.11)$$

Esto nos dice que los primeros nueve estados del multiplete forman un octete que vive en

¹Los sabores se refieren a los diferentes tipos de quarks descritos en el modelo estándar: *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top* y *bottom*.

2. COMPOSICIÓN DE PARTÍCULAS

un subespacio invariante de 8D y el estado restante representa un singlete de 1D

$$(3 \times \bar{3}) \begin{bmatrix} u\bar{d} \\ u\bar{s} \\ d\bar{s} \\ d\bar{u} \\ s\bar{u} \\ s\bar{d} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + 2s\bar{s}) \end{bmatrix} = \mathfrak{su}(8) \begin{bmatrix} u\bar{d} \\ u\bar{s} \\ d\bar{s} \\ d\bar{u} \\ s\bar{u} \\ s\bar{d} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \end{bmatrix} \oplus \mathfrak{u}(1) \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + 2s\bar{s}) \right] \quad (2.12)$$

Nuevamente, como en el caso anterior, tenemos dos maneras de clasificar estos mesones, la primera es tomando el RHS de la ecuación (2.12) y accionando sobre los dos vectores el subálgebra de Cartán de $\mathfrak{su}(8)$, un método más complicado y que para visualizarlo requeriríamos de 7 dimensiones. Es por eso que volvemos a clasificar los estados usando el LHS de la ecuación (2.12), donde operamos las matrices $\lambda_{3,8}$ de $\mathfrak{su}(3)$ en sus representaciones 3D y 1D sobre el multiplete. La tabla 2.4 muestra los números cuánticos del multiplete; el isoespin en la tercera componente es el eigenvalor después de operar $\frac{1}{2}\lambda_3$, mientras que la hipercarga es el eigenvalor del operador $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$.

Estado	Partícula	Isoespin en z (I_3)	Hipercarga Y
$u\bar{d}$	π^+	1	0
$u\bar{s}$	K^+	1/2	1
$d\bar{s}$	K^0	-1/2	1
$d\bar{u}$	π^-	-1	0
$s\bar{u}$	K^-	-1/2	-1
$s\bar{d}$	\bar{K}^0	1/2	-1
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	π^0	0	0
$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	η	0	0
$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + 2s\bar{s})$	η'	0	0

Tabla 2.4: Transformación $\mathfrak{su}(3)$ sobre el multiplete resultado de la composición de dos partículas formadas por los quarks u , d y s y sus antipartículas.

En general, estos mesones se pueden visualizar en la figura 2.2, donde podemos observar el octete, nombrado por Gell-Mann y Yuval Ne'eman como el *eightfold way*, un término inspirado en el *eightfold path* del Budismo [8].

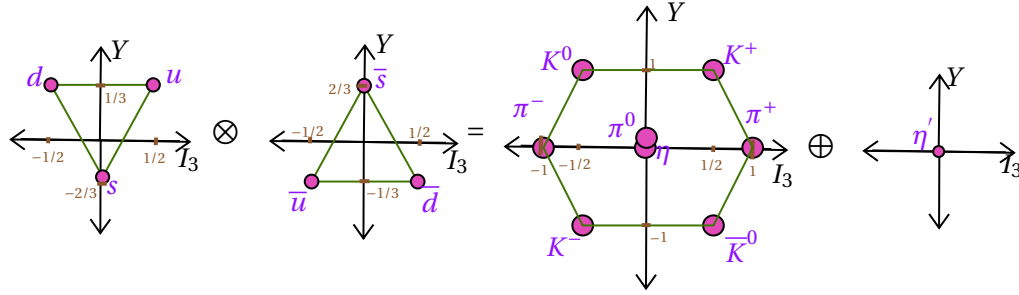


Figura 2.2: Multiplete dado por la composición de dos partículas formadas por los quarks u , d y s y sus antipartículas.

Esta clasificación toma en cuenta los números cuánticos I_3 , Y y S , sin embargo, existe otro número cuántico que genera cuatro subcategorías, el espín. Por ejemplo, a los mesones de la tabla 2.4 se les conoce como mesones **pseudoescalares**. En la tabla 2.5 presentamos los términos dados a cada tipo de mesones de acuerdo al valor de su espín.

Clasificación	Espín	Paridad	J^{CP}
Pseudoescalares	0	Negativa	0^{+-}
Escalares	0	Positiva	0^{++}
Vectoriales	1	Negativa	1^{--}
Axial-vector	1	Positiva	1^{++}

Tabla 2.5: Clasificación de las partículas tomando en cuenta el espín y la paridad.

Finalmente, podemos concluir que el modelo de quarks se basa en construcciones dadas por la teoría de grupos y nos permite generar una clasificación confiable de las partículas. Debemos mencionar que en este trabajo solo tomamos en cuenta la composición de partículas formadas por un quark y un antiquark. Los bariones y otras composiciones de quarks pesados quedan fuera de los alcances de este trabajo; para más información se puede consultar [8], [13] y [14].

2.2. ¿Qué pasa con el color?

En la ecuación (1.34) habíamos mencionado que un campo de fermiones se compone del producto tensorial de los vectores que describen la partícula en cada uno de los subespacios y en el espacio-tiempo. En el caso de la composición de partículas se sigue la misma analogía, necesitamos describir cada mesón como

$$\Psi_{Mesones} = \Psi_{\text{espacio de spin}} \otimes \Psi_{\text{espacio de sabor}} \otimes \Psi_{\text{espacio de color}} \otimes \Psi_{\text{espacio-tiempo}} \quad (2.13)$$

recordando que para evitar confusiones renombramos el espacio de isospin como el espacio de color. La parte referente al spin y el sabor se estudia con el modelo de quarks y el resto se estudia dentro de la teoría de la Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés), y, aunque formalmente aun no hemos llegado a ese punto, considero prudente revisar la parte de color con antelación ya que su base sigue siendo la teoría de grupos. En la sección 1.1.3.1 vimos que en el subespacio de color tenemos como base los vectores r , b y g , ecuación (2.14), y también vimos que bajo transformaciones del grupo $SU(3)$ el subespacio permanece invariante. Ahora veremos que sucede cuando se tiene una composición de dos partículas dadas por una combinación lineal de la base del espacio de color, arrojando un multiplete de nueve estados.

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

En este caso el grupo que operara sobre este multiplete será nuevamente $3 \times \bar{3} = 8 \oplus 1$, que, al operar sobre el nonete lo dividirá en dos subespacios invariantes, un octete y un simplete [14], como se observa en la ecuación (2.15). Debemos mencionar que los quarks libres no se pueden observar en la naturaleza porque llevan color. Necesitan combinarse con otro quark de manera que la composición ya no tenga color para que puedan ser observados. En este caso los estados que forman el octete tienen color y el singlete no tiene color.

$$(3 \times \bar{3}) \begin{bmatrix} r\bar{g} \\ r\bar{b} \\ g\bar{r} \\ g\bar{b} \\ b\bar{r} \\ b\bar{g} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \end{bmatrix} = \mathfrak{su}(8) \begin{bmatrix} r\bar{g} \\ r\bar{b} \\ g\bar{r} \\ g\bar{b} \\ b\bar{r} \\ b\bar{g} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) \end{bmatrix} \oplus \mathfrak{u}(1) \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \right] \quad (2.15)$$

Al nonete resultante se le pueden dar dos interpretaciones; la primera es que las partículas que originaron este nonete fueron dos quarks compuestos de la combinación lineal de los

tres colores. Esto nos diría que el único estado posible es el singlete, ya que es el único sin color. La otra interpretación es que las partículas que formaron el multiplete son dos **gluones**. El concepto de gluón no lo hemos abordado pero son las partículas mediadoras en la interacción fuerte; llevan carga de color, y, por lo tanto, pueden interactuar entre sí. En este caso, el octete constituye los ocho gluones posibles en el espacio de color y el singlete debería ser un gluón observable, pero no es así, los gluones son partículas no observables con una interacción de corto alcance.

Podemos concluir que tenemos dos partículas interactuantes en el espacio de color: los gluones y los quarks. Teniendo 8 estados para el gluón y un único estado posible para los quarks; esto nos dice que todos los mesones tendrán el mismo estado de color

$$\Psi_{\text{espacio de color}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}). \quad (2.16)$$

Si quisiéramos graficar el diagrama de los números cuánticos de cada estado tendríamos que aplicar el subálgebra de Cartán $\mathfrak{su}(3)$ sobre cada multiplete. En este caso los eigenvalores van a ser $(I_z^C = \frac{1}{2}\lambda_3\Psi, Y^C = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\Psi)$, donde el simplete cumple que sus números cuánticos son cero.

2.3. El diquark

Hasta este punto hemos hablado de dos tipos de composiciones de quarks: mesones y bariones; ahora hablaremos de los diquarks, el tema central de este trabajo. Los diquarks fueron introducidos al vocablo de física de partículas desde 1964 por el propio Gell-Mann [15], definidos como una partícula hipotética formada de dos quarks. La relevancia de su estudio reside en la existencia de modelos que sugieren que los diquarks juegan un papel importante en la producción de bariones, que, como ya vimos, son partículas formadas de tres quarks. Los primeros modelos basados en diquarks, donde postulan que los bariones están formados por la combinación quark-diquark, se dieron en 1966 y 1967 de manera separada por Ida y Kobayashi [16] y en el trabajo de Lichtenberg y Tassie [17]. El objetivo de utilizar este tipo de modelos en el estudio de bariones en lugar del modelo de tres quarks es para tener estados ligados de dos estados en lugar de tres y facilitar su estudio.

Para estudiar al diquark se deben tener en cuenta todos los subespacios en que debería habitar y tratarlos de manera individual, siempre y cuando al final tomemos en cuenta que el campo de los diquarks estará dado por el producto tensorial de los campos en todos los subespacios

$$\Psi_{\text{Diquark}} = \Psi_{\text{espacio de spin}} \otimes \Psi_{\text{espacio de sabor}} \otimes \Psi_{\text{espacio de color}} \otimes \Psi_{\text{espacio-tiempo}} \quad (2.17)$$

Empezaremos con la parte de color. La composición de dos partículas descritas por la combinación lineal de los vectores **r**, **b** y **g** genera un multiplete de nueve estados [18]. Sobre

2. COMPOSICIÓN DE PARTÍCULAS

este nonete operará una transformación dada por el producto directo de matrices del grupo $SU(3)$ que se puede expresar como la suma directa de dos matrices en distintas dimensiones

$$3 \times 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (2.18)$$

que al actuar sobre el multiplete nos dice que los primeros seis estados forman un sextete y los últimos tres un triplete, es decir, el nonete se compone de dos espacios invariantes

$$\text{Sextete} = \begin{bmatrix} rr \\ bb \\ gg \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(rb + br) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(bg + gb) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(gr + rg) \end{bmatrix}, \quad \text{antitriplete} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(rb - br) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(bg - gb) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(gr - rg) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Una vez que aplicamos el subálgebra de Cartán $\mathfrak{su}(3)$ sobre el nonete obtenemos el diagrama de la figura 2.3, el cuál clasifica cada estado de acuerdo a sus números cuánticos (Y^C, I_z^C)

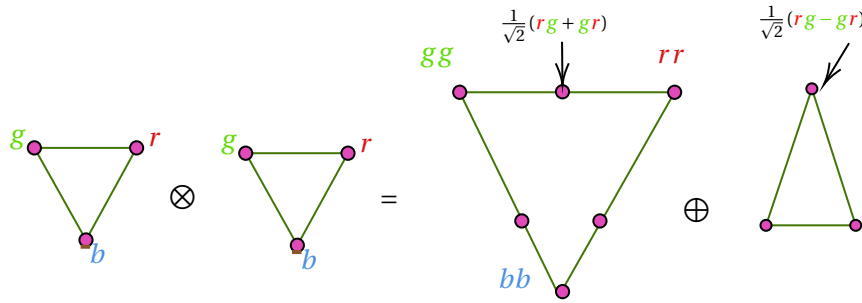


Figura 2.3: Multiplete color del diquark

en este diagrama nos damos cuenta, explícitamente, de la naturaleza simétrica del sextete y antisimétrica del triplete. Por otra parte, debemos considerar que si queremos utilizar los diquarks para el estudio de bariones solamente necesitamos la parte antisimétrica, es decir, el antitriplete, de manera que al combinarlo con otra partícula dada por la combinación lineal de los vectores de color, se obtenga un singlete de color, recordando que $\bar{3} \times 3 = 8 \oplus 1$. Con esto concluimos que el campo de color del diquark para el estudio de bariones es totalmente antisimétrico.

Ahora que conocemos la parte de color pasamos a la de sabor, tomando en cuenta la composición de dos partículas formadas de la combinación lineal de los quarks u , d y s . Esta composición sigue la misma representación que el caso de color, $3 \times 3 = 6 \oplus \bar{3}$, resultando en un nonete que se descompone en dos espacios invariantes, el sextete y el antitriplete

$$\text{Sextete} = \begin{bmatrix} uu \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(us + su) \\ dd \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(ds + sd) \\ ss \end{bmatrix}, \quad \text{antitriplete} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(us - su) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Al operar el subálgebra de Cartán $\mathfrak{su}(3)$ sobre el multiplete obtenemos los eigenvalores para clasificar cada diquark, $\frac{1}{2}\lambda_3$ para el isoespin en la tercera componente (I_3) y $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$ para la hipercarga (Y). La tabla 2.6 presenta los números cuánticos referentes a cada estado

Estado	Isoespin I	Isoespin en z (I_3)	Hipercarga Y	Carga Q	N. Bariónico B
uu	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(us + su)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
dd	1	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds + sd)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
ss	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)$	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Tabla 2.6: Números cuánticos del multiplete formado de la combinación quark-quark [17].

Nuevamente podemos encapsular todas las propiedades del multiplete en un solo diagrama (a este tipo de diagramas se les suele conocer como **root diagram** [19]). La figura 2.4 muestra cada estado del multiplete de diquarks, donde seguimos observando el comportamiento simétrico y antisimétrico ante el cambio de cualquier quark [20].

2. COMPOSICIÓN DE PARTÍCULAS

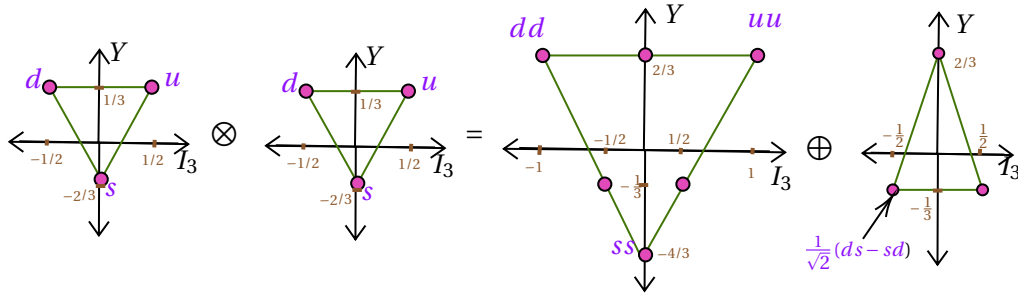


Figura 2.4: Multiplete de sabor del diquark

Con esto ya tenemos la parte referente a los campos de color, sin embargo, se deben tomar en cuenta el espín. Hasta ahorita solo hemos usado teoría de grupos para clasificar estas partículas hipotéticas, sin embargo, podrían desempeñar una gran relevancia en el estudio de la estructura de los hadrones usando modelos quark-diquarks

Parte II

Estructura interna de las partículas

Capítulo 3

Describiendo los quarks perturbativamente

EXT. CANCHA DE FUTBOL CERCANA AL CENTRO DE OBSERVACIÓN DE MENORES
DELINCUENTES.

El balón sale de la cancha y Antoine va por él. Aprovecha el descuido de los guardias para huir. Un guardia va tras él pero le pierde el rastro. Corre hasta llegar al mar. Empieza a sonar Générique Et Car De Police de Jean Constantin. Antoine avanza primero a la carrera, luego muy despacio, hacia la orilla del mar, con sus pequeñas ondulaciones. Sólo se detiene cuando la espuma empieza a lamerle la suela de los zapatos. Voltea y mira directamente cámara. Su rostro muestra atisbos de soledad y desesperanza, de una infancia rota.

Los 400 golpes,
François Truffaut

La cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es la teoría que estudia la dinámica del subespacio de color, tomando en cuenta que las partículas que en él habitan son aquellas con carga de color, es decir, los quarks. La interacción que ocurre en este subespacio se le conoce como “fuerza fuerte” y tiene un papel muy importante en la construcción de los bloques que constituyen la materia. Sabemos que existen cuatro fuerzas fundamentales en el universo: electromagnética, fuerte, débil y gravitacional, donde el estudio de las tres primeras forma lo que conocemos como el Modelo Estándar (SM por sus siglas en inglés). Cada interacción del SM habita en un subespacio diferente y se diferencian entre sí por su constante de acoplamiento, la cuál nos dice cuál es el alcance de cada una. En el caso de QCD la constante de acoplamiento es grande a bajas energías y decrece a altas energías, esto nos da dos comportamientos importantes que presentan los quarks, a bajas energías

están fuertemente ligados (confinamiento), y a altas energías parecen libres (libertad asintótica). Esto nos dice que a altas energías podemos trabajar con una teoría perturbativa, sin embargo, necesitaremos una teoría no perturbativa para el estudio de QCD a bajas energías, que es el régimen donde se tienen quarks ligados.

3.1. Interacción Fuerte

Para construir el lagrangiano de la teoría partimos de suponer un modelo libre de interacciones donde los quarks, al ser fermiones, se rigen por la ecuación de Dirac cuyo lagrangiano tiene la forma

$$\mathcal{L}_0^Q = i\bar{\Psi}_f \not{\partial} \Psi_f - m_f \bar{\Psi}_f \Psi_f, \quad \text{donde} \quad \Psi_f(x) = \begin{bmatrix} \psi_{f\textcolor{red}{r}} \\ \psi_{f\textcolor{green}{g}} \\ \psi_{f\textcolor{blue}{b}} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

el subíndice f se utiliza para etiquetar el sabor de los quarks. En este mismo modelo sabemos que los gluones tienen espín 1 y se rigen por la ecuación de Proca cuyo lagrangiano libre se expresa como

$$\mathcal{L}_0^G = -\frac{1}{4} G_i^{\mu\nu} G_{i\mu\nu}, \quad \text{donde} \quad G_i^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu C_i^\mu(x) - \partial^\mu C_i^\nu(x) \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (3.2)$$

En este lagrangiano el término C_i^μ representa los gluones y $G_i^{\mu\nu}$ el tensor de gluones. Si sumamos (3.1) y (3.2) y le aplicamos una transformación local del grupo $SU(3)$ nos resultará que el lagrangiano libre no es invariante. Debido a esto se introduce una nueva definición para la derivada, llamada derivada covariante, que el caso de QCD se define en términos de los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$

$$D^\mu = \partial^\mu + i \frac{g_s}{2} \lambda_j C_j^\mu \quad (3.3)$$

donde g_s es la constante de acoplamiento y λ_i son las matrices de Gell-Mann. Esta expresión es sumamente importante debido a que va a garantizar la simetría local del lagrangiano de QCD bajo transformaciones del grupo $SU(3)$ e introduce el campo fuerte de interacción. Este campo es el que permite que los quarks y gluones interactúen y se le conoce como un campo de norma. Al sustituir la derivada covariante en (3.1) y (3.2) podemos encontrar el lagrangiano completo de QCD con los términos libres y los términos de interacción, recordando que el gluón puede interactuar con sí mismo debido a que tiene carga de color

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_0^Q + \mathcal{L}_0^G + \mathcal{L}^{QG} + \mathcal{L}^{GG} \\ \mathcal{L}_{QCD} &= \underbrace{i\bar{\Psi}_f \not{\partial} \Psi_f - m_f \bar{\Psi}_f \Psi_f}_{\mathcal{L}_0^Q} - \underbrace{\frac{1}{4} G_i^{\mu\nu} G_{i\mu\nu}}_{\mathcal{L}_0^G} \\ &\quad - \underbrace{\frac{g_s}{2} \bar{\Psi}_f \lambda_i \Psi_f + g_s f_{ijk} C_{i\mu} C_{j\nu} \partial^\mu C_k^\nu}_{\mathcal{L}^{QG}} - \underbrace{\frac{1}{4} g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} C_j^\mu C_k^\nu C_{l\mu} C_{m\nu}}_{\mathcal{L}^{GG}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

y ciertamente es simétrico bajo transformaciones locales del grupo $SU(3)$

$$\Psi_f(x) \rightarrow \Psi'_f(x) = e^{\frac{ig_S}{2} \lambda_n \omega_n(x)} \Psi_f(x) \quad (3.5a)$$

$$\bar{\Psi}_f(x) \rightarrow \bar{\Psi}'_f(x) = \bar{\Psi}_f(x) e^{-\frac{ig_S}{2} \lambda_m \omega_m(x)} \quad (3.5b)$$

$$C_i^\mu(x) \rightarrow C'^\mu_i(x) = C_i^\mu(x) - \frac{1}{g_S} \partial^\mu \omega_i(x) - f_{ijk} \omega_j(x) C_k^\mu(x) \quad (3.5c)$$

donde ω_i es un parámetro pequeño arbitrario.

3.1.1. Resultados de la teoría

Al querer obtener resultados observables en una teoría cuántica de campos nos topamos con la dificultad de resolver ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que involucren a los campos interactuantes. Debido a esta dificultad, de momento es imposible obtener resultados analíticos exactos que funcionen como predicciones de la teoría, por lo cual se recurre a la teoría de perturbaciones para llegar a una aproximación del resultado. La expansión se desarrolla en torno a la constante de acoplamiento, donde al primer término se le conoce como *leading order* (LO), al segundo *next to leading order* (NLO) y al tercero *next to next to leading order* (NNLO). La expansión normalmente se trunca en los primeros términos debido a que la constante de acoplamiento suele ser pequeña, sin embargo, en el caso de las interacciones fuertes la constante crece con la distancia, dejando de ser pausable el truncamiento de la serie. No obstante, a distancias cortas la constante es lo suficientemente pequeña como para analizar QCD usando teoría de perturbaciones.

A pesar de que la teoría de perturbaciones tiene el potencial de aproximar resultados para una QFT, sigue siendo un proceso bastante tedioso de desarrollar. Es aquí cuando un grupo de físicos, entre ellos Feynman, idean un método más sencillo para llegar a los mismos resultados. A finales de 1940 Richard Feynman nota que existen ciertos patrones en los resultados obtenidos perturbativamente, de los cuales parte para integrar un conjunto de reglas, hoy conocidas como **reglas de Feynman**, que se asocian a cierto diagrama en concreto, **diagramas de Feynman**, y con los cuales se obtienen los mismos resultados de la expansión perturbativa.

Los resultados que obtenemos en una QFT, y que se pueden ligar con los experimentos, son las **amplitudes de transición**. Estas amplitudes nos describen la transición que existe entre un conjunto de partículas iniciales, interactuantes, y las partículas finales después de la interacción. La importancia de esta cantidad radica en que el cuadrado de su valor absoluto nos da la probabilidad de que la interacción en cuestión realmente ocurra. Así que las reglas de Feynman nos presentan un camino más eficiente de encontrar la amplitud de transición, donde todo el proceso se reduce a dos puntos clave: las interacciones y los propagadores. Las interacciones son aquellas en las que un conjunto de partículas se cruzan en un punto e

interactúan, es decir, un vértice; mientras que el propagador es aquel que lleva una partícula de una interacción a otra, gráficamente se representa por una línea. El número de vértices y propagadores dependerá de la QFT en que estemos trabajando.

3.1.1.1. Reglas de Feynman para QCD

Para el caso de QCD tenemos las siguientes reglas de Feynman, donde las primeras dos reglas abarcan los propagadores y los vértices, que, como ya mencionamos, son la base del esquema. En este caso los índices i, j, k, \dots se asocian a los ocho campos de gluón y a, b, c, \dots representan el color.

1. Para cada vértice formado por una combinación específica de partículas, se agrega el siguiente factor






Quarks - Gluón →		: $ig_s \gamma_\mu \left(\frac{\lambda_i}{2}\right)_{ab}$
3 - Gluones →		: $ig_s f_{lmn} [g_{\nu\tau}(k_3 - k_2)_\sigma + g_{\tau\sigma}(k_2 - k_1)_\nu + g_{\sigma\nu}(k_1 - k_3)_\tau]$
4 - Gluones →		: $ig_s [f_{ilm} f_{inq} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}) + f_{inm} f_{ilq} (g_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}) + f_{iln} f_{imq} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma})]$

2. A cada tipo de línea interna se le asocia un propagador que contribuye con un factor

Gluón →		: $i\delta^{ij}\Delta_0^{\mu\nu}(q) = -\frac{i\delta_{ij}}{q^2} \left[g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right]$
Quark →		: $iS_0(p) = \delta_{ab} \frac{i}{\not{p} - m}$

3. Para cada línea externa se etiquetará el estado base de la partícula correspondiente de acuerdo a su momento \mathbf{p} y \mathbf{k} , y considerando el espín para los quarks y la polarización para los gluones, ambos representados con la letra r , tomando en cuenta que los estados permitidos para los gluones solo son los transversos.

Quark entrante →		: $u_{ar}(\mathbf{p})$
-------------------------	--	------------------------

Quark saliente →		: $\bar{u}_{ar}(p)$
Antiquark entrante →		: $\bar{v}_{ar}(p)$
Antiquark saliente →		: $v_{ar}(p)$
Gluón entrante →		: $\epsilon_{ir\mu}(k)$
Gluón saliente →		: $\epsilon_{ir\mu}^*(k)$

- Se exige la conservación del 4-momento en cada vértice, es decir, el mismo que entra es el mismo que sale.
- Para cada 4-momento interno q se agrega un factor como se muestra a continuación y se integra sobre todos los 4-momentos internos

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \quad (3.6)$$

se agrega este factor por cada loop cerrado.

El resto de las reglas son bastante semejantes al caso de la electrodinámica cuántica, en este trabajo se omiten, pero pueden consultarse en los libros [18], [8] y [21]. Cabe mencionar que tanto en el desarrollo del lagrangiano de QCD como en las reglas de Feynman no se tomó en cuenta el **gluón-fantasma**, una partícula inexistente que surge como un truco matemático desarrollado por Faddeev y Popov que ayuda al análisis de la teoría y nos permite encontrar los propagadores del quark, del gluon y del gluón fantasma. Al lagrangiano que contempla este análisis se le conoce como el **lagrangiano de Faddeev-Popov**.

3.2. Experimentos de partículas

Hasta ahora sabemos que una teoría cuántica de campos nos proporciona una relación matemática que nos ayuda a describir la interacción entre dos partículas subatómicas a altas velocidades. A esta expresión la llamamos *amplitud de transición* y nos describe la relación entre un conjunto de partículas iniciales interactuantes y las partículas resultantes, siendo las reglas de Feynman el camino más fácil de encontrar dicha amplitud. Por otro lado, el cuadrado del valor absoluto de la amplitud nos da la probabilidad de que esa interacción realmente ocurra. Con esta probabilidad de interacción podemos calcular la *sección transversal de dispersión* (σ), que es la probabilidad de que un solo haz de partículas choque contra una única partícula, que llamaremos “objetivo”, confinadas en un área de tamaño unitario que es perpendicular a la velocidad relativa entre las dos partículas. Sin

embargo, resulta conveniente pensar la dispersión en términos de la *sección transversal diferencial* $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$, definida como la probabilidad de detectar una partícula dispersada por unidad de ángulo sólido, siendo σ la probabilidad total de dispersión [22]. Tanto σ como $d\sigma/d\Omega$ solo dependen de la energía inicial y del tipo de partículas que se dispersan (interaccionan), lo cual nos dice que siempre serán las mismas sin importar el experimento, y, por lo tanto, nos proporcionan una buena manera de medir la fuerza de interacción. Ahora, debido a que σ se puede calcular como la integral de la sección transversal diferencial sobre la superficie de una esfera, experimentalmente solo necesitamos encontrar $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$.

Con esta recapitulación podemos concluir que el punto donde la teoría y el experimento se interceptan es en el cálculo y medición de la sección transversal de dispersión. En particular, para el estudio del protón se suele pensar en un haz de electrones como las partículas que van a interactuar electromagnéticamente con el protón y lograrán sacarle una “fotografía” cuya nitidez dependerá de la energía inicial del haz de electrones. Existen cuatro regímenes de energía que puede tener un haz de electrones (E_{e^-}) y se describen en la tabla 3.1, donde vemos que a cada nivel se le asocia la frecuencia (ν_γ) y longitud de onda (λ_γ) del fotón virtual emitido que interactúa con el protón. También notamos que dependiendo de la relación entre λ_γ y el radio del protón (r_p) se logran observar diferentes estructuras dentro del hadrón. Por ejemplo, cuando E_{e^-} es muy grande la λ_γ es mucho más chica que r_p y el haz de electrones logra dispersar no solo los quarks, sino todo el mar de quarks dentro del protón.

3. DESCRIBIENDO LOS QUARKS PERTURBATIVAMENTE

E_{e^-}	ν_γ	λ_γ	r_p	El protón se ve como...
Muy chica	Muy chica	Muy grande	$\lambda_\gamma \gg r_p$	una partícula puntual.
Chica	Chica	Grande	$\lambda_\gamma \approx r_p$	un objeto cargado. Sirve para medir el tamaño del protón.
Grande	Grande	Chica	$\lambda_\gamma < r_p$	tres subestructuras, los quarks de valencia del protón.
Muy grande	Muy grande	Muy chica	$\lambda_\gamma \ll r_p$	un conjunto de gluones, quarks de valencia y el mar de quarks.

Tabla 3.1: Regímenes de energía que puede tener un haz de electrones en una dispersión electrón-protón.

Dependiendo del régimen de energía en que se encuentra el haz de electrones vamos a tener dos tipos de dispersión: **elástica** ó **inelástica**. La dispersión elástica es aquella en que antes y después de la dispersión se tienen las mismas partículas con las mismas masas, solo ocurre un intercambio de energía cinética sin que las partículas cambien su identidad. La figura 3.1 y la ecuación (3.7) ilustran este tipo de dispersión.

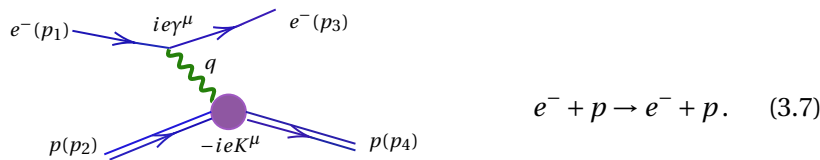


Figura 3.1: Dispersión elástica e^- -protón.

Por otro lado, la dispersión inelástica es aquella en que las partículas interactuantes no son las mismas antes y después de la dispersión; en el estado final se tienen diferentes partículas con diferentes masas. Estos casos suceden cuando el haz de electrones tiene la suficiente energía para romper el protón y crear nuevas partículas X , este proceso lo observamos en la figura 3.2 y la ecuación (3.8).

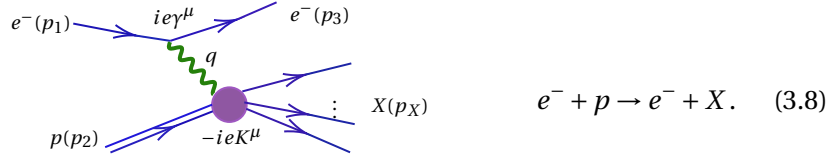


Figura 3.2: Dispersión inelástica e^- -protón.

En relación a la tabla 3.1 tendremos que en el primer y segundo régimen de energía la interacción que se da es normalmente elástica. En el tercer régimen, cuando $\lambda_\gamma < r_p$, se pueden tener cualquiera de las dos, mientras que para energías muy altas, $\lambda_\gamma \ll r_p$, normalmente son procesos inelásticos, por lo que a este tipo de dispersión se le suele conocer como **dispersión inelástica profunda**.

Hasta ahorita hemos visto que la energía del haz de electrones nos ayuda a clasificar la dispersión entre elástica o inelástica, sin embargo, la *sección transversal diferencial* también se ve modificada debido a ciertas características de la partícula que se busca estudiar. Estas características tienen que ver con el movimiento y la forma de la partícula “objetivo”.

- **Movimiento.** Al inicio toda partícula objetivo es estacionaria, sin embargo, una vez que es bombardeada por un haz de electrones pueden ocurrir dos cosas: que la partícula siga **inamovible** o que se mueva y tenga un **retroceso**.
- **Forma.** La partícula objetivo puede diferenciarse por su forma en dos categorías: **puntual** o **extendida**. La puntual es, como su nombre lo dice, una partícula tomada como un punto, mientras que una partícula extendida se considera como una nube de carga que puede tomar cualquier forma.

notamos que estas características pueden sumar a que el proceso de dispersión sea más o menos realista. La estructura de $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$ se verá modificada dependiendo de las características con que se esté tomando la partícula objetivo y el régimen de energía del haz de electrones. Resulta relevante mencionar que el movimiento es un factor importante para definir la sección transversal diferencial, pero lo es aun más la forma de la partícula. Esta importancia radica en que es posible tener términos extras en la expresión dependiendo del nivel de energía en que suceda la colisión. Estos factores adicionales nos brindan información de la estructura interna de la partícula objetivo.

Cuando nos encontramos en un régimen de energía que produce una dispersión elástica es necesario modificar $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$ agregando términos denominados **factores de forma**, $F(q)$, donde q es el 3-momento del fotón. Estos factores nos ayudan a transitar de la *sección transversal diferencial* de una partícula puntual a la *sección transversal diferencial* de una nube cargada. Mientras más complicada sea la forma de la nube más complicado será calcular la forma de $F(q)$. Los factores de forma incorporan información referente a la forma y el tamaño de la partícula extendida. Ahora, cuando la energía del haz de electrones es suficiente

para que se produzca una dispersión inelástica profunda, ya no solo necesitamos describir la forma de la nube de carga, sino que es necesario considerar que la partícula objetivo se transmutará en nuevas partículas. Las **funciones de estructura**, $W(\nu, q^2)$, son las funciones que toman en cuenta estos cambios referentes a la estructura interna, como podemos notar, son dependientes de dos variables.

A continuación revisaremos algunos ejemplos relevantes en los cuales se combinan las diferentes condiciones iniciales de interacción (características de a partícula objetivo, energía del haz de electrones). Los ejemplos se basan en los resultados dados en los libros [14], [22], [8] y [21], en este trabajo solo se presentan dichos resultados sin desarrollar los cálculos, para más detalles se pueden consultar las referencias.

❖ Dispersión elástica a una partícula puntual inamovible

Este tipo de dispersión se da entre un electrón y un muon ($e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$), siempre y cuando la masa del muon sea mucho más grande que la del electrón. Se le conoce como la *dispersión de Mott* en honor al físico Nevill Francis Mott, quien fue el primero en desarrollar esta teoría. Su *sección transversal diferencial* está dada como

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \nu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (3.9)$$

donde Z es el número total de cargas positivas en la partícula objetivo. En el caso en que consideráramos que el protón es una partícula puntual con una masa mucho mayor que la del electrón, Z tomaría el valor +1. No obstante, sabemos que el protón no es una partícula puntual, es un hadrón compuesto de subestructuras, por lo cual la ecuación (3.9) solo representa una aproximación.

❖ Dispersión elástica a una partícula puntual con retroceso

Para el caso en que seguimos trabajando con una partícula puntual pero esta retrocede bajo el bombardeo del haz de electrones tendremos que la *sección transversal diferencial* se expresa como en la ecuación (3.10). Este tipo de dispersión también se da entre un electrón y un muón.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} = \left(\frac{\alpha^2 Z^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}\right) \frac{E'}{E} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}. \quad (3.10)$$

El factor que relaciona la energía del electrón antes (E) y después (E') de la dispersión es precisamente el que describe el comportamiento de retroceso de la partícula objetivo. Se define como

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + (2E/M) \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.11)$$

❖ Dispersión elástica a una partícula extendida inamovible

El caso más sencillo en que se presenta una partícula extendida es cuando a pesar del bombardeo del haz de electrones, la partícula objetivo permanece inamovible. Para este tipo de dispersiones se toma en cuenta la interacción del electrón con una carga puntual, que vimos en la ecuación (3.9), y se multiplica por el módulo cuadrado de un factor de forma que contiene toda la información de la apariencia y tamaño de la nube de carga

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(q)|^2, \quad (3.12)$$

cuando la partícula extendida inamovible tiene forma esférica su factor de forma es justamente la transformada de Fourier de la densidad de carga $\rho(x)$

$$F(q) = \int \rho(r) e^{iq \cdot r} d^3r \quad (3.13)$$

donde esta densidad de carga está normalizada

$$\int \rho(r) d^3r = 1 \quad (3.14)$$

Como ya hemos mencionado, el factor de forma nos da información de la apariencia de la partícula extendida, en particular, podemos obtener el **radio de carga** a partir de (3.13) tomando en cuenta que $d^3r = d\varphi \sin\theta d\theta r^2 dr$

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(r) r^2 e^{iqr \cos\theta} d\varphi d\cos\theta dr \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(r) r^2 e^{iqr \cos\theta} d\cos\theta dr \end{aligned} \quad (3.15)$$

haciendo un cambio de variable

$$\begin{array}{ll} u = iqr \cos\theta & \cos\theta = 1 \rightarrow u = iqr \\ du = iqr d\cos\theta & \cos\theta = -1 \rightarrow u = -iqr \end{array}$$

nos permite llegar a que

$$\begin{aligned} F(q^2) &= 2\pi \int_0^\infty \int_{-iqr}^{iqr} \rho(r) r^2 e^u \frac{du}{iqr} dr = 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho(r) r}{iq} (e^{iqr} - e^{-iqr}) dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{2\rho(r) r}{q} \left(\frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2i} \right) dr = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \rho(r) \sin(qr) dr. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Si el momento transferido $|q|$ es pequeño, podemos expandir la función seno

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \rho(r) \left\{ qr - \frac{1}{3!} (qr)^3 + \dots \right\} dr \\
 &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr - \frac{4\pi q^2}{3!} \int_0^\infty r^4 \rho(r) dr + \mathcal{O}(q^4) \\
 &= \int \rho(r) d^3r - \frac{q^2}{6} \int r^2 \rho(r) d^3r + \mathcal{O}(q^4)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

pero sabemos que la densidad de carga esta normalizada a 1

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= 1 - \frac{q^2}{6} \int \psi^* r^2 \psi d^3r + \mathcal{O}(q^4) \\
 &= 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle + \mathcal{O}(q^4).
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Finalmente, al derivar $F(q^2)$ respecto a q^2 , evaluar la derivada en $q^2 = 0$ y despejar el radio de carga al cuadrado, tenemos que

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{\partial F(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=0} \tag{3.19}$$

❖ Dispersión elástica a una partícula extendida con retroceso

Siguiendo en el caso de una partícula extendida, pero añadiéndole la característica de que es retrocedida al recibir el impacto del haz de electrones, tenemos la *sección transversal diferencial* descrita por la ecuación (3.20). Esta expresión surge de (3.10), pero tomando en cuenta que ya no se tiene una partícula puntual.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} &= \left(\frac{\alpha^2 Z^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{E'}{E} \left\{ \left(F_1^2(q^2) - \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2^2(q^2) \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{q^2}{2M^2} (F_1^2(q^2) + \kappa F_2^2(q^2)) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nos damos cuenta de que ahora necesitamos dos factores de forma para describir la partícula extendida, además de que presenta una nueva variable κ , definida como el momento magnético anómalo de dicha partícula.

❖ Dispersión inelástica a una partícula extendida con retroceso

Al pasar a un tipo de dispersión inelástica con las características de que la partícula objetivo tiene una dimensión extendida y sufre un retroceso al ser impactada por

los electrones, la *sección transversal diferencial* debe contar con funciones de estructura que nos describan la forma y transmutación de la partícula. La ecuación (3.21) encapsula estas características, notando que es la expresión de la sección transversal diferencial con respecto a la energía

$$\left(\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \frac{\alpha^2 Z^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}. \quad (3.21)$$

La interacción que se da en este proceso es $e^- + p \rightarrow e^- + X$ y las funciones de estructura se pueden conocer hasta después de realizarse el experimento.

Por otra parte, suponiendo que el protón esta constituido de componentes puntuales elementales, la dispersión debería de ser elástica, es decir, la expresión (3.21) tendría que ser igual a (3.10) al derivarse con respecto a E' , que es el caso de una dispersión elástica para una partícula puntual con retroceso. Para que se cumpla esta igualdad las funciones de estructura tienen que tener la forma

$$2W_1^{\text{Puntual}} = \frac{Q^2}{2m_q^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_q}\right) \quad ; \quad W_2^{\text{Puntual}} = \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_q}\right) \quad (3.22)$$

donde m_q es la masa de la partícula puntual, no la masa total del protón, $Q^2 = -q^2$ es el cuadrado del 4-momento transferido del fotón, $\nu = \frac{p \cdot q}{m_q}$ es la energía transferida al protón por medio del haz de electrones. Al usar las propiedades de la delta de Dirac podemos hacer que (3.22) sea adimensional, tal que

$$2m_q W_1^{\text{Puntual}} = \frac{Q^2}{2m_q \nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m_q \nu}\right) \quad ; \quad \nu W_2^{\text{Puntual}} = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m_q \nu}\right) \quad (3.23)$$

de esta última expresión podemos renombrar la fracción del momento $x = \frac{Q^2}{2m_q \nu}$, llamada *variable de escalamiento de Bjorken*, y lo importante de esto radica en que las funciones de estructura ahora son independientes de las variables (ν, q^2) , solo dependen de x .

3.2.1. Punto de intersección

En secciones anteriores hablamos que Gell-Mann y Zweig plantearon la idea de que los hadrones, que hasta este punto se habían convertido en un problema en la década de los 50 al no saber cómo clasificarlos, estaban compuestos por elementos primarios a los que Gell-Mann denominó quarks. Con este planteamiento lograron darle una clasificación a los hadrones mediante el modelo de quarks en 1964, sin embargo, los quarks seguían siendo considerados como trucos matemáticos que resultaban de utilidad, no como partículas reales, su comprensión se basaba en especulaciones. Posterior a esto, en 1968, el laboratorio SLAC

comprobó mediante un experimento de dispersión inelástica profunda la hipótesis del físico James Bjorken, quien sostenía que los protones estaban formados por objetos puntuales libres. Con esta misma línea de pensamiento Feynman denomina estas partículas constituyentes del protón como partones, los cuales, después de muchas mediciones y desarrollo teórico, se llegó a la conclusión de que eran justamente los quarks y gluones. Con este pequeño recuento de los hechos ocurridos en la segunda mitad del siglo pasado, notamos que fue necesario recorrer un camino en el que la teoría y el experimento se entrelazaban para finalmente converger en una única conclusión: los quarks eran más que simples objetos matemáticos, son partículas fundamentales constituyentes de la materia.

3.2.2. Otro experimento importante en QCD

Por último solo mencionaremos un experimento relevante en física de partículas, la producción de **jets de hadrones** a partir de la **colisión electrón-positrón a altas energías**. En este tipo de interacción inelástica genera como partículas finales pares de leptón-antileptón (muon-antimuon ó tau-antitau), sin embargo, en estas colisiones también se puede llegar a un par quark-antiquark. La figura 3.3 y la ecuación (3.24) muestran esta interacción.

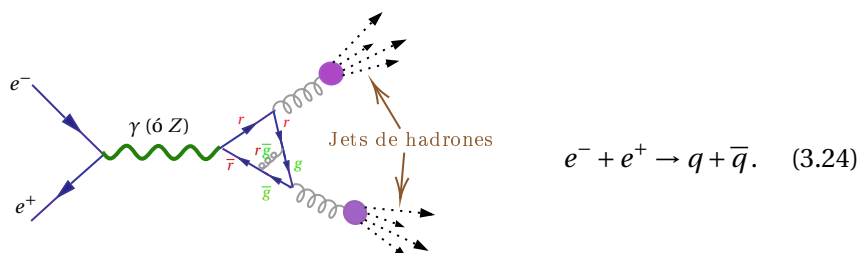
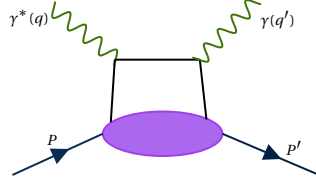


Figura 3.3: Colisión electrón-positrón.

Cuando este tipo de interacción ocurre necesitamos recordar que los quarks pueden parecer “libres” al estar a altas energías, pero el confinamiento se incrementa a distancias grandes, así que eventualmente formarán dos jets de hadrones cuya dirección es la misma que llevaba el quark y antiquark que los originaron. Al proceso de que dos quarks se transformen en jets de hadrones se le conoce como *fragmentación* [8].

3.2.3. Dispersión de Compton Profundamente Virtual

Otro experimento posible de emular en un laboratorio es la dispersión de Compton virtual (VCS por sus siglas en inglés), el cuál es proceso de interacción que involucra a dos fotones en el que al menos uno de ellos es virtual [23]. De manera más estricta, el VCS que mencionaremos en este trabajo es aquel en el que un fotón virtual, generado a través de la electroproducción de fotones, es absorbido por un hadron (normalmente un protón) que permanece en su estado inicial después de la interacción, emitiendo un fotón real. La figura 3.4 muestra la VCS que acabamos de describir.



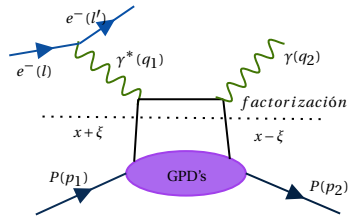
$$\gamma^* P \rightarrow \gamma P. \quad (3.25)$$

Figura 3.4: Dispersión de Compton Virtual.

La VCS en la región de Bjorken ¹ se le conoce como dispersión de Compton profundamente virtual (DVCS por sus siglas en inglés) y corresponde al proceso en que el momento del protón inicial y final serán diferentes. Los trabajos [24] y [25] proponen que utilizar la DVCS resulta de gran utilidad para el estudio de los quarks y gluones dentro del protón, ya que la dinámica no perturbativa no se describe por distribuciones partónicas ordinarias, si no que se requieren funciones más generales, llamadas distribuciones partónicas generalizadas (GPD por sus siglas en inglés). Las mediciones a partir de DVCS comenzaron a inicios de los 2000 en el Jefferson Lab y en el laboratorio DESY [26].

3.2.3.1. Distribución de partones generalizada

Los últimos años las GPDs ha representado una herramienta poderosa en el estudio de los mesones y bariones [27]. Nos brindan la estructura de las funciones de distribución partónica y los factores de forma para los quarks y gluones, partículas constituyentes de los hadrones. La figura 3.5 nos muestra que el experimento a partir del cual podemos extraer dichas funciones es DVCS.



$$e^- P \rightarrow e^- P \gamma. \quad (3.26)$$

Figura 3.5: Proceso DVCS

Las GPDs son transformadas de Fourier en el cono de luz de un elemento matricial no diagonal de un operador de dos localidades. Se etiquetan por la función $H^q(x, \xi, t)$, que, para el caso en de un hadrón de espín-0, la GPD del quark al término de LO en el límite de Bjorken se expresa, de acuerdo al trabajo de Nabil Chouika [26], como:

$$H_\pi^q(x, \xi, t) = \frac{1}{2} \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ixP^+ z^-} \left\langle \pi, P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{\psi}^q \left(-\frac{z}{2} \right) \gamma^+ \psi^q \left(\frac{z}{2} \right) \right| \pi, P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle \Bigg|_{\substack{z^+=0 \\ z_\perp=0}}, \quad (3.27)$$

¹Zona en la que Q^2 es grande y las funciones de estructura solo dependen de la variable de escalamiento, ya no de Q^2 y v de manera independiente [14].

donde definen las variables de la siguiente manera

- $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$ es el momento promedio de los estados del hadrón entrante y el hadrón saliente,
- $\Delta = P_2 - P_1$ es el momento transferido,
- $t = \Delta^2$ es la variable Mandelstam del momento transferido,
- $x = \frac{k^+}{p^+}$ es la fracción del momento longitudinal promedio de los quarks,
- $\xi = -\frac{\Delta^+}{2P^+}$ es la fracción del momento longitudinal transferido, la variable *skewness*.

En el límite donde $P_2 = P_1$ la variable *skewness* se hace cero [28], $\xi = 0$, y como consecuencia la GPD se reduce a la definición de la función de distribución de partones (PDF por sus siglas en inglés) usual

$$H_\pi^q(x, 0, 0) = q_\pi(x) \quad (3.28)$$

Por otra parte, al integrar la ecuación (3.27) sobre x nos lleva a la definición del factor de forma electromagnético (FF por sus siglas en inglés), así, se llega a que el momento cero de Mellin de la GPD del quark es la contribución del quark al factor de forma electromagnético [26]

$$\int_{-1}^1 H_\pi^q(x, \xi, t) dx = F_\pi^q(t) \quad (3.29)$$

En otras palabras, las GPD nos dan una tomografía en 3D de la estructura espacial de los hadrones, siendo una generalización de los factores de forma y las funciones de distribución partónica [29].

En un enfoque de teoría cuántica de campos, hay dos maneras de calcular las GPD, [26]:

i) **Enfoque covariante.**

Se basa en un análisis diagramático y covariante. Se le conoce como cálculo de diagramas triangulares. Tiene la ventaja de que obtenemos una GPD en todo el dominio cinemático, sin embargo, presenta anomalías entorno a simetrías discretas.

ii) **Enfoque del cono de luz.**

Este enfoque consiste en considerar el desarrollo en el espacio de Fock en términos de la función de onda del frente de luz (LFWF por sus siglas en inglés). A este método se le conoce como Overlap Representation y es justamente el que se utiliza en esta tesis para llegar a la GPD del diquark, en los trabajos [30], [31], [32] y [33] se encuentra el desarrollo del método.

Capítulo 4

Estudiando los quarks de manera no perturbativa

Bajan de las bicicletas y observan el río que fluye debajo del puente.

NIKO

¿Esto fluye hacia el océano?

HIRAYAMA

Sí, al océano.

NIKO

¿Quieres ir?

HIRAYAMA

La próxima vez.

NIKO

¿Cuándo será eso?

HIRAYAMA

La próxima vez será la próxima vez.

NIKO

¿Y cuándo será eso?

HIRAYAMA

La próxima vez será la próxima vez. Ahora es ahora.

NIKO

La próxima vez será la próxima vez. Ahora es ahora.

Días perfectos,
Wim Wenders.

Una QFT normalmente está desarrollada con aproximaciones perturbativas, en este contexto, las interacciones son tratadas como pequeñas perturbaciones de campos libres y los observables se calculan usando series de potencias. Los datos experimentales nos han mostrado que esta teoría funciona muy bien en un amplio rango de energías obteniendo resultados sorprendentemente acertados con los experimentos [34], sin embargo, existen varias situaciones donde un análisis perturbativo ya no es suficiente, lo que nos lleva a concluir que QFT perturbativa no es la teoría final.

El estudio de una teoría no perturbativa comenzó tan pronto como la comunidad científica notó que más allá del nivel árbol cada término de la expansión diverge [35], por lo cual se deben quitar esas divergencias renormalizando la teoría. Usualmente para renormalizarla se utiliza un parámetro de regularización para separar las partes finitas de las divergencias. Posteriormente, se emplea algún esquema de renormalización para quitar las divergencias. Después del proceso de renormalización, la expansión perturbativa tenía un gran éxito en QED.

Algunos de los problemas que QFT perturbativa no puede responder son el confinamiento en la teoría de la QCD y el rompimiento dinámico de la simetría¹ quiral (DCSB). En el caso del confinamiento, se ha visto que el parámetro de acoplamiento α_s disminuye cuando los quarks se encuentran a altas energías dejando que interactúen con poca intensidad, es decir, tienen una *libertad asintótica* que les permite moverse casi como si estuviesen libres sin olvidar que siguen dentro de una sopa de quarks y gluones. Pero si nos movemos a bajas energías, donde viven los hadrones, sucede algo curioso, el parámetro de acoplamiento α_s se hace mas intenso de tal manera que si intento separarlos aumenta su *confinamiento*. Este fenómeno es invisible en una QFT perturbativa pero es posible estudiarlo en el régimen no perturbativo [37].

Por otro lado, también a bajas energías, vemos que el quark adquiere masa entre 300 y 400 MeV más de lo que se presenta fundamentalmente. Ésto nos dice que existen dos mecanismos que dotan de masa a las partículas: el Higgs y las interacciones fuertes, de hecho, el 98% de la masa total del protón proviene de las interacciones fuertes, por lo cual se dice que se puede generar masa dinámicamente a través de las interacciones que van vistiendo a las partículas. Este fenómeno es conocido como el DCSB y solo se puede estudiar no perturbativamente.

Para estudiar una QFT en regímenes no perturbativos se han desarrollado varias aproximaciones, entre ellas se encuentra *Lattice QCD* y las *Ecuaciones de Schwinger Dyson (SDE)*.

¹La energía era enorme al principio del universo, pero, al irse enfriando, se fueron perdiendo varias simetrías en un proceso que se le llama *ruptura espontanea de la simetría*. Por esta razón se cree que al principio del universo existía una sola fuerza fundamental, y al romperse esta simetría surgieron las 4 fuerzas fundamentales que hoy conocemos [36].

4.1. Ecuaciones de Schwinger Dyson

Las SDE pueden ser consideradas como las ecuaciones de Euler-Lagrange de una QFT. Son una torre infinita de ecuaciones integrales acopladas que estan compuestas por funciones de Green [38]. Resolver estas ecuaciones equivale a resolver la teoría, por lo cual, se puede asegurar que una QFT esta resuelta cuando se conocen todas las funciones de Green. Sin embargo, es imposible resolver estas SDE con las herramientas matemáticas que tenemos hasta ahora, ésto debido a que son infinitas en número y están acopladas entre sí. La única manera en que se pueden resolver es truncándolas.

La figura 4.1 muestra la expansión perturbativa [39] del propagador de fermión completo en su forma diagramática

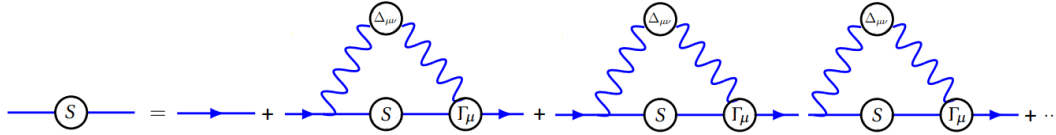


Figura 4.1: Expansión perturbativa del propagador de fermión

si esto lo traducimos a notación matemática tendremos

$$S_F(k) = S_F^0(k) + [S_F^0(k)] [\Sigma(k)] [S_F^0(k)] + [S_F^0(k)] [\Sigma(k)] [S_F^0(k)] [\Sigma(k)] [S_F^0(k)] + \dots \quad (4.1)$$

donde la expresión $\Sigma(k)$ es la autoenergía del fermión, la cual engloba todas las correcciones radiativas que aparecen en el propagador de fermión¹. Factorizamos $S_F^0(k) \Sigma(k)$ de la ecuación anterior

$$S_F(k) = S_F^0(k) + S_F^0(k) \Sigma(k) (S_F^0(k) + S_F^0(k) \Sigma(k) S_F^0(k) + \dots) \quad (4.2)$$

Notamos que la expresión que está entre el paréntesis es la definición de $S_F(k)$ que se da en (4.1), por lo cual

$$S_F(k) = S_F^0(k) + S_F^0(k) \Sigma(k) S_F(k) \quad (4.3)$$

Para llegar a una expresión más amigable multiplicamos (4.3) por $S_F^{-1}(k)$

$$1 = S_F^0(k) S_F^{-1}(k) + S_F^0(k) \Sigma(k) \quad (4.4)$$

ahora, esta expresión la multiplicamos por $S_F^{0-1}(k)$

$$S_F^{0-1}(k) = S_F^{-1}(k) + \Sigma(k) \quad (4.5)$$

¹Existen tres tipos de correcciones radiativas: 1. Del propagador de fermión, 2. del propagador de fotón, 3. del vértice fermión-fotón [39]

y despejando $S_F^{-1}(k)$ tenemos

$$S_F^{-1}(k) = S_F^{0-1}(k) - \Sigma(k) \quad (4.6)$$

En 4 dimensiones [40] $\Sigma(k)$ esta definida como

$$\Sigma(k) = ie^2 \int_M \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^\nu S_F(p) \Gamma^\mu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (4.7)$$

donde $q = k - p$ y M indica que esta descrita en el espacio de Minkowski. Por lo tanto, la ecuación de Schwinger Dyson para el fermión en 4 dimensiones es

$$S_F^{-1}(k) = S_F^{0-1}(k) - ie^2 \int_M \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^\nu S_F(p) \Gamma^\mu(k, p) \Delta_{\mu\nu}(q) \quad (4.8)$$

y su expresión diagramática

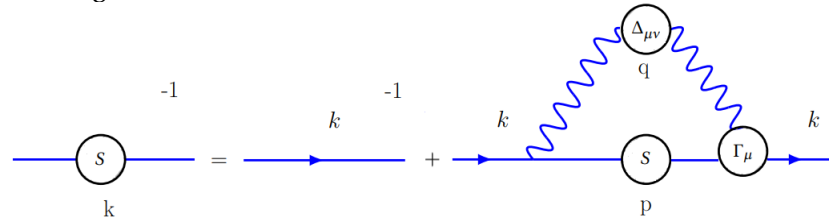


Figura 4.2: Ecuación de Schwinger Dyson para el fermión ó ecuación del gap

A la ecuación (4.8) también se le conoce como la *ecuación del gap* por su característica de contener tanto una solución perturbativa como una no perturbativa.

Bajo la misma idea es posible obtener la SDE para el propagador del fotón, para el vértice fermión-fotón y toda la pila infinita de SDE. Para el caso del fotón se tiene la siguiente ecuación de Schwinger Dyson en 4 dimensiones y su respectivo diagrama

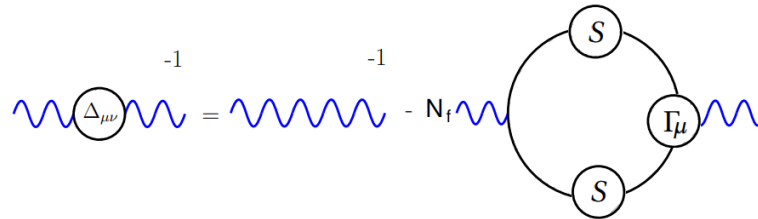


Figura 4.3: Ecuación de Schwinger Dyson para el fotón

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1}(q) = \Delta_{\mu\nu}^{0-1} - ie^2 N_f \int_M \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^\nu S_F(p) \Gamma_\mu(k, p) S_F(k) \quad (4.9)$$

donde N_f es el número de sabores para los fermiones. Los términos $S_F^0(k)$ y $\Delta_{\mu\nu}^0(q)$ son los propagadores del fermión y del fotón, donde el superíndice cero los diferencia de los

propagadores completos

$$S_F^0(k) = \frac{1}{k - m_0} \quad (4.10)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^0(q) = \frac{1}{q^2} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (4.11)$$

Anteriormente ya habíamos mencionado que para poder dar solución a estas ecuaciones es necesario truncarlas. En el régimen no perturbativo, este truncamiento, por las razones de simplificación y conveniencia, se da en las primeras dos SDE, es decir, se desacoplan los propagadores de fermión y fotón (4.8, 4.9). Sin embargo, como podemos notar, estas ecuaciones también tienen dependencia del vértice fermión-fotón Γ_μ . Este *Ansatz* no puede ser cualquier *Ansatz*, debe cumplir con la invariancia de norma y en general con las características fundamentales de la teoría [40].

Debemos notar que las ecuaciones en esta sección están descritas en el espacio de Minkowski, para pasarlo al espacio Euclidiano necesitamos implementar rotaciones de Wick. En [38, 40] nos proporcionan una transcripción directa de elementos en el espacio de Minkowski y su equivalente al espacio Euclidiano.

Minkowski	Euclidiano
$\int_M d^4 q$	$\rightarrow i \int_E d^4 q$
a^μ	$\rightarrow -i a_\mu$
γ^μ	$\rightarrow \gamma_\mu$
$a \cdot b$	$\rightarrow -a \cdot b$
\not{a}	$\rightarrow -i \not{a}$

(4.12)

donde E indica que se encuentran en el espacio Euclidiano.

4.2. Ecuaciones de Bethe-Salpeter

La Ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) describe estados ligados de dos partículas como lo son los mesones y los diquarks. Esta ecuación se traduce como

$$\Gamma(k; P) = \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \chi(q; P) \gamma_\mu \quad (4.13)$$

donde la función $\chi(q; P)$ es la función de onda de Bethe-Salpeter (BSWF) descrita en términos de los propagadores del quark

$$\chi(q; P) = S(q + P) \Gamma(q; P) S(q) \quad (4.14)$$

Diagramáticamente, podemos observar la ecuación de Bethe-Salpeter como

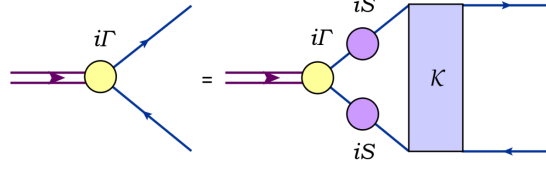


Figura 4.4: Ecuación de Bethe-Salpeter

en dicho diagrama tenemos que las dos líneas entrantes representan los quarks entrantes y la función $i\Gamma(P)$ es la amplitud de Bethe-Salpeter (BSA) y para el caso de los mesones y tomando en cuenta que no depende del momento relativo se expresa como

$$\Gamma_M(P) = \gamma_5 \left[iE_M(P) + \frac{\gamma \cdot P}{M_M} F_M(P) \right] \quad (4.15)$$

en la ecuación también podemos observar que involucra los propagadores de los quarks $S(q)$ y un kernel de interacción representado por la caja en color azul y dentro de ella vienen todas las interacciones que pueden pasar entre los quarks.

Parte III

Modelo Algebraico para el diquark

Capítulo 5

Modelo Algebraico

DAVID

¿Quieres quedarte para otra?

MIA

No... Deberíamos irnos.

Él asiente. Se levantan de sus asientos y se dirigen a la salida. Justo cuando llegan a la puerta y David sale, Mia se vuelve y mira a Sebastian. Él la mira a ella. Sus ojos se cruzan. Un atisbo de lágrima en ambos...

Y, muy sutilmente, durante un fugaz segundo, Mia sonríe. Es el tipo de sonrisa que podrías perderte si parpadeas... pero es suficiente para indicar a Sebastian que ha reconocido la melodía que ha tocado, y que aún la recuerda, y aún piensa en ella al día de hoy...

La La Land,
Damien Chazelle

En este capítulo se desarrolla un modelo algebraico para describir la estructura interna del diquark. Este modelo se tomó del trabajo realizado en [5] gracias al cual obtenemos las expresiones para el propagador del quark y la Amplitud de Bethe-Salpeter (BSA) para desarrollar la función de onda de Bethe-Salpeter (BSWF) en el frente de luz y con ello calcular las amplitudes de distribución partónica generalizadas (GPD), las funciones de distribución partónicas (PDF) y los factores de forma (FF) elásticos de mesones de una manera directa.

5.1. Función de Onda de Bethe-Salpeter

Sabemos que la BSWF nos ayuda a describir la dinámica interna de nuestra partícula en cuestión. Se compone del producto de la BSA (Γ_{0^+}) y los propagadores del quark up y down

$(S_{u(d)})$. Gracias al trabajo hecho en [41] sabemos que para el caso del diquark la BSWF tiene la siguiente forma

$$\chi_{0+}(k_-, P) = S_u(k) \Gamma_{0+}(k_-, P) C^\dagger S_d(k - P) \quad (5.1)$$

donde

$$\begin{aligned} k_- &= k - \frac{P}{2} \\ P^2 &= -m_{0+}^2 \end{aligned}$$

siendo m_{0+} la masa del diquark y los subíndices u y d la etiqueta para referirnos al quark *up* y *down* respectivamente.

Ahora definimos el ansatz para el propagador del quark *up* y *down*

$$S_{u(d)}(k) = [-i\gamma \cdot k + M_{u(d)}] \Delta(k^2, M_{u(d)}^2) \quad (5.2)$$

donde $M_{u(d)}$ es la masa dinámicamente generada del quark *up(down)* vestido y la función $\Delta(s, t)$ esta definida como

$$\Delta(s, t) = \frac{1}{s + t}$$

Por otra parte, el ansatz propuesto para la BSA, tomando los trabajos hechos en [42] y [43], es

$$n_{0+} n_\rho \Gamma_{0+}(k, P) C^\dagger = \frac{1}{2} i \gamma_5 \int_{-1}^1 d\omega \rho_{0+}(\omega) [\hat{\Delta}(k_\omega^2, \Lambda_\omega^2)]^\nu \quad (5.3)$$

donde $\rho_{0^2}(\omega)$ es la densidad espectral cuya forma determina el comportamiento puntual de la BSA asociada; n_{0+} es la constante de normalización canónica relacionada del diquark y n_ρ es la constante de normalización de la densidad espectral. Además se define

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(s, t) &= t \Delta(s, t) \\ k_\omega &= k + \left(\frac{\omega}{2}\right) P \end{aligned}$$

Notemos que hemos definido una función $\Lambda_\omega^2 \equiv \Lambda^2(\omega)$ en (5.3), lo cual es un punto fundamental en el modelo. Normalmente este término se toma como una constante masiva, pero en este caso la tomaremos como una función que depende de ω y que más adelante

nos ayudará a simplificar algunas integrales para así resolverlas de manera analítica. En este punto aún no sabemos que forma debería tener, pero al ir avanzando en el proceso averiguaremos su estructura.

El otro punto importante en modelo es el parámetro libre ν , el cual nos ayuda a controlar el comportamiento asintótico de la BSA. Este parámetro puede tener ligeras variaciones que nos ayuden a describir mejor la estructura interna de la partícula.

Con todo esto en mente, podemos reescribir la ecuación (5.3) tomando en cuenta que

$$k_{-\omega} = k_- + \frac{\omega}{2}P = k - \frac{P}{2} + \frac{\omega}{2}P = k_{\omega-1}$$

y así la ecuación (5.3) se reescribe como

$$\Gamma_{0^+}(k_-, P) C^\dagger = \frac{1}{2 n_\rho n_{0^+}} i\gamma_5 \int_{-1}^1 d\omega \rho_{0^+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} \left[\Delta(k_{\omega-1}^2, \Lambda_\omega^2) \right]^\nu \quad (5.4)$$

Ahora sustituimos (5.2) y (5.4) en (5.1), es decir, $S_{u(d)}$ y Γ_{0^+} en χ_{0^+}

$$\begin{aligned} \chi_{0^+}(k_-, P) &= S_u(k) \Gamma_{0^+}(k_-, P) C^\dagger S_d(k-P) \\ &= [-i\gamma \cdot k + M_u] \Delta(k^2, M_u^2) \\ &\quad \times \frac{1}{2 n_\rho n_{0^+}} i\gamma_5 \int_{-1}^1 d\omega \rho_{0^+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} \left[\Delta(k_{\omega-1}^2, \Lambda_\omega^2) \right]^\nu \\ &\quad \times [-i\gamma \cdot (k-P) + M_d] \Delta((k-P)^2, M_d^2) \\ &= \frac{1}{2 n_\rho n_{0^+}} [-i\gamma \cdot k + M_u] i\gamma_5 [-i\gamma \cdot (k-P) + M_d] \Delta(k^2, M_u^2) \Delta((k-P)^2, M_d^2) \\ &\quad \times \int_{-1}^1 d\omega \rho_{0^+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} \left[\Delta(k_{\omega-1}^2, \Lambda_\omega^2) \right]^\nu \end{aligned} \quad (5.5)$$

analizamos los términos en naranja y verde por separado.

■ Analizamos los términos en naranja

Para este cálculo debemos tener muy presente el orden en que están las matrices γ

$$\begin{aligned}
[-i\gamma \cdot k + M_u] i\gamma_5 [-i\gamma \cdot (k - P) + M_d] &= [(-i\gamma \cdot k)(i\gamma_5) + M_u i\gamma_5] [-i\gamma \cdot k + i\gamma \cdot P + M_d] \\
&= [(\gamma \cdot k)\gamma_5 + iM_u\gamma_5] [-i\gamma \cdot k + i\gamma \cdot P + M_d] \\
&= [(\gamma \cdot k)\gamma_5(-i\gamma \cdot k) + (\gamma \cdot k)\gamma_5(i\gamma \cdot P) + (\gamma \cdot k)\gamma_5 M_d \\
&\quad + (iM_u\gamma_5)(-i\gamma \cdot k) + (iM_u\gamma_5)(i\gamma \cdot P) + iM_u\gamma_5 M_d] \\
&= [-i(\gamma \cdot k)\gamma_5(\gamma \cdot k) + i(\gamma \cdot k)\gamma_5(\gamma \cdot P) + (\gamma \cdot k)\gamma_5 M_d \\
&\quad + M_u\gamma_5(\gamma \cdot k) - M_u\gamma_5(\gamma \cdot P) + iM_u\gamma_5 M_d]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

cuando se tiene un γ_5 al cambiarlo de posicion se le pone un $(-)$, por ejemplo

$$\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu = -\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \tag{5.7}$$

con lo que

$$\begin{aligned}
[-i\gamma \cdot k + M_u] i\gamma_5 [-i\gamma \cdot (k - P) + M_d] &= [i\gamma_5(\gamma \cdot k)^2 - i\gamma_5(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot P) - \gamma_5(\gamma \cdot k)M_d \\
&\quad + \gamma_5(\gamma \cdot k)M_u - \gamma_5 M_u(\gamma \cdot P) + \gamma_5 iM_u M_d] \\
&= -\gamma_5 [M_u(\gamma \cdot P) + (\gamma \cdot k)(M_d - M_u) \\
&\quad + i(-k^2 + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot P) - M_u M_d)]
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Notamos que si

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{5.9}$$

entonces

$$\sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu = \frac{1}{2} [(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) k_\mu P_\nu] \tag{5.10}$$

pero usamos que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{5.11}$$

asi, al desarrollar (5.10)

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu &= \frac{i}{2} [(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu) k_\mu P_\nu] \\
&= \frac{i}{2} [(2\gamma^\mu \gamma^\nu - (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)) k_\mu P_\nu] \\
&= \frac{i}{2} [(2\gamma^\mu \gamma^\nu - 2g^{\mu\nu}) k_\mu P_\nu] \\
&= i [(\gamma^\mu k_\mu)(\gamma^\nu P_\nu) - (k^\nu P_\nu)] \\
&= i[(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot P) - (k \cdot P)]
\end{aligned} \tag{5.12}$$

con lo que podemos reescribir el término $i(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot P)$ como

$$i(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot P) = \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu + i(k \cdot P) \tag{5.13}$$

y de esta manera la parte naranja se reduce a

$$\begin{aligned}
 [-i\gamma \cdot k + M_u] i\gamma_5 [-i\gamma \cdot (k - P) + M_d] &= -\gamma_5 [M_u(\gamma \cdot P) + (\gamma \cdot k)(M_d - M_u) \\
 &\quad + i(-k^2 + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot P) - M_u M_d)] \\
 &= -\gamma_5 [M_u(\gamma \cdot P) + (\gamma \cdot k)(M_d - M_u) \\
 &\quad + \sigma_{\mu\nu} k_\mu p_\nu + i(-k^2 + k \cdot P - M_u M_d)] \\
 &= \mathcal{M}(k, P)
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde definimos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(k, P) \equiv & -\gamma_5 [M_u(\gamma \cdot P) + (\gamma \cdot k)(M_d - M_u) \\
 & + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu + i(-k^2 + k \cdot P - M_u M_d)]
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

■ Analizamos los términos en verde

Estos términos los agrupamos en una nueva función que llamamos $\mathcal{D}(k, P)$

$$\mathcal{D}(k, P) \equiv \Delta(k^2, M_u^2) [\Delta(k_{\omega-1}^2, \Lambda_\omega^2)]^\nu \Delta((k-P)^2, M_d^2) \tag{5.16}$$

Tomando la parametrización de Feynman (revisar el [Apéndice A](#)) podemos reescribir esta nueva función, ya que, de acuerdo a la definición de la función $\Delta(s, t)$, tenemos

$$\Delta(k^2, M_u^2) = \frac{1}{k^2 + M_u^2} = \frac{1}{C} \tag{5.17a}$$

$$\Delta(k_{\omega-1}^2, \Lambda_\omega^2) = \frac{1}{k_{\omega-1}^2 + \Lambda_\omega^2} = \frac{1}{A} \tag{5.17b}$$

$$\Delta((k-P)^2, M_d^2) = \frac{1}{(k-P)^2 + M_d^2} = \frac{1}{B} \tag{5.17c}$$

es decir, tenemos algo de la forma $\frac{1}{A^\nu B C}$, y la parametrización de Feynman para ese caso es

$$\frac{1}{A^\nu B C} = \frac{(-1)^{2\nu} \Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 du \int_0^{1-u} \frac{u^{\nu-1}}{[uA + \nu B + C(1-u-\nu)]^{\nu+2}} dv \tag{5.18}$$

donde, en este caso, las constantes son

$$A = k_{\omega-1}^2 + \Lambda_\omega^2 \tag{5.19a}$$

$$B = (k-P)^2 + M_d^2 \tag{5.19b}$$

$$C = k^2 + M_u^2 \tag{5.19c}$$

al sustituir estos valores en el denominador del integrando tenemos

$$\sigma = [uA + vB + C(1 - u - v)] = [u(k_{\omega-1}^2 + \Lambda_{\omega}^2) + v((k - P)^2 + M_d^2) + (k^2 + M_u^2)(1 - u - v)] \quad (5.20)$$

renombramos

$$k_{\omega-1} = k + \frac{1}{2}P(\omega - 1) = k + \frac{1}{2}P\tilde{\omega} \quad (5.21)$$

y así

$$\begin{aligned} \sigma &= [uk_{\omega-1}^2 + u\Lambda_{\omega}^2 + (k - P)^2 v + M_d^2 v + k^2 - uk^2 - vk^2 + M_u^2 - uM_u^2 - vM_u^2] \\ &= v(M_d^2 - M_u^2) + M_u^2(1 - u) + u\Lambda_{\omega}^2 + R \end{aligned} \quad (5.22)$$

hemos definido R por separado para poder simplificar dichos términos

$$R = uk_{\omega-1}^2 + (k - P)^2 v + k^2 - uk^2 - vk^2 \quad (5.23)$$

y al desarrollarlo obtenemos

$$\begin{aligned} R &= u\left(k + \frac{1}{2}P\tilde{\omega}\right)^2 + (k^2 + P^2 - 2kP)v + k^2 - uk^2 - vk^2 \\ &= P^2\left(v + \frac{1}{4}\tilde{\omega}^2 u\right) - 2kP\left(v - \frac{1}{2}\tilde{\omega}u\right) + k^2 \\ &\quad + \left(v - \frac{1}{2}u\tilde{\omega}\right)^2 P^2 - \left(v - \frac{1}{2}u\tilde{\omega}\right)^2 P^2 \\ &= P^2\left(v + \frac{1}{4}\tilde{\omega}^2 u\right) + \left[k - \left(v - \frac{1}{2}u\tilde{\omega}\right)P\right]^2 - \left(v - \frac{1}{2}u\tilde{\omega}\right)^2 P^2 \\ &= P^2\left(v + \frac{1}{4}\tilde{\omega}^2 u\right) + \left[k - \left(v - \frac{1}{2}u\tilde{\omega}\right)P\right]^2 - \frac{1}{4}(2v - u\tilde{\omega})^2 P^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Con esto, el denominador de la integral se reduce a

$$\begin{aligned} \sigma &= v[M_d^2 - M_u^2] + M_u^2(1 - u) + u\Lambda_{\omega}^2 + P^2\left(v + \frac{1}{4}\tilde{\omega}^2 u\right) \\ &\quad + \left[k - \left(v - \frac{1}{2}u\tilde{\omega}\right)P\right]^2 - \frac{1}{4}(2v - u\tilde{\omega})^2 P^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Podemos hacer el siguiente cambio de variable

$$\beta = 1 - u, \quad \alpha = v - \frac{1}{2}u\tilde{\omega} \rightarrow \frac{1}{2}u\tilde{\omega} = v - \alpha \quad (5.26)$$

con lo que

$$\sigma = v[M_d^2 - M_u^2] + M_u^2\beta + u\Lambda_{\omega}^2 + P^2\left(v + \frac{1}{4}\tilde{\omega}^2 u\right) + [k - \alpha P]^2 - \alpha^2 P^2 \quad (5.27)$$

pero, de acuerdo a nuestro cambio de variable y recordando que $\tilde{\omega} = -(1 - \omega)$, podemos reescribir nuestras variables originales

$$u = 1 - \beta \quad (5.28a)$$

$$v = \alpha + \frac{1}{2}u\tilde{\omega} = \alpha + \frac{1}{2}(1 - \beta)\tilde{\omega} = \alpha - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \omega) \quad (5.28b)$$

y con esto reescribimos σ

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[\alpha - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \omega) \right] [M_d^2 - M_u^2] + M_u^2\beta + (1 - \beta)\Lambda_\omega^2 + [k - \alpha P]^2 - \alpha^2 P^2 \\ &\quad + P^2 \left[\alpha - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \omega) + \frac{1}{4}[-1(1 - \omega)]^2(1 - \beta) \right] \\ &= \left[\alpha - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \omega) \right] [M_d^2 - M_u^2] + M_u^2\beta + (1 - \beta)\Lambda_\omega^2 + [k - \alpha p]^2 - \alpha^2 P^2 \\ &\quad + P^2 \left[\alpha - \frac{1}{4}(1 - \beta) [2(1 - \omega) - (1 - \omega)^2] \right] \end{aligned} \quad (5.29)$$

simplificamos esta última expresión

$$\begin{aligned} \sigma &= [k - \alpha P]^2 + M_u^2\beta + (1 - \beta)\Lambda_\omega^2 + \left[\alpha - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \omega) \right] [M_d^2 - M_u^2] - \alpha^2 P^2 \\ &\quad + P^2 \left[\alpha - \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \omega^2) \right] \\ &= [k - \alpha P]^2 + M_u^2\beta + (1 - \beta)\Lambda_\omega^2 + \left[\alpha - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \omega) \right] (M_d^2 - M_u^2) \\ &\quad - P^2 \left[\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \omega^2) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

renombramos

$$\begin{aligned} \Omega_{0+}^2 &\equiv M_u^2\beta + (1 - \beta)\Lambda_\omega^2 + (M_d^2 - M_u^2) \left[\alpha - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \omega) \right] \\ &\quad - P^2 \left[\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \omega^2) \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

y así, simplemente tenemos que

$$\sigma = [k - \alpha P]^2 + \Omega_{0+}^2 \quad . \quad (5.32)$$

De esta manera, el término en verde se reescribe

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^\nu B C} &= \frac{(-1)^{2\nu} \Gamma(\nu + 2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 du \int_0^{1-u} \frac{u^{\nu-1}}{\underbrace{[uA + vB + C(1 - u - v)]^{\nu+2}}_\sigma} dv \\ &= \frac{(-1)^{2\nu} \Gamma(\nu + 2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 du \int_0^{1-u} \frac{u^{\nu-1}}{\sigma^{\nu+2}} dv = \mathcal{D}(k, P). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Notemos que Ω_{0+}^2 es el único término que contiene la función Λ_ω^2 , por lo que debemos rastrear este término a lo largo de los cálculos.

Reescribiendo la BSWF

Usando las ecuaciones (5.15) y (5.33) podemos reescribir (5.5), la BSWF

$$\begin{aligned} (2) \quad (n_\rho) n_{0+} \chi_{0+}(k_-, P) &= \mathcal{M}(k, P) \int_{-1}^1 d\omega \rho_{0+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} \mathcal{D}(k, P) \\ &= \mathcal{M}(k, P) \int_{-1}^1 d\omega \rho_{0+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} \frac{(-1)^{2\nu} \Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 du \int_0^{1-u} \frac{u^{\nu-1}}{\sigma^{\nu+2}} dv \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde, en este caso, $\sigma = \sigma(\omega, u, v)$, pero para poder usar la expresión dada en (5.32) donde $\sigma = \sigma(\omega, \alpha, \beta)$ necesitamos reescribir los límites de integración en (5.34). Para el cambio de variable usamos las definiciones dadas en (5.26), con lo que el cambio de $u \rightarrow \beta$

$$\begin{aligned} u &= 1 - \beta & u = 0 &\rightarrow \beta = 1 \\ du &= -d\beta & u = 1 &\rightarrow \beta = 0 \end{aligned}$$

mientras que para el cambio de $v \rightarrow \alpha$

$$\begin{aligned} \alpha &= v - \frac{1}{2}(1 - \beta)(\omega - 1) & v = 0 &\rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(\beta - 1)(\omega - 1) \\ v &= \alpha + \frac{1}{2}(1 - \beta)(\omega - 1) & v = 1 - u &\rightarrow \alpha = 1 - (1 - \beta) - \frac{1}{2}(1 - \beta)(\omega - 1) \\ dv &= d\alpha & &= \frac{1}{2}[\beta(1 + \omega) - (\omega - 1)] \end{aligned}$$

así, con el cambio de variable, la ecuación (5.34) se transforma a

$$\begin{aligned} (2) \quad (n_\rho) n_{0+} \chi_{0+}(k_-, P) &= \mathcal{M}(k, P) \frac{(-1)^{2\nu} \Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_{-1}^1 d\omega \int_1^0 (-d\beta) \\ &\quad \times \int_{\frac{1}{2}(\beta-1)(\omega-1)}^{\frac{1}{2}[\beta(1+\omega)-(\omega-1)]} \phi(\omega, \alpha, \beta) d\alpha \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde

$$\phi(\omega, \alpha, \beta) = \rho_{0+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} \frac{u^{\nu-1}}{\sigma^{\nu+2}}. \quad (5.36)$$

Finalmente cambiamos el orden de integración primero entre α y β y posteriormente entre ω y α ; con esto llegamos a

$$\begin{aligned} \chi_{0+}(k, P) &= \mathcal{M}(k, p) \frac{(-1)^{2\nu} \Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} d\omega \int_{\frac{2\alpha}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 d\omega \int_{\frac{2\alpha+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times \frac{\rho_{0+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} (1 - \beta)^{\nu-1}}{(2) \quad (n_\rho) n_{0+} \sigma^{\nu+2}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

esta es la función de onda de Bethe-Salater con la que vamos a trabajar, la cual está dada en términos de la densidad espectral $\rho_{0^+}(\omega)$ que no conocemos.

5.2. Función de onda del Frente de Luz

El siguiente paso es calcular la función de onda del frente de luz (LFWF), la cual expresamos como ψ_{0^+} . Gracias al trabajo realizado en [41] sabemos que la forma de la LFWF para el diquark es

$$f_{0^+} \psi_{0^+}(x, k_{\perp}^2) = \text{Tr}_{CD} \int_{dk_{\parallel}} \delta(n \cdot k - xn \cdot P) \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_{0^+}(k_{\perp}, P) \quad (5.38)$$

donde f_{0^+} es la constante de decaimiento diquark y n es el cuadrivector del frente de luz, tal que $n^2 = 0$ y $n \cdot P = -m_{0^+}$. La traza Tr_{CD} indica que se aplica sobre los índices de color (C) y sobre los espinores de Dirac (D). Además, sin pérdida de generalidad usamos que

$$\int dk_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \int d^2 k_{\parallel} \quad (5.39)$$

Notamos que para obtener ψ_{0^+} bastaría con sustituir χ_{0^+} de (5.37) en (5.38), pero no podríamos trabajar con esta expresión por la delta de Dirac que involucra. Debido a esto necesitamos un camino alternativo que nos ayude a obtener ψ_{0^+} en términos de la densidad espectral. Este camino recae en primero calcular la distribución de momentos de Mellin para la LFWF y de aquí obtener una expresión para ψ_{0^+} .

La distribución de momentos de Mellin la podemos expresar como

$$\langle x^m \rangle_{\psi_{0^+}} = \int_0^1 dx x^m \psi_{0^+}(x, k_{\perp}^2) \quad (5.40)$$

y aquí sustituimos ψ_{0^+} de la ecuación (5.38)

$$f_{0^+} \langle x^m \rangle_{\psi_{0^+}} = \text{Tr}_{CD} \int_{dk_{\parallel}} \int_0^1 dx x^m \delta(n \cdot k - xn \cdot P) \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_{0^+}(k_{\perp}, P) \quad (5.41)$$

nos damos cuenta que ahora si podemos deshacernos de la delta al integrar sobre x

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^m \delta(n \cdot k - xn \cdot P) &= \int_0^1 dx x^m \delta\left(-\frac{n \cdot P}{n \cdot P}(xn \cdot P - n \cdot k)\right) \\ &= \int_0^1 dx x^m \frac{1}{|-n \cdot P|} \delta\left(\frac{1}{n \cdot P}(xn \cdot P - n \cdot k)\right) \\ &= \int_0^1 dx x^m \frac{1}{n \cdot P} \delta\left(x - \frac{n \cdot k}{n \cdot P}\right) \\ &= \frac{1}{n \cdot P} \left(\frac{n \cdot k}{n \cdot P}\right)^m \end{aligned} \quad (5.42)$$

y con esto la ecuación (5.41) se reduce a

$$f_{0^+} \langle x^m \rangle_{\psi_{0^+}} = \frac{1}{n \cdot P} \text{Tr}_{\text{CD}} \int_{dk_{\parallel}} \left(\frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right)^m \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_{0^+}(k_{\perp}, P) \quad . \quad (5.43)$$

Ahora ya podemos usar la expresión para χ_{0^+} que obtuvimos en (5.37) y sustituirla en (5.43)

$$\begin{aligned} f_{0^+} \langle x^m \rangle_{\psi_{0^+}} &= \frac{1}{n \cdot P} \frac{(-1)^{2\nu} \Gamma(\nu + 2)}{\Gamma(\nu)} \int_{dk_{\parallel}} \left(\frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right)^m N_c \text{Tr}_D \{ \gamma_5 \gamma \cdot n \mathcal{M}(k, P) \} \\ &\quad \times \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} d\omega \int_{\frac{2\alpha}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 d\omega \int_{\frac{2\alpha+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times \frac{\rho_{0^+}(\omega) \Lambda_{\omega}^{2\nu} (1-\beta)^{\nu-1}}{2 n_{\rho} n_{0^+} \sigma^{\nu+2}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

donde N_c representa el término que involucra la traza sobre los índices de color, que, de acuerdo a [41], se tiene que $N_c = 2$ para el caso del diquark, ya que los diquarks considerados son correlaciones color antitriplete. Para evitar cargar con un factor numérico extra vamos a quedarnos con la etiqueta N_c durante todo el cálculo hasta que sea necesario hacer la sustitución al momento de calcular la constante de decaimiento.

El proceso para obtener ψ_{0^+} se basa en tres pasos tomando como partida la expresión (5.44). Primero calcularemos la traza sobre los índices de Dirac, con esto tendremos claro qué términos dependen de la variable k . Como segundo paso debemos calcular la integral respecto a k . Finalmente, como último paso necesitaremos agrupar la expresión de la distribución de los momentos de Mellín de tal manera que se obtenga una expresión similar a la inicial, (5.40), y así podamos extraer los términos correspondientes a ψ_{0^+} . Estos tres pasos se detallan a continuación.

1. Calculando la traza sobre los índices de Dirac

A partir de (5.44) calculamos el término que involucra la traza, recordando que la función $\mathcal{M}(k, P)$ definida en (5.15) también contiene funciones gamma que contribuyen al cálculo

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma \cdot n \mathcal{M}(k, P) \} &= \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma \cdot n (-\gamma_5) [M_u(\gamma \cdot P) + (\gamma \cdot k)(M_d - M_u) + \sigma_{\mu\nu} k_{\mu} P_{\nu} \\ &\quad + i(-k^2 + k \cdot P - M_u M_d)] \} \\ &= - [\text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma \cdot n \gamma_5 M_u(\gamma \cdot P) \} + \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma \cdot n \gamma_5 (\gamma \cdot k)(M_d - M_u) \} \\ &\quad + \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma \cdot n \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} k_{\mu} P_{\nu} \} + \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma \cdot n \gamma_5 i(-k^2 + k \cdot P - M_u M_d) \}] \\ &= - [A + B + C + D] \end{aligned} \quad (5.45)$$

dividimos la traza en cuatro términos para evitar cometer errores en el cálculo. Empezamos calculando la traza del término A

$$\begin{aligned} A &= \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma \cdot n \gamma_5 M_u(\gamma \cdot P) \} = n_{\beta} P_{\nu} M_u \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma_{\beta} \gamma_5 \gamma_{\nu} \} = n_{\beta} P_{\nu} M_u \text{Tr} \{ -\gamma_{\beta} \gamma_{\nu} \} \\ &= -n_{\beta} P_{\nu} M_u 4g_{\beta\nu} = -4M_u n \cdot P \end{aligned} \quad (5.46)$$

ahora calculamos la traza del término B

$$\begin{aligned} B &= \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma \cdot n \gamma_5 (\gamma \cdot k) (M_d - M_u)\} = n_\beta k_\nu (M_d - M_u) \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\beta \gamma_5 \gamma_\nu\} \\ &= n_\beta k_\nu (M_d - M_u) \text{Tr}\{-\gamma_\beta \gamma_\nu\} = -4 (M_d - M_u) n \cdot k \end{aligned} \quad (5.47)$$

para calcular la traza C debemos tomar en cuenta que $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ y que la traza de un número impar de matrices gamma es cero

$$\begin{aligned} C &= \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma \cdot n \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu\} = n_\beta k_\mu P_\nu \frac{i}{2} \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\beta \gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)\} \\ &= n_\beta k_\mu P_\nu \frac{i}{2} [\text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\beta \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} - \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\beta \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu\}] \\ &= n_\beta k_\mu P_\nu \frac{i}{2} [\text{Tr}\{-\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu\} - \text{Tr}\{-\gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\mu\}] = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

finalmente, al calcular la traza D tenemos

$$D = \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma \cdot n \gamma_5 i (-k^2 + k \cdot P - M_u M_d)\} = 0 \quad (5.49)$$

Ahora que hemos calculado todas las trazas nos damos cuenta que solo el término A y B contribuyen al resultado, así que sustituimos (5.46) y (5.47) en (5.45)

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma \cdot n \mathcal{M}(k, P)\} &= -(-4 M_u n \cdot P - 4 (M_d - M_u) n \cdot k) \\ &= 4 n \cdot P \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right] \end{aligned} \quad (5.50)$$

y este último resultado (ecuación (5.50)) lo sustituyo en (5.44)

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle_{\psi_{0^+}} &= 4 \mathcal{N}_c \frac{(-1)^{2\nu} \Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_{dk_\parallel} \left(\frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right)^m \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right] \\ &\quad \times \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} d\omega \int_{\frac{2\alpha}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 d\omega \int_{\frac{2\alpha+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times \frac{\rho_{0^+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} (1-\beta)^{\nu-1}}{\mathcal{Z} \mathcal{N}_\rho f_{0^+} n_{0^+} \sigma^{\nu+2}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

así ya podemos realizar la integral sobre k , que es el siguiente paso.

2. Realizando la integral sobre k

De la expresión (5.44) podemos extraer la integral sobre k y la definimos como I_k

$$I_k = \int_{dk_\parallel} \frac{(n \cdot k)^m}{\sigma^{\nu+2}} \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right] = \int_{dk_\parallel} T \quad (5.52)$$

5. MODELO ALGEBRAICO

Para resolverla debemos notar que es posible descomponer k en la suma de su componente paralela y perpendicular respecto a n

$$k = k_{\parallel} + k_{\perp}$$

de manera que satisface

$$\begin{aligned} n \cdot k &= n \cdot k_{\parallel} \quad , \\ n \cdot k_{\perp} &= 0 \quad , \\ k^2 &= k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \quad . \end{aligned}$$

Ahora aplicamos un cambio de variable en el integrando de (5.52), al cuál hemos nombrado T , de tal manera que $k \rightarrow k + \alpha P$. Este cambio de variable también se debe aplicar sobre la función σ que definimos en (5.32)

$$\begin{aligned} T &= \frac{(n \cdot k)^m}{\sigma^{v+2}} \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot k}{n \cdot P} \right] = \frac{(n \cdot (k + \alpha P))^m}{(k^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot (k + \alpha P)}{n \cdot P} \right] \\ &= \frac{(n \cdot k + \alpha n \cdot P)^m}{(k^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot k + \alpha n \cdot P}{n \cdot P} \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

esta última expresión la podemos simplificar tomando en cuenta las propiedades de k que acabamos de revisar y aplicamos la integral

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot (k_{\parallel} + k_{\perp}) + \alpha n \cdot P)^m}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot (k_{\parallel} + k_{\perp}) + \alpha n \cdot P}{n \cdot P} \right] \\ &= \int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot k_{\parallel} + \cancel{n \cdot k_{\perp}}^0 + \alpha n \cdot P)^m}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot k_{\parallel} + \cancel{n \cdot k_{\perp}}^0 + \alpha n \cdot P}{n \cdot P} \right] \\ &= \int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P)^m}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \left[M_u + (M_d - M_u) \frac{n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P}{n \cdot P} \right] \quad . \end{aligned} \quad (5.54)$$

resulta conveniente separar en dos términos esta integral, de tal manera que

$$\begin{aligned} I_k &= M_u \int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P)^m}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} + \frac{M_d - M_u}{n \cdot P} \int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P)^{m+1}}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \\ &= M_u I_{k_m} + \frac{M_d - M_u}{n \cdot P} I_{k_{m+1}} \quad . \end{aligned} \quad (5.55)$$

Para simplificar I_{k_m} y $I_{k_{m+1}}$ de (5.55) tenemos que realizar una expansión binomial sobre el numerador del integrando. Recordamos la definición de una expansión binomial

$$(x + y)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} y^j \quad , \quad \binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \quad (5.56)$$

traslapando esta idea a una forma general de las integrales I_{k_m} y $I_{k_{m+1}}$ tendremos

$$\int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P)^{m+l}}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} = \sum_{j=0}^{m+l} \binom{m+l}{j} (\alpha n \cdot P)^{m+l-j} \int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot k_{\parallel})^j}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \quad (5.57)$$

Debido al carácter antisimétrico de (5.57) las integrales con exponente $j = \text{impar}$ son trivialmente cero. Cuando el exponente es par y diferente de cero, las integrales son proporcionales a $(n \cdot n)^j$, pero dado que $n^2 = 0$, dichas integrales también son cero. Por ejemplo, para $j = 2$ tenemos

$$\int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot k_{\parallel})^{j=2}}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} = n_{\mu} n_{\nu} \int_{dk_{\parallel}} \frac{k_{\parallel\mu} k_{\parallel\nu}}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \sim n_{\mu} n_{\nu} g_{\mu\nu} = n^2 = 0 \quad (5.58)$$

tomando esto en cuenta podemos concluir que solo el término con $j = 0$ contribuirá a la expansión de (5.57), y con esa conclusión podemos tratar las integrales I_{k_m} y $I_{k_{m+1}}$

$$\begin{aligned} \blacksquare I_{k_m} &= \int_{dk_{\parallel}} \frac{[n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P]^{m+l}}{[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2]^{v+2}} \stackrel{j=0}{=} \binom{m}{0} (\alpha n \cdot P)^m \int_{dk_{\parallel}} \frac{(n \cdot k_{\parallel})^0}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \\ &= 1 (\alpha n \cdot P)^m \int_{dk_{\parallel}} \frac{1}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \blacksquare I_{k_{m+1}} &= \int_{dk_{\parallel}} \frac{[n \cdot k_{\parallel} + \alpha n \cdot P]^{m+l}}{[k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2]^{v+2}} \stackrel{j=0}{=} \binom{m+1}{0} (\alpha n \cdot P)^{m+1} \int_{dk_{\parallel}} \frac{1}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \\ &= 1 (\alpha n \cdot P)^{m+1} \int_{dk_{\parallel}} \frac{1}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \end{aligned} \quad (5.60)$$

Ahora que reescribimos estas integrales, (5.59) y (5.60), podemos sustituirlas en (5.55) y simplificar, ya que usar la definición de expansión binomial nos ayudó a tener solo una integral que resolver

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{dk_{\parallel}} \frac{1}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \times \left[M_u (\alpha n \cdot P)^m + \frac{(M_d - M_u)}{n \cdot P} (\alpha n \cdot P)^{m+1} \right] \\ &= (\alpha n \cdot P)^m [M_u + \alpha (M_d - M_u)] \int_{dk_{\parallel}} \frac{1}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2)^{v+2}} \quad (5.61) \end{aligned}$$

Lo único que nos resta hacer es realizar la integral de (5.61) y para eso tomamos en cuenta que

$$\int_{dk_{\parallel}} = \frac{1}{\pi} \int d^2 k_{\parallel} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_{\parallel} k_{\parallel} = \int_0^{\infty} dk_{\parallel}^2$$

así que la integral que tenemos que resolver ahora es

$$\int_{dk_{\parallel}} \frac{1}{\left(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2\right)^{v+2}} = \int_0^{\infty} \frac{dk_{\parallel}^2}{\left(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2\right)^{v+2}} \quad (5.62)$$

para resolverla hacemos un cambio de variable e integramos

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2 & k_{\parallel}^2 = \infty \rightarrow u = \infty + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2 = \infty \\ du = dk_{\parallel}^2 & k_{\parallel}^2 = 0 \rightarrow u = k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2 \end{array}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dk_{\parallel}^2}{\left(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2\right)^{v+2}} = \int_{k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2}^{\infty} u^{-v-2} du = \frac{u^{-v-1}}{-v-1} \Big|_{k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2}^{\infty} = \frac{(v+1)^{-1}}{\left[k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2\right]^{v+1}} \quad (5.63)$$

Con esto ya logramos calcular la integral sobre k , sustituyendo (5.63) en (5.61)

$$I_k = (\alpha n \cdot P)^m \frac{[M_u + \alpha (M_d - M_u)]}{(v+1) [k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2]^{v+1}} \quad (5.64)$$

3. Extrayendo ψ_{0+} de la distribución de momentos de Mellin

Podemos expresar la dispersión de momentos de Mellín en términos de la integral que calculamos en el paso anterior

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle_{\psi_{0+}} &= \frac{(-1)^{2v} \Gamma(v+2)}{\Gamma(v)} I_k \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} d\omega \int_{\frac{2\alpha}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 d\omega \int_{\frac{2\alpha+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times 4N_c \left(\frac{1}{n \cdot P} \right)^m \frac{\rho_{0+}(\omega) \Lambda_{\omega}^{2v} (1-\beta)^{v-1}}{2n_{\rho} f_{0+} n_{0+}} \end{aligned} \quad (5.65)$$

para simplificar esta expresión necesitamos recordar las propiedades de la función gamma

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \end{aligned}$$

con lo que las funciones gamma se reducen a

$$\frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} = \frac{(\nu+2-1)!}{(\nu-1)!} = \frac{(\nu+1)!}{(\nu-1)!} = \frac{(\nu+1)(\nu)(\nu-1)!}{(\nu-1)!} = (\nu+1)\nu \quad (5.66)$$

Ahora podemos sustituir el valor de I_k que obtuvimos en (5.65) así como (5.66) en (5.65) y simplificamos la expresión

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle_{\psi_{0^+}} &= 4N_c(-1)^{2\nu} \nu (\nu+1) \left(\frac{1}{n \cdot P} \right)^m \int_0^1 d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} d\omega \int_{\frac{2\alpha}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 d\omega \int_{\frac{2\alpha+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times \frac{\rho_{0^+}(\omega) \Lambda_\omega^{2\nu} (1-\beta)^{\nu-1}}{2n_\rho f_{0^+} n_{0^+}} (\alpha n \cdot P)^m \frac{[M_u + \alpha(M_d - M_u)]}{(\nu+1) [k_\perp^2 + \Omega_{0^+}^2]^{\nu+1}} \\ &= \frac{4N_c(-1)^{2\nu} \nu}{2n_\rho f_{0^+} n_{0^+}} \int_0^1 \alpha^m d\alpha \left[\int_{-1}^{1-2\alpha} d\omega \int_{\frac{2\alpha}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2\alpha}^1 d\omega \int_{\frac{2\alpha+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times [M_u + \alpha(M_d - M_u)] \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_\omega^{2\nu} \rho_{0^+}(\omega)}{[k_\perp^2 + \Omega_{0^+}^2]^{\nu+1}} \end{aligned} \quad (5.67)$$

aplicamos un cambio de variable en (5.67) haciendo $\alpha \rightarrow x$, esto con la intención de poder comparar nuestra expresión con la definición inicial de la distribución de los momentos de Mellin

$$\begin{aligned} \langle x^m \rangle_{\psi_{0^+}} &= \frac{4N_c(-1)^{2\nu} \nu}{2n_\rho f_{0^+} n_{0^+}} \left[\int_0^1 x^m dx \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 d\omega \int_{\frac{2x+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \right. \\ &\quad \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_\omega^{2\nu} \rho_{0^+}(\omega)}{[k_\perp^2 + \Omega_{0^+}^2]^{\nu+1}} \end{aligned} \quad (5.68)$$

finalmente, al comparar (5.68) con (5.40) podemos extrapolar las expresiones y concluir que ψ_{0^+} debe tener la siguiente forma

$$\begin{aligned} \psi_{0^+}(x, k_\perp^2) &= \frac{4N_c(-1)^{2\nu} \nu}{2n_\rho f_{0^+} n_{0^+}} \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 d\omega \int_{\frac{2x+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_\omega^{2\nu} \rho_{0^+}(\omega)}{[k_\perp^2 + \Omega_{0^+}^2]^{\nu+1}} \quad (5.69) \end{aligned}$$

Para no cargar con tantas constantes defino una nueva constante A que absorba todas

$$A = \frac{4 N_c N_c(-1)^{2\nu}}{(2) n_\rho f_{0^+} n_{0^+}} \quad (5.70)$$

con lo que la función de onda del frente de luz se reduce a tener

$$\begin{aligned} \psi_{0^+}(x, k_\perp^2) &= A \nu \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 d\omega \int_{\frac{2x+(\omega-1)}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{(1-\beta)^{\nu-1} \Lambda_\omega^{2\nu} \rho_{0^+}(\omega)}{[k_\perp^2 + \Omega_{0^+}^2]^{\nu+1}} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Nuevamente llegamos a una expresión dada en términos de la densidad espectral ρ_{0+} que sigue siendo desconocida.

5.3. Amplitud de distribución partónica

Hasta el momento tenemos la BSWF y la LFWF definidas en nuestro modelo como funciones que dependen de ρ_{0+} , ahora queremos obtener la amplitud de distribución partónica (PDA) en términos de esta misma ρ_{0+} . En el trabajo de Ya Lu [41] se tiene la siguiente definición para la PDA, que denotaremos como ϕ_{0+}

$$f_{0+} \phi_{0+}(x) = \text{Tr}_{\text{CD}} \int_{dk_{\parallel}} \delta(n \cdot k - xn \cdot P) \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_{0+}(k, P) \quad (5.72)$$

notamos que esta expresión y la dada para ψ_{0+} en (5.38) son muy similares, esto nos dice que dentro del formalismo de cuantización en el cono de luz, podemos obtener una conexión inmediata entre la LFWF y la PDA. Tomando (5.38) y (5.72) podemos llegar a la siguiente relación que nos ayudará a calcular ϕ_{0+}

$$\phi_{0+} = \frac{1}{16\pi^3} \int d^2 k_{\perp} \psi_{0+}(x, k_{\perp}^2) \quad (5.73)$$

donde, de acuerdo a [41], debe cumplirse que

$$\int_0^1 dx \phi_{0+}(x) = 1 \quad . \quad (5.74)$$

En la ecuación (5.71) ya tenemos la LFWF en términos de ρ_{0+} , así que simplemente sustituimos esa expresión en (5.73) y resolvemos la integral para k_{\perp}

$$\begin{aligned} \phi_{0+}(x) = & \frac{1}{16\pi^3} \int d^2 k_{\perp} A v \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 d\omega \int_{\frac{2x+\omega-1}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ & \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{(1-\beta)^{v-1} \Lambda_{\omega}^{2v} \rho_{0+}(\omega)}{[k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2]^{v+1}} \end{aligned} \quad (5.75)$$

la integral sobre k_{\perp} la resuelvo aparte nuevamente tomando en cuenta que

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 k_{\perp} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp} = \int_0^{\infty} dk_{\perp}^2 \quad .$$

Para resolverla necesito hacer un cambio de variable

$$\begin{aligned} u = k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2 & \quad k_{\perp}^2 = \infty \rightarrow u = \infty + \Omega_{0+}^2 = \infty \\ du = dk_{\perp}^2 & \quad k_{\perp}^2 = 0 \rightarrow u = \Omega_{0+}^2 \end{aligned}$$

$$\int d^2 k_{\perp} \frac{1}{[k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2]^{v+1}} = \pi \int_0^{\infty} dk_{\perp}^2 \frac{1}{[k_{\perp}^2 + \Omega_{0+}^2]^{v+1}} = \int_{\Omega_{0+}^2}^{\infty} du u^{-v+1} = \frac{\pi}{v} \frac{1}{\Omega_{0+}^{2v}} \quad (5.76)$$

sustituimos este resultado de la integral (5.76) en (5.75)

$$\begin{aligned} \phi_{0+}(x) = \frac{A}{16\pi^2} & \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 d\omega \int_{\frac{2x+\omega-1}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ & \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{(1-\beta)^{v-1} \Lambda_{\omega}^{2v} \rho_{0+}(\omega)}{\Omega_{0+}^{2v}} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Ahora, para garantizar que nuestra PDA este normalizada introducimos una constante de normalización F_N que absorbe el resto de las constantes y asegura que se cumpla (5.74)

$$\begin{aligned} \phi_{0+}(x) = \frac{1}{F_N} & \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 d\omega \int_{\frac{2x+\omega-1}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ & \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{(1-\beta)^{v-1} \Lambda_{\omega}^{2v} \rho_{0+}(\omega)}{\Omega_{0+}^{2v}} . \end{aligned} \quad (5.78)$$

Aquí ya tenemos la construcción de la PDA en términos de la densidad espectral ρ_{0+} , así que bastaría con que nos dieran la forma de la densidad espectral del diquark para poder integrar de manera numérica y conocer su amplitud de distribución partónica, sin embargo nos enfrentamos al problema de no conocer la forma de ρ_{0+} .

A continuación se presenta el cálculo para obtener la constante de decaimiento del diquark y posterior a eso, en una de las subsecciones, estudiaremos la importancia de tener Λ_{ω}^2 como una función de ω y no siendo una constante, ya que esto resuelve el problema de no conocer la ρ_{0+} .

5.3.1. Constante de decaimiento del diquark

Anteriormente vimos que F_N es es factor de normalización que absorbe todas las constantes, con lo que al sustituir el valor de A tenemos que

$$\frac{1}{F_N} = \frac{A}{16\pi^2} = \frac{\frac{4N_c(-1)^{2v}}{2f_{0+}n_{\rho}n_{0+}}}{16\pi^2} = \frac{1}{4} \frac{N_c(-1)^{2v}}{2f_{0+}n_{\rho}n_{0+}\pi^2} \quad (5.79)$$

pero, como $(-1)^{2v}$ siempre es 1, llegamos a que F_N es

$$F_N = \frac{4}{N_c} 2 n_{\rho} f_{0+} n_{0+} \pi^2 \quad (5.80)$$

y al despejar de (5.80) la constante de decaimiento

$$f_{0^+} = \frac{N_c F_N}{(4)(2)n_\rho n_{0^+} \pi^2} \quad . \quad (5.81)$$

En este trabajo se toma que la constante de normalización del diquark se relaciona con la constante de decaimiento dado un factor de $\sqrt{2}$

$$n_{0^+} = \sqrt{2} f_{0^+} \Rightarrow f_{0^+} = \frac{1}{\sqrt{2}} n_{0^+} \quad (5.82)$$

con esto en mente podemos igualar (5.81) y (5.82)

$$\frac{N_c F_N}{(4)2n_\rho n_{0^+} \pi^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} n_{0^+} \quad (5.83)$$

de esta última expresión despejo n_{0^+}

$$n_{0^+} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} N_c F_N}{(4)2n_\rho \pi^2}} \quad (5.84)$$

finalmente sustituimos (5.84) en (5.81) para obtener la constante de decaimiento

$$f_{0^+} = \frac{N_c F_N}{(4)2n_\rho \pi^2 \sqrt{\frac{\sqrt{2} N_c F_N}{(4)2n_\rho \pi^2}}} = \sqrt{\frac{N_c F_N}{2n_\rho (4) \sqrt{2} \pi^2}} \quad . \quad (5.85)$$

Para el caso del diquark ya vimos que de acuerdo a [41] tenemos que $N_c = 2$, así que su constante de decaimiento se reduce a

$$f_{0^+} = \sqrt{\frac{F_N}{4\sqrt{2}\pi^2 n_\rho}} \quad (5.86)$$

donde n_ρ sabemos que es la constante de normalización de la densidad espectral, más adelante veremos cómo se calcula.

5.3.2. Importancia de la función Λ_ω^2

En este punto ya conocemos la forma de la PDA dada en (5.78), sin embargo, no podemos continuar con los cálculos analíticamente ya que no podemos realizar las integrales con respecto a β y ω . Es aquí donde radica la importancia de la función Λ_ω^2 .

En particular, la integral sobre β en (5.78) no la podemos realizar debido a que tenemos dos términos que dependen de β , $(1 - \beta)^{\nu-1}$ y la función $\Omega_{0^+}^2$. Para poder integrar sobre β

necesitamos manipular la función Ω_{0+}^2 de tal manera que se logre eliminar su dependencia de β . En (5.31) definimos Ω_{0+}^2 tal que

$$\Omega_{0+}^2(\omega, x, \beta) \equiv M_u^2 \beta + (1 - \beta) \Lambda_\omega^2 + (M_d^2 - M_u^2) \left[x - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 - \omega) \right] - P^2 \left[x(x - 1) + \frac{1}{4}(1 - \beta)(1 - \omega^2) \right]$$

notamos que justamente involucra la función Λ_ω^2 , así que este término lo apartaremos e intentaremos manipular la expresión para que se elimine β

$$\begin{aligned} \Omega_{0+}^2(\omega, x, \beta) &\equiv (1 - \beta) \Lambda_\omega^2 + M_u^2 \beta + x(M_d^2 - M_u^2) - P^2 x(x - 1) + M_u^2 - M_u^2 \\ &\quad - (1 - \beta) \left[\frac{1}{2}(M_d^2 - M_u^2)(1 - \omega) + \frac{1}{4}P^2(1 - \omega^2) \right] \\ &= M_u^2 + x(M_d^2 - M_u^2) - P^2 x(x - 1) + (1 - \beta) \Lambda_\omega^2 \\ &\quad - (1 - \beta) \left[\frac{1}{2}(M_d^2 - M_u^2)(1 - \omega) + \frac{1}{4}P^2(1 - \omega^2) + M_u^2 \right] \end{aligned} \quad (5.87)$$

en (5.87) podemos analizar que si queremos que $\Omega_{0+}^2 = \Omega_{0+}^2(x)$, es decir, que solo dependa de x , necesitamos forzosamente que nuestra función Λ_ω^2 sea definida como

$$\Lambda_\omega^2 \equiv \Lambda^2(\omega) = \mathbf{M}_u^2 + \frac{1}{4}(1 - \omega^2)P^2 + \frac{1}{2}(1 - \omega)(\mathbf{M}_d^2 - \mathbf{M}_u^2) \quad (5.88)$$

Con esta definición efectivamente garantizamos que $\Omega_{0+}^2 = \Omega_{0+}^2(x)$ y además notamos que

$$\begin{aligned} \Lambda_{1-2x}^2 &= M_u^2 + \frac{1}{4}(1 - (1 - 2x)^2)P^2 + \frac{1}{2}(1 - (1 - 2x))(M_d^2 - M_u^2) \\ &= M_u^2 + \frac{1}{4}(1 - 1 - 4x^2 + 4x)P^2 + \frac{1}{2}(2x)(M_d^2 - M_u^2) \\ &= M_u^2 - P^2 x(x - 1) + x(M_d^2 - M_u^2) \end{aligned} \quad (5.89)$$

esto nos dice que al tomar Λ_ω^2 con la definición dada en (5.88) nos quita la dependencia sobre β y ω y nos permite reescribir Ω_{0+}^2 en términos de dicha función

$$\Omega_{0+}^2(x) = \Lambda_{1-2x}^2$$

y así reescribir la ecuación (5.78)

$$\begin{aligned} \phi_{0+}(x) &= \frac{1}{F_N} \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 d\beta + \int_{1-2x}^1 d\omega \int_{\frac{2x+\omega-1}{\omega+1}}^1 d\beta \right] \\ &\quad \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{(1 - \beta)^{v-1} \Lambda_\omega^{2v} \rho_{0+}(\omega)}{\Lambda_{1-2x}^{2v}} \quad (5.90) \end{aligned}$$

5. MODELO ALGEBRAICO

Gracias a esta función Λ_ω^2 ahora resulta posible integrar la PDA dada en (5.90) sobre la variable β , ya que el cálculo se simplifica a integrar $(1 - \beta)^{v-1}$ sobre β y evaluando para $v > 0$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 (1-\beta)^{v-1} d\beta &= \int_{\frac{2x}{\omega-1}}^0 u^{v-1} (-du) = \int_0^{\frac{2x}{\omega-1}} u^{v-1} du \\
 &= \frac{u^{v-1+1}}{v-1+1} \Big|_0^{\frac{2x}{\omega-1}} = \frac{u^v}{v} \Big|_0^{\frac{2x}{\omega-1}} \\
 &= \frac{1}{v} \left(\frac{2x}{1-\omega} \right)^v
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{l}
 u = 1 - \beta \\
 du = -d\beta \\
 \beta = 1 \rightarrow u = 0 \\
 \beta = \frac{2x}{\omega-1} + 1 \rightarrow u = \frac{2x}{1-\omega}
 \end{array}}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \int_{\frac{2x+\omega-1}{\omega+1}}^1 (1-\beta)^{v-1} d\beta &= \int_{\frac{2(1-x)}{\omega+1}}^0 u^{v-1} (-du) = \int_0^{\frac{2(1-x)}{\omega+1}} u^{v-1} du \\
 &= \frac{1}{v} \left(\frac{2(1-x)}{\omega+1} \right)^v
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{l}
 u = 1 - \beta \\
 du = -d\beta \\
 \beta = 1 \rightarrow u = 0 \\
 \beta = \frac{2x+\omega-1}{\omega+1} + 1 \rightarrow u = \frac{2(1-x)}{1+\omega}
 \end{array}}
 \end{array}$$

y sustituyendo el resultado de estas dos integrales en (5.90) llegamos a

$$\begin{aligned}
 \phi_{0^+}(x) &= \frac{1}{F_N} \left(\frac{2^v}{v} \right) \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \left(\frac{x}{1-\omega} \right)^v + \int_{1-2x}^1 d\omega \left(\frac{1-x}{\omega+1} \right)^v \right] \\
 &\quad \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{\Lambda_\omega^{2v} \rho_{0^+}(\omega)}{\Lambda_{1-2x}^{2v}} .
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

Para agrupar términos y tener una expresión más amigable definimos

$$\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v) = \Lambda_\omega^{2v} \rho_{0^+}(\omega) \tag{5.92}$$

de tal manera que la ecuación (5.91) se reescribe como

$$\begin{aligned}
 \phi_{0^+}(x) &= \frac{1}{F_N} \left(\frac{2^v}{v} \right) \left[x^v \int_{-1}^{1-2x} d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} + (1-x)^v \int_{1-2x}^1 d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(\omega+1)^v} \right] \\
 &\quad \times \frac{[M_u + x(M_d - M_u)]}{\Lambda_{1-2x}^{2v}}
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

Ahora hacemos un cambio de variable para simplificar la expresión

$$y = 1 - 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}(1 - y) \tag{5.94}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{0^+}(y) &= \frac{1}{F_N} \frac{2^v}{v} \left[\left(\frac{1-y}{2} \right)^v \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} + \left(\frac{2-1+y}{2} \right)^v \int_y^1 d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(\omega+1)^v} \right] \\
 &\quad \times \frac{\left[M_u + \left(\frac{1-y}{2} \right) (M_d - M_u) \right]}{\Lambda_y^{2v}} \\
 &= \frac{1}{F_N} \frac{1}{v} \left[(1-y)^v \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} + (1+y)^v \int_y^1 d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(\omega+1)^v} \right] \frac{G}{\Lambda_y^{2v}}
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

simplificamos aparte el término G

$$\begin{aligned} G &= \left[M_u + \left(\frac{1-y}{2} \right) (M_d - M_u) \right] = M_u + \frac{1}{2} [M_d - M_u - yM_d + yM_u] \\ &= \frac{1}{2} (1+y) M_u + \frac{1}{2} (1-y) M_d \end{aligned} \quad (5.96)$$

Con esto podemos concluir que la PDA se puede expresar

$$\begin{aligned} \phi_{0^+}(y) &= \frac{1}{16\pi^2 v} \left[\frac{A}{2} \left[(1-y)^v \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} + (1+y)^v \int_y^1 d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(\omega+1)^v} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(1+y)M_u + (1-y)M_d}{\Lambda_y^{2v}} \right] \end{aligned} \quad (5.97)$$

Notamos que la expresión para ϕ_{0^+} se simplificó bastante gracias a que la función Λ_ω^2 nos permitió calcular la integral sobre β .

Aplicando la definición de la función Λ_ω^2 sobre la LFWF

Con la definición de Λ_ω^2 dada en (5.88) ahora podemos simplificar ψ_{0^+} expresada en (5.71), ya que gracias a esto nos da tres puntos relevantes que podemos resumir como

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \int_{\frac{2x}{\omega-1}+1}^1 (1-\beta)^{v-1} d\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{2x}{1-\omega} \right)^v \\ \blacksquare \quad & \int_{\frac{2x+\omega-1}{\omega+1}}^1 (1-\beta)^{v-1} d\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{2(1-x)}{\omega+1} \right)^v \\ \blacksquare \quad & \Omega_{0^+}^2 = \Lambda_{1-2x}^2 \end{aligned}$$

tomando estos puntos en cuenta, la LFWF dada en (5.71) se transforma como

$$\begin{aligned} \psi_{0^+}(x, k_\perp^2) &= A \gamma \left[\int_{-1}^{1-2x} d\omega \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{2x}{1-\omega} \right)^v \right] + \int_{1-2x}^1 d\omega \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{2(1-x)}{\omega+1} \right)^v \right] \right] \\ &\quad \times [M_u + x(M_d - M_u)] \frac{\Lambda_\omega^{2v} \rho_{0^+}(\omega)}{[k_\perp^2 + \Lambda_{1-2x}^2]^{v+1}}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Al igual que para ϕ_{0^+} , renombramos $\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v) = \Lambda_\omega^{2v} \rho_{0^+}(\omega)$ y hacemos el cambio de variable $y = 1 - 2x$ en la LFWF

$$\begin{aligned} \psi_{0^+}(y, k_\perp^2) &= A 2^v \left[\left(\frac{1-y}{2} \right)^v \int_{-1}^y \frac{d\omega}{(1-\omega)^v} + \left(1 - \frac{1-y}{2} \right)^v \int_y^1 \frac{d\omega}{(\omega+1)^v} \right] \\ &\quad \times \left[M_u + \frac{1-y}{2} (M_d - M_u) \right] \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{[k_\perp^2 + \Lambda_y^2]^{v+1}} \end{aligned} \quad (5.99)$$

simplificando la ecuación anterior obtenemos

$$\psi_{0^+}(y, k_{\perp}^2) = \frac{A}{2} \left[(1-y)^v \int_{-1}^y \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_{\omega}^v)}{(1-\omega)^v} d\omega + (1+y)^v \int_y^1 \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_{\omega}^v)}{(\omega+1)^v} d\omega \right] \times \frac{(1+y)M_u + (1-y)M_d}{[k_{\perp}^2 + \Lambda_y^2]^{v+1}} \quad (5.100)$$

Comparamos las expresiones de ϕ_{0^+} y ψ_{0^+}

Ahora podemos comparar la ecuación (5.97) con (5.100), con lo cual nos damos cuenta que están relacionadas la PDA y la LFWF con un factor multiplicativo, al cual vamos a renombrar como F . Con este factor podemos reescribir la ecuación (5.97) de manera que

$$\phi_{0^+}(y) = \frac{F}{16\pi^2 v \Lambda_y^{2v}} \quad (5.101)$$

y, despejando el factor F

$$F = 16\pi^2 v \Lambda_y^{2v} \phi_{0^+}(y) \quad (5.102)$$

También podemos reescribir (5.100) en términos del factor F

$$\psi_{0^+}(y, k_{\perp}^2) = \frac{F}{[k_{\perp}^2 + \Lambda_y^2]^{v+1}} \quad (5.103)$$

en (5.102) llegamos a una definición de F en términos de la PDA, con lo que al sustituirlo en (5.103) llegamos a

$$\psi_{0^+}(y, k_{\perp}^2) = 16\pi^2 v \frac{\Lambda_y^{2v}}{[k_{\perp}^2 + \Lambda_y^2]^{v+1}} \phi_{0^+}(y) \quad (5.104)$$

de esta manera tenemos la LFWF en términos de la PDA, ya no es necesario conocer la densidad espectral ρ_{0^+} , basta con tener la forma de la ϕ_{0^+}

5.4. Distribución partónica generalizada

La distribución partónica generalizada (GPD) se puede representar en términos de las funciones de onda para el blanco. La representación de la función de los GPD's se obtiene mediante los siguientes pasos:

1. Insertando las expansiones de estado de Fock en los elementos matriciales que definen los GPF's

2. Representando los operadores quark antiquark o de dos gluones en los elementos matriciales mediante operadores de creación y aniquilación de partones
3. Utilizando las relaciones de (anti) conmutación de estos operadores

Con esto en mente, el cálculo de la GPD, que etiquetaremos como la función $H_{0^+}(x, \xi, t)$, se puede obtener a través de la superposición de la ψ_{0^+} que ya calculamos anteriormente

$$H_{0^+}(x, \xi, t) = \int \frac{d^2 k_\perp}{16\pi^3} \psi_{0^+}^*(x^-, (\mathbf{k}_\perp^-)^2) \psi_{0^+}(x^+, (\mathbf{k}_\perp^+)^2) \quad (5.105)$$

donde ξ es la fracción de momento longitudinal transferida y nos indica que tan colineal choca el fotón con el quark. Además, se define

$$x^\pm = \frac{x \pm \xi}{1 \pm \xi}; \quad \mathbf{k}_\perp^\pm = \mathbf{k}_\perp \mp \frac{\Delta_\perp}{2} \frac{1-x}{1 \pm \xi}; \quad t = \frac{-4\xi^2 m_{0^+}^2 - \Delta_\perp^2}{1 - \xi^2} \quad (5.106)$$

Una particularidad de la GPD es que cuando $\xi = t = 0$ se debe cumplir que esté normalizada

$$\frac{1}{N_H} \int_0^1 dx H_{0^+}(x, 0, 0) = 1 \quad (5.107)$$

donde N_H es el factor de normalización para la GPD. Como vimos en la definición de H_{0^+} , necesitamos usar la LFWF a la que llegamos en términos de la PDA con sus correspondientes dependencias y en términos de la variable x . Así, usando (5.104) podemos llegar a

$$\psi_{0^+}^*(x^-, (\mathbf{k}_\perp^-)^2) = 16\pi^2 v \frac{\Lambda_{1-2x^-}^{2v}}{[(\mathbf{k}_\perp^-)^2 + \Lambda_{1-2x^-}^2]^{v+1}} \phi_{0^+}(x^-) \quad (5.108a)$$

$$\psi_{0^+}(x^+, (\mathbf{k}_\perp^+)^2) = 16\pi^2 v \frac{\Lambda_{1-2x^+}^{2v}}{[(\mathbf{k}_\perp^+)^2 + \Lambda_{1-2x^+}^2]^{v+1}} \phi_{0^+}(x^+) \quad (5.108b)$$

con esto podemos sustituir (5.108) en (5.105), es decir, $\psi_{0^+}^*$ y ψ_{0^+} en H_{0^+}

$$\begin{aligned} H_{0^+}(x, \xi, t) &= \int \frac{d^2 k_\perp}{16\pi^3} \left[16\pi^2 v \frac{\Lambda_{1-2x^-}^{2v}}{[(\mathbf{k}_\perp^-)^2 + \Lambda_{1-2x^-}^2]^{v+1}} \phi_{0^+}(x^-) \right] \\ &\quad \times \left[16\pi^2 v \frac{\Lambda_{1-2x^+}^{2v}}{[(\mathbf{k}_\perp^+)^2 + \Lambda_{1-2x^+}^2]^{v+1}} \phi_{0^+}(x^+) \right] \\ &= \frac{(16\pi^2 v)^2}{16\pi^3} \Lambda_{1-2x^-}^{2v} \phi_{0^+}(x^-) \Lambda_{1-2x^+}^{2v} \phi_{0^+}(x^+) \\ &\quad \times \int d^2 k_\perp \frac{1}{[(\mathbf{k}_\perp^-)^2 + \Lambda_{1-2x^-}^2]^{v+1} [(\mathbf{k}_\perp^+)^2 + \Lambda_{1-2x^+}^2]^{v+1}} \end{aligned} \quad (5.109)$$

para simplificar esta expresión renombramos las siguientes funciones

$$\mathcal{A}(x, \xi, t) = \phi_{0^+}(x^-) \phi_{0^+}(x^+) \Lambda_{1-2x^-}^{2\nu} \Lambda_{1-2x^+}^{2\nu} \quad (5.110a)$$

$$\mathcal{B}(x, \xi, t) = \frac{1}{[(\mathbf{k}_\perp^-)^2 + \Lambda_{1-2x^-}^2]^{\nu+1} [(\mathbf{k}_\perp^+)^2 + \Lambda_{1-2x^+}^2]^{\nu+1}} \quad , \quad (5.110b)$$

Así podemos reescribir la GPD de la siguiente manera

$$H_{0^+}(x, \xi, t) = 16\pi\nu^2 \mathcal{A}(x, \xi, t) \int d^2\mathbf{k}_\perp \mathcal{B}(x, \xi, t) \quad . \quad (5.111)$$

Para obtener una forma de la GPD que nos permita computar la función necesitamos seguir un proceso a partir de la ecuación (5.111). Este proceso se divide en tres pasos fundamentales. Primero es necesario transformar la función $\mathcal{B}(x, \xi, t)$ utilizando la parametrización de Feynman, este paso se ve engorroso por la cantidad de términos, pero no es complicado. Posterior a eso tendremos que integrar sobre k_\perp y simplificar la expresión. Como último paso necesitaremos hacer un análisis que garantice que nuestra GPD esté normalizada. A continuación se desglosará cada uno de los pasos intentando detallar el procedimiento.

1. Transformando el término $\mathcal{B}(x, \xi, t)$ usando la parametrización de Feynman

Utilizando la parametrización de Feynman que se explica en el [Apéndice A](#) podemos transformar (5.110b) de la siguiente manera

$$\mathcal{B}(x, \xi, t) = \frac{1}{A^{\nu+1} B^{\nu+1}} = \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[uA + B(1-u)]^{2\nu+2}} du \quad (5.112)$$

donde, en este caso, las constantes A y B serían

$$A = (\mathbf{k}_\perp^-)^2 + \Lambda_{1-2x^-}^2 \quad (5.113a)$$

$$B = (\mathbf{k}_\perp^+)^2 + \Lambda_{1-2x^+}^2 \quad (5.113b)$$

de tal manera que podemos reescribir $\mathcal{B}(x, \xi, t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x, \xi, t) &= \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[(\mathbf{k}_\perp^-)^2 + \Lambda_{1-2x^-}^2]u + [(\mathbf{k}_\perp^+)^2 + \Lambda_{1-2x^+}^2](1-u)]^{2\nu+2}} du \\ &= \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 du \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{\mathcal{R}^{2\nu+2}} \quad . \end{aligned} \quad (5.114)$$

Hemos definido \mathcal{R} para poder simplificar el denominador del integrando, donde necesitamos recordar la definición de \mathbf{k}_\perp^\pm

$$\mathbf{k}_\perp^- = \mathbf{k}_\perp + \frac{\Delta_\perp}{2} \frac{1-x}{1-\xi} \quad ; \quad \mathbf{k}_\perp^+ = \mathbf{k}_\perp - \frac{\Delta_\perp}{2} \frac{1-x}{1+\xi} \quad (5.115)$$

sustituyendo k_{\perp}^{\pm} en \mathcal{R} y expandiendo los términos cuadráticos podemos eliminar algunos términos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= \left[\left(k_{\perp} + \frac{\Delta_{\perp}}{2} \frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 + \Lambda_{1-2x^-}^2 \right] u + \left[\left(k_{\perp} - \frac{\Delta_{\perp}}{2} \frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 + \Lambda_{1-2x^+}^2 \right] (1-u) \\
 &= \left[k_{\perp}^2 + \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 + k_{\perp} \Delta_{\perp} \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) + \Lambda_{1-2x^-}^2 \right] u \\
 &\quad + \left[k_{\perp}^2 + \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 - k_{\perp} \Delta_{\perp} \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) + \Lambda_{1-2x^+}^2 \right] (1-u) \\
 &= \cancel{k_{\perp}^2} u + \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u + \cancel{k_{\perp} \Delta_{\perp}} \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u + \Lambda_{1-2x^-}^2 u \\
 &\quad + k_{\perp}^2 + \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 - \cancel{k_{\perp} \Delta_{\perp}} \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) + \Lambda_{1-2x^+}^2 \\
 &\quad - \cancel{k_{\perp}^2} u - \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 u + \cancel{k_{\perp} \Delta_{\perp}} \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) u - \Lambda_{1-2x^+}^2 u
 \end{aligned} \tag{5.116}$$

podemos agrupar los términos que tienen un factor $\frac{\Delta_{\perp}^2}{4}$ y los que tienen $k_{\perp} \Delta_{\perp}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= \cancel{k_{\perp}^2} + \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 u \right] \\
 &\quad + \cancel{k_{\perp} \Delta_{\perp}} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) u \right] \\
 &\quad + \Lambda_{1-2x^-}^2 u + \Lambda_{1-2x^+}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2 u
 \end{aligned} \tag{5.117}$$

le sumamos un cero a (5.117) para completar el trinomio cuadrado perfecto entre el primer y tercer término

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= k_{\perp}^2 + k_{\perp} \Delta_{\perp} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) (1-u) \right] + \frac{1}{4} \Delta_{\perp}^2 \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) (1-u) \right]^2 \\
 &\quad - \frac{1}{4} \Delta_{\perp}^2 \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) (1-u) \right]^2 + \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 (1-u) \right] \\
 &\quad + (\Lambda_{1-2x^-}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2) u + \Lambda_{1-2x^+}^2 \\
 &= \left(k_{\perp} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) (1-u) \right] \right)^2 \\
 &\quad + \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 (1-u) - \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) (1-u) \right]^2 \right] \\
 &\quad + (\Lambda_{1-2x^-}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2) u + \Lambda_{1-2x^+}^2 \\
 &= \left(k_{\perp} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) (1-u) \right] \right)^2 + \underline{Z_R} \\
 &\quad + (\Lambda_{1-2x^-}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2) u + \Lambda_{1-2x^+}^2
 \end{aligned} \tag{5.118}$$

nuevamente necesitamos definir otra función Z_R que agrupe los términos restantes para poder simplificar. Empezamos expandiendo el binomio

$$\begin{aligned} Z_R &= \left\{ \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 (1-u) - \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u^2 + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 (1-u)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) u(1-u) \right] \right\} \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \\ &= \left\{ \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 (1-u) - \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u^2 - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 (1-u)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) u(1-u) \right\} \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \end{aligned} \quad (5.119)$$

agrupamos los términos que contengan factores en común

$$\begin{aligned} Z_R &= \left\{ \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u(1-u) + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 [(1-u) - (1-u)^2] + 2 \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} u(1-u) \right\} \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \\ &= \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} \left\{ \left(\frac{1-x}{1-\xi} \right)^2 u(1-u) + \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right)^2 (1-u) [u] + 2 \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} u(1-u) \right\} \end{aligned} \quad (5.120)$$

factorizamos el término $u(1-u)$ y simplificamos

$$\begin{aligned} Z_R &= \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} (1-x)^2 u(1-u) \left\{ \frac{1}{(1-\xi)^2} + \frac{1}{(1+\xi)^2} + 2 \frac{1}{1-\xi^2} \right\} \\ &= \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} (1-x)^2 u(1-u) \left(\frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{1+\xi} \right)^2 = \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} (1-x)^2 u(1-u) \left(\frac{1+\cancel{\xi} + 1-\cancel{\xi}}{(1-\xi)(1+\xi)} \right)^2 \\ &= \frac{\Delta_{\perp}^2}{4} (1-x)^2 u(1-u) \left(\frac{2}{1-\xi^2} \right)^2 = \frac{\Delta_{\perp}^2}{1-\xi^2} \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} u(1-u) \end{aligned} \quad (5.121)$$

en este punto recordamos que el invariante t se puede escribir como

$$t = \frac{-4\xi^2 m_{0+}^2}{1-\xi^2} - \frac{\Delta_{\perp}^2}{1-\xi^2}$$

y notamos que en (5.121) justamente tenemos el segundo término

$$\frac{\Delta_{\perp}^2}{1-\xi^2} = - \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0+}^2}{1-\xi^2} \right] \quad (5.122)$$

con lo que podemos escribir (5.121) en términos de t

$$Z_R = - \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0+}^2}{1-\xi^2} \right] \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} u(1-u) \quad . \quad (5.123)$$

Ahora podemos sustituir (5.123) en (5.118), es decir, Z_R en \mathcal{R}

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \left(k_{\perp} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) (1-u) \right] \right)^2 \\ &\quad - \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0+}^2}{1-\xi^2} \right] \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} u(1-u) + (\Lambda_{1-2x^-}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2) u + \Lambda_{1-2x^+}^2 \end{aligned} \quad (5.124)$$

podemos renombramos los siguientes términos de \mathcal{R}

$$s_1 = \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \left[\left(\frac{1-x}{1-\xi} \right) u - \left(\frac{1-x}{1+\xi} \right) (1-u) \right] \quad (5.125a)$$

$$s_2 = - \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0+}^2}{1-\xi^2} \right] \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} u(1-u) + (\Lambda_{1-2x}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2) u + \Lambda_{1-2x^+}^2 \quad (5.125b)$$

de tal manera que \mathcal{R} se simplifica a

$$\mathcal{R} = (k_{\perp} + s_1)^2 + s_2 \quad (5.126)$$

Una vez que ya hemos simplificado el denominador de la función $\mathcal{B}(x, \xi, t)$, podemos sustituir (5.126) en (5.114)

$$\mathcal{B}(x, \xi, t) = \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 du \frac{u^{\nu}(1-u)^{\nu}}{[(k_{\perp} + s_1)^2 + s_2]^{2\nu+2}} \quad (5.127)$$

Con el tratamiento dado a la función $\mathcal{B}(x, \xi, t)$ podemos sustituirla en la GPD, en otras palabras, sustituir la ecuación (5.127) en (5.111)

$$H_{0+}(x, \xi, t) = 16\pi^2 \nu^2 \mathcal{A}(x, \xi, t) \int d^2 k_{\perp} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 du \frac{u^{\nu}(1-u)^{\nu}}{[(k_{\perp} + s_1)^2 + s_2]^{2\nu+2}} \quad (5.128)$$

el siguiente paso es realizar la integral para la variable k_{\perp} .

2. Integrando la función respecto a k_{\perp}

Nuevamente usamos que

$$\int d^2 k_{\perp} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp} = \pi \int_0^{\infty} dk_{\perp}^2$$

con esto la GPD definida en (5.128) se reescribe como

$$H_{0+}(x, \xi, t) = 16\pi^2 \nu^2 \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \mathcal{A}(x, \xi, t) \int_0^{\infty} dk_{\perp}^2 \int_0^1 du \frac{u^{\nu}(1-u)^{\nu}}{[(k_{\perp} + s_1)^2 + s_2]^{2\nu+2}} \quad (5.129)$$

Si el integrando es continuo en una región se puede cambiar el orden de integración para integrales dobles con límites de integración numéricos, tal como nos lo dice el teorema de Fubini. Así que cambiamos el orden de integración de la expresión anterior

$$H_{0+}(x, \xi, t) = 16\pi^2 \nu^2 \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \mathcal{A}(x, \xi, t) \int_0^1 u^{\nu}(1-u)^{\nu} du \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp}^2}{[(k_{\perp} + s_1)^2 + s_2]^{2\nu+2}} \quad (5.130)$$

Calculamos la integral, haciendo $k_{\perp} \rightarrow k_{\perp} + s_1$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp}^2}{[(k_{\perp} + s_1)^2 + s_2]^{2\nu+2}} & \stackrel{k_{\perp} \rightarrow k_{\perp} + s_1}{=} \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp}^2}{[k_{\perp}^2 + s_2]^{2\nu+2}} \\
 & \boxed{\begin{array}{lll} v = k_{\perp}^2 + s_2 & k_{\perp}^2 = 0 & \rightarrow v = s_2 \\ dv = dk_{\perp}^2 & k_{\perp}^2 = \infty & \rightarrow v = \infty \end{array}} \\
 \blacksquare \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp}^2}{[k_{\perp}^2 + s_2]^{2\nu+2}} & = \int_{s_2}^{\infty} dv v^{-2\nu-2} = \frac{v^{-2\nu-1}}{-2\nu-1} \Big|_{s_2}^{\infty} = \frac{1}{2\nu+1} \frac{1}{s_2^{2\nu+1}} \\
 & = -\frac{1}{2\nu+1} \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{s_2^{2\nu+1}} \right] \\
 & = \frac{1}{2\nu+1} \frac{1}{s_2^{2\nu+1}} \tag{5.131}
 \end{aligned}$$

Al sustituir el resultado de esta integral en la GPD y tomar que $\Gamma(2\nu+2) = (2\nu+1)\Gamma(2\nu+1)$ tenemos

$$H_{0^+}(x, \xi, t) = 16\pi^2 \nu^2 \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma^2(\nu+1)} \mathcal{A}(x, \xi, t) \int_0^1 \frac{u^{\nu}(1-u)^{\nu}}{s_2^{2\nu+1}} du \quad . \tag{5.132}$$

Vamos a reescribir el término s_2 cuya definición vimos en (5.125b)

$$\begin{aligned}
 s_2 & = - \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0^+}^2}{1-\xi^2} \right] \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} u(1-u) + (\Lambda_{1-2x^-}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2) u + \Lambda_{1-2x^+}^2 \\
 & = \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0^+}^2}{1-\xi^2} \right] \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} u^2 + \left\{ - \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0^+}^2}{1-\xi^2} \right] \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} \right. \\
 & \quad \left. + \Lambda_{1-2x^-}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2 \right\} u + \Lambda_{1-2x^+}^2 \tag{5.133}
 \end{aligned}$$

de aquí agrupamos esta última ecuación en diferentes términos de acuerdo al grado de la variable u

$$a = \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0^+}^2}{1-\xi^2} \right] \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} \tag{5.134a}$$

$$b = - \left[t + \frac{4\xi^2 m_{0^+}^2}{1-\xi^2} \right] \frac{(1-x)^2}{1-\xi^2} + \Lambda_{1-2x^-}^2 - \Lambda_{1-2x^+}^2 \tag{5.134b}$$

$$c = \Lambda_{1-2x^+}^2 \tag{5.134c}$$

y renombramos $\mathbb{M}(u) \equiv s_2$, de tal manera que

$$\mathbb{M}(u) = s_2 = au^2 + bu + c \quad . \tag{5.135}$$

Sustituimos (5.135) y la definición de $\mathcal{A}(x, \xi, t)$ dada en la ecuación (5.110a) dentro de (5.132)

$$H_{0+}(x, \xi, t) = 16\pi^2 v^2 \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma^2(v+1)} \phi_{0+}(x^-) \phi_{0+}(x^+) \Lambda_{1-2x^-}^{2v} \Lambda_{1-2x^+}^{2v} \int_0^1 \frac{u^v (1-u)^v}{[\mathbb{M}(u)]^{2v+1}} du \quad (5.136)$$

y esta es la GPD, solo necesitamos renormalizarla.

3. Asegurando que la GPD esté normalizada

Para normalizar la GPD necesito calcular su constante de normalización, para lo cual recordamos (5.107) que nos dice

$$N_H = \int_0^1 dx H_{0+}(x, 0, 0) \quad (5.137)$$

lo cual nos dice que necesitamos expresar la GPD cuando $\xi = t = 0$. Con estas condiciones la ecuación (5.136) se reduce a tener

$$H_{0+}(x, 0, 0) = 16\pi^2 v^2 \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma^2(v+1)} \phi_{0+}^2(x) [\Lambda_{1-2x}^{2v}]^2 \int_0^1 \frac{u^v (1-u)^v}{[\mathbb{M}(u)]^{2v+1}} du \quad (5.138)$$

donde la función $\mathbb{M}(u)$ es simplemente

$$\begin{aligned} a = 0 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = \Lambda_{1-2x}^2 \\ \Rightarrow \mathbb{M}(u) = \Lambda_{1-2x}^2 \end{aligned} \quad (5.139)$$

nos damos cuenta que (5.138) se reduce a solamente integrar sobre u ya que la función $\mathbb{M}(u)$ no depende de u

$$H_{0+}(x, 0, 0) = 16\pi^2 v^2 \phi_{0+}^2(x) \frac{[\Lambda_{1-2x}^{2v}]^2}{[\Lambda_{1-2x}^2]^{2v+1}} \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma^2(v+1)} \int_0^1 u^v (1-u)^v du \quad (5.140)$$

Para resolver la integral en u usamos la definición de la función beta, también llamada la integral de Euler

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} dt = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)} \quad (5.141)$$

en nuestro caso en concreto donde tenemos la integral en u la integral de Euler se expresa

$$\int_0^1 u^{(v+1)-1} (1-u)^{(v+1)-1} du = \frac{\Gamma(v+1)\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1+v+1)} = \frac{\Gamma^2(v+1)}{\Gamma(2v+2)} \quad (5.142)$$

así, al sustituir (5.142) en (5.140)

$$H_{0^+}(x, 0, 0) = 16\pi^2 v^2 \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma^2(v+1)} \frac{\Gamma^2(v+1)}{\Gamma(2v+2)} = 16\pi^2 v^2 \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma(2v+2)} \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2}. \quad (5.143)$$

Una vez que ya hemos calculado $H_{0^+}(x, 0, 0)$ podemos usar la definición dada en (5.137) para encontrar la constante de normalización de la GPD

$$N_H = \int_0^1 dx 16\pi^2 v^2 \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma(2v+2)} \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} = 16\pi^2 v^2 \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma(2v+2)} \int_0^1 \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} dx \quad (5.144)$$

entonces, para que nuestra GPD esté normalizada necesitamos dividir la GPD que tenemos entre la constante de normalización, la ecuación (5.136) en (5.144)

$$H_{0^+}(x, \xi, t) = \frac{16\pi^2 v^2}{N_H} \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma^2(v+1)} \phi_{0^+}(x^-) \phi_{0^+}(x^+) \Lambda_{1-2x^-}^{2v} \Lambda_{1-2x^+}^{2v} \int_0^1 \frac{u^v (1-u)^v}{[\mathbb{M}(u)]^{2v+1}} du. \quad (5.145)$$

Para simplificar la expresión de la GPD sustituimos la N_H

$$\begin{aligned} H_{0^+}(x, \xi, t) &= \frac{16\pi^2 v^2}{16\pi^2 v^2 \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma(2v+2)} \int_0^1 \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} dx} \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma^2(v+1)} \int_0^1 \frac{u^v (1-u)^v}{[\mathbb{M}(u)]^{2v+1}} du \\ &\quad \times \phi_{0^+}(x^-) \phi_{0^+}(x^+) \Lambda_{1-2x^-}^{2v} \Lambda_{1-2x^+}^{2v} \\ &= \frac{1}{\int_0^1 \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} dx} \frac{\Gamma(2v+2)}{\Gamma^2(v+1)} \int_0^1 \frac{u^v (1-u)^v}{[\mathbb{M}(u)]^{2v+1}} du \\ &\quad \times \phi_{0^+}(x^-) \phi_{0^+}(x^+) \Lambda_{1-2x^-}^{2v} \Lambda_{1-2x^+}^{2v} \end{aligned} \quad (5.146)$$

por comodidad renombramos

$$\mathcal{N} = \int_0^1 \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} dx \quad (5.147)$$

y así, la GPD normalizada tiene la siguiente forma

$$H_{0^+}(x, \xi, t) = \mathcal{N} \phi_{0^+}(x^-) \phi_{0^+}(x^+) \Lambda_{1-2x^-}^{2v} \Lambda_{1-2x^+}^{2v} \frac{\Gamma(2v+2)}{\Gamma^2(v+1)} \int_0^1 \frac{u^v (1-u)^v}{[\mathbb{M}(u)]^{2v+1}} du \quad (5.148)$$

Esta es la expresión completa de la GPD, sin embargo, resulta conveniente analizar un caso límite de esta función cuando $\xi = 0$.

5.4.1. Límite de la GPD para $\xi = 0$

Para analizar este caso límite necesitamos escribir la ecuación (5.148) para cuando $\xi = 0$

$$H_{0^+}(x, 0, t) = \mathcal{N} \phi_{0^+}^2(x) \Lambda_{1-2x}^{4\nu} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[\mathbb{M}(u)]^{2\nu+1}} du \quad (5.149)$$

donde la función $\mathbb{M}(u)$ se reduce a tener que sus coeficientes son

$$a = t(1-x)^2 \quad ; \quad b = -t(1-x)^2 \quad ; \quad c = \Lambda_{1-2x}^2$$

de manera que tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(u) &= t(1-x)^2 u^2 - t(1-x)^2 u + \Lambda_{1-2x}^2 \\ &= -t(1-x)^2 u(1-u) + \Lambda_{1-2x}^2 \end{aligned} \quad (5.150)$$

Así que la GPD en el límite de $\xi = 0$ es

$$H_{0^+}(x, 0, t) = \mathcal{N} \phi_{0^+}^2(x) \Lambda_{1-2x}^{4\nu} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[-t(1-x)^2 u(1-u) + \Lambda_{1-2x}^2]^{2\nu+1}} du \quad (5.151)$$

5.5. Función de distribución partónica

Una vez que ya tenemos la GPD podemos obtener la función de distribución partónica (PDF), que representaremos como la función $q_{0^+}(x)$. La PDF es simplemente la GPD pero en el límite cuando $\xi = t = 0$, es decir

$$q_{0^+}(x) = H_{0^+}(x, 0, 0) \quad (5.152)$$

entonces, aplicando el límite cuando $\xi = t = 0$ a la $H_{0^+}(x, \xi, t)$ dada en (5.148) tendremos

$$\begin{aligned} H_{0^+}(x, 0, 0) &= \mathcal{N} \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 u^\nu (1-u)^\nu du \\ &= \mathcal{N} \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \frac{\Gamma^2(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)} \end{aligned} \quad (5.153)$$

así que la PDF se reduce a tener

$$q_{0^+}(x) = \mathcal{N} \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} \quad (5.154)$$

donde \mathcal{N} ya está definida en (5.147).

5.6. Factor de forma electromagnético

Para el cálculo del factor de forma electromagnético (FF) del quark simplemente necesitamos integrar la GPD respecto a t cuando $\xi = 0$, es decir, integrar la expresión (5.151)

$$F_{0+}^q(t) = \int_0^1 H_{0+}(x, 0, t) dx \quad (5.155)$$

es decir, tendremos que el factor de forma lo podemos calcular con la siguiente expresión

$$F_{0+}^q(t) = \mathcal{N} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 dx \phi_{0+}^2(x) \Lambda_{1-2x}^{4\nu} \int_0^1 \frac{u^\nu(1-u)^\nu}{[-t(1-x)^2 u(1-u) + \Lambda_{1-2x}^2]^{2\nu+1}} du \quad (5.156)$$

y el factor de forma electromagnético completo, tomando en cuenta las cargas de los quarks, sería

$$F_{0+}(t) = e_u F_{0+}^q(t) + e_d F_{0+}^q(t) \quad (5.157)$$

recordando que $e_u = \frac{2}{3}$ y $e_d = -\frac{1}{3}$. Un punto importante a notar es que a partir del factor de forma podemos calcular el radio de carga, que es lo que procederemos a hacer.

5.6.1. Radio de carga electromagnético

Una vez que tenemos el factor de forma total lo derivamos para obtener el radio de carga, de tal manera que

$$(r_{0+})^2 = -6 \left. \frac{dF_{0+}(t)}{dt} \right|_{t=0} . \quad (5.158)$$

Como nos hemos dado cuenta, con el modelo algebraico que tomamos es posible obtener expresiones que nos dan información de la estructura interna de la partícula en términos de la PDA, ya no necesitamos la densidad espectral. Sin embargo, el modelo también nos permite obtener la ρ_{0+} de manera sencilla usando el teorema fundamental del cálculo, este cálculo lo revisaremos en la siguiente sección.

5.7. Calculando la densidad espectral

Desde el inicio de los cálculos de este tema de tesis nos dimos cuenta que tener la forma de la ρ_{0+} era indispensable para poder conocer la estructura interna de las partículas. Entonces, al desconocer ρ_{0+} nos resulta imposible obtener información sobre la partícula. Más adelante logramos reescribir las expresiones en términos de la PDA, una función que

resulta más probable encontrar en la literatura, ya no necesitamos la ρ_{0+} . Sin embargo, en esta sección descubriremos que también es posible obtener la forma de la densidad espectral en términos de la PDA.

Para empezar, recordamos que en (5.97) tenemos la PDA escrita en términos de $\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^\nu)$. Volveremos a escribir dicha expresión para evitar confusiones

$$\phi_{0+}(y) = \frac{1}{F_N} \frac{1}{2\nu} \left[(1-y)^\nu \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^\nu)}{(1-\omega)^\nu} + (1+y)^\nu \int_y^1 d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^\nu)}{(1+\omega)^\nu} \right] \times \frac{[(1+y)M_u + (1-y)M_d]}{\Lambda_y^{2\nu}} \quad (5.159)$$

si renombramos

$$\tau_\nu^+(y) = \frac{[(1+y)M_u + (1-y)M_d] (1+y)^\nu}{2\nu \Lambda_y^{2\nu}} \quad (5.160a)$$

$$\tau_\nu^-(y) = \frac{[(1+y)M_u + (1-y)M_d] (1-y)^\nu}{2\nu \Lambda_y^{2\nu}} \quad (5.160b)$$

podemos reescribir (5.159) tal que

$$\phi_{0+}(y) = \frac{1}{F_N} \left[\tau_\nu^-(y) \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^\nu)}{(1-\omega)^\nu} + \tau_\nu^+(y) \int_y^1 d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^\nu)}{(1+\omega)^\nu} \right]. \quad (5.161)$$

Seguimos simplificando nuestra expresión renombrando cada integral en dos funciones diferentes

$$\varphi_\nu^+(y) = -\tau_\nu^+(y) \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^\nu)}{(1+\omega)^\nu} \quad (5.162a)$$

$$\varphi_\nu^-(y) = \tau_\nu^-(y) \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^\nu)}{(1-\omega)^\nu} \quad (5.162b)$$

de manera que (5.159) se reduce a

$$F_N \phi_{0+}(y) = \varphi_\nu^-(y) + \varphi_\nu^+(y) \quad (5.163)$$

Al derivar (5.163) dos veces tendremos un sistema de ecuaciones con el cual podemos conocer la densidad espectral recordando que $\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^\nu) \equiv \Lambda_\omega^{2\nu} \rho_{0+}(\omega)$. Nuestro sistema de ecuaciones queda

$$F_N \phi_{0+}(y) = \varphi_\nu^-(y) + \varphi_\nu^+(y) \quad (5.164a)$$

$$F_N \frac{d\phi_{0+}(y)}{dy} = \frac{d\varphi_\nu^-(y)}{dy} + \frac{d\varphi_\nu^+(y)}{dy} \quad (5.164b)$$

$$F_N \frac{d^2\phi_{0+}(y)}{dy^2} = \frac{d^2\varphi_\nu^-(y)}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_\nu^+(y)}{dy^2} \quad (5.164c)$$

Para obtener la forma de ρ_{0+} desglosaremos el proceso en tres pasos. Primero trataremos con la ecuación (5.164b) para eliminar términos y quedarnos con una expresión más fácil de trabajar. Una vez que tengamos una forma reducida de (5.164b) haremos lo mismo para (5.164c), con esto tendremos nuestro sistema de ecuaciones simplificado. Por último necesitaremos resolver el sistema de ecuaciones y así obtener ρ_{0+} .

1. Desarrollando la ecuación (5.164b)

Como vamos a trabajar con (5.164b) la volvemos a escribir para seguir el cálculo

$$F_N \frac{d\phi_{0+}(y)}{dy} = \frac{d\phi_v^-(y)}{dy} + \frac{d\phi_v^+(y)}{dy} \quad (5.165)$$

ahora recordamos la definición de (5.162) y con esto podemos expandir la ecuación (5.165)

$$\begin{aligned} F_N \frac{d\phi_{0+}(y)}{dy} &= \frac{d}{dy} \left[\tau_v^-(y) \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} \right] + \frac{d}{dy} \left[-\tau_v^+(y) \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} \right] \\ &= D_1^-(y) + D_1^+(y) \end{aligned} \quad (5.166)$$

renombramos las derivadas en nuevas funciones $D_1(y)$, las cuales vamos a desarrollar por separado.

► Desarrollo para $D_1^+(y)$

Aplicamos la derivada

$$\begin{aligned} D_1^+(y) &= \frac{d}{dy} \left[-\tau_v^+(y) \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} \right] \\ &= - \left[\frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} + \tau_v^+(y) \frac{d}{dy} \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} \right]. \end{aligned} \quad (5.167)$$

Ahora usaremos el teorema fundamental del cálculo, el cuál nos dice que

$$\frac{d}{dy} \int_a^y f(x) dx = f(y) \quad (5.168)$$

y al usarlo para nuestro caso particular tentremos que

$$\frac{d}{dy} \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} = \frac{\tilde{\rho}(y; \Lambda_y^v)}{(1+y)^v} \quad (5.169)$$

así, al sustituir (5.169) en (5.167)

$$D_1^+(y) = - \left[\frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} + \tau_v^+(y) \frac{\tilde{\rho}(y; \Lambda_y^v)}{(1+y)^v} \right] \quad (5.170)$$

pero gracias la definición de $\varphi_v^+(y)$ dada en (5.162) podemos decir que

$$\int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} = -\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \quad (5.171)$$

Tomando en cuenta (5.171) y recordando que $\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v) \equiv \Lambda_\omega^{2v} \rho_{0^+}(\omega)$, podemos concluir que nuestra función $D_1^+(y)$ se puede reescribir como

$$D_1^+(y) = - \left[\tau_v^+(y) \frac{\Lambda_y^{2v} \rho_{0^+}(y)}{(1+y)^v} + \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \left(-\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) \right] \quad (5.172)$$

► Desarrollo para $D_1^-(y)$

Nuevamente empezamos por aplicar la derivada

$$\begin{aligned} D_1^-(y) &= \frac{d}{dy} \left[\tau_v^-(y) \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} \right] \\ &= \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} + \tau_v^-(y) \frac{d}{dy} \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} \\ &= \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} + \tau_v^-(y) \frac{\tilde{\rho}(y; \Lambda_y^v)}{(1-y)^v} \end{aligned} \quad (5.173)$$

volvemos a usa la definición (5.162) para el caso de $\varphi_v^-(y)$, ya que tendremos que

$$\int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} = \frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \quad (5.174)$$

y así, sustituyendo (5.174) en (5.173) y recordando la definición de $\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)$ tenemos la una expresión reducida para $D_1^-(y)$

$$D_1^-(y) = \tau_v^-(y) \frac{\Lambda_y^{2v} \rho_{0^+}(y)}{(1-y)^v} + \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) \quad (5.175)$$

Ahora que ya tenemos la forma de nuestras funciones $D_1^+(y)$ y $D_1^-(y)$ podemos sustituir (5.172) y (5.175) en (5.166)

$$\begin{aligned} F_N \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} &= D_1^-(y) + D_1^+(y) \\ &= \tau_v^-(y) \frac{\Lambda_y^{2v} \rho_{0^+}(y)}{(1-y)^v} + \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) - \left[\tau_v^+(y) \frac{\Lambda_y^{2v} \rho_{0^+}(y)}{(1+y)^v} + \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \left(-\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) \right] \\ &= \Lambda_y^{2v} \rho_{0^+}(y) \left[\frac{\tau_v^-(y)}{(1-y)^v} - \frac{\tau_v^+(y)}{(1+y)^v} \right] + \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) - \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \left(-\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) \\ &= \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) - \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \left(-\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) \end{aligned} \quad (5.176)$$

2. Desarrollando la ecuación (5.164c)

Escribiremos nuevamente la ecuación (5.164c) con la que vamos a trabajar

$$F_N \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} = \frac{d^2 \varphi_v^-(y)}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi_v^+(y)}{dy^2} \quad (5.177)$$

que es lo mismo a sacarle la derivada a la expresión (5.176)

$$\begin{aligned} F_N \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left[F_N \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} \right] \\ &= \frac{d}{dy} \left[\frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) - \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \left(-\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.178)$$

pero, en este caso nos conviene regresar a la expresión integral con las igualdades que tenemos en (5.171) y (5.174), las cuales las volveremos a escribir aquí para que resulte más visual el proceso

$$\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} = \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} \quad (5.179a)$$

$$-\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} = \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} \quad (5.179b)$$

con lo que al sustituir (5.179) en (5.178), simplificando y aplicando nuevamente el teorema fundamental del cálculo tendremos

$$\begin{aligned} F_N \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left[\frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \left(\int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} \right) - \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \left(\int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} \right) \right] \\ &= \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} + \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \frac{d}{dy} \int_{-1}^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1-\omega)^v} \\ &\quad - \left[\frac{d^2 \tau_v^+(y)}{dy^2} \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} + \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \frac{d}{dy} \int_1^y d\omega \frac{\tilde{\rho}(\omega; \Lambda_\omega^v)}{(1+\omega)^v} \right] \\ &\stackrel{TFC}{=} \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) + \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \frac{\tilde{\rho}(y; \Lambda_y^v)}{(1-y)^v} \\ &\quad - \left[\frac{d^2 \tau_v^+(y)}{dy^2} \left(-\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) + \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \frac{\tilde{\rho}(y; \Lambda_y^v)}{(1+y)^v} \right] \\ &= \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) + \frac{d^2 \tau_v^+(y)}{dy^2} \left(\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) \\ &\quad + \Lambda_y^{2v} \rho_{0^+}(y) \left[\frac{1}{(1-y)^v} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} - \frac{1}{(1+y)^v} \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \right] \end{aligned} \quad (5.180)$$

para trabajar con una ecuación más reducida renombro varios términos dentro de una nueva función

$$C(y) = \Lambda_y^{2\nu} \left[\frac{1}{(1-y)^\nu} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} - \frac{1}{(1+y)^\nu} \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \right] \quad (5.181)$$

de esta manera podemos escribir (5.180) simplemente como

$$F_N \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} = \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) + \frac{d^2 \tau_v^+(y)}{dy^2} \left(\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) + \rho_{0^+}(y) C(y). \quad (5.182)$$

Ya que hemos reescrito nuestro sistema de ecuaciones con las ecuaciones (5.164a), (5.176) y (5.182)

$$F_N \phi_{0^+}(y) = \varphi_v^-(y) + \varphi_v^+(y) \quad (5.183a)$$

$$F_N \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} = \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) - \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \left(\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) \quad (5.183b)$$

$$F_N \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} = \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} \left(\frac{\varphi_v^-(y)}{\tau_v^-(y)} \right) + \frac{d^2 \tau_v^+(y)}{dy^2} \left(\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) + \rho_{0^+}(y) C(y) \quad (5.183c)$$

podemos resolverlo y encontrar la $\rho_{0^+}(y)$ en términos de ϕ_{0^+} .

3. Resolviendo el sistema de ecuaciones

Para resolver el sistema de ecuaciones seguiremos cuatro sencillos pasos que detallaremos a continuación.

- **PASO 1:** Despejo $\varphi_v^-(y)$ de (5.183a)

$$\varphi_v^-(y) = F_N \phi_{0^+}(y) - \varphi_v^+(y) \quad (5.184)$$

- **PASO 2:** Sustituyo (5.184) en (5.183b) y despejo $\varphi_v^+(y)$

$$\begin{aligned} F_N \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} &= \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \frac{1}{\tau_v^-(y)} [F_N \phi_{0^+}(y) - \varphi_v^+(y)] + \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \left(\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) \\ &= \frac{F_N \phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} - \frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} + \frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \\ &= \frac{F_N \phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} + \varphi_v^+(y) \left[\frac{1}{\tau_v^+(y)} \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} - \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \right] \end{aligned} \quad (5.185)$$

definimos una nueva función $Z(y)$

$$Z(y) = \frac{1}{\tau_v^+(y)} \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} - \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \quad (5.186)$$

de esta manera la expresión (5.185) se reduce y puedo despejar $\varphi_v^+(y)$

$$\varphi_v^+(y) = \frac{1}{Z(y)} \left[F_N \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} - F_N \frac{\phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \right] \quad (5.187)$$

- **PASO 3:** Sustituyo (5.184) en (5.183c)

$$\begin{aligned} F_N \frac{d^2\phi_{0^+}(y)}{dy^2} &= \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} \frac{[F_N\phi_{0^+}(y) - \varphi_v^+(y)]}{\tau_v^-(y)} + \frac{d^2\tau_v^+(y)}{dy^2} \left(\frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \right) + \rho_{0^+}(y)C(y) \\ &= F_N \frac{\phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} - \frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} + \frac{\varphi_v^+(y)}{\tau_v^+(y)} \frac{d^2\tau_v^+(y)}{dy^2} + \rho_{0^+}(y)C(y) \\ &= F_N \frac{\phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} + \varphi_v^+(y) \left[\frac{1}{\tau_v^+(y)} \frac{d^2\tau_v^+(y)}{dy^2} - \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} \right] \\ &\quad + \rho_{0^+}(y)C(y) \end{aligned} \quad (5.188)$$

nuevamente agrupo algunos términos en una nueva función $R(y)$

$$R(y) = \frac{1}{\tau_v^+(y)} \frac{d^2\tau_v^+(y)}{dy^2} - \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} \quad (5.189)$$

esto nos ayuda a reducir la expresión (5.188) como

$$F_N \frac{d^2\phi_{0^+}(y)}{dy^2} = F_N \frac{\phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} + \varphi_v^+(y)R(y) + \rho_{0^+}(y)C(y) \quad (5.190)$$

- **PASO 4:** Sustituyo (5.187) en (5.190)

$$\begin{aligned} F_N \frac{d^2\phi_{0^+}(y)}{dy^2} &= F_N \frac{\phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} + R(y) \left\{ \frac{F_N}{Z(y)} \left[\frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} - \frac{\phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \right] \right\} \\ &\quad + \rho_{0^+}(y)C(y) \\ &= F_N \frac{\phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} + F_N \frac{R(y)}{Z(y)} \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} - F_N \frac{R(y)}{Z(y)} \frac{\phi_{0^+}(y)}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \\ &\quad + \rho_{0^+}(y)C(y) \\ &= F_N \phi_{0^+}(y) \left[\frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2\tau_v^-(y)}{dy^2} - \frac{R(y)}{Z(y)} \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \right] + F_N \frac{R(y)}{Z(y)} \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} - \\ &\quad + \rho_{0^+}(y)C(y) \end{aligned} \quad (5.191)$$

- **PASO 5:** Despejamos $\rho_{0^+}(y)$ de (5.191)

$$\begin{aligned}\rho_{0^+}(y) &= \frac{1}{C(y)} \left\{ F_N \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} - F_N \phi_{0^+}(y) \left[\frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} - \frac{R(y)}{Z(y)} \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \right] \right. \\ &\quad \left. - F_N \frac{R(y)}{Z(y)} \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} \right\} \\ &= F_N \left\{ \frac{1}{C(y)} \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} - \frac{R(y)}{Z(y)C(y)} \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} + \frac{1}{C(y)} \left[\frac{R(y)}{Z(y)} \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} \right] \phi_{0^+}(y) \right\}\end{aligned}\quad (5.192)$$

- **PASO 6:** Reescribimos la ecuación (5.192).

Para esto necesitamos agrupar algunos términos dentro de nuevas funciones $\lambda_i(y)$

$$\lambda_2(y) = \frac{1}{C(y)} \quad (5.193a)$$

$$\lambda_1(y) = -\frac{R(y)}{Z(y)C(y)} \quad (5.193b)$$

$$\lambda_0(y) = \frac{1}{C(y)} \left[\frac{R(y)}{Z(y)} \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} - \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} \right] \quad (5.193c)$$

con estas nuevas funciones podemos reescribir nuestra densidad espectral como

$$\rho_{0^+}(y) = F_N \left[\lambda_2(y) \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} + \lambda_1(y) \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} + \lambda_0(y) \phi_{0^+}(y) \right] \quad (5.194)$$

esto tomando en cuenta quienes son nuestras funciones $C(y)$, $Z(y)$ y $R(y)$ definidas en las ecuaciones (5.181), (5.186) y (5.189), las cuales volveremos a anotar aquí para visualizar por completo la forma de nuestra densidad espectral.

$$C(y) = \Lambda_y^{2\nu} \left[\frac{1}{(1-y)^\nu} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} - \frac{1}{(1+y)^\nu} \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} \right] \quad (5.195a)$$

$$Z(y) = \frac{1}{\tau_v^+(y)} \frac{d\tau_v^+(y)}{dy} - \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d\tau_v^-(y)}{dy} \quad (5.195b)$$

$$R(y) = \frac{1}{\tau_v^+(y)} \frac{d^2 \tau_v^+(y)}{dy^2} - \frac{1}{\tau_v^-(y)} \frac{d^2 \tau_v^-(y)}{dy^2} \quad (5.195c)$$

Con esto ya tenemos la densidad espectral en términos de la PDA, por lo cual es posible computarla, sin embargo necesitamos garantizar que está normalizada

$$\frac{1}{n_\rho} \int_{-1}^1 \rho_{0^+}(y) dy = 1 \quad (5.196)$$

donde n_ρ es la constante de normalización de la densidad espectral. Así, tomando en cuenta n_ρ y que F_N se calcula con una integral que lleva funciones escalón pero debe cumplirse $F_N \approx 1$, la ecuación (5.194) normalizada será

$$\rho_{0^+}(y) = \frac{1}{n_\rho} \left[\lambda_2(y) \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} + \lambda_1(y) \frac{d \phi_{0^+}(y)}{dy} + \lambda_0(y) \phi_{0^+}(y) \right]. \quad (5.197)$$

Con esto el modelo algebraico ya nos proporcionó las funciones que nos darán información de nuestra partícula, es decir, la PDF (ecuación 5.154), la GPD (ecuación 5.151), el FF electromagnético (ecuación 5.157), la constante de decaimiento (ecuación 5.86) y el radio de carga (ecuación 5.158). Todas estas funciones las podremos computar si conocemos la forma de la PDA de la partícula en cuestión, en este caso en diquark. Además, nos dimos cuenta que podemos obtener una expresión para la densidad espectral en términos nuevamente de la PDA (ecuación 5.197).

Dicho esto, en el siguiente capítulo veremos la implementación de un programa en python que nos generará la PDF, GPD, FF, densidad espectral, constante de decaimiento y radio de carga para el diquark- $0_{[ud]}^+$.

Capítulo 6

Implementación Numérica

CELINE (CONT'D)
(Imitando a Nina Simone)
Cariño, vas a perder ese avión.
JESSE
Lo sé.

Antes del atardecer,
Richard Linklater

Como hemos discutido, basta con tener la forma de la PDA del diquark- $0^+_{[ud]}$ para computar las funciones que nos darán una descripción de su estructura interna. En este trabajo tomaremos la PDA que se presenta en el artículo de Lu Ya et al. [41] donde calculan las amplitudes de distribución para diquarks escalares y pseudovectoriales. En nuestro caso nos interesa estudiar el diquark escalar, y en el trabajo de Lu Ya et al. llegan a que esa PDA tiene la siguiente estructura

$$\phi_{0^+} = n_{0^+} x(1-x) \exp[-a_{0^+}^2 (2x-1)^2] \quad (6.1)$$

donde n_{0^+} asegura la normalización de la PDA y a_{0^+} es un parámetro que en [41] utilizan para ajustar la PDA de manera que reproduzca los primeros momentos de Mellin independientes. Este parámetro varía de 1.31 a 1.43. En este trabajo se tomará fijo $a_{0^+} = 1.43$, este valor lleva al resultado más chico para el momento de Mellin $\langle x^4 \rangle$. Al normalizar (6.1) llegamos a que

$$n_{0^+} = \int_0^1 x(1-x) \exp[-(1.43)^2 (2x-1)^2] dx = 8.33951 \quad (6.2)$$

de esta manera ya podemos graficar la PDA normalizada

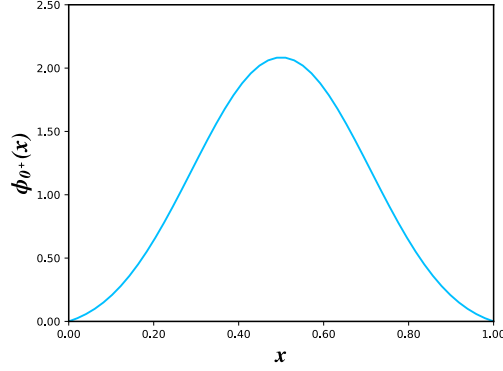


Figura 6.1: PDA normalizada tomada del trabajo de Lu Ya et al. [41]

En [41] trabajan en el límite de simetría de isospin donde la masa vestida del quark *up* y *down* son iguales $M_u = M_d = 0.36 \text{ GeV}$ [44, 45, 46]. Con esta aproximación resuelven la ecuación de Bethe-Salpeter para el diquark $0_{[ud]}^+$ en el truncamiento de rainbow-ladder (RL), lo cual los lleva a obtener la masa asociada de la partícula, $m_{0^+} = 0.89 \text{ GeV}$.

Con esta información prácticamente ya podríamos computar las expresiones que obtuvimos en el capítulo anterior sustituyendo la PDA del trabajo de Lu Ya et al., sin embargo, antes de esto necesitamos analizar la función Λ_ω^2 definida en (5.88) para conocer los límites del modelo algebraico.

6.1. Analizando los límites del modelo

Recordamos que una parte vital del modelo que estamos utilizando es la definición de la función Λ_ω^2 la cual que nos permitió resolver de manera analítica la integral en β tal como lo vimos en la sección 5.3. En esta sección llegamos a que la forma de la función Λ_ω^2 tenía que ser (5.88), que volveremos a escribir como fines prácticos

$$\Lambda_\omega^2 \equiv \Lambda^2(\omega) = \mathbf{M}_u^2 + \frac{1}{4}(1-\omega^2)\mathbf{P}^2 + \frac{1}{2}(1-\omega)(\mathbf{M}_d^2 - \mathbf{M}_u^2) \quad . \quad (6.3)$$

ahora tenemos que analizar esta expresión para encontrar una relación entre la masa del quark *up* y *down* con la masa del diquark $0_{[ud]}^+$. Empezaremos este análisis calculamos la derivada de (6.3)

$$\frac{d\Lambda_\omega^2}{d\omega} = -\frac{1}{2}P^2\omega - \frac{1}{2}(\mathbf{M}_d^2 - \mathbf{M}_u^2) \quad (6.4)$$

para encontrar el mínimo igualamos (6.4) a cero y despejamos ω

$$\omega = -\frac{\mathbf{M}_d^2 - \mathbf{M}_u^2}{P^2} \quad (6.5)$$

sustituimos (6.5) en (6.3)

$$\begin{aligned}
\Lambda^2(\omega) &= M_u^2 + \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{M_d^2 - M_u^2}{P^2} \right)^2 \right] P^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M_d^2 - M_u^2}{P^2} \right) (M_d^2 - M_u^2) \\
&= M_u^2 + \frac{P^4 - (M_d^2 - M_u^2)^2}{4P^2} + \frac{1}{2} (M_d^2 - M_u^2) + \frac{2(M_d^2 - M_u^2)^2}{4P^2} \\
&= \frac{1}{2} (M_d^2 + M_u^2) + \frac{P^4 + (M_d^2 - M_u^2)^2}{4P^2} \\
&= \frac{2P^2 (M_d^2 + M_u^2) + P^4 + (M_d^2 - M_u^2)^2}{4P^2}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

pero $P^2 = -m_{0^+}^2$, donde $m_{0^+}^2$ es la masa del diquark $0_{[ud]}^+$, así que (6.6) se transforma a

$$\Lambda^2(\omega) = \frac{2m_{0^+}^2 (M_d^2 + M_u^2) - m_{0^+}^4 - (M_d^2 - M_u^2)^2}{4m_{0^+}^2}. \tag{6.7}$$

Para garantizar la positividad de (6.7) necesitamos que se cumpla que $\Lambda^2(\omega) \geq 0$ tal que, si renombro $(M_d^2 + M_u^2)^2 = a^2$ y $(M_d^2 - M_u^2)^2 = b^2$ nos queda

$$\Lambda^2(\omega) = a - \frac{1}{2} \left(m_{0^+}^2 + \frac{b^2}{m_{0^+}^2} \right) \geq 0 \tag{6.8}$$

nombramos una nueva variable $t = m_{0^+} + \frac{b}{m_{0^+}}$ tal que al elevar t al cuadrado podemos llegar a la siguiente igualdad

$$m_{0^+}^2 + \frac{b^2}{m_{0^+}^2} = t^2 - 2b \tag{6.9}$$

y con esto podemos reescribir (6.8) ahora en términos de t y resolverla

$$\begin{aligned}
\Lambda^2(\omega) &= a - \frac{1}{2} (t^2 - 2b) \geq 0 \\
&\pm \sqrt{2(a+b)} \geq t \\
&\pm 2M_d \geq t.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Una vez que tenemos la desigualdad resuelta para t regresamos a términos de m_{0^+} sustituyendo la t y tomando solo el resultado positivo de (6.10)

$$2M_d \geq m_{0^+} + \frac{b}{m_{0^+}} \tag{6.11}$$

con esto ya podemos resolver la desigualdad en términos de m_{0^+}

$$\begin{aligned}
0 &\geq m_{0^+} + \frac{M_d^2 - M_u^2}{m_{0^+}} - 2M_d \\
0 &\geq m_{0^+}^2 - 2M_d m_{0^+} + M_d^2 - M_u^2
\end{aligned} \tag{6.12}$$

y llegamos a que

$$\begin{aligned} m_{0^+} &\leq M_d + M_u \\ m_{0^+} &\geq M_d - M_u \end{aligned} \quad (6.13)$$

que podemos expresar en una sola desigualdad y será nuestra condición que relaciona la masa de los quarks *up* y *down* con la masa del diquark

$$|M_d - M_u| \leq m_{0^+} \leq M_d + M_u. \quad (6.14)$$

Notamos que la condición (6.14) no se cumple si tomamos las masas vestidas de los quarks *up* y *down* tal cual como aparecen en la literatura (anteriormente vimos que eran $M_u = M_d = 0.36 \text{ GeV}$) y la masa del diquark $0_{[up]}^+$ como lo reportan en [41] ($m_{0^+} = 0.89 \text{ GeV}$). Por dicha razón en este trabajo se propuso seguir dos enfoques distintos, es decir, dos modelos diferentes. En el primer modelo tomaremos la función $\Lambda^2(\omega)$ tal cual está definida en (6.3) pero tomando $P^2 = m_{0^+}^2$ para garantizar la positividad de la función $\Lambda^2(\omega)$; con esto podremos usar las masas de los quarks y del diquark $0_{[up]}^+$ antes mencionadas. En el otro modelo tomaremos la función $\Lambda^2(\omega)$ definida en (6.3) pero con $P^2 = -m_{0^+}^2$; para tomar esta relación necesitaremos cambiar las masas de los quarks y del diquark buscando que se cumpla la condición (6.14).

Ambos modelos nos arrojarán los valores del radio de carga y la constante de decaimiento, valores que podemos comparar con los ya reportados en la literatura para comprobar que modelo describe mejor el comportamiento de la partícula. La tabla 6.1 presenta algunos artículos que reportan resultados en torno al radio de carga y la constante de decaimiento del diquark $0_{[ud]}^+$.

Artículos	$m_{0^+} (\text{GeV})$	$f_{0^+} (\text{GeV})$	$r_{0^+} (fm)$
Ya Lu et al., [41]	0.89	0.072	-
P. Maris et al., [47]	0.791	0.074	0.714
H. L. L. Roberts et al., [42]	0.776	-	0.49

Tabla 6.1: Artículos que reportan resultados sobre el radio de carga y la constante de decaimiento del diquark- $0_{[ud]}^+$ en relación a su masa.

En [41] usan el truncamiento de Rainbow-Ladder para obtener la constante de decaimiento y mencionan que el radio de carga del diquark- $0_{[ud]}^+$ es $r_{0^+} \approx 1.1 r_\pi$, donde r_π es el radio del *pion*. Por otro lado, en [47] usan un modelo efectivo para la interacción quark-quark con el

cual llegan a que el radio de carga del diquark escalar es $r_{0^+} = 0.71 fm$, 8% más grande que el radio de carga del *pion*, $r_\pi = 0.66 fm$; esto los lleva a concluir que los diquarks- $0_{[ud]}^+$ son más grandes en tamaño que los piones, misma conclusión del artículo [41]. Por último, en [42] trabajan con Interacción de Contacto (CI), así que debemos tomar en cuenta que los resultados reportados pueden ser 20 – 30% más pequeños a los observados.

Estos trabajos nos dan un indicio de los resultados que debemos obtener, valores cercanos a $0.07 GeV$ para la constante de decaimiento y $0.7 fm$ para el radio de carga. En las siguientes secciones presentamos el desglose de los resultados obtenidos para ambos modelos propuestos.

6.2. Primer modelo, tomando $P^2 = m_{0^+}^2$

En este primer modelo donde consideramos que $P^2 = m_{0^+}^2$ tendremos que nuestra función Λ_ω^2 tendrá la forma

$$\Lambda_\omega^2 \equiv \Lambda^2(\omega) = \mathbf{M}_u^2 + \frac{1}{4}(1 - \omega^2)\mathbf{m}_{0^+}^2 + \frac{1}{2}(1 - \omega)(\mathbf{M}_d^2 - \mathbf{M}_u^2) \quad . \quad (6.15)$$

así, con esta definición podemos tomar las expresiones (5.154) y (5.151) que obtuvimos en secciones anteriores y representan la PDF y la GPD en el límite donde $\xi = 0$. Volveremos a escribir dichas ecuaciones para visualizarlas sin necesidad de cambiar de página

$$q_{0^+}(x) = \mathcal{N} \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} \quad (6.16)$$

$$H_{0^+}(x, 0, t) = \mathcal{N} \phi_{0^+}^2(x) \Lambda_{1-2x}^{4\nu} \frac{\Gamma(2\nu + 2)}{\Gamma^2(\nu + 1)} \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[-t(1-x)^2 u(1-u) + \Lambda_{1-2x}^2]^{2\nu+1}} du \quad (6.17)$$

donde recordamos que $\mathcal{N} = \int_0^1 \frac{\phi_{0^+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} dx$. Por otro lado vimos que, gracias al trabajo de Ya Lu et al., tenemos la forma de la PDA para el diquark- $0_{[ud]}^+$

$$\phi_{0^+} = n_{0^+} x(1-x) \exp[-a_{0^+}^2 (2x-1)^2] \quad . \quad (6.18)$$

De esta manera podemos computar (6.16) y (6.17) usando (6.18). Para esto creamos un programa en Python (el cual se encuentra en el [Apéndice B](#)) que resuelve numéricamente las integrales requeridas mediante cuadraturas gaussianas y nos guarda el resultado de cada iteración en listas. Realizar el programa en este lenguaje es de gran utilidad por las paqueterías que ya se nos ofrecen en Python, en este caso la principal que vamos a usar es SciPy, una paquetería que nos permite trabajar con las funciones de manera numérica. Para interpretar los resultados obtenidos usamos la paquetería Matplotlib que es una librería de

generación de gráficos a partir de listas.

En este primer modelo fijamos el parámetro libre $\nu = 1$, tomamos las masas de los quarks $M_u = M_d = 0.36 \text{ GeV}$ y la masa del diquark- $0^+_{[ud]}$ $m_{0^+} = 0.89 \text{ GeV}$. Con esos datos de entrada el programa nos arroja las siguientes gráficas para la PDF y la GPD

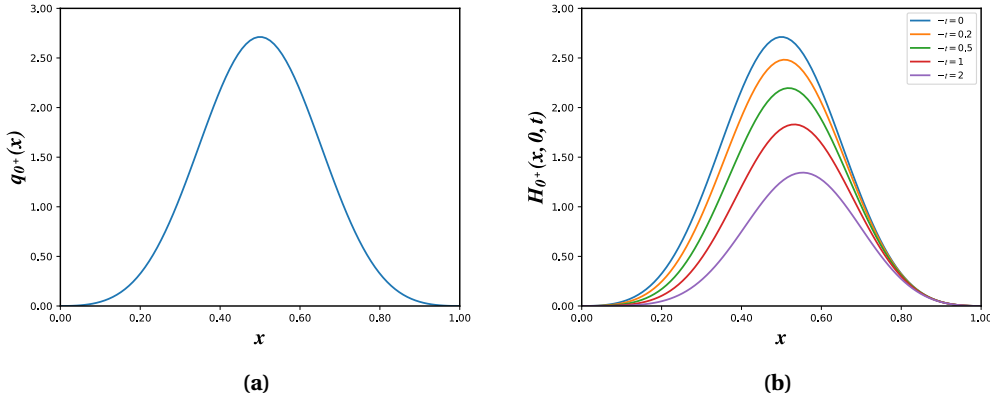


Figura 6.2: En *a)* mostramos la PDF del $0^+_{[ud]}$. En *b)* tenemos la GPD del $0^+_{[ud]}$ para $t = [0, -0.2, -0.5, -1, -2]$.

En la figura 6.2 *b)* notamos que para el caso de $t = 0$ efectivamente tenemos la PDF graficada en *a)*, y que, conforme aumentamos el valor de $-t$ la forma gaussiana de $H_{0^+}(x, 0, t)$ se va aplanando. Otra ventaja de trabajar con Python es que podemos manejar los datos de manera individual, así logramos averiguar que el punto máximo para la función H_{0^+} en $t = 0$ es 2.5629, mismo valor de $q_{0^+}(x)$ en su punto máximo, lo cual es una reafirmación de que $H_{0^+}(x, 0, 0) = q_{0^+}(x)$. Por otra parte, al analizar los datos llegamos a que el punto máximo de la GPD se da en $x_{max} = 0.5 + \Delta x$, donde el Δx es un pequeño incremento en x_{max} resultado de aumentar el valor de $-t$, teniendo que $H_{0^+}(x, 0, 0)$ alcanza su máximo en $x_{max} = 0.505$, es decir, cuando $t = 0$, mientras que en $-t = 2$ tenemos el punto máximo $H_{0^+}(x, 0, -2) = 1.28$ en $x_{max} = 0.555$. Esto nos dice que el punto máximo de la GPD se va recorriendo a la derecha en un incremento Δx al ir aumentando el valor de $-t$.

6.2.1. Factor de forma

Vimos en (5.156) que el factor de forma electromagnético del quark se obtiene integrando la GPD en todo x . Volviendo a escribir dicha expresión

$$F_{0^+}^q(t) = \mathcal{N} \frac{\Gamma(2\nu + 2)}{\Gamma^2(\nu + 1)} \int_0^1 dx \phi_{0^+}^2(x) \Lambda_{1-2x}^{4\nu} \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[-t(1-x)^2 u(1-u) + \Lambda_{1-2x}^2]^{2\nu+1}} du \quad (6.19)$$

y también vimos que el factor de forma total para el diquark- $0_{[ud]}^+$ se obtiene

$$F_{0^+}(t) = e_u F_{0^+}^q(t) + e_d F_{0^+}^q(t) \quad (6.20)$$

con esto en mente añadimos la expresión (6.20) al programa en Python tomando en cuenta la carga de los quarks $e_u = \frac{2}{3}$ y $e_d = \frac{-1}{3}$ y dándole valores a $-t$ de 0 a 5 para poder realizar la doble integral. A continuación, en la figura 6.3 se muestra el factor de forma electromagnético del diquark- $0_{[ud]}^+$

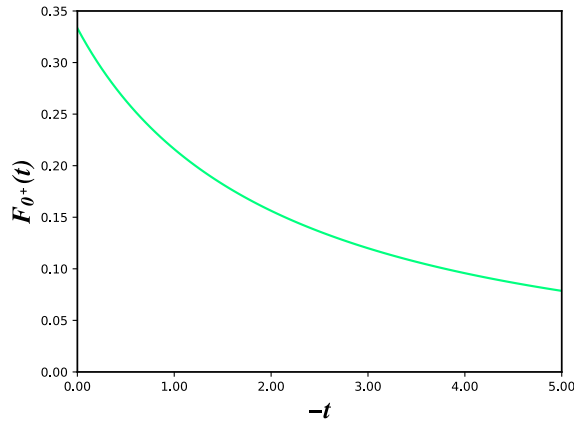


Figura 6.3: Factor de forma electromagnético del diquark- $0_{[ud]}^+$

Algo que se debe cumplir al calcular el factor de forma es que en $t = 0$ deberíamos obtener la carga total de la partícula, cosa que si ocurre al analizar la figura 6.3, ya que en $t = 0$ tenemos que el factor de forma total es justamente la suma de las cargas de los quarks, es decir, $e_u + e_d = \frac{1}{3}$. También notamos que conforme $-t$ aumenta el factor de forma tiende a cero. Una vez que tenemos $F_{0^+}(t)$ podemos calcular el radio de carga, debido a que, como vimos anteriormente, está íntimamente relacionado con la estructura de su factor de forma.

6.2.1.1. Radio de carga

En secciones anteriores llegamos a la ecuación (5.158) con la cual podemos calcular el radio de carga a partir de una derivada del factor de forma

$$(r_{0^+})^2 = -6 \left. \frac{dF_{0^+}(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad (6.21)$$

esta expresión nos dice que basta con calcular la derivada del factor de forma, multiplicarla por -6 y sacarle la raíz cuadrada para obtener el radio de carga. Al ingresar esta expresión

al programa debemos tomar en cuenta que necesitamos calcular la derivada de una lista, no de una función analítica, por lo cual el resultado dependerá en gran medida al ancho de los intervalos en que dividamos nuestro eje horizontal del factor de forma, es decir, del eje $-t$. Para analizar esta relación en la tabla 6.2 mostramos los valores obtenidos para el radio de carga de acuerdo al número de nodos declarados junto a una tercera columna que nos indica el tiempo de ejecución de cada corrida¹.

<i>Nodos</i>	<i>Tiempo</i>	<i>$r_{0^+}(fm)$</i>
10	00:00:07	0.1874
100	00:00:49	0.2011
2000	00:16:25	0.2026
3000	00:23:30	0.2027
10000	01:25:37	0.2027

Tabla 6.2: Resultados obtenidos para el radio de carga del diquark- $0^+_{[ud]}$ de acuerdo al número de nodos.

Nos damos cuenta que nos acercamos a un valor convergente para el radio de carga conforme aumentamos el número de nodos, sin embargo, también se incrementa significativamente el tiempo de cómputo, teniendo una convergencia de cuatro cifras significativas hasta después de 3000 nodos, pero a un costo de cómputo de más de 20 minutos. Debido a esta razón vamos a optar por calcular el radio de carga usando un camino alternativo.

Partimos de recordar que para llegar a la definición del radio de carga se expande el factor de forma cuando $(-t) \rightarrow 0$

$$F_{0^+}^q(t) \underset{(-t) \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{(r_{0^+}^q)^2}{6}(-t) + \dots \quad (6.22)$$

donde al derivar (6.22) respecto a $(-t)$ y evaluando la derivada cuando $(-t) = 0$ podemos derivar el radio de carga

$$(r_{0^+}^q)^2 = -6 \frac{dF_{0^+}^q(t)}{d(-t)} \bigg|_{-t=0}. \quad (6.23)$$

Por otro lado, también vimos que el factor de forma del quark lo definimos como

$$F_{0^+}^q(t) = \mathcal{N} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 dx \phi_{0^+}^2(x) \Lambda_{1-2x}^{4\nu} \int_0^1 \frac{u^\nu(1-u)^\nu}{[-t(1-x)^2 u(1-u) + \Lambda_{1-2x}^2]^{2\nu+1}} du \quad (6.24)$$

¹El programa en que se realizaron estas corridas no se reporta en la tesis debido a la ineficiencia que se tuvo en relación del tiempo de cómputo y la convergencia del resultado

y aplicamos el mismo proceso, realizando una expansión a (6.24) cuando $(-t) \rightarrow 0$. Para hacer la expansión renombramos

$$\mathbb{S} = \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[-t(1-x)^2 u(1-u) + \Lambda_{1-2x}^2]^{2\nu+1}} du \quad (6.25)$$

de esta manera podemos expresar la expansión como

$$F_{0+}^q(t) \underset{(-t) \rightarrow 0}{\approx} \mathcal{N} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 dx \phi_{0+}^2(x) \Lambda_{1-2x}^{4\nu} \left[\mathbb{S} \Big|_{-t=0} + \frac{1}{1!} \frac{d\mathbb{S}}{d(-t)} \Big|_{-t=0} (-t) + \dots \right]. \quad (6.26)$$

Calculamos cada término de la expansión por separado para evitar cometer errores

$$\mathbb{S} \Big|_{-t=0} = \frac{1}{(\Lambda_{1-2x}^2)^{2\nu+1}} \int_0^1 u^\nu (1-u)^\nu du = \frac{1}{(\Lambda_{1-2x}^2)^{2\nu+1}} \frac{\Gamma^2(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)} \quad (6.27)$$

donde hemos usado que

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1} (1-t)^{z_2-1} dt = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}. \quad (6.28)$$

Así mismo, el segundo término de la expansión tendrá la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{S}}{d(-t)} \Big|_{-t=0} &= (-2\nu-1) \int_0^1 \frac{(1-x)^2 u^{\nu+1} (1-u)^{\nu+1}}{[-t(1-x)^2 u(1-u) + \Lambda_{1-2x}^2]^{2\nu+2}} du \Big|_{-t=0} \\ &= (-2\nu-1) \int_0^1 \frac{(1-x)^2 u^{\nu+1} (1-u)^{\nu+1}}{(\Lambda_{1-2x}^2)^{2\nu+2}} du \\ &= \frac{-(2\nu+1)(1-x)^2}{(\Lambda_{1-2x}^2)^{2\nu+2}} \int_0^1 u^{\nu+1} (1-u)^{\nu+1} du \\ &= \frac{-(2\nu+1)(1-x)^2}{(\Lambda_{1-2x}^2)^{2\nu+2}} \frac{\Gamma^2(\nu+2)}{\Gamma(2\nu+4)}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Sustituimos (6.27) y (6.29) en (6.26) y simplificamos

$$F_{0+}^q(t) \underset{(-t) \rightarrow 0}{\approx} \int_0^1 dx \mathcal{N} \frac{\phi_{0+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^2} \left[1 - \frac{(1+\nu)(2\nu+1)}{2(3+2\nu)} \frac{(1-x)^2}{\Lambda_{1-2x}^2} (-t) + \dots \right] \quad (6.30)$$

derivamos esta última expresión con respecto a $(-t)$ y la evaluamos cuando $(-t) = 0$, además, multiplicamos ambos lados de la igualdad por (-6)

$$-6 \frac{dF_{0+}^q(t)}{d(-t)} = 6 \frac{(1+\nu)(2\nu+1)}{2(3+2\nu)} \int_0^1 dx \mathcal{N} \frac{(1-x)^2 \phi_{0+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^4} \quad (6.31)$$

nos damos cuenta que podemos comparar (6.31) con (6.23) y asegurar que el radio de carga del quark debe tener la forma

$$(r_{0+}^q)^2 = 6 \frac{(1+\nu)(2\nu+1)}{2(3+2\nu)} \int_0^1 dx \mathcal{N} \frac{(1-x)^2 \phi_{0+}^2(x)}{\Lambda_{1-2x}^4} \quad (6.32)$$

mientras que el radio de carga total tomará en cuenta las cargas eléctricas de cada quark

$$r_{0^+}^2 = e_u (r_{0^+}^q)^2 + e_d (r_{0^+}^q)^2. \quad (6.33)$$

Ingresamos las expresiones (6.32) y (6.33) en nuestro programa, [Apéndice B](#), tomando nuevamente la masa del diquark $m_{0^+} = 0.89 GeV$ y la masa de los quarks $M_{u(d)} = 0.36 GeV$. En la [tabla 6.3](#) se presenta el radio de carga obtenido con este camino alternativo comparandolo con el tiempo de cómputo empleado

<i>Tiempo</i>	<i>$r_{0^+} (fm)$</i>
0:00:00.22	0.2027

Tabla 6.3: Radio de carga del diquark- $0^+_{[ud]}$ tomando un camino alterno a la derivada del FF.

Claramente podemos notar que el tiempo de cómputo se redujo en gran medida al utilizar este método en que nos evitamos calcular la derivada del factor de forma de manera directa, pues llegamos a las cuatro cifras significativas del primer método pero en menos de un segundo. Sin embargo, el resultado se encuentra lejos del valor reportado en los trabajos ya mencionados donde indican que el radio de carga debería ser cercano a los $0.7 fm$.

6.2.2. Densidad espectral y constante de decaimiento

La forma de la densidad espectral resulta de suma importancia para el estudio de la estructura interna de las partículas, no obstante, gracias al modelo algebraico propuesto en [\[5\]](#), podemos redefinir todas las funciones en términos de la PDA, por lo cual ya no es necesaria una expresión para ρ_{0^+} .

Sin embargo, también vimos que es posible llegar a una expresión para la ρ_{0^+} aplicando el teorema fundamental del cálculo (ecuación [5.197](#))

$$\rho_{0^+}(y) = \frac{1}{n_\rho} \left[\lambda_2(y) \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} + \lambda_1(y) \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} + \lambda_0(y) \phi_{0^+}(y) \right] \quad (6.34)$$

donde las funciones λ_i están definidas en [\(5.193\)](#) y [\(5.195\)](#) y n_ρ garantiza la normalización de ρ_{0^+} . Al computar la ecuación referente a la constante de normalización el programa nos arroja

$$n_\rho = \int_{-1}^1 \left[\lambda_2(y) \frac{d^2 \phi_{0^+}(y)}{dy^2} + \lambda_1(y) \frac{d\phi_{0^+}(y)}{dy} + \lambda_0(y) \phi_{0^+}(y) \right] dy = 3.5864. \quad (6.35)$$

y con esto ya podemos graficar la densidad espectral ingresando la ecuación [\(6.34\)](#) en nuestro programa y haciendo uso de la paquetería SymPy, una librería que nos permite operar las funciones manera analítica

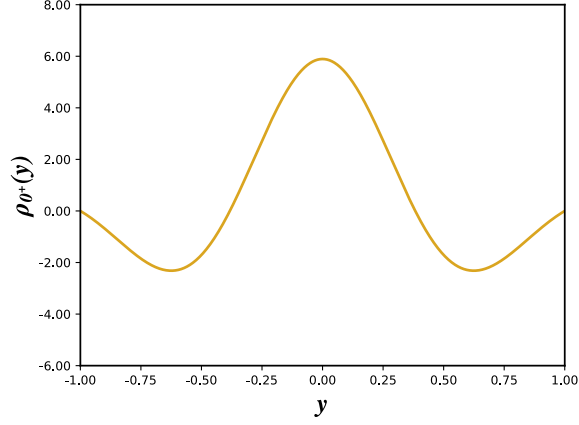


Figura 6.4: Densidad espectral del diquark- $0^+_{[ud]}$

Por otro lado, en secciones anteriores también obtuvimos una expresión referente a la constante de decaimiento, para ser exactos la ecuación (5.86). Esta ecuación involucra la n_ρ de la densidad espectral que afortunadamente ya calculamos en (6.35)

$$f_{0^+} = \sqrt{\frac{F_N}{4\sqrt{2}\pi^2 n_\rho}}. \quad (6.36)$$

La siguiente tabla nos muestra el resultado arrojado por el programa al calcular (6.36) usando los mismos parámetros que hemos mencionado con anterioridad

$m_{0^+}(GeV)$	$M_{u(d)}(GeV)$	$f_{0^+}(GeV)$
0.89	0.36	0.0707

Tabla 6.4: Constante de decaimiento para el diquark- $0^+_{[ud]}$ usando el primer modelo con $P^2 = m_{0^+}^2$.

6.2.3. Conclusiones del modelo

Para evaluar la veracidad de este primer modelo en que tomamos $P^2 = m_{0^+}^2$ necesitamos regresar a las tablas 6.3 y 6.4 las cuales nos indican que $r_{0^+} = 0.2027 fm$ y $f_{0^+} = 0.0707 GeV$ cuando tomamos como valores de entrada $v = 1$, $m_{0^+} = 0.89 GeV$ y $M_{u(d)} = 0.36 GeV$. Notamos que el resultado arrojado para la constante de decaimiento es bastante cercano a los valores reportados en [41] y [47], sin embargo, al pasar al radio de carga tenemos una discrepancia de 28.9% menor respecto a los $0.7 fm$ que se reportan. Debido a esta disonancia en los resultados podemos concluir que el modelo no resulta conveniente para el estudio de la partícula en cuestión, a pesar de que nos provee de una constante de decaimiento cercana a la esperada.

6.3. Segundo modelo, tomando $P^2 = -m_{0^+}^2$

Para este modelo en que tomamos $P^2 = -m_{0^+}^2$ nuestra función Λ_ω^2 tendrá la siguiente forma con el segundo término negativo

$$\Lambda_\omega^2 \equiv \Lambda^2(\omega) = \mathbf{M}_u^2 - \frac{1}{4}(1 - \omega^2)\mathbf{m}_{0^+}^2 + \frac{1}{2}(1 - \omega)(\mathbf{M}_d^2 - \mathbf{M}_u^2) \quad . \quad (6.37)$$

y debe cumplir la relación (6.14), que por cuestiones prácticas volveremos a escribir

$$|M_d - M_u| \leq m_{0^+} \leq M_d + M_u. \quad (6.38)$$

En este modelo necesitamos correr varias veces nuestro programa con el objetivo de averiguar la masa de los quarks y del diquark- $0_{[ud]}^+$ que mejor se ajuste a los valores reportados en la literatura para el radio de carga y la constante de decaimiento, es decir, necesitamos encontrar las masas que cumplan la condición (6.38) y analizar los valores resultantes para r_{0^+} y f_{0^+} con dichas masas.

Con este objetivo en mente se creó otro programa que solo reportara el radio de carga y la constante de decaimiento para valores con la masa de los quarks dentro del intervalo de $[0.350, \dots, 0.500]$ GeV con pasos de 0.1 GeV entre cada valor de $M_{u(d)}$. En este trabajo solo reportaremos los resultados obtenidos para $M_{u(d)} = [0.410, 0.420, 0.430, 0.440]$ GeV, que son aquellos que se acercan más a $r_{0^+} \approx 0.7 \text{ fm}$ y $f_{0^+} \approx 0.07 \text{ GeV}$ de manera simultánea y que a su vez cumplen la condición (6.38). Así mismo, para cada valor de $M_{u(d)}$ se correrá el programa con $m_{0^+} = [0.750, \dots, 0.830]$ GeV para tres valores diferentes de v cercanos a uno, $v = [0.9, 1.0, 1.1]$

6.3.1. Optimizando los valores de las masas

Empezamos el análisis con la masa de los quarks $M_{u(d)} = 0.410 \text{ GeV}$. El “nuevo” programa es básicamente la parte referente al radio de carga y la constante de decaimiento del programa ya visto en el [Apéndice B](#) (cambiando el signo de la definición de Λ_ω^2 de acuerdo a la ecuación 6.37), solo que anidado a un ciclo *for* que correrá el programa para $m_{0^+} = [0.750, \dots, 0.830]$ GeV; esto nos arrojará una base de datos que guardaremos en un archivo de texto y generaremos un nuevo programa que tome los archivos, cada uno con diferente v , y los agrupe en una sola gráfica que presente tanto el radio de carga como la constante de decaimiento. La figura 6.5 muestra la primera conglomeración de datos referentes a cuando $M_{u(d)} = 0.410 \text{ GeV}$.

En esta gráfica notamos que conforme aumentamos la masa del diquark- $0_{[ud]}^+$ aumenta el radio de carga y la constante de decaimiento, la diferencia es que aumentan con una pendiente diferente y por lo tanto no encontramos un punto en que ambos parámetros tengan el valor esperado con la misma masa m_{0^+} . Por ejemplo, al observar el radio de carga nos damos cuenta que cuando $m_{0^+} = 0.77 \text{ GeV}$ tenemos $r_{0^+} \approx 0.7 \text{ fm}$ cuando $v = 1$, sin embargo, al

observar la constante de decaimiento en estos mismos parámetros se tiene $f_{0^+} = 0.19 fm$, es decir, hay una discrepancia del 178% respecto al valor esperado. Debido a este desfase existente entre los parámetros estudiados y la masa del diquark- $0^+_{[ud]}$ decidimos agregar una superficie sombreada en la zona donde tanto r_{0^+} como f_{0^+} tienen un valor cercano al esperado (denotado por una línea gris en cada gráfica).

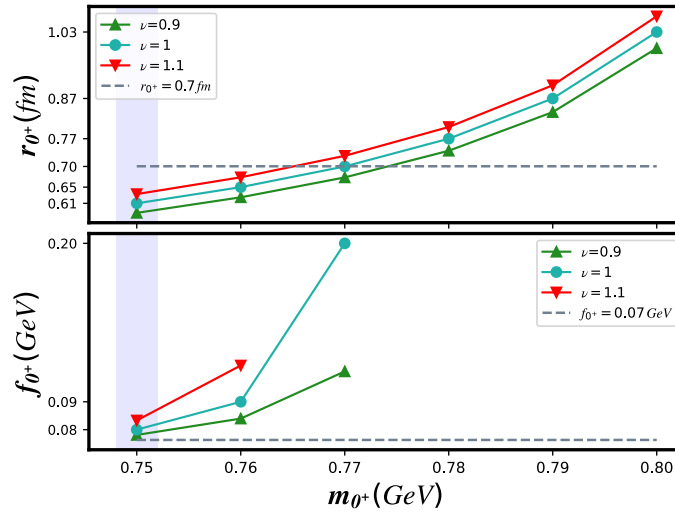


Figura 6.5: Radio de carga y constante de decaimiento cuando $M_{u(d)} = 0.410 GeV$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

ν	$m_{0^+} (GeV)$	$r_{0^+} (fm)$	$f_{0^+} (GeV)$
0.9	0.75	0.584	0.073
1.0	0.75	0.608	0.076
1.1	0.75	0.631	0.082

Tabla 6.5: Radio de carga y constante de decaimiento cuando $M_{u(d)} = 0.410 GeV$, $m_{0^+} = 0.75 GeV$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

La zona azul de la gráfica 6.5 es justamente donde ubicamos el menor margen de error para r_{0^+} y f_{0^+} con la misma masa $m_{0^+} = 0.75 GeV$. Los valores resultantes dados para cada ν se registran en la tabla 6.5. En esta tabla podemos observar que conforme aumenta el valor de ν el radio de carga se aproxima cada vez más al esperado, teniendo una diferencia (respecto a $r_{0^+} \approx 0.7 fm$) del 16% cuando $\nu = 0.9$, de 13% cuando $\nu = 1$ y llega al 9% para cuando $\nu = 1.1$. Pero al analizar la constante de decaimiento tenemos el caso contrario, mientras

6. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

más aumenta ν más nos alejamos del valor esperado ($f_{0^+} \approx 0.07 \text{ GeV}$), teniendo una discrepancia del 4% cuando $\nu = 0.9$, de 9% cuando $\nu = 1$ hasta una diferencia de 17% cuando tenemos $\nu = 1.1$. Esta peculiaridad nos indica que resulta prudente tomar un valor intermedio de ν , que sería $\nu = 1$, para obtener resultados aproximados y con el menor margen de error en r_{0^+} y f_{0^+} .

Al pasar al caso en que $M_{u(d)} = 0.420 \text{ GeV}$ tenemos la figura 6.6, en donde volvemos a observar que el radio de carga y la constante de decaimiento aumentan conforme aumenta la masa del diquark- $0_{[ud]}^+$ pero con una pendiente diferente. Observamos que cuando $m_{0^+} = 0.79 \text{ GeV}$ y $\nu = 1$ tenemos que $r_{0^+} \approx 0.7 \text{ fm}$ pero $f_{0^+} = 0.27 \text{ GeV}$, que representa una diferencia del 296% respecto al valor reportado. En este caso el área sombreada de rosa se encuentra entre $m_{0^+} = 0.76 - 0.77 \text{ GeV}$, una zona con la masa del diquark más alta que en el caso donde $M_{u(d)} = 0.410 \text{ GeV}$.

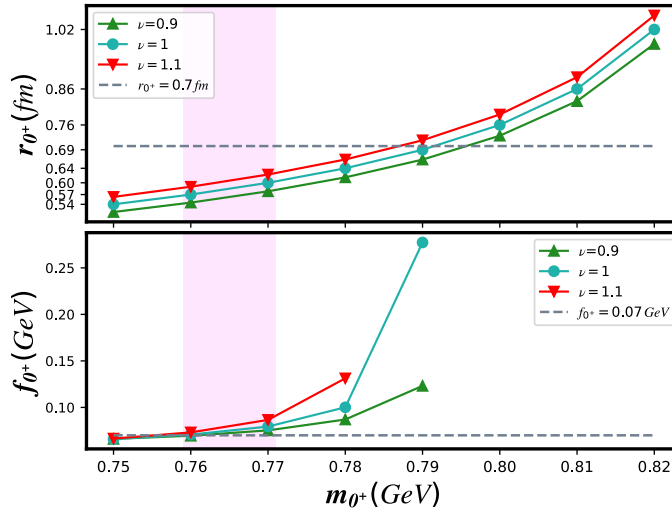


Figura 6.6: Radio de carga y constante de decaimiento cuando $M_{u(d)} = 0.420 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

ν	$m_{0^+} (\text{GeV})$	$r_{0^+} (\text{fm})$	$f_{0^+} (\text{GeV})$
0.9	0.77	0.576	0.075
1.0	0.77	0.599	0.079
1.1	0.77	0.622	0.087

Tabla 6.6: Radio de carga y constante de decaimiento cuando $M_{u(d)} = 0.420 \text{ GeV}$, $m_{0^+} = 0.77 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

La tabla 6.6 muestra el radio de carga y la constante de decaimiento cuando $m_{0^+} = 0.77 \text{ GeV}$, que es la masa del diquark- $0^+_{[ud]}$ en que ambos parámetros tienen una menor diferencia respecto a los valores esperados. En el caso del radio de carga se tiene que cuando $\nu = 0.9$ tenemos una discrepancia del 17 % y del 7 % en torno a r_{0^+} y la f_{0^+} respectivamente. Cuando $\nu = 1$ la diferencia disminuye al 14 % en el radio de carga, pero aumenta al 13 % en la constante de decaimiento. Por último, cuando tenemos $\nu = 1.1$ el valor de r_{0^+} difiere con los reportados un 11 % y el f_{0^+} un 23 %.

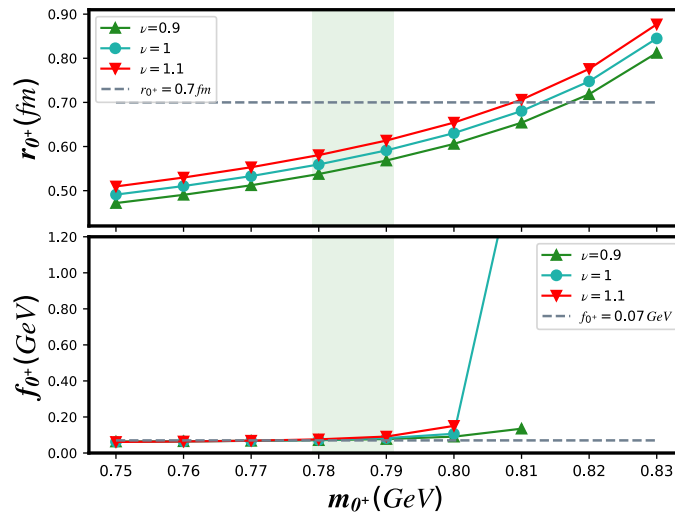


Figura 6.7: Radio de carga y constante de decaimiento cuando $M_{u(d)} = 0.430 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

ν	$m_{0^+} (\text{GeV})$	$r_{0^+} (\text{fm})$	$f_{0^+} (\text{GeV})$
0.9	0.79	0.568	0.078
1.0	0.79	0.591	0.082
1.1	0.79	0.613	0.091

Tabla 6.7: Radio de carga y constante de decaimiento cuando $M_{u(d)} = 0.430 \text{ GeV}$, $m_{0^+} = 0.79 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

Ahora, al trasladarnos al caso en que $M_{u(d)} = 0.430 \text{ GeV}$ tendremos los resultados reportados en la figura 6.7, donde notamos un caso curioso, pues, a pesar del aumento del r_{0^+} y f_{0^+} con m_{0^+} , en este caso los valores para f_{0^+} son muy cercanos a 0.07 GeV y aumentan con una pendiente más chica que el r_{0^+} . En este caso la zona de menor diferencia con respecto a los datos reportados se sombrea en color verde, tomando en concreto $M_{u(d)} = 0.79 \text{ GeV}$, cuyos valores para diferente ν se presentan en la tabla 6.7. Aquí observamos que el radio de carga

6. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

se diferencia con respecto al valor esperado un 19% cuando $\nu = 0.9$, un 15% cuando $\nu = 1$ y disminuye hasta un 12% cuando $\nu = 1.1$. Por otro lado, la constante de decaimiento empieza teniendo una discrepancia de 11% para $\nu = 0.9$, pasa a un 18% cuando $\nu = 1$ y aumenta hasta un 30% cuando $\nu = 1.1$.

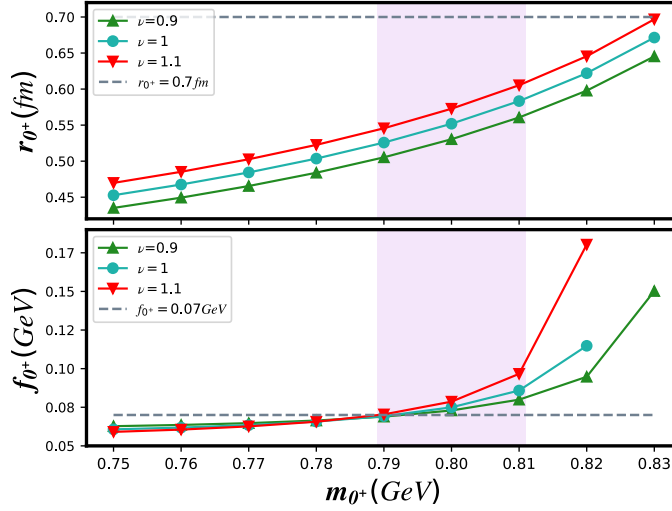


Figura 6.8: Radio de carga y constante de decaimiento cuando $M_{u(d)} = 0.440 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

ν	$m_{0^+} (\text{GeV})$	$r_{0^+} (\text{fm})$	$f_{0^+} (\text{GeV})$
0.9	0.80	0.530	0.073
1.0	0.80	0.552	0.075
1.1	0.80	0.573	0.079

Tabla 6.8: Radio de carga y constante de decaimiento cuando $M_{u(d)} = 0.440 \text{ GeV}$, $m_{0^+} = 0.80 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

El último caso de estudio se presenta en la figura 6.8, que es cuando $M_{u(d)} = 0.440 \text{ GeV}$. Aquí nos damos cuenta que el radio de carga tarda más tiempo en llegar a valores cercanos a 0.7 fm y que su comportamiento tiene un desfase más notorio al cambiar de ν . El caso contrario ocurre en la constante de decaimiento, pues desde los primeros valores de la masa del diquark- $0_{[ud]}^+$ se acerca bastante al valor reportado, 0.07 GeV , teniendo ligeras diferencias al variar ν , y siendo hasta entradas de m_{0^+} más grandes cuando nos empezamos a alejar de manera rápida del dato esperado. El área que presenta menores discrepancias con los artículos mencionados la marcamos en color morado y tomamos el caso $m_{0^+} = 0.80 \text{ GeV}$, el cual se encuentra reportado en la tabla 6.8. Podemos notar que para esta masa del diquark-

$0_{[ud]}^+$ el radio de carga tiene una diferencia del 24 % cuando $\nu = 0.9$, disminuye al 21 % cuando $\nu = 1$ y baja hasta el 18 % para cuando $\nu = 1.1$; mientras que cuando $\nu = 0.9$ la constante de decaimiento difiere un 4 %, sube al 7 % cuando $\nu = 1$ y llega al 12 % para $\nu = 1.1$.

En las figuras (6.5-6.8) podemos ver comportamientos muy similares, como el hecho de que r_{0^+} y f_{0^+} aumenten conforme aumentamos m_{0^+} pero con una pendiente diferente, por lo cual en ninguno de los casos se da que tanto el radio de carga como la constante de decaimiento coincidan en la misma m_{0^+} . Lo único que se pudo hacer fue sombrear un área en que tanto r_{0^+} como f_{0^+} presentaran la menor discrepancia respecto a los valores reportados en [41], [47] y [41] para una misma m_{0^+} . En los cuatro casos notamos que dicha área sombreada se va desfasando hacia mayores valores de m_{0^+} , por lo cual podemos concluir que al aumentar la masa de los quarks $M_{u(d)}$, la zona donde es factible encontrar r_{0^+} y f_{0^+} la tenemos en valores más grandes de la masa del diquark- $0_{[ud]}^+$. Por otro lado, al analizar las tablas (6.5-6.8) podemos decir que los resultados más óptimos para r_{0^+} y f_{0^+} se dan cuando $M_{u(d)} = 0.410 \text{ GeV}$ y $m_{0^+} = 0.75 \text{ GeV}$, debido a lo cual usaremos estos valores de entrada para calcular las funciones de distribución en los tres casos donde $\nu = [0.9, 1, 1.1]$.

6.3.2. Funciones de distribución con las masas optimizadas

Ahora que tenemos las masas de los quarks y del diquark- $0_{[ud]}^+$ que cumplen con la condición (6.38) podemos ingresar la función de la PDF dada en (6.16) a nuestro programa¹. La figura 6.9 muestra la PDA del diquark- $0_{[ud]}^+$ para $\nu = [0.9, 1, 1.1]$. Notamos que para cualquier valor de ν tendremos la misma forma gaussiana de la PDF, lo cual tiene sentido, ya que la PDF es la GPD cuando $t = 0$ y por lo tanto tampoco depende de ν ; también lo vemos explícitamente en la expresión (6.16) donde no se presenta ninguna dependencia en t ni en el parámetro libre ν . El punto máximo de la PDF se da en $x_{max} = 0.505$ y es $q_{0^+}(x_{max}) = 3.602$.

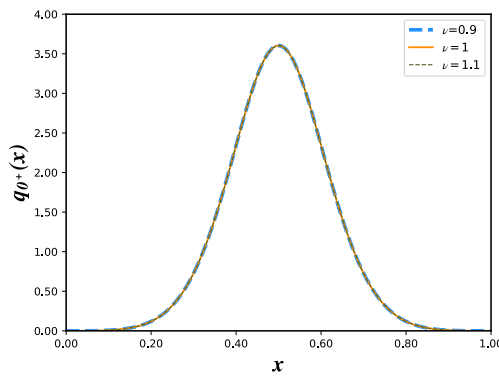


Figura 6.9: PDF del diquark- $0_{[ud]}^+$ para $M_{u(d)} = 0.410 \text{ GeV}$, $m_{0^+} = 0.75 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$

¹Es un programa prácticamente igual al reportado en el Apéndice B con la ligera modificación del signo en el segundo término en la función Λ_ω^2 y que corre para las tres ν dadas.

6. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Con los mismos valores de entrada también podemos computar la GPD de la expresión (6.17) para las diferentes ν y cuando $-t = [0, 0.2, 0.5, 1, 2]$.

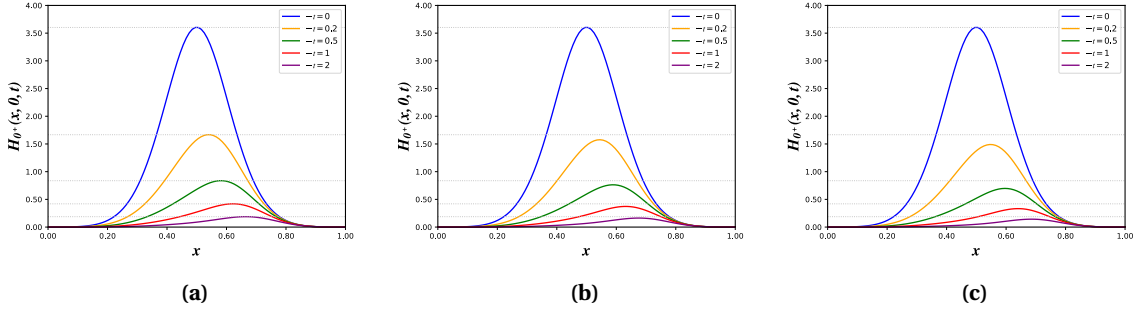


Figura 6.10: GPD del diquark- 0_{ud}^+ para $M_{\text{u(d)}} = 0.410 \text{ GeV}$, $m_{0^+} = 0.75 \text{ GeV}$, $-t = [0, 0.2, 0.5, 1, 2]$ y

(a) $\nu = 0.9$ (b) $\nu = 1$ (c) $\nu = 1.1$.

En la figura 6.10 se muestran las GPD para diferentes ν , donde notamos que conforme aumentamos el valor de ν la función se va aplanando. Para observar mejor este efecto en la figura 6.11 se muestra un acercamiento a la GPD para $-t = [0.2, 0.5, 1, 2]$. Es aquí donde vemos que cuando $-t = 0.2$ y $\nu = 0.9$ hay un punto máximo $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -0.2) = 1.67$ en $x_{\text{max}} = 0.54$, lo cual se reduce a $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -0.2) = 1.58$ cuando $\nu = 1$ y llega hasta $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -0.2) = 1.49$ para $\nu = 1.1$. Cuando nos pasamos a $-t = 0.5$ el punto máximo se reduce bastante, siendo $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -0.5) = 0.84$ en $x_{\text{max}} = 0.58$ cuando $\nu = 0.9$, este se reduce a $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -0.5) = 0.76$ cuando $\nu = 1$ y en $\nu = 1.1$ llega a $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -0.5) = 0.70$. Por otro lado, para $-t = 1$ el punto máximo se recorre a la derecha en $x_{\text{max}} = 0.62$ de manera que $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -1) = 0.42$ cuando $\nu = 0.9$, se transforma en $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -1) = 0.37$ para $\nu = 1$ y llega a $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -1) = 0.33$ al tener $\nu = 1.1$. Finalmente, cuando $-t = 2$ identificamos $x_{\text{max}} = 0.66$, así tenemos que para $\nu = 0.9$ el máximo es $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -2) = 0.19$, para $\nu = 1$ se reduce a $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -2) = 0.16$ y llega a $H_{0^+}(x_{\text{max}}, 0, -2) = 0.14$ en $\nu = 1.1$.

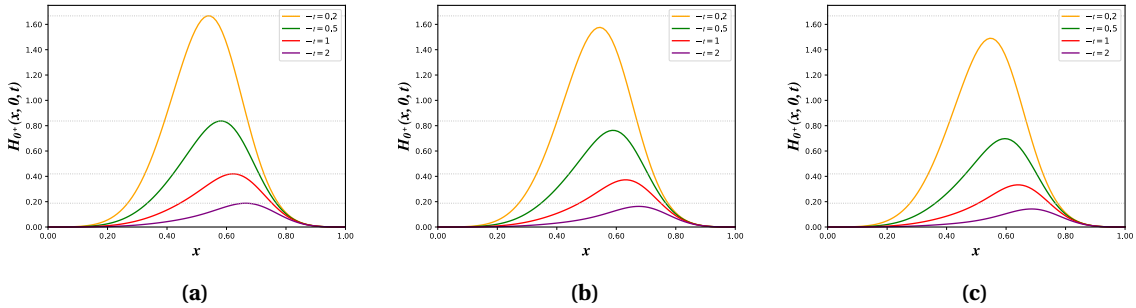


Figura 6.11: Acercamiento de la GPD del diquark- 0_{ud}^+ para $M_{\text{u(d)}} = 0.410 \text{ GeV}$, $m_{0^+} = 0.75 \text{ GeV}$,

$-t = [0.2, 0.5, 1, 2]$ y (a) $\nu = 0.9$ (b) $\nu = 1$ (c) $\nu = 1.1$.

Ahora calculamos el factor de forma dado en la ecuación (6.20) variando t en un intervalo $-t = [0, \dots, 2]$ para $\nu = [0.9, 1, 1.1]$. En la figura 6.12 notamos que la función presenta un comportamiento muy similar para todos los valores de ν ; en $-t = 0$ tenemos que la amplitud inicial del factor de forma es justamente la suma de las cargas de los quarks, $F_{0+}(0) = \frac{1}{3}$, y tiende a cero cuando el valor de $-t$ aumenta. Sin embargo, la principal diferencia radica en que, a pesar de que en la amplitud inicial el factor de forma coincide para toda ν , la manera en que tiende a cero es diferente, pues para $\nu = 0.9$ presenta una mayor área bajo la curva en comparación a la que se tiene cuando $\nu = 1.1$. Resultado de este comportamiento podemos concluir que conforme aumenta el valor de ν el área bajo la curva del factor de forma se reduce.

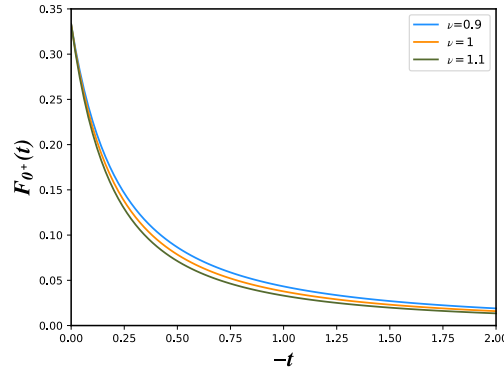


Figura 6.12: Factor de forma del diquark- $0_{[ud]}^+$ para $M_{u(d)} = 0.410 \text{ GeV}$, $m_{0+} = 0.75 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$

Por último computamos la expresión (6.34), la referente a la densidad espectral. El resultado de este cómputo para $\nu = [0.9, 1, 1.1]$ se muestra en la figura 6.13, en donde parece que la función es simétrica respecto al eje coordenado vertical. Así mismo, mantiene su forma al variar el valor de ν , siendo únicamente los puntos críticos, dos máximos y un mínimo, donde se presentan los cambios.

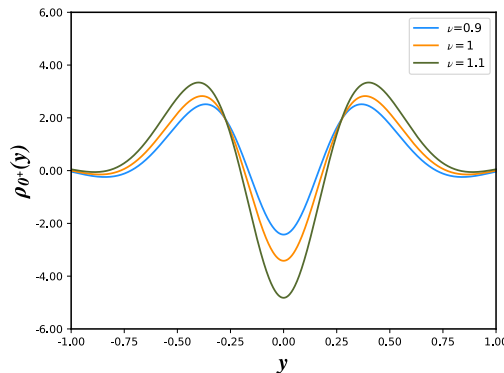


Figura 6.13: Densidad espectral del diquark- $0_{[ud]}^+$ para $M_{u(d)} = 0.410 \text{ GeV}$, $m_{0+} = 0.75 \text{ GeV}$ y $\nu = [0.9, 1, 1.1]$

ν	P. mínimo	P. máximo 1	P. máximo 2
0.9	(0, -2.42)	(-0.37, 2.51)	(0.36, 2.51)
1.0	(0, -3.42)	(-0.38, 2.83)	(0.38, 2.83)
1.1	(0, -4.82)	(-0.40, 3.34)	(0.40, 3.34)

Tabla 6.9: Valores críticos de la densidad espectral al variar ν .

En la tabla 6.9 mostramos las coordenadas de los puntos críticos que aparecen en la densidad espectral del diquark- $0_{[ud]}^+$ al variar el parámetro ν . Al observar la primer entrada de cada punto crítico notamos que para el mínimo siempre se mantiene en $y = 0$, pero en los puntos máximos la primera entrada aumenta una o dos centésimas, es decir, al aumentar el valor de ν los puntos máximos se recorren unas cuantas centésimas a los extremos. Ahora, al pasar a la segunda entrada, $\rho_{0^+}(y)$, el comportamiento del mínimo es decreciente al aumentar ν , caso contrario a los puntos máximos, pues crecen conforme ν aumenta.

6.3.3. Conclusiones del modelo

En este segundo modelo en que asumimos que $P^2 = -m_{0^+}^2$ se nos permitieron más libertades para ajustar los parámetros de entrada que mejor se adecuaron a los datos ya reportados del radio de carga y la constante de decaimiento. Este análisis nos dejó visualizar que a mayor masa de los quarks la masa del diquark- $0_{[ud]}^+$ tiene que ser más grande para poder tener los valores reportados del r_{0^+} y la f_{0^+} . Con esto llegamos a la conclusión de que los valores óptimos eran $M_{u(d)} = 0.410 \text{ GeV}$ y $m_{0^+} = 0.750 \text{ GeV}$ para $\nu = [0.9, 1, 1.1]$. Una vez que tuvimos nuestros parámetros de entrada fue posible calcular las funciones de distribución que describen el comportamiento interno del diquark- $0_{[ud]}^+$.

Conclusiones

“Si amo realmente a una persona, amo a todas las personas, amo al mundo, amo la vida. Si puedo decirle a alguien << Te amo >>, debo poder decir << Amo a todos en ti, a través de ti amo al mundo, en ti me amo también a mi mismo>>.”

-El arte de amar, Erich Fromm-

Sabemos que la dinámica interna de un hadrón se puede estudiar con el entendimiento de su BSWF, la cual se describe en términos de las expresiones de la SDE del fermión y la BSA. El problema reside en que necesitamos tener información de la densidad espectral propia de cada partícula, una función normalmente desconocida. Es en este punto donde entra el modelo algebraico en cuestión, el cual propone eliminar toda dependencia de la densidad espectral en las funciones de distribución y delegar su papel descriptivo en la PDA, es ahora esta amplitud de distribución la que nos brindará las características particulares de la partícula sujeta a análisis. Este cambio resultó ser una muy buena aproximación tomando en cuenta que el estudio de las PDA cuenta con una bibliografía más extensa.

El principal logro del modelo recae en su capacidad de continuar con los cálculos analíticos por más tiempo gracias a la definición que se le da a la función $\Lambda^2(\omega)$, permitiéndonos llegar a una expresión para la GPD con menos variables para computar numéricamente. Así, una vez que se cuenta con la GPD resulta prácticamente inmediato extraer el resto de funciones características de la partícula, como lo es la PDF, el FF y el radio de carga. Además, aunque ya no sea necesario, gracias al modelo también es posible llegar a una expresión para la densidad espectral a partir de la cual se extrae la constante de decaimiento.

En este caso particular en que estudiamos el diquark- $0_{[ud]}^+$, el valor de su masa comparada con el valor de sus quarks constituyentes generó una discordancia en el modelo, desatan- do que se propusieran dos caminos diferentes para dos definiciones de la función $\Lambda^2(\omega)$, en concreto, el cambio radicó en tomar el momento cuadrado como $P^2 = \pm m_{0+}^2$, dándonos dos posibles resultados. En el caso en que $P^2 = m_{0+}^2$ se tomó la masa de los quarks

como $M_{u(d)} = 0.36 GeV$, la masa del diquark $m_{0^+} = 0.89 GeV$ y el parámetro libre $\nu = 1$, obteniendo con estos valores un radio de carga $r_{0^+} \approx 0.2 fm$ y una constante de decaimiento $f_{0^+} \approx 0.07 GeV$. En cambio, en el segundo caso, cuando $P^2 = -m_{0^+}^2$, elevamos el valor de la masa de los quarks a $M_{u(d)} = 0.41 GeV$ y reducimos la del diquark a $m_{0^+} = 0.75 GeV$; con estos valores iniciales, y tomando $\nu = 1$, se tiene que $r_{0^+} \approx 0.6 fm$ y $f_{0^+} = 0.076 GeV$. Al comparar estos resultados con los reportados en la literatura, en donde $r_{0^+} \approx 0.7 fm$ y $f_{0^+} \approx 0.07 GeV$, podemos concluir que el segundo camino, donde la función $\Lambda^2(\omega)$ se define con $P^2 = -m_{0^+}^2$, resulta un modelo más acertado y nos proporciona una buena herramienta para el estudio de la estructura interna del diquark- $0_{[ud]}^+$.

Apéndices

Apéndice A

Parametrización de Feynman

Este tipo de parametrización se utiliza cuando tenemos un término que involucra denominadores elevados a ciertas potencias. Consiste en introducir nuevos parámetros para expresar de manera más simple el término original. Partimos de la idea de tener la siguiente igualdad

$$\frac{1}{A-B} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) = \frac{1}{B(A-B)} - \frac{1}{A(A-B)} = \frac{A-B}{AB(A-B)} = \frac{1}{AB} \quad (\text{A.1})$$

y, por otro lado, al resolver la siguiente integral llegamos a que

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} \Big|_B^A = \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \quad (\text{A.2})$$

Con estas dos últimas expresiones podemos llegar a una igualdad entre la fracción y la integral

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A-B} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) = \frac{1}{A-B} \int_A^B \frac{dz}{z^2} \quad (\text{A.3})$$

Introducimos una nueva variable u definida como

$$u = \frac{z-B}{A-B} \quad (\text{A.4})$$

de manera que

$$\begin{array}{ll} z = u(A-B) + B & z = A \rightarrow u = 1 \\ dz = (A-B)du & z = B \rightarrow u = 0 \end{array}$$

con lo que la integral se transforma a

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \frac{1}{A-B} \int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A-B} \int_0^1 \frac{1}{(u(A-B) + B)^2} (A-B) du \\ &= \int_0^1 \frac{du}{(uA - uB + B)^2} = \int_0^1 \frac{du}{(uA + B(1-u))^2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

y recordamos la definición de la delta de Dirac

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } a < x_0 < b \\ 0 & \text{si } x_0 < a \text{ ó } x_0 > b \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

así podemos reescribir la integral y llegar a la parametrización de Feynman de $\frac{1}{AB}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \int_0^1 du \int_0^1 \delta(v - (1 - u)) \frac{1}{(uA + Bv)^2} dv \\ &= \int_0^1 du \int_0^1 \frac{1}{| -1 |} \frac{\delta(1 - u - v)}{(uA + Bv)^2} dv = \int_0^1 du \int_0^1 \frac{\delta(1 - u - v)}{(uA + Bv)^2} dv. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

También podemos encontrar la parametrización de Feynman para un término compuesto por la multiplicación de tres denominadores. Siguiendo el proceso del caso anterior llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{ABC} &= \frac{1}{C - B} \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} \right) = \frac{1}{C - B} \left[\int_0^1 \frac{du}{(uA + B(1 - u))^2} - \int_0^1 \frac{du}{(uA + C(1 - u))^2} \right] \\ &= \frac{1}{C - B} \int_0^1 \frac{du}{(uA + x(1 - u))^2} \Big|_{x=C}^{x=B} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

pero podemos expresar el integrando como

$$\frac{1}{(uA + x(1 - u))^2} \Big|_{x=C}^{x=B} = \int_C^B f(x) dx \quad (\text{A.9})$$

y con esto derivar el término para encontrar la función $f(x)$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(uA + x(1 - u))^2} \right) = \frac{2(u - 1)}{[uA + x(1 - u)]^3} \quad (\text{A.10})$$

Ahora introducimos un parámetro nuevo definido como v

$$v = (1 - u) \frac{x - C}{B - C} \quad (\text{A.11})$$

de manera que

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \left(\frac{B-C}{1-u} \right) v + C & x = B &\rightarrow v = 1 - u \\ dx &= \frac{B-C}{1-u} dv & x = C &\rightarrow v = 0 \end{aligned}}$$

y término fraccionario se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{(uA + x(1 - u))^2} \Big|_{x=C}^{x=B} &= \int_0^{1-u} \frac{-2(1-u)}{[uA + (C + \frac{B-C}{1-u}v)(1 - u)]^3} \left(\frac{B-C}{1-u} dv \right) \\ &= -2(B - C) \int_0^{1-u} \frac{dv}{[uA + \left(\frac{C(1+u) + (B-C)v}{1-u} \right) (1-u)]^3} \\ &= -2(B - C) \int_0^{1-u} \frac{dv}{[uA + vB + C(1 - u - v)]^3} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Con esto en mente, la ecuación (A.8) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{1}{ABC} &= \frac{1}{\cancel{C} \cancel{B}} \int_0^1 2(\cancel{C} \cancel{B}) du \int_0^{1-u} \frac{dv}{[uA + vB + C(1-u-v)]^3} \\ &= 2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} \frac{dv}{[uA + vB + C(1-u-v)]^3}\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

y, finalmente, usando la definición de la delta de Dirac, llegamos a la parametrización de Feynman de $\frac{1}{ABC}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{ABC} &= 2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^1 \delta(w - (1-u-v)) \frac{dw}{[uA + vB + wC]^3} \\ &= 2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^1 \frac{\delta(1-u-v-w)}{[uA + vB + wC]^3} dw\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

De la misma manera se puede encontrar la parametrización de Feynman para términos dados de la multiplicación de varios denominadores no repetidos, en concreto, para n factores tendremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1 \cdots A_n} &= (n-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^{1-u_1} du_2 \cdots \int_0^{1-\sum_{k=1}^{n-1} u_k} du_{n-1} \\ &\quad \times \frac{1}{\left[u_1 A_1 + \cdots + u_{n-1} A_{n-1} + \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \right) A_n \right]^n}\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

y en términos de la delta de Dirac

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = (n-1)! \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_n \frac{\delta\left(1 - \sum_{k=1}^n u_k\right)}{\left(\sum_{k=1}^n u_k A_k\right)^n}.\quad (\text{A.16})$$

Por otra parte, si el denominador está elevado a una potencia, podemos expresarlo de la siguiente manera

$$\frac{1}{A^\nu} = -\frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \left[\frac{1}{A} \right]\quad (\text{A.17})$$

Así mismo, resulta de utilidad tener la siguiente relación

$$\frac{d^\alpha}{dA^\alpha} \frac{1}{[uA + \cdots]^\beta} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} [uA + \cdots]^{-(\alpha + \beta)} u^\alpha\quad (\text{A.18})$$

Con esto en mente, podemos encontrar la parametrización de Feynman para un término dado por la multiplicación de dos denominadores diferentes elevados a la misma potencia

(A.19)

sustituyendo (A.5) en (A.19) tendremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{A^\nu B^\nu} &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu)} \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{dB^{\nu-1}} \int_0^1 \frac{du}{(uA + B(1-u))^2} \\ &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu)} \int_0^1 \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{dB^{\nu-1}} \frac{du}{(uA + B(1-u))^2}\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

y tomando en cuenta la definición de la derivada dada en (A.18) para cuando $\alpha = \nu - 1$ y $\beta = 2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{A^\nu B^\nu} &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu)} \int_0^1 \frac{d^{\nu-1}}{dB^{\nu-1}} (-1)^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu-1+2)}{\Gamma(2)} \frac{du}{[uA + B(1-u)]^{\nu-1+2}} u^{\nu-1} \\ &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu)} (-1)^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu+1)}{1} \int_0^1 \frac{d^{\nu-1}}{dB^{\nu-1}} \frac{du}{[uA + B(1-u)]^{\nu+1}} u^{\nu-1}\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

con esta misma definición de la derivada pero con $\alpha = \nu - 1$ y $\beta = \nu + 1$ llegamos a que

$$\begin{aligned}\frac{1}{A^\nu B^\nu} &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu)} (-1)^{\nu-1} \Gamma(\nu+1) \int_0^1 (-1)^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu-1+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{u^{\nu-1}(1-u)^{\nu-1} du}{[uA + B(1-u)]^{\nu-1+\nu+1}} \\ &= \frac{(-1)^{4\nu-2}}{\Gamma^2(\nu)} \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu+1)} \Gamma(\nu+1) \int_0^1 \frac{u^{\nu-1}(1-u)^{\nu-1}}{[uA + B(1-u)]^{2\nu}} du\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

así concluimos que la parametrización de Feynman del término $\frac{1}{A^\nu B^\nu}$ es

$$\frac{1}{A^\nu B^\nu} = (-1)^{4\nu} \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \int_0^1 \frac{u^{\nu-1}(1-u)^{\nu-1}}{[uA + B(1-u)]^{2\nu}} du \quad (\text{A.23})$$

Como último ejemplo de este tipo de parametrización, veremos el caso donde ambos denominadores están elevados a la potencia $\nu + 1$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{A^{\nu+1} B^{\nu+1}} &= \frac{(-1)^{2(\nu+1)}}{\Gamma^2(\nu+1)} \frac{d^{\nu+1-1}}{dA^{\nu+1-1}} \frac{d^{\nu+1-1}}{dB^{\nu+1-1}} \left[\frac{1}{AB} \right] \\ &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu+1)} \frac{d^\nu}{dA^\nu} \frac{d^\nu}{dB^\nu} \left[\frac{1}{AB} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

y sustituyendo (A.5) en (A.24)

$$\frac{1}{A^{\nu+1} B^{\nu+1}} = \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 \frac{d^\nu}{dA^\nu} \frac{d^\nu}{dB^\nu} \frac{du}{(uA + B(1-u))^2} \quad (\text{A.25})$$

ahora, usando la definición de la derivada de la ecuación (A.18) para $\alpha = \nu$ y $\beta = 2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{A^{\nu+1} B^{\nu+1}} &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 du \frac{d^\nu}{dB^\nu} (-1)^\nu \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(2)} \frac{u^\nu}{[uA + B(1-u)]^{(\nu+2)}} \\ &= \frac{(-1)^{2\nu} (-1)^\nu}{\Gamma^2(\nu+1)} \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 u^\nu du \frac{d^\nu}{dB^\nu} \frac{1}{[uA + B(1-u)]^{(\nu+2)}}\end{aligned}\quad (\text{A.26})$$

continuando con la siguiente derivada pero ahora con $\alpha = \nu$ y $\beta = \nu + 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^{\nu+1}B^{\nu+1}} &= \frac{(-1)^{2\nu}(-1)^\nu}{\Gamma^2(\nu+1)} \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 u^\nu du (-1)^\nu \frac{\Gamma(\nu+\nu+2)}{\Gamma(\nu+2)} \frac{(1-u)^\nu}{[uA+B(1-u)]^{(\nu+\nu+2)}} \\ &= \frac{(-1)^{4\nu}}{\Gamma^2(\nu+1)} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 du \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[uA+B(1-u)]^{2\nu+2}} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

pero recordamos que $\Gamma(2) = 1! = 1$ y que $(-1)^{4\nu} = 1$ para $\nu = 1, 2, 3, \dots$, con lo cual (A.27) se reduce a

$$\frac{1}{A^{\nu+1}B^{\nu+1}} = \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^1 \frac{u^\nu (1-u)^\nu}{[uA+B(1-u)]^{2\nu+2}} du \quad (\text{A.28})$$

Apéndice B

Programa en Python

A continuación se presenta el programa en python que se utilizó para calcular y graficar la PDA, PDF, FF, GPD, densidad espectral, radio de carga y constante de decaimiento del primer caso de estudio. Las librerías utilizadas fueron numpy, scipy, sympy y matplotlib; así como IDLE el entorno de desarrollo elegido para trabajar. Como una introducción didáctica a la programación en python se revisó el libro . Cabe mencionar que el programa presente no se encuentra optimizado, hay líneas que se pueden reducir y secuencias que se pueden pensar diferente con el propósito de agilizar el tiempo de cómputo.

```
1  """#####
2  #####
3  ##                                     ##
4  ##          INDICACIONES PARA USAR ESTE PROGRAMA      ##
5  ##          (Toma nu, masa de los quarks y masa      ##
6  ##          del diquark como input. Radio de carga    ##
7  ##          y constante de decaimiento son los output) ##
8  ##                                     ##
9  #####
10 #####
11 # AL CAMBIAR DE UNA PARTÍCULA A OTRA, EN EL PROGRAMA SE DEBEN CAMBIAR LOS VALORES DE:
12 # Mq = 'Valor de la masa vestida del 1er quark en GeV'
13 # Maq = 'Valor de la masa vestida del 2do quark en GeV'
14 # M = 'Valor de la masa del diquark en GeV'
15 # cq = 'Valor de la carga del 1er quark'
16 # caq = 'Valor de la carga del 2do quark'
17 # partícula = 'Nombre de la partícula con que se quiere trabajar'
18 # la PDA del quark, pda1(y)
19
20 #####
21 #####
```

B. PROGRAMA EN PYTHON

```
22  ##                                LIBRERIAS                                ##
23  #####
24  #####
25  import numpy as np                # La librería para matrices
26  import sympy as smp               # Para operaciones analíticas
27  import matplotlib.pyplot as plt   # Para graficar
28  import math                       # Para usar algunas funciones
29  from scipy import integrate        # Para integral numérico
30  from scipy.special import gamma, factorial # Para usar la expresión de gamma
31  from sympy import exp, symbols, Heaviside # Funciones que necesito
32  from sympy import lambdify         # Para convertir a funciones
33  from matplotlib import ticker      # Para los labels
34
35  plt.rcParams["mathtext.fontset"]='custom'          # Especificando el tipo
36  plt.rcParams['mathtext.it'] = 'STIXGeneral:italic'  # de texto para
37  plt.rcParams['mathtext.bf'] = 'STIXGeneral:italic:bold' # las ecuaciones
38
39  #####
40  #####
41  ##                                ##
42  ##      EN ESTE CASO ESTAMOS TRABAJANDO CON: Diquark      ##
43  ##      SU QUARK ES: up                                     ##
44  ##      SU OTRO QUARK ES: down                             ##
45  ##                                                         ##
46  #####
47  #####
48  # -----
49  #variables a declarar
50  x  = smp.Symbol('x')
51  Maq = smp.symbols('Maq')
52  Mq  = smp.symbols('Mq')
53  M   = smp.symbols('M')
54  nu  = smp.symbols('nu')
55  y   = smp.symbols('y')
56
57  nu=1
58  fm  = 0.1973
59  Mq  = 0.316355
60  Maq = 0.316355
61  M   = 0.890
62  cq  = 2/3
```

```

63  caq = -1/3
64  particula = 'diquark'
65
66  # -----
67  # Normalizo la PDA
68  Npda = lambdify( x, x* (1 - x)*exp( ( -(1.43)**2) * ((2*x-1)**2) ) , 'numpy')
69  No = integrate.quadrature(Npda, 0, 1)
70
71  # la PDA del quark
72  def pdai(y):
73      x=0.5*(1-y)
74      phi = (1/No[0])*x* (1 - x)*exp( ( -(1.43)**2) * ((2*x-1)**2) )
75      return phi
76
77  # la función Lambda en y
78  def Lambda(y):
79      Lambda2 = Mq**2 + (1/4)*(1-(y**2))*(M**2) + (0.5)*(1-y)*( (Maq**2) - (Mq**2))
80      return Lambda2
81
82  # -----
83  # LOS LÍMITES PARA LAS GRÁFICAS
84  # Para la GPD
85  xmin_GPD = 0
86  xmax_GPD = 1
87  ymin_GPD = 0
88  ymax_GPD = 3
89
90  # Para la PDA
91  xmin_PDA = 0
92  xmax_PDA = 1
93  ymin_PDA = 0
94  ymax_PDA = 2.5
95
96  # Para la PDF
97  xmin_PDF = 0
98  xmax_PDF = 1
99  ymin_PDF = 0
100  ymax_PDF = 3
101
102  # Para el Factor de Forma (FF)
103  xmin_FF = 0

```

B. PROGRAMA EN PYTHON

```
104 xmax_FF = 5
105 ymin_FF = 0
106 ymax_FF = 1
107
108 # Para la Densidad espectral (DE)
109 xmin_DE = -1
110 xmax_DE = 1
111 ymin_DE = -10
112 ymax_DE = 10
113 # -----
114
115 #####
116
117 #####
118 #####
119 #####
120 #####          PDA          #####
121 #####          #####
122 #####
123 #####
124 # -----
125 # Limpio las variables x,y y las vuelvo a definir
126 del x
127 del y
128 x = smp.symbols('x')
129 y = smp.symbols('y')
130
131 m = lambdify( x, pda1(1-2*x) )
132 x = np.linspace(0, 1,50)
133
134 # -----
135 # La gráfica
136 fig, ax = plt.subplots()
137 ax.plot(x, m(x), c = 'deepskyblue',linewidth=1.6)
138 ax.set_xlim(xmin_PDA, xmax_PDA)
139 ax.set_ylim(ymin_PDA, ymax_PDA)
140 plt.setp(ax.spines.values(), lw=1.3, color='black', alpha=1.0)
141
142 # -----
143 # Las etiquetas de los ejes
144 ax.xaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
```

```

145 ax.xaxis.set_tick_params(labelsize=9)
146 ax.yaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
147 ax.yaxis.set_tick_params(labelsize=9)
148 plt.xlabel("$\mathbf{x}$", fontsize=12)
149 plt.ylabel("$\mathbf{\phi_{0^+}(x)}$", fontsize=12)
150
151 # -----
152 # Guardando la gráfica
153 fig.savefig('pda.svg', format='svg', dpi=72)
154 # -----
155
156 #####
157
158 #####
159 #####
160 #####
161 #####          GPD          #####
162 #####          #####
163 #####
164 #####
165 # -----
166 # Limpio las variables (x,y) y las vuelvo a definir
167 del x
168 del y
169 x = smp.symbols('x')
170 y = smp.symbols('y')
171
172 # -----
173 #CALCULO DE LA GPD
174 G1=gamma(2*nu+2)
175 G2=(gamma(nu+1))**2
176 G3=G1/G2
177
178 # La constante de normalización para la GPD
179 def NGPD(x):
180     Ng= (pda1(1-2*x))**2 /(Lambda(1-2*x))
181     return Ng
182
183 #hago la integral para la constante de normalización
184 NgpdI = lambdify( x, NGPD(x), 'numpy' )
185 const1=integrate.quadrature(NgpdI, 0, 1)

```

B. PROGRAMA EN PYTHON

```
186 Ngpd=const1[0]    # tomo la primer entrada de la lista
187
188 # -----
189 NN=100
190 x = np.linspace(0, 1, NN)
191 M1 = []
192 ent = [0,-0.2,-0.5,-1,-2]
193 num =[1,2,3,4,5]
194
195 for j in range(len(ent)):
196     t=ent[j]
197     for i in range(len(x)):
198         y=1-2*x
199         f1 = lambda u: ((1/Ngpd)* ((pda1(y[i]))**2) *((Lambda(y[i])**2*nu))) * G3) *(
200             (u**nu)*((1-u)**nu)) / ( (-0.25*(t))* ( (1+y[i])**2)*u*(1-u) + Lambda(y[i])
201             )**(2*nu+1)
202         ffi1=integrate.quadrature(f1, 0, 1)
203         M1.append(ffi1[0])
204
205 NM=M1[0:NN]
206 NM2=M1[ NN:2*NN]
207 NM3=M1[2*NN:3*NN]
208 NM4=M1[3*NN:4*NN]
209 NM5=M1[4*NN:5*NN]
210
211 # -----
212 n = np.linspace(0, 1,NN)
213 # La gráfica
214 ax.plot(n, NM, linewidth=1.6,label= r"${-t=0}$")
215 ax.plot(n, NM2, linewidth=1.6,label= r"${-t=0.2}$")
216 ax.plot(n, NM3, linewidth=1.6,label= r"${-t=0.5}$")
217 ax.plot(n, NM4, linewidth=1.6,label= r"${-t=1}$")
218 ax.plot(n, NM5, linewidth=1.6,label= r"${-t=2}$")
219 ax.set_xlim(xmin_GPD, xmax_GPD)
220 ax.set_ylim(ymin_GPD, ymax_GPD)
221 plt.setp(ax.spines.values(), lw=1.3, color='black', alpha=1.0)
222
223 # -----
224 # Agregando las etiquetas para cada -t
225 legend = ax.legend(shadow=False,facecolor='white',fontsize='x-small',
226                    loc='upper right',markerscale=1.01)
```

```

227
228 # -----
229 # Las etiquetas de los ejes
230 ax.xaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
231 ax.xaxis.set_tick_params(labelsize=9)
232 ax.yaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
233 ax.yaxis.set_tick_params(labelsize=9)
234 plt.xlabel(" $\mathbf{x}$ ", fontsize=12)
235 plt.ylabel(" $\mathbf{H_{0^+}(x,0,t)}$ ", fontsize=12)
236
237 # -----
238 # Guardando la gráfica
239 fig.savefig('gpd.svg', format='svg', dpi=72)
240 # -----
241
242 #####
243
244 #####
245 #####
246 ##### #####
247 ##### PDF #####
248 ##### #####
249 #####
250 #####
251 # -----
252 # Limpio las variables (x,y) y las vuelvo a definir
253 del x
254 del y
255 x = symp.symbols('x')
256 y = symp.symbols('y')
257
258 def pdf(x):
259     f = ( ( 1/Ngpd ) * ((pda1(1-2*x)**2) ) / (Lambda(1-2*x))
260     return f
261
262 # uso la función lambdify para que funciones concretas de sympy las convierta a funciones aná
    logas a numpy, en este caso la función exp
263 s = lambdify( x, pdf(x), 'numpy' )
264 x = np.linspace(0, 1,100)
265
266 # -----

```

B. PROGRAMA EN PYTHON

```
267 # La gráfica
268 fig, ax = plt.subplots()
269 ax.plot(x, s(x), linewidth=1.6)
270 ax.set_xlim(xmin_PDF, xmax_PDF)
271 ax.set_ylim(ymin_PDF, ymax_PDF)
272 plt.setp(ax.spines.values(), lw=1.3, color='black', alpha=1.0)
273
274 # -----
275 # Las etiquetas de los ejes
276 ax.xaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
277 ax.xaxis.set_tick_params(labelsize=9)
278 ax.yaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
279 ax.yaxis.set_tick_params(labelsize=9)
280 plt.xlabel(" $\mathbf{x}$ ", fontsize=12)
281 plt.ylabel(" $\mathbf{q_{0^+}(x)}$ ", fontsize=12)
282
283 # -----
284 # Guardando la gráfica
285 fig.savefig('pdf.svg', format='svg', dpi=72)
286 # -----
287
288 #####
289
290 #####
291 #####
292 #####
293 #####          FACTOR DE FORMA          #####
294 #####
295 #####
296 #####
297 # -----
298 # Se crea una lista para t, pero como va a ser una lista positiva, vamos a agregarle
299 # un (-) a la expresión a integrar para que nos de una lista negativa en t
300 t = np.linspace(0, 5, NN)
301
302 # -----
303 # Para el factor de forma del quark
304 FF1 = []
305 for i in range(len(t)):
306     f = lambda x, u: ((1/Ngpd) * ((pda1(1-2*x))**2) * ((Lambda(1-2*x)**(2*nu))) * G3) * (
307         (u**nu)*(1-u)**nu) / ( (-0.25*(-t[i]))*( (1+(1-2*x))**2)*u*(1-u) + Lambda(1-2*x)
```

```

308             )**(2*nu+1)
309     inte=integrate.dblquad(f, 0, 1, 0, 1)
310     FF1.append(inte[0])
311
312     # -----
313     # El factor de forma por la carga del quark up
314     up_FF = []
315     for i in range(len(FF1)):
316         aFF = cq* FF1[i]
317         up_FF.append(aFF)
318
319     # -----
320     # El factor de forma por la carga del quark down
321     down_FF = []
322     for i in range(len(FF1)):
323         aqFF = caq*FF1[i]
324         down_FF.append(aqFF)
325
326     # -----
327     # Sumo el FF del quark y el FF del antiquark
328     FF_total = []
329     for i in range(0, len(up_FF)):
330         TFF = up_FF[i] + down_FF[i]
331         FF_total.append(TFF)
332
333     # -----
334     # La gráfica
335     fig, ax = plt.subplots()
336     ax.plot(t, FF_total, c = 'springgreen',linewidth=1.6)
337     ax.set_xlim(xmin_FF, xmax_FF)
338     ax.set_ylim(ymin_FF, ymax_FF)
339     plt.setp(ax.spines.values(), lw=1.3, color='black', alpha=1.0)
340
341     # -----
342     # Las etiquetas de los ejes
343     ax.xaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
344     ax.xaxis.set_tick_params(labelsize=9)
345     ax.yaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
346     ax.yaxis.set_tick_params(labelsize=9)
347     plt.xlabel("$\mathbf{-t}$", fontsize=12)
348     plt.ylabel("$\mathbf{F_{0^+}(t)}$", fontsize=12)

```

B. PROGRAMA EN PYTHON

```
349
350 # -----
351 # Guardando la gráfica
352 fig.savefig('ff.svg', format='svg', dpi=72)
353 # -----
354
355 #####
356
357 #####
358 #####
359 #####
360 #####          RADIO DE CARGA          #####
361 #####
362 #####
363 #####
364 # -----
365 # EL RADIO DE CARGA DEL QUARK
366 def num(y):
367     num=( pda1( y )**2 ) * (1+y)**2 ) / (Lambda(y)**2)
368     return num
369
370 def den(y):
371     den= (pda1( y )**2) / (Lambda(y))
372     return den
373
374 num2 = lambdify( y, num(y), 'numpy')
375 NUM=integrate.quadrature(num2, -1, 1)
376
377 den2 = lambdify( y, den(y), 'numpy')
378 DEN=integrate.quadrature(den2, -1, 1)
379
380 div1=NUM[0] / DEN[0]
381 rr1= ( ( cq*(3/4)* ( (1+nu)*(1+2*nu) ) ) ) / (3+2*nu))*div1
382
383 # -----
384 # EL RADIO DE CARGA DEL OTRO QUARK
385
386 def numaq(y):
387     num=( pda1( y )**2 ) * (1+y)**2 ) / (Lambda(y)**2)
388     return num
389
```

```

390 def denaq(y):
391     den= (pda1(y)**2) / (Lambda(y))
392     return den
393
394 num2aq = lambdify( y, numaq(y), 'numpy' )
395 NUM2=integrate.quadrature(num2aq, -1, 1)
396
397 den2aq = lambdify( y, denaq(y), 'numpy' )
398 DEN2=integrate.quadrature(den2, -1, 1)
399
400 div2=NUM2[0] / DEN2[0]
401 rr2= ( ( caq*(3/4)* ( (1+nu)*(1+2*nu) ) ) ) / ( (3+2*nu) ) * div2
402
403 # -----
404 # EL RADIO DE CARGA TOTAL
405 rttotal = math.sqrt( rr1 + rr2)*fm
406 # -----
407
408 #####
409
410 #####
411 #####
412 #####
413 ##### DENSIDAD ESPECTRAL #####
414 #####
415 #####
416 #####
417 # -----
418 # Limpio las variables (x,y) y las vuelvo a definir
419 del x
420 del y
421 x = smp.symbols('x')
422 y = smp.symbols('y')
423
424 # -----
425 def tao1(y):
426     t1 = ( ( (1+y)* Mq + (1-y)* Maq ) * ( (1+y)**nu ) ) / ( 2*nu* ( ( Lambda(y) )**nu ) )
427     return t1
428
429 def tao2(y):
430     t2 = ( ( (1+y)* Mq + (1-y)* Maq ) * ( (1-y)**nu ) ) / ( 2*nu* ( ( Lambda(y) )**nu ) )

```

B. PROGRAMA EN PYTHON

```
431     return t2
432
433 # Calculo la primera derivada de las funciones tao
434 dt1dy1=smp.diff(tao1(y),y,1)
435 dt2dy1=smp.diff(tao2(y),y,1)
436
437 # Calculo la segunda derivada de las funciones tao
438 dt1dy2=smp.diff(tao1(y),y,2)
439 dt2dy2=smp.diff(tao2(y),y,2)
440
441 # Hago funciones de las primeras derivadas
442 dt1dy1_f=smp.lambdify(( y ),dt1dy1)
443 dt2dy1_f=smp.lambdify(( y ),dt2dy1)
444
445 # Hago funciones de las segundas derivadas
446 dt1dy2_f=smp.lambdify(( y ),dt1dy2)
447 dt2dy2_f=smp.lambdify(( y ),dt2dy2)
448
449 def cy(y):
450     fc = (( Lambda(y) )**nu )*( (1/ (1-y)**nu ) * dt2dy1_f(y)-(1/(1+y)**nu )*dt1dy1_f(y) )
451     return fc
452
453 def zy(y):
454     fz = ( ( 1 / ( tao1(y) ) ) * dt1dy1_f(y) ) - ( ( 1 / ( tao2(y) ) ) * dt2dy1_f(y) )
455     return fz
456
457 def ry(y):
458     fr = ( ( 1 / ( tao1(y) ) ) * dt1dy2_f(y) ) - ( ( 1 / ( tao2(y) ) ) * dt2dy2_f(y) )
459     return fr
460
461 def lamb2(y):
462     l2 = 1 / ( cy(y) )
463     return l2
464
465 def lamb1(y):
466     l1 = - ( ry(y) ) / ( zy(y) * cy(y) )
467     return l1
468
469 def lamb0(y):
470     l0 = ( 1 / cy(y) ) * ( ( ry(y) / ( zy(y) * tao2(y) ) ) * dt2dy1_f(y)
471         - ( 1/ tao2(y) )*dt2dy2_f(y) )
```

```

472     return 10
473
474 # Calculo la primera y segunda derivada de la PDA
475 dfdy1=smp.diff(pda1(y),y,1)
476 dfdy2=smp.diff(pda1(y),y,2)
477
478 # Defino la densidad espectral
479 rrho = lamb2(y) * dfdy2 + lamb1(y) * dfdy1 + lamb0(y) * pda1(y)
480
481 # -----
482 # Calculo la constante de normalización
483 constante = lambdify( y, rrho , 'numpy')
484 inte_rho=integrate.quadrature(constante, -1, 1)
485 N=inte_rho[0]
486
487 # La densidad espectral normalizada
488 rhoN = (1/N)*rrho
489
490 # -----
491 p = lambdify( y, rhoN, 'numpy' )
492 y=np.linspace(-0.9999999999,0.9999999999,1000)
493
494 # La gráfica
495 fig, ax = plt.subplots()
496 ax.plot(y, p(y), c = 'goldenrod', linewidth=2)
497 ax.set_xlim(xmin_DE, xmax_DE)
498 ax.set_ylim(ymin_DE, ymax_DE)
499 plt.setp(ax.spines.values(), lw=1.3, color='black', alpha=1.0)
500
501 # -----
502 # Las etiquetas de los ejes
503 ax.xaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
504 ax.xaxis.set_tick_params(labelsize=9)
505 ax.yaxis.set_major_formatter(ticker.StrMethodFormatter("{x:.2f}"))
506 ax.yaxis.set_tick_params(labelsize=9)
507 plt.xlabel("$\mathbf{y}$", fontsize=12)
508 plt.ylabel(r"$\mathbf{\rho_{0^{+}}(y)}$", fontsize=12)
509
510 # -----
511 # Guardando la gráfica
512 fig.savefig('densidad.svg', format='svg', dpi=72)

```

B. PROGRAMA EN PYTHON

```
513 # -----
514
515 #####
516
517 #####
518 #####
519 #####
520 #####          CONSTANTE DE DECAIMIENTO          #####
521 #####
522 #####
523 #####
524 # -----
525 # Limpio las variables (x,y)
526 del x
527 del y
528 x = smp.symbols('x')
529 y = smp.symbols('y')
530 w = smp.symbols('w')
531 resta=Maq-Mq
532
533 # -----
534 # Calculo FN, una constante de renormalización, debe dar igual a 1
535 rhow = rrho.subs(y, w)
536 integral1=lambdify([w, y], (0.5)* ( Mq + 0.5*(1-y)*(resta) )/
537             ( nu* (Lambda(y))**nu ) * ((1-y)**nu)*((1-w)**(-nu)) *
538             ( rhow* (Lambda(w))**(nu) )*Heaviside(y-w,0) , 'numpy')
539 I1=integrate.dblquad(integral1, -1, 1, -1, 1,)
540
541 integral2 = lambdify( [w,y] , (0.5)* ( Mq + 0.5*(1-y)*(resta) )/
542             ( nu* (Lambda(y))**nu ) * ((1+y)**nu)*((1+w)**(-nu)) *
543             ( rhow* (Lambda(w))**(nu) )*Heaviside(w-y,0) , 'numpy')
544 I2=integrate.dblquad(integral2, -1, 1, -1, 1)
545
546 FN = I1[0] + I2[0] # tomando el primer elemento de cada lista
547
548 # -----
549 # La constante de decaimiento, nM[0]
550 nM=[]
551 for i in inte_rho:
552     valor=math.sqrt(( FN )/(4*((math.pi)**2)*(math.sqrt(2))*i))
553     nM.append(valor)
```

```

554 # -----
555
556 #####
557
558 #####
559 #####
560 #####
561 #####      LO QUE NOS ARROJA EL PROGRAMA      #####
562 #####
563 #####
564 #####
565
566 # El programa nos grafica en formato svg
567 # GPD para t=0, 0.2, 0.5, 1, 2 en la gráfica: 'gpd.svg'
568 # PDA del quark en la gráfica: 'pda.svg'
569 # PDF del quark en la gráfica: 'pdf.svg'
570 # Factor de forma en la gráfica: 'ff.svg'
571 # Densidad espectral en la gráfica: 'densidad.svg'
572
573 # Creo un archivo de datos con el radio de carga y la constante de decaimiento
574 file = open("Resultados.dat", "w")
575 file.write("La masa del quark = "+ str(Mq)+ "\n")
576 file.write("La masa del diquark = "+ str(M) + "\n")
577 file.write("El radio de carga del "+ str(particula) + " total en fm es: "
578           + str(rtotal)+ "\n" )
579 file.write('La const. de decaimiento del ' + str(particula) + '= ' + str(nM[0]) )
580 file.close()

```

Agradecimientos

Tiempo atrás, revisando trabajos de varios investigadores, me topé con la tesis de una doctora quien agregaba los agradecimientos al final de su trabajo, y me pareció muy pertinente, pues, al final de cuentas, los agradecimientos son lo último que redacto en este trabajo. Me encuentro en un café meditando estas últimas palabras debido a que me resulta bastante complicado obtener la inspiración necesaria en un espacio donde no me encuentre sola con mis pensamientos. Esta parte de la tesis resulta ser la más personal de mi trabajo, en la cual imprimo una parte de mi ser, por lo cual me permito utilizar un vocablo más relajado y menos estructurado para expresar esos pensamientos hacia mí y hacia las personas que me acompañaron durante este viaje. No negaré que existe cierto miedo al abrirme ante cualquier persona que llegue a este texto por cualquier razón, incluso cierta vergüenza detrás, pero toda esta amalgama de ansiedades y contradicciones también soy yo.

Siempre estaré agradecida con mi familia por todo el apoyo que he recibido de su parte a lo largo de mi vida. Soy el resultado de varias generaciones que tuvieron que sufrir y trabajar, y al día siguiente un poco de lo mismo. Agradezco el sacrificio de mamá Paz, la fortaleza de papá Lupe, sus cuidados y el espacio seguro que a mí me brindaron. Agradezco el trabajo duro de mamá Jose y papá Mere, su cariño y atenciones. Y de ahí llegamos a mi mamá y mi papá, gracias por el arduo trabajo que han hecho para que nosotros tuviéramos una vida con menos carencias de las que ustedes tuvieron; soy muy privilegiada al tenerlos, varios de los valores con los que me gusta guiarme se crearon debido a ustedes, muchas gracias. Gracias Martín y Jesús por estar, por reír conmigo, por ser raros juntos, por entretenerme con sus gameplays, cada uno de nosotros tenemos nuestro propio camino, pero cuando convergen se crean momentos muy especiales. Ahora quiero agradecerle a otra persona muy especial en mi vida, a Lupe. Gracias por siempre estar con nosotros desde el inicio de nuestras vidas, eres un ser con un brillo enorme, que a veces se empaña por todo el dolor vivido, pero cuyo brillo permanece y nos empapa a quienes tenemos la fortuna de caminar contigo, gracias por compartirnos del amor que tienes en ti. Gracias Moño por ser alguien constante en nuestras vidas, por crecer juntos, por seguir jugando juntos este juego de la vida y darle ese toque divertido que hasta en las peores tragedias me puedes sacar una carcajada. Gracias Valeria por seguir siendo las niñas que se buscaban en sus cuartos para salir a jugar y por permitirme seguir siendo parte de tu vida y la de Pani, a quien agradezco todo el cariño y confianza que me da. Abraham,

sigues tú, gracias por bromear conmigo y compartir recuerdos especiales y divertidos en los que siempre sacas una frase nueva que se convierte en un chiste local, esto no me huele a mala espina. Gracias por el apoyo que me has brindado Eloy, estando presente tanto en los momentos importantes como en los complicados, apoyándonos a nosotros y a mi papá sin importar cuál complicado resultara, siempre con un ingenio y humor muy característicos de tu ser. Ahora me gustaría pasar a Noé, Nancy y la pequeñita; agradezco mucho el apoyo que me han brindado, gracias pequeñita por tu cariño y todos esos días de juegos y diversión a tu lado, gracias Nancy por tu amabilidad e interés en mi proceso; Noé, muchas gracias por estar presente en mi vida desde que era niña aconsejándome y motivándome. A la siguiente familia que quiero agradecer es a la Nena, Juan de Dios, Juanito y Aarón; a pesar de estar tan lejos de ustedes los siento muy cercanos a mí y cada que puedo compartir momentos con ustedes lleno mi corazón de mucho cariñito. Gracias por impulsarme a crecer Nena, siempre contarán conmigo. También agradezco el acompañamiento y momentos junto a Norma, Juanjo, Diego, Carlitos, Haziel, Julio, Silvia, Shere, Cachetona, Ale, Sofi y Rosa.

La amistad es una parte esencial en mi vida, y agradezco de todo corazón haber creado un lazo tan bonito con personas tan bellas. Gracias Cris por nuestro pequeño refugio al que siempre regreso cuando necesito 5 minutitos de pausa para respirar, he aprendido mucho de la vida gracias a ti. Yeshua, muchas gracias por todas las saliditas que hemos tenido, es como si el tiempo se detuviera entre nosotros hasta el próximo encuentro y se siente tan cómodo. Mafer, gracias por permanecer en mi vida, eres un ser con mucha sabiduría. Gracias loquilla por estar conmigo durante tantos años, hemos crecido juntas y nos hemos apoyado en momentos donde la vida se ha puesto canija y siempre estamos allí para abrazarnos. Lalito, mi querido Lalito, gracias por ser una persona a la que siempre puedo llegar y me siento segura. David, gracias por ser tan auténtico y compartir tu ser conmigo, siempre alegra mi día el saber de ti. Gracias Diana por escucharme, por llorar conmigo, por recordarme que todas mis emociones son válidas, agradezco tanto nuestras platicuitas. Ámbar, gracias por todas las risas y momentos compartidos. Gracias Mariana por mantener nuestra amistad a pesar de la distancia, me hace muy feliz la idea de al fin reunirnos las 4 nuevamente.

La vida me ha llevado por caminos en los que he conocido personas con quienes he compartido solo unos instantes, pero que se quedan conmigo aun después de la despedida. Gracias Maggie por la amistad tan bella que hemos creado, el concierto al que fuimos juntas, por conocernos a nosotras mismas a través de la otra. Cynthia y Jime, muchas gracias por continuar la cercanía escribiéndonos y haciendo videollamadas, nuestras pláticas calientitas siempre me dan un respiro. Daniela, al fin te voy a volver a ver, me emociona tanto, gracias por los ánimos que me has dado, por la confianza y esas risas a la distancia.

De las cosas que más, pero más, agradezco de la maestría son las personas tan bellas que conocí. Gracias por vivir dos años conmigo Kari, pasamos por muchísimas cosas juntas, no puedo pensar en Morelia sin pensar en ti y en la pequeña vidita que teníamos allá; tantas risas y ocurrencias que no podría nombrar todas porque me aventaría otra tesis, como tu exposición de la catedral de Morelia y yo con mis cebollitas. Aunque no todo fue miel sobre hojuelas,

también conociste aspectos muy oscuros en mí y te agradezco por tu paciencia y por aceptarme, con todas mis contradicciones. Pararé aquí porque si no voy a llorar, solo quiero decirte que tienes en mí una amistad para siempre. Juan, sigues tú; gracias por permitirme conocerte, por permitirme conocer aspectos únicos en ti, por permitirme crecer a tu lado, gracias por tu paciencia y comprensión en tantas ocasiones, sé que muchas veces fue difícil convivir conmigo; tienes un corazón tan puro y tu ser es muy sensible ante la vida, nunca me cansaré de agradecer el haberte conocido, recuerda lo grandioso que eres. ¡Cristian!, siempre tan popular, gracias por tantos momentos que viví junto a ti, gracias por explicarme las cosas que no entendía, por tu comprensión ante mis indecisiones, por las risas compartidas, tan genuinas y espontáneas, eres un ser que solo fluye como el agua y admiro mucho eso en ti, por primera vez puedo decir que soy amiga del popular del salón.

Melany, después te conocí a ti, te agradezco tanto por las pláticas tan de corazón que hemos tenido, gracias por mi primera experiencia pintando y por seguir deseándonos lo mejor la una a la otra. Rubén, aun recuerdo la primera vez que Kari y yo te vimos, nos alegraste tanto el día, y cada que salíamos juntos lo seguías haciendo, con frases tan icónicas; gracias por escucharme llorar y darme palabras de aliento, gracias por enseñarnos cosas de temas tan variados; como ya te lo he dicho, admiro muchísimo la libertad de tu ser ante la vida, eres muy sabio. Al estar tanto tiempo en el instituto te conocimos a ti, Tania, muchas gracias por tu amistad y tu confianza, gracias por esos días en que subíamos cerros para ver la luna, fueron momentos muy especiales, muchas gracias por escucharme y abrir tu corazón conmigo en todas esas platicuitas. Al último te conocimos a ti, Edgar, y completamos la familia cubo; gracias por las saliditas que tuvimos, por escucharme en momentos ansiosos y apoyarme a continuar con mi trabajo, gracias por la confianza que depositas en mí durante nuestras pláticas de cubo, siempre las disfruto mucho.

Durante este trayecto de la maestría tuve la fortuna de contar con varias personas que contribuyeron en mi formación académica y se los agradezco muchísimo. Gracias Dr. Bashir por las veces que se tomó el tiempo de explicarme conceptos que no tenía claros, por su paciencia conmigo en la terminación de este trabajo, en el cual tardé bastante; muchas gracias por las pláticas tan reales, por sus consejos, me siento muy agradecida de contar con su amistad y su apoyo. Gracias Dr. Luis Albino por todas las veces que me explicó conceptos nuevos ya sea presencial o virtualmente, que resolvió mis dudas sobre el tema, gracias por revisar mi trabajo y por su paciencia en la entrega de avances. De igual manera me gustaría agradecerles al resto de mis sinodales, el Dr. Arteaga, el Dr. Khépani, el Dr. Ulises y el Dr. Schubert, gracias por su tiempo dedicado a mi proyecto de tesis.

Aprender es algo que llena mucho mi ser, y durante la maestría tomé clases en las cuales exploré temas ya familiares, pero a una profundidad mucho más intensa. Gracias Dr. Olivier por los dos cursos que nos dio, gracias por el tiempo que nos dedicó en la revisión de tareas, exámenes, preparar el material, aprecio mucho su esfuerzo en que realmente aprendiéramos; varias veces, al terminar su clase, me sentía muy feliz e inspirada para continuar porque estábamos viendo conceptos que hasta yo podía entender. También me gustaría agradecerle al

Dr. Luca por otra de mis clases favoritas en la maestría, gracias doctor por su ímpetu para enseñarnos, por revisar nuestras tareas, por incluso darnos clases extras para aclarar nuestras dudas, realmente muchas gracias.

En esta aventura que tuve en Morelia agradezco infinitamente toparme con personas tan amables que me tendieron la mano. Gracias don Manuel por su apoyo e interés constante en nuestro progreso; gracias por sus palabras de aliento. Gracias a Lupita, su familia y su perrito Braga por brindarnos su hogar durante el primer año y su comprensión ante el llegar siendo foráneas a un lugar desconocido. También me gustaría agradecerle a Karina y su esposo, quienes fueron muy amables con nosotras el resto de nuestra aventura.

Durante este lapso de tiempo realicé un viaje que me movió muchos pensamientos y pude conocer seres maravillosos con quienes compartí grandes experiencias. Gracias Saru, Carol, Gloria, Alberto, Johan, Max, Lucas, Mariana, Yaopeng, Alicia, Christian. Gracias a ti, Athira, conocerte fue muy especial para mí, tu visión del mundo generó cambios en mi forma de pensar, me hizo querer arriesgarme más a vivir aun a pesar del miedo. Andrew, gracias por tu confianza, por ese espacio en el cual puedo expresarme libremente y contarte varios miedos de mi día a día. Ramón, gracias por la bonita amistad que continuamos formando y las pláticas tan variadas y amontonadas que se agradecen tanto y alegran mucho mi día.

Un especial agradecimiento a Bob, sin sus libros no habría podido completar esta tesis. Muchas gracias por enviármelos con el único objetivo de expandir el conocimiento, soy una más de sus alumnas a distancia. Realmente he aprendido muchísimo gracias a la manera tan amigable en que redactó cada tema, como si un amigo que ya pasó por esas confusiones entendiera lo difícil que puede ser comprenderlo y lo explicara de la manera más digerible posible. De corazón muchas gracias, su gesto de amabilidad me dio mucha esperanza en la vida y en la ciencia. Así mismo, quiero agradecer a Odín por recomendarme su primer libro hace algunos años.

Toda mi vida el cine ha sido una parte muy importante en mí. El ir a los tianguis y comprar 3 películas por \$50 sabiendo que una de ellas yo la podía elegir era una actividad que me fascinaba y la tomaba con mucho compromiso. El cine me permite sentir aquellas emociones que no sé cómo expresar; puedo conocerme y descubrirme a través de él. En especial, los últimos años pude redescubrirlo y saborearlo diferente gracias al profe Isaac, a Frida, Sandra, Marco, Alex, Bruno y Lupita. Con ustedes he vivido una nueva etapa de mi vida en la que hemos compartido pensamientos, experiencias y emociones a la distancia, pero al mismo tiempo sintiéndolos muy presentes porque lo que compartimos es todo aquello que está vivo en nosotros. Los aprecio muchísimo, le han dado una luz diferente a mi ser. Descubrí una faceta totalmente nueva que no sabía que tenía. Le agradezco tanto a mí yo del pasado por haber sido lo suficientemente valiente para unirme aquella mañana a ese primer curso varios meses atrás, gracias a eso los pude conocer y experimentar tantas nuevas ideas que han modificado mi visión de todo. Ver películas hechas con corazoncito es como darle un respiro a mi espíritu, lo que sea que eso signifique.

Agradezco a todas las personas que estuvieron conmigo en este viaje, a las que solo compartieron un breve momento conmigo y a las que se quedaron, todas me marcaron, algunas más que otras. Gracias a mi psiquiatra Edgar López Tarabay por su paciencia al resolver todas las dudas que tenía en relación a mi neurodivergencia y darme herramientas para continuar. Gracias a mi psicóloga Alejandrina por el espacio seguro que me da para poder comprenderme y llorar; gracias por regresarme a la realidad en tantas ocasiones y recordarme que no soy la montaña rusa de emociones que pensaba. Por último, me gustaría dejar un calendario con meditaciones y podcast de psicología que han ayudado en mi proceso. Decidí hacer este calendario por tres razones, la primera es porque a pesar de ya haber visitado el material, mi memoria es muy mala y olvida, así que necesito dejar un lugarcito donde encuentre gran parte de estas herramientas. La segunda es porque quiero que sea un regalo a mis personas queridas. Y la última es en caso de que alguien más que llegue hasta aquí lo necesite o le sea de utilidad, aunque también es cierto que cada ser es diferente y tiene su propio proceso.

Link: [Meditaciones y podcast](#) ¹.

La maestría resultó ser un punto de inflexión en mi vida, aunque, al pensarlo, cada instante vivido lo es. Estos años los recordaré siempre con mucho cariño, pude conocerme y saber que me pasaba. Lo veo como haber descubierto pequeños secretos que movieron todo y siguen haciendo cambios. Fue el inicio de comenzar a aceptar y abrazar mi rareza.

¹En caso de no poder abrir el archivo pueden escribirme al correo 2252314c@umich.mx y se los envío personalmente.

Bibliografía

- [1] K. Brading and E. Castellani, Symmetries in physics, philosophical reflections. United States of America: Cambridge University Press, 2003. [1](#)
- [2] J. Schwichtenberg, Physics from Finance: A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles. Independently published, 2019. [2](#), [3](#), [19](#)
- [3] L. H. Ryder, Quantum Field Theory. New York: Cambridge University Press, 1985. [3](#)
- [4] M. Barabanov, M. Bedolla, W. Brooks, G. Cates, C. Chen, Y. Chen, E. Cisbani, M. Ding, G. Eichmann, R. Ent, J. Ferretti, R. Gothe, T. Horn, S. Liuti, C. Mezrag, A. Pilloni, A. Puckett, C. Roberts, P. Rossi, G. Salmé, E. Santopinto, J. Segovia, S. Syritsyn, M. Takizawa, E. Tomasi-Gustafsson, P. Wein, and B. Wojtsekhowski, “Diquark correlations in hadron physics: Origin, impact and evidence,” Progress in Particle and Nuclear Physics, vol. 116, p. 103835, Jan. 2021. [4](#)
- [5] L. Albino, I. M. Higuera-Angulo, K. Raya, and A. Bashir, “Pseudoscalar mesons: Light front wave functions, gpdfs, and pdfs,” Phys. Rev. D, vol. 106, p. 034003, Aug 2022. [4](#), [61](#), [110](#)
- [6] N. Jeevanjee, An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists. New York: Springer, 2011. [7](#), [16](#)
- [7] O. Sarbach, Notas: Métodos Matemáticos. UMSNH: Instituto de Física y Matemáticas, 2023. [8](#), [9](#)
- [8] R. D. Klauber, Student Friendly Quantum Field Theory Volume 2: The Standard Model. Iowa: Sandtrove Press, 2021. [9](#), [13](#), [14](#), [16](#), [18](#), [19](#), [20](#), [23](#), [26](#), [31](#), [42](#), [46](#), [50](#)
- [9] K. Ram, “Lie Groups and Lie Algebra.” <https://karnikram.info/blog/lie/>, 2017. [Acceso en 2024]. [15](#)
- [10] Mathemaniac, “Lie Groups, algebras, brackets.” <https://tinyurl.com/44vb6tra>, 2023. [Acceso en 2024]. [16](#)
- [11] J. Schwichtenberg, Physics from Symmetry. Switzerland: Springer International Publishing, 2015. [20](#)

- [12] G. B. Arfken, Mathematical Methods for Physicist. United States of America: Elsevier, 2013. [27](#)
- [13] H. J. Lipkin, Lie Groups for Pedestrians. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1965. [27](#), [31](#)
- [14] F. H. y D. Martin, QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics. United States of America: John Wiley y Sons, 1984. [31](#), [32](#), [46](#), [51](#)
- [15] M. Gell-Mann, “A Schematic Model of Baryons and Mesons,” Phys. Lett., vol. 8, pp. 214–215, 1964. [33](#)
- [16] M. Ida and R. Kobayashi, “Baryon Resonances in a Quark Model,” Progress of Theoretical Physics, vol. 36, pp. 846–847, 10 1966. [33](#)
- [17] D. B. Lichtenberg and L. J. Tassie, “Baryon mass splitting in a boson-fermion model,” Phys. Rev., vol. 155, pp. 1601–1606, Mar 1967. [33](#), [35](#)
- [18] D. Griffiths, Introduction to Elementary Particles. New York: John Wiley y Sons, Inc., 1987. [33](#), [42](#)
- [19] B. C. Hall, Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. United States of America: Springer, 2003. [35](#)
- [20] F. WILCZEK, DIQUARKS AS INSPIRATION AND AS OBJECTS, p. 77–93. WORLD SCIENTIFIC, Feb. 2005. [35](#)
- [21] M. Gutyory, Gauge field theories, an introduction with applications. Germany: Wiley-VCH, 2004. [42](#), [46](#)
- [22] R. D. Klauber, Student Friendly Quantum Field Theory Volume 1: Basic Principles and Quantum Electrodynamics. Iowa: Sandtrove Press, 2013. [43](#), [46](#)
- [23] P. Guichon and M. Vanderhaeghen, “Virtual compton scattering off the nucleon,” Progress in Particle and Nuclear Physics, vol. 41, pp. 125–190, 1998. [50](#)
- [24] X. Ji, “Gauge-invariant decomposition of nucleon spin,” Physical Review Letters, vol. 78, p. 610–613, Jan. 1997. [51](#)
- [25] A. Radyushkin, “Scaling limit of deeply virtual compton scattering,” Physics Letters B, vol. 380, p. 417–425, July 1996. [51](#)
- [26] N. Chouika, Generalized Parton Distributions and their covariant extension. PhD thesis, Universidad de París-Sur, Septiembre 2018. [51](#), [52](#), [53](#)
- [27] M. Garçon, “An introduction to the generalized parton distributions,” The European Physical Journal A, vol. 18, p. 389–394, Nov. 2003. [51](#)
- [28] A. Courtoy, Generalized Parton Distributions of Pions. Spin Structure of Hadrons. PhD thesis, Universidad de Valencia, 2009. [52](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [29] Isela Melany Higuera Angulo , Unraveling the internal structure of pseudo scalar mesons. PhD thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Noviembre 2023. [52](#)
- [30] M. Diehl, “Generalized parton distributions,” Physics Reports, vol. 388, no. 2, pp. 41–277, 2003. [53](#)
- [31] J. R. y. K. P. Diehl M, Feldmann Th, “Linking parton distributions to form factors and compton scattering,” The European Physical Journal C - Particles and Fields, vol. 8, p. 409–434, May 1999. [53](#)
- [32] S. J. Brodsky, M. Diehl, and D. S. Hwang, “Light-cone wavefunction representation of deeply virtual compton scattering,” Nuclear Physics B, vol. 596, p. 99–124, Feb. 2001. [53](#)
- [33] M. Diehl, T. Feldmann, R. Jakob, and P. Kroll, “Erratum to: “the overlap representation of skewed quark and gluon distributions,”” Nuclear Physics B, vol. 605, p. 647, July 2001. [53](#)
- [34] V. P. Nair, Quantum Field Theory: A Modern Perspective. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005. [55](#)
- [35] F. J. Dyson, “Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics,” Phys. Rev., vol. 85, pp. 631–632, Feb 1952. [55](#)
- [36] F. Perez, Simetría y Supersimetría: Orden y equilibrio en las leyes que describen el universo. Un paseo por el cosmos, RBA, España, 2015. [55](#)
- [37] F. Strocchi, An Introduction to Non-Perturbative Foundations of Quantum Field Theory. International Series of Monographs on Physics, United Kingdom: Oxford University Press, 2013. [55](#)
- [38] C. D. Roberts and A. G. Williams, “Dyson-schwinger equations and their application to hadronic physics,” Progress in Particle and Nuclear Physics, vol. 33, pp. 477 – 575, 1994. [56](#), [58](#)
- [39] K. R. Montaña, “Soluciones Múltiples a las Ecuaciones de Schwinger-Dyson para el Propagador del Fermión en QED3,” Master’s thesis, Uninversidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Marzo 2011. [56](#)
- [40] L. A. Fernández, Restricciones De Norma Sobre El Vértice Fermión-Fotón. PhD thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Agosto 2018. [57](#), [58](#)
- [41] Y. Lu, D. Binosi, M. Ding, C. D. Roberts, H.-Y. Xing, and C. Xu, “Distribution amplitudes of light diquarks,” The European Physical Journal A, vol. 57, Apr. 2021. [62](#), [69](#), [70](#), [76](#), [78](#), [101](#), [102](#), [104](#), [105](#), [111](#), [117](#)
- [42] H. L. L. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutiérrez-Guerrero, C. D. Roberts, and D. J. Wilson, “ π and ρ mesons, and their diquark partners, from a contact interaction,” Phys. Rev. C, vol. 83, p. 065206, Jun 2011. [62](#), [104](#), [105](#)

- [43] H. L. L. Roberts, L. Chang, I. C. Cloët, and C. D. Roberts, “Masses of ground- and excited-state hadrons,” Few-Body Systems, vol. 51, p. 1–25, Mar. 2011. [62](#)
- [44] D. Binosi, L. Chang, J. Papavassiliou, S.-X. Qin, and C. D. Roberts, “Natural constraints on the gluon-quark vertex,” Physical Review D, vol. 95, Feb. 2017. [102](#)
- [45] A. Aguilar, J. Cardona, M. Ferreira, and J. Papavassiliou, “Quark gap equation with non-abelian ball-chiu vertex,” Physical Review D, vol. 98, July 2018. [102](#)
- [46] F. E. Serna, C. Chen, and B. El-Bennich, “Interplay of dynamical and explicit chiral symmetry breaking effects on a quark,” Physical Review D, vol. 99, May 2019. [102](#)
- [47] P. Maris, “Electromagnetic properties of diquarks,” Few-Body-Systems, Nov. 2004. [104](#), [111](#), [117](#)

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias en el Área de Física	
Título del trabajo	Estructura interna de los diquarks	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	María Guadalupe Morales Trejo	2252314c@umich.mx
Director	Adnan Bashir	adnan.bashir@umich.mx
Codirector	-	-
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	mae.ciencias.fisica@umich.mx


Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	María Guadalupe Morales Trejo 
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán. Miércoles/11/12/2024

María Guadalupe Morales Trejo

ESTRUCTURA INTERNA DE LOS DIQUARKS USANDO UN MODELO ALGEBRAICO.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:415438039

Fecha de entrega

12 dic 2024, 9:43 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

12 dic 2024, 9:47 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

ESTRUCTURA INTERNA DE LOS DIQUARKS USANDO UN MODELO ALGEBRAICO.pdf

Tamaño de archivo

1.7 MB

161 Páginas




46,886 Palabras

205,136 Caracteres

9% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 8%  Fuentes de Internet
- 3%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.