



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Diagrama de fases de QCD desde el
modelo de NJL incluyendo efectos de
apantallamiento a densidades altas y
bajas temperaturas**

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestro en ciencias en el área de física

PRESENTA:

Alejandro Rosas Díaz

ASESOR:

Dr. Alfredo Raya Montaña

Coasesor:

Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo



Morelia, Michoacán, México.

Marzo 2025

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres y a mi hermana por apoyarme todos los días. A mi asesor Dr. Alfredo Raya por dedicarme su tiempo para emprender este proyecto y a mi coasesor Dr. Carlos Vaquera por continuar conmigo desde mi primer encuentro con la investigación. A mis mejores amigos y memes del posgrado por los buenos momentos y a mi querida Fabiola Correa por estar conmigo en los mejores momentos y los momentos más difíciles dándome esperanza.

Resumen.

El diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) sigue siendo uno de los temas más importantes en la comunidad de la física de altas energías, tanto a nivel teórico como experimental. Comprender la transición de la materia hadrónica en condiciones similares a las del universo temprano mediante experimentos terrestres ha impulsado avances en técnicas experimentales y marcos teóricos. El modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL), anterior a la era de la QCD, continúa siendo una herramienta fundamental para explorar la naturaleza de esta transición. Su incorporación directa de efectos físicos clave lo hace particularmente útil para trazar las características del diagrama de fases de la QCD. En este trabajo, integramos los efectos de apantallamiento del plasma en el modelo NJL y analizamos su impacto en la ubicación del Punto Crítico Final (CEP), donde la transición de fase cambia de orden en el plano temperatura-potencial químico bariónico, explorando estas transiciones en condiciones de altas densidades y bajas temperaturas.

Abstract.

The phase diagram of Quantum Chromodynamics (QCD) remains one of the most pressing topics in the high-energy physics community, both theoretically and experimentally. Understanding the transition from hadronic matter under conditions akin to those in the early universe—through terrestrial experiments—has driven advancements in experimental techniques and theoretical frameworks. The Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model, predating the QCD era, continues to serve as a foundational tool for probing the nature of this transition. Its straightforward incorporation of key physical effects makes it particularly useful for mapping features of QCD's phase diagram. In this work, we integrate plasma screening effects into the NJL model and analyze their impact on the location of the Critical Endpoint (CEP), where the phase transition changes order in the temperature-baryochemical potential plane, exploring these transitions under conditions of high densities and low temperatures.

Palabras clave: QCD, Transiciones de fase, Modelo Nambu-Jona-Lasinio, Potencial químico bariónico

CONTENIDO

Introducción	2
1. Fundamentos	3
1.1. QCD y Transiciones de Fase	3
1.1.1. Bases de QCD	3
1.1.2. Simetría quiral y ruptura espontánea	6
1.1.3. Diagrama de fases de QCD	7
1.2. El Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)	10
1.2.1. Formulación del modelo NJL	10
1.2.2. Simetría quiral en el modelo NJL	11
1.2.3. Aproximación Hartree y ecuación de GAP	12
1.3. Efectos de Apantallamiento en el Plasma de Quarks y Gluones	14
1.3.1. Apantallamiento en plasmas de Q-G	14
1.3.2. Modificación del acoplamiento y efectos en el modelo NJL	15
1.3.3. Implicaciones en la estructura del diagrama de fase	16
2. Desarrollo y regularización	19

2.1.	Regularización de divergencias ultravioletas en el Modelo de NJL . . .	20
2.1.1.	Problemas de divergencias en integrales de Loop	20
2.1.2.	Metodo de regularización mediante un desplazamiento	21
2.2.	Correcciones Térmicas y de potencial químico mediante la expansión de Sommerfeld	22
2.2.1.	Expansión de Sommerfeld para fermiones	22
2.2.2.	Incorporación de correcciones térmicas y densidad al condensado quiral	23
3.	Análisis numérico de la ecuación de GAP y propiedades termodinámicas	25
3.1.	Métodos numéricos para la solución de la ecuación de GAP	25
3.1.1.	Implementación del método de Newton-Raphson	25
3.1.2.	Algoritmos y herramientas computacionales	26
3.2.	Exploración de Transiciones de Fase mediante la Masa dinámica	27
3.2.1.	Análisis de $m(\mu)$ como indicador de transiciones de fase	27
3.2.2.	Influencia de la masa desnuda M en el comportamiento de m . .	28
3.3.	Sensibilidad del condensado quiral a variaciones en el potencial químico	29
3.3.1.	Comportamiento del condensado quiral ante cambios en μ . . .	29
3.4.	Implicaciones termodinámicas de la variación del condensado quiral . .	30
3.4.1.	Conexión entre el condensado quiral y la velocidad del sonido c_s	30
3.5.	Localización del Punto Crítico Final (CEP) a través de los indicadores numéricos	32
4.	Observables y extensiones del modelo a futuro	35

4.1. Interpretación física de los resultados	36
4.1.1. Implicaciones para la estructura del diagrama de fase	36
4.2. Contribución al entendimiento del CEP	37
4.3. Extensiones del modelo y posibles aplicaciones	37
Conclusion	39
REFERENCIAS	41

Introducción

Es bien sabido que la materia hadrónica puede derretirse y transitar a una nueva fase, denominada plasma de quarks y gluones, donde la simetría quiral se restaura y el confinamiento de grados de libertad coloreados se hace ausente [1]. Los experimentos realizados en CERN y BNL demuestran que a altas temperaturas y bajas densidades, esta transición es un crossover, lo cual ha sido confirmado por simulaciones en la red [2], [3], [4] y otros métodos funcionales en el continuo [5], [6] así como modelos efectivos de interacciones fuertes [7], [8]. A bajas temperaturas, pero altas densidades, modelos efectivos han predicho que dicha transición es de primer orden, por lo que una posible explicación requiere que en algún punto en el diagrama de fases de la cromodinámica cuántica (QCD) en el plano de temperatura y potencial químico bariónico exista un Punto Crítico Final (CEP) [9], [10]. En búsqueda de dicho CEP, se han propuesto experimentos de colisiones de iones pesados en NICA [11] y FAIR [12]. Desde el punto de vista teórico, modelos efectivos como el de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [7] el modelo Sigma Lineal y otros han servido para guiar las posibles búsquedas sobre la ubicación de este CEP. Las simulaciones en la red no nos permiten explorar estas regiones del diagrama de fases por el llamado Problema de Signo [13], mientras que los métodos funcionales en el continuo requieren todavía desarrollar un grado de sofisticación adicional para hacer predicciones confiables. En particular, incluir los efectos de apantallamiento del plasma para diluir la intensidad del acoplamiento fuerte de QCD por efectos del medio es una avenida abierta para exploración. En modelos como el Sigma Lineal, dichos efectos se incorporan de manera natural en el potencial efectivo mediante los diagramas de anillo en el régimen de alta temperatura, el cuál podría no ser el apropiado para localizar el CEP según los más recientes estudios [6] que señalan que se encuentra en $\frac{T_E}{T_c} = 0.4 - 0.9$ y $\frac{\mu_E}{T_{c,0}} = 1 - 2$. Un modelo más simple es el modelo local NJL, donde los efectos del apantallamiento se han incorporado en el potencial efectivo para un régimen de temperatura arbitrario [14], modificando el acoplamiento del modelo para depender de las características del medio. Dicho acoplamiento se ha utilizado para estudiar el potencial efectivo a alta y baja temperatura en [6] así como en la ecuación de Gap o de brecha en el régimen apropiado para simulaciones de la red [3]. En este proyecto, adaptamos el modelo local NJL incluyendo una modificación efectiva del acoplamiento que describe el apantallamiento a densidades altas y bajas

temperaturas, se resuelve la ecuación de Gap de forma numérica para distintos valores de temperatura y potencial químico. Nuestra aproximación hace uso de una regularización nueva y adecuada para el manejo de las divergencias, comparando las soluciones resultantes de la masa dinámica de los quarks, el condensado quiral y la velocidad del sonido como una propiedad termodinámica, todo esto como función de parámetros del modelo. Se busca, particularmente, encontrar alguna pista sobre la localización del CEP en el diagrama de fases y analizar como el apantallamiento modifica la transición quiral, es decir, si es de primer orden o crossover en el régimen de densidad. Este esquema aprovecha la simplicidad del NJL para describir la ruptura de simetría quiral y, al mismo tiempo, incorpora de manera efectiva la dependencia del acoplamiento con el medio, contribuyendo a la caracterización más realista de la transición de fase en la región de altas densidades donde la búsqueda experimental y teórica de CEP sigue siendo un gran desafío abierto.

Capítulo 1

Fundamentos

Comprender la materia bajo condiciones extremas de temperatura y densidad es un tema de gran importancia en la física moderna. La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría que describe las interacciones entre quarks y gluones, de la cual partimos para estudiar la estructura de la materia hadrónica y sus transiciones de fase. En este capítulo se introducen los conceptos fundamentales de la QCD, la simetría quiral y su ruptura espontánea, junto con el diagrama de fase correspondiente, estableciendo así las bases para el desarrollo de este trabajo.

SECCIÓN 1.1

QCD y Transiciones de Fase

1.1.1 Bases de QCD

La QCD es una teoría cuántica de campos que se basa en el grupo de simetrías de gauge no abelianas $SU(3)_C$, que describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones. Esta teoría es una pieza fundamental del Modelo Estándar de la física de partículas al explicar estas interacciones como responsables en la formación de hadrones como protones, neutrones y mesones [15].

A diferencia de las teorías Abelianas como la Electrodinámica Cuántica (QED), donde la simetría es $U(1)$ y las partículas mediadoras no interactúan entre sí, en las teorías No Abelianas las partículas mediadoras sí interactúan debido a la carga de color. En $SU(3)_C$ hay 8 generadores independientes, lo que implica la existencia de 8 tipos diferentes de gluones que se denotan como A_μ^a , donde $a = 1, 2, \dots, 8$.

Los gluones llevan carga de color, lo que les permite interactuar entre sí a través de términos de autointeracción en el Lagrangiano de QCD. Esta característica es fundamental para fenómenos como la libertad asintótica o el confinamiento [15].

Esta carga de color es una propiedad cuántica que ayuda a caracterizar a los quarks y los gluones. Al tener 3 dimensiones, el grupo $SU(3)$ genera tres estados de color distintos. Esta forma de tricolores es indispensable para formar hadrones neutros en color mediante combinaciones de quarks. Las combinaciones de colores en hadrones deben ser invariantes bajo transformaciones de color, resultando en partículas de color neutro, como los bariones (combinaciones de 3 quarks de diferentes colores) y mesones (combinaciones de quark y antiquark con colores complementarios).

Para describir la dinámica de los quarks y los gluones, incluyendo sus interacciones, escribamos el Lagrangiano para QCD de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (1.1)$$

En esta ecuación, ψ_f es el campo de quark de un sabor f , m_f es la masa asociada al quark f , $D_\mu = \partial_\mu - ig_s T^a A_\mu^a$ la derivada covariante, T^a son las matrices de Gell-Mann generadoras del grupo $SU(3)$, A_μ^a es el campo del gluón, $G_{\mu\nu}^a$ es el tensor de campo del gluón, definido como: $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$.

Ahora veamos como se describe físicamente esta ecuación: La primera parte del Lagrangiano describe la propagación y las interacciones de los quarks con los gluones $\bar{\psi}_f(\dots)\psi_f$, la segunda parte describe la dinámica de los gluones, incluyendo sus autointeracciones debido a los términos no lineales.

Ahora bien, las ecuaciones de movimiento que derivemos de este Lagrangiano son las ecuaciones de Yang-Mills para los gluones y las ecuaciones de Dirac para los quarks. Estas ecuaciones son altamente no lineales debido a estas autointeracciones y la presencia de múltiples colores, lo que hace que la solución analítica no sea posible y se requieran métodos avanzados para su estudio.

Una de las propiedades más importantes en el estudio de QCD es la libertad asintótica, descubierta por Gross, Wilczek y Politzer en 1973. Esta propiedad describe como la constante de acoplamiento fuerte $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ disminuye al aumentar la escala de energía Q o, en otras palabras, al reducir la distancia entre quarks.

La dependencia de α_s con la escala de energía se describe por la función beta de QCD, que en el orden más bajo de la expansión perturbativa se expresa como:

$$\frac{d\alpha_s(Q^2)}{d\ln Q^2} = -\beta_0 \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}, \quad (1.2)$$

donde $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ y n_f es el número de sabores de quarks activos a la escala Q . Si integramos esta ecuación diferencial, obtenemos:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2})}, \quad (1.3)$$

donde Λ_{QCD} define la escala a la cual las interacciones fuertes se vuelven no perturbativas. Otra forma de derivar la evolución de α_s con la escala Q es utilizando el grupo de renormalización y la renormalización por dimensiones utilizada en teoría de campos.

La constante Λ_{QCD} se determina de forma empírica a través de experimentos como las mediciones de la constante de acoplamiento en procesos de altas energías. Su valor típico es de aproximadamente 200 MeV, aunque puede variar dependiendo del esquema de renormalización que estemos usando y el número de sabores activos.

Si consideramos las interpretaciones físicas que tiene α_s , se tiene que cuando es pequeña (distancias cortas), se permiten usar teorías de perturbaciones para calcular procesos de altas energías, mientras que cuando α_s aumenta (distancias grandes), esto lleva a interacciones fuertes y al fenómeno del confinamiento, donde los quarks y gluones no pueden existir como partículas libres.

Esta propiedad del confinamiento es fundamental en QCD. Por una parte, impide ver esta libertad de los quarks y gluones y los amarra dentro de los hadrones neutros de color, como bariones y mesones.

El mecanismo que hace posible este confinamiento sucede a través de un potencial de interacción creciente, es decir, a medida que la distancia entre dos quarks aumenta, la energía del campo de color también aumenta. Esto crea un potencial de interacción que crece linealmente con la distancia, del tipo $V(r) = \sigma r$, donde σ representa un tipo de tensión llamada tensión de cuerda de color. Esta tensión es una constante que representa la cantidad de energía por unidad de longitud almacenada en el campo de color que conecta al quarks y al antiquark.

Esta energía almacenada en el campo de color forma tubos de flujo que hacen conexiones entre pares quark-antiquark. Estos tubos son responsables de la formación de mesones y bariones. Cuando esta energía en el tubo de flujo alcanza un umbral, es más probable crear pares nuevos, que formaran nuevos hadrones y no quarks libres. Es justo esta estructura interna de los hadrones la que esta determinada por las interacciones de confinamiento entre quarks y gluones, lo que influye en propiedades como el espectro de masas y las interacciones a bajas energías.

El problema del confinamiento es una propiedad establecida experimentalmente, pero su demostración teórica desde el Lagrangiano de QCD es un desafío importante y para esto usamos metodos no perturbativos, ya que las herramientas perturbativas solo funcionan cuando la interacción es débil, lo cual no es el caso del confinamiento. Algunos métodos no perturbativos son Lattice QCD [16], que le da un enfoque de discretización del espacio-tiempo en una red finita y utiliza simulaciones numéricas para calcular este potencial de confinamiento entre quarks. También las ecuaciones de Schwinger-Dyson [5], modelos efectivos como NJL [7] o modelos de bag [17] que no tratan directamente todo

el modelo de QCD, solo el confinamiento, también la teoría de cuerdas o dualidades gauge/gravedad.

1.1.2 Simetría quiral y ruptura espontánea

La simetría quiral forma parte de los fundamentos de QCD, específicamente cuando los límites de las masas en los quarks son despreciables. Para quarks ligeros (u y d), el Lagrangiano de QCD es aproximadamente invariante bajo transformaciones quirales $SU(2)_L \times SU(2)_R$, donde $\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\psi$ son las componentes izquierda y derecha del campo de quark.

En otras palabras, la simetría quiral hace referencia a la invarianza del Lagrangiano de QCD bajo transformaciones independientes izquierda y derecha de los quarks. Matemáticamente, si ψ representa el campo de quark, entonces las transformaciones son:

$$\psi_L \rightarrow \exp^{i\theta_L^a T^a} \psi_L, \psi_R \rightarrow \exp^{i\theta_R^a T^a} \psi_R, \quad (1.4)$$

donde $\theta_{L,R}^a$ son los ángulos de transformación y T^a los generadores del grupo $SU(2)$. En el vacío de QCD, la simetría quiral $SU(2)_L \times SU(2)_R$, que también se escribe como $SU(2)_V \times SU(2)_A$, se rompe espontáneamente a $SU(2)_V$ (vectorial o de isoespín), dando lugar a la formación del condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Este condensado mezcla los estados izquierdos y derechos de los quarks u y d , lo que implica que el vacío no es invariante bajo transformaciones quirales.

Es decir, la ruptura espontánea de la simetría quiral es un fenómeno dinámico de QCD. Sin asumir la masa de los quarks (o asumiendo la masa muy pequeña), el Lagrangiano tendría la simetría quiral intacta, pero el vacío no. Esto da como resultado piones ligeros y una simetría vectorial $SU(2)_V$. Por otro lado, existe un rompimiento explícito de esta simetría vectorial, que desde el inicio nos dice que la teoría no trata por igual a los quarks ligeros u y d , pues sus masas y cargas diferentes hacen que la simetría de isoespín no sea exacta, independientemente de la ruptura espontánea. Aunque el vacío haya roto espontáneamente la simetría quiral (se rompe la simetría axial y deja intacta la simetría vectorial), la de isoespín ya estaba rota explícitamente por las diferencias de masa y carga.

Es importante recordar que si tenemos en general el grupo de sabor $SU(N_f)_V$, haciendo referencia a las transformaciones globales vectoriales de f sabores, estas simetrías serían exactas en el límite donde N_f sabores no tienen masa, y ya que todos los quarks tienen masa no nula, aún así la simetría quiral es de utilidad en el sector ligero de quarks up y down, donde $N_f = 2$, e incluso cuando se incluyen quarks extraños con $N_f = 3$

Aunque los quarks tienen masas desnudas pequeñas, que son las que aparecen en el Lagrangiano de QCD sin correcciones dinámicas debidas a las interacciones con el vacío de QCD, la ruptura de simetría quiral induce una masa dinámica m , que es significativamente mayor, explicando porqué los hadrones son mucho más masivos que los quarks

que los componen [15].

Como implicaciones, el condensado quiral tendrá un valor diferente de cero, es decir:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L \rangle \neq 0 \quad (1.5)$$

Este condensado actúa como un parámetro de orden que indica esta ruptura.

La ecuación de Gap será la que relaciona la masa dinámica m con el condensado quiral y las interacciones fuertes a través de:

$$m = m_0 + 2G\langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (1.6)$$

donde m_0 es la masa desnuda del quark y G es una constante de acoplamiento del modelo de NJL.

Otra implicación de la ruptura es la existencia de los piones, pues emergen como bosones de Nambu-Goldstone asociados a esta ruptura. Aunque no son escalares, por la masa de los quarks, su existencia es evidencia directa de esta ruptura. Es a bajas energías donde se determinan las propiedades de interacción de los piones y nucleones, facilitando el uso de teorías efectivas como la teoría quiral de perturbaciones.

Todo esto sucede para el caso de dos sabores. Si se generaliza esta situación para el caso de tres sabores, de manera análoga, obtendríamos el octeto de mesones pseudoescalares como los bosones de Goldstone.

Además de la simetría quiral, la QCD también posee otras simetrías fundamentales que juegan un papel crucial en su dinámica y propiedades básicas, como la simetría de gauge $SU(3)$ de color, las simetrías discretas: conjugación de carga (C), paridad (P) y tiempo (T), pues QCD es invariante bajo estas transformaciones discretas individualmente y en combinación CPT, aunque existen efectos como las anomalías que pueden romper algunas de estas simetrías.

Dado que el vacío perturbativo es quiralmente simétrico para quarks sin masa, es de esperarse que la simetría quiral se restaure a altas temperaturas o altas densidades.

1.1.3 Diagrama de fases de QCD

El diagrama de fases de la QCD en el plano de temperatura y potencial químico bariónico μ_B describe los diferentes estados de la materia nuclear bajo condiciones extremas. Este diagrama lo veremos como una herramienta esencial para entender cómo esta materia nuclear se comporta en ambientes críticos como el interior de una estrella de neutrones o al colisionar iones pesados.

Al describir este comportamiento de la materia fuertemente interactuante (quarks y gluones) bajo condiciones extremas de temperatura y densidad (usualmente caracterizada por μ_B), nos encontramos con una organización de diferentes fases que puede adoptar la materia hadrónica y el plasma de quarks y gluones (QGP), así como transiciones entre ellas [5], [3].

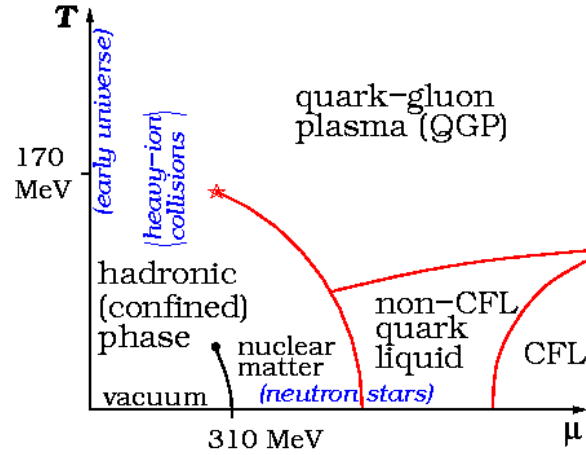


Figura 1.1: Diagramas esquemáticos de fases en QCD en el plano temperatura-potencial químico

En la práctica, el diagrama de fases no se limita a un solo potencial químico, pues al tener diferentes condiciones de equilibrio, en sistemas físicos reales, como conservación de isoespín, de extrañeza, neutralidad eléctrica, etc, tenemos diferentes potenciales químicos.

Algunos problemas del diagrama de fases es que a temperaturas cercanas a cero hay limitaciones y solamente se conocen dos cosas con seguridad. Cuando $T = 0$ y $\mu_B = 0$ tenemos el vacío en QCD. En estas condiciones la materia se encuentra en una fase hadrónica normal, con quarks confinados y simetría quiral rota espontáneamente.

La siguiente fase conocida es donde la materia nuclear esta a densidades de saturación, es decir, a densidades bariónicas de $\rho_B \simeq 0.17 \text{ fm}^{-3}$ (típica de la materia nuclear en núcleos atómicos) [8], donde se conoce la energía de ligadura por nucleón, $E_B \simeq 16 \text{ MeV}$. Tomando la masa del nucleón $m_N = 939 \text{ MeV}$, el potencial químico bariónico resulta $\mu_B = m_N - E_B \simeq 923 \text{ MeV}$. Como el potencial químico de quark es $\mu = \frac{\mu_B}{3}$, se obtiene que $\mu \simeq 308 \text{ MeV}$. Este punto donde $T = 0$ y $\mu = 308 \text{ MeV}$ [4, 8], marca el umbral a partir del cuál la materia puede existir en un estado ligado más denso que el vacío hadrónico. Estas escalas de energía surgen directamente de las masas de los hadrones (como nucleones) y de su ligadura con la materia nuclear.

En otras palabras, el potencial químico bariónico mide, de forma efectiva, la energía libre necesaria para agregar un barión adicional al sistema. Por ejemplo, cuando estamos en el vacío, para introducir un nucleón libre necesitaríamos superar su masa ($\approx 939 \text{ MeV}$). Sin embargo, en la materia nuclear ligada, el nucleón está efectivamente a un nivel de energía más bajo debido a la ligadura de $\simeq 16 \text{ MeV}$. Por ello, el potencial químico bariónico al que la materia nuclear es estable, se situa en $\mu_B \simeq 923 \text{ MeV}$ [4, 8, 18].

Por debajo de este valor de $\mu = 308 \text{ MeV}$, la materia sigue siendo esencialmente vacío hadrónico. Por encima, se tiene acceso a fases más densas. Si existiera un estado exótico más estable que la materia nuclear (como strange quark matter absolutamente estable), cambiaría la referencia, pero no hay información certera de ese estado posible.

A temperaturas finitas y bajos potenciales químicos, se espera la existencia de una transición entre un gas hadrónico y una fase más densa tipo líquido hadrónico, lo que implicaría una línea de primer orden en el diagrama, es decir, las propiedades cambiarán de forma no continua, caracterizando la coexistencia de las dos fases bien definidas en ese rango de temperatura y potencial químico.

Esta línea no necesariamente se extiende indefinidamente para todo T y todo μ_B ; en este caso, se espera que termine en un punto llamado Punto Crítico Final (CEP) de segundo orden, donde las fases se vuelven indistinguibles y se experimentan fenómenos críticos como susceptibilidades muy grandes. Es decir, se marcaría el fin de la coexistencia entre gas y líquido hadrónico [3].

Para estudiar este CEP se usan experimentos de multifragmentación nuclear [19], donde colisionan núcleos pesados a energías intermedias, calentado el núcleo formado y este fragmentándose en múltiples pedazos. Al analizar estos fragmentos nucleares (tamaño, número, correlaciones), se extraen inferencias sobre transiciones de fase que sufre la materia bajo estas condiciones de temperatura y potencial químico. Esto es análogo al paso de un gas a líquido y viceversa, dentro del dominio hadrónico, del cuál se ha sugerido un CEP asociado a estas transiciones [20].

El CEP está asociado a una temperatura entre 10 y 20 MeV, muy por debajo de la escala típica del QGP, que se manifiesta a ≈ 170 MeV [21,22].

En el régimen de altas temperaturas y bajas densidades, las colisiones ultra-relativistas de iones pesados han proporcionado indicios de formación del QGP, por ejemplo en el Super Proton Synchrotron (SPS) en el CERN [23] y en Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) en el Laboratorio Nacional de Brookhaven (BNL) [24]. En estos experimentos tras la colisión inicial, se produce el QGP que es extremadamente denso y caliente, el cuál se expande rápidamente y se enfría. Durante la evolución, hay un momento en el cuál las reacciones químicas inelásticas entre partículas dejan de ser efectivas, fijándose así las abundancias relativas de hadrones estables y resonancias. Este punto se denomina congelamiento químico (chemical freeze-out) [25]. Las condiciones de este chemical freeze-out sugieren que el punto de salida del sistema está próximo a la frontera de fase, pero la interpretación es complicada porque el sistema no se estudia en equilibrio estático, sino que evoluciona dinámicamente siguiendo trayectorias en el diagrama de fases.

Para densidades muy altas (potenciales químicos grandes) y bajas temperaturas, se espera la aparición de fases del tipo superconductor de color, donde los quarks forman pares (como pares de Cooper en la superconductividad eléctrica) a través de interacciones atractivas en el canal de color. Esto da lugar a un condensado diquark que rompe espontáneamente la simetría de color, provocando que el medio tenga un gap de energía y propiedades propias de un superconductor de color. Un ejemplo de este proceso es el Color-Flavor Locked (CFL) [26] que ocurre bajo estas condiciones de densidad muy alta, y que involucra tres sabores de quarks ligeros (u , d , s). En esta fase de CFL, los condensados de diquarks bloquean las simetrías de sabor y color entre sí, de modo que

no pueden tratarse de forma independiente. Es decir, las transformaciones en el espacio de color y de sabor se quedan entrelazadas.

Sin embargo, poder acceder a estas condiciones es extremadamente difícil en experimentos. Por otra parte, en Lattice QCD [2], [4] las integrales de camino se resuelven numéricamente a través del método de Monte Carlo. Normalmente, la probabilidad de una configuración está dada por el exponencial del Lagrangiano euclídeo, que incluye el término fermiónico. Cuando el potencial químico es cero $\mu = 0$, el determinante fermiónico es positivo, lo que permite interpretarlo como una densidad de probabilidad bien definida. Sin embargo, al estudiar potenciales diferentes de cero, el determinante se vuelve en general un número complejo no positivo, lo cuál destruye la interpretación. Esto se conoce como problema de signo [13] y no es posible aplicar Monte Carlo en este régimen de altas densidades.

Los resultados de LQCD en el eje de temperatura y $\mu = 0$ ha permitido un gran avance. Las simulaciones sugieren que la transición entre la fase hadrónica y el QGP no es un cambio abrupto, sino un crossover suave alrededor de $T \approx 170$ MeV. En este régimen, el desconfinamiento y la restauración quiral ocurren aproximadamente a la misma temperatura. Extrapolando a masas de quarks más ligeras (en el límite quiral) se confirma que esta temperatura crítica es menor que en el caso de $SU(3)$ puro sin quarks donde $T_C \approx 269$ MeV [4].

SECCIÓN 1.2

El Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)

1.2.1 Formulación del modelo NJL

El modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) fue introducido por Y. Nambu y G. Jona-Lasinio a principios de la década de 1960. A pesar de que en ese entonces la QCD y el concepto de quarks era desconocido, la propuesta de Nambu y Jona-Lasinio estaba inspirado en la necesidad de explicar la generación de masa de los nucleones de manera dinámica, sin romper de forma explícita la simetría quiral [27]. Cuando la QCD quedó consolidada, este modelo pasó a reinterpretarse como un modelo efectivo de quarks, centrado en la ruptura espontánea de la simetría quiral y la aparición de mesones como bosones de Goldstone [7].

El problema de NJL es el tener limitaciones en su aplicabilidad al no poder explicar el confinamiento, es decir, donde la libertad de los quarks debe ser drásticamente suprimida; sin embargo, resulta muy útil para estudiar la ruptura quiral. Además, el modelo de

NJL se emplea con frecuencia en contextos de alta densidad y temperaturas moderadas, como la superconductividad de color [8].

Para describir el modelo de NJL en la versión más moderna, se emplea como una teoría efectiva de quarks con dos sabores (up y down) y tres colores, describiendo interacciones de cuatro puntos que, de manera efectiva, simulan el comportamiento de la QCD a bajas energías. La forma prototipo de Lagrangiano de dos sabores se escribe como:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2], \quad (1.7)$$

donde ψ denota el campo de quarks de dos sabores y tres colores, m_0 es la masa bare o masa desnuda, que puede ser pequeña o tomada igual a cero en el límite quiral, $\vec{\tau}$ son las matrices de Pauli actuando en el espacio de isoespín de dos sabores y G es la constante de acoplamiento [8, 28].

Específicamente el término de interacción de cuatro quarks es puntual, es decir, que no tiene dependencia espacial, lo que lo convierte en una simplificación drástica respecto de la QCD real, pero al mismo tiempo permite capturar la ruptura espontánea de simetría quiral y la aparición de mesones pseudoescalares ligeros (piones) como bosones de Goldstone.

La idea de que exista este término de cuatro quarks surge de varias consideraciones como los efectos no perturbativos de gluones. Es decir, a bajas energías ($\lesssim 1$ GeV), la interacción fuerte se toma no perturbativa, y los quarks sienten un medio fuertemente interactuante que no puede tratarse solamente con diagramas de Feynman de QCD con algunos gluones [18].

Algunos estudios de la dinámica de instantones en QCD [29], sugieren que, de manera efectiva, podría emerger una interacción local en el canal $(\bar{\psi}\psi)^2$. También hay variantes de NJL que incorporan términos instantónicos que rompen la simetría axial $U(1)_A$. La gracia del modelo de NJL como aproximación efectiva es que a bajas energías (Λ_{QCD} típicamente del orden de cientos de MeVs), el condensado quiral $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$, pues el modelo hace que se genere este valor de expectación en el vacío no trivial. Pese a no poder explicar el fenómeno del confinamiento, el modelo NJL describe con éxito la estructura de los mesones pseudoescalares ligeros, como los piones o kaones. Esto a través de estados ligados quark-antiquark (en el sentido de un estado colectivo), así como también la ruptura espontánea de la simetría quiral [7, 8].

1.2.2 Simetría quiral en el modelo NJL

En el límite donde las masas desnudas de los quarks $m_0 \rightarrow 0$, 1.7 exhibe una simetría aproximada $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Es decir, a nivel de la teoría, la casi conservación de la corriente axial:

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \quad (1.8)$$

al menos de forma aproximada, considerando la anomalía para la simetría axial $U(1)_A$, pero que no afecta significativamente a la simetría $SU(2)$ o $SU(3)$ de sabor.

La conservación parcial de la corriente axial está ligada a la hipótesis en la que los piones son mesones pseudo-Goldstone asociados a la ruptura quiral.

No obstante, el vacío físico del modelo NJL, al igual que en la QCD, rompe espontáneamente la simetría quiral. Esto se manifiesta en el condensado quiral:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle \neq 0 \quad (1.9)$$

Cuando el condensado quiral adquiere un valor finito, la simetría quiral $SU(2)_L \times SU(2)_R$ se reduce a $SU(2)_V$, generando bosones de Goldstone (piones) en caso de dos sabores. Si en la realidad $m_0 \neq 0$, estos bosones se vuelven pseudo-Goldstone con una masa relativamente pequeña ≈ 135 MeV para la masa física del pión [8].

Como parte importante de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ es ser el parámetro de orden que mide la fuerza de la ruptura espontánea de la simetría quiral. En términos generales: Cuando $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$, la simetría quiral permanece intacta y los quarks se quedarían casi sin masa, al menos en el límite quiral. Por otro lado al ser $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, la simetría se rompe y los quarks adquieren una masa dinámica m mayor que la masa desnuda m_0 .

1.2.3 Aproximación Hartree y ecuación de GAP

Para poder estudiar cuantitativamente la generación de masa y el espectro de excitaciones, se emplea la aproximación de campo medio, también conocida como aproximación de Hartree y al incluir correcciones de intercambio, Hartree-Fock [30]. Específicamente para el caso de NJL, esta aproximación consiste en linealizar el término de 4 quarks, asumiendo que uno de los campos se reemplaza por su valor de expectación en el vacío, es decir:

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \approx 2(\bar{\psi}\psi)\langle \bar{\psi}\psi \rangle - \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2, \quad (1.10)$$

y de la misma forma para el canal pseudoescalar $\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau} \psi$. Al considerar esto, el Lagrangiano efectivo se convierte en algo parecido a un Lagrangiano cuadrático en los campos ψ , pero con un término de masa efectivo que depende del condensado de la forma aproximada:

$$\mathcal{L}_e f f = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \text{constante}(\langle \bar{\psi}\psi \rangle), \quad (1.11)$$

donde M se define como la masa generada dinámicamente. Este valor M debe determinarse de manera autoconsistente, imponiendo que el valor de expectación del campo, sea coherente con la solución que minimiza la energía o acción efectiva [16], [10].

Ahora bien, la ecuación de Gap se obtiene al variar la acción efectiva respecto de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ o, equivalentemente, respecto de la masa efectiva M . Partimos de la identidad:

$$M = m_0 - 2G\langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (1.12)$$

Esto al considerar el término cuadrático, $(\bar{\psi}\psi)^2$. En la aproximación de Hartree, el condensado quiral se vuelve:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -Tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_F(p), \quad (1.13)$$

donde $S_F(p)$ es el propagador de quark con masa efectiva M . Para un fermión con masa M , en el formalismo de momento euclideo, su propagador libre es:

$$S_F(p) = \frac{1}{\not{p} + M}. \quad (1.14)$$

Entonces la traza y 1.13 conducen a una expresión para el condensado quiral que depende de M . Al reemplazar esta dependencia, se obtiene la ecuación de Gap, típicamente de la forma:

$$M = m_0 - 2G \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{1}{\not{p} - M} \right] \quad (1.15)$$

El procedimiento indicado para resolver esta ecuación de GAP es regularizar la integral, típicamente mediante un corte en el momento euclideo Λ , ya que el modelo de NJL no es renormalizable y así poder obtener una ecuación trascendente para M [7]. También podemos optar por calcular esta integral usando corte espacial, Pauli-Villars, etc. Buscar después las soluciones que cumplan 1.15.

Por ejemplo, en el límite quiral donde $m_0 \rightarrow 0$ la ecuación de GAP puede dar lugar a una solución no trivial $M \neq 0$, lo que indicaría una ruptura espontánea de simetría quiral. En caso de que $m_0 \neq 0$, la masa efectiva M será todavía mayor, dada la contribución del condensado quiral [8].

Si nos enfocamos entonces cuando $M \neq 0$, evidencia de que los quarks, aún cuando tuvieran una masa bare muy pequeña o nula, adquieren una masa constituyente significativa que ronda los 300 o 400 MeV. Esto mediante la formación de un condensado quiral en el vacío. Este fenómeno es análogo al mecanismo de brecha en la superconductividad, donde la formación de pares de Cooper genera una brecha en el espectro de energía de los electrones [7, 30]. Del mismo modo, en el modelo NJL, la interacción de cuatro quarks produce un emparejamiento quiral $\bar{\psi}\psi$ que da lugar a la masa dinámica y, simultáneamente, a los mesones pseudo-Goldstone como excitaciones colectivas de masa pequeña.

SECCIÓN 1.3

Efectos de Apantallamiento en el Plasma de Quarks y Gluones

1.3.1 Apantallamiento en plasmas de Q-G

En sistemas cargados, como los plasmas electrónicos convencionales, el efecto de apantallamiento o screening tiene su origen como respuesta colectiva de las partículas cargadas al introducir una partícula de prueba con carga eléctrica en el medio. De forma similar, cuando hablamos del plasma de quarks-gluones (QGP), la presencia de partones libres (quarks y gluones) generan una especie de nube de polarización que modifica las interacciones entre dos quarks, haciendo que el potencial efectivo entre ellos disminuya con la distancia de una manera más rápida que en el vacío [6].

Si pudiéramos dibujar esto veremos que en el vacío la interacción fuerte a distancias grandes se ve reforzada por el confinamiento, pero al considerar un medio denso o caliente, hay suficientes quarks y gluones que podrían polarizar el medio, debilitando así la fuerza efectiva entre quarks, que esquemáticamente se ve en la Figura 1.2, donde se hace una comparación del potencial efectivo en el vacío y en el medio. En el vacío el potencial puede presentar un crecimiento aproximadamente lineal a grandes distancias (confinamiento) [7, 30]; mientras que para un medio el potencial se suaviza, indicando la presencia de apantallamiento [8]. Se ha usado un modelo simplificado del modelo de Cornell para el potencial sin apantallamiento. Al incorporar el plasma, al menos a

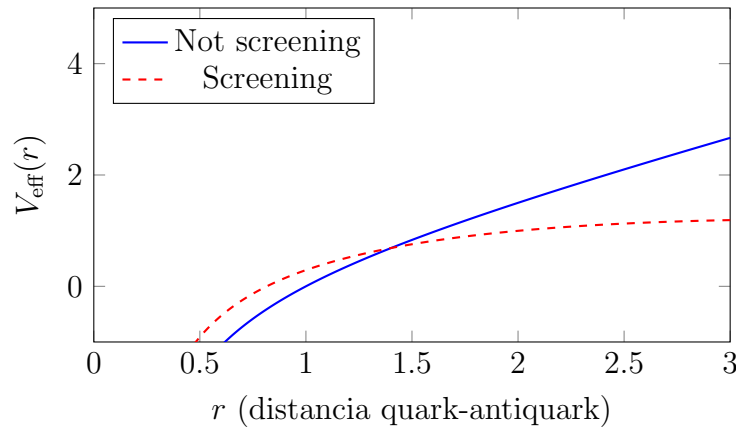


Figura 1.2: Diagrama cualitativo del potencial efectivo quark–antiquark sin (línea sólida azul) y con (línea discontinua roja) apantallamiento. Observamos que el término exponencial introduce una supresión a grandes distancias.

nivel teórico, la ecuación de movimiento de un quark de prueba ya no se describe por el potencial confinado en su estado puro, sino por un potencial efectivo $V_{eff}(r, T, \mu)$, donde a altas temperaturas tiene la forma:

$$V_{eff} \approx \frac{\alpha_{eff}(T, \mu)}{r} e^{-m_D r}, \quad (1.16)$$

donde α_{eff} es el acoplamiento efectivo en la escala de energía del plasma que incluye correcciones térmicas y de densidad, m_D es la masa de Debye o screening mass, es la que introduce el factor exponencial de apantallamiento.

Este potencial modificado disminuye la fuerza atractiva a grandes distancias, facilitando así el desconfinamiento en QCD y afectando directamente a la ruptura y formación de condensados [14].

1.3.2 Modificación del acoplamiento y efectos en el modelo NJL

En el modelo de NJL, discutido en el capítulo anterior, partimos de una constante de acoplamiento local G , cuya función es la de regular la fuerza de la interacción entre cuatro quarks. Sin embargo, al considerar un medio con temperatura o densidad, surgen correcciones de forma colectiva que son consecuencia de la dependencia de la temperatura y potencial químico dentro de esta constante $G(T, \mu)$.

La idea general de esto es que al aumentar T o μ , el medio apantalla las interacciones, reduciendo efectivamente la magnitud de acoplamiento, al menos en ciertos rangos. Por otra parte, cerca de las transiciones de fase, puede haber comportamientos que no son triviales, como un acoplamiento reforzado en canales particulares por ejemplo la superconductividad de color en canales diquark [26].

Muchos autores han propuesto parametrizaciones específicas de esta constante de acoplamiento $G(T, \mu)$ ajustando datos de simulaciones de Lattice QCD [16] o de requerimientos fenomenológicos del modelo.

Por ejemplo, se puede considerar una forma específica muy simple:

$$G(T, \mu) = \frac{G_0}{1 + \alpha F(T, \mu)}, \quad (1.17)$$

donde G_0 es la constante de acoplamiento en el vacío, $F(T, \mu)$ un factor creciente con T y/o μ y α un parámetro de ajuste que controla la rapidez con la que decrece G [31], [32]. Anteriormente se había escrito la ecuación de GAP en la aproximación de campo medio o de Hartree para el modelo de NJL de la forma $M = m_0 - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle$.

Ahora al tener $G = G(T, \mu)$, se tendría que resolver la ecuación de GAP para cada valor T y μ . Además el condensado quiral adquiere una nueva forma $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{T,\mu}$ y se evalúa a través de integrales con funciones de distribución de Fermi-Dirac a temperatura finita

y potencial químico μ :

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{T,\mu} = -2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} (1 - n_F^+(E_{p,\mu}) - n_F^-(E_{p,\mu})), \quad (1.18)$$

donde de nuevo N_f y N_c son los números de sabores y colores, $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$ es la energía del quark y $n_F^\pm$ son las ocupaciones fermiónicas para quarks y antiquarks, de la forma:

$$n_F^\pm(E_p, \mu) = \frac{1}{1 + e^{(E_p \mp \mu)/T}}. \quad (1.19)$$

En esta forma, la dependencia de G con (T, μ) puede reducir el valor de M (masa dinámica) cuando aumenta la temperatura o al densidad, reflejando físicamente que el apantallamiento debilita la formación del condensado quiral.

1.3.3 Implicaciones en la estructura del diagrama de fase

El diagrama de fase de la materia de quarks en el plano (T, μ) exhibe, según predicciones de varios modelos de campo medio y teorías efectivas, la presencia de un Punto Crítico Final (CEP por sus siglas en inglés), donde la transición de fase en el eje de densidad (o equivalentemente en el potencial químico) pasa de ser de primer orden a ser una transición cruzada (crossover) [20, 21]. En estos modelos donde suceden este tipo de transiciones y son de gran importancia para su estudio son los modelos tipo NJL con distintas extensiones tal como acoplamientos constantes o el Polyakov-NJL [33], donde se incluyen un acoplamiento de campo de Polyakov, modelos Sigma lineales ($\mathcal{O}(4)$ o $\mathcal{O}(N)$) adaptados a QCD [34], utilizados para describir aspectos de transición quiral y también Relativistic Mean Field (RMF) con quarks o aproximaciones de campo medio relativistas, extendidas para incluir interacciones efectivas que rompan la simetría quiral [35].

Al mismo tiempo, indicios de la presencia (o ausencia) de este CEP se han buscado en simulaciones de QCD en LQCD. No obstante, el signo del determinante de fermiones a densidad finita hace que los cálculos sean difíciles de realizar, de modo que, hasta la actualidad, se carece de información sobre la localización exacta de este CEP en QCD como se ve en la Figura 1.3.

En los modelos de NJL más sencillos, es decir, los que incluyen acoplamiento constante G , interacciones de cuatro quark y son invariantes bajo $SU(2)_L \times SU(2)_R$, numerosas investigaciones concuerdan en un rango típico para el CEP en donde la temperatura y el potencial químico toman los valores de $T_{CEP} \approx 50 - 120$ MeV y μ_{CEP} (o densidad bariónica asociada) $\approx 300 - 400$ MeV, respectivamente.

Los primeros trabajos [36], así como en análisis posteriores [37] han ilustrado el diagrama de fase en el cual el CEP aparece alrededor de $T \approx 100$ MeV y $\mu \approx 300 - 350$

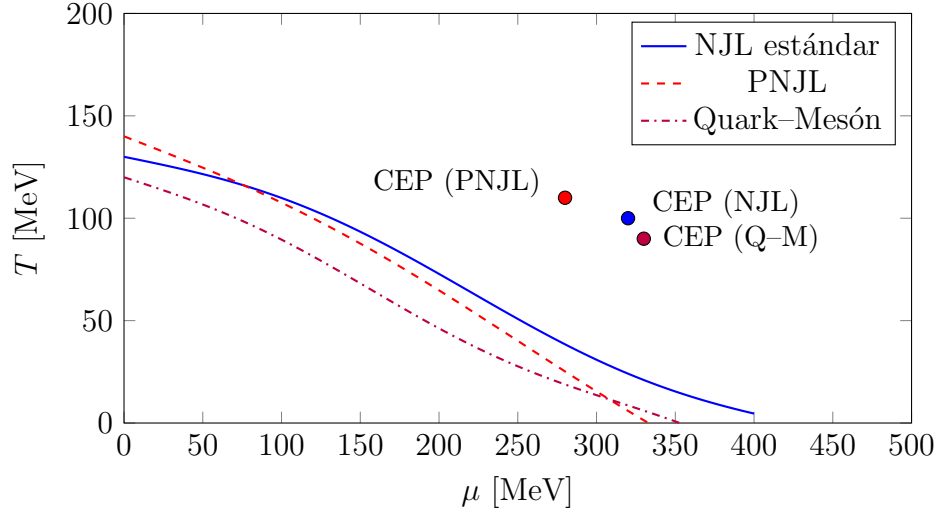


Figura 1.3: Diagrama de fase esquemático para distintos modelos: NJL estándar (línea azul), PNJL (línea roja discontinua) y Quark-Mesón (línea morada punteada). Se indican los CEP respectivos como círculos. Este gráfico ilustra cómo cada modelo predice la transición de fase a temperaturas y potenciales químicos distintos, dentro de rangos típicos de $T \sim (50-120)$ MeV y $\mu \sim (300-400)$ MeV para el CEP.

MeV, sin embargo estos valores dependen del tipo de regularización como corte espacial, Pauli-Villars, regularización suave, etc. La magnitud elegida para la constante de acoplamiento, el parámetro de corte, la masa desnuda y las posibles extensiones del modelo también juegan un papel importante en estos diagramas.

Ahora bien, al incorporar el efecto de apantallamiento que varía con la temperatura y densidad se ha observado en [33], [16] que la posición del CEP puede desplazarse hacia valores distintos de μ y T . Todo esto depende de la forma elegida para $G(\mu, T)$ que causa variaciones sobre el CEP a densidades mayores, al disminuir la temperatura o, en casos drásticos, hasta desaparecer, es decir, que las transiciones siempre hagan crossover, sin fase de primer orden ni CEP.

Capítulo 2

Desarrollo y regularización

En este capítulo, se presentan los elementos de cálculo y las técnicas de regularización fundamentales para este modelo de NJL cuando se extiende a condiciones de temperatura y potencial químico finitos. Si bien, ya hemos discutido la idea general del modelo en el capítulo anterior, aquí se profundiza en la regularización empleada para tratar las divergencias en las integrales de loop, usando un método basado en un desplazamiento sobre la función $\Gamma(x)$. El cálculo del condensado quiral en el vacío, mostrando la aparición de integrales y su tratamiento. La incorporación de correcciones térmicas y de densidad (potencial químico) usando la expansión de Sommerfeld y la ecuación de GAP modificada, autoconsistente con todos los efectos incluidos y posibles correcciones de apantallamiento en el acoplamiento G .

SECCIÓN 2.1

Regularización de divergencias ultravioletas en el Modelo de NJL

2.1.1 Problemas de divergencias en integrales de Loop

El modelo de NJL en su versión de 4 dimensiones, no resulta renormalizable en el sentido perturbativo, por lo que las integrales de loop contienen divergencias que hay que manejar a través de un corte (cutoff) o algún otro procedimiento de regularización [7], [8], [28].

Al considerar el cálculo del condensado quiral en el vacío:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -4iN_f N_c m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2} \quad (2.1)$$

donde m es la masa dinámica del quark usada de forma autoconsistente. Este tipo de integrales diverge a grandes $|k|$, de modo que hay que introducir técnicas para dejar aislada la parte infinita y extraer un resultado finito ligado a observables físicos.

Separando la integral en la componente del 4-momento:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{k_0^2 - A_k^2}, \quad (2.2)$$

donde $A_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$,
usando la identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{k_0^2 - A_k^2} = \frac{i\pi}{A_k}, \quad (2.3)$$

se reduce a:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{k_0^2 - A_k^2} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{i\pi}{A_k}. \quad (2.4)$$

Usando coordenadas esféricas en el espacio $\vec{k}$ podemos reescribir:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{i\pi}{A_k} = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad (2.5)$$

donde vemos que la integral izquida es logaritmicamente divergente al tener $r \rightarrow \infty$, requiriendo un corte o una forma de regularla.

2.1.2 Metodo de regularización mediante un desplazamiento

Uno de los métodos más cómodos que vamos a usar es introduciendo un desplazamiento donde exista alguna divergencia que nos interese conocer su forma más a detalle. Retomando la última integral, hacemos cambios para reducirla de la siguiente forma. Sea $u = r^2 + m^2$, tenemos

$$\int_0^\infty \frac{r^{\alpha+1}}{\sqrt{r^2 + m^2}} dr = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_m^\infty (u^2 - m^2)^{\frac{\alpha}{2}} du = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_m^\infty u^\alpha \left(1 - \frac{m^2}{u^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} du \quad (2.6)$$

De nuevo hacemos otra sustitución $v = 1 - \frac{m^2}{u^2}$ y tenemos:

$$\frac{i}{(2\pi)^2} \int_m^\infty u^\alpha \left(1 - \frac{m^2}{u^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} du = -\frac{i}{(2\pi)^2} m^{\alpha+1} \int_0^1 (1-v)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{2}} v^{\frac{\alpha}{2}} dv \quad (2.7)$$

Que esto tiene una forma similar a la función beta que es:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.8)$$

Tomando $x = \frac{\alpha}{2} + 1$ and $y = -\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}$, tenemos:

$$\frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3k}{\sqrt{k^2 + m^2}} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{m^{\alpha+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad (2.9)$$

donde $\alpha \approx 1$ para nuestra integral original. Al haber divergencia en ese valor, tenemos $\Gamma(-1)$, si desplazamos este valor un ϵ , tenemos: $\Gamma(-1) = \Gamma(-1 + \epsilon)$. Si consideramos $\Gamma(z)$ y hacemos una expansión en series de Laurent alrededor de $z = -1$, tenemos:

$$\Gamma(z) \approx \frac{1}{1+z} - \gamma + \mathcal{O}(z+1)^2, \quad (2.10)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y su valor es aproximadamente 0.5772. Usando esta aproximación, tenemos:

$$\Gamma(-1 + \epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon} - \gamma \quad (2.11)$$

La parte $\frac{1}{\epsilon}$ se asocia a la divergencia ultravioleta y γ es la corrección finita que sobrevive al remover la parte infinita. Esto es análogo a lo que sucede en la regularización dimensional [15]. Si continuamos con los pasos anteriores podemos llegar a una ecuación de Gap de la forma

$$m = m_0 + 4GN_f N_C \left[\frac{1}{(2\pi)^2} m^3 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) \right]. \quad (2.12)$$

La magnitud $\frac{1}{\epsilon} - \gamma$ se relaciona a una escala Λ de corte físico, donde el desplazamiento $\epsilon \approx 1 \times 10^{-1}$.

Para imponerle el valor $G\Lambda^2 \approx 2.44$, tenemos que $\Lambda = \Lambda_0(\frac{1}{\epsilon} - \gamma)$, donde $\Lambda_0 \approx 120.3$ MeV, que es la escala de confinamiento de QCD y $G = 1.9 \times 10^{-6}$ MeV⁻².

La parte esencial de la técnica es que la divergencia $\frac{1}{\epsilon}$ se separa explícitamente, y γ aporta la corrección. Con esto se pueden obtener resultados físicos finitos, por ejemplo:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{vac} = -4iN_f N_c m(\text{regularizacion}), \quad (2.13)$$

ligado al valor de la masa dinámica de 2.12.

SECCIÓN 2.2

Correcciones Térmicas y de potencial químico mediante la expansión de Sommerfeld

2.2.1 Expansión de Sommerfeld para fermiones

Si incluimos los efectos de temperatura y densidad. Implicaría que, en lugar de tener integrales en el vacío, debemos de considerar distribuciones de ocupaciones fermiónicas (quarks y antiquarks) a temperatura T y potencial químico μ .

La distribución para quarks de un sabor y masa m se escribe:

$$n_F(\mu, T) = \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{k^2 + m^2} - \mu}{T}} + 1}, \quad (2.14)$$

y para los antiquarks es $\bar{n}_F(\mu, T) = n_F(-\mu, T)$, donde $n_F(\mu, T)$ es la distribución de Fermi-Dirac.

Por tanto, la integral para el condensado o la densidad de quarks toma la forma:

$$I_{FD} = \int_0^\infty \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} [n_F(\mu, T) + \bar{n}_F(\mu, T)] dk \quad (2.15)$$

La expansión de Sommerfeld [38], [39], es una técnica usada para aproximar integrales que tienen la forma:

$$\int f(E) n_F(E) dE \quad (2.16)$$

cuando μ es suficientemente grande y f es suave cerca de $E \approx \mu$. También simplifica notablemente la forma de la distribución $n_F(\mu, T)$. Si consideramos hasta un orden de

T^2 , tenemos la siguiente aproximación:

$$\int f(E)n_F(E)dE = \int_m^\mu f(E)dE + \frac{\pi^2 T^2}{6} f'(\mu) \quad (2.17)$$

Para nuestro caso, tenemos que $f(E) = \sqrt{E^2 - m^2}$, la derivada $f'(\mu)$ representa la corrección térmica de primer orden y se evalúa en $E = \mu$. Esto nos permite escribir la integral de una forma analítica, capturando la dependencia de μ y T a primer orden en T^2 .

La validez del uso de la expansión de Sommerfeld en este caso se basa en que, a bajas temperaturas las transiciones o excitaciones relevantes ocurren en un entorno que es estrecho alrededor de la superficie de Fermi, es decir, en el entorno donde la función n_F cambia bruscamente de 1 a 0 en un intervalo de energía del orden aproximado a T . Ahora bien, si T es muy pequeño comparado con μ , es decir, también con $\mu - m$, entonces la región donde la distribución difiere significativamente de $\mathcal{O}(\mu + E)$ (el paso brusco a $T = 0$), es muy estrecha.

En un gas de Fermi degenerado, a temperaturas bajas, solo los fermiones próximos a la superficie de Fermi pueden ser termalmente excitados, mientras que por otro lado, los estados que están muy por debajo de μ permanecen prácticamente llenos y los estados muy por encima de μ permanecen vacíos. Así, la integral efectiva se reduce a un análisis local de $E \approx \mu$. En consecuencia, se desarrolla $f(E)$ en una serie en torno a μ . Posteriormente la convolución con la distribución de Fermi en la ventana de $\Delta E \sim T$ da lugar a los términos en T de orden cuadrado y cuártico, etc. En la práctica se trunca en orden cuadrado cuando $T \ll \mu$ o cuando $\mu - m$ es grande.

2.2.2 Incorporación de correcciones térmicas y densidad al condensado quiral

Con la expansión de Sommerfeld, las expresiones para el condensado quiral o la masa dinámica incluyen términos adicionales, que dependen de μ y T . Tomando, por ejemplo, 2.15, podemos reescribirla como:

$$I_{FD} = \int_m^\infty \sqrt{E^2 - m^2} [n_F(E, \mu, T) + \bar{n}_F(E, \mu, T)] dE, \quad (2.18)$$

donde $E = \sqrt{k^2 + m^2}$.

Si μ es grande y la temperatura no es excesiva, $\bar{n}_F$ para los antiquarks suele ser exponencialmente pequeña a altos μ , por lo que podemos omitirla al menos en primera aproximación. Ahora para n_F es aplicable la expansión de Sommerfeld y obtenemos para $\mu \gg m$:

$$I_{FD} \approx \int_m^\mu \sqrt{E^2 - m^2} dE + \frac{\pi^2 T^2}{6} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - m^2}} = I_0 + \Delta_{therm}(T, \mu). \quad (2.19)$$

Evaluando I_0 , se encuentra típicamente:

$$I_0 = \frac{\mu}{2} \sqrt{\mu^2 - m^2} - \frac{m^2}{2} \ln \left(\frac{2\mu}{m} \right), \quad (2.20)$$

y la corrección térmica:

$$\Delta_{therm} = \frac{\pi^2 T^2}{6} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - m^2}} \approx \frac{\pi^2 T^2}{6}, \quad (2.21)$$

cuando $\mu \gg m$.

Capítulo 3

Análisis numérico de la ecuación de GAP y propiedades termodinámicas

En el presente capítulo se presentaran los métodos usados para resolver la ecuación de Gap y otros resultados relevantes en este modelo y se analizan a través de dos esquemas, para un acoplamiento constante G y un acoplamiento efectivo G' . Estos resultados se describen en gráficas que nos permitirán visualizar las transiciones de fase quiral, estimar la compresibilidad del sistema y explorar la posibilidad de ubicar el CEP.

SECCIÓN 3.1

Métodos numéricos para la solución de la ecuación de GAP

3.1.1 Implementación del método de Newton-Raphson

Como se explico en el capítulo anterior, la ecuación de GAP puede escribirse de forma genérica como $GAP(m; \mu, T) = 0$. Para poder encontrar la masa dinámica $m(\mu, T)$ se emplea el método de Newton-Raphson. En este método se parte de un valor inicial m_0

y se hace la iteración:

$$m_{n+1} = m_n - \frac{GAP(m_n; \mu, T)}{GAP'(m_n; \mu, T)} \quad (3.1)$$

hasta que $|GAP(m_n)|$ sea menor que el umbral de convergencia, que damos como 10^{-6} . Este procedimiento se repite en cada (μ, T) que almacenando la solución $m(\mu, T)$ en el rango de μ entre 0 y 500 MeV y T dada. A bajas μ es frecuente partir de un $m_0 \approx 300$ MeV, que es la masa dinámica típica en el vacío, mientras que a altas μ , es más apropiado un valor menor, dependiendo de como es que decaiga el valor de m . En caso de múltiples soluciones, que es lo que ocurre cuando tenemos transiciones de primer orden, se analiza la energía libre o el potencial termodinámico para decidir cuál será la solución físicamente favorable. Para estos parámetros, en particular, como veremos, no se encuentra un salto abrupto, por lo que no se reportan bifurcaciones críticas en la mayoría de las curvas.

3.1.2 Algoritmos y herramientas computacionales

Los cálculos se han desarrollado en Mathematica siguiendo rutinas internas para la derivación simbólica. Esto es útil, pues la ecuación de GAP se encuentra en términos de integrales paramétricas.

La estructura típica de los códigos usados es:

1. Definimos las constantes de nuestro problema $\epsilon, \gamma_{Euler}, N_f, N_c, G$ o G' .
2. Definimos la ecuación de GAP para G o G' .
3. Un bucle que recorre los valores de μ y de T según el caso, resolviendo la ecuación en cada punto y se almacenan las soluciones $\{\mu, m(\mu)\}$.
4. Se genera las gráficas para ilustrar la dependencia de m con μ , el condensado quiral, etc.

De igual forma, para el caso de $m(M)$ se recorre en un rango de la masa desnuda M en escala logarítmica y se repite la solución de la ecuación de GAP en cada punto produciendo una gráfica de $\{M, m(M)\}$.

Estas rutinas nos dan mucha flexibilidad pues simplemente se cambia la definición del acoplamiento G a G' o se incluye el término térmico $\frac{\pi^2 T^2}{6}$ en la parte media y se vuelve a barrer la variable deseada.

SECCIÓN 3.2

Exploración de Transiciones de Fase mediante la Masa dinámica

3.2.1 Análisis de $m(\mu)$ como indicador de transiciones de fase

La masa dinámica m es un gran indicador para esclarecer la ruptura quiral. Cuando μ (densidad) aumenta, se espera una disminución de m , dando como resultado una restauración parcial o total de la simetría quiral. [7,8] Para el caso del acoplamiento G se resuelve la ecuación de Gap para $\mu \in [0, 500]$ MeV y temperaturas $T = 10, \dots, 100$ MeV.

La gráfica correspondiente 3.1 muestra a m descendiendo suavemente con μ sin discon-

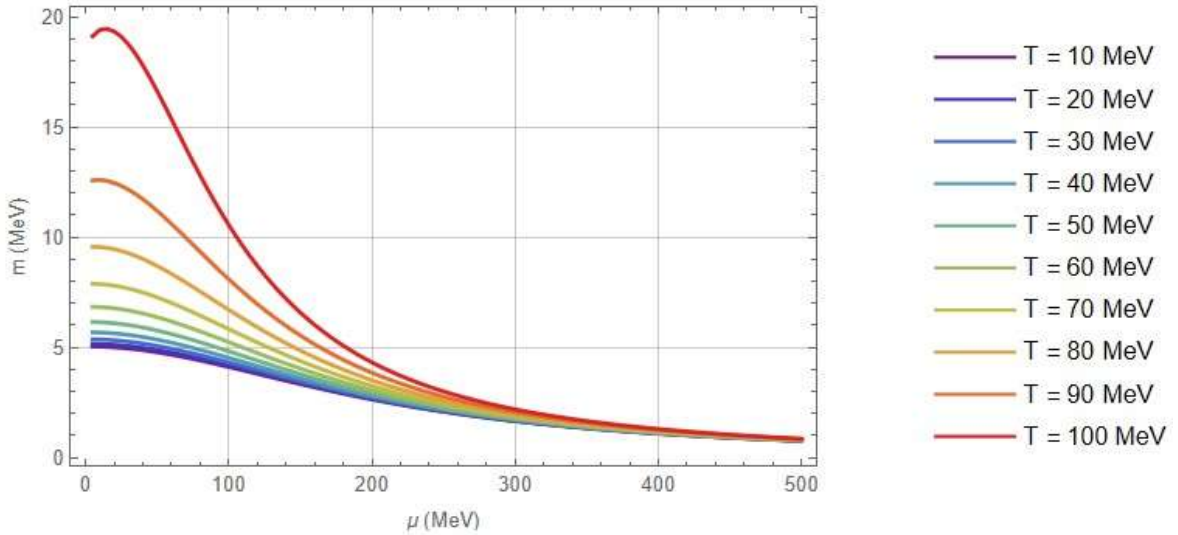


Figura 3.1: Ec. de Gap a diferentes temperaturas.

tinuidades. Al subir T , la curva parte de valores de $m(0)$ algo menores y conserva aún un descenso continuo. Esto quiere decir que en el rango $\mu \leq 500$ MeV el modelo sugiere una transición de fase tipo crossover, sin indicios de un salto abrupto de primer orden. Para el siguiente caso, al tener el acoplamiento efectivo G' repetimos la rutina haciendo el reemplazo en la ecuación de Gap y obtenemos curvas como se ve en 3.2 con un pico en $m(\mu)$ a densidades intermedias, seguido de un descenso a densidades más altas. Este comportamiento, a diferencia del caso anterior, hace ver que la forma de la interacción

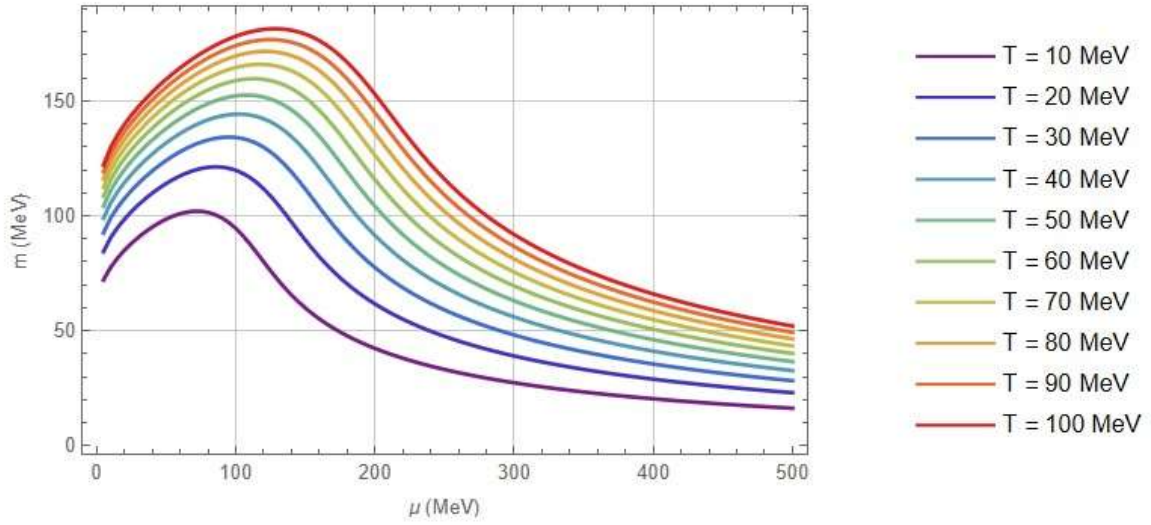


Figura 3.2: Ec. de Gap a diferentes temperaturas con G' .

modifica drásticamente la evolución de la masa dinámica. Aún así, tampoco se observa un salto de primer orden en la región explorada; la transición sigue siendo suave.

3.2.2 Influencia de la masa desnuda M en el comportamiento de m

Al examinar la dependencia de $m(M)$ fijando μ , en este caso a 400 MeV para el caso de G , tenemos que la curva en la figura 3.3 muestra un crecimiento rápido a M muy bajos (ceranos al límite quiral) y luego satura a partir de valores próximos a 100 MeV.

Ahora para el caso de G' se exhibe un crecimiento más prolongado como se ve en 3.4, indicando que la interacción refuerza el rompimiento quiral incluso al tener valores de M grandes.

En términos claros, una masa desnuda M mayor reduce la diferencia que la dinámica puede aportar, de modo que la saturación es más notoria en el caso G . Por otro lado, para G' el reescalado hace que la masa dinámica se mantenga más alta.

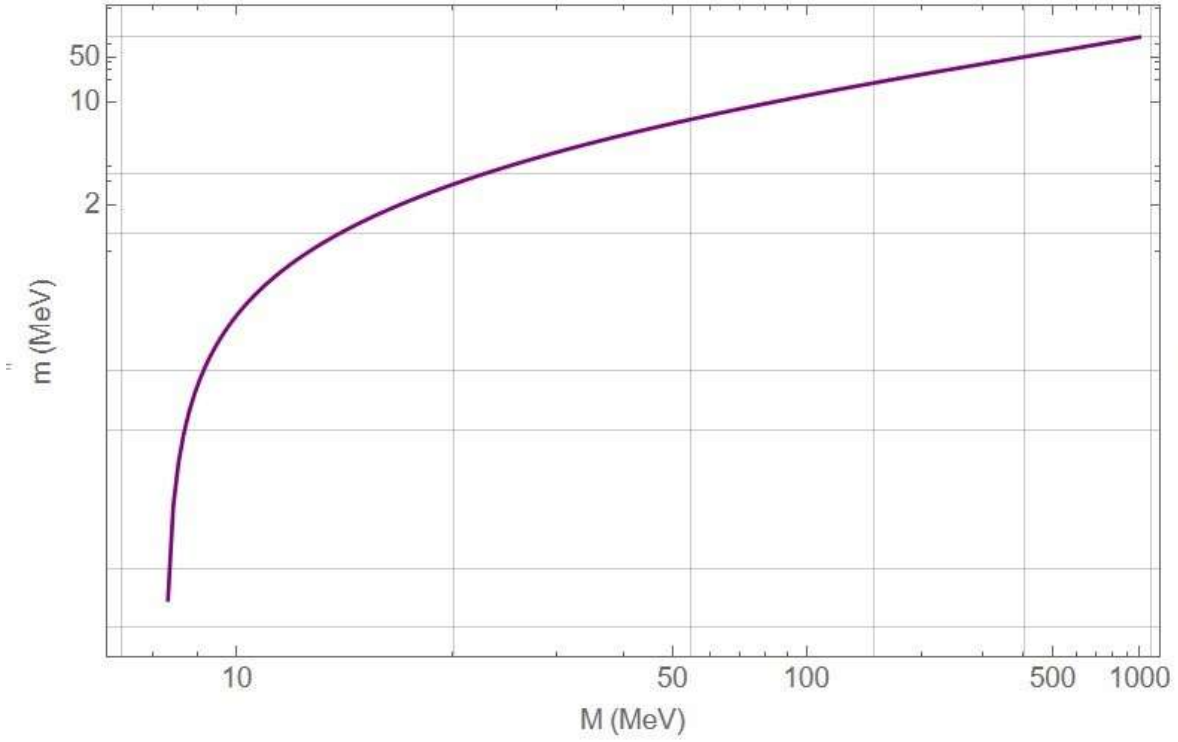


Figura 3.3: Ec. de Gap a un potencial químico fijo.

SECCIÓN 3.3

Sensibilidad del condensado quiral a variaciones en el potencial químico

3.3.1 Comportamiento del condensado quiral ante cambios en μ

En este sistema físico en lugar de graficar el condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle(\mu)$ directamente, el código creado resuelve la ecuación de Gap y luego evalúa la derivada $\frac{\partial \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\partial \mu}$. Integrando esta derivada respecto a la masa desnuda como variable, se obtiene una magnitud que refleja cómo evoluciona la ruptura quiral al variar el potencial μ .

De nuevo para el caso de G fijo la curva en 3.5 desciende monótonamente entre aproximadamente 2.5 a 0 en $\mu \leq 1000$ MeV, sin cruzar el eje negativo. Esto sugiere una restauración progresiva de la simetría quiral sin discontinuidades. Ahora para G' la gráfica 3.6 presenta un cruce hacia valores negativos en $\mu \approx 700 - 800$ MeV, denotando

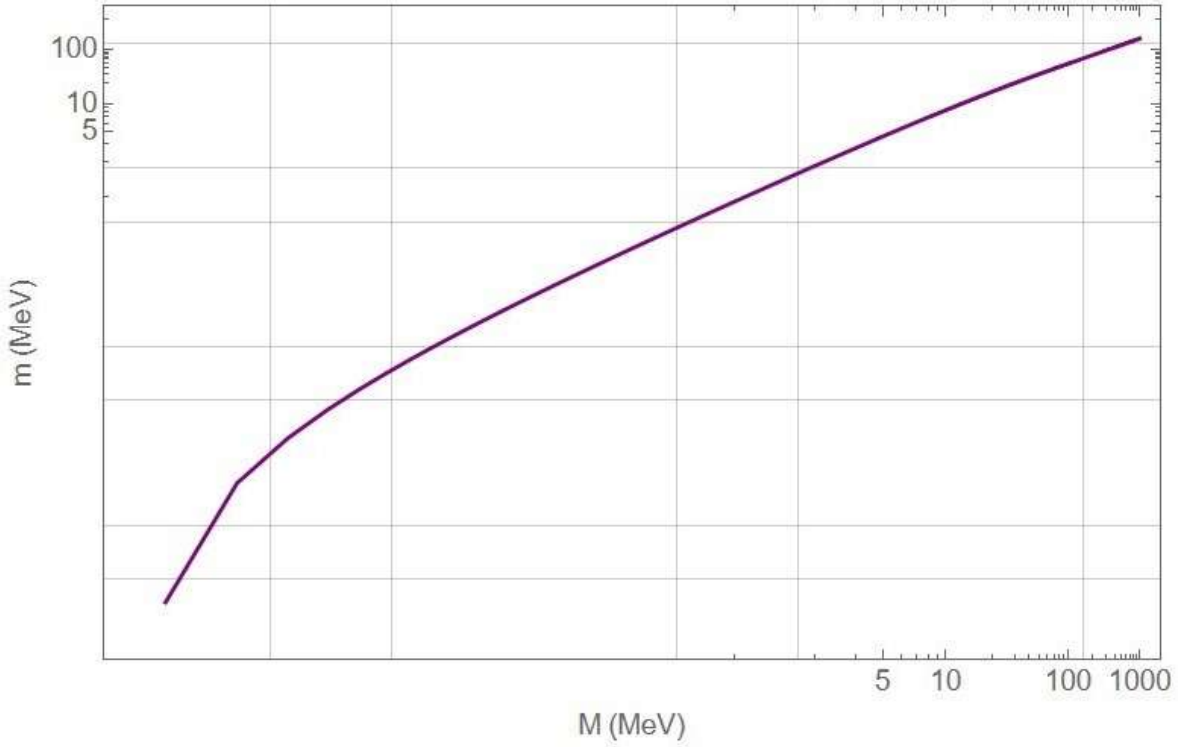


Figura 3.4: Ec. de Gap a un potencial químico fijo con G' .

un cambio más marcado en la ruptura quiral, que es posiblemente mayor sobre-ruptura a densidades intermedias y una restauración más intensa a altas densidades.

SECCIÓN 3.4

Implicaciones termodinámicas de la variación del condensado quiral

3.4.1 Conexión entre el condensado quiral y la velocidad del sonido c_s

Las modificaciones en $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ tienen repercusiones en la densidad de quarks y, por ende, en la velocidad del sonido c_s . Para estimar c_s^2 se adopta la forma:

$$c_s^2 = \frac{n}{\mu} \frac{1}{\frac{dn}{d\mu}}, \quad (3.2)$$

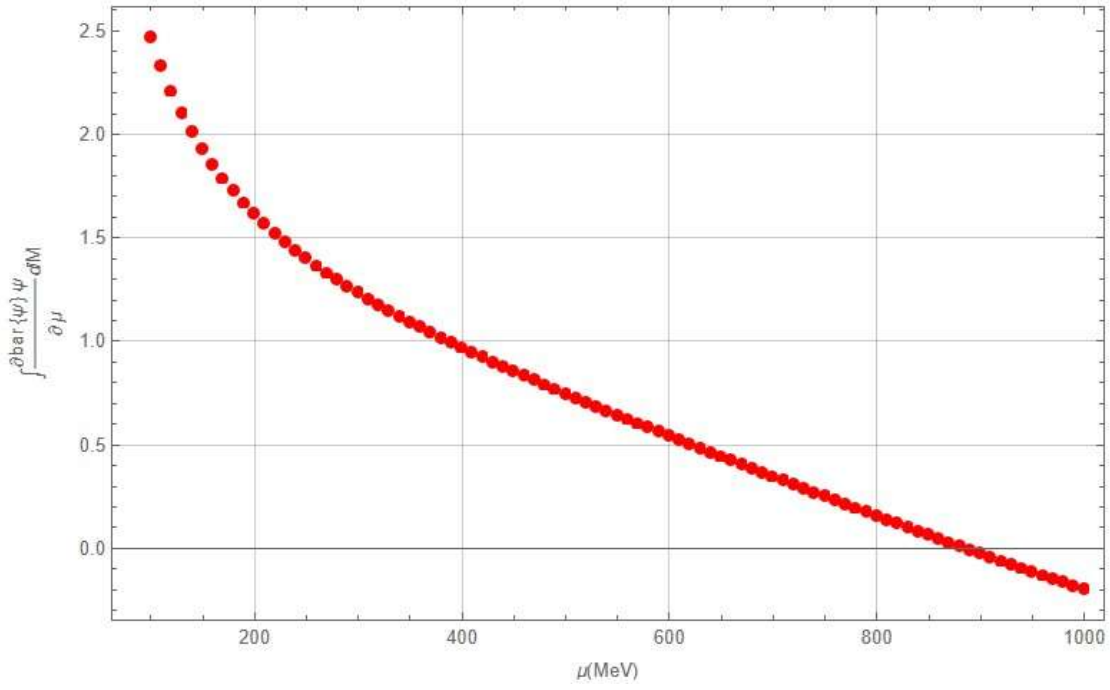


Figura 3.5: Cálculo del cambio del condensado quiral en el medio a una temperatura pequeña $T \approx 1 \times 10^{-3}$

donde $n(\mu)$ se asocia a la integral $\int \frac{\partial \langle \bar{\psi} \psi \rangle}{\partial \mu} dM$, o análogamente al gradiente del potencial termodinámico.

Para ejemplificar esta definición, al considerar el acoplamiento G , a temperaturas pequeñas del rango de $10^{-3} - 10^{-5}$. La curva 3.7 muestra como se alcanza un valor cercano al valor esperado en QCD y al ser positivo, se obtiene un comportamiento estable a densidades intermedias-altas, que es típico de una fase de quarks altamente compresible [38].

La aproximación de $c_s^2 \approx \frac{1}{3}$ a bajas temperaturas en el modelo de NJL refleja un comportamiento cercano al límite conforme de la QCD, donde la velocidad del sonido en un fluido relativista satisface $c_s^2 = \frac{1}{3}$. Este valor es característico de sistemas con ecuación de estado conforme dada por: $\epsilon = 3P$, donde ϵ es la densidad de energía y P la presión, usada para un gas ideal de partículas ultrarelativistas [3, 4].

En QCD el límite conforme surge en el régimen a altas energías las interacciones fuertes se debilitan ($\alpha_s \rightarrow 0$) y QGP se comporta como un gas ideal con $c_s^2 = \frac{1}{3}$. Por otro lado, aunque QCD no es una teoría conforme exacta, ciertas aproximaciones como el límite de grandes N_c o regímenes donde T y μ son grandes se pueden exhibir comportamientos cercanos a la invarianza conforme [3].

En el modelo NJL, al tener la forma de 3.2, a densidades grandes ($\mu \gg m$), los quarks dominan el sistema y su dinámica se aproxima a la de un gas de Fermi relativista, donde las interacciones residuales capturadas por G y G' no alteran la ecuación de

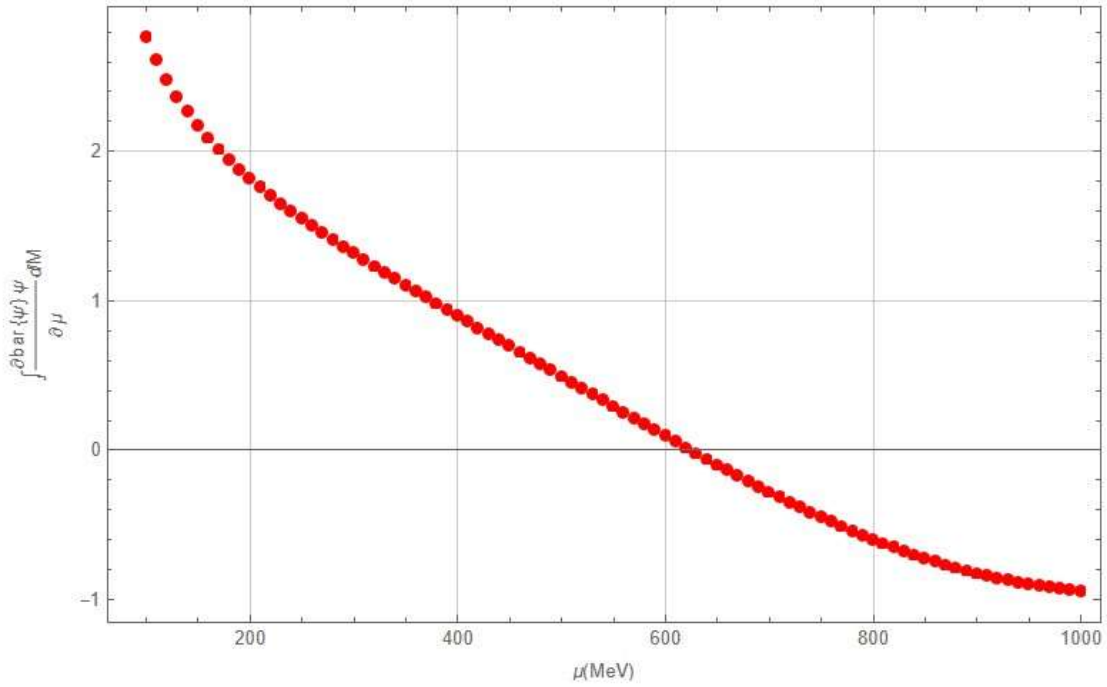


Figura 3.6: Cálculo de la velocidad del sonido en el medio a una temperatura pequeña $T \approx 1 \times 10^{-3}$ y G'

estado $\epsilon \approx 3P$ [4].

SECCIÓN 3.5

Localización del Punto Crítico Final (CEP) a través de los indicadores numéricos

Si el CEP se ubica en un rango (μ_{CEP}, T_{CEP}) donde la transición deja de ser de primer orden y se vuelve un crossover, en la curva c_s^2 se ve el desvanecimiento de la discontinuidad o la cofluencia de las dos ramas. De este modo, la observación de la discontinuidad, o su ausencia, en c_s^2 según se varíe T brinda un indicio más de la localización aproximada del CEP.

Pese a que en el rango de $\mu \leq 500$ MeV o $\mu \leq 1000$ MeV no se ha visto un gran salto, se encuentra que a bajas temperaturas (por debajo de T_{CEP}), la masa dinámica o el condensado quiral exhibe un cambio rápido que, con mayor resolución, puede convertirse en un salto real al afinar la malla. Subiendo de temperatura, el salto desaparece,

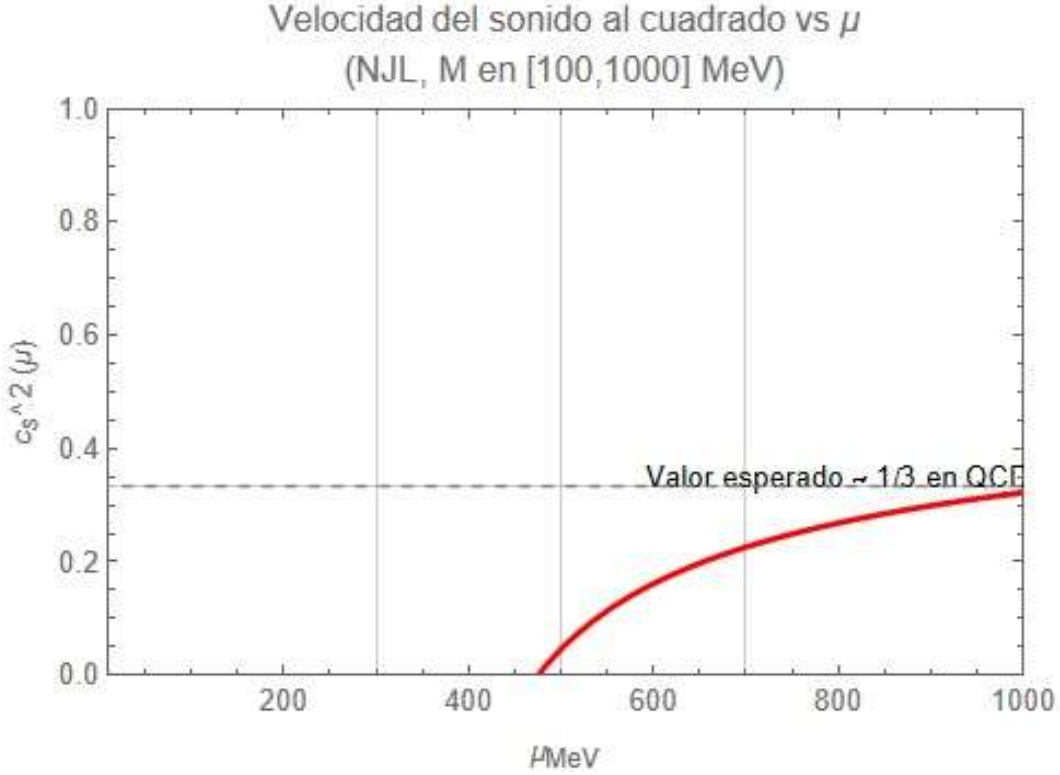


Figura 3.7: Grafica de la velocidad del sonido con $T = 1 \times 10^{-3}$

dando lugar a un crossover. Esto es precisamente la señal de la existencia de un CEP a (μ_{CEP}, T_{CEP}) donde la línea de primer orden finaliza [8].

Es decir, si la ecuación de Gap, al variar μ , muestra doble solución a $T < T_{crit}$ y una única solución suave a $T > T_{crit}$, el punto donde se fusionan las dos soluciones constituye el punto crítico final.

En la gráfica $m(\mu)$ podría evidenciar, por ejemplo, un cambio de pendiente muy notorio o un tipo de doblaje de la curva cercana a μ entre 300 – 350 MeV y temperaturas entre 50 – 80 Me, que corresponde típicamente a las estimaciones del modelo de NJL [7].

Si la transición es de primer orden a $T < T_{CEP}$, a la densidad o (μ) de coexistencia, se forma un salto en $n(\mu)$. Esto suele traducirse en una discontinuidad en c_s^2 . A $T > T_{CEP}$, la discontinuidad se suaviza hasta que desaparece, quedando un crossover con c_s^2 continuo [8].

Dado que la gráfica de $m(\mu)$ con G a distintas T muestra esa transición de un comportamiento más parecido a primer orden, o un fuerte cambio, a bajas T y un crossover suave a altas T , se infiere un CEP. Los cambios en c_s^2 corroboran una especie de blandura de la ecuación de estado en cercanías del CEP. Así, se confirma que los resultados son coherentes con la existencia del CEP en la región $\mu \approx 300 - 350$ MeV, $T \approx 50 - 80$ MeV.

Capítulo 4

Observables y extensiones del modelo a futuro

En el capítulo anterior, se describió el análisis numérico de la ecuación de GAP en el modelo NJL y se discutieron resultados como la evolución de la masa dinámica, el condensado quiral y la velocidad del sonido. A partir de estas curvas, se rescata la posibilidad de localizar el CEP en el diagrama de fases de la materia de quarks, dependiendo de los parámetros y el tipo de acoplamiento que consideramos constante G o efectivo G' .

En este capítulo nos centraremos en interpretar los resultados con el contexto de la fenomenología y la relación que tiene con la estructura del diagrama de fases de QCD. También se profundiza en la contribución que los mecanismos de apantallamiento, o reescalado del acoplamiento, aportan a la localización y caracterización del CEP. Por último, exploraremos posibles extensiones del modelo de NJL que podrían enriquecer la descripción de la materia de quarks, incluyendo la incorporación de la dinámica de gluones o interacciones de rango mayor.

SECCIÓN 4.1

Interpretación física de los resultados

4.1.1 Implicaciones para la estructura del diagrama de fase

La masa dinámica $m(\mu, T)$, el condensado quiral $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ y la velocidad del sonido c_s^2 son indicadores clave para poder comprender como sucede la transición quiral y, potencialmente, el desconfinamiento en la materia de quarks. Si bien, el modelo de NJL no incorpora confinamiento de forma explícita, su ruptura espontánea de la simetría quiral captura uno de los aspectos importantes de la fenomenología hadrónica. [7, 8].

Específicamente lo más importante en este trabajo es el descenso de la masa dinámica, pues al crecer μ nos confirma la restauración parcial de la simetría quiral a altas densidades. Si el descenso es continuo, se sugiere un crossover; si hay un salto se refleja una transición de primer orden.

Por otro lado, la susceptibilidad quiral $\frac{\partial \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\partial \mu}$ nos dice que los picos en estas derivadas señalan regiones donde la transición es evidente, y en un diagrama (μ, T) se mapea la zona de cambio rápido de fase. Y por último c_s^2 permite identificar la blandura de la ecuación de estado, que es relevante para colisiones de iones pesados y estrellas de neutrones. Un c_s^2 cercano a 0 indica alta compresibilidad, asociada a un cambio de fase.

Al comparar el acoplamiento constante G con el acoplamiento efectivo G' , se aprecia cómo la forma de la interacción puede desplazar la transición a densidades distintas, o incluso tal vez modificar la naturaleza del cambio, apareciendo picos intermedios en la masa dinámica. Esto implica que el diagrama de fases es sensible a la manera en la que el modelo sintetiza los efectos gluónicos y de la dinámica no perturbativa a bajas energías [18]. Aunado a esto, las gráficas discutidas en el capítulo anterior sugieren que, para acoplamientos y parámetros estandar de NJL (G fijo, corte Λ , masas desnudas de quarks ligeros), el diagrama de fases exhibe una línea de transición que cambia de primer orden a crossover en el rango (μ, T) que es típico de aproximaciones en NJL, localizando el CEP alrededor de $\mu \approx 300 - 350$ MeV y $T \approx 50 - 100$ MeV.

SECCIÓN 4.2

Contribución al entendimiento del CEP

Al incluir el acoplamiento efectivo G' basado en su forma $G\frac{m'}{m}$ o algunos otros mecanismos de apantallamiento puede alterar la posición del CEP. De forma general, el efecto observado es el desplazamiento de la línea de primer orden en el plano (μ, T) , el cambio de la intensidad o la pendiente de la transición, haciendo más o menos abrupto el salto de la masa dinámica.

Si las gráficas con G' no exhiben un salto en $\mu \leq 500$ MeV, podría significar que la transición de primer orden se desvanece a densidades mayores o que el modelo sufre un reforzamiento intermedio y se vuelve un crossover completo en ese rango. Sin embargo, al ampliar el rango de μ y refinar los pasos, es posible que la bifurcación propia de primer orden aparezca a $\mu \geq 600$ MeV.

En el trabajo cuando G es fijo se obtienen indicaciones de un salto o fuerte pendiente en $m(\mu)$ a bajas T y la desaparición de ese salto al aumentar T . Esto traza el punto donde la línea de primer orden pasa a crossover, que es el CEP.

Considerando G' , si la ruptura quiral se refuerza a densidades intermedias, la localización del CEP podría moverse a valores mayores de μ . En caso de no verse el salto hasta $\mu = 500$ MeV, esto no invalida la existencia del CEP; simplemente indica que el salto puede darse a $\mu > 600$ o 700 MeV. Por tanto, la contribución del apantallamiento es fundamental para reubicar el CEP y explora la fenomenología en densidades aún más altas.

El condensado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ sigue siendo el parámetro de orden para la transición, tal que su disminución drástica o sus picos de susceptibilidad confirman la aparición de una fase de quarks donde la simetría quiral está restaurada. Con ambos acoplamientos se observa que la susceptibilidad $\chi_\mu = \frac{\partial \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\partial \mu}$ exhibe picos o cruces que señalan el cambio de fase. La integral de esta derivada evidencia como se acaba la ruptura quiral a altas densidades, de forma más o menos abrupta según el acoplamiento.

SECCIÓN 4.3

Extensiones del modelo y posibles aplicaciones

En este trabajo los resultados muestran que el modelo de NJL con dos acoplamientos diferentes proporciona una descripción consistente de la fase quiral, pero vale la pena

mencionar posibles extensiones que podrían refinar o ampliar su poder de manifestar resultados.

Si introducimos por ejemplo un modelo Polyakov-NJL con un potencial de Polyakov para aproximar el confinamiento y alinear la transición quiral con un pseudo-desconfinamiento, se suele desplazar la ubicación del CEP, haciéndola más cercana a los indicios de lattice QCD a temperaturas moderadas.

Otra forma de hacer aproximaciones más precisas sería incorporar términos no locales, o la interacción tipo 't Hooft de 6 quarks, mejorando la descripción de la simetría axial $U(1)_A$. Esto afecta la masa de ciertos mesones como el η y a densidades altas se puede modificar la ubicación del CEP.

Por otro lado, tener un acoplamiento $G(\mu, T)$ con más profundidad podría reproducir la disminución de la interacción fuerte a densidades extremas. Esta generalización entre otras se han explorado en metodos de renormalización funcional [31].

En astrofísica la ecuación de estado con un CEP o con transiciones de fase suaves incide en la estructura de neutrones y la aparición de fases quark. También la búsqueda del CEP se apoya en fluctuaciones hadrónicas en colisiones de iones pesados. Conocer el diagrama de fase y la susceptibilidad quiral en NJL o PNJL orienta la interpretación de esos observables [32].

Conclusión

En este trabajo se ha profundizado el estudio sistemático de la transición de fase quiral y la dinámica del condensado $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ mediante el modelo de NJL [8, 30], donde se destaca su enfoque frente a otros modelos.

Encontramos que a bajas temperaturas $T \lesssim 50$ MeV, el esquema asociado a G muestra una transición de primer orden caracterizada por su descenso abrupto en $m(\mu)$ en valor de $\mu \approx 300 - 400$ MeV. En contraste a G' , se induce un máximo local en $m(\mu)$ seguido de una caída gradual, sugiriendo un desplazamiento del CEP hacia $\mu \gtrsim 500$ MeV [20, 21]. Este comportamiento nos resalta la influencia de la dependencia efectiva en la masa pues $G' = G \frac{m'}{m}$ en la estructura de la transición.

Para temperaturas altas $T \approx 150$ MeV, ambos esquemas convergen en una transición suave (crossover), consistente con resultados de LQCD y la desaparición progresiva del CEP. Es decir, a altas temperaturas ($T \gtrsim T_{CEP}$), la línea de transición de primer orden desaparece, y solo sobrevive el crossover en todo el rango de μ . Así se ve reflejada la transición de un régimen de coexistencia de fases a primer orden a uno de transición continua o crossover, fenómeno que el modelo NJL describe muy bien y es consistente con predicciones de QCD. Además de la importancia para mapear la estructura crítica del diagrama de fase, incluso en ausencia de confinamiento explícito.

En el régimen de baja temperatura, $T \approx 10^{-3} - 10^{-5}$ MeV, c_s^2 se aproxima al límite conforme ($c_s^2 \approx \frac{1}{3}$), que es donde se satisface la velocidad del sonido en un fluido relativista, validando la compresibilidad del medio quark cerca de la transición. Para G' , la depresión en c_s^2 cerca de $\mu \approx 500$ MeV refleja una fase altamente compresible, aunque sin discontinuidades, lo que sugiere un CEP fuera del rango explorado [40].

El modelo NJL destaca por su capacidad para hacer combinaciones de simplicidad analítica y precisión fenomenológica, superando limitaciones como por ejemplo en Lattice QCD que enfrenta el problema de signo para $\mu > 0$, el modelo NJL permite explorar todo el diagrama $\mu - T$ mediante técnicas numéricas más accesibles. Además es adaptable a acoplamientos dependientes, como por ejemplo el caso de G' , el cuál lo hace superior a modelos más rígidos como el MIT bag model, que ignora la dinámica quark-antiquark. También NJL reproduce la ruptura espontánea de la simetría quiral sin requerir ajustes externos, como por ejemplo con el MIT Bag Model donde usan la

presión del vacío que confina a los quarks dentro del hadrón como B_{bag} , que es ajustable también para la compensación a la falta de una dinámica que genere una ruptura de simetría de manera natural.

Las gráficas para $c_s^2(\mu)$ muestran condiciones cualitativas en concordancia con Lattice QCD y observaciones en estrellas de neutrones como la $PSR - J0740 + 6620$ con $c_s^2 \approx \frac{1}{3}$ [40]. Este éxito es notable frente a modelos hidrodinámicos puros, que carecen de conexión con la física dentro del problema.

Ahora bien, si consideramos el modelo de PNJL [33], este incorpora confinamiento vía campo de Polyakov, el NJL sirve como base para implementarlo y prioriza mayor claridad en el estudio quiral.

Las barreras en NJL son la ausencia de confinamiento explícito y la dependencia que tenemos sobre la regularización implementada, pero hay un balance entre precisión y manejabilidad, la cual hace al modelo muy efectivo para estudios donde se implementan altas densidades, donde Lattice QCD y modelos gluónicos, como instantones, resultan malos.

Además de que se abren múltiples ventanas para profundizar en la física de quarks, como extender a PNJL, incluir términos no locales (modelar interacciones de tres cuerpos o correcciones gluónicas residuales para una mayor aproximación en la dinámica de QCD), mapeo del CEP utilizando mallas más finas en (μ, T) y contrastar estos datos con el FAIR [12] o NICA [11]; y, por ejemplo, integrar la ecuación de estado derivada en simulaciones de estructura estelar para predecir relaciones masa-radio observables.

En síntesis, tenemos una mayor adaptabilidad del modelo en el caso del apantallamiento, reproducir una buena c_s^2 y ser compatible con la QCD, prediciendo fases críticas como una alternativa más barata que Lattice QCD a altas μ o mayor predictibilidad que el modelo estático MIT Bag [17].

REFERENCIAS

- [1] D H Rischke, B L Friman, H Stocker, and W Greiner. Phase transition from hadron gas to quark-gluon plasma: influence of the stiffness of the nuclear equation of state. *Journal of Physics G: Nuclear Physics*, 14(2):191, feb 1988.
- [2] M. Cheng, N. H. Christ, S. Datta, J. van der Heide, C. Jung, F. Karsch, O. Kaczmarek, E. Laermann, R. D. Mawhinney, C. Miao, P. Petreczky, K. Petrov, C. Schmidt, and T. Umeda. Transition temperature in qcd. *Phys. Rev. D*, 74:054507, Sep 2006.
- [3] A. Bazavov, H.-T. Ding, P. Hegde, O. Kaczmarek, F. Karsch, N. Karthik, E. Laermann, Anirban Lahiri, R. Larsen, S.-T. Li, Swagato Mukherjee, H. Ohno, P. Petreczky, H. Sandmeyer, C. Schmidt, S. Sharma, and P. Steinbrecher. Chiral crossover in qcd at zero and non-zero chemical potentials. *Physics Letters B*, 795:15–21, 2019.
- [4] Tanmoy Bhattacharya, Michael I. Buchoff, Norman H. Christ, H.-T. Ding, Rajan Gupta, Chulwoo Jung, F. Karsch, Zhongjie Lin, R. D. Mawhinney, Greg McGlynn, Swagato Mukherjee, David Murphy, P. Petreczky, Dwight Renfrew, Chris Schroeder, R. A. Soltz, P. M. Vranas, and Hantao Yin. Qcd phase transition with chiral quarks and physical quark masses. *Phys. Rev. Lett.*, 113:082001, Aug 2014.
- [5] Enif Gutiérrez, Aftab Ahmad, Alejandro Ayala, Adnan Bashir, and Alfredo Raya. The qcd phase diagram from schwinger–dyson equations. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 41(7):075002, apr 2014.
- [6] A Ahmad and A Raya. Inverse magnetic catalysis and confinement within a contact interaction model for quarks. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 43(6):065002, may 2016.
- [7] S. P. Klevansky. The nambu—jona-lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649–708, Jul 1992.
- [8] M BUBALLA. Njl-model analysis of dense quark matter. *Physics Reports*, 407(4–6):205–376, February 2005.

-
- [9] C. Sasaki, B. Friman, and K. Redlich. Chiral phase transition in the presence of spinodal decomposition. *Phys. Rev. D*, 77:034024, Feb 2008.
 - [10] J. MOREIRA, B. HILLER, A. A. OSIPOV, and A. H. BLIN. Thermodynamic potential with correct asymptotics for pnjl model. *International Journal of Modern Physics A*, 27(11):1250060, April 2012.
 - [11] V I Kolesnikov, V D Kekelidze, V A Matveev, and A S Sorin. Progress in the construction of the nica accelerator complex. *Physica Scripta*, 95(9):094001, jul 2020.
 - [12] M Durante, P Indelicato, B Jonson, V Koch, K Langanke, Ulf-G Meißner, E Nappi, T Nilsson, Th Stöhlker, E Widmann, and M Wiescher. All the fun of the fair: fundamental physics at the facility for antiproton and ion research. *Physica Scripta*, 94(3):033001, jan 2019.
 - [13] V. A. Goy, V. Bornyakov, D. Boyda, A. Molochkov, A. Nakamura, A. Nikolaev, and V. Zakharov. Sign problem in finite density lattice qcd. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2017(3), March 2017.
 - [14] Alejandro Ayala, Luis A. Hernández, Marcelo Loewe, and Cristian Villavicencio. Qcd phase diagram in a magnetized medium from the chiral symmetry perspective: the linear sigma model with quarks and the nambu–jona-lasinio model effective descriptions. *The European Physical Journal A*, 57(7), July 2021.
 - [15] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
 - [16] Claudia Ratti, Michael A. Thaler, and Wolfram Weise. Phases of qcd: Lattice thermodynamics and a field theoretical model. *Physical Review D*, 73(1), January 2006.
 - [17] H. C. Chandola, Garima Punetha, and H. Dehnen. Bag model of hadrons, dual qcd thermodynamics and quark-gluon plasma, 2015.
 - [18] Kenji Fukushima. Phase diagrams in the three-flavor Nambu-Jona-Lasinio model with the Polyakov loop. *Phys. Rev. D*, 77:114028, 2008. [Erratum: Phys.Rev.D 78, 039902 (2008)].
 - [19] B. Borderie and M.F. Rivet. Nuclear multifragmentation and phase transition for hot nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 61(2):551–601, October 2008.
 - [20] Z Fodor and S.D Katz. Critical point of qcd at finite t and μ , lattice results for physical quark masses. *Journal of High Energy Physics*, 2004(04):050–050, April 2004.

-
- [21] Xiaofeng Luo and Nu Xu. Search for the qcd critical point with fluctuations of conserved quantities in relativistic heavy-ion collisions at rhic: an overview. *Nuclear Science and Techniques*, 28(8), July 2017.
- [22] Szabolcs Borsányi, Gergely Endrődi, Zoltán Fodor, Antal Jakovác, Sándor D. Katz, Stefan Krieg, Claudia Ratti, and Kálmán K. Szabó. The qcd equation of state with dynamical quarks. *Journal of High Energy Physics*, 2010(11), November 2010.
- [23] Ulrich Heinz and Maurice Jacob. Evidence for a new state of matter: An assessment of the results from the cern lead beam programme, 2000.
- [24] I. Arsene, I.G. Bearden, D. Beavis, C. Besliu, B. Budick, H. Bøggild, C. Chasman, C.H. Christensen, P. Christiansen, J. Cibor, R. Debbe, E. Enger, J.J. Gaardhøje, M. Germinario, O. Hansen, A. Holm, A.K. Holme, K. Hagel, H. Ito, E. Jakobsen, A. Jipa, F. Jundt, J.I. Jørdre, C.E. Jørgensen, R. Karabowicz, E.J. Kim, T. Kozik, T.M. Larsen, J.H. Lee, Y.K. Lee, S. Lindahl, G. Løvholden, Z. Majka, A. Makeev, M. Mikelsen, M.J. Murray, J. Natowitz, B. Neumann, B.S. Nielsen, D. Ouerdane, R. Planeta, F. Rami, C. Ristea, O. Ristea, D. Röhrich, B.H. Samset, D. Sandberg, S.J. Sanders, R.A. Scheetz, P. Staszczel, T.S. Tveter, F. Videbæk, R. Wada, Z. Yin, and I.S. Zgura. Quark–gluon plasma and color glass condensate at rhic? the perspective from the brahms experiment. *Nuclear Physics A*, 757(1–2):1–27, August 2005.
- [25] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, and J. Stachel. Hadron production in central nucleus–nucleus collisions at chemical freeze-out. *Nuclear Physics A*, 772(3):167–199, 2006.
- [26] Mark Alford, Krishna Rajagopal, and Frank Wilczek. Color-flavor locking and chiral symmetry breaking in high density qcd. *Nuclear Physics B*, 537(1–3):443–458, January 1999.
- [27] M. K. Volkov and A. E. Radzhabov. The Nambu-Jona-Lasinio model and its development. *Phys. Usp.*, 49:551–561, 2006.
- [28] U. Vogl and W. Weise. The nambu and jona-lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 27:195–272, 1991.
- [29] T. Schäfer and E. V. Shuryak. Instantons in qcd. *Reviews of Modern Physics*, 70(2):323–425, April 1998.
- [30] Tetsuo Hatsuda and Teiji Kunihiro. Qcd phenomenology based on a chiral effective lagrangian. *Physics Reports*, 247(5–6):221–367, October 1994.
- [31] Bernd-Jochen Schaefer and Jochen Wambach. Renormalization group approach towards the QCD phase diagram. *Phys. Part. Nucl.*, 39:1025–1032, 2008.

- [32] J.B. Kogut, M.A. Stephanov, D. Toublan, J.J.M. Verbaarschot, and A. Zhitnitsky. Qcd-like theories at finite baryon density. *Nuclear Physics B*, 582(1–3):477–513, August 2000.
- [33] B.-J. Schaefer, J. M. Pawłowski, and J. Wambach. Phase structure of the polyakov-quark-meson model. *Phys. Rev. D*, 76:074023, Oct 2007.
- [34] Alejandro Ayala, Jorge David Castaño-Yepes, José Antonio Flores, Saúl Hernández, and Luis Hernández. Using the linear sigma model with quarks to describe the qcd phase diagram and to locate the critical end point. *EPJ Web of Conferences*, 172:08002, 2018.
- [35] Xiaodong Sun, Ruirui Xu, Yuan Tian, Zhongyu Ma, Zhi Zhang, Zhigang Ge, Hongfei Zhang, E. N. E. van Dalen, and H. Mütter. Relativistic mean-field approach in nuclear systems. *Phys. Rev. C*, 101:034302, Mar 2020.
- [36] Asakawa Masayuki and Yazaki Koichi. Chiral restoration at finite density and temperature. *Nuclear Physics A*, 504(4):668–684, 1989.
- [37] O. Scavenius, Á. Mócsy, I. N. Mishustin, and D. H. Rischke. Chiral phase transition within effective models with constituent quarks. *Physical Review C*, 64(4), August 2001.
- [38] Joseph I. Kapusta. *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [39] Michel Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 3 2011.
- [40] Silvia Traversi, Prasanta Char, Giuseppe Pagliara, and Alessandro Drago. Speed of sound in dense matter and two families of compact stars. *Astronomy and Astrophysics*, 660:A62, April 2022.

Alejandro Rosas Díaz

Diagrama de fases de QCD desde el modelo de NJL incluyendo efectos de apantallamiento a densidades a

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:433921221

Fecha de entrega

25 feb 2025, 12:18 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

25 feb 2025, 12:19 p.m. GMT-6

Nombre de archivo

Diagrama de fases de QCD desde el modelo de NJL incluyendo efectos de apantallamiento a den....pdf

Tamaño de archivo

726.4 KB

53 Páginas

13,366 Palabras

65,804 Caracteres

13% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 13%  Fuentes de Internet
- 6%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en ciencias en el área de física	
Título del trabajo	Diagrama de fases de QCD desde el modelo de NJL incluyendo efectos de apantallamiento a densidades altas y bajas temperaturas	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Alejandro Rosas Díaz	2331285x@umich.mx
Director	Dr. Alfredo Raya Montaña	alfredo.raya@umich.mx
Codirector	Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo	vaquera@fisica.ugto.mx
Coordinador del programa	Dr. Umberto Cotti Gollini	mae.ciencias.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción

Asistencia en la redacción	No	
----------------------------	----	--

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	N/A	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Alejandro Rosas Díaz
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, 25/02/2025