



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Momento Cromomagnético Anómalo
de los Quarks - Implicaciones para la
Física Hadrónica**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestro en Ciencias en el Área de Física

PRESENTA:

Alfonso Aldair Lopez Calderon

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Juan Carlos Arteaga Velazquez

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. Adnan Bashir



Morelia, Michoacán, México.

Febrero 2025

A mi madre

Resumen

En este trabajo, se estudia el efecto del momento cromomagnético anómalo de los quarks en la solución de las ecuaciones de Schwinger-Dyson y Bethe-Salpeter, con énfasis en sus implicaciones para la física hadrónica. Para ello, se resuelven numéricamente dichas ecuaciones primero en el marco de la aproximación rainbow-ladder y, posteriormente, incluyendo los términos asociados al momento cromomagnético anómalo en el vértice quark-gluón. Las soluciones se obtienen de manera numérica en Fortran , y los resultados principales incluyen las masas de los estados excitados del pión y el kaón, que muestran un excelente acuerdo con los datos experimentales, con discrepancias inferiores al 3.5 %. La metodología empleada permite no solo calcular las masas de los estados ligados, sino también obtener sus amplitudes de Bethe-Salpeter, lo que abre la posibilidad de estudiar factores de forma en futuras investigaciones.

Palabras clave: Quark, masa, gluón, vértice, QCD.

Abstract.

In this work, we study the effect of the quark's anomalous chromomagnetic moment on the solution of the Schwinger-Dyson and Bethe-Salpeter equations, with an emphasis on its implications for hadronic physics. To this end, these equations are first solved numerically within the rainbow-ladder approximation and then by including the terms associated with the anomalous chromomagnetic moment in the quark-gluon vertex. The solutions are obtained numerically using Fortran, and the main results include the masses of the excited states of the pion and kaon, which show excellent agreement with experimental data, with discrepancies below 3.5%. The methodology employed allows not only the calculation of the bound state masses but also the extraction of their Bethe-Salpeter amplitudes, opening the possibility of studying form factors in future investigations.

Key words: Quark, mass, gluon, vertex, QCD.

Agradecimientos

Quiero agradecer a toda mi familia por su amor y apoyo incondicional, en especial a mi mamá y mi hermana, quienes me han soportado por tanto tiempo, para mí lo que siento por ellas se resume en una frase dicha por un sabio “La familia es todo”.

Al Dr. Arteaga y al Dr. Bashir por aceptar dirigir un trabajo en el cual pudiera utilizar mis habilidades y adquirir algunas nuevas. Al Dr. Angel Miramontes quien es parte esencial de este proyecto, quien me enseñó todo lo relacionado al tema y siempre estuvo al pendiente de mis avances y dudas que tuviera.

También quiero dar gracias a las personas que han formado parte de esta etapa de mi vida como son Francisco, Flavio, Jafet, y a los amigos para siempre y memes.

Morelia MEX., 18 de febrero de 2025

CONTENIDO

1. Fundamentos de la Cromodinámica Cuántica	1
1.1. Introducción	1
1.2. Lagrangiano de QCD	3
1.3. Simetrías del Lagrangiano	4
1.4. Rompimiento de la simetría quiral	5
1.5. Modelo de quarks	7
1.6. Libertad asintótica	8
1.7. Confinamiento	9
1.8. Momento Cromomagnético Anómalo	10
2. Ecuaciones de Schwinger-Dyson y Bethe-Salpeter	12
2.1. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	12
2.2. Truncamiento de las ecuaciones de Schwinger-Dyson	14
2.2.1. Aproximación Rainbow-Ladder para las ESD	14
2.2.2. Modelos para el acoplamiento efectivo	15
2.3. Solución general para la aproximación Rainbow-Ladder:	17

2.3.1.	Sistema de ecuaciones a resolver	17
2.3.2.	Función de masa	17
2.3.3.	Extensión analítica al plano complejo	20
2.4.	Ecuaciones de Bethe-Salpether	23
2.4.1.	Amplitudes de Bethe-Salpether	25
2.5.	Identidades de Ward-Green-Takahashi	26
2.5.1.	Resultados numéricos	27
3.	Vértice quark-gluón: aproximación con el Momento Cromomagnético Anomalo	31
3.1.	Vértice quark-gluón	31
3.2.	Ecuaciones de Schwinger-Dyson con el término ACM	33
3.3.	Ecuaciones de Bethe-Salpether con el término de ACM	38
3.3.1.	Funciones de vestimiento	38
3.4.	Impacto del ACM en el espectro de los mesones	41
3.5.	Modelo de Maris-Tandy parte perturbativa	43
4.	Conclusiones y comentarios finales	45
A.	Convención euclidiana	47
B.	Matrices gamma	49
C.	Trazas	50
D.	Notación slash de Feynman	51

REFERENCIAS

Capítulo 1

Fundamentos de la Cromodinámica Cuántica

SECCIÓN 1.1

Introducción

El origen de la masa y las propiedades de los hadrones (partículas formadas por quarks) representa un problema abierto para la física de partículas. Entender como funcionan los nucleones (protones y neutrones) juega un papel muy importante para acercarnos a este reto, ya que los núcleos atómicos son los que aportan la contribución más significativa a la materia visible.

Nuestro entendimiento sobre la generación de masa de las partículas consiste en dos procesos principales dentro del marco del Modelo Estándar; el mecanismo de Higgs [1] y el rompimiento dinámico de la simetría quiral. El primero es el encargado de dotar de masa a las partículas fundamentales (quarks, leptones, bosones W y bosones Z), sin embargo, este mecanismo apenas contribuye a la masa de la materia visible. Por otra parte el rompimiento dinámico de la simetría quiral es el mecanismo que describe cómo los quarks interactúan entre sí dentro de los nucleones, lo que resulta en la generación de masas efectivas para los quarks constituyentes y en la aparición de los bosones de Nambu-Goldstone. El 96 % de la materia visible se obtiene a partir de este proceso [2].

Los estados ligados son un tema fascinante, ya que nos enseñan mucho sobre la naturaleza de las interacciones entre los componentes de una teoría de campos dada. En el caso de la *Quantum Chromodynamics* (QCD, Cromodinámica Cuántica), esta fascinación se ve aumentada por el hecho empírico de que no se observan estados libres asintóticos, es decir, quarks y gluones con color, aunque la teoría sí que poseen carga de color. En la QCD, el estado ligado más simple posible está representado por el pión, que desempeña un papel fundamental en la comprensión del dominio de baja energía, siendo el estado ligado más ligero de antiquark-quark, al igual que los bosones de Goldstone asociados con la ruptura de la simetría quiral [3].

Es importante entonces poder describir simultáneamente al pión y al kaón, los cuales son los hadrones más ligeros en la naturaleza, ya que están estrictamente relacionados al fenómeno de generación de masa. Sin embargo, no basta con describir los estados base de los mismos, acercarnos a un mejor entendimiento requiere detallar también sus excitaciones. Los estados radialmente excitados, preservan el mismo espín y paridad que los estados base, por lo que su masa es más grande, por ejemplo el pión tiene una masa para su estado base de 139 MeV, mientras que su primera excitación radial está alrededor de los 1300 MeV [4]. Existen diversos enfoques para realizar esta tarea, entre ellos *lattice QCD* [5], reglas de suma de QCD [6], el modelo de sigma lineal [7], QCD holográfica [8], modelos potenciales no relativistas [9], ecuaciones de Bethe-Salpeter (BSE) [10]. Es relevante mencionar que la teoría de perturbaciones falla al querer cumplir con dicho propósito, ya que no es compatible con el fenómeno del rompimiento de simetría quiral de los quarks.

En este trabajo usaremos el enfoque de las BSE, las cuales son un conjunto de ecuaciones integrales que surgen en la teoría cuántica de campos y que se utilizan para describir la interacción entre dos partículas en el marco de la relatividad especial. Estas ecuaciones son fundamentales para entender la estructura y las propiedades de los estados ligados de partículas como los mesones, que están compuestos por un par quark-antiquark.

Para encontrar soluciones a las ecuaciones de Bethe-Salpeter necesitaremos primero resolver las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE), que son a su vez un conjunto infinito de ecuaciones que necesitan una truncación para poder ser resueltas. Dichas ecuaciones generalmente son utilizadas para estudiar aspectos no perturbativos de la interacción fuerte, como el confinamiento de quarks y la generación dinámica de masas. Estas ecuaciones ofrecen un marco poderoso para analizar las propiedades de los gluones y quarks en un régimen en el que las aproximaciones perturbativas no son válidas debido a la naturaleza fuertemente acoplada de la interacción.

La clave para acercarnos a una mejor predicción de los estados excitados de los mesones, consiste en utilizar kernels para las BSE y SDE que tengan una conexión mas cercana a la QCD, por este motivo nos dedicamos a explorar la modificación del vértice quark-gluón. Sabemos que la generación de la masa hadrónica, genera un gran momento

cromomagnético anómalo (ACM) para los quarks más ligeros, como se ha reportado en la literatura [11], este ACM tiene un impacto notable en el espectro de mesones con quarks u y d [12].

Comenzaremos hablando sobre las generalidades de la teoría y algunos conceptos fundamentales que nos ayudarán a entender mejor los fenómenos que ocurren en los núcleos atómicos y que están asociados a la fuerza nuclear fuerte.

SECCIÓN 1.2

Lagrangiano de QCD

La Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés) es la teoría que describe la fuerza fuerte, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza, responsables de mantener unidos a los protones y neutrones en el núcleo atómico. La QCD forma parte del Modelo Estándar de la física de partículas y describe el comportamiento de los quarks, los cuales son partículas fundamentales que interactúan a través del intercambio de gluones, que a su vez son las partículas mediadoras de la fuerza fuerte.

El Lagrangiano de QCD con campos fantasmas se escribe como:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi_i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \partial_\mu \bar{c}^a (D^\mu c)^a \quad (1.1)$$

Veamos en qué consisten sus componentes:

- ψ_i es el campo de los quarks de sabor i .
- $F_{\mu\nu}^a$ es el tensor de campo de los gluones, definido como

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.2)$$

donde g_s es la constante de acoplamiento fuerte y f^{abc} son las constantes de estructura de SU(3).

- $D_\mu = \partial_\mu - ig_s T^a A_\mu^a$ es la derivada covariante para los quarks.
- \bar{c}^a y c^a son los campos fantasma y antighost, respectivamente.

Además, la derivada covariante para los campos fantasma c^a es

$$(D^\mu c)^a = \partial^\mu c^a + g_s f^{abc} A_b^\mu c^c. \quad (1.3)$$

Este Lagrangiano incluye tanto los términos para los quarks, los gluones y los campos fantasma necesarios para una cuantización consistente en una teoría de gauge no abeliana como QCD.

SECCIÓN 1.3

Simetrías del Lagrangiano

El Lagrangiano de QCD presenta varias simetrías importantes que reflejan principios físicos fundamentales. A continuación, se describen las principales simetrías:

1. Simetría de Gauge Local SU(3)

- El Lagrangiano de QCD es invariante bajo transformaciones de gauge locales de SU(3) de color, lo cual significa que el Lagrangiano permanece invariante bajo las siguientes transformaciones unitarias:

$$\psi \rightarrow U\psi \quad \text{y} \quad A_\mu^a T^a \rightarrow U \left(A_\mu^a T^a + \frac{i}{g_s} \partial_\mu \right) U^\dagger,$$

donde $U \in \text{SU}(3)$, T^a son los generadores de SU(3) y g_s es la constante de acoplamiento fuerte.

- Esta simetría implica que los gluones, los mediadores de la interacción fuerte, pueden interactuar entre sí debido a que SU(3) es un grupo no abeliano.

2. Simetría de Invarianza de Lorentz

- El Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de Lorentz, respetando así las simetrías de la relatividad especial; invariancia respecto a rotaciones y transformaciones de Lorentz en el espacio-tiempo. También nos aseguramos de que todos los observadores (sistema de referencia inercial) tengan las mismas leyes de la física.

3. Simetría de Inversión de Carga, Paridad y Conjugación Temporal (C, P y T)

- La QCD es invariante bajo transformaciones de conjugación de carga (C), paridad (P) y tiempo (T) de manera independiente.

4. **Simetría de isospín/sabor:** el sabor es un número cuántico que está intrínsecamente relacionado con la interacción fuerte de las partículas elementales llamadas quarks; u (up), d (down), s (strange), c (charm), b (bottom) y t (top), este concepto fue introducido por Werner Heisenberg [13] en 1932 para explicar alguna simetrías que aparecen al agrupar las partículas:

- La masa de los neutrones y de los protones es casi la misma (938 MeV para el protón, mientras que 939 MeV para el neutrón). Son casi degenerados y a estos se les denomina nucleones. La principal diferencia es su carga eléctrica.
- La intensidad de la interacción fuerte para cualquier par de nucleones es la misma.
- La masa de un pion que media la interacción fuerte y los nucleones es la misma. Sabemos que la masa de un pión positivo, y su respectiva antipartícula es casi idéntica a la de un pión neutro.

5. Simetría quiral

- Para partículas sin masa la quiralidad coincide con la helicidad, recordemos que esta consiste en la proyección del espín respecto a su momento.
- La quiralidad tiene que ver con el hecho de la forma en la que una partícula se transforme bajo una representación que gira en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario en el grupo de Poincaré.
- En la representación de Pauli-Dirac el operador de quiralidad está dado por $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$.
- Para un espinor general podemos separar las componentes derechas e izquierdas quiralidad usando los operadores de proyección quiral: $P_R \equiv \frac{\gamma_5 + \mathbb{I}}{2}$, $P_L \equiv \frac{\gamma_5 - \mathbb{I}}{2}$.
- Esta simetría no es una simetría exacta y existen varios mecanismos que permiten su rompimiento, en la siguiente sección daremos una explicación detallada de tal ruptura.

SECCIÓN 1.4

Rompimiento de la simetría quiral

Consideremos el lagrangiano de dos sabores, *up* y *down*.

$$\mathcal{L}_{qq} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu)\psi(x) + \mathbf{m}\bar{\psi}(x)\psi(x) + \mathcal{L}_{gluon} + \mathcal{L}_{int}, \quad (1.4)$$

donde:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}.$$

En el límite quiral $m_u = m_d = 0$, podemos separar los campos de los quarks derechos e izquierdos.

$$\psi_R(x) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)\psi(x), \quad \psi_L(x) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5)\psi(x). \quad (1.5)$$

Entonces podemos reescribir el lagrangiano como:

$$\mathcal{L}_{qg} = \bar{\psi}_R(x)(i\gamma_\mu D^\mu)\psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x)(i\gamma_\mu D^\mu)\psi_L(x) + \mathcal{L}_{gluon}, \quad (1.6)$$

Sin embargo, la presencia de un término de masa explícitamente rompe la simetría quiral. Enfoquemonos únicamente en el término de masa en el lagrangiano .

$$\mathcal{L}_{\text{masa}} = \mathbf{m}\bar{\psi}\psi = \mathbf{m}(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) = \bar{\psi}_L\mathbf{m}\psi_R + \bar{\psi}_R\mathbf{m}\psi_L. \quad (1.7)$$

Ahora haremos una transformación unitaria para separar los campos derechos e izquierdos

$$\psi_L \rightarrow e^{iq_L\alpha}\psi_L, \quad \psi_R \rightarrow e^{iq_R\alpha}\psi_R,$$

de manera que lo que obtenemos es:

$$\mathcal{L} = -m(e^{i(q_R - q_L)\alpha}\bar{\psi}_L\psi_R + e^{i(q_L - q_R)\alpha}\bar{\psi}_R\psi_L), \quad (1.8)$$

en donde se ha roto la simetría de campos derechos e izquierdos. Es importante mencionar que esta no es la única forma en la cuál se rompe la simetría quiral. En la realización de Weyl-Wigner, las cargas vectoriales y axiales, Q_V^a y Q_A^{5a} , actúan sobre el vacío:

$$Q_V^a |0\rangle = 0, \quad Q_A^{5a} |0\rangle = 0, \quad (1.9)$$

con lo cual existe una simetría global entre los estados de paridad positiva y negativa. En teoría, se esperaría que por cada estado de paridad positiva exista en el espectro un estado de paridad negativa con igual masa. Sin embargo, este comportamiento no se observa en la naturaleza, de forma experimental:

$$Q_V^a |0\rangle = 0, \quad Q_A^{5a} |0\rangle \neq 0. \quad (1.10)$$

Por otra parte el valor de expectación del vacío es caracterizado por un condensado quark-antiquark, que es diferente de cero.

$$\langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R | 0 \rangle \neq 0, \quad (1.11)$$

Este hecho permite a los quarks u y d adquirir una masa efectiva cuando viajan a través del vacío de QCD, es decir, dentro de los estados ligados quark-antiquark. A diferencia de la teoría de perturbaciones que predice un condensado quiral exactamente igual a 0. A este mecanismo le llamamos rompimiento dinámico de la simetría quiral [14] (DCSB por sus siglas en inglés).

SECCIÓN 1.5

Modelo de quarks

En 1961 Murray Gell-Mann publicó *The eightfold way: A Theory of strong interaction symmetry* [15] un artículo donde se presenta el modelo de quarks, el cual postula que los hadrones están constituidos por tres sabores de quarks *up*, *down* y *strange*, describiéndolos de acuerdo a sus números cuánticos, veamos en qué consisten:

- **Número Bariónico (B):** es un número que se introdujo para explicar la estabilidad del protón; se le asigna $B = 1$ para el protón (y las partículas que decaen en un protón), $B = -1$ sus respectivas antipartículas y $B = 0$ para todo lo demás.
- **Extrañeza (S):** se empleó para explicar el tiempo de vida que tienen algunas partículas. Esta propiedad se conserva cuando ocurren interacciones fuertes, pero no lo hace para interacciones débiles. Se les asignó $S = 1$ a los kaones, $S = -1$ a las partículas Σ y Λ , $S = -2$ a las Ξ y $S = 0$ a todo lo demás.
- **Isospin (I):** Postulado por Heisenberg, se creía que el protón y el neutrón son manifestaciones de una misma partícula llamada nucleón, tomando la misma estructura matemática que el espín, se toma la convención $I = 1/2$ con proyección $I_3 = +1/2$ para representar al protón, mientras que $I = 1/2$ con proyección $I_3 = -1/2$ representa al neutrón.
- **Hipercarga (Y):** definido como $Y = B + S$ es un número que permite relacionar los números cuánticos anteriores con la carga eléctrica $Q = I_3 + Y/2$.

Se clasificó entonces a los quarks conforme a sus propiedades:

Quark	Espín	B	Q	I_3	S	Y
u	$1/2$	$1/3$	$2/3$	$1/2$	0	$1/3$
d	$1/2$	$1/3$	$-1/3$	$-1/2$	0	$1/3$
s	$1/2$	$1/3$	$-1/3$	0	-1	$-2/3$

Cuadro 1.1: Números cuánticos para los quarks ligeros

Gell-Mann agrupó a los bariones y mesones mediante patrones geométricos en el plano $(I_3, S)\bar{K}$, de manera que coincide con la teoría de representaciones de $SU(3)$, con la base expresada de la siguiente manera:

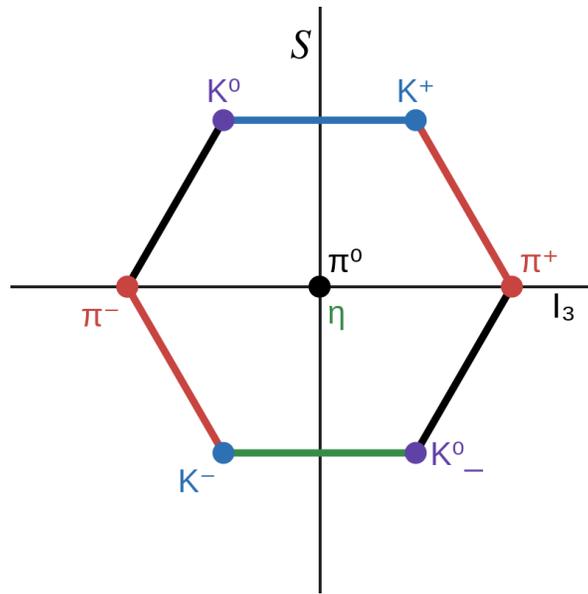


Figura 1.1: Octeto de los mesones pseudoescalares de espín 0

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

las antipartículas se denotan como $|\bar{u}\rangle, |\bar{d}\rangle, |\bar{s}\rangle$, gráficamente podemos ver el octeto para los mesones pseudoescalares de espín 0 en la figura 1.1. Análogamente se organizó así a los bariones de espín 1/2. Al aplicar la misma estrategia para los bariones de espín 3/2 se forma un decuplete, Gell-Mann llamó a esta partícula Ω^- y en 1962 propuso que tendría una extrañeza igual a -3 , carga eléctrica -1 y una masa alrededor de 1680 MeV. Años después se descubrió una partícula experimentalmente que coincidía estas características. En 1969 Gell-Mann recibió el premio nobel de física por sus aportaciones al entendimiento de la estructura interna del núcleo.

SECCIÓN 1.6

Libertad asintótica

La libertad asintótica es una propiedad fundamental de la Cromodinámica Cuántica (QCD) y describe el comportamiento de la interacción fuerte entre quarks y gluones en función de la energía. Este fenómeno fue descubierto por David Gross, Frank Wil-

czek y David Politzer, quienes recibieron el Premio Nobel de Física en 2004 por este descubrimiento.

En QCD, la constante de acoplamiento fuerte $\alpha_s(k^2)$, la cual mide la intensidad la interacción entre quarks y gluones, no es una constante fija (a diferencia de otras teorías como electrodinámica cuántica, QED), sino que depende de la energía o, equivalentemente, de la escala de distancia. La libertad asintótica se refiere al hecho de que a altas energías (o distancias muy pequeñas), la constante de acoplamiento $\alpha_s(k^2)$ disminuye, haciendo que los quarks y gluones interactúen débilmente entre sí. Por lo que a energías extremadamente altas, el valor de α_s tiende a cero, lo que significa que los quarks y gluones se comportan casi como partículas libres, sin interacción significativa. Mientras que para bajas energías (o distancias grandes), la constante de acoplamiento $\alpha_s(k^2)$ aumenta, lo que produce una interacción fuerte entre los quarks. Esto explica el confinamiento, el fenómeno por el cual los quarks no pueden observarse como partículas libres, sino que siempre están ligados formando partículas compuestas, como los mesones o bariones (y otras combinaciones).

El acoplamiento decrece logaritmicamente y se puede escribir aproximadamente como:

$$\alpha_s(k^2) \equiv \frac{g_s(k^2)}{4\pi} \approx \frac{1}{\beta_0 \ln(k^2)/\Lambda^2}, \quad (1.12)$$

donde k es la energía del proceso, Λ es la escala de QCD y toma el valor 0.234 GeV, β_0 es una constante que fue calculada por primera vez por Wilczek, Gross y Politzer [16]. A continuación veremos un concepto estrechamente relacionado con la libertad asintótica, el confinamiento.

SECCIÓN 1.7

Confinamiento

Este fenómeno es el culpable de que los quarks y gluones no pueden escribir de manera libre en la naturaleza, sino que siempre aparecen en combinaciones específicas. La QCD nos dice que los quarks tienen una propiedad cuántica llamada carga de color. En el caso de la carga eléctrica solo tenemos carga positiva o negativa, mientras que para la carga de color tenemos tres colores: rojo, azul y verde con sus respectivos "anticolores" antirrojo, antiverde y antiazul. Estos colores se pueden mezclar, de manera que si tenemos una partícula con color rojo y otra con antirrojo, el hadrón resultante tendrá color neutro o "blanco", lo mismo pasa con los demás colores. Lo que vuelve peculiar a esta propiedad de color es que no podemos observar partículas con color diferente al neutro, únicamente encontraremos las combinaciones de quarks que garanticen un color neutro.

A medida que intentamos separar dos quarks, la fuerza fuerte actúa como un resorte, lo cual hace que la fuerza tenga una interacción creciente conforme la distancia entre las partículas. Uno esperaría que exista la energía suficiente para que se rompiera “el resorte”, no obstante en lugar de liberar un quark, la energía acumulada se convierte en nuevos pares quark-antiquark, formando más hadrones.

El confinamiento sigue siendo un desafío teórico, ya que aún no se conocen bien sus límites ni tampoco existe una demostración rigurosa para obtener una explicación de dicho comportamiento. Se cree que en condiciones extremas como las que ocurrieron después del Big Bang o en colisiones de alta energía en donde la materia entra en una fase llamada plasma de quark-gluones, los quarks pueden estar libres momentáneamente antes de volver a formar hadrones [17].

SECCIÓN 1.8

Momento Cromomagnético Anómalo

En QED, el momento magnético anómalo es un fenómeno bien conocido. El espín de un fermión tiende a girar para alinearse con un campo magnético, un efecto que se vuelve dramáticamente macroscópico cuando los espines de los electrones se giran en un ferromagneto. Microscópicamente, el minúsculo momento magnético de un fermión interactúa con el campo magnético externo a través de la absorción de fotones que componen el campo. La ecuación de Dirac predice que los momentos magnéticos de los fermiones son exactamente igual a dos en un magnetón de Bohr $\mu = 2/e$ [18]. Para partículas como el electrón el resultado clásico difiere con el observado experimentalmente por un 0.1 % dando origen a una contribución “anómala” conocida como “ $g - 2$ ” al momento magnético de la partícula [19].

La predicción de QED coincide con el valor medido experimentalmente en más de 10 cifras significativas, lo que convierte al momento magnético del electrón en una de las predicciones verificadas con mayor precisión en la historia de la física. Aunque el momento magnético del muón también ha sido medido con alta precisión su presencia está en conflicto con el Modelo Estándar.

En QCD existe un fenómeno análogo, llamado momento cromomagnético anómalo de los quarks, sin embargo este no es conocido con precisión. El interés por este factor reside en que desde hace más de 40 años se ha predicho que en una teoría en la cual ocurra el fenómeno de rompimiento dinámico de simetría quiral, los quarks pueden tener un momento magnético anómalo bastante grande [20]. Resultados con diferentes

enfoques como *lattice QCD* lo han validado durante los últimos años [11, 21, 22].

Un quark confinado no tiene *mass-shell*. Por lo que no se puede asignar un valor único a su momento magnético anómalo. Sin embargo se puede calcular una distribución del momento magnético [11]. Hasta el momento no se le ha prestado tanta atención al cálculo experimental, aunque se han realizado algunos cálculos para los quarks ligeros en el contexto del cálculo de la contribución del momento dipolar magnético anómalo de los quarks a los momentos magnéticos anómalos de los nucleones y a los factores de forma electromagnéticos. A medida que el LHC (Large Hadron Collider) comience a medir las cantidades de QCD con mayor precisión, podemos esperar un mayor interés en los momentos dipolares cromomagnéticos anómalos y, más generalmente, en los factores de forma de los quarks.

Con el desarrollo de nuevos métodos de kernels mejorados debido al fenómeno de generación de masa de los hadrones, se ha mostrado que el ACM es capaz de afectar positivamente en el espectro de mesones con quarks ligeros [23]. El ACM surge como consecuencia del vértice quark-gluón vestido, una función de Schwinger de tres puntos.

Con esto concluimos este capítulo enfocado a la parte teórica y comenzaremos el siguiente con la explicación matemática y los detalles técnicos de las ecuaciones que necesitamos resolver para lograr nuestro objetivo.

.

Capítulo 2

Ecuaciones de Schwinger-Dyson y Bethe-Salpeter

SECCIÓN 2.1

Ecuaciones de Schwinger-Dyson

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson son un conjunto de ecuaciones integrales que describen el comportamiento de propagadores en la teoría cuántica de campos. Estas ecuaciones son fundamentales para el estudio de las interacciones entre partículas, y proporcionan una manera no perturbativa de analizar una teoría, ya que pueden aplicarse incluso en regímenes donde los métodos perturbativos tradicionales no son tan efectivos.

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson surgen del formalismo de la integral de camino [24]. Se aplican a los propagadores y vértices de las partículas, proporcionando una relación entre las funciones de Green (que representan probabilidades de transición) de diferentes órdenes.

Entre sus características se encuentra que son invariantes bajo las transformaciones del grupo de Poincaré. El grupo de Poincaré es el grupo de simetrías fundamentales de la teoría relativista, que incluye transformaciones como traslaciones, rotaciones y transformaciones de Lorentz (que incluyen dilataciones temporales y contracciones espaciales).

En la práctica, las ESD son muy complicadas de resolver exactamente, ya que forman

una conjunto infinito de ecuaciones: cada ecuación depende de una función de correlación de orden superior, lo que crea una cadena de ecuaciones acopladas. Sin embargo, se pueden usar truncaciones o aproximaciones para obtener soluciones en ciertos casos específicos.

La representación diagramática se muestra en la figura 2.1. A continuación se presenta la representación matemática de las ESD:

$$S^{-1}(p, \mu) = Z_2 S_0^{-1}(p) + Z_{1F} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^2 D_{\rho\nu}(p - q; \mu) \frac{\lambda}{2} \gamma_\rho S(q; \mu) \Gamma_\nu^a(q, p; \mu). \quad (2.1)$$

Veamos los elementos que componen a esta ecuación:

- $S(p, \mu)$ representa al propagador completo del quark.
- $S_0(p, \mu)$ es el propagador desnudo del quark.
- Z_2 es la constante de renormalización para el propagador del quark.
- Z_{1F} constante de renormalización del vértice quark-gluón.
- g constante de acoplamiento.
- μ es el punto de renormalización.
- $D_{\rho\nu}(p - q, \mu)$ propagador del gluón vestido.
- λ matrices de Gell-Mann.
- γ son las matrices de Dirac.
- $\Gamma_\nu^a(q, p; \mu)$ vértice del quark-gluón completamente vestido.

Podemos ver su representación diagramática en la figura (2.1)

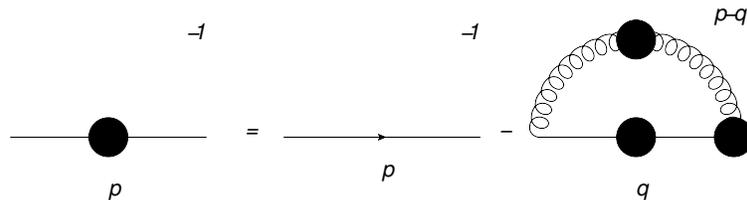


Figura 2.1: Representación diagramática de las ecuaciones de Schwinger-Dyson

En la siguiente sección veremos como se pueden truncar estas ecuaciones y mostraremos una aproximación que es útil manteniendo la física que queremos describir.

SECCIÓN 2.2

Truncamiento de las ecuaciones de Schwinger-Dyson

Para desacoplar la torre infinita de ecuaciones acopladas se propone un ansatz consistente con el vértice quark-gluón y el propagador del gluón. Para el propagador del gluón, escrito de la manera:

$$D_{\rho\nu}(k, \mu) = (g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2}) \frac{\alpha(k^2, \mu^2)}{k^2} + \xi \frac{k_\rho k_\nu}{k^4}. \quad (2.2)$$

En este caso tomaremos el parámetro $\xi = 0$, el cual representa la llamada norma de Landau.

2.2.1 Aproximación Rainbow-Ladder para las ESD

Para poder resolver las DSE, necesitamos truncar la torre infinita de ecuaciones, en otras palabras, necesitamos proponer la forma de algunas partes de la DSE, uno de los esquemas más sencillos se le conoce como *aproximación Rainbow-Ladder*.

Este truncamiento consiste en remplazar el vértice quark-gluón vestido por su contraparte desnuda y escribir al propagador efectivo del gluón como un gluón efectivo, éste es:

$$Z_{1F} g^2 D_{\mu\nu}(k^2) \Gamma_\nu^a \longrightarrow 4\pi Z_2^2 \alpha(k^2) D_{\mu\nu}^0(k^2) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu, \quad (2.3)$$

donde $\alpha(k^2)$ es el modelo de acoplamiento efectivo. Más adelante describiremos su forma. Este truncamiento funciona en la norma de Landau ($\xi = 0$), por lo que será la norma que utilizaremos. La norma de Landau es el punto fijo en el grupo de renormalización. Diagramáticamente la Ecuación de Schwinger-Dyson luego de la aproximación Rainbow-Ladder se representa en la figura 2.2.

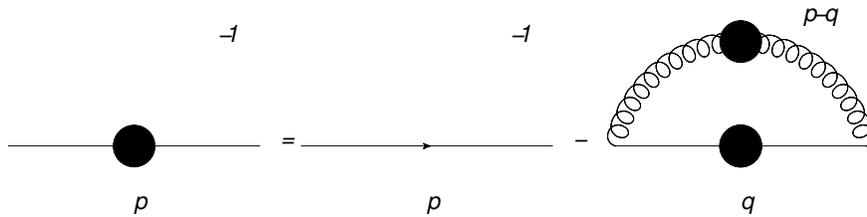


Figura 2.2: DSE para el propagador del quark en la aproximación arcoiris

Truncando la ecuación (2.1) de acuerdo a (2.3), obtenemos:

$$S^{-1}(p, \mu) = Z_2 S_0^{-1}(p) + Z_2^2 \int_q \alpha(k^2) D_{\rho\nu}^0(k; \mu) \frac{\lambda}{2} \gamma_\rho S(q; \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu, \quad (2.4)$$

donde $k = p - q$ y utilizamos la notación $\int_q = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$. Esta aproximación desacopla la DSE del propagador del quark de las correspondientes DSE del vértice quark-gluón, de manera que la ecuación de gap se puede resolver numéricamente. La ecuación (2.4) es una ecuación matricial cuyo sistema de ecuaciones escalares asociado no existe independencia lineal.

2.2.2 Modelos para el acoplamiento efectivo

Modelo de Maris-Tandy (MT)

El modelo de Maris-Tandy [25] describe muy bien mesones pseudo-escalares y vectoriales. Sus desventajas son: tiene un cero para un valor pequeño de momento space-like y decrece a valores negativos muy rápido. Este comportamiento produce una fuerte discrepancia entre los resultados de la DSE y lattice QCD; La función de vestimiento del propagador del gluon es una función acotada y regular de los momentos del espacio, que alcanza su valor máximo en $k^2 = 0$ y decrece monótonamente en el space-like, el vértice vestido del quark-gluón no posee ninguna estructura que pueda cualitativamente alterar este comportamiento. Este modelo se toma en cuenta por la forma funcional y por conveniencia numérica.

Podemos escribir de la siguiente manera:

$$\alpha(k^2) = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2} + \frac{8\pi^2 \gamma_m}{\ln [\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} \mathcal{F}(k^2), \quad (2.5)$$

donde $\mathcal{F}(k^2) = [1 - \exp(-s/4m_t^2)]/s$. Los valores para las diferentes constantes son: $\gamma_m = 12/(33 - 2N_f)$, $N_f = 4$, $\lambda_{QCD} = 0.234 \text{ GeV}$; $\tau = e^2 - 1$; $mt = 0.5 \text{ GeV}$.

Se define $\alpha(k^2) = \alpha_{IF}(k^2) + \alpha_{UV}(k^2)$ donde:

$$\alpha_{IR}(k^2) = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2},$$

$$\alpha_{UV}(k^2) = \frac{8\pi^2 \gamma_m}{\ln [\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} \mathcal{F}(k^2),$$

$\alpha_{IR}(k^2)$ corresponde a una aproximación tipo $\delta^4(k)$, y es donde se encuentra la mayor contribución en el infrarrojo. Las constantes w y D son parámetros libres del modelo

que cumplen con una relación.

Mientras que $\alpha_{UV}(k^2)$ corresponde a la parte perturbativa, se escribe de forma que obtenemos el comportamiento de $\alpha(k^2)$ en el ultravioleta.

Modelo de Qin-Chang

Otro modelo efectivo comunmente utilizado es el llamado Qin-Chang [26], cuya diferencia con otros modelos como el de Maris-Tandy es la eliminación de un factor de k^2 el cual se introdujo para mejorar las singularidades encontradas en el tratamiento numérico del operador de proyección transversal $k^2 D_{\rho\nu}^0(k)$. Así el modelo se escribe de la siguiente manera:

$$\alpha(k^2) = \frac{8\pi^2}{\omega^4} D e^{-k^2/\omega^2} + \frac{8\pi^2 \gamma_m}{\ln [\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} \mathcal{F}(k^2). \quad (2.6)$$

De igual manera podemos denominar al primer término como aportación infrarroja y el segundo término la parte ultravioleta. En este modelo utiliza los mismos valores para las constantes que aparecen en el término ultravioleta, en realidad éste termino proviene de la teoría de perturbaciones, por lo cual es el mismo para ambos casos. La propiedad $0 < \alpha(0) < \infty$ surge porque una escala de masa no nula para el gluón aparece como una consecuencia de la generación de la masa hadrónica [27]. El comportamiento para valores grandes de k^2 garantiza que el flujo del grupo de renormalización a un lazo de QCD se conserve.

En la siguiente sección veremos la implementación de estos modelos y las soluciones para las SDE.

SECCIÓN 2.3

Solución general para la aproximación Rainbow-Ladder:

2.3.1 Sistema de ecuaciones a resolver

En el siguiente conjunto de ecuaciones se muestran las distintas formas de representar al propagador del quark, de acuerdo a las funciones de vestimiento correspondientes.

$$S^{-1}(p, \mu) = i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2), \quad (2.7)$$

$$S(p, \mu) = -i\gamma \cdot p \sigma_v(p^2) + \sigma_s(p^2), \quad (2.8)$$

$$M(p^2, \mu^2) = \frac{B(p^2, \mu^2)}{A(p^2, \mu^2)} = \frac{\sigma_s(p^2, \mu^2)}{\sigma_v(p^2, \mu^2)}, \quad (2.9)$$

$$\sigma_v(p^2, \mu^2) = \frac{A(p^2, \mu^2)}{p^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}, \quad (2.10)$$

$$\sigma_s(p^2, \mu^2) = \frac{B(p^2, \mu^2)}{p^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}. \quad (2.11)$$

$M(p^2)$ representa la función de masa. Mediante la aplicación de los proyectores adecuados en la ecuación (2.4) y calculando las trazas de las ecuaciones resultantes, podemos llegar al siguiente sistema de ecuaciones acopladas, en donde aplicamos la representación en (2.7):

$$A(p^2) = Z_2 + \frac{4}{3} \frac{Z_2^2}{p^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4\pi\alpha(k^2)}{k^2} \sigma_v(q^2) \left[p \cdot q + 2 \frac{(p \cdot k)(k \cdot q)}{k^2} \right], \quad (2.12)$$

$$B(p^2) = Z_2 Z_m m(\mu) + \frac{4}{3} Z_2^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4\pi\alpha(k^2)}{k^2} 3\sigma_s(q^2). \quad (2.13)$$

Hemos omitido la dependencia del punto de renormalización. En lo consecuente se muestra

2.3.2 Función de masa

La función de masa dinámica $M(p^2)$ describe cómo la masa efectiva de los quarks depende de su energía debido a interacciones no perturbativas, su estudio nos permite apreciar los efectos del rompimiento dinámico de simetría quiral.

La masa de corriente m_0 (o masa semilla) de los quarks es muy pequeña para los quarks ligeros (up, down, strange), típicamente del orden de unos cuantos MeV [28].

Sin embargo, los quarks dentro de los hadrones (como bariones o mesones) exhiben masas efectivas mucho mayores. Esto se debe a la interacción fuerte con el campo gluónico y la formación de pares quark-antiquark en el vacío.

En la figura (2.3) se muestra una función de masa que surge como consecuencia de resolver numéricamente las ecuaciones (2.12) utilizando el modelo efectivo de Qin-Chang, en dicha figura observamos que para una masa corriente $m_0 = 3.7MeV$ que representa la masa de un quark up conseguimos una masa efectiva dos ordenes de magnitud mas grande $M(0) = 0.44 GeV$.

También se muestran las funciones de vestimiento que surgen al resolver las SDE con las condiciones antes mencionadas en las figuras 2.4 y 2.5.

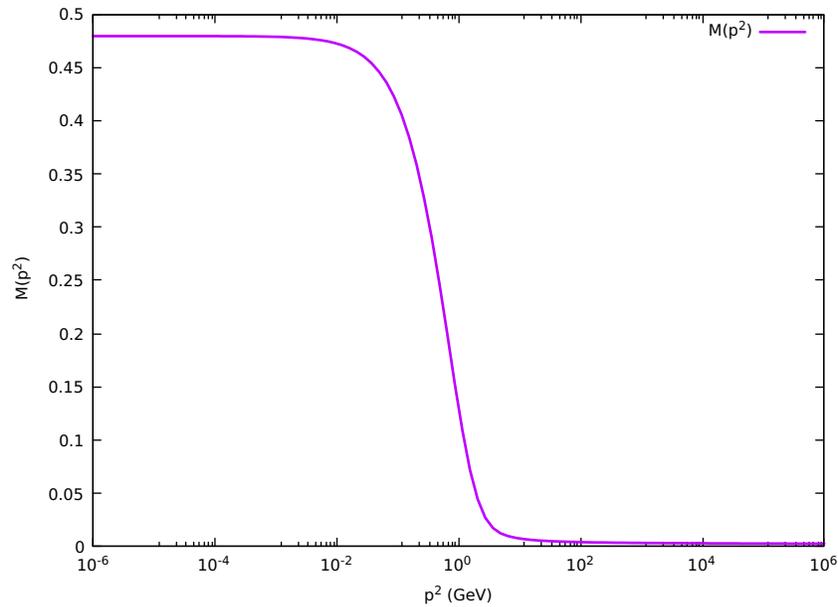
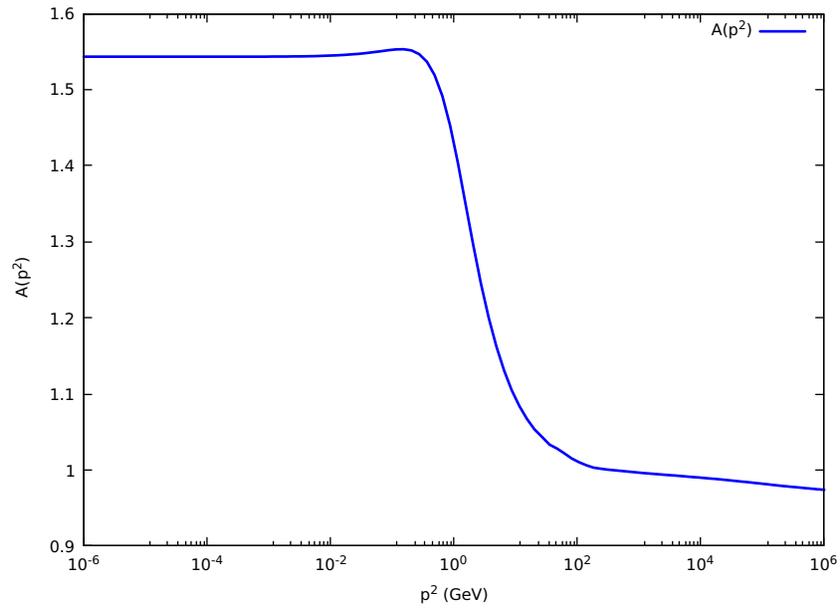
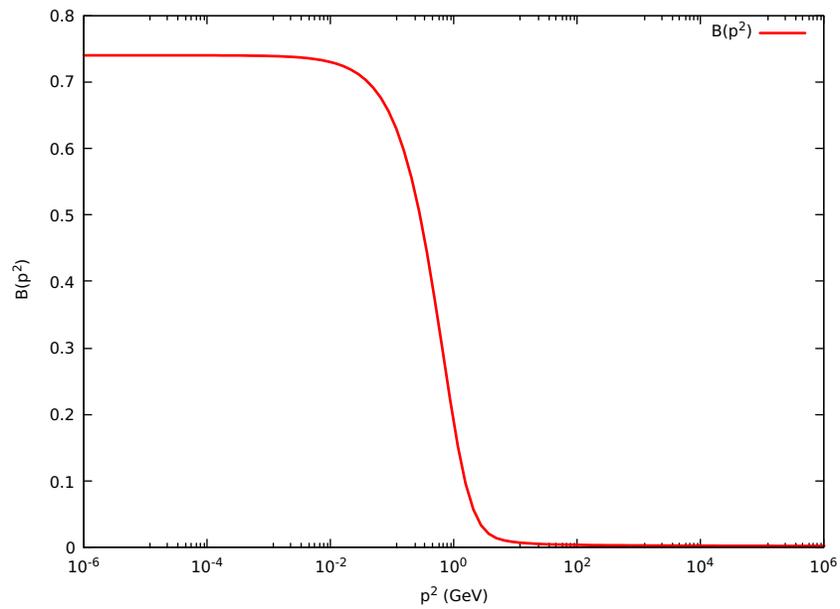


Figura 2.3: Función de Masa del quark como solución a las ecuaciones de Schwinger-Dyson para una masa semilla de $3.7MeV$ empleando el modelo de Qin-Chang

Figura 2.4: Función de vestimiento $A(p^2)$ para una masa semilla de 3.7 MeVFigura 2.5: Función de vestimiento $B(p^2)$ para una masa semilla de 3.7MeV

2.3.3 Extensión analítica al plano complejo

Para poder encontrar las amplitudes de Bethe-Salpeter, necesitamos conocer el propagador del quark para valores del momento complejo. Por razones técnicas trabajamos en un espacio tiempo Euclideo, en el que parametrizamos el momento P como $P = (0, 0, 0, iM)$, con $P^2 = -M^2$.

En este caso usamos parábolas complejas para delimitar al propagador del quark $S(q \pm P/2)$, las cuales las definimos como:

$$q_{\pm} = q^2 - M^2 \pm iz\sqrt{q^2}\sqrt{M^2}, \quad (2.14)$$

donde M representa la masa del estado ligado y z el ángulo entre q y P . La ecuación (2.14) forma una parábola en el plano complejo, centrada en $M^2/4$ como vemos en la figura 2.6.

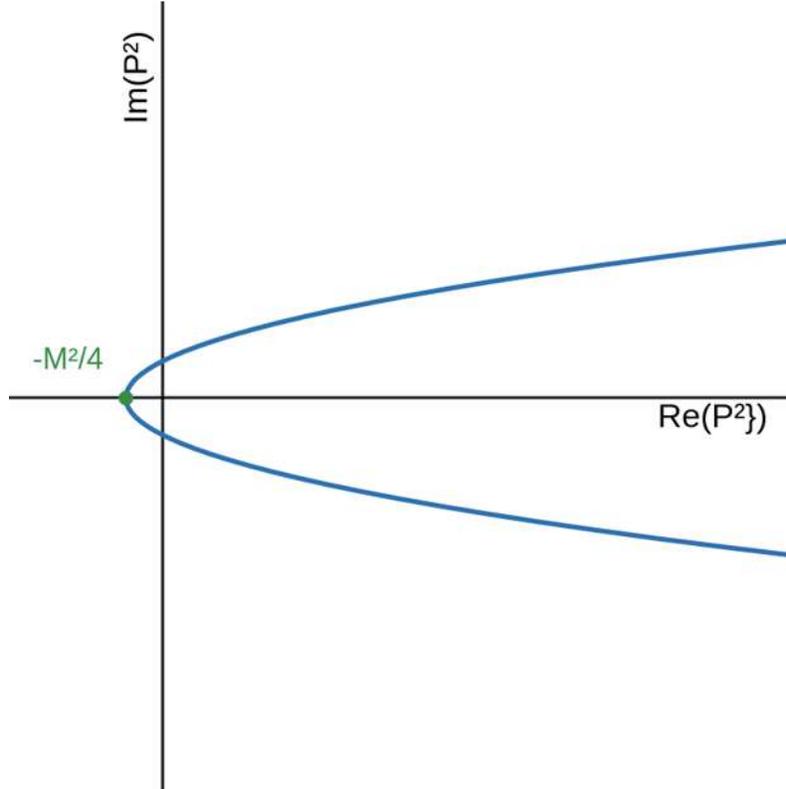


Figura 2.6: El propagador del quark se encuentra delimitado por la parábola en azul.

Ahora, para resolver las ESD en el plano complejo empleamos el método de interpolación de Cauchy [29], el cual consiste en hacer uso de la fórmula integral de Cauchy, la cual para un contorno γ y un número complejo z_0 se escribe como:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2.15)$$

En este caso es conveniente escribir la ecuación (2.15) de la siguiente manera

$$f(z_0) = \frac{\oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz}{\oint \frac{1}{z-z_0} dz}, \quad (2.16)$$

con esta fórmula podemos calcular las funciones de vestimiento del propagador del quark en el plano complejo descritas en las ecuaciones (2.7). Por ejemplo:

$$B(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{B(q)}{q-a} dq, \quad (2.17)$$

para lo cual tenemos que parametrizar el contorno (en sentido antihorario) en el plano complejo [30]. Análogamente para la función $A(p^2)$.

Otra alternativa igualmente efectiva para simplificar los cálculos es utilizar una parametrización adecuada de la solución. Este enfoque nos ayuda a reducir la carga computacional al tiempo que mantiene la precisión requerida, haciendo que los estudios de mesones con quarks pesados sean más manejables.

Una parametrización conveniente es la que emplea una combinación lineal de propagadores libres con masas complejas conjugadas. En este caso usaremos 2 polos complejos conjugados y lo denotaremos como 2-CCP (Complex Conjugate Poles). Veamos que para el propagador del quark escribimos:

$$S(p) = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{z_k}{i\gamma \cdot p + m_k} + \frac{z_k^*}{i\gamma \cdot p + m_k^*} \right), \quad (2.18)$$

donde m_k, z_k son parámetros complejos que fijamos a partir de las soluciones numéricas en el plano real. Al menos un parámetro m_k debe tener parte imaginaria distinta de cero, de manera que el propagador no tenga polos sobre el eje real y se trate de una partícula confinada.

Recordando las distintas formas de representar al propagador del quark (2.7), escribimos las funciones de vestimiento de acuerdo a la parametrización de 2-CCP:

$$\sigma_v(q) = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{z_k}{q^2 + m_k^2} + \frac{z_k^*}{q^2 + m_k^2} \right) \quad (2.19)$$

$$\sigma_s(q) = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{z_k m_k}{q^2 + m_k^2} + \frac{z_k^* m_k^*}{q^2 + m_k^2} \right) \quad (2.20)$$

	Re	Im
m_1	1.874	-0.177
m_2	0.2607	0.306
z_1	0.247318	0.57401
z_2	0.250585	1.39485

Cuadro 2.1: Resultados numéricos obtenidos para la parametrización del propagador del quark

En las figuras (2.7-2.8) se comparan los resultados numéricos (ver tabla 2.1) para el propagador del quark con la parametrización 2-CCP

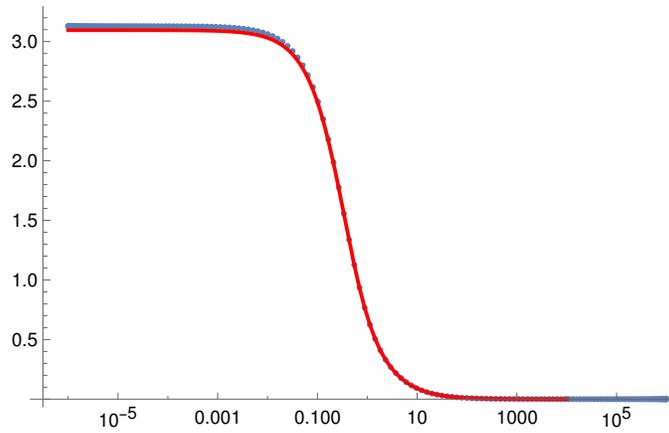


Figura 2.7: Comparación entre la función de vestimiento $\sigma_v(p^2)$ en GeV obtenida al resolver numéricamente (puntos azules) las ESD y la parametrización con 2-CCP (línea roja)

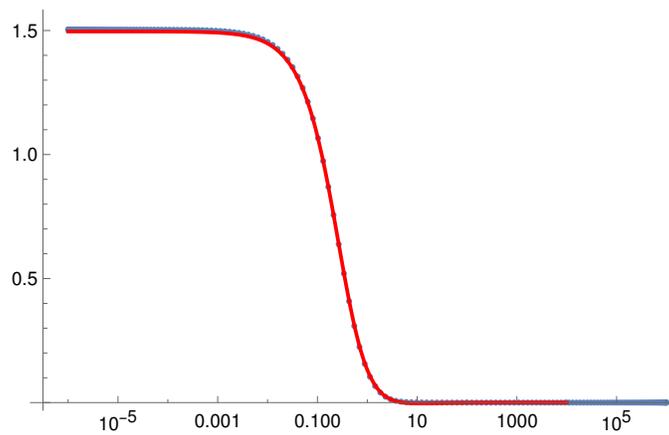


Figura 2.8: Comparación entre la función de vestimiento $\sigma_s(p^2)$ en GeV obtenida al resolver numéricamente (puntos azules) las ESD y la parametrización con 2-CCP (línea continua roja)

En la siguiente sección mostraremos las ecuaciones de Bethe-Salpether, las cuales necesitarán de las soluciones del propagador del quark descrito por las ESD en el plano complejo.

SECCIÓN 2.4

Ecuaciones de Bethe-Salpether

En una teoría cuántica de campos, las ecuaciones de Bethe-Salpeter (BSE) es una descripción completamente relativista de estados ligados de dos partículas. Se usa principalmente para describir mesones, aunque también se emplea para modelos como un electrón y un agujero en un material semiconductor, nosotros únicamente nos enfocaremos en el caso de los mesones. La BSE se escribe:

$$[\Gamma_H^{ab}(p, P)]_{tu} = \int_q K_{tu}^{rs}(p, q; P) [\chi_H^{ab}(q; P)]_{sr} \quad (2.21)$$

$$\chi_H^{ab}(q; P) = S^a(q + \eta P) \Gamma_H^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P) \quad (2.22)$$

Los elementos que componen esta ecuación son:

- $\Gamma_H^{ab}(p, P)$ es la amplitud de Bethe-Salpether (BSA).
- $\chi_H^{ab}(q; P)$ es la función de onda de Bethe-Salpether.
- p es el momento relativo entre el quark y el antiquark.
- η es la fracción del momento total que comparten el quark y antiquark, como ninguna observable física depende de este valor, podemos modificarla a conveniencia, aunque lo más cómodo es $\eta = 1/2$.
- a, b son los índices de sabor.
- P es el momento total, que cumple con $P^2 = -m_H^2$, donde m_H es la masa del mesón.
- H nos indica el tipo de mesón. Para mesones pseudoescalares Γ_5 , vectores Γ_μ , escalares Γ_1 y $\Gamma_{5\mu}$ para pseudovectores.
- r, s, t, u son los índices de las matrices de color.

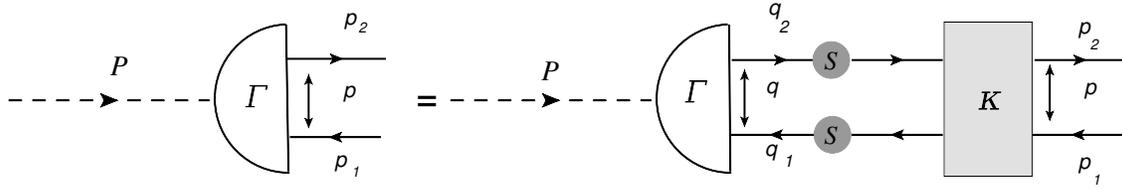


Figura 2.9: Ecuaciones de Bethe-Salpether

- $K_{tu}^{rs}(p, q; P)$ es el kernel de dispersión, su forma depende del tipo de truncamiento realizado en las ecuaciones de Schwinger-Dyson, de manera que se mantenga una consistencia entre ambos conjuntos de ecuaciones.

Diagramáticamente podemos ver las BSE representadas en la figura (2.9). Definimos la notación $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$, $P = p_1 - p_2$, $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$, $p_1 = p + \eta P$, $p_2 = p - (1 - \eta)P$.

El kernel de interacción está relacionado con el truncamiento mediante (omitiendo los índices de color):

$$[\Sigma(p_1)\gamma_5 + \gamma_5\Sigma(p_2)] = \int_q K(p, q; P) [\gamma_5 S(q_2) + S(q_1)\gamma_5]. \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) es un corolario de la identidad de Ward-Green-Takahashi [31–33] y nos dice que en la aproximación *Rainbow*:

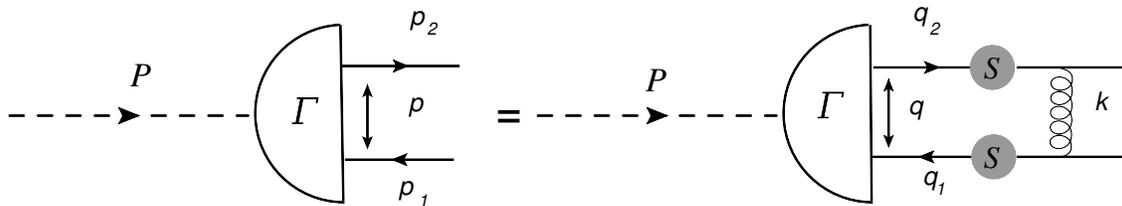
$$K(p, q; P)_{tu}^{rs} = -k^2 \alpha(k^2) D_{\mu\nu}^0(k) \left[\frac{\lambda^c}{2} \gamma_\mu \right]^{ru} \left[\frac{\lambda^c}{2} \gamma_\nu \right]^{ts}, \quad (2.24)$$

con $k = p - q$. Con lo cual la BSE se escribe finalmente como:

$$\Gamma_H^{ab}(p, P) = - \int_q k^2 \alpha(k^2) D_{\mu\nu}^0(k) \left[\frac{\lambda^c}{2} \gamma_\mu \right]^{ru} \left[\frac{\lambda^c}{2} \gamma_\nu \right]^{ts} [\chi_H^{ab}(q; P)]_{sr} \quad (2.25)$$

$$\chi_H^{ab}(q; P) = S^a(q + \eta P) \Gamma_H^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P) \quad (2.26)$$

A este truncamiento le conocemos como *Rainbow-Ladder*, y tiene su representación diagramática en la figura (2.10).

Figura 2.10: Ecuación de Bethe-Salpether luego de la aproximación *Rainbow-Ladder*

2.4.1 Amplitudes de Bethe-Salpether

La estructura de Dirac que caracteriza a las Amplitudes de Bethe-Salpether (ABS) depende de los números cuánticos del mesón \mathbf{P} :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathbf{P}}(p; P) &= \gamma_5 \{ iE_{\mathbf{P}}(p, P) + \gamma \cdot PF_{\mathbf{P}}(p, P) \\ &+ \gamma \cdot p\gamma \cdot PG_{\mathbf{P}}(p; P) + p_{\mu}\sigma_{\mu\nu}P_{\nu}H_{\mathbf{P}}(p; P) \}.\end{aligned}$$

Para el caso de un meson pseudoescalar, las ABS se escriben de acuerdo a las estructuras de Dirac que toman la siguiente forma:

$$\Gamma_5^{ab}(p; P) = \gamma_5 [iE_5(p; P) + \gamma \cdot P(p; P) + \gamma \cdot pp \cdot PG_5(p; P) + p_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}P_{\beta}H_5(p; P)], \quad (2.27)$$

si aplicamos los proyectores adecuados lograremos despejar las amplitudes invariantes $A^i(p; P)$, obteniendo un conjunto de ecuaciones lineales para cada amplitud:

$$\lambda(P^2)A^i(p; P) = - \sum_{j=1}^N \int_q \alpha(k^2)T_{\mu\nu}(k)R_{\mu\nu}^{ij}(q, p; P)A^j(q; P), \quad (2.28)$$

$$R_{\mu\nu}^{ij}(q, p;) = \text{Tr}_{CD} \left[T_i(p, P) \frac{\lambda^c}{2} S^a(q_1) C_H^j(q; P) S^b(q_2) \frac{\lambda^c}{2} \right]. \quad (2.29)$$

en donde se agrega de manera artificial la función $\lambda(P^2)$, esto para poder resolver para valores continuos de P^2 . La solución física se obtiene cuando $\lambda(P_n^2 = -m_n^2) = 1$. Se tiene que m_0^2 corresponde a la masa del estado fundamental del mesón, mientras que $m_n^2 (n \geq 1)$ representa la masa al cuadrado de la n -ésima excitación radial. El cálculo de las Amplitudes del estado ligado del mesón puede simplificarse al expandirlas en polinomios de Chebyshev de segundo tipo, donde la dependencia angular puede ser separada [34].

$$A^i(p; P) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(q \cdot P) \tilde{A}_m^i(p^2, P^2), \quad (2.30)$$

que cumplen con la relación de ortonormalidad:

$$\int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}. \quad (2.31)$$

Además, los mesones pseudoescalares con las mismas masas de quarks son autoestados de paridad C , lo que implica que las BSAs de los mesones son pares en la variable angular $z = q \cdot P$. Por lo tanto, al factorizar las BSAs en polinomios de Chebyshev,

solo contribuyen los momentos pares de Chebyshev . Un total de seis polinomios de Chebyshev son suficientes para describir adecuadamente el estado excitado del pi3n. Para mesones multisabor como el ka3n es necesario tomar la traza sobre el espacio de sabor [35].

Debido a que el algoritmo empleado devuelve un eigenvector normalizado a uno, es necesario que las expresiones sean normalizadas con una condici3n extra. Para conseguir la completez en la aproximaci3n *Rainbow-Ladder* empelamos:

$$P_\mu = N_c \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int_q \text{Tr} \{ \bar{\Gamma}_H(p, -P) S(q_1) \Gamma(p, P) S(q_2) \} \quad (2.32)$$

Aqu3 N_c representa el n3mero de colores, Γ_H es la amplitud normalizada y $\bar{\Gamma}_H$ es su versi3n con la carga conjugada $\bar{\Gamma}_H(p, -P) := C \Gamma^T(-p, -P) C^T$, donde C es el operador de conjugaci3n de carga.

Es importante mencionar que una vez que tenemos las ABS propiamente normalizadas, podemos calcular las constantes de decaimiento [3]

$$f_{\mathbf{P}} m_{\mathbf{P}}^2 = \sqrt{N_c} Z_2^2 \text{Tr} \left\{ \int_q \gamma_5 \not{P} S(q_1) \Gamma(q, P) S(q_2) \right\}. \quad (2.33)$$

Escribiendo esta f3rmula para el meson pseudoescalar (\mathbf{P}) podemos calcular la constante de decaimiento de la siguiente manera [36]:

$$f_5 = -\frac{Z_{2F} N_c}{m_5^2} \int_q P_\mu \text{Tr} \{ \Gamma_5^{ba}(q; P) S^a(q_2) \gamma_\mu \gamma_5 S^b(q_1) \}. \quad (2.34)$$

A continuaci3n presentaremos algunas identidades de gran importancia para nuestra teor3a.

SECCI3N 2.5

Identidades de Ward-Green-Takahashi

Las identidades de Ward-Green-Takahashi (WGT) [31–33] son un conjunto de relaciones que aparecen en una teor3a cu3ntica de campos, b3sicamente describen las consecuencias de la invariancia de gauge. Se usan para restringir la estructura de las funciones del v3rtice. La identidad axial de Ward se escribe:

$$k_\mu \Gamma_{5\mu}(q, p) + 2im\Gamma_5(q, p) = S^{-1}(q)i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(p), \quad (2.35)$$

donde m es la masa corriente del quark. La expresión anterior también llamada identidad longitudinal relaciona el vértice axial vector $\Gamma_{5\mu}$ con el pseudoescalar Γ_5 . Cada término de la expresión (2.35) depende del punto de renormalización μ , sin embargo las observables físicas no dependen del mismo [37]. Dicha fórmula puede ser demostrada como una consecuencia de la conservación de corriente.

Las identidades longitudinales expresan propiedades de la divergencia del vértice, mientras que las identidades transversas lo hacen respecto al rotacional del vértice (al igual que la ley de inducción de Faraday se relaciona con el campo eléctrico). Algunas identidades transversas útiles son:

$$\begin{aligned} k_\nu \Gamma_\mu(q, p) - k_\mu \Gamma_\nu(q, p) &= S^{-1}(q)\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}S^{-1}(p) \\ &\quad - 2m\Gamma_{\mu\nu} - 2t_\lambda \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \Gamma_{5\rho}(q, p) + A_{\mu\nu}^V(q, p), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} k_\mu \Gamma_{\nu\rho}(q, p) + k_\mu \Gamma_{\rho\nu}(q, p) + k_\rho \Gamma_{\mu\nu}(q, p) &= S^{-1}(q)\epsilon_{\mu\nu\rho}^5 - \epsilon_{\mu\nu\rho}^5 S^{-1}(p) \\ &\quad + 2it_\lambda \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \Gamma_5(q, p) + P_{\mu\nu\rho}(q, p), \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\rho}^5 = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \gamma_\lambda \gamma_5$ y $\Gamma_{\mu\nu}(q, p)$ es un tensor de rango dos obtenido de la BSE con una inhomogeneidad $\sigma_{\mu\nu}$.

Los dos últimos términos en la Ec. (2.36), surgen al calcular la expresión en el espacio de momentos de un vértice axial-vector no local, cuya definición involucra una integral de línea dependiente del campo de gauge; de una forma similar los últimos dos términos en la ec. (2.37) aparecen al manipular un vértice tensorial no local análogo [38]. Cabe destacar que al igual que en las identidades longitudinales, las identidades transversas son válidas en cualquier norma covariante y no muestran explícitamente una dependencia del parámetro que fija la norma ξ .

Es fácil verificar que todas las identidades son satisfechas para vértices y propagadores desnudos ya que $A_{\mu\nu}^V(q, p)$ y $P_{\mu\nu\rho}(k, p)$ son cero en ausencia de interacciones.

A continuación mostraremos los resultados numéricos del cálculo de la masa y constantes de decaimiento del pión.

2.5.1 Resultados numéricos

El pión π es una partícula fundamental en la teoría de QCD. En términos simples, es un mesón formado por un par quark-antiquark. Los piones desempeñan un papel crucial en

la descripción de la interacción fuerte a energías bajas. En nuestro caso, consideramos un par de quarks con una masa promedio u/d , cuyos valores se presentan en el cuadro 2.2.

Masa semilla (GeV)	Masa (GeV)	f_π
0.004	0.143	0.132
0.0037	0.138	0.131
0.0034	0.132	0.131
0.003	0.124	0.130
0.0025	0.113	0.130
0.0015	0.00875	0.129
0.0005	0.00494	0.128
1×10^{-9}	6.77×10^{-3}	0.128

Cuadro 2.2: Relación de masas obtenidas para el mesón π para diferentes masas semilla, utilizando el modelo de Qin-Chang con parámetros $\omega = 0.4$, $D\omega = (0.8)^3$, con el punto de renormalización $\mu = 19.0$ GeV, en la aproximación de Rainbow Ladder

Sabemos que los valores experimentales [28] para m_π (el cual corresponde al promedio entre m_{π^0} y m_{π^\pm}) son $m_\pi = 0.139$ GeV, mientras que para la constante de decaimiento es $f_\pi = 0.130$ GeV. Por lo tanto, para el valor de masa semilla $m_q = 0.0037$ GeV, obtenemos resultados con una diferencia respecto al valor experimental menor al 1%.

Los demás valores nos permiten observar la variación que ocurre al insertar diferentes masas semilla. También notamos que, incluso en el límite quiral (masa igual a cero), se obtiene una masa del π distinta de cero. Esto ejemplifica cómo los quarks adquieren masa a través del fenómeno de rompimiento de simetría quiral.

Las amplitudes de Bethe-Salpeter para el pión se muestran en la figura 2.11. La contribución de la amplitud E_π es dominante en todos los mesones pseudoescalares, en especial para el pión contribuye un 85% del total de la masa. Observamos que la forma de esta amplitud es similar a la de la función de masa, esto es una consecuencia de la identidad axial de Ward-Green-Takahashi.

	Qin-Chang (GeV)	Maris-Tandy(GeV)	Experimental (GeV)
$m_{\pi_{1300}}$	0.974	1.132	1.30 ± 0.10 [28]
$m_{k_{1460}}$	0.914	1.032	1.46

Cuadro 2.3: Masas de los estados excitados en la aproximación *Rainbow-Ladder* con el modelo de Qin-Chang

Como podemos observar en la tabla 2.3 los valores que se obtienen en la aproximación Rainbow-Ladder del vértice desnudo difieren con los resultados experimentales por

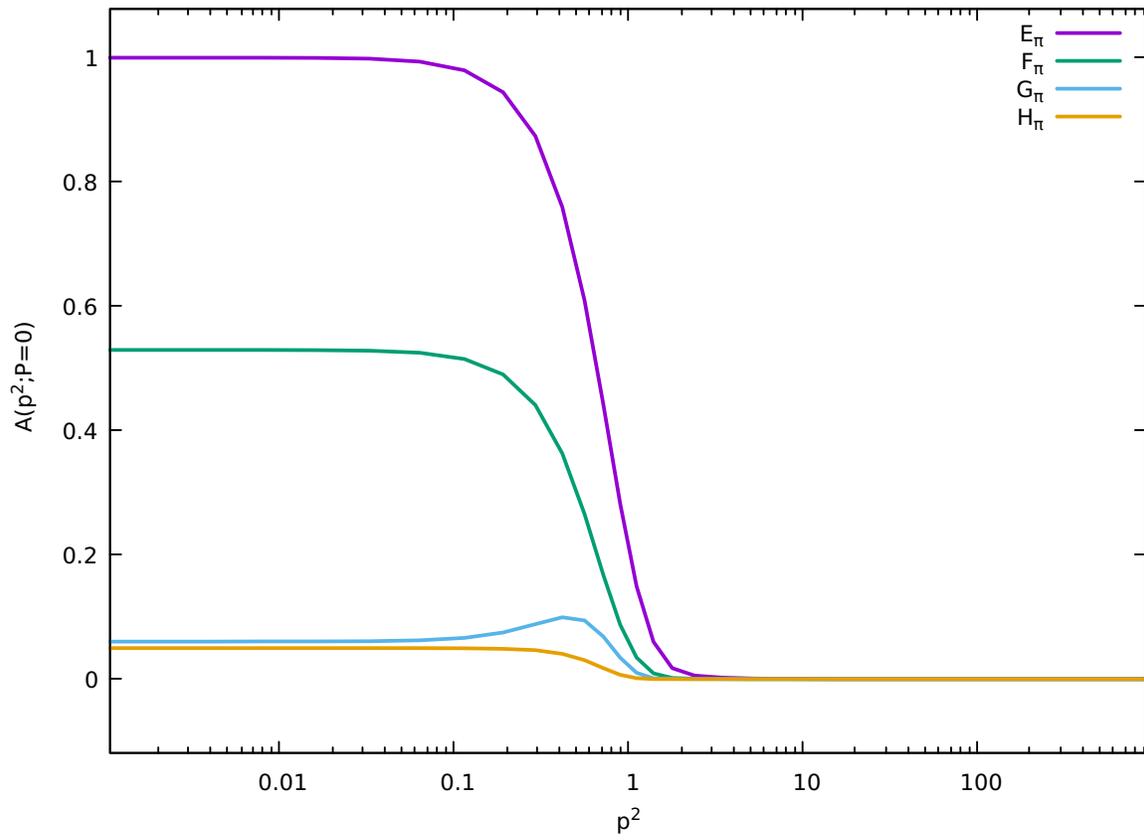


Figura 2.11: Amplitudes de Bethe-Salpether del pión en GeV.

variaciones de más del 30%. Estos resultados son consistentes con los que aparecen reportados en la literatura [30]. Por lo que sabemos que modelos como el de Maris-Tandy o el de Qin-Chang fallan en la predicción de los valores para la masa de los estados excitados.

El desarrollo realizado hasta el momento nos ha permitido sentar las bases para avanzar hacia una extensión más compleja de nuestros cálculos, incorporando al vértice quark-gluón la contribución del momento cromomagnético anómalo. Este término adicional, que surge de correcciones radiativas a nivel de la interacción quark-gluón, juega un papel fundamental en la descripción de las propiedades dinámicas de los hadrones y en el rompimiento de simetría quiral.

La inclusión de los términos asociados al momento cromomagnético anómalo modifica la estructura del vértice quark-gluón mediante términos adicionales que dependen explícitamente del momento relativo entre los quarks y los gluones. Esto no solo incrementa la complejidad del sistema, sino que también permite capturar efectos más sutiles que no son accesibles en el marco de la aproximación *Rainbow Ladder*. En este sentido, la extensión del vértice representa un paso clave para mejorar la precisión y la capacidad predictiva de nuestros cálculos.

A través de esta mejora, esperamos no solo reproducir las propiedades observables, como las masas y constantes de decaimiento de los mesones, sino también explorar cómo las correcciones al vértice afectan los factores de forma y la dinámica de los estados ligados. En particular, el momento cromomagnético anómalo está estrechamente relacionado con el rompimiento de simetría quiral y la generación dinámica de masa en los quarks, lo que lo convierte en un elemento esencial para comprender la estructura interna de los hadrones.

Con los resultados previos validados y la metodología establecida, estamos en condiciones de implementar esta extensión y analizar su impacto en los cálculos.

Capítulo 3

Vértice quark-gluón: aproximación con el Momento Cromomagnético Anomalo

SECCIÓN 3.1

Vértice quark-gluón

El vértice quark-gluón [39] en el Lagrangiano del modelo estándar es simple, a saber, $\Gamma_\mu^a = \Gamma_\mu^{a0} = (\lambda^a/2)\gamma_\mu$ y permanece simple cuando introducimos interacciones, Γ_μ^{a0} recibe correcciones logarítmicas que dependen del momento, pero no surgen nuevas interacciones significativas. Sin embargo las identidades transversales de Ward-Green-Takahashi [31–33] implican que esa simplicidad se destruye para momentos en el infrarrojo, es decir, cuando aparece el fenómeno de rompimiento dinámico de la simetría quiral [40] (DCSB, por sus siglas en inglés). Gráficamente $\Gamma_\mu^a(q, p)$ se muestra en la figura 3.1, dicho vértice tiene 12 términos independientes (para el caso mencionado), cada uno corresponde a una estructura de Dirac covariante bajo transformaciones de Poincaré.

$$\Gamma_\mu(q, p) = \sum_{i=1}^4 \lambda^i(q, p) L_\mu^i(q, p) + \sum_{i=1}^8 \tau^i(q, p) T_\mu^i(q, p), \quad (3.1)$$

en donde λ^i son un conjunto de funciones escalares y τ^i son funciones que dependen de las tres variables escalares $p_1^2, p_2^2, (p_2 - p_1)^2$ [41]. Los primeros cuatro términos re-

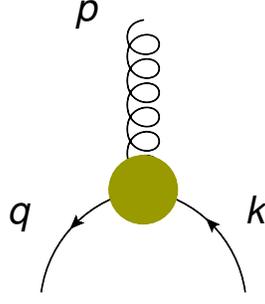


Figura 3.1: Vértice quark-gluón $\Gamma_\mu(q, p)$ con la convención del momento indicada.

presentan los términos no transversos, mientras que los ocho restantes cumplen con la transversalidad $k \cdot \Gamma_T(q, p) = 0$.

En el límite quiral (masa igual a cero) seis de los términos para $\Gamma_\mu^a(q, p)$ son cero debido al fenómeno de DCSB, por lo que en principio uno esperaría que estos términos actúen como amplificadores en el kernel de las ecuaciones de Schwinger-Dyson. En tales circunstancias, dado el papel que desempeña la DCSB en la formación de observables hadrónicos, la naturaleza debe imponer restricciones sobre la intensidad de estos términos.

$$\Gamma_\mu^x(p^2) = ig \left(\sum_{i=1,2} \lambda_i(p^2) L_\mu^i + \sum_{i=2,3,6,8} \tau_i(p^2) T_\mu^i \right), \quad (3.2)$$

en este caso únicamente tiene dependencia de un escalar externo p^2 . La forma de las funciones de vestimiento λ_i, τ_i puede ser calculada numericamente [42] y depende de la elección de la base propuesta.

Nuestro entendimiento de las ecuaciones de Bethe-Salpeter ha permitido a los investigadores establecer que un término en especial tiene un gran impacto en el espectro hadrónico, por ejemplo, genera una interacción espín-órbita muy fuerte. Los fermiones sin masa en teorías de campos de gauge no pueden poseer un momento cromomagnético/electromagnético anómalo porque el término que lo describe acopla fermiones con helicidad izquierda y derecha. Sin embargo, si la simetría quiral se rompe fuertemente de forma dinámica, entonces los fermiones también deberían poseer grandes momentos magnéticos anómalos. Tal efecto se expresa en el vértice quark-gluón vestido a través de un término. El llamado término asociado al momento anómalo cromomagnético ACM [11].

$$\Gamma_\mu^{\text{acm}5}(q, p) = \sigma_{\mu\nu} k_\nu \tau^{\text{acm}}(q, p) \quad (3.3)$$

En las siguientes secciones mostraremos el modelo empleado para introducir este término en el kernel de la ecuación de Gap, así como sus resultados correspondientes.

SECCIÓN 3.2

Ecuaciones de Schwinger-Dyson con el término ACM

Como ya hemos visto el vértice quark-gluón $\Gamma_\mu^a(q, p)$ tiene doce términos independientes, cada uno asociado con una estructura de Dirac diferente. La mitad de los términos son únicamente diferentes de cero en el límite quiral. De los términos restantes el más importante es el término que se refiere al momento cromomagnético anómalo del quark vestido. Para ilustrar esto se expresa [12]:

$$\Gamma_\nu(q, p) = \gamma_\nu + \tau_\nu(k) \quad (3.4)$$

$$\tau_\nu(k) = \eta\kappa(k^2)\sigma_{l\nu} \quad (3.5)$$

$$\kappa(k^2) = \frac{1}{\omega}e^{-k^2/\omega^2} \quad (3.6)$$

$$\sigma_{l\nu} = \sigma_{\rho\nu}k_\rho, \quad \sigma_{\rho\nu} = -\frac{i}{2}[\gamma_\rho, \gamma_\nu] \quad (3.7)$$

Donde $\tau_\nu(k)$ es el término del ACM y η su fuerza. $\eta \in [0, 1.6]$. La forma de la función $\kappa(k^2)$ es un *Ansatz* que emula la forma del término dominante en los modelos de acoplamiento efectivo que parece ser suficiente para ilustrar la contribución del nuevo vértice. Al aplicar este modelo en las ecuaciones de Schwinger Dyson, obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones a resolver:

$$A(p^2) = Z_2 + \frac{4Z_2^2}{3p^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4\pi\alpha(k^2)}{k^2} (\sigma_\nu(q^2)) \left[p \cdot q + 2 \frac{(p \cdot k)(k \cdot q)}{k^2} \right] + 3\eta\kappa(k^2)(k \cdot p)\sigma_s(q^2), \quad (3.8)$$

$$B(p^2) = Z_2Z_m m(\mu) + \frac{4}{3}Z_2^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4\pi\alpha(k^2)}{k^2} (3\sigma_s(q^2) - 3\eta\kappa(k^2)(k \cdot q)\sigma_\nu(q^2)) \quad (3.9)$$

Debido a que la nueva interacción del vértice quark-gluón se incrementa conforme el parámetro de fuerza de interacción η debemos hacer un reescalamiento para la D que aparece en el modelo efectivo, en este caso aplicamos:

$$D(\eta) = D_{\text{RL}} \frac{1 + 0.29\eta}{1 + 1.522\eta}, \quad \eta \in [0, 1.6] \quad (3.10)$$

La metodología empleada para resolver las ecuaciones (3.8-3.9) es el mismo que en el capítulo anterior para un vértice que no toma en cuenta las contribuciones del ACM, por lo que debemos elegir un modelo efectivo de modo que conseguimos una solución numerica dependiente del parámetro de fuerza de interacción η .

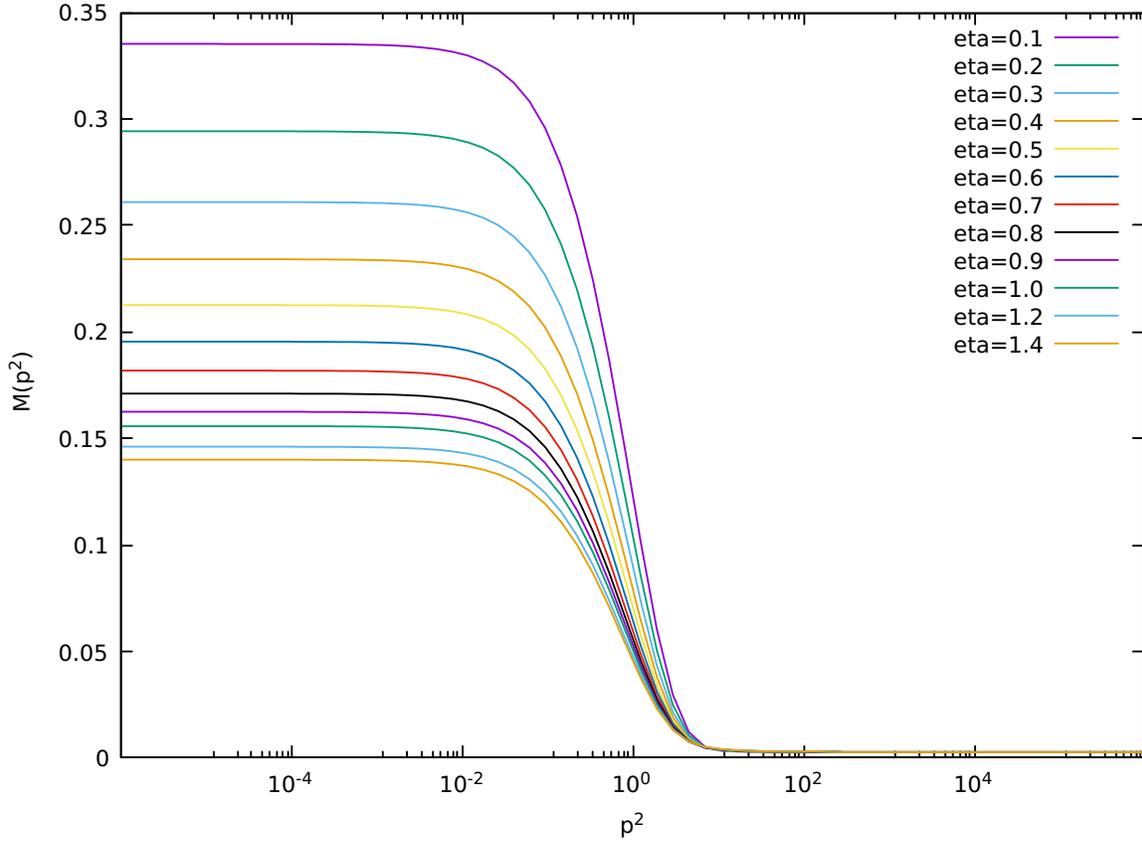


Figura 3.2: Representación de la función de masa en GeV , como solución a las ESD utilizando el modelo de Qin-Chang con parámetros $D = 1.3$, $\omega = 0.7$, para diferentes valores de η .

En la figura 3.2 se muestra una comparación de las soluciones de la función de masa para diferentes valores de η (η). Se aprecia un decremento para la función de masa conforme el valor de la interacción se vuelve mas grande, lo que sugiere que para resultados del vértice desnudo las soluciones inflan la masa corriente.

Las funciones de vestimiento $A(p^2)$ obtenidas al resolver numericamente las ecuaciones (3.8-3.9) utilizando diferentes masas corriente m_q se presentan en la figura 3.3. El modelo empleado es el de Qin-Chang con parámetros $D = 1.3$, $w = 0.7$ y $\eta = 0.05$. Se aprecia que para masas pequeñas, la función exhibe un máximo

La función de masa $M(p^2)$ se presenta en la figura 3.4 empleando distintas masas corriente como *input* en las SDE con el término ACM. Al igual que en el capítulo anterior observamos que una masa semilla de unos cuantos MeVs puede generar una masa de cientos de MeVs. También podemos apreciar que conforme aumenta la masa

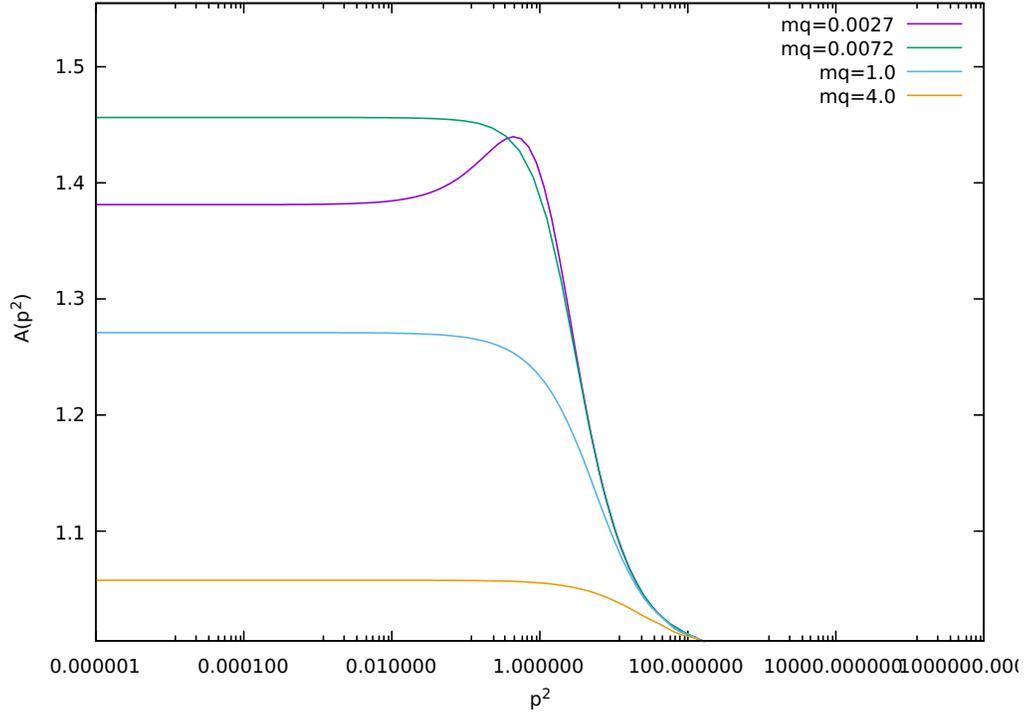


Figura 3.3: Función de vestimiento $A(p^2)$ en GeV , para diferentes masas semilla.

corriente del quark, cada vez son menos los efectos de la DCSB.

Como se explicó en el capítulo pasado es conveniente usar una parametrización de polos complejos conjugados que nos permiten extender los resultados en el eje real a todo el plano complejo, a continuación se presenta dicho ajuste comparado con los resultados numéricos en las figuras 3.5 y 3.6. Mientras que en el cuadro 3.1 se muestran los valores encontrados para la parametrización 2-CCP con la notación:

$$\sigma_v(q) = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\alpha_k}{q^2 + m_k} + \frac{\alpha_k^*}{q^2 + m_k} \right) \quad (3.11)$$

$$\sigma_s(q) = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\beta_k}{q^2 + m_k^2} + \frac{\beta_k^*}{q^2 + m_k} \right) \quad (3.12)$$

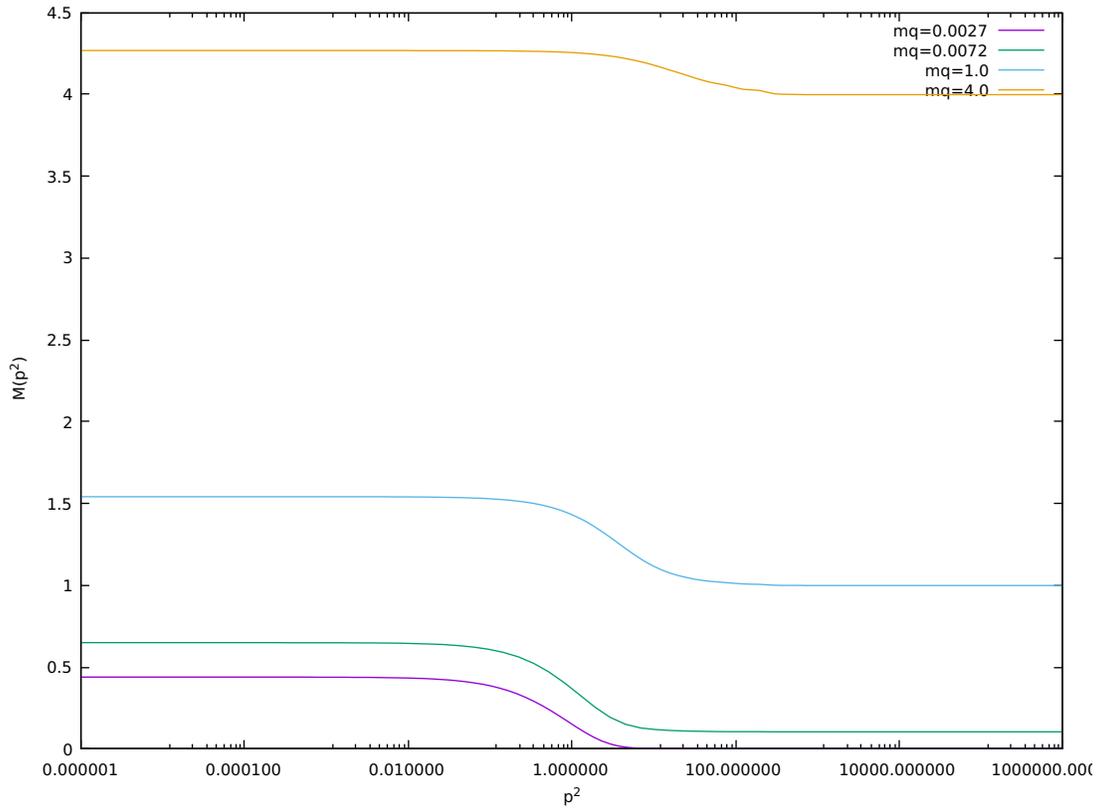


Figura 3.4: Función de vestimiento $M(p^2)$ en GeV , para diferentes valores de masa semilla del quark.

	Re	Im
m_1	0.232666	-0.249066
m_2	2.19342	-1.66892
α_1	0.252015	-0.598732
α_2	0.242497	0.0205623
β_1	-0.00119832	-0.383907
β_2	-0.0466089	-0.057165

Cuadro 3.1: Valores para la parametrización 2-CCP para una masa semilla de 3.7 MeVs

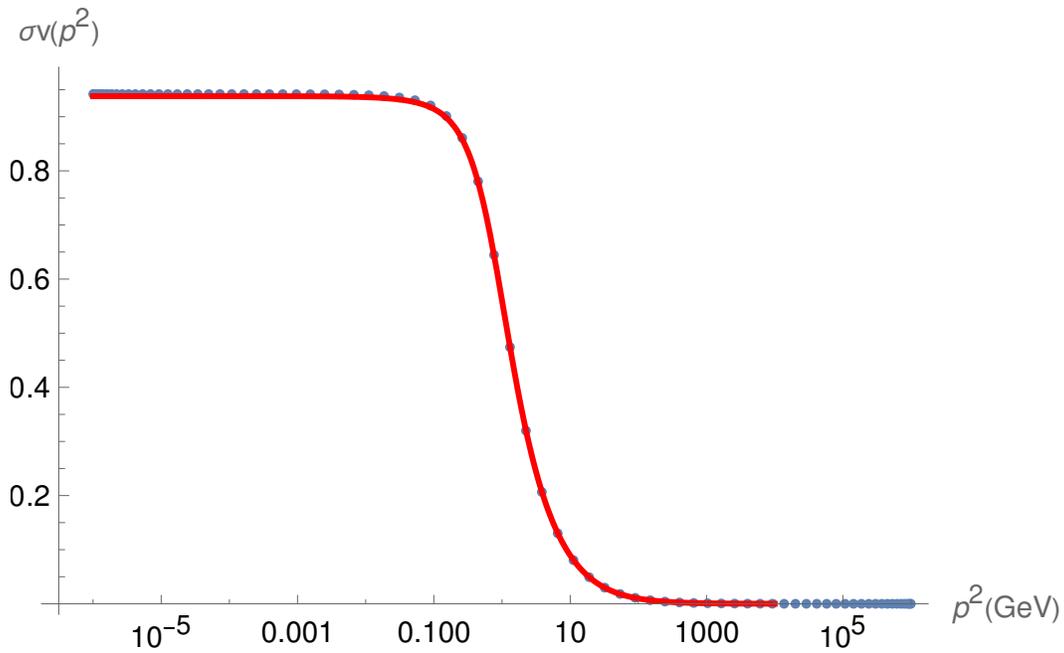


Figura 3.5: Comparación entre los resultados numéricos para la función $\sigma_v(p^2)$ (puntos azules) de las ESD y la parametrización 2CCP (línea roja) para un quark s

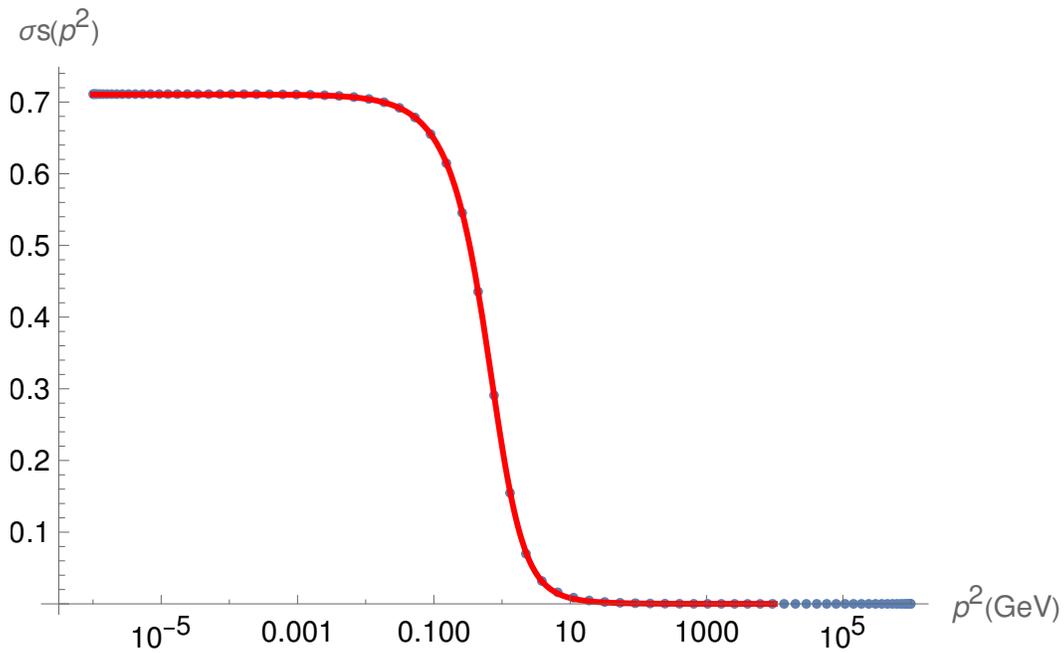


Figura 3.6: Comparación entre los resultados numéricos para la función $\sigma_s(p^2)$ (puntos azules) de las ESD y la parametrización 2CCP (línea roja) para un quark s

SECCIÓN 3.3

Ecuaciones de Bethe-Salpether con el término de ACM

De acuerdo al trabajo publicado por Si-Xue Qin y Craig D. Roberts [43], la incorporación del término correspondiente al ACM en el vértice quark-gluón tiene un impacto directo en la ecuación de Bethe-Salpeter, lo que resulta en la obtención de un nuevo kernel:

$$K^{(2)} = -G_{\mu\nu}(k^2)\gamma_\mu \otimes \gamma_\nu - G_{\mu\nu}(k^2)\gamma_\mu \otimes \tau_\nu(k^2) + G_{\mu\nu}(k^2)\tau_\nu(k^2) \otimes \gamma_\mu + K_{ad}. \quad (3.13)$$

K_{ad} tiene una restricción dada por las identidades de WGT [31]. Para construir un kernel minimal que sea consistente con la simetría, se escoge la base mas simple para K_{ad} , por lo que:

$$K_{ad} = [\mathbf{1} \otimes_+ \mathbf{1}] f_{p0}^{(+)} + [-G_{\mu\nu}\gamma_\mu \otimes_+ \gamma_\nu] f_{p1}^{(-)} \quad (3.14)$$

$$+ [\mathbf{1} \otimes_- \mathbf{1}] f_{n0}^{(+)} + [-G_{\mu\nu}(k^2)\sigma_{i\mu} \otimes_- \sigma_{i\nu}] f_{n1}^{(+)}, \quad (3.15)$$

donde $\otimes_\pm = \frac{1}{2}(\otimes \pm \gamma_5 \otimes \gamma_5)$ y $f_{pj}^\pm = \mathbf{u}_{pj}^\pm(k^2, P^2) + i\mathbf{v}_{pj}^\pm(k^2, P^2)$, $f_{nj}^{(+)} = \mathbf{u}_{nj}^{(+)}(k^2, P^2)$, $j = 0, 1$ con $\mathbf{u}(k^2, P^2)$, $\mathbf{v}(k^2, P^2) \in \mathbb{R}$ para $\{k^2, P^2\} \in \mathbb{R}$. Las funciones "f" son funciones de vestimiento que cumplen con ciertas relaciones que también son resultado de las identidades de WGT, a continuación se presentan.

3.3.1 Funciones de vestimiento

De acuerdo a [43] las funciones de vestimiento cumplen con el sistema de ecuaciones:

$$\int_{dq} G_{\mu\nu}(k)\gamma_\mu\sigma_A(q_+)\tau_\nu(k) = \int_{dq} \left[\sigma_B(q_+)f_{p0}^{(+)} + G_{\mu\nu}(k)\gamma_\mu\sigma_B(q_-)\gamma_\nu f_{p1}^{(-)} \right], \quad (3.16)$$

$$\int_{dq} G_{\mu\nu}(k)\gamma_\mu\sigma_B(q_+)\tau_\nu(k) = \int_{dq} \left[\sigma_A(q_+)f_{n0}^{(+)} + G_{\mu\nu}(k)\sigma_{k\mu}\sigma_A(q_+)\sigma_{k\nu}f_{n1}^{(-)} \right], \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

donde $q_+ = q + \frac{P}{2}$, $q_- = q - \frac{P}{2}$, hemos omitido la dependencia de P y k^2 .

Este par de ecuaciones integrales con valores complejos genera cuatro ecuaciones con valores reales, las cuales pueden resolverse para determinar las funciones escalares, las cuales determinan K_{ad} y a su vez $K^{(2)}$.

El procedimiento realizado funciona para un vértice arbitrario, y se llega a un kernel de la BSE que satisface todas las simetrías necesarias y asociadas para generar el espectro discreto y continuo.

Para simplificar los cálculos, elegimos la dirección del momento en la dirección del tiempo:

$$P = (0, 0, 0, iM).$$

Tomando las trazas obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\int_{dq} -12\alpha(k^2)\eta\kappa(k^2)\sigma_A(q_+)k \cdot q_+ = \int_{dq} \left[4\sigma_B(q_+)f_{p_0}^{(+)} + 12\sigma_B(q_-)f_{p_1}^{(-)}\alpha(k^2) \right] \quad (3.19)$$

Tenemos el cuatro-vector q^μ en coordenadas hiperesféricas:

$$q^\mu = \sqrt{q^2}(\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-y^2}\sin\phi, \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-y^2}\cos\phi, \sqrt{1-z^2}y, z), \quad (3.20)$$

de manera que la integración sobre el momento es:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2}{(2\pi)^4} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} \int_{-1}^1 dy \int_0^{2\pi} d\phi, \quad (3.21)$$

Si elegimos la dirección de k^μ en el cuarto eje:

$$k^\mu = \sqrt{k^2}(0, 0, 0, 1). \quad (3.22)$$

Tenemos que los integrandos son independientes de ϕ y de "y", por lo tanto

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} = \int_0^\infty 2q dq \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} \quad (3.23)$$

el producto escalar:

$$k \cdot q_+ = kqz + i\frac{Mk}{2}.$$

La primera ecuación explícitamente es:

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty dq \frac{q^3}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} 12\alpha(k^2)\eta\kappa(k^2)\sigma_A(q_+) \left[kqz + i\frac{Mk}{2} \right] = \\ & \int_0^\infty dq \frac{q^3}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} \left[4\sigma_B(q_+)f_{p_0}^{(+)} + 12\sigma_B(q_-)f_{p_1}^{(-)}\alpha(k^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como primer aproximación para resolver estas ecuaciones nos enfocaremos en encontrar la función $f_{p_0}^{(+)}$, por lo que despreciaremos la función $f_{p_1}^{(-)}$, por lo tanto la ecuación (3.24) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty dq \frac{q^3}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} 12\alpha(k^2)\eta\kappa(k^2)\sigma_A(q_+) \left[kqz + i\frac{Mk}{2} \right] = \\ & \int_0^\infty dq \frac{q^3}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 dz \sqrt{1-z^2} 4\sigma_B(q_+)f_{p_0}^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

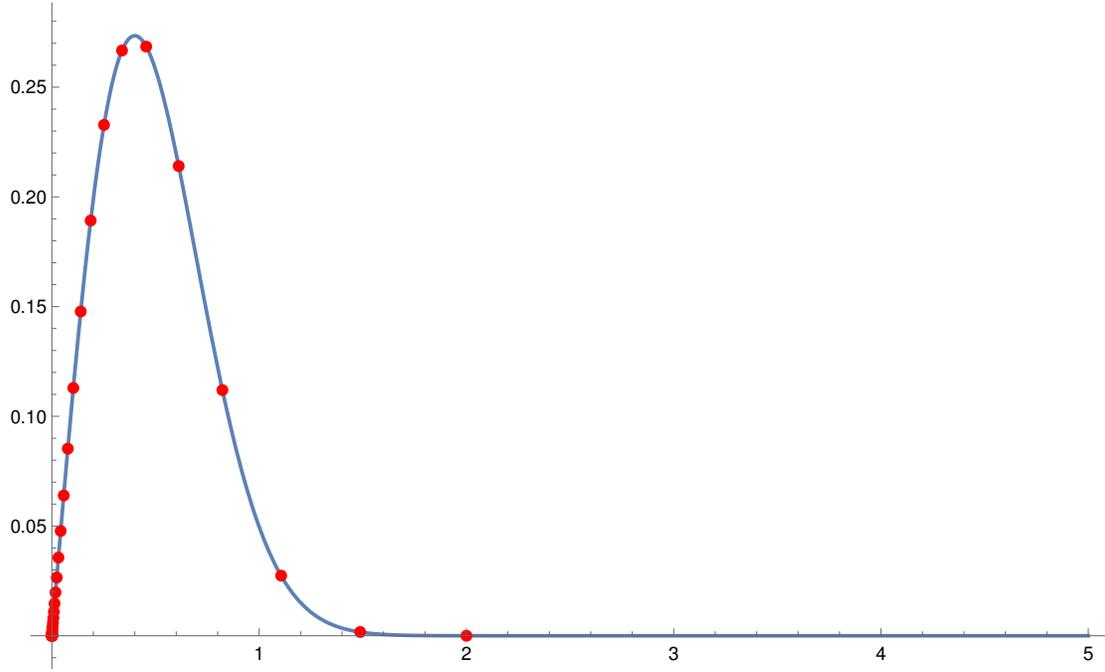


Figura 3.7: Solución exacta para la función de vestimiento $f_{p0}^{(+)}$ en un dominio discreto (puntos rojos) y el ajuste polinómico exponencial se muestra en línea continua azul.

Como la ecuación (3.25) es una ecuación integral, y la función $f_{p0}^{(+)}$ tiene dependencia en k^2 , bastaría con resolver las integrales y despejar para $f_{p0}^{(+)}$, sin embargo únicamente tendremos la representación gráfica de la función en un dominio discreto y no su forma exacta, por lo cual proponemos que la función tenga una forma polinómica exponencial:

$$f_{p0}^{(+)}(k^2) = a_0 \exp(-bk^2) + a_1 k \exp(-bk^2) + a_2 k^2 \exp(-bk^2), \quad (3.26)$$

donde a_0, a_1, a_2 son constantes a fijar. Una vez resuelta la ecuación (3.25), hacemos el ajuste correspondiente para encontrar los parámetros y obtenemos; $a_0 = 0.00559198$, $a_1 = -1.99438$, $a_2 = 30.5724$, $b = 9.56014$. En la figura (3.7) se muestra la comparación entre el ajuste y la solución exacta. Debido a que la función $f_{p0}^{(+)}$ tiene una contribución principalmente en la parte infrarroja, se hace un grid logarítmico para tomar una mayor cantidad de puntos en el régimen de bajas energías.

Con esto podemos resolver las EBS con ACM en una aproximación de términos dominantes, donde el kernel respeta la identidad axial de WGT:

$$K_{\text{acm}} = -G_{\mu\nu}(k^2)\gamma_\mu \otimes \gamma_\nu - G_{\mu\nu}(k^2)\gamma_\mu \otimes \tau_\nu(k^2) \quad (3.27)$$

$$+G_{\mu\nu}(k^2)\tau_\nu(k^2) \otimes \gamma_\mu + [\mathbf{1} \otimes_+ \mathbf{1}] f_{p0}^{(+)}. \quad (3.28)$$

En la siguiente sección mostraremos los resultados de este nuevo kernel en la BSE y las SDE con el término de ACM.

SECCIÓN 3.4

Impacto del ACM en el espectro de los mesones

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson están determinadas por tres parámetros, la fuerza de interacción D , el rango w y la fuerza del ACM η . Hemos elegido los parámetros que se ajustan mejor al reproducir los estados base del pión y el kaón, esto siguiendo la simplificación del modelo de acoplamiento efectivo propuesta en [12] que descarta términos perturbativos.

	QC-inf (ACM)	Exp	QC
m_π	0.137 GeV	0.139 GeV	0.139 GeV
f_π	0.138 GeV	0.130 GeV	0.130 GeV
m_k	0.495 GeV	0.494 GeV	0.495 GeV
f_k	0.154 GeV	0.155 GeV	0.155 GeV
$m_{\pi_{1300}}$	1.280 GeV	1.300 GeV	0.950 GeV
$m_{K_{1460}}$	1.410 GeV	1.460 GeV	0.920 GeV

Cuadro 3.2: Constantes para los mesones π y k , usando el modelo QC solamente la parte infrarroja, con $w = 0.7$, $D = 1.3$ y $\eta = 0.05$

La variación entre nuestros resultados y los experimentales para el primer estado excitado del pión es de un 1.5% mientras que para el primer estado excitado del kaón consiste en un 3.4%. Lo que nos indica que las modificaciones que aparecen al incluir los términos relacionados al momento anómalo cromomagnético están en la dirección correcta para poder describir de una mejor manera a los mesones y sus excitaciones.

En la figura 3.8 se muestran las amplitudes de Bethe-Salpeter para el pión con los nuevos términos relacionados al ACM. Observamos un comportamiento análogo al que se obtiene con la aproximación RL. La primera amplitud es la dominante y es la encargada de generar la mayor fracción de la masa.

En la siguiente sección mostraremos una solución empleando un modelo con correcciones perturbativas.

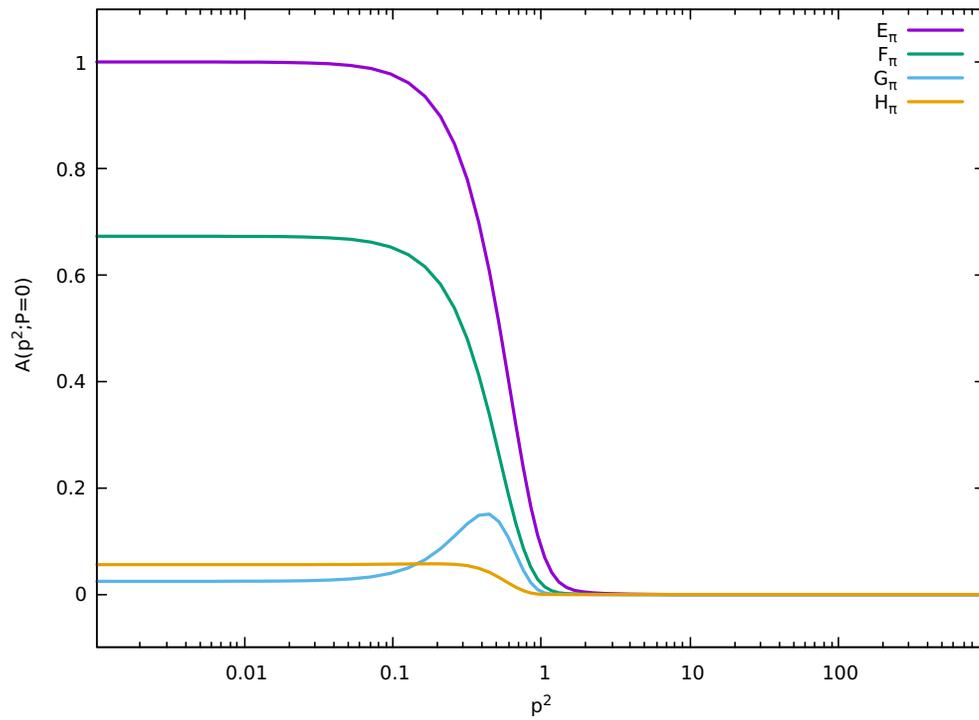


Figura 3.8: Amplitudes de Bethe-Salpether

SECCIÓN 3.5

Modelo de Maris-Tandy parte perturbativa

Enfoques previamente utilizados como los que se presentaron en [12, 38] utilizan modelos efectivos descartando la parte perturbativa, esto debido a que se sabe que incluso un tratamiento que preserve la simetría de una interacción independiente del momento puede proporcionar buenos resultados [44]. Por lo que toman la simplificación de descartar elementos perturbativos.

Nosotros hemos intentado emplear un modelo de acoplamiento efectivo que considere las correcciones perturbativas, para este propósito probamos con el modelo de Maris-Tandy (2.5), sin embargo nos encontramos con que los parámetros utilizados anteriormente para únicamente el modelo con parte infrarroja no aseguraban resultados físicos. Por lo que intentamos mover dichos parámetros sin éxito alguno.

El siguiente intento consiste en cambiar el punto de renormalización, lo que nos permite ajustar los parámetros, en especial w que representa el rango de interacción. Sin embargo nuestros intentos, no logran describir con éxito el primer estado excitado del kaón, veamos los resultados para $\mu = 4$ GeV.

	MT (ACM)	Exp
m_π	0.138 GeV	0.139 GeV
f_π	0.131 GeV	0.130 GeV
m_k	0.495 GeV	0.493 GeV
f_k	0.155 GeV	0.155 GeV
$m_{\pi_{1300}}$	1.305 GeV	1.300 GeV
$m_{K_{1460}}$	1.320 GeV	1.460 GeV

Cuadro 3.3: Constantes para los mesones π y k , usando el modelo de MT completo con $w = 0.6$, $D = 1.3$ y $\eta = 0.05$

Los resultados para la parametrización de la función $f_{p0}^{(+)}$ en este caso son; $a_0 = 0.00306154$, $a_1 = -0.882262$, $a_2 = 10.9715$, $b = 6.11425$, recordemos que dicha función es la de orden superior en el kernel que denominamos K_{ad} y que garantiza que las identidades de WGT se conserven.

Como podemos observar en el cuadro 3.3 los resultados se ajustan bien a los cálculos experimentales del estado excitado del pión, el problema reside en el estado excitado del kaón que tiene una diferencia respecto a los resultados experimentales de un 9.5%. Lo que nos indica que el modelo teórico empleado tiene deficiencias, que pueden consistir en

que no se está usando el rango de interacción correcto que permita observar los efectos del ACM en la generación de masas de los mesones.

Esperamos que, en el futuro, estos resultados puedan mejorarse utilizando un punto de renormalización diferente, en conjunto con un grupo de parámetros que facilite acercarnos al rango de interacción donde los efectos del ACM sean lo más nítidos posible.

Capítulo 4

Conclusiones y comentarios finales

En la primera parte de esta tesis se presentan algunos aspectos teóricos fundamentales para comprender la Cromodinámica Cuántica y desarrollar un estudio sobre la generación de masa hadrónica. En particular, se aborda en detalle el rompimiento de la simetría quiral, así como la relación entre el momento cromomagnético anómalo (ACM) y su impacto en las masas de los mesones.

En la segunda parte, se exponen soluciones numéricas a las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE) y a las ecuaciones de Bethe-Salpeter (BSE) en la aproximación Rainbow-Ladder, empleando modelos de acoplamiento efectivo como los de Maris-Tandy y Qin-Chang. Si bien estos cálculos han sido realizados por diversos autores en trabajos previos, nuestra intención fue validar el correcto funcionamiento de nuestros códigos y algoritmos, comparando los resultados obtenidos con datos experimentales y con predicciones teóricas previas.

En la tercera parte, se incorpora el ACM en el vértice quark-gluón dentro del marco de las SDE y BSE. Se presentan las ecuaciones modificadas de Schwinger-Dyson y sus soluciones bajo diferentes parámetros para la fuerza de interacción del ACM. Posteriormente, se introduce una corrección al kernel de interacción de las BSE, garantizando el cumplimiento de las identidades de Ward-Green-Takahashi mediante la metodología descrita en [43]. Para ello, se empleó un Ansatz polinómico-exponencial para la función de vestimiente $f_{p0}^{(+)}$, el cual se adapta eficazmente a las ecuaciones de restricción derivadas de dichas identidades.

Nuestro principal interés radica en el cálculo de masas y constantes de decaimiento. Debido a los parámetros libres del modelo de acoplamiento, es posible ajustar la masa del estado fundamental del pión y del kaón, mientras que sus estados excitados son una predicción directa de las ecuaciones. Este trabajo se diferencia de estudios previos porque, en la literatura, el procedimiento empleado para determinar las masas de los mesones ha sido la extrapolación de valores propios. En dicho enfoque, para los sistemas más pesados, se calcula $\lambda_n(P^2)$ en un dominio de P^2 que no se ve afectado por los polos del propagador y luego se extrapola en P^2 para localizar el cero de $[1 - \lambda_n(P^2)]$. Este método proporciona una estimación de la masa del mesón con su correspondiente incertidumbre, pero no permite acceder directamente a la amplitud de Bethe-Salpeter asociada. En contraste, en este trabajo logramos determinar el valor exacto de la masa resolviendo las ecuaciones en el plano complejo.

A través del análisis de la literatura científica, identificamos que el ACM desempeña un papel crucial cuando ocurre el rompimiento dinámico de la simetría quiral. En particular, se observa que el ACM adquiere valores considerablemente grandes, lo cual no fue tomado en cuenta en estudios previos al aproximar el vértice quark-gluón.

Nuestro análisis del impacto del momento cromomagnético anómalo indica que su inclusión es esencial para la descripción precisa de los estados excitados. Aunque en estudios anteriores su omisión no afectaba significativamente los estados fundamentales (pues estos podían ajustarse manualmente mediante los parámetros libres del modelo de acoplamiento efectivo), dicha omisión generaba discrepancias entre los resultados teóricos y los valores experimentales para los estados excitados. En este trabajo, al incluir el ACM, obtenemos para el primer estado excitado del pión una masa de 1280 MeV, lo que representa una diferencia del 1.5 % respecto al valor experimental. Para el primer estado excitado del kaón, obtenemos 1410 MeV, con una variación del 3.5 % en comparación con los datos experimentales.

Esperamos que los resultados presentados en este trabajo sean de utilidad para futuros estudios enfocados en la obtención de los factores de forma del kaón. En particular, el marco teórico y numérico desarrollado aquí podría servir como base para calcular con mayor precisión estas magnitudes en investigaciones posteriores.



Convención euclidiana

De acuerdo a los cálculos de QCD no perturbativa utilizamos la métrica euclidiana:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

el producto escalar entre vectores es entonces:

$$a \cdot b = a_\mu \delta_{\mu\nu} b_\nu$$

A partir de los tetra vectores en el espacio de Minkowski se puede obtener el espacio euclidiano mediante la continuación analítica al tiempo imaginario. Para transformar los vectores espacio-tiempo y energía-momento tenemos:

$$t^E = it^M \quad \vec{x}^E = \vec{x}^M \tag{A.1}$$

$$\epsilon^E = i\epsilon^M \quad \vec{p}^E = \vec{p}^M \tag{A.2}$$

Los índices E y M denotan Euclidiano y Minkowski respectivamente. Las matrices gamma son de la forma:

$$\gamma^{0E} = \gamma^{0M} \tag{A.3}$$

$$\vec{\gamma}^E = -i\vec{\gamma}^M \tag{A.4}$$

Tambien se tienen las siguientes relaciones:

$$\int d^4k^M = -i \int d^4k^E \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma^M \cdot p^M = -i\gamma^E \cdot p^E \quad (\text{A.6})$$

$$q^M \cdot p^M = -iq^E \cdot p^E \quad (\text{A.7})$$

$$x^M \cdot p^M = -x^E \cdot p^E \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_{\rho\nu} = -\frac{i}{2} [\gamma_\rho, \gamma_\nu] \quad (\text{A.9})$$

B

Matrices gamma

Las matrices gamma $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$, o matrices de Dirac, se definen mediante la relación de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I \quad (\text{B.1})$$

donde I es la matriz identidad de $d \times d$ y $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico (para la métrica euclidiana $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$).

En 4 dimensiones ($d = 4$) podemos definir $\gamma^5 \equiv \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ Que cumple con las propiedades:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (\text{B.2})$$

$$(\gamma^5)^2 = I \quad (\text{B.3})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0 \quad (\text{B.4})$$

Otras propiedades que cumplen estas matrices son:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4I \quad (\text{B.5})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\delta^{\nu\rho} I \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \quad (\text{B.8})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = \delta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \delta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \delta^{\mu\rho} \gamma^\nu - i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_\sigma \gamma^5 \quad (\text{B.9})$$

C

Trazas

Propiedades de la traza:

$$\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B] \quad (\text{C.1})$$

$$\text{Tr}[rA] = r \text{Tr}[A] \quad (\text{C.2})$$

$$\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[BCA] = \text{Tr}[CAB] \quad (\text{C.3})$$

Las matrices gamma cumplen con las siguientes propiedades de traza:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\text{Tr}[\text{No. impar de } \gamma' \text{s}] = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\delta^{\mu\nu} \quad (\text{C.6})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(\delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} - \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} - \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}) \quad (\text{C.7})$$

$$\text{Tr}[\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta}] = 4(\delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha}) \quad (\text{C.8})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (\text{C.10})$$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = \text{Tr}[\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}] \quad (\text{C.11})$$

$$\epsilon^{1234} = 1 \quad (\text{C.12})$$

D

Notación slash de Feynman

La notación slash de Feynman está definida por:

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu \quad (\text{D.1})$$

Para cualquier tetravector a se cumplen las identidades:

$$\not{a}\not{b} = a \cdot b - ia_\mu \sigma^{\mu\nu} b_\nu \quad (\text{D.2})$$

$$\not{a}\not{a} = a^\mu a^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} a^\mu a^\nu (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = \delta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a^2 \quad (\text{D.3})$$

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}] = 4(a \cdot b) \quad (\text{D.4})$$

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)] \quad (\text{D.5})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma \quad (\text{D.6})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a} \quad (\text{D.7})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4(a \cdot b) \quad (\text{D.8})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{b} \not{c} \not{a} \quad (\text{D.9})$$

REFERENCIAS

- [1] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, Oct 1964.
- [2] S. J. Brodsky et al. Strong QCD from Hadron Structure Experiments: Newport News, VA, USA, November 4-8, 2019. *Int. J. Mod. Phys. E*, 29(08):2030006, 2020.
- [3] Pieter Maris, Craig D. Roberts, and Peter C. Tandy. Pion mass and decay constant. *Physics Letters B*, 420(3):267–273, 1998.
- [4] G. Bellini, M. di Corato, F. Palombo, J. Pernegr, A. Sala, S. Sala, G. Vegni, P. L. Frabetti, Yu. I. Ivanshin, L. K. Litkin, S. I. Sychkov, A. A. Tyapkin, I. M. Vassilevski, V. V. Vishniakov, and O. A. Zaimidoroga. Evidence for new $0^- s$ resonances in the $\pi^+\pi^-\pi^-$ systems. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1697–1700, Jun 1982.
- [5] Ekaterina V. Mastropas and David G. Richards. Decay constants of the pion and its excitations on the lattice. *Phys. Rev. D*, 90:014511, Jul 2014.
- [6] C. McNeile and C. Michael. Decay width of light quark hybrid meson from the lattice. *Phys. Rev. D*, 73:074506, Apr 2006.
- [7] Chenyang Wei. Cauchy theorem and cauchy residue theorem. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 72:921–925, 12 2023.
- [8] Gastao Krein. Leptonic decay constants of the pion and its excitations in holographic QCD. *J. Phys. Conf. Ser.*, 706(4):042004, 2016.
- [9] Purabi Ghosh, Jajati K. Nayak, Sushant K. Singh, and Santosh K. Agarwalla. Microscopic study of strange hadron production at the lhc with $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. *Phys. Rev. D*, 101:094004, May 2020.
- [10] G. Paredes-Torres, L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, and Ángel S. Miramontes. First radial excitations of mesons and diquarks in a contact interaction. *Phys. Rev. D*, 109(11):114006, 2024.

-
- [11] Lei Chang, Yu-Xin Liu, and Craig D. Roberts. Dressed-quark anomalous magnetic moments. *Phys. Rev. Lett.*, 106:072001, Feb 2011.
- [12] Zhen-Ni Xu, Zhao-Qian Yao, Si-Xue Qin, Zhu-Fang Cui, and Craig D. Roberts. Bethe–salpeter kernel and properties of strange-quark mesons. *The European Physical Journal A*, 59(3), March 2023.
- [13] F. Halzen and A.D. Martin. *QUARK & LEPTONS: An Introductory Course In Modern Particle Physics*. Wiley student edition. Wiley India Pvt. Limited, 2008.
- [14] K. Stam. DYNAMICAL CHIRAL SYMMETRY BREAKING. *Phys. Lett. B*, 152:238–240, 1985.
- [15] Murray Gell-Mann. The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry. 3 1961.
- [16] David J. Gross and Frank Wilczek. Asymptotically free gauge theories. i. *Phys. Rev. D*, 8:3633–3652, Nov 1973.
- [17] W. A. Zajc. The Fluid Nature of Quark-Gluon Plasma. *Nucl. Phys. A*, 805:283–294, 2008.
- [18] Julian Schwinger. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, Feb 1948.
- [19] D. P. Aguillard, T. Albahri, D. Allspach, A. Anisenkov, K. Badgley, S. Baeßler, I. Bailey, L. Bailey, V. A. Baranov, E. Barlas-Yucel, T. Barrett, E. Barzi, F. Bedeschi, M. Berz, M. Bhattacharya, H. P. Binney, P. Bloom, J. Bono, E. Bottalico, T. Bowcock, S. Braun, M. Bressler, G. Cantatore, R. M. Carey, B. C. K. Casey, D. Cauz, R. Chakraborty, A. Chapelain, S. Chappa, S. Charity, C. Chen, M. Cheng, R. Chislett, Z. Chu, T. E. Chupp, C. Claessens, M. E. Convery, S. Corrodi, L. Cotrozzi, J. D. Crnkovic, S. Dabagov, P. T. Debevec, S. Di Falco, G. Di Sciascio, S. Donati, B. Drendel, A. Driutti, V. N. Duginov, M. Eads, A. Edmonds, J. Esquivel, M. Farooq, R. Fatemi, C. Ferrari, M. Fertl, A. T. Fienberg, A. Fioretti, D. Flay, S. B. Foster, H. Friedsam, N. S. Froemming, C. Gabbanini, I. Gaines, M. D. Galati, S. Ganguly, A. Garcia, J. George, L. K. Gibbons, A. Gioiosa, K. L. Giovanetti, P. Girotti, W. Gohn, L. Goodenough, T. Gorringer, J. Grange, S. Grant, F. Gray, S. Haciomeroglu, T. Halewood-Leagas, D. Hampai, F. Han, J. Hempstead, D. W. Hertzog, G. Hesketh, E. Hess, A. Hibbert, Z. Hodge, K. W. Hong, R. Hong, T. Hu, Y. Hu, M. Iacovacci, M. Incagli, P. Kammel, M. Kargiantoulakis, M. Karuza, J. Kaspar, D. Kawall, L. Kelton, A. Keshavarzi, D. S. Kessler, K. S. Khaw, Z. Khechadorian, N. V. Khomutov, B. Kiburg, M. Kiburg, O. Kim, N. Kinnaird, E. Kraegelo, V. A. Krylov, N. A. Kuchinskiy, K. R. Labe, J. LaBounty, M. Lancaster, S. Lee, B. Li, D. Li, L. Li, I. Logashenko, A. Lorente Campos, Z. Lu, A. Lucà, G. Lukicov, A. Lusiani, A. L. Lyon, B. MacCoy, R. Madrak, K. Makino, S. Mastroianni, J. P. Miller, S. Miozzi, B. Mitra, J. P. Morgan, W. M. Morse, J. Mott,

-
- A. Nath, J. K. Ng, H. Nguyen, Y. Oksuzian, Z. Omarov, R. Osofsky, S. Park, G. Pauletta, G. M. Piacentino, R. N. Pilato, K. T. Pitts, B. Plaster, D. Počanić, N. Pohlman, C. C. Polly, J. Price, B. Quinn, M. U. H. Qureshi, S. Ramachandran, E. Ramberg, R. Reimann, B. L. Roberts, D. L. Rubin, M. Sakurai, L. Santi, C. Schlesier, A. Schreckenberger, Y. K. Semertzidis, D. Shemyakin, M. Sorbara, J. Stapleton, D. Still, D. Stöckinger, C. Stoughton, D. Stratakis, H. E. Swanson, G. Sweetmore, D. A. Sweigart, M. J. Syphers, D. A. Tarazona, T. Teubner, A. E. Tewsley-Booth, V. Tishchenko, N. H. Tran, W. Turner, E. Valetov, D. Vasilkova, G. Venanzoni, V. P. Volnykh, T. Walton, A. Weisskopf, L. Welty-Rieger, P. Winter, Y. Wu, B. Yu, M. Yucel, Y. Zeng, and C. Zhang. Detailed report on the measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.20 ppm. *Phys. Rev. D*, 110:032009, Aug 2024.
- [20] Janardan P. Singh. Anomalous magnetic moment of light quarks and dynamical symmetry breaking. *Phys. Rev. D*, 31:1097–1108, Mar 1985.
- [21] A. Bashir, R. Bermudez, L. Chang, and C. D. Roberts. Dynamical chiral symmetry breaking and the fermion–gauge-boson vertex. *Phys. Rev. C*, 85:045205, Apr 2012.
- [22] Ayşe Kızılersü, Orlando Oliveira, Paulo J. Silva, Jon-Ivar Skullerud, and André Sternbeck. Quark-gluon vertex from $N_f=2$ lattice QCD. *Phys. Rev. D*, 103(11):114515, 2021.
- [23] Lei Chang and Craig D. Roberts. Tracing masses of ground-state light-quark mesons. *Physical Review C*, 85:052201, 2011.
- [24] F. J. Dyson. The s matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 75:1736–1755, Jun 1949.
- [25] Pieter Maris and Peter C. Tandy. Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants. *Phys. Rev. C*, 60:055214, 1999.
- [26] Si-xue Qin, Lei Chang, Yu-xin Liu, Craig D. Roberts, and David J. Wilson. Interaction model for the gap equation. *Phys. Rev. C*, 84:042202, 2011.
- [27] Craig Roberts, David Richards, Tanja Horn, and Lei Chang. Insights into the emergence of mass from studies of pion and kaon structure. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 120:103883, 05 2021.
- [28] R.L. Workman et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 2022:083C01, 2022.
- [29] William F. Donoghue. *The Cauchy Interpolation Problem*, pages 100–116. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1974.
- [30] E. Rojas, B. El-Bennich, and J. P. B. C. de Melo. Exciting flavored bound states. *Phys. Rev. D*, 90:074025, Oct 2014.

-
- [31] H. S. Green. A Pre-renormalized quantum electrodynamics. *Proc. Phys. Soc. A*, 66:873–880, 1953.
- [32] John Clive Ward. An Identity in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 78:182, 1950.
- [33] Y. Takahashi. On the generalized Ward identity. *Nuovo Cim.*, 6:371, 1957.
- [34] Helios Sanchis-Alepuz and Richard Williams. Recent developments in bound-state calculations using the Dyson–Schwinger and Bethe–Salpeter equations. *Comput. Phys. Commun.*, 232:1–21, 2018.
- [35] Kephani Raya. *Estructura partónica de los Mesones Pseudoescalares Neutros*. PhD thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2017.
- [36] Pankaj Jain and Herman J. Munczek. $q\bar{q}$ bound states in the bethe-salpeter formalism. *Phys. Rev. D*, 48:5403–5411, Dec 1993.
- [37] Tanja Horn and Craig Roberts. The pion: An enigma within the standard model. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 43, 02 2016.
- [38] Si-Xue Qin, Craig Roberts, and Sebastian Schmidt. Ward-green-takahashi identities and the axial-vector vertex. *Physics Letters B*, 733, 02 2014.
- [39] Daniele Binosi, Lei Chang, Joannis Papavassiliou, Si-Xue Qin, and Craig D. Roberts. Natural constraints on the gluon-quark vertex. *Phys. Rev. D*, 95:031501, Feb 2017.
- [40] Si xue Qin, Lei Chang, Yu xin Liu, Craig D. Roberts, and Sebastian M. Schmidt. Practical corollaries of transverse ward–green–takahashi identities. *Physics Letters B*, 722(4):384–388, 2013.
- [41] Bruno El-Bennich, Fernando Serna, Roberto Correa da Silveira, Luis Albino Fernández Rangel, Adnan Bashir, and Eduardo Rojas. Dressed quark-gluon vertex form factors from gauge symmetry. *Suplemento de la Revista Mexicana de Física*, 3(3):0308092 1–6, Jul. 2022.
- [42] Reinhard Alkofer, Christian S. Fischer, Felipe J. Llanes-Estrada, and Kai Schwenzer. The Quark-gluon vertex in Landau gauge QCD: Its role in dynamical chiral symmetry breaking and quark confinement. *Annals Phys.*, 324:106–172, 2009.
- [43] Si-Xue Qin and Craig D. Roberts. Resolving the Bethe–Salpeter Kernel. *Chin. Phys. Lett.*, 38(7):071201, 2021.
- [44] L. X. Gutiérrez-Guerrero, G. Paredes-Torres, and A. Bashir. Mesons and baryons: Parity partners. *Phys. Rev. D*, 104:094013, Nov 2021.

-
- [45] H. J. Munczek and A. M. Nemirovsky. Ground-state $q\bar{q}$ mass spectrum in quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, 28:181–186, Jul 1983.
- [46] A. Hauck, L. von Smekal, and R. Alkofer. Solving the gluon dyson—schwinger equation in the mandelstam approximation. *Computer Physics Communications*, 112(2):149–165, 1998.
- [47] Herman J. Munczek and Douglas W. McKay. Schwinger-dyson equation in qcd: Comparison of some approximations. *Phys. Rev. D*, 42:3548–3553, Nov 1990.
- [48] A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D*, 78:025010, 2008.
- [49] M.R. Frank and C. D. Roberts. Model gluon propagator and pion ρ –meson observables. *Phys. Rev. C*, 53, Dec 1996.
- [50] Pieter Maris and Craig D. Roberts. π - and k -meson bethe-salpeter amplitudes. *Phys. Rev. C*, 56:3369–3383, Dec 1997.
- [51] Kenneth G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, 10:2445–2459, Oct 1974.
- [52] Kephani Raya. Quarks, piones y ecuaciones de Schwinger-Dyson. Tesis de maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2013.
- [53] S. L. Glashow and Steven Weinberg. Breaking chiral symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 20:224–227, Jan 1968.
- [54] Gustavo Paredes. Ecuacion de gap para quarks: Soluciones e implicaciones. Tesis de licenciatura, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2019.
- [55] Nicholas A. Souchlas. *Quark Dynamics and Constituent Masses in Heavy Quark Systems*. PhD thesis, Kent State University, 2009.
- [56] P. A. M. Dirac. Forms of relativistic dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 21:392–399, Jul 1949.
- [57] H. Latal and W. Schweiger. *Methods of Quantization: Lectures Held at the 39. Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik, Schladming, Austria*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [58] Ishita Dutta Choudhury and Amitabha Lahiri. Anomalous chromomagnetic moment of quarks. *Modern Physics Letters A*, 30(23):1550113, 2015.
- [59] Minghui Ding, Craig D. Roberts, and Sebastian M. Schmidt. Emergence of Hadron Mass and Structure. *Particles*, 6(1):57–120, 2023.

- [60] Angel Miramontes, K. Raya, Adnan Bashir, P. Roig, and Gustavo Torres. Radially excited pion: electromagnetic form factor and the box contribution to the muon's $g - 2$. 112024.
- [61] Denis Parganlija and Francesco Giacosa. The $f_0(1790)$ and $a_0(1950)$ resonances as excited $\bar{q}q$ states in the extended linear sigma model. *Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement*, 10, 09 2017.

Alfonso Aldair Lopez Calderon

Momento Cromomagnético anómalo de los Quarks Implicaciones para la Física Hadrónica.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid::3117:431879104

Fecha de entrega

19 feb 2025, 1:35 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

19 feb 2025, 1:40 p.m. GMT-6

Nombre de archivo

Momento Cromomagnético anómalo de los Quarks Implicaciones para la Física Hadrónica.pdf

Tamaño de archivo

743.9 KB

67 Páginas

14,989 Palabras

72,562 Caracteres

19% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 19%  Fuentes de Internet
- 13%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
205 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias en el Área de Física	
Título del trabajo	Momento Cromomagnético Anómalo de los Quarks-Implicaciones para la Física Hadrónica	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Alfonso Aldair Lopez Calderon	1717684j@umich.mx
Director	Juan Carlos Arteaga Velazquez	juan.arteaga@umich.mx
Codirector	Adnan Bashir	adnan.bashir@umich.mx
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	mae.ciencias.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	Sí	Uso para corregir errores de redacción y de ortografía
Traducción al español	Sí	Traducción de textos científicos
Traducción a otra lengua	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Revisión y corrección de estilo	Sí	Corrección de ortografía
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Alfonso Aldair Lopez Calderon
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán 17 de febrero de 2025