



Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Funtores de reducción y problemas matriciales.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta:

Gabriel Hernández Martínez

TUTOR PRINCIPAL:

Dr. Leonardo Salmerón Castro

Centro de Ciencias matemáticas UNAM, Campus Morelia

Morelia, Michoacán, México **Abril 2025**

Dedicatoria

Dedicado especialmente para Lili ♡.

Agradecimientos

En este trabajo quiero agradecer a cada una de las personas que estuvieron para mi en estos 2 años de maestría.

En primer lugar agradecer a mi asesor y guía en este camino al **Dr. Leonardo Salmerón Castro**, por su paciencia y gran apoyo durante este trabajo, gracias por su conocimiento y dedicación en todos estos años, admiro mucho su trabajo y la gran persona que es, gracias por todo. Agradecer a mis revisores de Tesis, **Dr. Raymundo Bautista**, **Dr. Victor Becerril**, **Dr. Gerardo Raggi**, **Dr. Ernesto Vallejo**. Gracias por su apoyo en este trabajo y sobre todo por los cursos y enseñanzas impartidas en la maestría.

Teniendo en cuenta el gran esfuerzo que demanda hacer una maestría en el posgrado conjunto de la UNAM y la UMSNH, quiero agradecer a la persona que me ayudo a salir adelante cuando mas lo necesite y que ha estado aquí en cada uno de estos momento buenos y malos, a **Lili**, por enseñarme que puedo mejorar día a día. Agradezco su gran paciencia y su sentido del humor para no dejarme caer en ningún momento.

Agradecer a la UNAM y a la UMSNH por las instalaciones y gran ayuda en lo que se necesito, a CONACHYT por el apoyo dado en estos 2 años.

Quiero agradecer a mis amigos los cuales me ayudaron en este camino, **Itzel Rosas**, **Miguel Calderón**, **Benjamin Garcia**, **Ismael Romo**, **Francisco Santiago**, **Angel Camacho**, **Marcela Mercado**.

Para terminar a mis familiares, les agradezco por estar conmigo en cada uno de los momento que los necesite, a mi mamá **Sonia Martínez** y mi papá **Francisco Hernández**, mis abuelos, tíos y hermanos por estar en este gran camino.

Quiero terminar agradeciéndole a dos grandes amigos de licenciatura que hicieron que yo llegara hasta donde estoy el día de hoy, a la **Dra. Anel Esquivel**, por todo su apoyo y gran dedicación en todo lo que pudo ayudarme y finalmente al **Mtro. Gustavo Montaña**, por guiarme por este gran camino, en serio los aprecio y quiero mucho.

Índice general

Resumen	iv
Introducción	v
1 Ditálgebras débiles entrelazadas y sus módulos	1
1.1 Ditálgebras débiles	1
1.2 Cocientes de ditálgebras débiles	8
1.3 Ditálgebras débiles estratificadas	12
1.4 Ditálgebras débiles entrelazadas triangulares	14
1.5 La categoría exacta $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$	24
1.6 El álgebra derecha de $(\mathcal{A}, I)$	29
1.7 Sucesiones que casi se dividen	40
2 Funtores de reducción	49
2.1 Reducciones básicas y marcos	49
2.2 Relación Hom-Tensor y bases duales	64
2.3 Módulos admisibles y la ditálgebra débil $\mathcal{A}^X$	66
2.4 Reducción con módulos admisibles	74
2.5 Módulos admisibles triangulares	83
2.6 Módulos admisibles completos	93
2.7 Funtores de reducción y bifunctor $Ext_{\mathcal{E}}(-, ?)$	111
3 Apéndice 1	126
3.1 Categorías aditivas con idempotentes que se dividen	126
3.2 Categorías Krull-Schmidt	128
3.3 Categoría de funtores	131
4 Apéndice 2	145
4.1 Preliminares	145
4.2 Categorías exactas	148
4.3 Propiedades de las conflaciones y bifunctor $Ext_{\mathcal{E}}(-, ?)$	155

Resumen

Gran variedad de problemas matriciales han sido formulados y estudiados en términos de álgebras tensoriales graduadas con diferenciales y sus categorías de módulos, lo cual permite la aplicación de técnicas de la teoría general de representaciones de álgebras a dichos problemas. En este trabajo, se estudia la teoría de pares $(\mathcal{A}, I)$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra tensorial con derivación e I es un ideal de su componente homogénea de grado 0, y de sus categorías de módulos $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Así mismo, se estudian funtores de reducción $(\mathcal{A}', I')\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ entre las categorías de módulos asociados a operaciones elementales o reducciones $(\mathcal{A}, I) \mapsto (\mathcal{A}', I')$ de pares que permiten simplificar el par original. El estudio anterior se apoya algunas secciones del libro [2]. La generalización de este estudio para álgebras tensoriales con diferencial al caso de los pares mencionados antes, se encuentra dispersa en varios artículos de investigación. Entre las reducciones estudiadas destaca la X-reducción, que unifica y generaliza procesos reductivos clásicos como son la reducción de ejes (“edge reductions”) y la reducción de lazos (“unravellings”).

Palabras clave: *Ditálgebras débiles, categoría de módulos, ditálgebras de Roiter, funtores de reducción, estructura exacta.*

Abstract

A wide variety of matrix problems have been formulated and studied in terms of graded tensor algebras with differentials and their module categories, which allows the application of techniques from the general theory of representations of algebras to these problems. In this work, we study the theory of pairs $(\mathcal{A}, I)$, where $\mathcal{A}$ is a tensor algebra with a derivation and I is an ideal of its degree 0 homogeneous component, and their module categories $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Moreover, we study reduction functors $(\mathcal{A}', I')\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ between the module categories associated to elementary operations or reductions $(\mathcal{A}, I) \mapsto (\mathcal{A}', I')$ of pairs that simplify the original pair. This study is based on some sections of the book [2]. The generalization of this study presented here, for tensor algebras with differentials to the case of the aforementioned pairs is scattered across several research articles. Among the reductions studied, the X-reduction stands out, it unifies and generalizes classical reduction processes such as edge reductions and unravellings.

Keywords: *weak ditalgebras, category of modules, Roiter ditalgebras, reduction functors, exact structure.*

Introducción

Este trabajo, de carácter monográfico, consiste en presentar de manera sistemática y detallada aspectos básicos de la teoría que estudia las **ditálgebras débiles con relaciones**, que en este trabajo nombramos “ditálgebras débiles entrelazadas con un ideal”. Además de estudiar su categoría de módulos y los llamados **funtores de reducción**, los cuales desde el punto categórico nos permiten comparar dichas categorías y probar resultados por inducción. Esta teoría extiende resultados conocidos sobre álgebras tensoriales diferenciales y sus categorías de módulos, ver [2], la cual ha desempeñado un papel importante en la teoría de representaciones sobre un campo algebraicamente cerrado. Por ejemplo el teorema de dicotomía de Drozd, que afirma que toda álgebra de dimensión finita es mansa o salvaje, pero no ambas [9]. Con técnicas similares se obtuvo el Teorema de Crawley-Boevey que afirma que, en el caso manso, casi todos los módulos de dimensión fija son homogéneos [7]. De igual manera, en [8], Crawley-Boevey obtuvo una caracterización de la mansedumbre de un álgebra de dimensión finita en términos de módulos genéricos, los cuales están asociados a la descripción de familias paramétricas de inescindibles del álgebra.

Los resultados mas importantes que se examinan en este escrito han sido presentados en una serie de artículos recientes por R. Bautista, E. Pérez y L. Salmerón, ver [3] [4] [5], aunque dicha presentación no es detallada y a menudo se refiere al texto [2], para que el lector verifique por si mismo que las pruebas pueden extenderse al caso general. En esa serie de artículos, se han aplicado las técnicas mencionadas al estudio de módulos filtrados sobre cierto tipo especial de álgebras, se espera que estas técnicas sean de utilidad para otros estudios posteriores.

Como se propone en [4] y [5], seguimos el desarrollo del texto [2], en donde vamos complementando la argumentación para dar pruebas a detalle de los resultados que se presentan en esos artículos, a menudo enunciados sin demostración. En su mayoría, los cálculos que se requieren para la extensión de algunos resultados al caso de ditálgebras débiles entrelazadas son análogos o incluyen algunos de los que se utilizan en el caso de las ditálgebras en el texto [2]. Hemos reproducido algunos de estos, cuando a nuestro parecer son necesarios para entender alguno de los argumentos, otros hemos preferido sólo citarlos de [2]. En la sección 2.7, hemos extendido los resultados que se muestran en [2] sobre presentaciones del bifunctor **Ext**, los cuales no se mencionan en [4] y [5].

En las últimas dos secciones de este trabajo se contemplan un par de apéndices. Ambos consideran contextos mas generales que el caso de la categoría de módulos sobre ditálgebras débiles entrelazadas de Roiter, que exploramos con profundidad aquí. La inclusión de dichas secciones en este trabajo, obedece a que complementan justificaciones de las propiedades básicas de las categorías que nos interesan. En la primera de ellas, se muestra una relación interesante entre morfismos minimales que casi se dividen y las cubiertas proyectivas de los

radicales de los funtores representables. En la segunda, se estudia y analiza de manera general la noción de categoría exacta y la construcción del bifunctor **Ext**. La presentación es parecida a la de Mitchell [12], pero no es la misma, pues nuestro contexto es aún mas general y se recurre a algunos resultados de B. Keller en [10]. En ambos apéndices se procede a detalle en las pruebas.

En este trabajo contemplamos dos grandes apartados. En el primero exploramos propiedades básicas de la categoría de módulos sobre ditálgebras débiles entrelazadas. Comenzamos con su definición y en el camino tomamos las restricciones que se requieren, como son la triangularidad o la propiedad de ser de Roiter, que permiten mostrar que se obtiene una categoría de módulos que es exacta y, si nos restringimos a los módulos de dimensión finita, que existen sucesiones que casi se dividen. En el segundo apartado nos concentramos en la construcción de los funtores de reducción. Cuando consideramos el funtor de reducción que se construye mediante módulos admisibles, consideramos el caso particular de módulos admisibles sobre subálgebras iniciales, como se hace en [4] y [5], lo cual requiere una adaptación que por un lado simplifica la presentación que se da en [2], que considera un caso mas general, y, por otro lado, en otra dirección de mayor generalidad, se trabaja con ideales que moderan el comportamiento de la derivación.

Capítulo 1

Ditálgebras débiles entrelazadas y sus módulos

A lo largo de todo este trabajo, k denota un campo fijo.

1.1 Ditálgebras débiles

En esta sección introducimos las nociones de *ditálgebra débil* $\mathcal{A}$, de *ditálgebra débil entrelazada* $(\mathcal{A}, I)$ y de su *categoría de módulos* $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Definición 1.1.1. Dada una k -álgebra graduada $T = \bigoplus_{i \geq 0} [T]_i$, una **derivación** en T es una función lineal $\delta : T \rightarrow T$ tal que $\delta([T]_i) \subseteq [T]_{i+1}$ para cada i , de tal forma que para cada par de elementos homogéneos $a, b \in T$ se cumple la siguiente **regla de Leibniz**:

$$\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{\deg(a)} a\delta(b).$$

Una derivación es llamada **diferencial** si $\delta^2 = 0$.

Observación 1.1.2. Si δ es una derivación en T , entonces

$$\delta^2(t_1 t_2) = \delta^2(t_1) t_2 + (-1)^{2\deg(t_1)} t_1 \delta^2(t_2),$$

para t_1, t_2 elementos homogéneos de T .

En efecto, note que

$$\begin{aligned} \delta^2(t_1 t_2) &= \delta(\delta(t_1 t_2)) \\ &= \delta[\delta(t_1) t_2 + (-1)^{\deg(t_1)} t_1 \delta(t_2)] \\ &= \delta^2(t_1) t_2 + (-1)^{\deg(\delta(t_1))} \delta(t_1) \delta(t_2) + (-1)^{\deg(t_1)} [\delta(t_1) \delta(t_2) + (-1)^{\deg(t_1)} t_1 \delta^2(t_2)] \\ &= \delta^2(t_1) t_2 + (-1)^{2\deg(t_1)} t_1 \delta^2(t_2). \end{aligned}$$

Definición 1.1.3.

- Dada una k -álgebra A y un A - A -bimódulo V , tenemos el álgebra tensorial $T = T_A(V)$, con su graduación canónica $[T]_i = V^{\otimes i}$ para $i \geq 0$, por tanto $[T]_0 = A$ y $[T]_1 = V$.

- Utilizaremos el mismo nombre de **álgebra tensorial graduada** (o el de t -álgebra) para designar cualquier álgebra graduada T isomorfa a alguna $T_A(V)$ y las identificaremos con frecuencia.
- Una **ditálgebra débil** es un par $\mathcal{A} = (T, \delta)$, donde T es un álgebra tensorial graduada y δ es una derivación en T .
- Un **morfismo de ditálgebras débiles** $\eta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ es un morfismo de álgebras graduadas $\eta : T \rightarrow T'$ tal que $\delta'\eta = \eta\delta$.

Una ditálgebra débil $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una **ditálgebra** si δ es una diferencial.

Notación 1.1.4. Dada una ditálgebra débil $\mathcal{A} = (T_A(V), \delta)$ consideremos, para cualquier par de A -módulos M y N , el conjunto $U(M, N)$ de pares $f = (f^0, f^1)$ donde $f^0 \in \text{Hom}_k(M, N)$ y $f^1 \in \text{Hom}_{A-A}(V, \text{Hom}_k(M, N))$ tales que, para cada $a \in A$ y $m \in M$, se tiene:

$$af^0[m] = f^0[am] + f^1(\delta(a))[m].$$

Dados $f^1 \in \text{Hom}_{A-A}(V, \text{Hom}_k(M, N))$ y $g^1 \in \text{Hom}_{A-A}(V, \text{Hom}_k(N, L))$, consideramos el morfismo $g^1 \star f^1 \in \text{Hom}_{A-A}(V^{\otimes 2}, \text{Hom}_k(M, L))$ definido para $\sum_j u_j \otimes v_j \in V^{\otimes 2}$ por:

$$(g^1 \star f^1)(\sum_j u_j \otimes v_j) := \sum_j g^1(u_j)f^1(v_j).$$

Lema 1.1.5. Con la notación anterior, supongamos que $f = (f^0, f^1) \in U(M, N)$ y $g = (g^0, g^1) \in U(N, L)$ satisfacen que $(g^1 \star f^1)(\delta^2(a)) = 0$, para toda $a \in A$. Entonces $gf := (g^0 f^0, (gf)^1) \in U(M, L)$, donde $(gf)^1(v) := g^0 f^1(v) + g^1(v)f^0 + (g^1 \star f^1)[\delta(v)]$, para $v \in V$.

Demostración: Claramente $g^0 f^0 \in \text{Hom}_k(M, L)$. Resta probar que $(gf)^1 \in \text{Hom}_{A-A}(V, \text{Hom}_k(M, L))$ y que cumple con la regla $ag^0 f^0[m] = g^0 f^0[am] + (gf)^1(\delta(a))[m]$, para $a \in A$ y $m \in M$. Veamos que $(gf)^1$ es morfismo de A -módulos izquierdos:

$$\begin{aligned} (gf)^1(av)[m] &= g^0 f^1(av)[m] + g^1(av)f^0[m] + (g^1 \star f^1)[\delta(av)][m] \\ &= g^0[af^1(v)][m] + ag^1(v)f^0[m] + (g^1 \star f^1)[\delta(a)v + a\delta(v)][m] \\ &= ag^0[f^1(v)][m] - g^1(\delta(a))f^1(v)[m] + ag^1(v)f^0[m] \\ &+ (g^1 \star f^1)[\delta(a)v + a\delta(v)][m] \\ &= ag^0(f^1(v))[m] + ag^1(v)f^0[m] + a(g^1 \star f^1)(\delta(v))[m]. \end{aligned}$$

La verificación de que el morfismo $(gf)^1$ es de A -módulos derechos es análoga. Ahora veamos que se cumple la regla $ag^0 f^0[m] = g^0 f^0[am] + (gf)^1(\delta(a))[m]$.

$$\begin{aligned} ag^0 f^0[m] &= ag^0(f^0[m]) \\ &= g^0(af^0[m]) + g^1(\delta(a))f^0[m] \\ &= g^0 f^0[am] + g^0 f^1(\delta(a))[m] + g^1(\delta(a))f^0[m] \\ &= g^0 f^0[am] + g^0 f^1(\delta(a))[m] + g^1(\delta(a))f^0[m] \\ &+ \underbrace{(g^1 \star f^1)(\delta^2(a))[m] - (g^1 \star f^1)(\delta^2(a))[m]}_0 \\ &= g^0 f^0[am] + (gf)^1(\delta(a))[m] - \underbrace{(g^1 \star f^1)(\delta^2(a))[m]}_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $gf = (g^0 f^0, (gf)^1) \in U(M, L)$.

□

Definición 1.1.6. Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra débil con $T = T_A(V)$ e I un ideal de A , la ditálgebra débil $\mathcal{A}$ es llamada **entrelazada con el ideal I** si y sólo si

- $\delta^2(A) \subseteq IV^2 + VIV + V^2I$
- $\delta^2(V) \subseteq IV^3 + VIV^2 + V^2IV + V^3I$

Note que las condiciones anteriores equivalen a decir que $\delta^2(A)$ y $\delta^2(V)$ están contenidos en el ideal de T generado por I . El par $(\mathcal{A}, I)$ es llamado **ditálgebra débil entrelazada**.

Proposición 1.1.7. Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada. Entonces construimos una k -categoría $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ como sigue:

- **Objetos** : Son los A -módulos anulados por I .
- **Morfismos** : $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N) := U(M, N)$.
- **Composición** : La composición está dada como en 1.1.5.
- **Identidades** : Para cada objeto M , su morfismo identidad está dado por $(1_M, 0)$.

Demostración: Como $\delta^2(A) \subseteq IV^2 + VIV + V^2I$, tenemos que $(g^1 \star f^1)(\delta^2(a)) = 0$, para toda $a \in A$. En efecto, $\delta^2(a)$ tiene la forma

$$\delta^2(a) = \sum_j b_j v_j v'_j + u_j c_j u'_j + w_j w'_j d_j,$$

con $b_j, c_j, d_j \in I$ y $v_j, v'_j, u_j, u'_j, w_j, w'_j \in V$. Entonces, dados $f = (f^0, f^1) \in U(M, N)$ y $g = (g^0, g^1) \in U(N, L)$, tenemos

$$\begin{aligned} (g^1 \star f^1)(\delta^2(a))[m] &= (g^1 \star f^1)\left(\sum_j b_j v_j v'_j + u_j c_j u'_j + w_j w'_j d_j\right)[m] \\ &= \sum_j \underbrace{(b_j g^1(v_j) f^1(v'_j)[m])}_{0 \in L} + g^1(u_j) \underbrace{c_j f^1(u'_j)[m]}_{0 \in N} + g^1(w_j) f^1(w'_j) \underbrace{d_j[m]}_{0 \in M} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, por 1.1.5, la composición de morfismos está bien definida. Mostraremos que la composición es asociativa. Sean $f = (f^0, f^1) \in U(M, N)$, $g = (g^0, g^1) \in U(N, L)$ y $h = (h^0, h^1) \in U(L, K)$. Como $h^0(g^0 f^0) = (h^0 g^0) f^0$, es suficiente probar que $[h(gf)]^1 = [(hg)f]^1$.

Para esto tomemos $v \in V$ y

$$\delta(v) = \sum_i v_i v'_i, \delta(v_i) = \sum_j u_{i,j} u'_{i,j} \text{ y } \delta(v'_i) = \sum_s w_{i,s} w'_{i,s}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} (h(gf))^1(v) &= h^0(gf)^1(v) + h^1(v) g^0 f^0 + \sum_i h^1(v_i) (gf)^1(v'_i) \\ &= h^0 g^0 f^1(v) + h^0 g^1(v) f^0 + \sum_i h^0 g^1(v_i) f^1(v'_i) + h^1(v) g^0 f^0 \\ &+ \sum_i h^1(v_i) g^0 f^1(v'_i) + \sum_i h^1(v_i) g^1(v'_i) f^0 + \sum_{i,s} h^1(v_i) g^1(w_{i,s}) f^1(w'_{i,s}). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
((hg)f)^1(v) &= h^0 g^0 f^1(v) + (hg)^1(v) f^0 + \sum_i (hg)^1(v_i) f^1(v'_i) \\
&= h^0 g^0 f^1(v) + h^0 g^1(v) f^0 + h^1(v) g^0 f^0 + \sum_i h^1(v_i) g^1(v'_i) f^0 \\
&+ \sum_i h^0 g^1(v_i) f^1(v'_i) + \sum_i h^1(v_i) g^0 f^1(v'_i) + \sum_{i,j} h^1(u_{i,j}) g^1(u'_{i,j}) f^1(v'_i).
\end{aligned}$$

Solo queda ver que la diferencia

$$\Delta = \sum_{i,j} h^1(u_{i,j}) g^1(u'_{i,j}) f^1(v'_i) - \sum_{i,s} h^1(v_i) g^1(w_{i,s}) f^1(w'_{i,s}) = 0.$$

Para esto, dado que Δ es un morfismo, probaremos que $\Delta(m) = 0$ para cada $m \in M$. Para esto hay que recordar que $\delta^2(V) \subseteq IV^3 + VIV^2 + V^2IV + V^3I$.

De modo que $\delta^2(v)$ tiene la forma

$$\delta^2(v) = \sum_i a_i v_i v'_i v''_i + \sum_i u_i b_i u'_i u''_i + \sum_i z_i z'_i c_i z''_i + \sum_i y_i y'_i y''_i d_i.$$

Donde $a_i, b_i, c_i, d_i \in I$. Por otro lado, $\delta^2(v) = \sum_{i,j} u_{i,j} u'_{i,j} v'_i - \sum_{i,s} v_i w_{i,s} w'_{i,s}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\Delta[m] &= (h^1 \star g^1 \star f^1)(\delta^2(v))[m] \\
&= \sum_i \underbrace{a_i h^1(v_i) g^1(v'_i) f^1(v''_i)}_{0 \in K} [m] + \sum_i h^1(u_i) \underbrace{b_i g^1(u'_i) f^1(u''_i)}_{0 \in L} [m] \\
&+ \sum_i h^1(z_i) g^1(z'_i) \underbrace{c_i f^1(z''_i)}_{0 \in N} [m] + \sum_i h^1(y_i) g^1(y'_i) f^1(y''_i) \underbrace{d_i}_{0 \in M} [m] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es una categoría. Es sencillo mostrar que $U(M, N)$ es un k -espacio vectorial con las operaciones usuales y que la composición es bilineal. $\square$

Definición 1.1.8. Dada una ditálgebra débil entrelazada $(\mathcal{A}, I)$ existe un **funtor encaje**

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{A}, I)} : A/I\text{-Mod} \longrightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod},$$

el cual es la identidad en objetos y satisface que $\mathcal{L}(f^0) = (f^0, 0)$, cuando $f^0 \in \text{Hom}_{A/I}(M, N)$.

Observación 1.1.9. Como consecuencia de que $\mathcal{L}_{(\mathcal{A}, I)}$ es aditivo, $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es una categoría aditiva.

En efecto: Dados $M, N \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, la suma directa de $M \oplus N \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es la imagen de $\mathcal{L}_{(\mathcal{A}, I)}(M \oplus N)$. Las inyecciones $\sigma_1 : M \rightarrow M \oplus N$ y $\sigma_2 : N \rightarrow M \oplus N$ en $A/I\text{-Mod}$ determinan a las inyecciones $(\sigma_1, 0) : M \rightarrow M \oplus N$ y $(\sigma_2, 0) : N \rightarrow M \oplus N$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Definición 1.1.10. Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada, entonces su **ditálgebra débil entrelazada opuesta** es $(\mathcal{A}, I)^{op} = (\mathcal{A}^{op}, I^{op})$, donde $\mathcal{A}^{op} = (T^{op}, \delta^{op})$, la cual esta constituida por el álgebra opuesta T^{op} de T , donde $v \cdot_{op} u := uv$ con la misma graduación y $\delta^{op}(t) = (-1)^{|t|} \delta(t)$ para cualquier elemento homogéneo $t \in T$, e $I^{op} = I$.

Note que de lo anterior se sigue que $\delta^{op}(a) = \delta(a)$, para todo $a \in A$ y $\delta^{op}(v) = -\delta(v)$, si $v \in V$.

Lema 1.1.11. Si $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada, entonces $(\mathcal{A}, I)^{op}$ también lo es.

Demostración: Si U es un A - A -bimódulo, denotamos U^{op} el A^{op} - A^{op} -bimódulo con espacio vectorial subyacente U y acción $b \cdot u \cdot a := aub$. Note que $[T^{op}]_0 = A^{op}$ y $[T^{op}]_1 = V^{op}$.

Si $\phi_0 : A^{op} \rightarrow S^{op}$ es un morfismo de k -álgebras y $\phi_1 : V^{op} \rightarrow S^{op}$ de A^{op} - A^{op} -bimódulos, entonces, $\phi_0 : A \rightarrow S$ es un morfismo de k -álgebras y $\phi_1 : V \rightarrow S$ es de A - A -bimódulos, por lo cual se tiene un morfismo de t -álgebras $\phi : T \rightarrow S$ y, por tanto, un morfismo de $\phi : T^{op} \rightarrow S^{op}$. Por tanto, T^{op} es una k -álgebra tensorial: $T^{op} \cong T_{A^{op}}(V^{op})$. Note también que si U_1, U_2 son A - A -subbimódulos de T , entonces $(U_1 + U_2)^{op} = U_1^{op} + U_2^{op}$ y $(U_1 U_2)^{op} = U_2^{op} U_1^{op}$. Como $\mathcal{A}$ está entrelazada con I , por lo anterior, $\mathcal{A}^{op}$ está entrelazada con I^{op} . $\square$

Definición 1.1.12. Para una ditálgebra débil entrelazada $(\mathcal{A}, I)$ definimos su categoría de módulos derechos $Mod-(\mathcal{A}, I)$ como sigue:

- Objetos son los A -módulos derechos anulados por I .
- Morfismos de M en N son los pares (f^0, f^1) , con

$$f^0 \in Hom_k(M, N) \text{ y } f^1 \in Hom_{A-A}(V, Hom_k(M, N)),$$

tales que, para $a \in A$ y $m \in M$, se tiene:

$$f(m)a = f^0(ma) + f^1(\delta(a))[m].$$

- Composición: si $g : M \rightarrow N$ y $f : N \rightarrow L$, fg está dado por

$$(fg)^1(v) = f^0 g^1(v) + f^1(v)g^0 - (f^1 \star g^1)(\delta(v)) \text{ y } (fg)^0 = f^0 g^0.$$

- Identidades $(1_M, 0)$, para cada $M \in Mod-(\mathcal{A}, I)$.

En la siguiente proposición veremos que en efecto se tiene una categoría.

Proposición 1.1.13. Existe un isomorfismo de categorías

$$F : (\mathcal{A}, I)^{op}\text{-Mod} \rightarrow Mod-(\mathcal{A}, I).$$

Demostración: Definamos el funtor F en objetos: cada $(\mathcal{A}, I)^{op}$ -módulo M , se envía en $F(M)$, que coincide con M como k -espacio vectorial, y con acción $m \cdot a := a \cdot m$, para $a \in A^{op}$ y $m \in M$. Esto da claramente a M una estructura de A -módulo derecho anulado por I .

Cada morfismo (f^0, f^1) es enviado a (f^0, f^1) como funciones. Note que esto da un morfismo pues

$$f^0(m)a = af^0(m) = f^0(am) + f^1(\delta^{op}(a))[m] = f^0(ma) + f^1(\delta(a))[m].$$

Claramente se preservan identidades.

Finalmente, si $g : M \rightarrow N$ y $f : N \rightarrow L$ en $(\mathcal{A}, I)^{op}\text{-Mod}$, veamos que $F((f^0, f^1)(g^0, g^1)) = F((f^0, f^1))F((g^0, g^1))$. Si suponemos que $v \in V$, obtendremos

$$F[(fg)^1](v) = f^0 g^1(v) + f^1(v)g^0 + (f^1 \star g^1)(\delta^{op}(v))$$

que coincide con

$$(F(f)F(g))^1(v) = f^0 g^1(v) + f^1(v)g^0 - (f^1 \star g^1)(\delta(v)).$$

Por tanto, F es un funtor. El funtor inverso de F se define invirtiendo el procedimiento anterior. $\square$

Proposición 1.1.14. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada, entonces, el funtor $D(-) : Hom_k(-, k) : k\text{-Mod} \rightarrow k\text{-Mod}$ induce un k -funtor contravariante*

$$D(-) : Hom_k(-, k) : (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)^{op}\text{-Mod}.$$

Donde, si $f = (f^0, f^1)$ es un morfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, el morfismo $D(f) = (D(f)^0, D(f)^1)$, está definido por

$$D(f)^0 := D(f^0) \text{ y } D(f)^1(v) = -D(f^1(v)), \text{ para } v \in V.$$

Además, $D : (\mathcal{A}, I)\text{-mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)^{op}\text{-mod}$ es una dualidad, donde $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ denota los módulos de dimensión finita.

Demostración: Es claro que si M es un A -módulo izquierdo anulado por I , entonces $D(M)$ es un A^{op} -módulo izquierdo anulado por I^{op} . Vamos a mostrar que si $f \in Hom_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$, entonces $D(f) \in Hom_{(\mathcal{A}, I)^{op}}(D(N), D(M))$. Es claro que $D(f)^0$ es k -lineal. Veamos que $D(f)^1$ es un morfismo de A^{op} - A^{op} -bimódulos, recordando que $Hom_{A^{op}-A^{op}}(V^{op}, Hom_k(D(N), D(M))) = Hom_{A-A}(V, Hom_k(D(N), D(M)))$.

Veamos que $D(f)^1$ es morfismo de A^{op} -módulos izquierdos. Sean $a \in A$ y $\phi \in D(N)$, entonces

$$\begin{aligned} (D(f)^1(va))(\phi) &= -D(f^1(va))(\phi) \\ &= -\phi f^1(va) \\ &= -\phi f^1(v)a \\ &= -(D(f^1(v))a)(\phi) \\ &= (D(f)^1(v)a)(\phi). \end{aligned}$$

La prueba de que $D(f)^1$ es morfismo de A^{op} -módulos derechos es análoga.

Finalmente, veamos que

$$aD(f)^0[\phi] = D(f)^0[a\phi] + D(f)^1(\delta^{op}(a))[\phi],$$

para toda $a \in A^{op}$ y $\phi \in D(N)$. Es decir, $[D(f)^0[\phi]]a = D(f)^0[a\phi] + D(f)^1(\delta^{op}(a))[\phi]$. Para $m \in M$, se tiene:

$$\begin{aligned} [D(f)^0(\phi)a][m] &= (\phi f^0)a[m] \\ &= \phi(f^0(am)) \\ &= \phi(af^0[m] - f^1(\delta(a))[m]) \\ &= (\phi a)(f^0(m)) - \phi(f^1(\delta(a))[m]) \\ &= (\phi a)(f^0(m)) - D(f^1(\delta(a)))(\phi)[m] \\ &= D(f)^0(\phi a)[m] + D(f)^1(\delta^{op}(a))(\phi)[m]. \end{aligned}$$

Claramente D preserva identidades.

Para ver que D invierte la composición basta mostrar su efecto en la segunda componente, es decir que si f, g son morfismos que pueden componerse, entonces $D(fg)^1 = D(g)^1 D(f)^1$.

Note que

$$\begin{aligned} D(fg)^1(v) &= -D((fg)^1(v)) \\ &= -D[f^0 g^1(v) + f^1(v)g^0 + (f^1 \star g^1)(\delta(v))] \\ &= -D(g^1(v))D(f)^0 - D(g)^0 D(f^1(v)) - D[(f^1 \star g^1)(\delta(v))]. \end{aligned}$$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned} [D(g)D(f)]^1(v) &= D(g)^1(v)D(f)^0 + D(g)^0 D(f)^1(v) + (D(g)^1 \star D(f)^1)(\delta^{op}(v)) \\ &= -D(g^1(v))D(f)^0 - D(g)^0 D(f^1(v)) + (D(g)^1 \star D(f)^1)(\delta^{op}(v)) \end{aligned}$$

Sabemos que, si $\delta(v) = \sum_i u_i v_i$, entonces $\delta^{op}(v) = -\sum_i v_i u_i$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (D(g)^1 \star D(f)^1)[\delta^{op}(v)] &= -\sum_i D(g^1(v_i))D(f^1(u_i)) \\ &= -\sum_i D(f^1(u_i)g^1(v_i)) \\ &= -D(f^1 \star g^1)(\delta(v)). \end{aligned}$$

Así, tenemos un k -functor contravariante $D : (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)^{op}\text{-Mod}$.

Restringiendo a los módulos de dimensión finita, podemos pensar en la dualidad estándar

$$D : A/I\text{-mod} \rightarrow A^{op}/I^{op}\text{-mod}$$

y en el isomorfismo natural: la evaluación $\eta_M^0 : M \rightarrow D^2(M)$, el cual envía $m \mapsto \eta_M^0(m)$, tal que $\eta_M^0(m)[\phi] = \phi(m)$. Entonces, como η_M^0 es un isomorfismo para cada M , tenemos que $\mathcal{L}[\eta^0] = (\eta^0, 0) : M \rightarrow D^2(M)$ es un isomorfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$. Mas aún es natural, puesto que si $(f^0, f^1) \in Hom_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$, conmutan los siguientes diagramas en $k\text{-mod}$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_M^0} & D^2(M) \\ f^0 \downarrow & & \downarrow D^2(f^0) \\ N & \xrightarrow{\eta_N^0} & D^2(N) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_M^0} & D^2(M) \\ f^1(v) \downarrow & & \downarrow D^2(f^1(v)) \\ N & \xrightarrow{\eta_N^0} & D^2(N). \end{array}$$

Y entonces conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(\eta_M^0, 0)} & D^2(M) \\ (f^0, f^1) \downarrow & & \downarrow D^2((f^0, f^1)) \\ N & \xrightarrow{(\eta_N^0, 0)} & D^2(N) \end{array}$$

en $(\mathcal{A}, I)$ -mod. □

1.2 Cocientes de ditálgebras débiles

En esta sección vamos a introducir la noción de ideales para ditálgebras débiles $\mathcal{A}$. Cada ideal I de A genera un ideal J de $\mathcal{A} = (T, \delta)$. Si $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada, relacionamos la categoría $(\mathcal{A}, I)$ -Mod, con la categoría $\mathcal{A}/J$ -Mod de módulos sobre la ditálgebra $\mathcal{A}/J$, donde J es el ideal de $\mathcal{A}$ generado por I .

En esta sección, cuando hablemos del álgebra tensorial T , estaremos pensando en $T = T_A(V)$.

Definición 1.2.1. *Supongamos que $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil. Un ideal J de $\mathcal{A}$ es un ideal J de T tal que:*

- $J \cap A$ y $J \cap V$ ambos generan el ideal J de T .
- $\delta(J) \subseteq J$.

En este caso, J es un ideal homogéneo de T y $J \cap A$ es un ideal propio de A si y sólo si J es un ideal propio de T .

En efecto: Si $J \cap A = A$ tenemos que $1 \in J$ y por tanto $J = T$. Ahora si $J = T$, entonces $1 \in J$ y, dado que 1 es homogéneo de grado 0, entonces $1 \in A$, por tanto $1 \in J \cap A$ y $J \cap A = A$.

Por tanto T/J es una k -álgebra graduada. La primera condición garantiza que el álgebra T/J puede ser identificada con el álgebra tensorial $T_{A/(J \cap A)}(V/(J \cap V))$, ver [2, 8.4].

La segunda condición implica que δ induce una derivación $\bar{\delta}$ en T/J .

Por tanto, el par $\mathcal{A}/J := (T/J, \bar{\delta})$ es una ditálgebra débil, que llamamos **el cociente de la ditálgebra débil $\mathcal{A}$ por el ideal J** . La proyección canónica $\eta : T \rightarrow T/J$ es un morfismo de ditálgebras débiles $\eta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$.

Definición 1.2.2. *Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra débil, supongamos que I es un ideal de A , entonces:*

- *Decimos que I es un **ideal $\mathcal{A}$ -triangular** de A syss existe una filtración de k -espacios vectoriales $0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_t = I$ tal que $\delta(H_i) \subseteq AH_{i-1}V + VH_{i-1}A$, para toda $i \in [1, t]$.*
- *Decimos que I es un **ideal $\mathcal{A}$ -balanceado** de A syss $\delta(I) \subseteq IV + VI$.*

Ciertamente todo ideal $\mathcal{A}$ -triangular es $\mathcal{A}$ -balanceado.

Observación 1.2.3. *Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra débil, supongamos que I es un ideal de A y que $0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_t \subseteq I$ es una filtración de espacios vectoriales de I tales que $\delta(H_i) \subseteq AH_{i-1}V + VH_{i-1}A$ para toda $i \in [1, t]$ y que el ideal de A generado por H_t es I , entonces $0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_t \subseteq H_{t+1} = I$ es una filtración triangular de I como en la definición anterior.*

En efecto: El ideal $I = H_{t+1}$ está generado como espacio vectorial por elementos de la forma ahb , donde $a, b \in A$ y $h \in H_t$. Entonces

$$\delta(ahb) = \delta(a)hb + a\delta(h)b + ah\delta(b) \in AH_tV + VH_tA.$$

Lema 1.2.4. Si $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil e I es un ideal de A generado por algún subconjunto H de A , para el cual existe una filtración de subconjuntos

$$0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_\ell = H$$

tal que $\delta(H_i) \subseteq AH_{i-1}V + VH_{i-1}A$ para toda $i \in [1, \ell]$. Entonces, I es $\mathcal{A}$ -triangular.

Demostración: Supongamos que existe una filtración de subconjuntos

$$0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_\ell = H \subseteq I$$

tal que $\delta(H_i) \subseteq AH_{i-1}V + VH_{i-1}A$ para toda $i \in [1, \ell]$. Vamos a tomar $\overline{H}_i$ como el subespacio de I generado por el conjunto H_i , entonces como δ es lineal tenemos una filtración de espacios vectoriales

$$0 = \overline{H}_0 \subseteq \overline{H}_1 \subseteq \cdots \subseteq \overline{H}_\ell \subseteq I$$

tal que $\delta(\overline{H}_i) \subseteq A\overline{H}_{i-1}V + V\overline{H}_{i-1}A$ para toda $i \in [1, \ell]$ y $\overline{H}_\ell$ genera al ideal I . Por 1.2.3, el ideal I es $\mathcal{A}$ -triangular. $\square$

Lema 1.2.5. Consideremos el álgebra tensorial $T = T_A(V)$, sea I un ideal de A e I_V el A - A -subbimódulo de V definido por $I_V = IV + \delta(I) + VI$. Denotamos por J al ideal de T generado por I e I_V . Entonces, $I = A \cap J$ e $I_V = V \cap J$.

Demostración: Primero mostraremos que efectivamente I_V es un A - A -subbimódulo de V . Claramente I_V es un grupo abeliano. Entonces, resta mostrar que cumple las siguientes propiedades:

- $at \in I_V$, para $a \in A$ y $t \in I_V$. **En efecto:** Si lo probamos para generadores básicos, es decir, para elementos $t \in I_V$ de la forma $t = bv_1 + \delta(c) + v_2d$, donde $b, c, d \in I$ y $v_1, v_2 \in V$, habríamos terminado.

Note que

$$\begin{aligned} a(bv_1 + \delta(c) + v_2d) &= a(bv_1) + a\delta(c) + a(v_2d) \\ &= a(bv_1) + \delta(ac) + a(v_2d) - \delta(a)c \in I_V. \end{aligned}$$

La verificación por la derecha es análoga.

Afirmación: Dado que $IV + VI \subseteq I_V$, tenemos que $I = J \cap A$ y $I_V = J \cap V$.

En efecto: Sabemos que J es el ideal de T generado por I e I_V . Por tanto si $a \in J$, entonces a tiene la forma

$$a = \sum_i t_i b_i s_i + t'_i c_i s'_i,$$

donde t_i, t'_i, s_i, s'_i son elementos homogéneos de T y $b_i \in I, c_i \in I_V$. Si $a \in A$, del hecho que a tiene grado 0, podemos reescribir lo anterior como

$$a = \sum_i t_i b_i s_i,$$

con $t_i, s_i \in A$ por tanto $J \cap A \subseteq I$. Que $I \subseteq J \cap A$ se sigue de que $I \cup I_V$ genera a J y además $I \subseteq A$. Veamos que $J \cap V = I_V$. Tenemos $I_V \subseteq J \cap V$ por definición. Si $v \in J$, es de la forma

$$v = \sum_i r_i b_i k_i + r'_i c_i k'_i,$$

donde r_i, r'_i, k_i, k'_i son elementos homogéneos de T y $b_i \in I, c_i \in I_V$. Si $v \in V$, del hecho que v tiene grado 1, podemos reescribir lo anterior como

$$v = \sum_i r_i b_i + c_i k_i + w_i \delta(g_i) w'_i,$$

con $w_i, w'_i \in A, b_i, c_i, g_i \in I$ y $r_i, k_i \in V$. Por tanto $J \cap V \subseteq I_V$. □

Lema 1.2.6. *Supongamos que $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil y que I es algún ideal de A , considere el A - A -subbimódulo $I_V := IV + \delta(I) + VI$ de V y supongamos que se tiene uno de los siguientes dos casos:*

- $\mathcal{A}$ es entrelazada con el ideal I
- I es un ideal $\mathcal{A}$ -balanceado.

Entonces el ideal J de T generado por I e I_V es un ideal de la ditálgebra débil $\mathcal{A}$. En particular, $I = J \cap A$ e $I_V = J \cap V$. Si I es $\mathcal{A}$ -balanceado entonces $I_V = IV + VI$.

Demostración: Por 1.2.5 el ideal J de T está generado por $A \cap J$ y $V \cap J$. Claramente, $\delta(I) \subseteq I_V \subseteq J$. Por la hipótesis, obtenemos $\delta^2(I) \subseteq J$. Entonces, por la regla de Leibniz,

$$\delta(I_V) = \delta(I)V + I\delta(V) + \delta^2(I) + \delta(V)I + V\delta(I) \subseteq J.$$

Usando otra vez la regla de Leibniz para los elementos de $J = TIT + TI_VT$, tenemos que $\delta(J) \subseteq J$. □

Definición 1.2.7. *En la situación anterior, decimos que J es el ideal de la ditálgebra débil $\mathcal{A}$ generado por el ideal I de A .*

Observación 1.2.8. *Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra débil e I un ideal de A , asumamos que estamos en la situación de 1.2.6 y sea J el ideal de $\mathcal{A}$ generado por I . Escribimos $\bar{A} = A/I$ y $\bar{V} = V/(IV + \delta(I) + VI)$ y consideremos el morfismo canónico $\phi : T \rightarrow T_{\bar{A}}(\bar{V})$ inducido por las proyecciones $\phi_0 : A \rightarrow \bar{A}$ y $\phi_1 : V \rightarrow \bar{V}$. Obtenemos entonces un isomorfismo $\bar{\eta} : T_{\bar{A}}(\bar{V}) \rightarrow T/J$ tal que $\bar{\eta}\phi = \eta$, donde $\eta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$ es la proyección canónica a la ditálgebra débil cociente $\mathcal{A}/J$.*

Con la ayuda de este isomorfismo podemos transferir la derivación de $\mathcal{A}/J$ sobre una derivación $\bar{\delta}$ en $\bar{T} = T_{\bar{A}}(\bar{V})$.

Note que $\bar{\delta}$ puede ser obtenida por las transformaciones lineales $\bar{\delta}_0 : \bar{A} \rightarrow [\bar{T}]_1$ y $\bar{\delta}_1 : \bar{V} \rightarrow [\bar{T}]_2$ (ver [2, 8.9]) inducidas por la composición $\phi\delta$ cuando restringimos a A y V respectivamente.

Escribimos $\bar{\mathcal{A}} = (\bar{T}, \bar{\delta})$ y lo identificamos con $\mathcal{A}/J$.

Lema 1.2.9. Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra débil entrelazada con un ideal I de A y sea J el ideal de $\mathcal{A}$ generado por I , entonces el cociente $\mathcal{A}/J$ es una ditálgebra y tenemos un cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A/I - Mod & \xrightarrow{\mathcal{L}_{\mathcal{A}/J}} & \mathcal{A}/J - Mod \\ \parallel & & \uparrow \psi \cong \\ A/I - Mod & \xrightarrow{\mathcal{L}_{(\mathcal{A}, I)}} & (\mathcal{A}, I) - Mod \end{array}$$

Demostración: Dado que $\mathcal{A}$ es entrelazada con I , tenemos que $\delta^2(A) \subseteq J$ y $\delta^2(V) \subseteq J$. Luego $\delta^2(T) \subseteq J$, por tanto $\bar{\delta}$ es una diferencial y $\mathcal{A}/J$ es una ditálgebra.

Por definición, tenemos que ψ es la identidad en objetos. Y envía cada morfismo $(f^0, f^1) \in U(M, N)$ en el par $\psi(f^0, f^1) = (f^0, \bar{f}^1)$, donde $\bar{f}^1 : \bar{V} \rightarrow \text{Hom}_k(M, N)$ es el morfismo inducido por $f^1 : V \rightarrow \text{Hom}_k(M, N)$, el cual existe debido a que $IM = 0$ e $IN = 0$ y por tanto $f^1(IV + \delta(I) + VI) = 0$.

Si las proyecciones canónicas son $\phi_0 : A \rightarrow \bar{A}$ y $\phi_1 : V \rightarrow \bar{V}$, escribimos $\bar{v} = \phi_1(v)$ y $\bar{a} = \phi_0(a)$ para $v \in V$ y $a \in A$.

Entonces $(f^0, f^1) \in U(\bar{M}, \bar{N})$ implica que $af^0(m) = f(am) + f^1(\delta(a))[m]$ para $a \in A, m \in M$. Así, $\bar{a}f^0(m) = f(\bar{a}m) + \bar{f}^1(\bar{\delta}(\bar{a}))[m]$, para $\bar{a} \in \bar{A}, m \in M$. Por tanto $(f^0, \bar{f}^1) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}/J}(M, N)$.

Definimos un funtor $\nu : \mathcal{A}/J\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, por $\nu(f^0, \widehat{f^1}) = (f^0, \widehat{f^1}\phi_1)$. Esta regla de asociación claramente preserva composiciones e identidades. Puede verse que ν es inverso de ψ . $\square$

Observación 1.2.10. Supongamos que $\mathcal{A} = (T_A(V), \delta)$ es una ditálgebra débil, que I es un ideal $\mathcal{A}$ -balanceado de A , y denotamos por J al ideal de $\mathcal{A}$ generado por I , como en 1.2.7. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (1) $\mathcal{A}$ es entrelazado con I .
- (2) $\delta^2(A) \subseteq J$ y $\delta^2(V) \subseteq J$.
- (3) $\delta^2(T) \subseteq J$.

Demostración: Es claro que (1) $\Rightarrow$ (3) y (3) $\Rightarrow$ (2). Entonces sólo basta demostrar (2) $\Rightarrow$ (1). Es decir vamos a demostrar que $\delta^2(A) \subseteq IV^2 + VIV + V^2I$ y $\delta^2(V) \subseteq IV^3 + VIV^2 + V^2IV + V^3I$.

Ya sabemos que $\delta^2(A) \subseteq TIT + TIVT$. Entonces, como $I_V = IV + VI$, tenemos que $\delta^2(A) \subseteq IV^2 + VIV + V^2I$, pues los elementos de $\delta^2(A)$ tienen grado 2. De forma análoga tenemos que $\delta^2(V) \subseteq IV^3 + VIV^2 + V^2IV + V^3I$. $\square$

Definición 1.2.11. Un **morfismo** $\phi : (\mathcal{A}, I) \longrightarrow (\mathcal{A}', I')$ de **ditálgebras débiles entrelazadas** es un morfismo de ditálgebras débiles $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ tal que $\phi(I) \subseteq I'$.

Lema 1.2.12. Cualquier morfismo de ditálgebras débiles entrelazadas $\phi : (\mathcal{A}, I) \longrightarrow (\mathcal{A}', I')$ induce por restricción un funtor $F_\phi : (\mathcal{A}', I')\text{-Mod} \longrightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Este funtor se describe como sigue:

Consideremos las restricciones $\phi_0 : A \longrightarrow A'$ y $\phi_1 : V \longrightarrow V'$ de ϕ .

Entonces, para $M \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$, el A -módulo $F_\phi(M)$ es obtenido por restricción de escalares a través de ϕ_0 . Para $f = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}', I')}(M, N)$ tenemos que $F_\phi(f) = (f^0, f^1\phi_1)$. Si ϕ_1 es epi, entonces F_ϕ es fiel. Mas aún, si $\psi : (\mathcal{A}', I') \longrightarrow (\mathcal{A}'', I'')$ es otro morfismo de ditálgebras débiles entrelazadas, entonces $F_{\psi\phi} = F_\phi F_\psi$.

Demostración: Hay que notar que el funtor F_ϕ manda un A' -módulo M anulado por I' al mismo k -espacio vectorial subyacente M , pero con la siguiente acción de A -módulo $a \star m = \phi_0(a)m$ y esto nos da un A -módulo. Ahora, este nuevo módulo es anulado por I gracias a que $\phi(I) \subseteq I'$. Cada morfismo (f^0, f^1) es enviado al morfismo $(f^0, f^1\phi_1)$ y F_ϕ preserva la composición gracias a que, si $(f^0, f^1), (g^0, g^1)$ son morfismos que pueden componerse, se tiene que $(gf)^1\phi_1 = (g^0f^1 + g^1f^0 + (g^1 \star f^1)\delta')\phi_1 = g^0f^1\phi_1 + g^1\phi_1f^0 + (g^1\phi_1 \star f^1\phi_1)\delta$. Finalmente, se tiene que si $(f^0, f^1\phi_1) = (0, 0)$ y ϕ_1 es epi, entonces $f^1 = 0$. Por tanto el funtor F_ϕ es fiel. $\square$

1.3 Ditálgebras débiles estratificadas

De manera informal, podemos decir que una estratificación de una ditálgebra débil entrelazada $(\mathcal{A}, I)$ es un sistema especial de generadores que permiten una descripción sencilla de la diferencial de $\mathcal{A}$ y de los morfismos de $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Definición 1.3.1. Una t -álgebra T **tiene una estratificación** (R, W) syss R es una k -subálgebra de T y W es un R - R -bimódulo equipado con una descomposición de R - R -bimódulo $W = W_0 \oplus W_1$ tal que $R \cup W_0 \subseteq [T]_0, W_1 \subseteq [T]_1$ y T es generado libremente por (R, W) , ver [2, 4.1]

En este caso, si denotamos por $A = [T]_0$ y $V = [T]_1$, tenemos isomorfismos de álgebras $T \cong T_R(W)$ y $A \cong T_R(W_0)$ y un isomorfismo de A - A -bimódulos $V \cong A \otimes_R W_1 \otimes_R A$, el cual consideramos como identificación, ver [2, 4.1].

Una ditálgebra débil $\mathcal{A} = (T, \delta)$ **tiene estratificación** (R, W) syss T admite la estratificación (R, W) y además $\delta(R) = 0$. Nótese que esta última condición nos dice que $\delta : T \rightarrow T$ es un morfismo de R - R -bimódulos.

Lema 1.3.2. Supongamos que T es una t -álgebra con estratificación (R, W) y supongamos que $\delta_0 : W_0 \longrightarrow [T]_1$ y $\delta_1 : W_1 \longrightarrow [T]_2$ son morfismos de R - R -bimódulos. Entonces existe una única derivación $\delta : T \longrightarrow T$ que extiende δ_0 y δ_1 tal que $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil con estratificación (R, W) .

Demostración: La existencia de tal derivación δ se muestra en la prueba de [2, 4.4]. $\square$

Observación 1.3.3. Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra débil con estratificación (R, W) , e I un ideal de A . Entonces, $\mathcal{A}$ está entrelazada con I si y sólo si

- $\delta^2(W_0) \subseteq IV^2 + V^2I + VIV$.
- $\delta^2(W_1) \subseteq IV^3 + V^3I + V^2IV + VIV^2$.

En efecto, se sigue de 1.1.2.

Lema 1.3.4. Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada y estratificación (R, W) . Supongamos que $M, N \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ y que $(f^0, f^1) \in \text{Hom}_R(M, N) \times \text{Hom}_{A-A}(V, \text{Hom}_k(M, N))$, cumple

$$wf^0(m) = f^0(wm) + f^1(\delta(w))[m], \text{ para cada } w \in W_0 \text{ y cada } m \in M.$$

Entonces, $(f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$.

Demostración: Consideremos un generador básico de A de la forma $a = w_1 w_2 \dots w_n$, donde $w_i \in W_0$. Probaremos por inducción que para elementos de esta forma se cumple la fórmula requerida y extenderemos linealmente gracias a que δ es lineal.

La base de inducción es nuestra hipótesis. Ahora, lo suponemos cierto para cierta $k \geq 1$.

Para nuestro paso inductivo tomemos $w_1 w_2 \dots w_k w_{k+1} = w_1 \underbrace{w_2 w_3 \dots w_{k+1}}_w$ entonces tenemos

las siguientes igualdades gracias a la regla de Leibniz y nuestra hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} f^1(\delta(w_1 w)) [m] &= [f^1(\delta(w_1)w) + f^1(w_1 \delta(w))][m] = f^1(\delta(w_1))[wm] + w_1 f^1(\delta(w))[m] \\ &= w_1 w f^0[m] - f^0[w_1 w m] \end{aligned}$$

como deseamos. □

Observación 1.3.5. Supongamos que R es una k -subálgebra del álgebra A , W es un R - R -bimódulo y $M, N \in A\text{-Mod}$. Entonces tenemos un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{A-A}(A \otimes_R W \otimes_R A, \text{Hom}_k(M, N)) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}_{R-R}(W, \text{Hom}_k(M, N))$$

dado por $\beta(f)[w] = f(1 \otimes w \otimes 1)$, con $\beta^{-1}(h)[a \otimes w \otimes a'] = ah(w)a'$.

Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada con estratificación (R, W) y consideremos su descomposición de R - R -bimódulos $W = W_0 \oplus W_1$. Supongamos que M, N son A/I -módulos. Cuando $f = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$, sabemos que $f^0 \in \text{Hom}_R(M, N)$ y que $f^1 \in \text{Hom}_{A-A}(AW_1A, \text{Hom}_k(M, N))$ está determinada por su restricción a W_1 .

Recíprocamente, si $f^0 \in \text{Hom}_R(M, N)$ y $f^1 \in \text{Hom}_{R-R}(W_1, \text{Hom}_k(M, N))$ satisfacen $wf^0(m) = f^0(wm) + \widehat{f^1}(\delta(w))[m]$, para $w \in W_0$ y $m \in M$, obtenemos que $(f^0, \widehat{f^1}) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$, donde $\widehat{f^1}$ es la extensión de f^1 usando β^{-1} , gracias a 1.3.4.

Cuando esto no cause confusión, abusaremos del lenguaje, para usar el mismo símbolo para denotar f^1 y su extensión $\widehat{f^1}$.

A menudo usaremos la notación:

$$\text{Phom}_{R-W}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N) \times \text{Hom}_{R-R}(W_1, \text{Hom}_k(M, N)).$$

Lema 1.3.6. Si T_1, T_2 son k -álgebras tensoriales entonces $T_1 \times T_2$ con el producto componente a componente es una k -álgebra tal que:

- Si T_1 y T_2 son generadas libremente por (A_1, V_1) y (A_2, V_2) respectivamente, entonces $T_1 \times T_2$ es generada libremente por $(A_1 \times A_2, V_1 \times V_2)$.
- Si T_1, T_2 son t -álgebras estratificadas con estratificaciones (R_1, W^1) y (R_2, W^2) , entonces la t -álgebra producto admite una estratificación natural (R, W) , con $R = R_1 \times R_2$ y $W_i = W_i^1 \times W_i^2$ para $i = 0, 1$.

Demostración: Ver prueba detallada en [2, 10.1]. □

Definición 1.3.7. Dadas dos ditálgebras débiles $\mathcal{A}_1 = (T_1, \delta_1)$ y $\mathcal{A}_2 = (T_2, \delta_2)$ el **producto de ditálgebras débiles** $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ denotado por $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ es la ditálgebra débil (T, δ) , donde T es el producto de las t -álgebras T_1 y T_2 y $\delta = \delta_1 \times \delta_2$.

La proyección $\pi_i : T_1 \times T_2 \rightarrow T_i$, determina un morfismo de ditálgebra débiles $\pi_i : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_i$, para $i = 1, 2$.

Observación 1.3.8. Si $(\mathcal{A}_1, I_1)$ y $(\mathcal{A}_2, I_2)$ son ditálgebras débiles entrelazadas, entonces tenemos su producto

$$(\mathcal{A}_1, I_1) \times (\mathcal{A}_2, I_2) := (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, I_1 \times I_2)$$

el cual también es una ditálgebra débil entrelazada.

1.4 Ditálgebras débiles entrelazadas triangulares

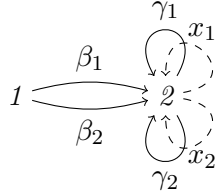
En esta sección daremos un breve resumen de las propiedades básicas de la categoría de $(\mathcal{A}, I)$ -módulos, las cuales se siguen de ciertas condiciones “de triangularidad” en la estratificación de $(\mathcal{A}, I)$.

Definición 1.4.1. Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada, donde $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil con estratificación (R, W) . Decimos que $(\mathcal{A}, I)$ es **triangular** si:

- Hay una filtración de R - R -subbimódulos $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \dots \subseteq W_0^r = W_0$ tal que $\delta(W_0^{i+1}) \subseteq A_i W_1 A_i$ para cada i , donde A_i denota la subálgebra de A generada por R y W_0^i .
- Hay una filtración de R - R -subbimódulos $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq \dots \subseteq W_1^s = W_1$ tal que $\delta(W_1^{i+1}) \subseteq A W_1^i A W_1^i A + I V^2 + V^2 I + V I V$ para toda i .
- El ideal I es $\mathcal{A}$ -triangular.

La estratificación será llamada **triangular aditiva** si cada W_0^i es un sumando directo de W_0^{i+1} para toda i . $(\mathcal{A}, I)$ es llamada **triangular aditiva** si tiene una estratificación triangular aditiva.

Ejemplo 1.4.2. Sea $\mathbb{B}$ un bicarcaj, es decir una gráfica orientada con un número finito de n puntos y dos tipos de flechas (continuas y punteadas). Si k es un campo, podemos considerar el **álgebra graduada asociada al bicarcaj** $\mathbb{B}$, que denotamos por $k\mathbb{B}$. Por definición, el espacio vectorial subyacente de $k\mathbb{B}$ tiene como base todos los caminos orientados de $\mathbb{B}$, que utilizan cualquier tipo de flechas: continuas o punteadas, incluyendo los caminos triviales τ_i para cada vértice de $\mathbb{B}$. El producto en el álgebra $k\mathbb{B}$ está inducido por pegar caminos. Por ejemplo, tenemos el siguiente bicarcaj:



Este bicarcaj determina el álgebra $k\mathbb{B}$ y podemos seguir el producto de elementos de $k\mathbb{B}$ gráficamente sobre $\mathbb{B}$. El álgebra $k\mathbb{B} = \bigoplus_{i \geq 0} [k\mathbb{B}]_i$ es un álgebra graduada donde cada $[k\mathbb{B}]_i$ es el subespacio vectorial de $k\mathbb{B}$ con base los caminos orientados que contienen exactamente i flechas punteadas.

Notemos que $R = k\tau_1 \oplus k\tau_2$ es una k -álgebra isomorfa a un producto de dos copias de k . Consideremos los subespacios vectoriales de $k\mathbb{B}$

$$W_0 = k\beta_1 \oplus k\beta_2 \oplus k\gamma_1 \oplus k\gamma_2 \text{ y } W_1 = kx_1 \oplus kx_2.$$

Observemos que W_0 y W_1 son R - R -subbimódulos de $k\mathbb{B}$. Notemos que hay un isomorfismo de álgebras graduadas:

$$\phi : k\mathbb{B} \rightarrow T_R(W_0 \oplus W_1),$$

donde el álgebra codominio tiene la única estructura de álgebra graduada tal que W_0 consiste de elementos de grado 0 y W_1 consiste de elementos de grado 1.

Así, $k\mathbb{B}$ es una t -álgebra que identificamos con el álgebra tensorial de la derecha con la notación de la tesis, tenemos $A = [k\mathbb{B}]_0$ y $V = [k\mathbb{B}]_1$.

Vamos a construir una ditálgebra débil entrelazada triangular cuya álgebra tensorial subyacente es $k\mathbb{B}$.

Consideramos la t -álgebra $T = T_R(W_0 \oplus W_1) = k\mathbb{B}$ y el ideal de A determinado por el siguiente generador básico $I = \langle \gamma_2^2 \rangle$. Por 1.3.2, es suficiente encontrar dos morfismos de R - R -bimódulos $\delta_0 : W_0 \rightarrow [T]_1$ y $\delta_1 : W_1 \rightarrow [T]_2$. Definimos estos dos morfismos en las bases de W_0 y W_1 como sigue:

- $\delta_0(\beta_1) = x_1\gamma_2^2\beta_2$
- $\delta_0(\beta_2) = 0$
- $\delta_0(\gamma_1) = \gamma_2^2x_1$
- $\delta_0(\gamma_2) = 0$
- $\delta_1(x_1) = x_2^2\gamma_2^2$
- $\delta_1(x_2) = 0$

Note que δ_0 y δ_1 son morfismos k -lineales, observe que también son morfismos de R - R -bimódulos. Por lo cual existe una derivación $\delta : k\mathbb{B} \rightarrow k\mathbb{B}$ que extiende a δ_0 y δ_1 .

Afirmación 1: $\delta^2 \neq 0$.

En efecto, pues

$$\begin{aligned}\delta^2(\beta_1) &= \delta(x_1\gamma_2^2\beta_2) \\ &= \delta(x_1)\gamma_2^2\beta_2 - x_1\delta(\gamma_2^2\beta_2) \\ &= (x_2^2\gamma_2^2)(\gamma_2^2\beta_2) - x_1[\delta(\gamma_2^2)\beta_2 + \gamma_2^2\delta(\beta_2)] \\ &= x_2^2\gamma_2^4\beta_2 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Así, tendremos $\mathcal{A} = (T_R(W_0 \oplus W_1), \delta)$ es una ditálgebra débil donde δ no es diferencial.

Afirmación 2: $\mathcal{A}$ está entrelazada con I .

Es suficiente mostrar que

- $\delta^2(W_0) \subseteq V^2I + IV^2 + VIV$,
- $\delta^2(W_1) \subseteq V^3I + IV^3 + V^2IV + VIV^2$

Claramente $\delta^2(\beta_2)$, $\delta^2(\gamma_2)$ y $\delta^2(x_2)$ lo cumplen pues son cero.

Por la afirmación 1, $\delta^2(\beta_1) = x_2^2\gamma_2^4\beta_2 \in V^2I$.

$$\delta^2(\gamma_1) = \delta(\gamma_2^2x_1) = \delta(\gamma_2^2)x_1 + \gamma_2^2\delta(x_1) = \gamma_2^2x_2^2\gamma_2^2 \in IV^2$$

Finalmente

$$\delta^2(x_1) = \delta(x_2^2\gamma_2) = \delta(x_2^2)\gamma_2^2 + x_2^2\delta(\gamma_2^2) = 0.$$

Hemos mostrado que $\mathcal{A}$ está entrelazada con I .

Finalmente, hay que notar que $(\mathcal{A}, I)$ es triangular, pues tenemos las filtraciones

$$0 \subseteq k\beta_2 \oplus k\gamma_2 \subseteq W_0$$

$$0 \subseteq kx_2 \subseteq W_1.$$

Por como se define δ estas filtraciones son triangulares. Además, I es ideal triangular con filtración

$$0 \subseteq I.$$

Como deseábamos, tenemos $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada triangular.

Lema 1.4.3. Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada triangular y tomemos $M \in (\mathcal{A}, I)$ -Mod y $f = (f^0, f^1) \in \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)$. Entonces, f es nilpotente si y sólo si f^0 es nilpotente.

Demostración: Claramente si f es nilpotente, entonces f^0 lo es. Adoptemos la notación de 1.4.1.

Supongamos que f^0 es nilpotente, entonces existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $(f^0)^m = 0$. Note que para $w \in W_1^1$, tenemos

$$\delta(w) = \sum_q d_q v_q^{1,1} v_q^{1,2} + v_q^{2,1} v_q^{2,2} e_q + v_q^{3,1} m_q v_q^{3,2},$$

donde $d_q, e_q, m_q \in I$ y $v_q^{s,t} \in V$. Se tiene

$$(f^{2m})^1(w) = (f^0)^m (f^m)^1(w) + (f^m)^1(w) (f^0)^m + [(f^m)^1 \star (f^m)^1](\delta(w)).$$

Por hipótesis, $(f^0)^m (f^m)^1(w) + (f^m)^1(w) (f^0)^m = 0$ y el sumando derecho es

$$\sum_q d_q (f^m)^1(v_q^{1,1}) (f^m)^1(v_q^{1,2}) + (f^m)^1(v_q^{2,1}) (f^m)^1(v_q^{2,2}) e_q + (f^m)^1(v_q^{3,1}) m_q (f^m)^1(v_q^{3,2}) = 0.$$

Supongamos entonces que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $(f^{tm})^1(W_1^j) = 0$.

Mostraremos que $(f^{(t+1)m})^1(W_1^{j+1}) = 0$. Tomemos $w \in W_1^{j+1}$, entonces

$$\delta(w) = \sum_q a_q w_q b_q w'_q c_q + d_q v_q^{1,1} v_q^{1,2} + v_q^{2,1} v_q^{2,2} e_q + v_q^{3,1} m_q v_q^{3,2},$$

donde $a_q, b_q, c_q \in A$, $w_q, w'_q \in W_1^j$, $d_q, e_q, m_q \in I$ y $v_q^{s,t} \in V$. Y tenemos que

$$(f^{(t+1)m})^1(w) = (f^0)^{tm} (f^m)^1(w) + (f^{tm})^1(w) (f^0)^m + [(f^{tm})^1 \star (f^m)^1](\delta(w)).$$

Por hipótesis, $(f^0)^{tm} (f^m)^1(w) + (f^{tm})^1(w) (f^0)^m = 0$ y el término derecho es suma de

$$\sum_q d_q (f^{tm})^1(v_q^{1,1}) (f^m)^1(v_q^{1,2}) + (f^{tm})^1(v_q^{2,1}) (f^m)^1(v_q^{2,2}) e_q + (f^{tm})^1(v_q^{3,1}) m_q (f^m)^1(v_q^{3,2}) = 0$$

con la suma que sigue y que, por hipótesis de inducción, es

$$\sum_q a_q (f^{tm})^1(w_q) b_q (f^m)^1(w'_q) c_q = 0.$$

Por tanto $(f^{(s+1)m})^1 = 0$. □

Proposición 1.4.4. Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada triangular con estratificación (R, W) . Con la notación de 1.4.1, supongamos que para cada $i \in [1, r]$ el álgebra A_i es generada libremente por (R, W_0^i) y que la transformación producto

$$A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A_i \longrightarrow A_i W_1 A_i$$

es un isomorfismo. Supongamos también que M y N son R -módulos, que $f^0 \in \text{Hom}_R(M, N)$ es un isomorfismo y $f^1 \in \text{Hom}_{R-R}(W_1, \text{Hom}_k(M, N))$ entonces:

- Si N es un A -módulo con R -módulo subyacente N e $IN = 0$, entonces hay una estructura de A -módulo en M con R -módulo subyacente M tal que $IM = 0$ y $(f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(A,I)}(M, N)$.
- Si M es un A -módulo con R -módulo subyacente M e $IM = 0$, entonces hay una estructura de A -módulo en N con R -módulo subyacente N tal que $IN = 0$ y $(f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(A,I)}(M, N)$.

Demostración: Las pruebas son duales por lo cual solo probaremos el primer punto. Como f^0 es un isomorfismo, entonces podemos considerar su inversa $g^0 \in \text{Hom}_R(N, M)$ y para $j \in [1, r]$, definiremos por inducción morfismos

$$\phi_j : W_0^j \otimes_R M \longrightarrow M \text{ y } f_{j-1}^1 : A_{j-1}W_1A_{j-1} \rightarrow \text{Hom}_k(M, N)$$

tales que f_{j-1}^1 extiende a f^1 y se tiene la siguiente fórmula

$$\phi_j(w \otimes m) := g^0[wf^0(m)] - g^0[f_{j-1}^1(\delta(w))(m)], \text{ donde } w \in W_0^j \text{ y } m \in M.$$

Para $j = 1$ tenemos que $\delta(w) \in W_1$, por la triangularidad de la estratificación, por lo que $f_0^1(\delta(w))$ está definida con $f_0^1 = f^1$ y por tanto obtenemos un morfismo ϕ_1 .

Mostraremos que se tienen los siguientes 3 puntos.

- (1) Si $M \in A_{j-1}\text{-Mod}$ y $f_{j-1}^1 : A_{j-1}W_1A_{j-1} \rightarrow \text{Hom}_k(M, N)$ está definido, entonces ϕ_j está definido.

En efecto: Podemos considerar la función $\psi_j : W_0^j \times M \rightarrow M$, dada por $\psi_j(w, m) = g^0[wf^0(m)] - g^0[f_{j-1}^1(\delta(w))(m)]$. La regla que define ψ_j tiene sentido gracias a que por triangularidad $\delta(w) \in A_{j-1}W_1A_{j-1}$. ψ_j es una función R -balanceada pues f^0 es un R -morfismo y f_{j-1}^1 y δ son morfismos de R -módulos derechos. Por tanto, existe un morfismo de grupos ϕ_j con la receta indicada. Hay que notar que ϕ_j es un morfismo de R -módulos gracias a que g^0 es un R -morfismo y f_{j-1}^1 y δ son morfismos de R -módulos izquierdos.

- (2) Si ϕ_j está definido, entonces $M \in A_j\text{-Mod}$.

En efecto: Recordemos que tener un morfismo de anillos $\rho : A_j \rightarrow \text{End}_k(M)$ es equivalente a darle al espacio vectorial M una estructura de A_j -módulo. Por hipótesis tenemos $A_j \cong T_R(W_0^j)$, de modo que lo anterior equivale a dar un morfismo de anillos $\rho_0 : R \rightarrow \text{End}_k(M)$ y un morfismo de R - R -bimódulos $\rho_1 : W_0^j \rightarrow \text{End}_k(M)$. El morfismo ρ_0 ya está dado gracias a que M tiene estructura de R -módulo. El morfismo ρ_1 se obtiene de ϕ_j mediante el isomorfismo $\text{Hom}_{R-R}(W_0^j, \text{End}_k(M)) \cong \text{Hom}_R(W_0^j \otimes_R M, M)$.

- (3) Si $M \in A_j\text{-Mod}$, entonces $f_j^1 : A_jW_1A_j \rightarrow \text{Hom}_k(M, N)$ está definido.

Dado que $A_j \otimes_R W_1 \otimes_R A_j \cong A_jW_1A_j$. Podemos aplicar 1.3.5 a los A_j -módulos M y N y a f^1 para obtener la extensión f_j^1 de f^1 .

El paso inductivo se sigue de (1), (2) y (3). Por tanto ϕ_r nos da una estructura de A -módulo en M . Finalmente, tenemos que $wm = g^0[wf^0(m)] - g^0[f_r^1(\delta(w))(m)]$. Por lo que $f^0(wm) =$

$wf^0(m) - [f_r^1(\delta(w))(m)]$. Si $IM = 0$ con ello concluimos que $(f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$, donde abusamos nuevamente del lenguaje identificando f^1 y f_r^1 .

Ya solo falta mostrar que $IM = 0$. Para esto tomemos la notación de 1.2.2 para la triangularidad del ideal I . Para $a_1 \in H_1$, tenemos que $f^0(a_1 m) = \underbrace{a_1 f^0(m)}_{0 \in N} - \underbrace{f^1(\delta(a_1))}_0 [m] = 0$ y

dado que f^0 es inyectiva tenemos que $a_1 m = 0$. Ahora supongamos para $j \geq 1$, que $H_j M = 0$. Tomemos $a_{j+1} \in H_{j+1}$ y observemos que

$$f^0(a_{j+1} m) = \underbrace{a_{j+1} f^0(m)}_{0 \in N} - f^1(\delta(a_{j+1})) [m].$$

Por la triangularidad de I , tendremos que $\delta(a_{j+1}) = \sum_i a_i h_i v_i + \sum_i v'_i h'_i a'_i$, con $a_i, a'_i \in A_i, h_i, h'_i \in H_j$ y $v_i, v'_i \in V$. Entonces,

$$f^1\left(\sum_i a_i h_i v_i + \sum_i v'_i h'_i a'_i\right) [m] = \sum_i \underbrace{a_i h_i f^1(v_i)}_{0 \in N} [m] + \sum_i f^1(v'_i) \underbrace{[h'_i(a'_i m)]}_{H_j M = 0} = 0.$$

Luego $a_{j+1} m = 0$. Concluimos que $IM = 0$. □

Definición 1.4.5. Una *ditálgebra débil entrelazada triangular* $(\mathcal{A}, I)$ con *estratificación* (R, W) es llamada **ditálgebra débil entrelazada de Roiter** syss la siguiente propiedad se satisface:

Para cualquier isomorfismo $f^0 : M \rightarrow N$ de R -módulos y cualquier $f^1 \in \text{Hom}_{R-R}(W_1, \text{Hom}_k(M, N))$ si M ó N tiene una estructura de A/I -módulo izquierdo, entonces el otro admite también una estructura de A/I -módulo izquierdo tal que $(f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$.

Lema 1.4.6. Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una *ditálgebra débil entrelazada triangular*, con *estratificación* (R, W) tal que R es semisimple. Entonces, $(\mathcal{A}, I)$ es una *ditálgebra débil entrelazada de Roiter*.

Demostración: Bastará mostrar que, con la notación de 1.4.1, se tiene que $A_i \cong T_R(W_0^i)$ y el producto $\rho_i : A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A_i \rightarrow A_i W_1 A_i$ es isomorfismo, para cada $i \in [1, r]$, ver 1.4.4. Por la propiedad universal del álgebra tensorial $T_R(W_0^i)$ hay un morfismo de álgebras

$$\phi : T_R(W_0^i) \rightarrow T_R(W_0) = A$$

inducido por $\phi_0 = id_R$ y la inclusión $\phi_1 : W_0^i \rightarrow W_0$. Claramente, la imagen de ϕ es A_i . Mostraremos que ϕ es inyectiva, para obtener $A_i \cong T_R(W_0^i)$. Notemos que

$$\phi = \oplus_{n \geq 0} \phi_1^{\otimes n} : \bigoplus_{n \geq 0} (W_0^i)^{\otimes n} \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 0} W_0^{\otimes n}.$$

Veamos que $\phi_1^{\otimes n}$ es inyectiva para cada $n \geq 1$ por inducción sobre n . Claramente ϕ_1 es inyectiva. Supongamos que $\phi_1^{\otimes n} : (W_0^i)^{\otimes n} \rightarrow W_0^{\otimes n}$ es inyectiva. Tenemos el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
(W_0^i)^{\otimes(n+1)} & \xrightarrow{\phi_1^{\otimes(n+1)}} & W_0^{\otimes(n+1)} \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
(W_0^i)^{\otimes n} \otimes_R W_0^i & \xrightarrow{Id \otimes \phi_1} (W_0^i)^{\otimes n} \otimes_R W_0 & \xrightarrow{\phi_1^{\otimes n} \otimes Id} W_0^{\otimes n} \otimes_R W_0
\end{array}$$

donde la composición del renglón inferior es inyectiva debido a que, como R es semisimple $(W_0^i)_R^{\otimes n}$ y ${}_R W_0$ son proyectivos. Para ver que ρ_i es isomorfismo, denotemos por q_i a la composición:

$$T_R(W_0^i) \otimes_R W_1 \otimes_R T_R(W_0^i) \xrightarrow{\phi \otimes Id \otimes \phi} A_i \otimes_R W_1 \otimes_R A_i \xrightarrow{\rho_i} A_i W_1 A_i \xrightarrow{\sigma} A W_1 A$$

donde σ es la inclusión. Notemos que $\phi \otimes Id \otimes \phi$ es isomorfismo, por lo que basta mostrar que q_i es inyectiva, para obtener que ρ_i lo es (y por tanto es un isomorfismo). El morfismo q_i es

$$\bigoplus_{n \geq 0} (W_0^i)^{\otimes n} \otimes_R W_1 \otimes_R \bigoplus_{m \geq 0} (W_0^i)^{\otimes m} \xrightarrow{(\bigoplus \phi_1^{\otimes n}) \otimes Id \otimes (\bigoplus \phi_1^{\otimes m})} \bigoplus_{n \geq 0} (W_0^i)^{\otimes n} \otimes_R W_1 \otimes_R \bigoplus_{m \geq 0} (W_0^i)^{\otimes m}$$

que es inyectivo porque cada componente lo es. En efecto, conmuta el triángulo:

$$\begin{array}{ccc}
(W_0^i)^{\otimes n} \otimes_R W_1 \otimes_R (W_0^i)^{\otimes m} & \xrightarrow{\phi_1^{\otimes n} \otimes Id \otimes \phi_1^{\otimes m}} & W_0^{\otimes n} \otimes_R W_1 \otimes_R W_0^{\otimes m} \\
& \searrow Id \otimes Id \otimes \phi_1^{\otimes m} & \nearrow \phi_1^{\otimes n} \otimes Id \otimes Id \\
& (W_0^i)^{\otimes n} \otimes_R W_1 \otimes_R W_0^{\otimes m} &
\end{array}$$

y los morfismos de abajo son inyectivos por ser R semisimple y todo R -módulo resulta proyectivo. $\square$

Proposición 1.4.7. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una álgebra débil entrelazada de Roiter con estratificación (R, W) . Suponga que $f = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$, entonces:*

- Si f^0 es una retracción de R -módulos entonces existe un morfismo $h : M' \longrightarrow M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que h^0 es isomorfismo y $(fh)^1 = 0$.
- Si f^0 es una sección de R -módulos entonces existe un morfismo $g : N \longrightarrow N'$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que g^0 es isomorfismo y $(gf)^1 = 0$.

Demostración: Al igual que en las pruebas anteriores solo se mostrará la primera parte ya que la otra es análoga. Primero demostraremos la siguiente afirmación, donde adoptamos la notación de 1.4.1.

Afirmación: Dado $i \in [1, s]$, si $f^1(W_1^{i-1}) = 0$, entonces existe $h = (h^0, h^1) : M' \longrightarrow M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ con h^0 isomorfismo y $(fh)^1(W_1^i) = 0$.

Para demostrar la afirmación tomemos una inversa derecha t^0 de f^0 en $R\text{-Mod}$. Definamos para $w \in W_1$ a $h^1(w) = -t^0 f^1(w) \in \text{Hom}_k(M', M)$, donde M' denota el R -módulo subyacente de M . Entonces $h^1 \in \text{Hom}_{R-R}(W_1, \text{Hom}_k(M', M))$. Como $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter, M' admite una estructura de A/I -módulo tal que $h = (1_M, h^1) : M' \rightarrow M$ es un morfismo de $(\mathcal{A}, I)$ -módulos. Como $f^1(W_1^{i-1}) = 0$, entonces $h^1(W_1^{i-1}) = 0$.

Ahora si $w \in W_1^i$, entonces por triangularidad tenemos

$$\delta(w) = \sum_j a_j w_j b_j w'_j c_j + d_j v_j^{1,1} v_j^{1,2} + v_j^{2,1} v_j^{2,2} e_j + v_j^{3,1} m_j v_j^{3,2},$$

donde $a_j, b_j, c_j \in A$, $w_j, w'_j \in W_1^{i-1}$, $d_j, e_j, m_j \in I$ y $v_j^{s,t} \in V$. Entonces

$$\begin{aligned} (fh)^1(w) &= f^0 h^1(w) + f^1(w) + \sum_j a_j f^1(w_j) b_j h^1(w'_j) c_j \\ &+ \sum_j d_j f^1(v_j^{1,1}) h^1(v_j^{1,2}) + f^1(v_j^{2,1}) h^1(v_j^{2,2}) e_j + f^1(v_j^{3,1}) m_j h^1(v_j^{3,2}). \end{aligned}$$

Por tanto, $(fh)^1(w) = -f^0 t^0 f^1(w) + f^1(w) = 0$ y hemos probado la afirmación. Ahora aplicamos la afirmación a f , para crear un morfismo h_1 , con $(fh_1)^1(W_1^1) = 0$. Luego le aplicamos la afirmación a fh_1 y conseguimos un morfismo h_2 tal que $(fh_1 h_2)(W_1^2) = 0$. Continuando de esta manera construimos un morfismo h_s tal que $(fh_1 h_2 \cdots h_s)(W_1^s) = 0$. Así el morfismo $h := h_1 h_2 \cdots h_s$ es el morfismo que buscamos. $\square$

Corolario 1.4.8. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada de Roiter y supongamos que $f : M \rightarrow N$ es un morfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Entonces f es un isomorfismo syss f^0 es biyectiva.*

Demostración: Es claro que si f es isomorfismo, entonces f^0 también lo es. Mostraremos la otra implicación. Supongamos que f^0 es isomorfismo. Por el lema anterior, tenemos que existe un morfismo $g = (g^0, g^1) : N \rightarrow N'$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ donde $(gf)^1 = 0$ y g^0 es un isomorfismo de R -módulos. Ahora $g^0 f^0 : M \rightarrow N'$ es un morfismo de A/I -módulos, porque $gf = (g^0 f^0, 0)$ es un morfismo de $(\mathcal{A}, I)$ -módulos. Entonces, como $g^0 f^0$ es un isomorfismo de A/I -módulos resulta que gf es un isomorfismo de $(\mathcal{A}, I)$ -módulos. Entonces, f es una sección en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Similarmente se verifica que f es una retracción en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. $\square$

Lema 1.4.9. *Sean $g : M \rightarrow N$ y $f : N \rightarrow L$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, donde $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada triangular. Con la notación de 1.4.1, supongamos que $f^1(W_1^i) = 0$ ó $g^1(W_1^i) = 0$ y $w \in W_1^{i+1}$, entonces*

$$(f^1 \star g^1)(\delta(w)) = 0.$$

Demostración: Por triangularidad, tenemos

$$\delta(w) = \sum_j a_j w_j b_j w'_j c_j + d_j v_j^{1,1} v_j^{1,2} + v_j^{2,1} v_j^{2,2} e_j + v_j^{3,1} m_j v_j^{3,2},$$

donde $a_j, b_j, c_j \in A$, $w_j, w'_j \in W_1^i$, $d_j, e_j, m_j \in I$ y $v_j^{s,t} \in V$. Entonces,

$$\begin{aligned} (f^1 \star g^1)(\delta(w)) &= (f^1 \star g^1)\left(\sum_j a_j w_j b_j w'_j c_j + d_j v_j^{1,1} v_j^{1,2} + v_j^{2,1} v_j^{2,2} e_j + v_j^{3,1} m_j v_j^{3,2}\right) \\ &= \sum_j a_j f^1(w_j) b_j g^1(w'_j) c_j + d_j f^1(v_j^{1,1}) g^1(v_j^{1,2}) + f^1(v_j^{2,1}) g^1(v_j^{2,2}) e_j \\ &\quad + f^1(v_j^{3,1}) m_j g^1(v_j^{3,2}). \end{aligned}$$

Donde, por hipótesis $\sum_j a_j f^1(w_j) b_j g^1(w'_j) c_j = 0$ y, además, como $d_j, e_j, m_j \in I$, tenemos que $\sum_j d_j f^1(v_j^{1,1}) g^1(v_j^{1,2}) + f^1(v_j^{2,1}) g^1(v_j^{2,2}) e_j + f^1(v_j^{3,1}) m_j g^1(v_j^{3,2}) = 0$. Como deseábamos $\square$

Véase 3.1, para revisar la noción de categoría con idempotentes que se dividen.

Proposición 1.4.10. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una álgebra débil entrelazada de Roiter, entonces los idempotentes se dividen en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Esto es: para cualquier idempotente $e \in \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)$ existen $M_1, M_2 \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ y un isomorfismo $h : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que*

$$h^{-1}eh = \begin{pmatrix} 1_{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración: Ya sabemos que los idempotentes en $A/I\text{-Mod}$ se dividen, por lo que es suficiente mostrar que existe un isomorfismo $h : M' \rightarrow M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, tal que el idempotente $h^{-1}eh$ satisface $(h^{-1}eh)^1 = 0$. Pues entonces el idempotente $(h^{-1}eh)^0$ de $A/I\text{-Mod}$ se divide y aplicamos el funtor $\mathcal{L}_{(\mathcal{A}, I)}$.

Vamos a adoptar la notación de 1.4.1.

Afirmación: Dado $i \in [1, s]$, si $e^1(W_1^{i-1}) = 0$, entonces existe un isomorfismo $h : M' \rightarrow M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que $(h^{-1}eh)^1(W_1^i) = 0$.

La afirmación anterior nos permitirá hacer la prueba de la Proposición por inducción. El proceso puede iniciarse ya que $e^1(W_1^0) = 0$.

Supongamos que $e^1(W_1^{i-1}) = 0$. Como $e^2 = e$, para cada $w \in W_1^i$ tenemos que $e^1(w) = (e^2)^1(w) = e^0 e^1(w) + e^1(w) e^0 + (e^1 \star e^1)(\delta(w))$. Por 1.4.9, $(e^1 \star e^1)(\delta(w)) = 0$.

Por lo que $e^1(w) = e^0 e^1(w) + e^1(w) e^0$ y por tanto $e^0 e^1(w) = e^0 e^1(w) + e^0 e^1(w) e^0$ y por tanto $e^0 e^1(w) e^0 = 0$.

Para $w \in W_1^i$ definimos $h^1(w) = e^1(w) f^0$, donde $f^0 \in \text{Hom}_R(M, M)$ será especificado mas adelante.

Ciertamente $h^1(w) = 0$ para $w \in W_1^{i-1}$. También $h^1 \in \text{Hom}_{R-R}(W_1, \text{Hom}_k(M, M))$.

Como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, entonces existe un A/I -módulo M' , con R -módulo subyacente M tal que $h = (1_M, h^1) : M' \rightarrow M$ es un morfismo de $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, h resulta ser un isomorfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Consideremos $g := h^{-1} : M \rightarrow M'$, entonces $g^0 = 1_M$ y tenemos que $0 = (gh)^1$. Entonces, para $w \in W_1^i$, tenemos que $g^1(w) = -h^1(w)$, pues $0 = h^1(w) + g^1(w) + (g^1 \star h^1)(\delta(w))$. Por 1.4.9, tenemos que $(g^1 \star h^1)(\delta(w)) = 0$.

Así, tenemos la siguiente cadena de igualdades para $w \in W_1^i$:

$$\begin{aligned} (geh)^1(w) &= g^0(eh)^1(w) + g^1(w)(eh)^0 + (g^1 \star (eh)^1)(\delta(w)) \\ &= e^0 h^1(w) + e^1(w) - h^1(w)e^0 + (g^1 \star (e^0 h^1 + e^1 + (e^1 \star h^1)))(\delta(w)) \end{aligned}$$

Como en 1.4.9, se tiene $(g^1 \star (e^0 h^1 + e^1 + (e^1 \star h^1)))(\delta(w)) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} (geh)^1(w) &= e^0 h^1(w) + e^1(w) - h^1(w)e^0 \\ &= e^0 e^1(w)f^0 + e^1(w) - e^1(w)f^0 e^0 \\ &= e^0 e^1(w)f^0 + e^0 e^1(w) + e^1(w)e^0 - e^1(w)f^0 e^0. \end{aligned}$$

Como $e^0 e^1(w)e^0 = 0$, si elegimos $f^0 = 2e^0 - 1_M$, obtenemos $(geh)^1(w) = 0$. Esto prueba nuestra afirmación.

Ahora podemos aplicar la afirmación al idempotente e , con $i = 0$, para construir un isomorfismo $h_1 : M_1 \rightarrow M$ tal que $e_1 := h_1^{-1} e h_1$ satisface $e_1^1(W_1^1) = 0$. Luego aplicando la afirmación a e_1 , obtenemos un isomorfismo $h_2 : M_2 \rightarrow M_1$ tal que $e_2 := h_2^{-1} e_1 h_2$ satisface $e_2^1(W_1^2) = 0$. Continuamos hasta construir un isomorfismo $h_s : M_s \rightarrow M_{s-1}$ tal que $e_s := h_s^{-1} e_{s-1} h_s$ satisface $e_s^1(W_1) = 0$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M_s & \xrightarrow{h_s} & M_{s-1} & \xrightarrow{h_{s-1}} & M_{s-2} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{h_1} & M \\ \downarrow e_s & & \downarrow e_{s-1} & & \downarrow e_{s-2} & & \downarrow e_1 & & \downarrow e \\ M_s & \xrightarrow{h_s} & M_{s-1} & \xrightarrow{h_{s-1}} & M_{s-2} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{h_1} & M \end{array}$$

Con $h_1, \dots, h_s$ isomorfismos y e_s idempotente con $e_s^1 = 0$. Tomando el isomorfismo h como $h = h_1 h_2 \cdots h_s$, tenemos $e_s = h^{-1} e h$ como deseábamos. $\square$

Teorema 1.4.11. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditalgebra débil entrelazada de Roiter con estratificación (R, W) tal que el R - R -bimódulo W_1 es finitamente generado. Entonces, $(\mathcal{A}, I)$ -mod es una categoría Krull-Schmidt y Hom-finita, ver 3.2.*

Demostración: Primero veamos que la categoría es Hom-finita, note que

$$Hom_{(\mathcal{A}, I)}(M, N) \subseteq Phom_{R-W}(M, N) = Hom_R(M, N) \times Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M, N)),$$

entonces note que $Hom_R(M, N) \subseteq Hom_k(M, N)$ y este último es de dimensión finita, si M y N lo son. Ahora recuerde que W_1 es un R - R -bimódulo finitamente generado, o bien un $R \otimes_R R^{op}$ -módulo finitamente generado, por lo cual existe un epimorfismo $(R \otimes_R R^{op})^n \rightarrow W_1$, y entonces se tiene el monomorfismo

$$Hom_{R \otimes_R R^{op}}(W_1, Hom_k(M, N)) \rightarrow Hom_{R \otimes_R R^{op}}((R \otimes_R R^{op})^n, Hom_k(M, N)) \cong Hom_k(M, N)^n.$$

Concluimos que $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ es Hom-finita.

Ahora dado que $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ es una categoría Hom-finita, tendremos que $\text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)$ es una k -álgebra de dimensión finita, veremos que M es inescindible si y sólo si $\text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)$ es local.

Supongamos M inescindible, entonces $\Lambda := \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)$ tiene como únicos idempotentes a 0 y 1, recordemos que como $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ es Hom-finita, entonces Λ es una k -álgebra de dimensión finita. Así, $\Lambda/\text{rad}(\Lambda)$ es semisimple, entonces es producto de anillos de matrices sobre anillos con división. Recordemos que los idempotentes se levantan módulo el radical, por lo cual, considerando e_i el idempotente que en el lugar i tiene a la identidad y en los demás lugares 0, entonces existe $e \in \Lambda$ un idempotente tal que módulo el radical es e_i . Pero $e = 0$ o $e = 1$, por tanto $\Lambda/\text{rad}(\Lambda)$ es un álgebra de matrices con coeficientes en un anillo con división, digamos

$$\Lambda/\text{rad}(\Lambda) \cong M_n(D).$$

Como hicimos antes, consideremos $E_{1,1}$ la matriz que tiene 1 en el lugar 1,1 y 0 en el resto. $E_{1,1}$ es un idempotente que se levanta módulo el radical, y entonces resulta que $\Lambda/\text{rad}(\Lambda) \cong D$.

Ahora si $g \in \Lambda$ no está en el radical, entonces $\bar{g} \neq 0$ en $\Lambda/\text{rad}(\Lambda)$ y entonces $\bar{g}$ es invertible en $\Lambda/\text{rad}(\Lambda)$, por tanto existe $\bar{f} \in \Lambda/\text{rad}(\Lambda)$ tal que $\bar{f}\bar{g} = 1$ y por tanto $1 - fg \in \text{rad}(\Lambda)$, y por tanto es nilpotente y entonces $1 - (1 - fg) = fg$ es invertible.

Por tanto existe $h \in \Lambda$ tal que $hfg = 1$, por tanto g tiene inverso izquierdo, de manera análoga se tiene que g tiene inverso derecho. Por tanto concluimos que g es invertible. Como los elementos de $\text{rad}(\Lambda)$ son nilpotentes, no son isomorfismos.

Así, el conjunto de los no isomorfismos de Λ son los elementos del radical de Λ , y Λ es local. Concluimos entonces que $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ es una categoría Krull-Schmidt. □

1.5 La categoría exacta $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$

En lo que sigue mostraremos que si $(\mathcal{A}, I)$ es ditálgebra débil entrelazada de Roiter, la categoría $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ admite una estructura exacta natural.

Lema 1.5.1. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada de Roiter, supongamos que (f, g) es un par de morfismos que pueden componerse en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$, tal que $gf = 0$ y $0 \rightarrow M \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} N \rightarrow 0$ es una sucesión exacta que se divide en $R\text{-Mod}$. Entonces existe un isomorfismo $h : E' \rightarrow E$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que $(gh)^1 = 0$ y $(h^{-1}f)^1 = 0$.*

Demostración: Vamos a probar primero el lema en el caso $f^1 = 0$. Tomando la notación en 1.4.1 afirmamos lo siguiente.

Afirmación: Dado $i \in [1, s]$, si $f^1 = 0$ y $g^1(W_1^{i-1}) = 0$, entonces existe un isomorfismo $h : E' \rightarrow E$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que $(h^{-1}f)^1 = 0$ y $(gh)^1(W_1^i) = 0$.

Como la sucesión se divide entonces g^0 es una retracción, por lo cual existe $t^0 : N \rightarrow E$ tal que $g^0 t^0 = 1_N$. Como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, existe $h := (1_E, h^1) : E' \rightarrow E$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, donde $h^1(w) = -t^0 g^1(w)$, donde E' tiene el mismo R -módulo subyacente E . Primero hay que notar que, por 1.4.9, $(g^1 \star t^0 g^1)(\delta(w)) = 0$. Por tanto, $(gh)^1(W_1^i) = 0$, pues

$$(gh)^1(w) = -g^0 t^0 g^1(w) + g^1(w) - (g^1 \star t^0 g^1)(\delta(w)) = 0.$$

Finalmente, note que $(gf)^1 = 0$ y $f^1 = 0$ implican que $0 = g^1(w)f^0$ para toda $w \in W_1$. Por lo tanto $h^1(w)f^0 = 0$ para todo $w \in W_1$. Como f^0 es de A/I -módulos izquierdos, tenemos $(h^1(awb)f^0)[m] = (ah^1(w)b)[f^0[m]] = ah^1(w)[bf^0(m)] = a(h^1(w)f^0(bm)) = 0$. Finalmente, si tomamos $u := h^{-1}$, con $u^0 = 1_E$, y escribimos $\delta(w) = \sum_j v_j v'_j$, entonces $0 = (uh)^1(w) = h^1(w) + u^1(w) + \sum_j u^1(v_j)h^1(v'_j)$. Entonces,

$$(uf)^1(w) = u^1(w)f^0 = [-h^1(w) - \sum_j u^1(v_j)h^1(v'_j)]f^0 = 0.$$

Por lo tanto $(uf)^1 = 0$, y hemos probado la afirmación.

Para el caso general, procedemos como sigue. Como f^0 es sección, podemos aplicar 1.4.7 a f y se tiene un diagrama conmutativo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ de la forma:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f_1} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & N \\ \parallel & & \downarrow h_1 & & \parallel \\ M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

con h_1 un isomorfismo, $f_1^1 = 0$ y $g_1^1(W_1^0) = 0$. Si aplicamos la afirmación al primer renglón, obtenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f_2} & E_2 & \xrightarrow{g_2} & N \\ \parallel & & \downarrow h_2 & & \parallel \\ M & \xrightarrow{f_1} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & N \end{array}$$

con h_2 isomorfismo, $f_2^1 = 0$ y $g_2^1(W_1^1) = 0$. Continuando de esta manera, llegamos a construir un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f_s} & E_s & \xrightarrow{g_s} & N \\ \parallel & & \downarrow h_s & & \parallel \\ M & \xrightarrow{f_{s-1}} & E_{s-1} & \xrightarrow{g_{s-1}} & N \end{array}$$

con h_s isomorfismo, $f_s^1 = 0$ y $g_s(W_1) = 0$. Si pegamos todos estos diagramas obtenemos el resultado deseado. $\square$

Ver el Apéndice 2 para revisar la terminología que empleamos a continuación y algunas propiedades de las estructuras exactas.

Lema 1.5.2. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter, y sea $0 \rightarrow M \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} N \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $A/I\text{-Mod}$, entonces $M \xrightarrow{(f^0, 0)} E \xrightarrow{(g^0, 0)} N$ es un par exacto en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.*

Demostración: Sean $f = (f^0, 0)$ y $g = (g^0, 0)$. Claramente $gf = 0$. Solo probaremos que $(f^0, 0)$ tiene la propiedad universal de núcleo de $(g^0, 0)$. La verificación de que $(g^0, 0)$ es conúcleo de $(f^0, 0)$ es dual.

Vamos a tomar $Z \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ y $t : Z \rightarrow E$ un morfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que $gt = 0$. Por tanto, $g^0 t^0 = 0$ y $g^0 t^1(v) = (gt)^1(v) = 0$ para todo $v \in V$. Entonces tendremos que existe un único $h^0 \in \text{Hom}_k(Z, M)$, con $f^0 h^0 = t^0$ y, para cada $v \in V$, existe un único $h^1(v) \in \text{Hom}_k(Z, M)$, con $f^0 h^1(v) = t^1(v)$.

Veamos que $h^1 : V \rightarrow \text{Hom}_k(Z, M)$ es morfismo de $A/I - A/I$ -bimódulos. Como f^0 es inyectiva, basta ver que $f^0[h^1(ava')] = f^0(ah^1(v)a')$. En efecto,

$$\begin{aligned} f^0[h^1(ava')][m] &= t^1(ava')[m] \\ &= (at^1(v)a')[m] \\ &= (at^1(v))[a'm] \\ &= af^0 h^1(v)[a'm] \\ &= f^0(ah^1(v)a')[m]. \end{aligned}$$

Finalmente, mostraremos que $h = (h^0, h^1)$ es un morfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Notemos que

$$f^0(ah^0(z)) = at^0(z) = t^0(az) + t^1(\delta(a))[z] = f^0[h^0(az) + h^1(\delta(a))[z]].$$

Claramente, $(f^0, 0)h = t$ y la unicidad de h se sigue de la de h^0 y de cada $h^1(v)$. $\square$

Vamos a definir una clase de pares de morfismos y después veremos que esta clase determina una estructura exacta para $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Ver definición 4.2.1.

Definición 1.5.3. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter, con estratificación (R, W) . Considere la clase $\mathcal{E}$ de pares de morfismos que pueden componerse $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ y tales que existe un diagrama conmutativo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$:*

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ M' & \xrightarrow{(\phi^0, 0)} & E' & \xrightarrow{(\psi^0, 0)} & N' \end{array}$$

tal que $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\phi^0} E' \xrightarrow{\psi^0} N' \rightarrow 0$ es exacta y se divide en $R\text{-Mod}$.

En lo que resta de la sección veremos que $\mathcal{E}$ es una estructura exacta, pero antes daremos una descripción simple de $\mathcal{E}$.

Lema 1.5.4. Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditalgebra débil entrelazada de Roiter. Entonces $\mathcal{E}$ es una clase de pares exactos en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ cerrada bajo isomorfismos. Mas aún, si consideramos morfismos $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, entonces:

- (1) $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ es una confluación syss $gf = 0$ y $0 \rightarrow M \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} N \rightarrow 0$ es exacta y se divide en $R\text{-Mod}$.
- (2) $g : E \rightarrow N$ es una deflación syss $g^0 : E \rightarrow N$ es una retracción en $R\text{-Mod}$.
- (3) $f : M \rightarrow E$ es una inflación syss $f^0 : M \rightarrow E$ es una sección en $R\text{-Mod}$.

Demostración: Vamos a probar (1) y, al mismo tiempo, mostraremos que $\mathcal{E}$ es una clase de pares exactos.

“ $\Rightarrow$ ” Si $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ es una confluación, entonces existe un diagrama conmutativo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow t & & \downarrow s & & \downarrow r \\ M' & \xrightarrow{(\phi^0, 0)} & E' & \xrightarrow{(\psi^0, 0)} & N' \end{array}$$

tal que t, s y r son isomorfismos y $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\phi^0} E' \xrightarrow{\psi^0} N' \rightarrow 0$ es exacta y se divide $R\text{-Mod}$. Entonces, $gf = 0$ y tenemos el diagrama conmutativo con t^0, s^0 y r^0 isomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f^0} & E & \xrightarrow{g^0} & N \\ \downarrow t^0 & & \downarrow s^0 & & \downarrow r^0 \\ M' & \xrightarrow{\phi^0} & E' & \xrightarrow{\psi^0} & N' \end{array}$$

Lo cual implica que $0 \rightarrow M \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} N \rightarrow 0$ es exacta en $R\text{-Mod}$ y se divide.

“ $\Leftarrow$ ” Por 1.4.7, sabemos que existe un diagrama conmutativo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow s & & \downarrow r \\ E' & \xrightarrow{(\psi^0, 0)} & N' \end{array}$$

tal que r, s son isomorfismos. Se sigue que ψ^0 es un morfismo en $A/I\text{-Mod}$, por lo que podemos considerar a $\phi^0 : M' \rightarrow E'$ su núcleo en $A/I\text{-Mod}$. Por 1.5.2, el par $M' \xrightarrow{(\phi^0, 0)} E' \xrightarrow{(\psi^0, 0)} N'$ es exacto en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Dado que $gf = 0$, sabemos que se induce un morfismo $t : M \rightarrow M'$ tal que conmuta

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow t & & \downarrow s & & \downarrow r \\ M' & \xrightarrow{(\phi^0, 0)} & E' & \xrightarrow{(\psi^0, 0)} & N' \end{array}$$

En particular, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f^0} & E & \xrightarrow{g^0} & N \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow t^0 & & \downarrow s^0 & & \downarrow r^0 \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\phi^0} & E' & \xrightarrow{\psi^0} & N' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Lo cual implica que t^0 es isomorfismo en $R\text{-Mod}$. Como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, t es isomorfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Se sigue que $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ es un par exacto en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Por la definición de $\mathcal{E}$, se trata de una confluencia.

Vamos a probar solo 2, pues la prueba para 3 es dual.

Si $g : E \rightarrow N$ es deflación, claramente conseguimos que g^0 es retracción en $R\text{-Mod}$. Por otro lado, si comenzamos con un morfismo $g : E \rightarrow N$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que g^0 es retracción en $R\text{-Mod}$, dado que $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter existe un cuadro conmutativo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{g} & N \\
\downarrow s & & \downarrow r \\
E' & \xrightarrow{(\psi^0, 0)} & N'
\end{array}$$

donde r, s son isomorfismos. Consideramos como antes a ϕ^0 , el núcleo de ψ^0 en $A/I\text{-Mod}$, y construimos el diagrama conmutativo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccccc}
M' & \xrightarrow{f'} & E & \xrightarrow{g} & N \\
\parallel & & \downarrow s & & \downarrow r \\
M' & \xrightarrow{(\phi^0, 0)} & E' & \xrightarrow{(\psi^0, 0)} & N'
\end{array}$$

donde $f' := s^{-1}(\phi^0, 0)$, entonces (f', g) es una confluencia y g es deflación. □

Proposición 1.5.5. *Si $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter, entonces $\mathcal{E}$ es una estructura exacta en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.*

Demostración: Por el lema anterior, las propiedades (A1), (A3) y (A3') de 4.2.1 son claras, por lo cual resta mostrar (A2).

Vamos a tomar $d : Y \rightarrow Z$ una deflación y $f : Z' \rightarrow Z$. Consideremos el morfismo $(f, d) : Z' \oplus Y \rightarrow Z$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Dado que d es una deflación, se concluye que d^0 es una retracción y, por tanto, (f^0, d^0) también es una retracción. Entonces (f, d) resulta ser una deflación, y su núcleo tiene la forma $(d', -f')^t : Y' \rightarrow Z' \oplus Y$. Es decir, tenemos la confluencia:

$$Y' \xrightarrow{(d', -f')^t} Z' \oplus Y \xrightarrow{(f, d)} Z.$$

Entonces, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{(d'^0, -f'^0)^t} Z' \oplus Y \xrightarrow{(f^0, d^0)} Z \longrightarrow 0$$

en $R\text{-Mod}$. Se sigue que el siguiente cuadrado es un pullback en $R\text{-Mod}$:

$$\begin{array}{ccc}
Y' & \xrightarrow{d'^0} & Z' \\
\downarrow f'^0 & & \downarrow f^0 \\
Y & \xrightarrow{d^0} & Z
\end{array}$$

Y dado que d^0 es retracción en $R\text{-Mod}$, entonces d'^0 es una retracción en $R\text{-Mod}$. Por 1.5.4, concluimos que d' es una deflación en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. $\square$

Observación 1.5.6. *Note que si $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter, se tiene que todo A/I -módulo proyectivo es $\mathcal{E}$ -proyectivo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Mas aún, si $(\mathcal{A}, I)$ tiene estratificación semisimple, entonces todo $\mathcal{E}$ -proyectivo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es isomorfo a un sumando directo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ de algún A/I -módulo proyectivo.*

En efecto, si $P \in A/I\text{-Mod}$ es proyectivo, y consideramos cualquier confluación $Q \rightarrow E \rightarrow P$ en $\mathcal{E}_{(\mathcal{A}, I)}$, entonces, por 1.5.1, sabemos que la confluación anterior es equivalente a una de la forma $Q \xrightarrow{(f^0, 0)} E' \xrightarrow{(g^0, 0)} P$. Y por ser P proyectivo, la sucesión $Q \xrightarrow{f^0} E' \xrightarrow{g^0} P$ se divide en $A/I\text{-Mod}$, por lo cual también se divide la original. Hemos probado que P es $\mathcal{E}$ -proyectivo.

También se sigue de esto que $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tiene suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos, ver 4.3.6.

Para la segunda parte, si tomamos un A/I -módulo M que es $\mathcal{E}$ -proyectivo, entonces podemos considerar una sucesión exacta en $A/I\text{-Mod}$ $0 \rightarrow K \xrightarrow{f^0} P \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$, donde P es un A/I -módulo proyectivo. Por ser R semisimple, tendremos que $K \xrightarrow{(f^0, 0)} P \xrightarrow{(g^0, 0)} M$ es una confluación en $\mathcal{E}$ y se divide, por lo cual M es sumando directo de P .

1.6 El álgebra derecha de $(\mathcal{A}, I)$

En esta sección asumiremos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada triangular **especial**, en el siguiente sentido.

Definición 1.6.1. *Una ditálgebra débil entrelazada triangular $(\mathcal{A}, I)$ será llamada **especial** si y sólo si su estratificación $(S, W_0 \oplus W_1)$ cumple:*

- (i) S es un producto finito de copias del campo k .
- (ii) W_0 y W_1 tienen dimensión finita.
- (iii) El álgebra cociente A/I es de dimensión finita.

Observación 1.6.2. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es especial como en la definición anterior.*

Como observamos en 1.4.6, $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter. Escribimos $S = \bigoplus_i k e_i$, donde $1 = \sum_i e_i$ es una descomposición del 1 de S como una suma de idempotentes primitivos ortogonales. Vamos a adoptar la notación de triangularidad de W e I de 1.4.1 y 1.2.2, con $R = S$.

Tendremos que $T = T_S(W_0 \oplus W_1)$, $A = T_S(W_0)$ y $V = A \otimes_S W_1 \otimes_S A$.

Note que $\underline{V} = \frac{A \otimes_S W_1 \otimes_S A}{I \otimes_S W_1 \otimes_S A + A \otimes_S W_1 \otimes_S I} \cong A/I \otimes_S W_1 \otimes_S A/I$, ver [3, 12.1].

Denotamos por $\pi = \rho \otimes Id_{W_1} \otimes \pi : A \otimes_S W_1 \otimes_S A \rightarrow A/I \otimes_S W_1 \otimes_S A/I$ y $\rho : A \rightarrow A/I$.

Definición 1.6.3. Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada especial como antes. Entonces, el **álgebra derecha de** $(\mathcal{A}, I)$ es la k -álgebra de dimensión finita

$$\Gamma := \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I)^{op}.$$

Existe un encaje del álgebra A/I en Γ dado por la composición

$$A/I \longrightarrow \text{End}_{A/I}(A/I)^{op} \xrightarrow{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}} \Gamma,$$

entonces Γ se vuelve naturalmente un A/I -bimódulo

El interés del álgebra Γ es que $\Gamma\text{-mod}$ contiene una subcategoría exacta que es equivalente a $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$, para $(\mathcal{A}, I)$ especial. Esto nos indica hasta que punto $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ tiene un comportamiento de subcategoría de módulos sobre un álgebra y, como veremos más adelante, podemos mostrar propiedades para $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ derivándolas de las correspondientes propiedades de $\Gamma\text{-mod}$.

Lema 1.6.4. Si $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada especial y Γ es su álgebra derecha, entonces

$$F = \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, -) : (\mathcal{A}, I)\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$$

es un funtor fiel, pleno y exacto

Demostración: Por 1.5.6, el funtor $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, -) : (\mathcal{A}, I)\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ es exacto.

Supongamos que $h \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$ es tal que $F(h) = 0$. Entonces, para cada $g \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$ se tiene que $hg = 0$.

Por lo tanto, $h^0 g^0 = 0$ y $h^1(v)g^0 + h^0 g^1(v) + (h^1 \star g^1)(\delta(v)) = 0$, para $v \in V$.

Dado $m_0 \in M$, consideremos el morfismo de A/I -módulos $g^0 : A/I \rightarrow M$, definido por $g^0(a) := am_0$. Por tanto, $\mathcal{L}(g^0) = (g^0, 0) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$.

Y tenemos que $h^0 g^0 = 0$ y $h^1(v)g^0 = 0$ para cada $v \in V$. Entonces, evaluando en $\bar{1} \in A/I$, tendremos que $h^0(m_0) = 0$ y $h^1(v)(m_0) = 0$, por tanto $h = 0$.

Veremos que el funtor F es pleno.

Para esto notamos que $F : \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, A/I) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(F(A/I), F(A/I))$ es isomorfismo.

Por aditividad de F , tenemos isomorfismos

$$F : \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}((A/I)^n, (A/I)^m) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(F[(A/I)^n], F[(A/I)^m]).$$

Consideramos sucesiones exactas en $A/I\text{-mod}$

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{t^0} (A/I)^n \xrightarrow{p^0} M \rightarrow 0 \text{ y } 0 \rightarrow K_1 \xrightarrow{v^0} (A/I)^m \xrightarrow{q^0} K \rightarrow 0.$$

Como S es semisimple, al aplicar el funtor $\mathcal{L}$, obtenemos confluencias en $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$

$$K \xrightarrow{t} (A/I)^n \xrightarrow{p} M \text{ y } K_1 \xrightarrow{v} (A/I)^m \xrightarrow{q} K.$$

De allí, obtenemos sucesiones exactas en $\Gamma\text{-mod}$ al aplicar el funtor exacto F

$$0 \rightarrow F(K) \xrightarrow{F(t)} F[(A/I)^n] \xrightarrow{F(p)} F(M) \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow F(K_1) \xrightarrow{F(v)} F[(A/I)^m] \xrightarrow{F(q)} F(K) \rightarrow 0.$$

Si definimos $s = tq$, obtenemos la sucesión exacta en $\Gamma\text{-mod}$

$$F[(A/I)^m] \xrightarrow{F(s)} F[(A/I)^n] \xrightarrow{F(p)} F(M) \rightarrow 0.$$

Entonces, hay un diagrama conmutativo con renglones exactos en $\Gamma\text{-mod}$

$$\begin{array}{ccccccc} F[(A/I)^m] & \xrightarrow{F(s)} & F[(A/I)^n] & \xrightarrow{F(p)} & F(M) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \\ F[(A/I)^{m'}] & \xrightarrow{F(s')} & F[(A/I)^{n'}] & \xrightarrow{F(p')} & F(N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde s' y p' son los morfismos que corresponden a N . Por los isomorfismos anteriores tenemos que $f_2 = F(h_2)$ y $f_1 = F(h_1)$, para $h_2 \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}((A/I)^m, (A/I)^{m'})$ y $h_1 \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}((A/I)^n, (A/I)^{n'})$.

Por tanto, tendremos las igualdades

$$F(s'h_2) = F(s')f_2 = f_1F(s) = F(h_1s).$$

Como F es fiel, se tiene un diagrama conmutativo en $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$

$$\begin{array}{ccccc} (A/I)^m & \xrightarrow{s} & (A/I)^n & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 & & \downarrow h \\ (A/I)^{m'} & \xrightarrow{s'} & (A/I)^{n'} & \xrightarrow{p'} & N, \end{array}$$

donde tal h existe porque $p'h_1tq = p's'h_2 = 0$ y, como q es epimorfismo, $p'h_1t = 0$ y, si usamos que p es conúcleo de t , obtenemos la h deseada.

Aplicando el funtor F , tendremos $F(h) = f$. Concluimos que F es un funtor pleno. $\square$

Lema 1.6.5. *Para cualquier $M \in A/I\text{-mod}$, existe una sucesión exacta de A/I -módulos izquierdos*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{A/I}(A/I, M) \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M) \xrightarrow{\Xi} \text{Hom}_{A/I}(\underline{V}, M) \longrightarrow 0,$$

donde el espacio $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$ es A/I -módulo izquierdo a través de $A/I \rightarrow \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I)^{op}$ y $\underline{V}$ fue introducido en 1.6.2.

Demostración: Note que cualquier morfismo $f^1 \in \text{Hom}_{A-A}(V, \text{Hom}_k(A/I, M))$ determina un morfismo $\underline{f}^1 \in \text{Hom}_{A/I-A/I}(\underline{V}, \text{Hom}_k(A/I, M))$ tal que $\underline{f}^1 \pi = f^1$. Primero definamos Ξ , donde $\Xi((f^0, f^1))(v) := \underline{f}^1(v)[1]$, para $f = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$ y $v \in \underline{V}$. Veamos que $\Xi(f)$ es morfismo de A/I -módulos izquierdos. Tomemos $a \in A/I$ y $v \in \underline{V}$, note que se cumple

$$\Xi(f)(av) = \underline{f}^1(av)[1] = a\underline{f}^1(v)[1] = a\Xi(f)(v).$$

Por lo tanto, Ξ está bien definida. Recuerde ahora que

$$bf = b(f^0, f^1) = (\mu_b, 0) \cdot (f^0, f^1) = (f^0, f^1)(\mu_b, 0),$$

donde μ_b denota la multiplicación por b a la derecha en A/I y $\cdot$ es el producto en Γ .

Por lo que, para $b \in A/I$, tenemos

$$\begin{aligned} \Xi(bf)[v] &= \Xi((f^0, f^1)(\mu_b, 0))[v] \\ &= (\underline{f}^1(v)\mu_b)[1] \\ &= \underline{f}^1(v)[b] \\ &= \underline{f}^1(vb)[1] \\ &= \Xi(f)[vb] \\ &= b\Xi(f)[v]. \end{aligned}$$

Por lo que Ξ es un morfismo de A/I -módulos izquierdos.

Supongamos ahora que $f \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$ es tal que $\Xi(f) = 0$, por lo tanto $\underline{f}^1(v)[1] = 0$, para todo $v \in \underline{V}$. Por tanto $\underline{f}^1(v)[b] = \underline{f}^1(vb)[1] = 0$ para todo $b \in A/I$, por lo que $f^1 = 0$, esto nos dice que $f \in \text{Im}(\mathcal{L})$, por tanto $\text{Im}(\mathcal{L}) = \ker(\Xi)$.

Veamos que Ξ es suprayectivo.

Sea $g \in \text{Hom}_{A/I}(\underline{V}, M)$ y consideremos su imagen $\underline{g}^1$ bajo el isomorfismo canónico

$$\text{Hom}_{A/I}(\underline{V}, M) \cong \text{Hom}_{A/I}(\underline{V} \otimes A/I, M) \cong \text{Hom}_{A/I-A/I}(\underline{V}, \text{Hom}_k(A/I, M)).$$

Por tanto $\underline{g}^1 : \underline{V} \rightarrow \text{Hom}_k(A/I, M)$ es un morfismo de A/I -bimódulos que satisface $\underline{g}^1(v)[b] = g(vb)$, para $v \in \underline{V}$ y $b \in A/I$. Consideramos el morfismo composición $g^1 := \underline{g}^1 \pi \in \text{Hom}_{A-A}(V, \text{Hom}_k(A/I, M))$. Fijemos cualquier $m_0 \in M$ y definamos, para cada $a \in A/I$,

$$g^0(a) := am_0 - g^1(\delta(a))[1].$$

Por tanto $g^0 \in \text{Hom}_k(A/I, M)$, mas aún $(g^0, g^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$. En efecto, tomemos $a \in A/I$ y $b \in A$

$$\begin{aligned} bg^0(a) &= bam_0 - bg^1(\delta(a))[1] \\ &= bam_0 - g^1(b\delta(a))[1] \\ &= bam_0 + g^1(\delta(b)a - \delta(ba))[1] \\ &= bam_0 - g^1(\delta(ba))[1] + g^1(\delta(b))[a] \\ &= g^0(ba) + g^1(\delta(b))[a]. \end{aligned}$$

Por tanto, Ξ es sobreyectiva. □

El siguiente lema implica que el A/I -módulo derecho Γ es plano. En efecto, el funtor $\Gamma \otimes_{A/I} -$ es exacto debido a que $\Gamma \otimes_{A/I} - \cong \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, -)\mathcal{L}$ y sabemos que $\mathcal{L}$ y $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, -)$ son exactos. Recuerde que $\mathcal{L}$ es exacto por 1.5.2, pues S es semisimple.

Lema 1.6.6. *Para $M \in A/I\text{-mod}$, la función $\sigma_M : \Gamma \otimes_{A/I} M \rightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$ dada por $\sigma(f \otimes m) := f_m = (f_m^0, f_m^1)$, donde $f_m^0(a) = f^0(a)m$ y $f_m^1(v)[a] = f^1(v)[a]m$, define un isomorfismo natural.*

$$\sigma_M : \Gamma \otimes_{A/I} M \rightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, \mathcal{L}(M)).$$

Demostración: Vamos a demostrar esta afirmación por pasos.

Paso 1: σ_M es función bien definida.

Sean $f \in \Gamma, m \in M$, claramente $f_m^0 \in \text{Hom}_k(A/I, M)$. Veamos que $f_m^1 \in \text{Hom}_{A-A}(\underline{V}, \text{Hom}_k(A/I, M))$.

Sean $b, c \in A$ y $v \in \underline{V}$. Tenemos

$$\begin{aligned} f_m^1(bvc)[a] &= f^1(bvc)[a]m \\ &= (bf^1(v)c)[a]m \\ &= bf^1(v)[ca]m \\ &= b(f_m^1(v)[ca]) = (bf_m^1(v)c)[a]. \end{aligned}$$

Vamos a mostrar que $f_m \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$. En efecto,

$$af_m^0(b) = af^0(b)m = f^0(ab)m + f^1(\delta(a))[b]m = f_m^0(ab) + f_m^1(\delta(a))[b].$$

Veamos ahora que σ_M es inducida por una función A/I -balanceada.

Vamos a recordar que si $f \in \Gamma$, entonces se tiene que para cada $b \in A/I$, $fb = (\rho_b^0, 0)(f^0, f^1)$, donde $\rho_b^0 : A/I \rightarrow A/I$ está dada por $\rho_b^0(a) = ab$.

Sea $\underline{\sigma}_M : \Gamma \times M \rightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M)$ tal que $\underline{\sigma}_M(f, m) := f_m$.

Por tanto, $\underline{\sigma}_M(fb, m) = (h_m^0, h_m^1)$, donde $h_m^0(a) = (\rho_b^0 f^0)(a)m = f^0(a)bm = f_{bm}^0(a)$ y $h_m^1(v)(a) = (\rho_b^0 f^1(v))(a)m = f^1(v)(a)bm = f_{bm}^1(v)(a)$.

Por tanto σ_M es inducida por $\underline{\sigma}_M$, la cual es A/I -balanceada.

Paso 2: σ_M es morfismo de Γ -módulos.

Sean $e, f \in \Gamma$, se tiene

$$e\sigma_M(f \otimes m) = \sigma_M(f \otimes m) \circ e = (f_m^0, f_m^1)(e^0, e^1)$$

y

$$\sigma_M(ef \otimes m) = \sigma_M(f \circ e \otimes m) = ((f \circ e)_m^0, (f \circ e)_m^1).$$

Note que la parte cero es igual, para ver que pasa con la parte 1, tenemos que evaluar en $v \in V$ y suponer que $\delta(v) = \sum_i v_i^1 v_i^2$. Se tiene

$$(f_m e)^1(v)(a) = f_m^1(v) e^0(a) + f_m^0 e^1(v)(a) + \sum f_m^1(v_i^1) e^1(v_i^2)(a)$$

y

$$(f \circ e)_m^1(v)(a) = f^1(v)(e^0(a))m + f^0(e^1(v)(a))m + \sum_i f^1(v_i^1)(e^1(v_i^2)(a))m.$$

Paso 3: σ_M es natural.

Sea $f : M \rightarrow N$ en A/I -mod, veamos que conmuta el siguiente cuadro

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \otimes_{A/I} M & \xrightarrow{\sigma_M} & \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M) \\ \downarrow 1 \otimes f & & \downarrow (f, 0)_* \\ \Gamma \otimes_{A/I} N & \xrightarrow{\sigma_N} & \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, N) \end{array}$$

Para cada generador básico de la forma $\gamma \otimes m$ de $\Gamma \otimes M$, se tiene

$$(f, 0)_* \sigma_M(\gamma \otimes m) = (f, 0) \circ \gamma_m.$$

Por otro lado,

$$\sigma_N(1 \otimes f)(\gamma \otimes m) = \sigma_N(\gamma \otimes f(m)) = \gamma_{f(m)}.$$

Por tanto, tendremos

$$\gamma_{f(m)}^0(a) = \gamma^0(a)f(m) = f(\gamma^0(a)m) = (f\gamma_m^0)(a).$$

Por otro lado, tendremos

$$\gamma_{f(m)}^1(v)[a] = \gamma^1(v)[a]f(m) = f(\gamma^1(v)[a]m) = f\gamma_m^1(v)[a].$$

Paso 4: σ_M es un isomorfismo.

- Para el módulo A/I , σ_M es el isomorfismo dado por la multiplicación.

Sea $\pi : \Gamma \otimes_{A/I} A/I \rightarrow \Gamma$ el isomorfismo dado por el producto $f \otimes b \mapsto fb$. Veamos que $\sigma_{A/I} = \pi$. Sean $b \in A/I$ y $f \in \Gamma$, y veamos que $\sigma_{A/I}(f \otimes b) = fb$, es decir que

$$(f_b^0, f_b^1) = (\rho_b^0, 0)(f^0, f^1).$$

Para ver que $f_b^0 = \rho_b^0 f^0$, tomemos $a \in A/I$ y veamos que $\rho_b^0 f^0(a) = f^0(a)b = f_b^0(a)$. Si $v \in V$, veamos que $f_b^1(v) = \rho_b^0 f^1(v)$. **En efecto**, si $a \in A/I$, obtenemos $f_b^1(v)[a] = f^1(v)[a]b = \rho_b^0 f^1(v)[a]$.

- Por aditividad de $\Gamma \otimes -$ y $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, \mathcal{L}(-))$, $\sigma_{(A/I)^n}$ es un isomorfismo.

Para cada módulo $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-mod}$, podemos considerar una resolución libre en $A/I\text{-mod}$

$$(A/I)^m \rightarrow (A/I)^n \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Aplicamos los funtores exactos $\Gamma \otimes_{A/I} -$ y $\text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, \mathcal{L}(-))$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\Gamma\text{-mod}$

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma \otimes_{A/I} (A/I)^m & \longrightarrow & \Gamma \otimes_{A/I} (A/I)^n & \longrightarrow & \Gamma \otimes_{A/I} M & \longrightarrow & 0 \\ \sigma_{(A/I)^m} \downarrow & & \downarrow \sigma_{(A/I)^n} & & \downarrow \sigma_M & & \\ \text{Hom}_{A/I}(A/I, (A/I)^m) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A/I}(A/I, (A/I)^n) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A/I}(A/I, M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por tanto tendremos que σ_M es un isomorfismo.

□

Lema 1.6.7. *El funtor $T := \Gamma \otimes_{A/I} - : A/I\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ admite como adjunto derecho el funtor restricción $S : \Gamma\text{-mod} \rightarrow A/I\text{-mod}$. Considere el isomorfismo de adjunción $\zeta : \text{Hom}_{\Gamma}(T(M), N) \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(M, S(N))$ y su unidad α , que es la transformación natural $\alpha : 1_{A/I\text{-mod}} \rightarrow ST$ definida, para $M \in A/I\text{-mod}$, por $\alpha_M := \zeta(1_{TM}) : M \rightarrow STM$. Entonces, para cada $M \in A/I\text{-mod}$, tenemos el cuadro conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha_M} & \Gamma \otimes_{A/I} M \\ \Psi_M \downarrow & & \downarrow \sigma_M \\ \text{Hom}_{A/I}(A/I, M) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, M) \end{array}$$

donde Ψ_M es el isomorfismo canónico. En particular, se tendrá que α_M es monomorfismo.

Demostración: Para $M \in A/I\text{-mod}$ y $N \in \Gamma\text{-mod}$, tenemos la función de adjunción $\zeta : \text{Hom}_{\Gamma}(T(M), N) \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(M, S(N))$, que envía $h \mapsto \zeta(h)$, tal que $\zeta(h)(m) := h(1 \otimes m)$, cuya inversa es $\zeta' : \text{Hom}_{A/I}(M, S(N)) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(T(M), N)$, que envía $g \mapsto p(1_{\Gamma} \otimes g)$, donde $p : \Gamma \otimes_{A/I} N \rightarrow N$ es el morfismo producto.

En efecto, dados $a \in A/I$ y $m \in M$, tendremos que

$$\zeta(h)[am] = h(1 \otimes am) = h(a \otimes m) = ah(1 \otimes m) = a\zeta(h)[m].$$

Considerando $f \in \Gamma$ tenemos que

$$p(1 \otimes \zeta(h))[f \otimes m] = p(f \otimes h(1 \otimes m)) = fh(1 \otimes m) = h(f \otimes m).$$

Por tanto $p(1 \otimes \zeta(h)) = h$ y $\zeta' \zeta = id$. Mas aún,

$$\zeta(p(1 \otimes g))[m] = p(1 \otimes g)(1 \otimes m) = p(1 \otimes g(m)) = g(m).$$

Por lo tanto, $\zeta(p(1 \otimes g)) = g$ y se cumple que $\zeta' \zeta = id$.

Consideremos $f : M \rightarrow M'$ en $A/I\text{-mod}$ y veamos que el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\Gamma}(\Gamma \otimes_{A/I} M, N) & \xrightarrow{\zeta} & Hom_{A/I}(M, S(N)) \\
(1 \otimes f)^* \uparrow & & \uparrow f^* \\
Hom_{\Gamma}(\Gamma \otimes_{A/I} M', N) & \xrightarrow{\zeta} & Hom_{A/I}(M', S(N))
\end{array}$$

En efecto, dado $h \in Hom_{\Gamma}(\Gamma \otimes_{A/I} M', N)$, tendremos

$$\zeta(1 \otimes f)^*(h)[m] = \zeta(h(1 \otimes f))[m] = h(1 \otimes f)(1 \otimes m) = h(1 \otimes f(m)) = \zeta(h)f(m) = f^*\zeta(h)[m].$$

Si tomamos $t : N \rightarrow N'$ en Γ -mod, tendremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\Gamma}(\Gamma \otimes_{A/I} M, N) & \xrightarrow{\zeta} & Hom_{A/I}(M, S(N)) \\
t_* \downarrow & & \downarrow S(t)_* \\
Hom_{\Gamma}(\Gamma \otimes_{A/I} M, N') & \xrightarrow{\zeta} & Hom_{A/I}(M, S(N'))
\end{array}$$

pues

$$S(t)_*(\zeta(f))(m) = S(t)(f[1 \otimes m]) = tf(1 \otimes m) = \zeta(tf)(m).$$

Finalmente, note que $\alpha_M(m) = 1 \otimes m$, para $m \in M$. Sea $\theta := \sigma_M \alpha_M$. Entonces,

$$\theta(m) = \sigma_M \alpha_M(m) = \sigma_M(1 \otimes m) = (\theta(m)^0, \theta(m)^1),$$

donde $\theta(m)^0[a] = am$ y $\theta(m)^1(v)[a] = id^1(v)[a]m = 0$. Entonces, $\sigma_M \alpha_M(m) = \theta(m) = (\Psi_M(m), 0) = \mathcal{L}\Psi_M(m)$. $\square$

Corolario 1.6.8. Para cada $M \in A/I$ -mod, la siguiente sucesión es exacta en A/I -mod

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha_M} \Gamma \otimes_{A/I} M \xrightarrow{\theta} Hom_{A/I}(\underline{V}, M) \rightarrow 0,$$

donde $\theta := \Xi \sigma_M$, ver 1.6.5, 1.6.6 y 1.6.7.

Demostración: Para $M \in A/I$ -mod, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha_M} & \Gamma \otimes_{A/I} M & \xrightarrow{\theta} & Hom_{A/I}(\overline{V}, M) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \Psi_M & & \downarrow \sigma_M & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & Hom_{A/I}(A/I, M) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Hom_{(A,I)}(A/I, M) & \xrightarrow{\Xi} & Hom_{A/I}(\overline{V}, M) \longrightarrow 0
\end{array}$$

donde el segundo renglón es exacto por 1.6.5. Como Ψ_M y σ_M son isomorfismos, el primer renglón también es exacto. $\square$

Definición 1.6.9. Un A/I -bimódulo $\overline{U}$ es llamado **projectivizante** si y sólo si $\overline{U} \otimes_{A/I} X$ es projectivo para todo $X \in A/I$ -mod y $Y \otimes_{A/I} \overline{U}$ es projectivo para todo $Y \in mod - A/I$.

Lema 1.6.10. Con nuestra notación fija, el S - S -bimódulo W_1 introducido en 1.6.2 es libremente generado por un conjunto $\mathbb{B}_1$. Por tanto, el A/I -bimódulo $\underline{V}$ es projectivizante.

Demostración: Dado que S es un producto finito de campos y W_1 es de dimensión finita, existe un k -base dirigida $\mathbb{B}_1$ de W_1 , es decir, tal que cada $w \in \mathbb{B}_1$ satisface que $w \in e_{t(w)}W_1e_{s(w)}$, para ciertos idempotentes $e_{t(w)}$, $e_{s(w)}$, y un isomorfismo de S - S -bimódulos $W_1 \cong \bigoplus_{w \in \mathbb{B}_1} Se_{t(w)} \otimes_k e_{s(w)}S$.

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \underline{V} &\cong A/I \otimes_S W_1 \otimes_S A/I \\ &\cong \bigoplus_{w \in \mathbb{B}_1} A/I \otimes_S Se_{t(w)} \otimes_k e_{s(w)}S \otimes_S A/I \\ &\cong \bigoplus_{w \in \mathbb{B}_1} (A/I)e_{t(w)} \otimes_k e_{s(w)}(A/I). \end{aligned}$$

Note que, dada una familia $\{P_i\}_{i=1}^n$ de A/I -módulos proyectivos izquierdos y una familia $\{Q_i\}_{i=1}^n$ de A/I -módulos proyectivos derechos, entonces el A/I -bimódulo $\bar{U} := \bigoplus_{i=1}^n P_i \otimes_k Q_i$ es proyectivizante. En efecto, si $X \in A/I\text{-mod}$, el k -espacio vectorial $Z_i := Q_i \otimes_{A/I} X$ tiene dimensión

$$d_i := \dim_k(Z_i) \leq \dim_k(Q_i) \times \dim_k X.$$

Entonces, tenemos el isomorfismo de A/I -módulos izquierdos

$$\bar{U} \otimes_{A/I} X \cong \bigoplus_i P_i \otimes_k Z_i \cong \bigoplus_i d_i P_i$$

y $\bar{V} \otimes_{A/I} X$ es proyectivo en $A/I\text{-mod}$. □

Lema 1.6.11. *Si $\bar{V}$ es un A/I -módulo proyectivizante, entonces $\text{Hom}_{A/I}(\bar{V}, M)$ es un A/I -módulo inyectivo, para todo $M \in A/I\text{-mod}$.*

Demostración: Tomemos una sucesión exacta $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$, como $\bar{V}$ es proyectivo como A/I -módulo derecho, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \bar{V} \otimes_{A/I} E_1 \rightarrow \bar{V} \otimes_{A/I} E_2 \rightarrow \bar{V} \otimes_{A/I} E_3 \rightarrow 0,$$

donde cada término es proyectivo y, por tanto, la sucesión se divide. Aplicando el funtor $\text{Hom}_{A/I}(-, M)$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(\bar{V} \otimes_{A/I} E_3, M) \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(\bar{V} \otimes_{A/I} E_2, M) \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(\bar{V} \otimes_{A/I} E_1, M) \rightarrow 0,$$

la cual es isomorfa a la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(E_3, \text{Hom}_{A/I}(\bar{V}, M)) \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(E_2, \text{Hom}_{A/I}(\bar{V}, M)) \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(E_1, \text{Hom}_{A/I}(\bar{V}, M)) \rightarrow 0,$$

por medio de isomorfismos de adjunción tensor-Hom. Por tanto, $\text{Hom}_{A/I}(-, \text{Hom}_{A/I}(\bar{V}, M))$ es un funtor exacto. □

Corolario 1.6.12. *El A/I -módulo derecho Γ es proyectivo.*

Demostración: Tenemos la sucesión exacta en $A/I\text{-mod}$ de 1.6.5

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{A/I}(A/I, A/I) \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, A/I) \xrightarrow{\Xi} \text{Hom}_{A/I}(\underline{V}, A/I) \longrightarrow 0.$$

Dicha sucesión determina la sucesión exacta de k -espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow A/I \xrightarrow{s} \Gamma \xrightarrow{\Xi} \text{Hom}_{A/I}(\underline{V}, A/I) \longrightarrow 0,$$

donde s es el morfismo inclusión, la cual es una sucesión exacta de A/I -módulos derechos. Entonces, dado que $\underline{V}$ es proyectivo finitamente generado como A/I -módulo izquierdo, entonces $\text{Hom}_{A/I}(\underline{V}, A/I)$ es proyectivo como A/I -módulo derecho y, entonces, la sucesión se divide y Γ es proyectivo como A/I -módulo derecho. $\square$

Proposición 1.6.13. *Considere el funtor $T := \Gamma \otimes_{A/I} - : A/I\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$. Entonces, toda extensión $e : 0 \rightarrow TM \rightarrow E \rightarrow TN \rightarrow 0$ en $\Gamma\text{-mod}$ es equivalente a la extensión Te' obtenida por aplicar T a una extensión*

$$e'' : 0 \rightarrow M \rightarrow E'' \rightarrow N \rightarrow 0$$

en $A/I\text{-mod}$.

Demostración: Primero recordemos que tenemos $S : \Gamma\text{-mod} \rightarrow A/I\text{-mod}$ como en 1.6.7. Apliquemos S a la extensión e , para obtener la extensión

$$Se : 0 \rightarrow STM \rightarrow SE \rightarrow STN \rightarrow 0.$$

Consideramos la extensión $(Se)\alpha_N$ que llamaremos e' . Así, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} e' : & 0 & \longrightarrow & STM & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \alpha_N & & \\ Se : & 0 & \longrightarrow & STM & \longrightarrow & SE & \longrightarrow & STN & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por 1.6.8, 1.6.10 y 1.6.11, $I := \text{coker}(\alpha_M) = \text{Hom}_{A/I}(\underline{V}, M)$ es inyectivo, entonces el morfismo $\theta : STM \rightarrow I$ se levanta a un morfismo $E' \rightarrow I$, con núcleo E'' . Entonces tendremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ e'' : & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & N \\ & & & \downarrow \alpha_M & & \downarrow & & \parallel \\ e' : & 0 & \longrightarrow & STM & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 & \longrightarrow & I & \xlongequal{\quad} & I & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

con los últimos dos renglones y sus tres columnas exactas. Entonces, por el lema de la serpiente, se tiene la siguiente extensión

$$e'' : 0 \rightarrow M \rightarrow E'' \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Por tanto, tendremos morfismos de extensiones $e'' \rightarrow e' \rightarrow Se$. Aplicando el funtor exacto T , obtenemos un morfismo de extensiones $Te'' \rightarrow Te' \rightarrow TSe$. Mas aún, la counidad de la adjunción $\beta : TS \rightarrow 1_{\Gamma\text{-mod}}$ determina un morfismo de extensiones

$$\begin{array}{ccccccc} TSe : & 0 & \longrightarrow & TSTM & \longrightarrow & TSE & \longrightarrow & TSTN & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \beta_{TM} & & \downarrow \beta_E & & \downarrow \beta_{TN} & & \\ e : & 0 & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & E & \longrightarrow & TN & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Considere la composición de los morfismos de extensiones $Te'' \rightarrow Te' \rightarrow TSe \rightarrow e$, el cual nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} Te'' : & 0 & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & TE'' & \longrightarrow & TN & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \\ e : & 0 & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & E & \longrightarrow & TN & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

donde los morfismos verticales son igualdades, debido a las relaciones que existen entre las unidades y counidades asociadas a un par de funtores adjuntos. Entonces obtenemos lo deseado. $\square$

Proposición 1.6.14. *Dada una ditálgebra débil entrelazada especial $(\mathcal{A}, I)$, tenemos:*

- *El funtor $F = \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, -) : (\mathcal{A}, I)\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ es un funtor fiel, pleno y exacto.*
- *El A/I -módulo derecho Γ determina un funtor exacto*

$$\Gamma \otimes_{A/I} - : A/I\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}.$$

y tenemos $\Gamma \otimes_{A/I} - \cong \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, \mathcal{L}(-))$.

- *El funtor F se restringe a una equivalencia de categorías $F : (\mathcal{A}, I)\text{-mod} \rightarrow \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es la subcategoría plena de $\Gamma\text{-mod}$ de módulos inducidos desde $A/I\text{-mod}$, esto es por la clase de Γ -módulos isomorfos a $\Gamma \otimes_{A/I} N$, para alguna $N \in A/I\text{-mod}$.*

Mas aún, la subcategoría $\mathcal{I}$ de $\Gamma\text{-mod}$ es cerrada bajo extensiones.

Demostración: El primer punto se tiene por 1.6.4. El segundo se sigue de 1.6.6. El tercero se sigue de 1.6.4, 1.6.6 y 1.6.13. $\square$

1.7 Sucesiones que casi se dividen

En está sección veremos que, si $(\mathcal{A}, I)$ es especial, la categoría $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ tiene sucesiones que casi se dividen. Estos objetos tienen sentido en categorías exactas $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ más generales que $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$. Con el fin de destacar la generalidad de algunas de las afirmaciones trabajaremos al principio bajo la hipótesis de que $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ es Krull-Schmidt y Hom-finita, como hemos supuesto en el Apéndice 1. Hemos visto que $((\mathcal{A}, I) - \text{mod}, \mathcal{E})$ es un ejemplo de ésto, cuando $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter con estratificación (R, W) tal que W_1 es finitamente generado como en 1.4.11.

Definición 1.7.1. *Un morfismo $g : E \rightarrow N$ en $\mathcal{C}$ **casi se divide a derecha** si y sólo si este no es retracción y para todo $t : Z \rightarrow N$ que no es retracción, existe $t' : Z \rightarrow E$ tal que conmuta*

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \swarrow t' & \downarrow t \\ E & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

*Un morfismo $f : M \rightarrow E$ en $\mathcal{C}$ **casi se divide a izquierda** si y sólo si este no es sección y para todo $t : M \rightarrow Z$ que no es sección, existe $t' : E \rightarrow Z$ tal que conmuta*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ t \uparrow & \nwarrow t' & \\ M & \xrightarrow{f} & E \end{array}$$

Lema 1.7.2. *La existencia de un morfismo que casi se divide a derecha $g : E \rightarrow N$ en $\mathcal{C}$ implica que N es un objeto inescindible. Dualmente, si $f : M \rightarrow E$ casi se divide a izquierda, M es inescindible.*

Demostración: Supongamos que $g : E \rightarrow N$ casi se divide a derecha. Vamos a mostrar que el ideal $g\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, E)$ es el único ideal propio maximal derecho de $\text{End}_{\mathcal{C}}(N)$.

Primero mostremos que es un ideal derecho. Claramente $g\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, E)$ es un grupo abeliano. Basta mostrar que dado $t : N \rightarrow N$, $g\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, E)t \subseteq g\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, E)$, lo que es claro.

Para ver que el ideal es propio, hay que notar que el $1 : N \rightarrow N$ no está en $g\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, E)$ porque g no es retracción. Finalmente, para la maximalidad, tomemos la siguiente situación

$$g\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, E) \subseteq J \subseteq \text{End}_{\mathcal{C}}(N),$$

donde J es un ideal propio de $\text{End}_{\mathcal{C}}(N)$. Entonces, existe f no retracción en J , pero eso implica que $f \in g\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, E)$. $\square$

Definición 1.7.3. *La categoría exacta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ **tiene morfismos casi se dividen a derecha** si y sólo si para todo inescindible N en $\mathcal{C}$, existe un morfismo casi se divide a derecha*

$g : E \rightarrow N$ en $\mathcal{C}$.

$(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ **tiene morfismos casi se dividen a izquierda** si y sólo si para todo inescindible M en $\mathcal{C}$ existe un morfismo casi se divide a izquierda $f : M \rightarrow E$ en $\mathcal{C}$.

Un morfismo $h : M \rightarrow N$ en $\mathcal{C}$ es llamado **minimal derecho** si y sólo si la existencia de cualquier factorización $h = ht$ implica que t es un isomorfismo.

Un morfismo $h : M \rightarrow N$ en $\mathcal{C}$ es llamado **minimal izquierdo** si y sólo si la existencia de cualquier factorización $h = th$ implica que t es un isomorfismo.

Diremos que un morfismo $g : E \rightarrow N$ es **minimal casi se divide a derecha** si el morfismo es un morfismo minimal derecho y casi se divide a derecha.

Note que si $g : E \rightarrow N$ y $g' : E' \rightarrow N$ son minimales casi se divide a derecha, entonces existe un isomorfismo $s : E \rightarrow E'$ tal que $g's = g$.

Proposición 1.7.4. Si N es un objeto en la categoría exacta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, en el cual un morfismo casi se divide a derecha termina, entonces existe un morfismo minimal casi se divide a derecha $g : E \rightarrow N$.

Demostración: Se sigue de 3.3.34. □

Lema 1.7.5. Supongamos que $g : E \rightarrow N$ es un morfismo casi se divide a derecha y $g_1 : E_1 \rightarrow N$ es un morfismo minimal casi se divide a derecha en $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, entonces hay un cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow \cong & & \parallel \\ E_1 \oplus E_2 & \xrightarrow{(g_1, 0)} & N \end{array}$$

Demostración: En efecto, pues como g es casi se divide a derecha, g no es retracción y, análogamente, como g_1 es minimal casi se divide a derecha, entonces no es retracción. Por lo cual existen morfismos v y r tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ v \nearrow & \downarrow g & \nwarrow \\ E_1 & \xrightarrow{g_1} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & E_1 & \\ r \nearrow & \downarrow g_1 & \nwarrow \\ E & \xrightarrow{g} & N. \end{array}$$

De donde se tendrá que $rv \in \text{End}(E_1)$ y satisface $g_1rv = g_1$. Entonces, rv es un isomorfismo. Así, existe $\phi \in \text{End}(E_1)$ tal que $rv\phi = 1_{E_1}$. Consideremos entonces $i = v\phi$. Note que se tiene la situación

$$E_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{r} E_1 \text{ como en 3.1.2.}$$

Por lo tanto, como los idempotentes se dividen en nuestra categoría, se tiene que existen morfismos $Z \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} Z$ tales que $(r, p)^t : E \rightarrow E_1 \oplus Z$ es isomorfismo con inversa $(i, s) : E_1 \oplus Z \rightarrow E$ y conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{r} & E_1 \\ \left(\begin{smallmatrix} r \\ p \end{smallmatrix}\right) \downarrow & & \parallel \\ E_1 \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & E_1 \end{array}$$

Por lo que, completando el cuadrado, tenemos

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{r} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & N \\ \left(\begin{smallmatrix} r \\ p \end{smallmatrix}\right) \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ E_1 \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & N \end{array}$$

como deseábamos. □

Lema 1.7.6. *Supongamos que $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ es una confluencia, con M inescindible y g casi se divide a derecha, entonces g es minimal casi se divide a derecha.*

Demostración: Elegimos un morfismo mínimo casi se divide a derecha que termina en N , digamos $g_1 : E_1 \rightarrow N$. Por 1.7.4, podemos hacer esto.

Por 1.7.5, se tiene el diagrama conmutativo siguiente con renglones confluencias

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\ \parallel & & \downarrow (r,p)^t & & \parallel \\ M & \xrightarrow{\phi} & E_1 \oplus Z & \xrightarrow{(g_1,0)} & N \end{array}$$

donde $(r, p)^t$ es isomorfismo y $\phi = (rf, pf)^t$. Al componer $(0, 1)^t : Z \rightarrow E_1 \oplus Z$ con $(g_1, 0)$, nos da el morfismo 0. Como ϕ es el núcleo de $(g_1, 0)$, existe un morfismo h tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(rf, pf)^t} & E_1 \oplus Z \\ \uparrow h & \nearrow (0,1)^t & \\ Z & & \end{array}$$

Entonces, $pfh = 1_Z$. Por 3.1.2, tenemos un cuadro conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{pf} & Z \\ \theta \downarrow & & \parallel \\ Z \oplus C & \xrightarrow{(1,0)} & Z \end{array}$$

con θ isomorfismo. Como M es inescindible, si $Z \neq 0$, tenemos $C = 0$ y pf isomorfismo. Entonces, f es sección y la confluación original se divide. Así, g es retracción, lo cual contradice la hipótesis. Entonces $Z = 0$ y g es minimal. $\square$

Lema 1.7.7. *Supongamos que $g : E \rightarrow N$ es un morfismo en $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Entonces g es casi se divide a derecha si y sólo si g no es retracción y para cualquier no isomorfismo $h : Z \rightarrow N$ con Z inescindible, existe $h' : Z \rightarrow E$ tal que $gh' = h$.*

Demostración: “ $\Rightarrow$ ” Como g es casi se divide a derecha, entonces g no es retracción. Veamos que cualquier no isomorfismo $h : Z \rightarrow N$ entre inescindibles se factoriza por g . Basta ver que h no es retracción.

Si h fuera retracción, por 3.1.2, tendríamos un cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & N \\ \cong \downarrow & & \parallel \\ N \oplus Z' & \xrightarrow{(1,0)} & N \end{array}$$

como Z es inescindible, $Z' = 0$ y h es isomorfismo, lo cual es una contradicción.

“ $\Leftarrow$ ” Sea $h : Z \rightarrow N$ un morfismo que no es retracción. Supongamos también que $Z = \bigoplus_{i=1}^n Z_i$ se descompone en sus sumandos inescindibles.

Entonces, si consideramos a $\sigma_i : Z_i \rightarrow Z$ como las inclusiones y a $\pi_i : Z \rightarrow Z_i$ como las proyecciones, tendremos no isomorfismos $h\sigma_i : Z_i \rightarrow N$, por lo cual para cada i existe $g_i : Z_i \rightarrow E$ tal que $gg_i = h\sigma_i$. Definamos $t := (g_1, g_2, \dots, g_n) : Z \rightarrow E$. Se tiene que $gt = h$, como deseábamos. $\square$

Lema 1.7.8. *Si $f : M \rightarrow E$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$ y $M = \bigoplus_i M_i \xrightarrow{\pi_j} M_j$ son las proyecciones canónicas en los sumandos inescindibles de M , entonces f es sección si y sólo si cada π_i se factoriza a través de f .*

Demostración: “ $\Rightarrow$ ” Si f es sección, entonces existe $t : E \rightarrow M$ tal que $tf = 1_M$. Para cada i , consideremos el morfismo $r_i := \pi_i t : E \rightarrow M_i$ que satisface $r_i f = \pi_i$. Concluimos que π_i se factoriza por f como deseábamos.

“ $\Leftarrow$ ” Si cada π_i se factoriza por f , entonces existe $r_i : E \rightarrow M_i$ tal que $r_i f = \pi_i$. Por tanto, $t := \sum_i \sigma_i r_i : E \rightarrow M$ y es tal que $tf = 1_M$. $\square$

Lema 1.7.9. *Supongamos que $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ es una confluación en $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, donde g es minimal casi se divide a derecha, entonces M es inescindible.*

Demostración: Con la notación de 1.7.8, elijamos i tal que π_i no se factoriza a través de f . Tomemos el siguiente diagrama conmutativo de pushout:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow \pi_i & & \downarrow t & & \parallel \\ M_i & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & N \end{array}$$

La confluencia del renglón inferior no se divide, ver 4.3.12. Como $g = g't$ y g es casi se divide a derecha, entonces g' es casi se divide a derecha. Por 1.7.6 tendremos que g' es minimal casi se divide a derecha.

Por tanto, t es un isomorfismo y las confluencias son isomorfas. □

Teorema 1.7.10. *Supongamos que $\xi : M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ es una confluencia en $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *f casi se divide a izquierda y g casi se divide a derecha.*
- (2) *f es minimal casi se divide a izquierda.*
- (3) *g es minimal casi se divide a derecha.*
- (4) *M es inescindible y g casi se divide a derecha.*
- (5) *N es inescindible y f casi se divide a izquierda.*

Demostración: Recordemos que por 1.7.7, sabemos que g casi se divide a derecha si y sólo si ξ no se divide, pero al obtener el pullback, la confluencia ξr se divide para todo inescindible X y para cualquier no isomorfismo $r : X \rightarrow N$.

Dualmente, f casi se divide a izquierda si y sólo si ξ no se divide, pero al obtener el pushout, la confluencia $r\xi$ se divide para todo inescindible X y para cualquier no isomorfismo $r : M \rightarrow X$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que g es minimal casi se divide a derecha. Por 1.7.9, M es inescindible. Sean $X \in \mathcal{C}$ inescindible y $r : M \rightarrow X$ un no isomorfismo. Queremos ver que $r\xi$ se divide. Supongamos que al obtener el pushout la confluencia resultante $r\xi$ no se divide. Entonces, existen t y s tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} r\xi : & X & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & N \\ & \downarrow t & & \downarrow s & & \parallel \\ \xi : & M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\ & \downarrow r & & \downarrow & & \parallel \\ r\xi : & X & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & N \end{array}$$

tal s existe debido a que g' no es retracción y g casi se divide a derecha y t es el morfismo inducido a los núcleos.

Por lo cual, las conflagaciones $(rt)r\xi$ y $r\xi$ son equivalentes y, como r es un no isomorfismo, se tiene que rt es un no isomorfismo. Por lo tanto, rt es nilpotente en el álgebra local $End_{\mathcal{C}}(X)$. Por lo que $r\xi$ se divide, lo cual es una contradicción.

Hemos demostrado que f casi se divide a izquierda. Además, como N es inescindible, por el dual de 1.7.6, f es minimal casi se divide a izquierda. Por lo que hemos demostrado (3) implica (2).

De manera dual se prueba que (2) $\Rightarrow$ (3) .

(3) $\Rightarrow$ (4) Por 1.7.9, tenemos que M es inescindible y, por ser g minimal casi se divide a derecha, g casi se divide a derecha como deseábamos.

(4) $\Rightarrow$ (3) Se sigue de 1.7.6.

De manera dual tendremos que 5 es equivalente a 2.

Por 1.7.2, se tiene (1) $\Rightarrow$ (5). Además, (2) y (3) claramente implican (1). $\square$

Definición 1.7.11. Una conflagación $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ en $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ es una **conflagación que casi se divide** si y sólo si satisface cualquiera de las condiciones de 1.7.10

Proposición 1.7.12. Supongamos que $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ y $M' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} N'$ son conflagaciones que casi se dividen en $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Entonces $M \cong M'$ si y sólo si $N \cong N'$.

Mas aún, la existencia de cualquiera de los isomorfismos es equivalente a la existencia de un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ M' & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

Demostación: Solo vamos a probar que si $M \cong M'$ entonces $N \cong N'$, ya que la prueba de la otra parte es dual. Note que se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & E \\ \phi \downarrow & & \\ M' & \xrightarrow{f'} & E' \end{array}$$

donde ϕ es el isomorfismo que se tiene por hipótesis, note que $f'\phi$ no es sección, porque de ser sección f' lo sería y eso no es posible. Por lo cual, existe un morfismo $h_1 : E \rightarrow E'$ tal que conmuta el cuadro

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & E \\ \phi \downarrow & & \downarrow h_1 \\ M' & \xrightarrow{f'} & E' \end{array}$$

Como ϕ es un isomorfismo, existe su inversa ϕ^{-1} y de manera análoga se tiene que $f\phi^{-1}$ tampoco es sección, por lo cual existe h_2 que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & E \\ \uparrow \phi^{-1} & & \uparrow h_2 \\ M' & \xrightarrow{f'} & E' \end{array}$$

veamos que h_1 y h_2 son isomorfismos. En efecto, tenemos

$$h_2 h_1 f = h_2 f' \phi = f \phi^{-1} \phi = f \text{ y } h_1 h_2 f' = h_1 f \phi^{-1} = f' \phi \phi^{-1} = f',$$

donde f y f' son minimales casi se dividen a izquierda. Así, son isomorfismos $h_2 h_1$ y $h_1 h_2$. Por tanto, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\ \phi \downarrow & & \downarrow h_1 & & \\ M' & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

donde ϕ y h_1 son isomorfismos. Por lo tanto, se induce un isomorfismo de N a N' . $\square$

Teorema 1.7.13. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditalgebra débil entrelazada especial. Entonces, cada objeto inescindible $N \in (\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ admite morfismos minimales casi se dividen a derecha $g : E \rightarrow N$ y morfismos minimales casi se dividen a izquierda $f : N \rightarrow G$. Más aún, para cualquier N inescindible que no sea $\mathcal{E}$ -proyectivo, existe una confluencia que casi se divide*

$$M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} N$$

y, para cada M inescindible que no sea $\mathcal{E}$ -inyectivo, existe una confluencia que casi se divide

$$M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} N.$$

Demostración: Primero probemos que cada objeto inescindible $N \in (\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ admite un morfismo casi se divide a derecha $g : E \rightarrow N$. Por 1.6.14, el funtor $F := \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(A/I, -) : (\mathcal{A}, I)\text{-mod} \rightarrow \Gamma\text{-mod}$ es fiel y pleno y podemos identificar el Γ -módulo $F(M)$ con $\Gamma \otimes_{A/I} M$ para cada $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-mod}$.

Tenemos que Γ es una k -álgebra de dimensión finita y sabemos que, para álgebras de artin, su categoría de módulos tiene sucesiones que casi se dividen.

Por ser N inescindible en $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$. Entonces el anillo $\text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(N) \cong \text{End}_{\Gamma}(F(N))$ es local y por tanto $F(N)$ es un inescindible en $\Gamma\text{-mod}$.

Por tanto el Γ -módulo inescindible $F(N)$ admite un morfismo casi se divide a derecha $d : E \rightarrow F(N)$ en $\Gamma\text{-mod}$.

Recordemos que

$$F : (\mathcal{A}, I)\text{-mod} \rightarrow \mathcal{I}$$

es una equivalencia de categorías. Tenemos que $F(E) = \Gamma \otimes E \xrightarrow{p} E$, donde p es el producto, es decir $p(\gamma \otimes e) = \gamma \cdot e$, es la aproximación derecha de E , en el sentido que para cada $t : \Gamma \otimes_{A/I} M \rightarrow E$ en $\Gamma\text{-mod}$, existe un morfismo $s : \Gamma \otimes_{A/I} M \rightarrow \Gamma \otimes_{A/I} E$ tal que $ps = t$.

Conseguimos así el morfismo $dp : F(E) \rightarrow F(N)$. Por ser F pleno, tendremos que existe $g : E \rightarrow N$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ tal que $F(g) = dp$.

Afirmación: g es un morfismo casi se divide a derecha.

Primero note que g no es retracción, pues en caso contrario tendríamos que $F(g) = dp$ sería retracción, lo cual implica que d es retracción y eso es imposible.

Ahora tomemos $h : Z \rightarrow N$ un morfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ no retracción, entonces $F(h) : F(Z) \rightarrow F(N)$ no es retracción. Por ser d morfismo casi se divide a derecha, tenemos que existe $\bar{t} : F(Z) \rightarrow E$ tal que $d\bar{t} = F(h)$ y, por ser p una aproximación derecha de E , tendremos que existe $t' : F(Z) \rightarrow F(E)$ tal que $pt' = \bar{t}$. Finalmente, por ser F una fiel y pleno, se tiene que existe $t : Z \rightarrow E$ tal que $F(t) = t'$ y además $gt = h$.

Por 1.7.5, existe $g' : E' \rightarrow N$ morfismo minimal casi se divide a derecha.

Si N no es $\mathcal{E}$ -proyectivo, entonces existe una deflación $d' : L \rightarrow N$ no trivial con L $\mathcal{E}$ -proyectivo en $(\mathcal{A}, I)\text{-mod}$, entonces tendremos que d' se factoriza por g' y por tanto g' es una deflación.

Por tanto existe una confluencia $M \xrightarrow{f'} E \xrightarrow{g'} N$ en $\mathcal{E}$ y, por 1.7.10, la sucesión es casi se divide.

La segunda parte se hace de manera análoga usando la dualidad descrita en 1.1.14. □

Proposición 1.7.14. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditalgebra débil entrelazada especial. Supongamos que $N \in (\mathcal{A}, I)\text{-mod}$ es inescindible no $\mathcal{E}$ -proyectivo y sea $S(N, M)$ el conjunto de las clases de equivalencia de las confluencias que casi se dividen y la confluencia trivial en $\text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(N, M)$. Entonces, $S(N, M)$ es el soclo de $\text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(N, M)$ como $\text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(N)$ -módulo derecho y también de $\text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(N, M)$ como $\text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)$ -módulo izquierdo.*

Los dos soclos son simples y generados por cualquier confluencia que casi se divide fija $M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} N$.

Demostración: Vamos a tomar $\xi : M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} N$ una confluencia que casi se divide fija. Ahora si tomamos $\xi' : M \xrightarrow{s'} E' \xrightarrow{d'} N$ una confluencia que no se divide, entonces tendremos que d' no es retracción y por tanto existe $l : E' \rightarrow E$ tal que $dl = d'$ y por tanto tenemos que se induce $t : M \rightarrow M$ tal que conmuta

$$\begin{array}{ccccc} \xi' : & M & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & N \\ & \downarrow t & & \downarrow l & & \parallel \\ \xi : & M & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & N \end{array}$$

de donde obtenemos que $[\xi] = t[\xi']$.

Con esta observación en general, si $\xi' \in \text{soc}(\text{Ext}(N, M))$ y t no invertible, es decir $t \in \text{rad}(\text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M))$, entonces $t[\xi'] = 0$. Y, por tanto, $[\xi] = 0$, lo cual es imposible. Por tanto, t es invertible y tendremos que $[\xi'] = t^{-1}[\xi]$, es decir

$$\text{soc}(\text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(N, M)) \subseteq \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)[\xi].$$

Por 1.7.7(dual), si $t' \in \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)$ no es invertible, obtenemos $t'[\xi] = 0$. Entonces, $[\xi] \in \text{soc}(\text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(N, M))$. Por lo tanto,

$$\text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)[\xi] \subseteq \text{soc}(\text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(N, M)).$$

Como antes, tendremos que

$$S(N, M) \subseteq \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)[\xi].$$

Finalmente, dado $f \in \text{End}_{(\mathcal{A}, I)}(M)$, si f no es isomorfismo, $f[\xi]$ se divide porque ξ es casi se divide y, si f es isomorfismo, entonces $f\xi$ es casi se divide. En cualquier caso $f[\xi] \in S(N, M)$. $\square$

Capítulo 2

Funtores de reducción

2.1 Reducciones básicas y marcos

En esta sección presentamos la adaptación de las reducciones estándar para ditálgebras (ver [2, §8]), para el caso de ditálgebras débiles entrelazadas. También veremos que si $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter, también lo es la ditálgebra débil reducida $(\mathcal{A}^z, I^z)$.

Nos interesan los funtores de reducción porque en la prueba del teorema manso-salvaje de Drozd [9] aparecen de forma natural, y el hecho de tener funtores fieles y plenos nos ayudan a rescatar mucha de la información de los inescindibles de la categoría.

Lema 2.1.1. *Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra débil con estratificación (R, W) , supongamos también que tenemos morfismos suprayectivos de k -álgebras $\phi_b : R \rightarrow R'$, que tenemos R' - R' -bimódulos W'_0 y W'_1 ; y morfismos suprayectivos de R - R -bimódulos $\phi_0 : W_0 \rightarrow W'_0$ y $\phi_1 : W_1 \rightarrow W'_1$. Consideremos la t -álgebra estratificada $T' := T_{R'}(W'_0 \oplus W'_1)$. Considere también el morfismo de k -álgebras graduadas $\phi : T \rightarrow T'$ determinado por ϕ_b, ϕ_0 y ϕ_1 . Entonces, el álgebra $A' = T_{R'}(W'_0)$ puede ser identificada con $[T']_0$ y $V' = A' \otimes_{R'} W'_1 \otimes_{R'} A'$ puede ser identificado con $[T']_1$. Entonces, si $K = \ker(\phi)$, $K_0 = \ker(\phi_A)$ y $K_1 = \ker(\phi_V)$, tenemos:*

$$(a) \ K_0 = A\ker(\phi_b)A + A\ker(\phi_0)A$$

$$(b) \ K = T\ker(\phi_b)T + T\ker(\phi_0)T + T\ker(\phi_1)T \text{ y el ideal } K \text{ de } T \text{ está generado por } K_0 \text{ y } K_1.$$

Demostración: Tenemos que $\ker(\phi_b)$ es un ideal de R y $\ker(\phi_0)$ es un R - R -subbimódulo de W_0 tal que $\ker(\phi_b)\ker(\phi_0) + \ker(\phi_0)\ker(\phi_b) \subseteq \ker(\phi_0)$. Entonces por [2, 8.3],

$$N_0 := A\ker(\phi_b)A + A\ker(\phi_0)A$$

es un ideal de $A = T_R(W_0)$, que es (R, W_0) -compatible. Así, se tiene $N_0 \cap R = \ker(\phi_b)$ y $N_0 \cap W_0 = \ker(\phi_0)$. Entonces, por [2, 8.4], tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\nu_A} & & & A/N_0 \\ \downarrow \phi_A & & & & \downarrow \bar{\phi} \\ A' & \xrightarrow{\cong} & T_{R'}(W'_0) & \xrightarrow{\cong} & T_{R/\ker(\phi_b)}(W'_0/\ker(\phi_0)), \end{array}$$

donde ν_A es la proyección canónica, ϕ_A es la restricción de ϕ y $\overline{\phi_A}$ es el isomorfismo inducido por ϕ_A . Entonces $N_0 = K_0$ y hemos probado (a).
 Similarmente, dado que $\ker(\phi_b)W + W\ker(\phi_b) \subseteq \ker(\phi_0) + \ker(\phi_1)$, tenemos que

$$N := T\ker(\phi_b)T + T\ker(\phi_0 \oplus \phi_1)T$$

es un ideal de $T = T_R(W)$ que es (R, W) -compatible. Entonces, nuevamente por [2, 8.4], tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} T & & \xrightarrow{\nu_T} & & T/N \\ \downarrow \phi & & & & \downarrow \overline{\phi} \\ T' & \xrightarrow{\cong} & T_{R'}(W') & \xrightarrow{\cong} & T_{R/\ker(\phi_b)}((W_0 \oplus W_1)/\ker(\phi_0 \oplus \phi_1)), \end{array}$$

donde $\overline{\phi}$ es el isomorfismo inducido por ϕ . Entonces $N = K$. Por (a) y (b), K está generado por K_0 y K_1 . □

Lema 2.1.2. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil triangular, con estratificación (R, W) , donde $\mathcal{A} = (T, \delta)$. Supongamos también que tenemos morfismos suprayectivos de k -álgebras $\phi_b : R \rightarrow R'$, que tenemos R' - R' -bimódulos W'_0 y W'_1 ; y morfismos suprayectivos de R - R -bimódulos $\phi_0 : W_0 \rightarrow W'_0$ y $\phi_1 : W_1 \rightarrow W'_1$. Consideremos la t -álgebra estratificada $T' := T_{R'}(W'_0 \oplus W'_1)$. Considere también el morfismo de k -álgebras graduadas $\phi : T \rightarrow T'$ determinado por ϕ_b, ϕ_0 y ϕ_1 . Finalmente, asumamos que tenemos diagramas conmutativos*

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \xrightarrow{\delta} & V \\ \phi_0 \downarrow & & \downarrow \phi_V \\ W'_0 & \xrightarrow{\delta'_0} & V' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\delta} & [T]_2 \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_{[T]_2} \\ W'_1 & \xrightarrow{\delta'_1} & [T']_2 \end{array}$$

donde δ'_0 y δ'_1 son morfismos de R' - R' -bimódulos. Entonces,

- (1) Existe una derivación $\delta' : T' \rightarrow T'$ que extiende a δ'_0 y δ'_1 , con $\delta'\phi = \phi\delta$.
- (2) $\mathcal{A}' = (T', \delta')$ es una ditálgebra débil entrelazada con el ideal $I' = \phi(I)$ de $\mathcal{A}'$.
- (3) $(\mathcal{A}', I')$ es una ditálgebra débil triangular entrelazada con estratificación $(R', W'_0 \oplus W'_1)$.
- (4) $\phi : (\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}', I')$ es un morfismo de ditálgebras débiles entrelazadas y el funtor inducido $F_\phi : (\mathcal{A}', I')\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es fiel.
- (5) La imagen de F_ϕ consiste de los módulos en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ anulados por el ideal $K_0 := \ker(\phi_A)$ de $\mathcal{A}$, donde $\phi_A : A \rightarrow A'$ es la restricción de ϕ .
- (6) Sea $K_1 := \ker(\phi_V)$, donde $\phi_V : V \rightarrow V'$ es restricción de ϕ , y supongamos que $K_1 = K_0V + VK_0 + \delta(K_0)$, entonces el funtor F_ϕ es pleno.

Demostración: La existencia del morfismo ϕ se debe a la propiedad universal del álgebra tensorial T .

- (1) La existencia de la derivación δ' se sigue de 1.3.2.
- (2) Como $(\mathcal{A}, I)$ es triangular, I es un ideal de A que es $\mathcal{A}$ -triangular. Por lo tanto I es $\mathcal{A}$ -balanceado, es decir $\delta(I) \subseteq IV + VI$. Como ϕ es sobreyectiva y $\delta'\phi = \phi\delta$, obtenemos $\delta'(\phi(I)) \subseteq \phi(I)V' + V'\phi(I)$. Luego, el ideal $\phi(I)$ de A' es $\mathcal{A}'$ -balanceado. Podemos entonces aplicar 1.2.10 a $\mathcal{A}$ y a I y también a $\mathcal{A}'$ y a I' .
Observemos que I genera a un ideal J de $\mathcal{A}$, es decir $J = TIT + T(IV + VI)T$. Como ϕ es sobre, $\phi(I)$ genera al ideal $\phi(J)$ de $\mathcal{A}'$. Por tanto $(\delta')^2(T') = \phi\delta^2(T) \subseteq \phi(J)$ y entonces $\mathcal{A}'$ es entrelazada con I' .

- (3) Solo mostraremos que se tiene una filtración para W'_0 y W'_1 , pues la filtración de I' se construye de manera similar.

Sea $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \dots \subseteq W_0^r = W_0$ la filtración de W_0 tal que $\delta(W_0^{i+1}) \subseteq A_i W_1 A_i$ para cada i , donde A_i denota la subálgebra de A generada por R y W_0^i .

Entonces tenemos la siguiente filtración $0 = \phi(W_0^0) \subseteq \phi(W_0^1) \subseteq \dots \subseteq \phi(W_0^r) = W'_0$, donde denotaremos por $\overline{W}_0^i$ a $\phi(W_0^i)$. Finalmente,

$$\delta'(\overline{W}_0^{i+1}) = \delta'(\phi(W_0^{i+1})) = \phi(\delta(W_0^{i+1})) \subseteq \phi(A_i W_1 A_i) \subseteq A'_i W'_1 A'_i,$$

donde $A'_i = \phi(A_i)$ es la subálgebra de A' generada por R' y W'_0 .

Sea $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq \dots \subseteq W_1^s = W_1$ la filtración de W_1 tal que $\delta(W_1^{i+1}) \subseteq AW_1^i AW_1^i A + IV^2 + V^2 I + VIV$ para cada i .

Entonces tenemos la siguiente filtración $0 = \phi(W_1^0) \subseteq \phi(W_1^1) \subseteq \dots \subseteq \phi(W_1^s) = W'_1$, donde denotaremos por $\overline{W}_1^i$ a $\phi(W_1^i)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \delta'(\overline{W}_1^{i+1}) &= \delta'(\phi(W_1^{i+1})) = \phi(\delta(W_1^{i+1})) \subseteq \phi(AW_1^i AW_1^i A + IV^2 + V^2 I + VIV) \\ &\subseteq A' \overline{W}_1^i A' \overline{W}_1^i A' + I'(V')^2 + (V')^2 I' + V' I' V'. \end{aligned}$$

La imagen bajo ϕ de la filtración de I en la definición de triangularidad para $(\mathcal{A}, I)$, nos da una filtración del ideal I' que lo hace $\mathcal{A}'$ -triangular.

- (4) Es claro que F_ϕ es fiel, puesto que ϕ_V es suprayectivo.
- (5) Si $N \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es tal que $K_0 N = 0$, entonces N tiene una estructura de A' -módulo, denotamos por N' a tal A' -módulo. Por tanto, N es obtenido a partir de N' por restricción de escalares mediante ϕ_A .
Mas aún $I'N' = 0$, debido a que $IN = 0$ y $I' = \phi(I)$. Por tanto $F_\phi(N') = N$.

- (6) Asumamos que $(f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(F_\phi(M), F_\phi(N))$. Tomemos $a \in K_0$, entonces de la identidad $a f^0(m) = f^0(am) + f^1(\delta(a))[m]$ para cada $m \in M$, conseguimos que $f^1(\delta(a)) = 0$. Por tanto $f^1(K_0 V + V K_0 + \delta(K_0)) = 0$. Entonces el morfismo de A - A -bimódulos $f^1 : V \rightarrow \text{Hom}_k(F_\phi(M), F_\phi(N))$, induce un morfismo de A - A -bimódulos $\overline{f^1} : V/(K_0 V + V K_0 + \delta(K_0)) \rightarrow \text{Hom}_k(F_\phi(M), F_\phi(N))$.

Ahora denotemos por $\widehat{\phi} : V/(K_0V + VK_0 + \delta(K_0)) \rightarrow V'$ el isomorfismo determinado por nuestra hipótesis sobre K_1 . Por tanto $g^1 = \widehat{f^1\phi}^{-1} : V' \rightarrow \text{Hom}_k(F_\phi(M), F_\phi(N))$ es un morfismo de A - A -bimódulos, el cual es también un morfismo de A' - A' -bimódulos $g^1 : V' \rightarrow \text{Hom}_k(M, N)$, con $g^1\phi_V = f^1$. Ahora, si $a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}\phi(a)f^0(m) &= f^0(\phi(a)m) + f^1(\delta(a))[m] \\ &= f^0(\phi(a)m) + g^1(\phi(\delta(a)))[m] \\ &= f^0(\phi(a)m) + g^1(\delta'(\phi(a)))[m].\end{aligned}$$

Por tanto, $(f^0, g^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}', I')}(M, N)$ y $F_\phi(f^0, g^1) = (f^0, f^1)$.

□

De aquí en adelante profundizaremos el estudio de los funtores de reducción construyendo nuestra primera reducción básica. En todo el texto ocuparemos superíndices en nuestras ditálgebras refiriéndonos a ellos con las siguientes letras

- d “eliminación de idempotentes”.
- s “eliminación de un ideal de R ”.
- r “regularización”.
- q “eliminación de un sumando directo de W_0 ”.
- a “absorción”.

Proposición 2.1.3. *Eliminación de idempotentes.*

Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil triangular entrelazada con estratificación (R, W) . Supongamos también que $e \in R$ es un idempotente central no trivial. Considere las proyecciones canónicas

$$\phi_r : R \rightarrow eRe \text{ y } \phi_r : W_r \rightarrow eW_re, \text{ para } r \in \{0, 1\}.$$

Tomemos $T^d = T_{eRe}(eWe)$. Tenemos un morfismo de k -álgebras graduadas $\phi : T \rightarrow T^d$ y el ideal $I^d = \phi(I)$ de A^d . Entonces, existe una ditálgebra débil triangular entrelazada $(\mathcal{A}^d, I^d)$ con estratificación (R^d, W^d) donde

$$R^d = eRe, W_0^d = eW_0e \text{ y } W_1^d = eW_1e.$$

El morfismo $\phi : (\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}^d, I^d)$ de ditálgebras débiles entrelazadas induce un funtor fiel y pleno

$$F^d = F_\phi : (\mathcal{A}^d, I^d)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod},$$

cuya imagen consiste de los objetos de $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ anulados por $1-e$.

Demostración: Primero vamos a mostrar que la función $\phi_b : R \rightarrow eRe$ dada por la receta $\phi_b(r) = ere$ es un morfismo de anillos. Claramente el morfismo es de grupos y $\phi_b(1) = e$, resta mostrar que $\phi_b(rs) = \phi_b(r)\phi_b(s)$. En efecto

$$\phi_b(rs) = erse = erse^2 = erese = (ere)(ese) = \phi_b(r)\phi_b(s).$$

De manera similar, tenemos que $\phi_r : W_r \rightarrow eW_re$, dado por la receta $\phi_r(w) = ewe$, es un morfismo de R - R -bimódulos. En efecto, $\phi_r(sw) = eswe = sewe = s\phi_r(w)$.

Veamos que W_r^d puede ser identificado con $W_r/((1-e)W_r + W_r(1-e))$ para $r \in \{0, 1\}$. Para esto mostraremos que $\ker(\phi_r) = (1-e)W_r + W_r(1-e)$.

La inclusión " $\supseteq$ " es evidente. Mostraremos la inclusión " $\subseteq$ " :

Si $w \in \ker(\phi_r)$, entonces

$$w = 1w1 = (1-e+e)w(1-e+e) = (1-e)we + (1-e)w(1-e) + ewe + ew(1-e).$$

Como $0 = \phi_r(w) = ewe$, entonces

$$w = (1-e)we + (1-e)w(1-e) + ew(1-e) \in (1-e)W_r + W_r(1-e).$$

Con esta realización veamos que se induce un morfismo $\delta_r^d : W_r^d \rightarrow [T^d]_{r+1}$. Para esto es suficiente mostrar que $\phi\delta((1-e)W_r + W_r(1-e)) = 0$ y esto es claro debido a que

$$\phi\delta((1-e)W_r + W_r(1-e)) = \phi[(1-e)\delta(W_r)] + \phi[\delta(W_r)(1-e)] = 0.$$

Claramente δ_0^d y δ_1^d son morfismos de R^d - R^d -bimódulos. Por lo cual inducen una derivación δ^d sobre T^d tal que $\delta^d(R^d) = 0$. Por el lema anterior, tenemos que $\mathcal{A}^d = (T^d, \delta^d)$ es una ditálgebra débil triangular con estratificación (R^d, W^d) y $\phi : (\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}^d, I^d)$ es un morfismo de ditálgebras débiles entrelazadas.

Si $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, M es anulado por $A(1-e)A$ syss $(1-e)M = 0$. La afirmación sobre la imagen de F^d se sigue de 2.1.2 (5) y de que $K_0 = A(1-e)A$. Para esto último notemos que, por 2.1.1 (a),

$$\ker(\phi_A) = A\ker(\phi_b)A + A\ker(\phi_0)A = A(1-e)RA + A[(1-e)W_0 + W_0(1-e)]A = A(1-e)A.$$

Por lo anterior, se tiene $\delta(K_0) \subseteq K_0V + VK_0$. Por 1.2.5, el ideal J de T generado por K_0 y $K_0V + VK_0$ satisface $J \cap V = K_0V + VK_0$. Además, $J = TK_0T + TVK_0T + TK_0VT = TK_0T$.

Por 2.1.1, $K = T\ker(\phi_b)T + T\ker(\phi_0)T + T\ker(\phi_1)T$. Como $\ker(\phi_1) = (1-e)W_1 + W_1(1-e) \subseteq K_0V + VK_0 \subseteq J$, tenemos $J = K$. Por lo que $K_1 = K \cap V = J \cap V = K_0V + VK_0$ y concluimos entonces que F_ϕ es fiel y pleno, por 2.1.2 (4) y (6). $\square$

Proposición 2.1.4. *Eliminación de un ideal de R .*

Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil triangular entrelazada con estratificación (R, W) . Consideremos un ideal propio I_R de R y las proyecciones canónicas

$$\phi_b : R \rightarrow R/I_R \text{ y } \phi_r : W_r \rightarrow W_r/(I_R W_r + W_r I_R), \text{ para } r \in \{0, 1\}.$$

Denotaremos por $W_r^s := W_r/(I_R W_r + W_r I_R)$ y tomemos $T^s = T_{R/I_R}(W^s)$. Tenemos un morfismo de k -álgebras graduadas $\phi : T \rightarrow T^s$ y tenemos el ideal $I^s = \phi(I)$ de A^s . Entonces, existe una ditálgebra débil triangular entrelazada $(\mathcal{A}^s, I^s)$ con estratificación (R^s, W^s) donde

$$R^s = R/I_R, W_0^s = W_0/(I_R W_0 + W_0 I_R) \text{ y } W_1^s = W_1/(I_R W_1 + W_1 I_R).$$

El morfismo $\phi : (\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}^s, I^s)$ de ditálgebras débiles entrelazadas induce un funtor fiel y pleno

$$F^s = F_\phi : (\mathcal{A}^s, I^s)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod},$$

cuya imagen consiste de los objetos de $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ anulados por I_R .

Demostración: Note que la función $\phi_b : R \rightarrow R/I_R$ es un morfismo de anillos, también tenemos que $\phi_r : W_r \rightarrow W_r^s$ es un morfismo de R - R -bimódulos.

Veamos que se induce un morfismo $\delta_r^s : W_r^s \rightarrow [T^s]_{r+1}$. Para esto es suficiente mostrar que $\phi\delta(I_R W_r + W_r I_R) = 0$ y esto es claro debido a que

$$\phi\delta(I_R W_r + W_r I_R) = \phi[I_R \delta(W_r)] + \phi[\delta(W_r) I_R] = 0.$$

Claramente δ_0^s y δ_1^s son morfismos de R^s - R^s -bimódulos. Por lo cual inducen una derivación δ^s sobre T^s tal que $\delta^s(R^s) = 0$. Por 2.1.2, tenemos que $(\mathcal{A}^s, I^s)$, donde $\mathcal{A}^s = (T^s, \delta^s)$, es una ditálgebra débil triangular entrelazada con estratificación (R^s, W^s) , $\phi : (\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}^s, I^s)$ es un morfismo de ditálgebras débiles entrelazadas y F^s es un funtor fiel.

Si $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, M es anulado por $AI_R A$ syss $I_R M = 0$. La afirmación sobre la imagen de F^s se sigue de 2.1.2 (5) y de que $K_0 = AI_R A$. En efecto, por 2.1.1 (a),

$$\ker(\phi_A) = A\ker(\phi_b)A + A\ker(\phi_0)A = AI_R A + A[I_R W_0 + W_0 I_R]A = AI_R A.$$

Por lo anterior, se tiene $\delta(K_0) \subseteq K_0 V + V K_0$. Por 1.2.5, el ideal J de T generado por K_0 y $K_0 V + V K_0$ satisface $J \cap V = K_0 V + V K_0$. Además, $J = T K_0 T + T V K_0 T + T K_0 V T = T K_0 T$.

Por 2.1.1, $K = T\ker(\phi_b)T + T\ker(\phi_0)T + T\ker(\phi_1)T$. Como $\ker(\phi_1) = I_R W_1 + W_1 I_R \subseteq K_0 V + V K_0 \subseteq J$, tenemos $J = K$. Por lo que $K_1 = K \cap V = J \cap V = K_0 V + V K_0$ y concluimos entonces que F_ϕ es fiel y pleno, por 2.1.2 (6) y (4). $\square$

Proposición 2.1.5. *Regularización.*

Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada triangular con estratificación (R, W) . Supongamos que tenemos descomposiciones de R - R -bimódulos $W_0 = W_0' \oplus W_0''$ y $W_1 = \delta(W_0') \oplus W_1''$ y definamos $W'' = W_0'' \oplus W_1''$.

Considere el morfismo identidad $\phi_b : R \rightarrow R$ y las proyecciones $\phi_r : W_r \rightarrow W_r''$, para $r \in \{0, 1\}$. Tomemos $T^r = T_R(W'')$. Tenemos un morfismo de k -álgebras graduadas $\phi : T \rightarrow T^r$ y el ideal $I^r = \phi(I)$ de A^r . Entonces, existe una ditálgebra débil triangular entrelazada $(\mathcal{A}^r, I^r)$ con estratificación (R^r, W^r) , donde $R^r = R$, $W_0^r = W_0''$ y $W_1^r = W_1''$. Además, existe un funtor fiel y pleno

$$F^r : (\mathcal{A}^r, I^r)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod},$$

cuya imagen consiste de los objetos de $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ anulados por W_0' . Mas aún, si $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, entonces $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es isomorfo a un objeto en la imagen de F^r syss $\ker(\delta) \cap W_0'$ anula a M . En particular, si esta intersección es cero, F^r es una equivalencia de categorías.

Demostración: Consideremos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \xrightarrow{\delta} & V \\ \phi_0 \downarrow & & \downarrow \phi_V \\ W_0^r & \xrightarrow{\delta_0^r} & V^r \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\delta} & [T]_2 \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_{[T]_2} \\ W_1^r & \xrightarrow{\delta_1^r} & [T^r]_2 \end{array}$$

donde δ_0^r y δ_1^r son morfismos de R^r - R^r -bimódulos, definidos como:

$$\delta_0^r = \phi_V \delta_{W_0''} \text{ y } \delta_1^r = \phi_{[T]_2} \delta_{W_1''} \text{ y } \delta_{W_0''}, \delta_{W_1''} \text{ denotan las restricciones de } \delta.$$

Consideramos la derivación $\delta^r : T^r \rightarrow T^r$ determinada por δ_0^r y δ_1^r .

Note que el diagrama izquierdo conmuta, para referirnos a esto diremos que “las derivaciones en W_0 conmutan”. Tenemos la siguiente afirmación general.

Afirmación 1: $[\phi_{[T]_2} \delta - \delta_1^r \phi](W_1) \subseteq I^r(V^r)^2 + (V^r)^2 I^r + V^r I^r V^r$.

En efecto, tomemos $w_1 \in W_1$, entonces $w_1 = \delta(w'_0) + w''_1$, por lo que tendremos

$$\begin{aligned} \phi_{[T]_2} \delta(w_1) - \delta_1^r \phi(w_1) &= \phi_{[T]_2} \delta(\delta(w'_0) + w''_1) - \delta_1^r \phi(\delta(w'_0) + w''_1) \\ &= \phi_{[T]_2} \delta(\delta(w'_0)) + \phi_{[T]_2}(\delta(w''_1)) - \delta_1^r \phi(\delta(w'_0)) - \delta_1^r \phi(w''_1) \\ &= \phi_{[T]_2}(\delta^2(w'_0)). \end{aligned}$$

Pero por 1.3.3, tenemos que $\delta^2(W'_0) \subseteq IV^2 + V^2 I + VIV$. Por lo tanto, concluimos que

$$\phi_{[T]_2}(\delta^2(W'_0)) \subseteq I^r(V^r)^2 + (V^r)^2 I^r + V^r I^r V^r.$$

Tenemos así nuestra afirmación 1 demostrada. Nos referiremos a esta afirmación como la **casi conmutatividad de las derivaciones** en W_1 .

En general, usando la regla de Leibniz aplicada a la “derivación” $d := \phi\delta - \delta^r\phi : T \rightarrow T^r$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\phi\delta - \delta^r\phi)(W_1^{\otimes n}) &\subseteq \sum_{j=1}^n \underline{V}^{j-1} (\underline{IV}^2 + \underline{V}^2 \underline{I} + \underline{VIV}) \underline{V}^{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^n \underline{V}^{j-1} \underline{IV}^{n-j+2} + \underline{V}^{j+1} \underline{IV}^{n-j} + \underline{V}^j \underline{IV}^{n-j+1} \\ &\subseteq \sum_{i=0}^{n+1} (V^r)^i I^r (V^r)^{n+1-i} \end{aligned}$$

donde hemos escrito $\underline{I} := I^r$ y $\underline{V} := V^r$ por simplicidad.

Nos referimos a esta propiedad como de **casi conmutatividad de las derivaciones**.

Afirmación 2: $\mathcal{A}^r := (T^r, \delta^r)$ está entrelazada con I^r .

Para ver que $\mathcal{A}^r$ está entrelazada con I^r , vamos a usar 1.3.3.

Note que $(\delta^r)^2(W_0^r) = (\delta^r)^2(\phi(W_0))$, como las derivaciones conmutan en grado 0, entonces $(\delta^r)^2(\phi(W_0)) = \delta^r(\phi_{[T]_2}\delta(W_0))$. Por la casi conmutatividad en grado 1, tendremos

$$\delta^r(\phi_{[T]_2}\delta(W_0)) = \phi(\delta^2(W_0)) + \varepsilon,$$

donde $\varepsilon \in I^r(V^r)^2 + (V^r)^2I^r + V^rI^rV^r$. Como $\delta^2(W_0) \subseteq IV^2 + V^2I + VIV$, se tiene $\phi(\delta^2(W_0)) \subseteq I^r(V^r)^2 + (V^r)^2I^r + V^rI^rV^r$, y obtenemos que

$$(\delta^r)^2(W_0^r) \subseteq I^r(V^r)^2 + (V^r)^2I^r + V^rI^rV^r.$$

Finalmente, $(\delta^r)^2(W_1^r) = (\delta^r)^2(\phi(W_1))$ y, como las derivaciones casi conmutan en grado 1, entonces $(\delta^r)^2(\phi(W_1)) = \delta^r(\phi_{[T]_2}\delta(W_1) + \varepsilon)$ donde $\varepsilon \in I^r(V^r)^2 + (V^r)^2I^r + V^rI^rV^r$.

Usando de nuevo la casi conmutatividad y $\delta(I) \subseteq VI + IV$, $\delta^r(\phi_{[T]_2}\delta(W_1) + \varepsilon) = \phi_{[T]_3}\delta^2(W_1) + \varepsilon'$ donde $\varepsilon' \in I^r(V^r)^3 + (V^r)^3I^r + (V^r)^2I^rV^r + V^rI^r(V^r)^2$. Y como $\phi(\delta^2(W_1)) \subseteq I^r(V^r)^3 + (V^r)^3I^r + (V^r)^2I^rV^r + V^rI^r(V^r)^2$, obtenemos que

$$(\delta^r)^2(W_1^r) \subseteq I^r(V^r)^3 + (V^r)^3I^r + (V^r)^2I^rV^r + V^rI^r(V^r)^2.$$

Por tanto tenemos que $(\mathcal{A}^r, I^r)$ es una ditálgebra débil entrelazada. Tenemos nuestra afirmación 2 demostrada.

Afirmación 3: $(\mathcal{A}^r, I^r)$ admite una estratificación triangular (R^r, W^r) .

Usando la notación de 1.4.1, consideremos las filtraciones triangulares de $(\mathcal{A}, I)$:

$$0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \cdots \subseteq W_0^t = W_0$$

y

$$0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq \cdots \subseteq W_1^s = W_1$$

Las filtraciones

$$0 = \overline{W}_0^0 \subseteq \overline{W}_0^1 \subseteq \cdots \subseteq \overline{W}_0^t = W_0^r$$

y

$$0 = \overline{W}_1^0 \subseteq \overline{W}_1^1 \subseteq \cdots \subseteq \overline{W}_1^s = W_1^r$$

donde $\overline{W}_i^j := \phi(W_i^j)$, con $i = 0, 1$, son triangulares.

En efecto, como las derivaciones conmutan en grado cero, tendremos que la filtración

$$0 = \overline{W}_0^0 \subseteq \overline{W}_0^1 \subseteq \cdots \subseteq \overline{W}_0^t = W_0^r$$

es triangular.

Veamos que pasa con la filtración $0 = \overline{W}_1^0 \subseteq \overline{W}_1^1 \subseteq \cdots \subseteq \overline{W}_1^s = W_1^r$. Por la casi conmutatividad en grado 1,

$$\delta^r(\overline{W}_1^i) = \delta^r\phi(W_1^i) = \phi_{[T]_2}\delta(W_1^i) + \varepsilon,$$

donde $\varepsilon \in I^r(V^r)^2 + (V^r)^2I^r + V^rI^rV^r$. Usando la triangularidad de la estratificación de $(\mathcal{A}, I)$, tendremos que

$$\phi_{[T]_2} \delta(W_1^i) \subseteq A^r \overline{W}_1^{i-1} A^r \overline{W}_1^{i-1} A^r + I^r (V^r)^2 + (V^r)^2 I^r + V^r I^r V^r.$$

Por tanto,

$$\delta^r(\overline{W}_1^i) \subseteq A^r \overline{W}_1^{i-1} A^r \overline{W}_1^{i-1} A^r + I^r (V^r)^2 + (V^r)^2 I^r + V^r I^r V^r.$$

Por tanto la estratificación es triangular. Es fácil ver que I^r es $\mathcal{A}^r$ -triangular debido a que I es $\mathcal{A}$ -triangular.

Afirmación 4: Existencia del funtor $F^r : (\mathcal{A}^r, I^r)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Definamos el funtor F^r como sigue:

- Objetos: Cada M es enviado en el mismo R -módulo M , con la acción restringida por ϕ .
- Morfismos: Cada morfismo (f^0, f^1) es enviado a $(f^0, f^1 \phi)$.

Claramente se tiene que F^r está bien definido en objetos. Veamos que F^r está bien definido en morfismos.

Claramente que f^0 es un morfismo de R -módulos y que $f^1 \phi$ es un morfismo de A - A -bimódulos. Ahora, si $a \in A$, entonces, como las derivaciones conmutan en grado 0, tenemos

$$a f^0(m) = \phi(a) f^0(m) = f^0(\phi(a)m) + f^1(\delta^r(\phi(a)))[m] = f^0(am) + (f^1 \phi(\delta(a)))[m].$$

Por tanto, se tiene que F^r está bien definido en morfismos.

Claramente las identidades van en identidades.

Finalmente, tomemos $f = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}^r, I^r)}(M, N)$, y $g = (g^0, g^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}^r, I^r)}(N, L)$, veamos que $F^r((g^0, g^1)(f^0, f^1)) = F^r((g^0, g^1))F^r((f^0, f^1))$.

Veamos que coinciden en la segunda componente. Note que

$$F^r(gf)^1(v) = (gf)^1 \phi(v) = g^0 f^1 \phi(v) + g^1 \phi(v) f^0 + (g^1 \star f^1)(\delta^r \phi(v)).$$

Por otro lado, tendremos

$$(F(g)F(f))^1 \phi(v) = g^0 f^1 \phi(v) + g^1 \phi(v) f^0 + (g^1 \star f^1) \phi(\delta(v)).$$

Por la casi conmutatividad, tendremos $(g^1 \star f^1) \phi(\delta(v)) = (g^1 \star f^1)(\delta^r \phi(v) + \varepsilon)$, donde $\varepsilon \in I^r (V^r)^2 + (V^r)^2 I^r + V^r I^r V^r$.

Concluimos que $F^r((g^0, g^1)(f^0, f^1)) = F^r((g^0, g^1))F^r((f^0, f^1))$. Tenemos nuestra afirmación 4 demostrada.

Afirmación 5: El funtor F^r es pleno.

Por 2.1.1, tenemos que $K_0 = AW'_0 A$ y que $K = TW'_0 T + T\delta(W'_0)T$. Consideremos el ideal J de T generado por K_0 y $K_0 V + \delta(K_0) + V K_0$. Entonces, $J = K$. Por 1.2.5, tenemos

$$K_1 = K \cap V = K_0 V + \delta(K_0) + V K_0.$$

Usando esto, la prueba de esta afirmación es análoga a la de 2.1.2(6).

Afirmación 6: El funtor F^r es fiel.

En efecto, si $0 = F((f^0, f^1)) = (f^0, f^1\phi)$, tendremos $f^0 = 0$ y $f^1 = 0$.

Finalmente, tomemos $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que $(\ker(\delta) \cap W'_0)M = 0$. Consideremos a $\psi \in \text{Hom}_{R-R}(W_0, \text{End}_k(M))$, el morfismo acción de W_0 en M , y denotemos por ψ' su restricción a W'_0 . La condición sobre M nos dice que podemos factorizar ψ' a través de δ gracias al teorema del homomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} W'_0 & \xrightarrow{\psi'} & \text{End}_k(M) \\ \downarrow \delta & \nearrow f'_1 & \\ \delta(W'_0) & & \end{array}$$

Considere ahora el morfismo de R - R -bimódulos $f^1 = (f'_1, 0) : \delta(W'_0) \oplus W''_1 \rightarrow \text{End}_k(M)$. Como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter tenemos un isomorfismo $f := (1_M, f^1) : \widehat{M} \rightarrow M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Afirmación 7: $\widehat{M}$ está en la imagen de F^r .

Basta probar que $K_0\widehat{M} = 0$ o, equivalentemente, que $W'_0\widehat{M} = 0$. Así, tomando $w \in W'_0$ y $m \in \widehat{M}$, obtenemos de la fórmula de morfismo para f que

$$w \cdot m = f^0(w \cdot m) = wm - f^1(\delta(w))[m] = wm - f'_1(\delta(w))[m] = wm - wm = 0,$$

donde $\cdot$ denota la acción de A sobre $\widehat{M}$.

□

Lema 2.1.6. *Eliminación de un sumando directo de W_0*

Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil triangular entrelazada con estratificación (R, W) . Supongamos que tenemos una descomposición de R - R -bimódulos $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$ tal que $W'_0 \subseteq I$ y $\delta(W'_0) \subseteq AW'_0V + VW'_0A$. Tomemos $T^q = T_R(W^q)$, donde

$$W_0^q = W''_0, W_1^q = W_1 \text{ y } W^q = W_0^q \oplus W_1^q.$$

Entonces, existe una derivación δ^q en T^q tal que $\mathcal{A}^q = (T^q, \delta^q)$ es una ditálgebra débil con estratificación (R^q, W^q) . La t -álgebra $A^q = T_R(W''_0)$ puede ser identificada con el álgebra cociente A/I' , donde $I' = AW'_0A$ es el ideal de A generado por W'_0 , entonces podemos considerar a $I^q = I/I'$ como un ideal de A^q . Entonces $(\mathcal{A}^q, I^q)$ es una ditálgebra débil triangular entrelazada con estratificación (R^q, W^q) y hay un morfismo $\phi : (\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}^q, I^q)$ de ditálgebras débiles entrelazadas tal que $\phi(I) = I^q$ e induce una equivalencia de categorías

$$F^q = F_\phi : (\mathcal{A}^q, I^q)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}.$$

Demostración: Consideremos los siguientes morfismos : $\phi_b : R \rightarrow R$ la identidad, $\phi_0 : W_0 \rightarrow W_0^q$ la proyección canónica y $\phi_1 : W_1 \rightarrow W_1^q$ la identidad. Tenemos el morfismo inducido de álgebras graduadas $\phi : T \rightarrow T^q$. Considere las álgebras $A = T_R(W_0)$ y $A^q = T_R(W_0^q)$ y los A - A -bimódulos $V = [T]_1 = AW_1A$ y $V^q = [T^q]_1 = A^qW_1A^q$. Entonces, tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \xrightarrow{\delta} & V \\ \phi_0 \downarrow & & \downarrow \phi_V \\ W_0^q & \xrightarrow{\delta_0^q} & V^q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\delta} & [T]_2 \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_{[T]_2} \\ W_1^q & \xrightarrow{\delta_1^q} & [T^q]_2 \end{array}$$

donde δ_0^q y δ_1^q son morfismos de R - R -bimódulos, definidos como:

$$\delta_0^q = \phi_V \delta_{W_0^q} \text{ y } \delta_1^q = \phi_{[T]_2} \delta_{W_1^q}, \text{ donde } \delta_{W_0^q} \text{ y } \delta_{W_1^q} \text{ denotan restricciones de } \delta.$$

Por construcción y 2.1.2, tenemos que los cuadros anteriores conmutan y obtenemos una derivación δ^q en T^q tal que $\phi : (\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}^q, I^q)$ es un morfismo de ditálgebras débiles entrelazadas y $\mathcal{A}^q$ admite una estratificación triangular (R^r, W^r) . Mas aún, sabemos que el funtor inducido $F_\phi : (\mathcal{A}^r, I^r)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es fiel.

Ahora, usando 2.1.1 (2), tenemos que $K_0 = AW_0'A = I'$. Sea K el núcleo de ϕ , que coincide con el ideal de T generado por W_0' . Del hecho que $\delta(W_0') \subseteq AW_0'V + VW_0'A$, obtenemos que $\delta(I') \subseteq I'V + VI'$. Por tanto, el ideal K coincide con el ideal J' de T generado por I' e $I'V + VI'$. Esto implica, por 1.2.5, que

$$K_0 = K \cap A = I' \text{ y } K_1 = K \cap V = I'V + VI',$$

donde K_1 es el núcleo de ϕ_V . Por tanto, por 2.1.2, concluimos que F_ϕ es pleno. F_ϕ es denso porque $W_0' \subseteq I$ y, así, $W_0'M = 0$. Luego, $K_0M = 0$ y M está en la imagen de F_ϕ . $\square$

Lema 2.1.7. Absorción

Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil triangular entrelazada con estratificación (R, W) . Supongamos que tenemos una descomposición de R - R -bimódulos $W_0 = W_0' \oplus W_0''$ tal que $\delta(W_0') = 0$. Entonces podemos considerar otra estratificación (R^a, W^a) para la ditálgebra débil $\mathcal{A}$, donde R^a es la subálgebra de T generada por R y W_0' , por tanto podemos identificar esta subálgebra con $T_R(W_0')$, $W_0^a = R^aW_0''R^a$, y $W_1^a = R^aW_1R^a$.

*Denotaremos por $\mathcal{A}^a$ a la misma ditálgebra débil $\mathcal{A}$ equipada con la nueva estratificación (R^a, W^a) ; en particular tendremos que $\delta^a = \delta$. Diremos que $\mathcal{A}^a$ se obtiene de $\mathcal{A}$ **por absorción del bimódulo** W_0' . Obtenemos una ditálgebra débil triangular entrelazada $(\mathcal{A}^a, I^a)$, con $I^a = I$ y estratificación (R^a, W^a) . La identidad es un morfismo de ditálgebras débiles entrelazadas $\phi : (\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}^a, I^a)$ que induce un isomorfismo de categorías*

$$F^a = F_\phi : (\mathcal{A}^a, I^a)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}.$$

Demostración: Consideramos la proyección $\pi : W_0 \rightarrow W_0''$. Con la notación de 1.4.1, tenemos las filtraciones de R^a - R^a -bimódulos

$$0 = R^a\pi(W_0^0)R^a \subseteq R^a\pi(W_0^1)R^a \subseteq \cdots \subseteq R^a\pi(W_0^r)R^a = R^aW_0''R^a = W_0^a$$

y

$$0 = R^a W_1^0 R^a \subseteq R^a W_1^1 R^a \subseteq \cdots \subseteq R^a W_1^s R^a = W_1^a.$$

Por definición, A_i denota la R -subálgebra de A generada por W_0^i y A_i^a denota la R^a -subálgebra de $A^a = A$ generada por $R^a \pi(W_0^i) R^a$. Dado que $R \subseteq R^a$ y $W_0^i \subseteq R^a + \pi(W_0^i)$, sabemos que $A_i \subseteq A_i^a$. Notemos que si $w \in W_0 = W_0' \oplus W_0''$, $w = w_0' + \pi(w)$. Luego, $\delta(w) = \delta(\pi(w))$ y $\delta(\pi(W_0^i)) = \delta(W_0^i)$, para toda i .

Por tanto, para toda $i \in [0, r-1]$, se tiene

$$\begin{aligned} \delta(R^a \pi(W_0^{i+1}) R^a) &= R^a \delta(\pi(W_0^{i+1})) R^a \\ &= R^a \delta(W_0^{i+1}) R^a \\ &\subseteq R^a A_i W_1 A_i R^a \\ &\subseteq A_i^a R^a W_1 R^a A_i^a = A_i^a W_1^a A_i^a. \end{aligned}$$

Finalmente, para $i \in [0, s-1]$,

$$\begin{aligned} \delta(R^a W_1^{i+1} R^a) &= R^a \delta(W_1^{i+1}) R^a \\ &\subseteq R^a A W_1^i A W_1^i A R^a + R^a (IV^2 + V^2 I + V I V) R^a \\ &\subseteq A^a R^a W_1^i R^a A^a R^a W_1^i R^a A^a + I^a (V^a)^2 + (V^a)^2 I^a + V^a I^a V^a. \end{aligned}$$

El ideal I^a es $\mathcal{A}^a$ -triangular, pues I es $\mathcal{A}$ -triangular.

□

Dedicamos el resto de esta sección a verificar que los procesos de reducción $(\mathcal{A}, I) \rightarrow (\mathcal{A}^z, I^z)$ examinados conservan la propiedad de ser de Roiter. Para esto, conviene trabajar con la siguiente herramienta.

Definición 2.1.8. Sean $(\mathcal{A}, I)$ y $(\mathcal{A}', I')$ ditálgebras débiles entrelazadas estratificadas por (R, W) y (R', W') respectivamente. Entonces un funtor $F : (\mathcal{A}', I')\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ **está enmarcado por el par** (F_0, ξ_F) si y sólo si:

- (1) $F_0 : R'\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ es funtor.
- (2) $\xi_F : \text{Phom}_{R'-W'}(M', N') \rightarrow \text{Phom}_{R-W}(F_0(M'), F_0(N'))$ es una transformación natural en M' y N' en $R'\text{-Mod}$.
- (3) $\mathcal{U}(F(M')) = F_0(\mathcal{U}'(M'))$, para cada $M' \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$.
- (4) Para cualquier $M', N' \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$ el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Phom}_{R'-W'}(M', N') & \xrightarrow{\xi_F} & \text{Phom}_{R-W}(F_0(M'), F_0(N')) \\ \sigma' \uparrow & & \uparrow \sigma \\ \text{Hom}_{(\mathcal{A}', I')}(M', N') & \xrightarrow{F} & \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(F(M'), F(N')) \end{array}$$

donde $\mathcal{U} : (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ denota al funtor que envía a cada objeto M sobre su R -módulo subyacente y cada morfismo (f^0, f^1) sobre f^0 y $\mathcal{U}' : (\mathcal{A}', I')\text{-Mod} \rightarrow R'\text{-Mod}$ es el correspondiente funtor para $(\mathcal{A}', I')$. Aquí σ, σ' son inclusiones.

Lema 2.1.9. *Supongamos que las ditálgebras débiles entrelazadas $(\mathcal{A}, I)$ y $(\mathcal{A}', I')$ admiten una estratificación triangular (R, W) y (R', W') respectivamente y que un funtor $F : (\mathcal{A}', I')\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ está enmarcado por el par (F_0, ξ_F) . Entonces, las condiciones siguientes implican que $(\mathcal{A}', I')$ es de Roiter cuando $(\mathcal{A}, I)$ lo es:*

- (1) F es pleno.
- (2) ξ_F es inyectiva.
- (3) Si $\xi_F(f^0, f^1) = (g^0, g^1)$ y f^0 es biyectiva, entonces g^0 es biyectiva.
- (4) Sean $M' \in R'\text{-Mod}$ y $\widehat{M} \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tales que $\mathcal{U}(\widehat{M}) = F_0(M')$. Supongamos que $N' \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$ y que el par $\xi_F((f^0, f^1)) \in \text{Phom}_{R-W}(F_0(M'), F_0(N'))$ es un isomorfismo $\widehat{M} \rightarrow F(N')$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Entonces, existe un objeto $\widehat{M}' \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$, con $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$ y $\mathcal{U}'(\widehat{M}') = M'$.
- (4^{op}) Sean $M' \in R'\text{-Mod}$ y $\widehat{M} \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tales que $\mathcal{U}(\widehat{M}) = F_0(M')$. Supongamos que $N' \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$ y que el par $\xi_F((f^0, f^1)) \in \text{Phom}_{R-W}(F_0(N'), F_0(M'))$ es un isomorfismo $F(N') \rightarrow \widehat{M}$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Entonces, existe un objeto $\widehat{M}' \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$, con $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$ y $\mathcal{U}'(\widehat{M}') = M'$.

Demostración: Sean $M' \in R'\text{-Mod}$ y $N' \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$. Sea $N := F(N') \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Consideremos un isomorfismo $f^0 : M' \rightarrow N'$ de $R'\text{-Mod}$ y un morfismo de bimódulos $f^1 : \text{Hom}_{R'-R'}(W'_1, \text{Hom}_k(M', N'))$. Hay que demostrar que M' admite una estructura de A'/I' -módulo $\widehat{M}'$ tal que $f : \widehat{M}' \rightarrow N'$ es un morfismo en $(\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$. De nuestra condición (3), si tomamos $(g^0, g^1) := \xi_F((f^0, f^1))$, entonces g^0 es un isomorfismo de R -módulos y, como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, existe un A/I -módulo $\widehat{M}$ con R -módulo subyacente $M := F_0(M')$ tal que $g = (g^0, g^1) : \widehat{M} \rightarrow N$ es un isomorfismo de $(\mathcal{A}, I)$ -módulos.

La condición (4) nos indica que $\widehat{M} = F(\widehat{M}')$ y $\mathcal{U}'(\widehat{M}') = M'$, para algún $\widehat{M}' \in (\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$. Del hecho que el funtor F es pleno existe $h = (h^0, h^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}', I')}(\widehat{M}', N')$, con $F(h) = g$. Dado que F está enmarcado por (F_0, ξ_F) , tendremos que $\xi((h^0, h^1)) = F(h) = g = \xi((f^0, f^1))$ y, de la inyectividad de ξ_F , tendremos que $h = f$ es un morfismo en $(\mathcal{A}', I')\text{-Mod}$. Para la otra condición en 1.4.5, se puede proceder similarmente, usando la condición (4^{op}). $\square$

Proposición 2.1.10. *Supongamos que tenemos una ditálgebra débil entrelazada triangular $(\mathcal{A}^z, I^z)$, obtenida de la ditálgebra débil entrelazada triangular $(\mathcal{A}, I)$ por alguna operación básica, a saber:*

- Eliminación de un idempotente.
- Regularización.
- Eliminación de un sumando directo.
- Absorción.
- Eliminación de un ideal de R .

En estas condiciones, si la ditálgebra débil entrelazada original $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, entonces también lo es $(\mathcal{A}^z, I^z)$.

Demostración: Vamos a definir un marco para F^z en general y, en cada caso $z \in \{d, r, q, a, s\}$, veremos que se tienen las condiciones del lema anterior para poder aplicarlo.

En cada caso, tenemos un morfismo de álgebras graduadas $\phi : T \rightarrow T^z$, que induce un funtor $F^z : (\mathcal{A}^z, I^z)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ fiel y pleno. En lo que sigue (R, W) y (R^z, W^z) denotarán las estratificaciones de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^z$ respectivamente.

Tomemos $F_0 := F_{\phi_b} : R^z\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$, donde $\phi_b : R \rightarrow R^z$ es el morfismo definido entre los anillos R y R^z de los lemas previos.

Ahora, para cada par de objetos $M', N' \in R^z\text{-Mod}$, definimos ξ_F como sigue $\xi_F((f^0, f^1)) = (F_{\phi_b}(f^0), g^1)$, donde $g^1(w) := f^1\phi(w)$, para cada $w \in W_1$. Esto tiene sentido porque $\phi(W_1) \subseteq W_1^z$, donde f^1 toma valores.

Veamos que (F_{ϕ_b}, ξ_F) es un marco para F^z .

En efecto:

- (1) Claramente F_{ϕ_b} es un funtor.
- (2) ξ_F resulta ser una transformación natural, pues dados $M', M'' \in R^z\text{-Mod}$ y $h : M' \rightarrow M''$ un morfismo de R^z -módulos, tenemos el siguiente cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Phom}_{R^z-W^z}(M', N') & \xrightarrow{\xi_{F_{M'}}} & \text{Phom}_{R-W}(F_{\phi_b}(M'), F_{\phi_b}(N')) \\ \uparrow h^* & & \uparrow F_{\phi_b}(h)^* \\ \text{Phom}_{R^z-W^z}(M'', N') & \xrightarrow{\xi_{F_{M''}}} & \text{Phom}_{R-W}(F_{\phi_b}(M''), F_{\phi_b}(N'')) \end{array}$$

Donde $h^*((f^0, f^1)) := (f^0h, f^1h)$ y $(f^1h)(w) = f^1(w)h$. Análogamente definimos $F_{\phi_b}(h)^*$. Por tanto $F_{\phi_b}(h)^*\xi_{F_{M''}}((f^0, f^1)) = F_{\phi_b}(h)^*((F_{\phi_b}(f^0), g^1)) = (F_{\phi_b}(f^0)F_{\phi_b}(h), g^1F_{\phi_b}(h))$. Por otro lado, $\xi_{F_{M'}}h^*((f^0, f^1)) = \xi_{F_{M'}}(f^0h, f^1h) = (F_{\phi_b}(f^0h), t^1)$, donde $t^1(w) = f^1(\phi(w))h$ y $g^1F_{\phi_b}(h)(w) = g^1(w)F_{\phi_b}(h) = f^1\phi(w)F_{\phi_b}(h)$.

Similarmente se verifica que ξ_F es natural en N' .

- (3) Se sigue de la definición de F^z .
- (4) Se sigue de la definición de F^z .

Ahora veamos que se cumplen las condiciones del lema anterior para cada funtor $F = F^z : (\mathcal{A}^z, I^z)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Por hipótesis $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, como lo requiere el lema anterior. Denotaremos por $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}^z$ los funtores que olvidan.

En efecto :

- (1) F^z es pleno por 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6 y 2.1.7.
- (2) Como ϕ_b es suprayectivo, F_{ϕ_b} es fiel. Como $\phi(W_1)$ genera al R^z - R^z -bimódulo W_1^z y F_{ϕ_b} es fiel se tiene que ξ_F es inyectivo.
- (3) Se cumple gracias a que $F_{\phi_b}(f^0) = f^0$ como función.
- (4) Para esta prueba vamos a tomar $M' \in R^z\text{-Mod}$ y $\widehat{M} \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tales que $\mathcal{U}(\widehat{M}) = F_0(M')$. Supongamos que $N' \in (\mathcal{A}^z, I^z)\text{-Mod}$ y que $g = (g^0, g^1) = \xi_F[(f^0, f^1)] \in \text{Phom}_{R-W}(F_0(M'), F_0(N'))$ es un isomorfismo $\widehat{M} \rightarrow F(N')$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Para cada caso de $zin\{d, r, q, a, s\}$ encontraremos $\widehat{M}' \in (\mathcal{A}^z, I^z)\text{-Mod}$, con $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$ y $\mathcal{U}^z(\widehat{M}') = M'$.

- $z = d$

Hay que notar que $F(N')$ es un A -módulo anulado por I y también es anulado por $1 - e$, el cual es isomorfo como $(\mathcal{A}, I)$ -módulo a $\widehat{M}$. Dado que g es un isomorfismo, entonces el morfismo $g^0 : \widehat{M} \rightarrow F(N')$ es un isomorfismo de R -módulos. Entonces $\widehat{M}$ también es anulado por $1 - e$. Entonces, existe $\widehat{M}' \in (\mathcal{A}^d, I^d)\text{-Mod}$ tal que $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$. En particular, tenemos que ${}_R F(\widehat{M}') = {}_R \widehat{M} = F_{\phi_b}(M')$. De donde obtenemos que ${}_{R^d} \widehat{M}' = {}_{R^d} M'$. En resumen, $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$ y $\mathcal{U}^z(\widehat{M}') = M'$.

- $z = s$

Hay que notar que $F(N')$ es un A -módulo anulado por I y también es anulado por I_R , el cual es isomorfo como $(\mathcal{A}, I)$ -módulo a $\widehat{M}$. Dado que g es un isomorfismo, entonces el morfismo $g^0 : \widehat{M} \rightarrow F(N')$ es un isomorfismo de R -módulos. Entonces $\widehat{M}$ también es anulado por I_R . Entonces, existe $\widehat{M}' \in (\mathcal{A}^s, I^s)\text{-Mod}$ tal que $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$. En particular, tenemos que ${}_R F(\widehat{M}') = {}_R \widehat{M} = F_{\phi_b}(M')$. De donde obtenemos que ${}_{R^s} \widehat{M}' = {}_{R^s} M'$. En resumen, $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$ y $\mathcal{U}^z(\widehat{M}') = M'$.

- $z = r$

Hay que notar que $F(N')$ es un A -módulo anulado por I y también es anulado por W'_0 , el cual es isomorfo como $(\mathcal{A}, I)$ -módulo a $\widehat{M}$. Dado que g es isomorfismo, entonces el morfismo $g^0 : \widehat{M} \rightarrow F(N')$ es un isomorfismo de R -módulos. Veamos que $\widehat{M}$ también es anulado por W'_0 .

En efecto, si tomamos $w \in W'_0$ y $m \in \widehat{M}$, tenemos que $wg^0(m) = g^0(wm) + g^1(\delta(w))[m]$. Pero $wg^0(m) = 0$ y recordando que $g^1(\delta(w))[m] = f^1(\phi(\delta(w)))[m] = 0$ y se tiene que $g^0(wm) = 0$. Como g^0 es inyectiva, $w\widehat{M} = 0$. Entonces, existe $\widehat{M}' \in (\mathcal{A}^r, I^r)\text{-Mod}$ tal que $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$. Como antes, tenemos que ${}_R F(\widehat{M}') = {}_R \widehat{M} = {}_R F_0(M') = {}_R M'$. Así, $\mathcal{U}^z(\widehat{M}') = M'$.

- $z = q$

La verificación es similar a la anterior.

- $z = a$

Si elegimos $\widehat{M}' := F^{-1}(\widehat{M})$, obtenemos $F(\widehat{M}') = \widehat{M}$ y también ${}_{R^a} \widehat{M}' = {}_{R^a} \widehat{M}$. Hay que notar que $F(N')$ es un A -módulo anulado por I , el cual es isomorfo como $(\mathcal{A}, I)$ -módulo a $\widehat{M}$. Como g es isomorfismo, entonces $g^0 : \widehat{M} \rightarrow F(N')$ es un isomorfismo de R -módulos. Para $r \in R^a$ y $m \in \mathcal{U}^z(\widehat{M}')$, se tiene $g^0(rm) = rg^0(m)$. Entonces $g^0 : \widehat{M} \rightarrow N'$ es un isomorfismo de R^a -módulos. Por hipótesis, $(f^0, f^1) \in \text{Phom}_{R^a, W^a}(M', N')$ y entonces $f^0 : M' \rightarrow N'$ es morfismo de R^a -módulos. Como morfismos lineales $g^0 = f^0$ y entonces también tenemos que $g^0 : M' \rightarrow N'$ es isomorfismo de R^a -módulos. La estructura de M' como R^a -módulo está determinada por la estructura de N' por la fórmula $rm = (g^0)^{-1}(rg^0(m))$ y lo mismo ocurre para ${}_{R^a} \widehat{M}'$. Esto muestra que $\mathcal{U}^z(\widehat{M}') = M'$.

La condición 4^{op} se verifica en cada caso de manera análoga. □

Observación 2.1.11. Dada una ditálgebra débil entrelazada de Roiter $(\mathcal{A}, I)$, toda ditálgebra débil entrelazada estratificada $(\mathcal{A}', I')$ que sea isomorfa a $(\mathcal{A}, I)$ como ditálgebra débil entrelazada estratificada es de Roiter.

2.2 Relación Hom-Tensor y bases duales

En esta sección, recordaremos algunas relaciones entre el funtor Hom y el tensor, e introduciremos funciones μ , λ y ρ , que jugarán un papel importante en las siguientes secciones. Recordemos que una base dual de un S -módulo derecho U es una familia $\{(u_i, \lambda_i) \mid u_i \in U \text{ y } \lambda_i \in Hom_S(U, S)\}_{i \in I}$ tal que, para cada $u \in U$, $u = \sum_i u_i \lambda_i(u)$, donde $\lambda_i(u) = 0$ casi para toda i .

Lema 2.2.1. *Un S -módulo derecho U es proyectivo syss tiene una base dual.*

*Si U_S es finitamente generado y proyectivo, tal base dual puede ser elegida con un conjunto de índices finito. Iniciando con un S -módulo izquierdo U , tenemos las afirmaciones duales usando su dual izquierdo ${}^*U = Hom_S(U, S)$.*

Demostración: Ver [2, 11.1]. □

Lema 2.2.2. *Supongamos que U_S admite una base dual finita $\{(u_i, \lambda_i) \mid i \in I\}$. Para cada $i \in I$ sea $d_i \in {}^*(U^*)$, dada por $d_i(\lambda) = \lambda(u_i)$. Entonces $\{(\lambda_i, d_i) \mid i \in I\}$ es una base dual finita para U^* .*

Demostración: Ver la prueba detallada en [2, 11.2]. □

Lema 2.2.3. *Dados $W \in T-S-Mod$ y $U \in R-S-Mod$ hay un morfismo natural de $T-R$ -bimódulos $\phi : W \otimes_S U^* \rightarrow Hom_S(U, W)$ tal que $\phi(w \otimes \lambda)(u) = w\lambda(u)$. Si U_S admite una base dual finita $\{(u_i, \lambda_i) \mid i \in I\}$, entonces ϕ es un isomorfismo y su inversa satisface $\phi^{-1}(h) = \sum_i h(u_i) \otimes \lambda_i$.*

Demostración: Ver la prueba detallada en [2, 11.3]. □

Lema 2.2.4. *Dados $A \in T-S-Mod$ y $B \in S-R-Mod$ hay un morfismo natural de $R-T$ -bimódulos $\psi : B^* \otimes_S A^* \rightarrow (A \otimes_S B)^*$ tal que $\psi(g \otimes f)[a \otimes b] = g(f(a)b)$. Si A_S admite una base dual finita $\{(a_i, \lambda_i) \mid i \in I\}$, entonces ψ es un isomorfismo y su inversa satisface $\psi^{-1}(h) = \sum_i \rho_i(h) \otimes \lambda_i$, donde $\rho_i(h)[b] = h(a_i \otimes b)$.*

Demostración: Ver la prueba detallada en [2, 11.4]. □

Definición 2.2.5. *El par (S, P) es llamado **par divisor** para una k -álgebra Γ syss S es una subálgebra de Γ , P es un ideal de Γ , el módulo P_S admite una base dual finita y hay una descomposición de $S-S$ -bimódulos $\Gamma = S \oplus P$. En este caso, el producto de Γ induce un morfismo de $S-S$ -bimódulos $m : P \otimes_S P \rightarrow P$, llamado **multiplicación de P** . La asociatividad del producto en Γ implica que el siguiente cuadrado es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc}
P \otimes_S P \otimes_S P & \xrightarrow{m \otimes Id} & P \otimes_S P \\
Id \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\
P \otimes_S P & \xrightarrow{m} & P.
\end{array}$$

Tenemos el morfismo de S - S -bimódulos $\mu := \psi^{-1}m^* : P^* \rightarrow P^* \otimes_R P^*$, donde el dual se toma sobre el álgebra S . La función μ es llamada **la comultiplicación de P** .

Observación 2.2.6. Con las definiciones anteriores, tendremos que el siguiente cuadro es conmutativo, ver [2, 11.6].

$$\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{\mu} & P^* \otimes_S P^* \\
\mu \downarrow & & Id \otimes \mu \downarrow \\
P^* \otimes_S P^* & \xrightarrow{\mu \otimes Id} & P^* \otimes_S P^* \otimes_S P^*.
\end{array}$$

Para referirnos a esta propiedad diremos que la comultiplicación μ es **coasociativa**.

Lema 2.2.7. Supongamos que tenemos un par divisor (S, P) para la k -álgebra Γ , con comultiplicación $\mu : P^* \rightarrow P^* \otimes_S P^*$. Supongamos que $\{(p_j, \gamma_j) \mid j \in J\}$ es una base dual finita para el S -módulo P . Entonces, para cada $\gamma \in P^*$, tenemos:

$$\mu(\gamma) = \sum_{i,j} \gamma(p_i p_j) \gamma_j \otimes \gamma_i.$$

Demostración: Ver la prueba detallada en [2, 11.8]. □

Definición 2.2.8. Supongamos que B es una k -álgebra tensorial, X un B -módulo izquierdo y $\Gamma = \text{End}_B(X)^{op}$. Decimos que X es **admisibile** syss Γ admite un par divisor (S, P) y X_S admite una base dual finita.

Definición 2.2.9. Asociado a un B -módulo admisibile X donde $\Gamma = \text{End}_B(X)^{op}$ tiene un par divisor (S, P) , tenemos dos morfismos de S -módulos derechos:

$$\begin{aligned}
m_\ell : X \otimes_S P &\rightarrow X, \text{ donde } m_\ell(x \otimes p) = xp. \\
m_r : X &\rightarrow \text{Hom}_S(P, X) \text{ dada por } m_r(x)[p] := xp.
\end{aligned}$$

Estos morfismos son de B - S -bimódulos porque X es un B - Γ -bimódulo. Combinados con los isomorfismos $\phi : X \otimes_S P^* \rightarrow \text{Hom}_S(P, X)$ y $\psi : P^* \otimes_S X^* \rightarrow (X \otimes_S P)^*$ dan lugar a los siguientes morfismos:

$$\begin{aligned}
\lambda &:= \psi^{-1}m_\ell^* : X^* \rightarrow P^* \otimes_S X^*, \text{ de } S\text{-}B\text{-bimódulos y} \\
\rho &:= \phi^{-1}m_r : X \rightarrow X \otimes_S P^* \text{ de } B\text{-}S\text{-bimódulos.}
\end{aligned}$$

Lema 2.2.10. Supongamos que X es un B -módulo admisibile y $\Gamma = \text{End}_B(X)^{op}$ tiene un par divisor (S, P) , considere bases duales finitas $\{(x_i, \nu_i) \mid i \in I\}$ para X_S y $\{(p_j, \gamma_j) \mid j \in J\}$ para P_S . Entonces los morfismos λ y ρ pueden ser descritos por las fórmulas:

- Para $x \in X$, $\rho(x) = \sum_j x p_j \otimes \gamma_j$.
- Para $\nu \in X^*$, $\lambda(\nu) = \sum_{i,j} \nu(x_i p_j) \gamma_j \otimes \nu_i$.

Demostración: Ver la prueba detallada en [2, 11.11]. $\square$

Lema 2.2.11. *Los siguientes cuadros son conmutativos:*

$$\begin{array}{ccc}
 X^* & \xrightarrow{\lambda} & P^* \otimes_S X^* \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow \mu \otimes Id \\
 P^* \otimes_S X^* & \xrightarrow{Id \otimes \lambda} & P^* \otimes_S P^* \otimes_S X^*
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\rho} & X \otimes_S P^* \\
 \downarrow \rho & & \downarrow Id \otimes \mu \\
 X \otimes_S P^* & \xrightarrow{\rho \otimes Id} & X \otimes_S P^* \otimes_S P^*
 \end{array}$$

Demostración: Ver la prueba detallada en [2, 11.12]. $\square$

Observación 2.2.12. *Supongamos que el B - S -bimódulo X es proyectivo finitamente generado como S -módulo derecho. Por 2.2.3, el morfismo*

$$\phi : X \otimes_S X^* \rightarrow Hom_S(X, X)$$

es un isomorfismo. Supongamos que $\phi^{-1}(1_X) = \sum_i x_i \otimes \nu_i$, con $x_i \in X$ y $\nu_i \in X^$. Entonces $\{(x_i, \nu_i) \mid i \in I\}$ es una base dual finita para X_S . Cualquier base dual finita para X_S aparece como antes.*

Por tanto, dado que el morfismo ϕ es un morfismo de B - B -bimódulos, obtenemos para cada $b \in B$ la fórmula: $b(\sum_i x_i \otimes \nu_i) = (\sum_i x_i \otimes \nu_i)b$.

Entonces, para cualquier bimódulo ${}_B U_B$ y $n \geq 2$, hay un morfismo natural de S - S -bimódulos:

$$\sigma_n : X^* \otimes_B U^{\otimes n} \otimes_B X \rightarrow (X^* \otimes_B U \otimes_B X)^{\otimes n}.$$

*Donde $\sigma_n(\nu \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes x) = \nu \otimes w_1 \otimes (\sum_i x_i \otimes \nu_i) \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes (\sum_i x_i \otimes \nu_i) \otimes w_n \otimes x$. Llamamos a σ_n la **inserción canónica**.*

2.3 Módulos admisibles y la ditálgebra débil $\mathcal{A}^X$

En esta sección trabajaremos con ciertos módulos admisibles X y con el par divisor (S, P) de $\Gamma = End_B(X)^{op}$. Dada una ditálgebra débil $\mathcal{A}$, construiremos una ditálgebra débil nueva $\mathcal{A}^X$ y para ello fijaremos bases duales $\{(x_i, \nu_i) \mid i \in I\}$ y $\{(p_j, \gamma_j) \mid j \in J\}$ de X y P respectivamente. Mantendremos esta notación a lo largo del resto del trabajo, aunque más adelante requerimos que sean bases duales especiales.

Definición 2.3.1. *Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra débil con estratificación (R, W) y supongamos que tenemos una descomposición de R - R -bimódulos $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$. Consideremos la subálgebra B de T generada por R y W'_0 y asumamos que $\delta(W'_0) = 0$. A B la llamamos la **subálgebra de $\mathcal{A}$ asociada a la descomposición $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$** .*

Lema 2.3.2. *Supongamos que $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil con estratificación (R, W) y B es la subálgebra de $\mathcal{A}$ asociada a una descomposición de W_0 como antes. Tomando $A = [T]_0$ tenemos lo siguiente:*

- A está generada libremente por $(B, BW''_0 B)$.

- La t -álgebra T tiene estratificación $(B, \underline{W})$, donde $\underline{W} = \underline{W}_0 \oplus \underline{W}_1$ y $\underline{W}_0 = BW_0''B$ y $\underline{W}_1 = BW_1B$.
- Hay isomorfismos de B - B -bimódulos $B \otimes_R W_0'' \otimes_R B \rightarrow \underline{W}_0$ y $B \otimes_R W_1 \otimes_R B \rightarrow \underline{W}_1$, inducidos por el producto de T .

Demostración: Lo anterior es consecuencia de las propiedades básicas de las álgebras tensoriales, ver [2, 12.2]. $\square$

Observación 2.3.3. Si B es la subálgebra de la ditálgebra débil $\mathcal{A}$ asociada a la descomposición $W_0 = W_0' \oplus W_0''$ como antes, definimos $\mathcal{B} := (B, 0)$, la **ditálgebra débil regular asociada al álgebra B** . Si $(\mathcal{A}, I)$ es ditálgebra débil entrelazada, entonces también lo es $(\mathcal{B}, I_B)$, donde $I_B = I \cap B$. La inclusión $r : B \rightarrow A$ determina un morfismo de álgebras $\bar{r} : B/I_B \rightarrow A/I$ y un morfismo de ditálgebras débiles $\hat{r} : (\mathcal{B}, I_B) \rightarrow (\mathcal{A}, I)$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A/I - \text{Mod} & \xrightarrow{\mathcal{L}_{(\mathcal{A}, I)}} & (\mathcal{A}, I) - \text{Mod} \\ \downarrow F_{\bar{r}} & & \downarrow F_{\hat{r}} \\ B/I_B - \text{Mod} & \xrightarrow{\mathcal{L}_{(\mathcal{B}, I_B)}} & (\mathcal{B}, I_B) - \text{Mod}, \end{array}$$

donde $\mathcal{L}_{(\mathcal{B}, I_B)}$ es una equivalencia de categorías.

Observación 2.3.4. Sea $\mathcal{A}$ una ditálgebra débil con estratificación (R, W) y sea B la subálgebra de $\mathcal{A}$ asociada a la descomposición $W_0 = W_0' \oplus W_0''$ con $\delta(W_0') = 0$. En lo que sigue consideraremos B -módulos admisibles sobre tales álgebras B .

Definición 2.3.5. Supongamos que X es un B -módulo admisible, donde B es la subálgebra de $\mathcal{A}$ asociada a la descomposición $W_0 = W_0' \oplus W_0''$. Supongamos que $\Gamma = \text{End}_B(X)^{op}$ admite el par divisor (S, P) . Definimos el S - S -bimódulo $W^X = W_0^X \oplus W_1^X$ por las fórmulas:

$$W_0^X = X^* \otimes_B \underline{W}_0 \otimes_B X \text{ y } W_1^X = (X^* \otimes_B \underline{W}_1 \otimes_B X) \oplus P^*.$$

De lo anterior podemos definir la t -álgebra $T^X = T_S(W^X)$, con estratificación (S, W^X) .

Lema 2.3.6. Supongamos que X es un B -módulo admisible, donde B es la subálgebra de $\mathcal{A}$ asociada a la descomposición $W_0 = W_0' \oplus W_0''$. Consideremos la t -álgebra T^X y recordemos que T está generado libremente por B y $\underline{W}$, en particular $T = B \oplus \langle \underline{W} \rangle$, donde $\langle \underline{W} \rangle$ es el ideal bilateral de T generado por $\underline{W}$. Entonces, para cada

$$(u, v) \in D(X) := [X^* \times X] \cup [(P^* \otimes_S X^*) \times X] \cup [X^* \times (X \otimes_S P^*)]$$

hay una función lineal $\sigma_{u,v} : T \rightarrow T^X$ tal que para $w_1, \dots, w_n \in \underline{W}$ tenemos

$$\sigma_{u,v}(w_1 \cdots w_n) := \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} u \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes w_2 \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_{n-1}} \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n \otimes v.$$

Y , si $b \in B$,

- $\sigma_{\nu, x}(b) := \nu(bx)$, para $\nu \in X^*$ y $x \in X$.

- $\sigma_{u,x}(b) := \sum_r \phi_r \psi_r(bx)$, para $x \in X, u = \sum_r \phi_r \otimes \psi_r, \phi_r \in P^*$ y $\psi_r \in X^*$.
- $\sigma_{\nu,v}(b) := \sum_s \nu(by_s) \phi'_s$, para $\nu \in X^*, v = \sum_s y_s \otimes \phi'_s, y_s \in X$ y $\phi'_s \in P^*$.

Más aún, se cumple lo siguiente:

- (1) Para $x \in X, \nu \in X^*$ y todo elemento homogéneo $t \in T$, tenemos $\deg(\sigma_{\nu,x}(t)) = \deg(t)$.
- (2) Para $x \in X, \nu \in X^*$ tenemos;

- $\sigma_{u,x} = \sum_r \phi_r \sigma_{\psi_r,x}$, si $u = \sum_r \phi_r \otimes \psi_r, \phi_r \in P^*$ y $\psi_r \in X^*$.
- $\sigma_{\nu,v} = \sum_s \sigma_{\nu,y_s} \phi'_s$, si $v = \sum_s y_s \otimes \phi'_s, y_s \in X$ y $\phi'_s \in P^*$.

En particular, para $x \in X, \nu \in X^*$ y $t \in T$, tenemos

- $\sigma_{\lambda(\nu),x}(t) = \sum_{i,j} \nu(x_i p_j) \gamma_j \sigma_{\nu_i,x}(t)$.
- $\sigma_{\nu,\rho(x)}(t) = \sum_j \sigma_{\nu,x p_j}(t) \gamma_j$.

- (3) Para cada $(u, v) \in D(X)$ y $t, t' \in T$ tenemos:

$$\sigma_{u,v}(tt') = \sum_i \sigma_{u,x_i}(t) \sigma_{\nu_i,v}(t').$$

- (4) La función $\sigma_{\nu,x}$ es S -lineal en cada una de las variables $\nu \in X^*$ y $x \in X$. Dados $x \in X$ y $\nu \in X^*$, la función $\sigma_{u,x}$ es S -lineal en la variable $u \in P^* \otimes_S X^*$ y la función $\sigma_{\nu,v}$ es S -lineal en la variable $v \in X \otimes_S P^*$.

Demostración: Antes de iniciar la prueba necesitamos fijar algunas ideas. Note que la función $\sigma_{u,v}$ está bien definida en $\langle W \rangle$ debido a que por 2.3.2 la función multiplicación $\underline{W}^{\otimes n} \rightarrow \langle W \rangle$ induce un isomorfismo $\langle W \rangle \cong \bigoplus_{n>0} \underline{W}^{\otimes n}$ y ya tenemos la igualdad $b(\sum_i x_i \otimes \nu_i) = (\sum_i x_i \otimes \nu_i)b$, para cualquier $b \in B$.

Ahora consideramos las funciones

$$\underline{\theta}_{x,b} : P^* \times X^* \rightarrow P^* \text{ y } \underline{\theta}'_{\nu,b} : X \times P^* \rightarrow P^*,$$

dadas por

$$\underline{\theta}_{x,b}(\phi, \psi) := \phi\psi(bx) \text{ y } \underline{\theta}'_{\nu,b}(x, \phi) := \nu(bx)\phi$$

que inducen, por la propiedad universal del producto tensorial, las funciones

$$\theta_{x,b} : P^* \otimes_S X^* \rightarrow P^* \text{ y } \theta'_{\nu,b} : X \otimes_S P^* \rightarrow P^*,$$

tales que

$$\theta_{x,b}(\phi \otimes \psi) := \phi\psi(bx) \text{ y } \theta'_{\nu,b}(x \otimes \phi) := \nu(bx)\phi.$$

Lo cual implica que las funciones $\sigma_{u,x}$ y $\sigma_{\nu,v}$ están bien definidas en B . Para verificar esto, basta mostrar que las funciones $\underline{\theta}_{x,b}$ y $\underline{\theta}'_{\nu,b}$ son S -balanceadas. La prueba solo se hará para $\underline{\theta}_{x,b}$, pues los cálculos para $\underline{\theta}'_{\nu,b}$ son análogos. Para ello observemos que se tiene:

$$\underline{\theta}_{x,b}(\phi s, \psi) = (\phi s)\psi(bx) = \phi(s\psi)(bx) = \underline{\theta}_{x,b}(\phi, s\psi).$$

Iniciaremos la prueba punto por punto.

- (1) Para visualizar las funciones note que los morfismos de inserción

$$\sigma_n : X^* \otimes_B \underline{W}^{\otimes n} \otimes_B X \rightarrow (X^* \otimes_B \underline{W} \otimes_B X)^{\otimes n}$$

inducen un morfismo de S - S -bimódulos

$$X^* \otimes_B \langle \underline{W} \rangle \otimes_B X \xrightarrow{\sigma} \langle X^* \otimes_B \underline{W} \otimes_B X \rangle \subseteq T^X \text{ y } \sigma(\nu \otimes t \otimes x) = \sigma_{\nu,x}(t)$$

para cualquier elemento homogéneo $t \in \langle \underline{W} \rangle \subseteq T$, $\nu \in X^*$ y $x \in X$. Por tanto

$$\deg(\sigma_{\nu,x}(t)) = \deg(t).$$

- (2) Las igualdades se obtienen evaluando en $t \in B$ por definición. Claramente se tienen evaluando en cada $t = w_1 w_2 \cdots w_n$, con $w_1, w_2, \dots, w_n \in \underline{W}$. La segunda parte de las igualdades de 2 se obtienen usando 2.2.10.
- (3) Fijemos cualquier $u = \nu \in X^*$ y $v = x \in X$. Entonces (3) es claro para cualquier par de elementos homogéneos $t, t' \in \langle \underline{W} \rangle$.
Supongamos ahora que $t \in B$ y $t' = w_1 \cdots w_n$, con $w_i \in \underline{W}$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu,x}(tt') &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} \nu \otimes t w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n \otimes x \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} \nu t \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n \otimes x \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i} (\nu t)(x_i) \nu_i \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n \otimes x \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i} \nu(t x_i) \nu_i \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n \otimes x \\ &= \sum_i \sigma_{\nu, x_i}(t) \sigma_{\nu_i, x}(t'). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $t = w_1 w_2 \cdots w_n$, con $w_i \in \underline{W}$ y $t' \in B$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu,x}(tt') &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} \nu \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n t' \otimes x \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} \nu \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n \otimes t' x \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i} \nu \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n \otimes x_i \nu_i(t' x) \\ &= \sum_i \sigma_{\nu, x_i}(t) \sigma_{\nu_i, x}(t'). \end{aligned}$$

Si $t, t' \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
\sigma_{\nu,x}(tt') &= \nu(tt'x) = \nu\left(\sum_i tx_i\nu_i(t'x)\right) \\
&= \sum_i \nu(tx_i)\nu_i(t'x) \\
&= \sum_i \sigma_{\nu,x_i}(t)\sigma_{\nu_i,x}(t').
\end{aligned}$$

La fórmula se sigue para $t, t' \in T$ arbitrarios y $u = \nu \in X^*$ y $v = x \in X$ fijos. El caso general se sigue de esto. En efecto, fijando $t, t' \in T$, si $u = \sum_r \phi_r \otimes \psi_r$ y $v = x \in X$,

$$\begin{aligned}
\sigma_{u,x}(tt') &= \sum_r \phi_r \sigma_{\psi_r,x}(tt') \\
&= \sum_{r,i} \phi_r \sigma_{\psi_r,x_i}(t) \sigma_{\nu_i,x}(t') \\
&= \sum_i \sigma_{u,x_i}(t) \sigma_{\nu_i,x}(t').
\end{aligned}$$

Para las otras posibles formas de u, v el argumento es similar.

- (4) Si $\nu, \nu' \in X^*$, $x \in X$ y $q \in S$, entonces $\sigma_{q\nu+\nu',x}$ y $q\sigma_{\nu,x} + \sigma_{\nu',x}$ claramente coinciden al evaluar en cada $t \in B$. En elementos $t = w_1 \cdots w_n$, con $w_i \in \underline{W}$ también coinciden. Por lo tanto vale la igualdad.

Si $q \in S$, $u = \sum_r \phi_r \otimes \psi_r$ y $u' = \sum_s \phi'_s \otimes \psi'_s$, donde $\phi_r, \phi'_s \in P^*$ y $\psi_r, \psi'_s \in X^*$, entonces

$$\sigma_{qu+u',x} = \sum_r q\phi_r \sigma_{\psi_r,x} + \sum_s \phi'_s \sigma_{\psi'_s,x} = q\sigma_{u,x} + \sigma_{u',x}.$$

Entonces $\sigma_{u,x}$ es S -lineal en $u \in P^* \otimes_S X^*$. La S -linealidad de $\sigma_{\nu,v}$ en $v \in X \otimes_S P^*$ se obtiene de manera similar.

□

Lema 2.3.7. *Existe un morfismo $\widehat{\delta} : [X^* \otimes_B \underline{W} \otimes_B X] \oplus P^* \rightarrow T^X$ de S - S -bimódulos que satisface $\widehat{\delta}(\gamma) = \mu(\gamma)$, donde $\gamma \in P^*$ y $\mu : P^* \rightarrow P^* \otimes_S P^*$ es la comultiplicación de P y*

$$\widehat{\delta}(\nu \otimes w \otimes x) = \lambda(\nu) \otimes w \otimes x + \sigma_{\nu,x}(\delta(w)) + (-1)^{\deg(w)+1} \nu \otimes w \otimes \rho(x),$$

para $w \in \underline{W}_0 \cup \underline{W}_1$, $\nu \in X^*$ y $x \in X$. El morfismo de S - S -bimódulos $\widehat{\delta} : W^X \rightarrow T^X$ puede ser extendido a una derivación δ^X en la t -álgebra T^X tal que $\mathcal{A}^X := (T^X, \delta^X)$ es una ditálgebra débil con estratificación (S, W^X) .

Demostración: Para $r \in \{0, 1\}$, consideremos la función $\widehat{\delta} : X^* \times \underline{W}_r \times X \rightarrow T^X$ definida por $\widehat{\delta}(\nu, w, x) = \lambda(\nu) \otimes w \otimes x + \sigma_{\nu,x}(\delta(w)) + (-1)^{\deg(w)+1} \nu \otimes w \otimes \rho(x)$.

Verifiquemos que esta función es B -balanceada:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(\nu b, w, x) &= \lambda(\nu b) \otimes w \otimes x + \sigma_{\nu b, x}(\delta(w)) + (-1)^{\deg(w)+1} \nu b \otimes w \otimes \rho(x) \\
&= \lambda(\nu) \otimes bw \otimes x + \sigma_{\nu, x}(\delta(bw)) + (-1)^{\deg(w)+1} \nu \otimes bw \otimes \rho(x) \\
&= \widehat{\delta}(\nu, bw, x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(\nu, w, bx) &= \lambda(\nu) \otimes w \otimes bx + \sigma_{\nu, bx}(\delta(w)) + (-1)^{\deg(w)+1} \nu \otimes w \otimes \rho(bx) \\
&= \lambda(\nu) \otimes wb \otimes x + \sigma_{\nu, x}(\delta(wb)) + (-1)^{\deg(w)+1} \nu \otimes wb \otimes \rho(x) \\
&= \widehat{\delta}(\nu, wb, x)
\end{aligned}$$

Recordemos que ρ es un morfismo de S -módulos derechos, λ es un morfismo de S -módulos izquierdos y $\sigma_{\nu, x}$ es S -lineal en ν y x . Entonces está bien definido el morfismo de S - S -bimódulos $\widehat{\delta} : X^* \otimes_B \underline{W} \otimes_B X \rightarrow T^X$. Podemos extenderlo a un morfismo $\widehat{\delta} : W^X \rightarrow T^X$ de S - S -bimódulos, tomando $\widehat{\delta}(\gamma) = \mu(\gamma)$ para $\gamma \in P^*$. Entonces $\widehat{\delta}$ induce una derivación $\delta^X : T^X \rightarrow T^X$ sobre la t -álgebra T^X , dado que $\deg(\widehat{\delta}(w)) = \deg(w) + 1$ para $w \in W_0^X \cup W_1^X$. $\square$

Lema 2.3.8. *Para cualquier elemento homogéneo $t \in T, \nu \in X^*$ y $x \in X$ tenemos que*

$$\delta^X(\sigma_{\nu, x}(t)) = \sigma_{\lambda(\nu), x}(t) + \sigma_{\nu, x}(\delta(t)) + (-1)^{\deg(t)+1} \sigma_{\nu, \rho(x)}(t).$$

Demostración: Recordemos que $T = B \oplus \langle \underline{W} \rangle$. Primero demostraremos el lema para cualquier elemento homogéneo $t \in \langle \underline{W} \rangle$. Nuestra afirmación es cierta para todo $t \in \underline{W}$ por definición de δ^X . Supongamos ahora que lo hemos probado para $\underline{W}^{n-1}$ y vamos a probarlo para $\underline{W}^n$. Sean $w \in \underline{W}, t' \in \underline{W}^{n-1}$, y supongamos que $t = wt'$. Por 2.3.6 (3),

$$\begin{aligned}
\delta^X(\sigma_{\nu, x}(t)) &= \delta^X\left[\sum_i \sigma_{\nu, x_i}(w) \sigma_{\nu_i, x}(t')\right] \\
&= \sum_i \delta^X(\sigma_{\nu, x_i}(w)) \sigma_{\nu_i, x}(t') + (-1)^{\deg(w)} \sum_i \sigma_{\nu, x_i}(w) \delta^X(\sigma_{\nu_i, x}(t')) \\
&= \sum_i \sigma_{\lambda(\nu), x_i}(w) \sigma_{\nu_i, x}(t') + \sum_i \sigma_{\nu, x_i}(\delta(w)) \sigma_{\nu_i, x}(t') \\
&\quad + (-1)^{\deg(w)+1} \sum_i \sigma_{\nu, \rho(x_i)}(w) \sigma_{\nu_i, x}(t') \\
&\quad + (-1)^{\deg(w)} \sum_i \sigma_{\nu, x_i}(w) \sigma_{\lambda(\nu_i), x}(t') \\
&\quad + (-1)^{\deg(w)} \sum_i \sigma_{\nu, x_i}(w) \sigma_{\nu_i, x}(\delta(t')) \\
&\quad + (-1)^{\deg(w)+\deg(t')+1} \sum_i \sigma_{\nu, x_i}(w) \sigma_{\nu_i, \rho(x)}(t')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_{\lambda(\nu),x}(wt') + \sigma_{\nu,x}(\delta(w)t') \\
&+ (-1)^{\deg(w)+1} \sum_i \sigma_{\nu,\rho(x_i)}(w) \sigma_{\nu_i,x}(t') \\
&+ (-1)^{\deg(w)} \sum_i \sigma_{\nu,x_i}(w) \sigma_{\lambda(\nu_i),x}(t') \\
&+ (-1)^{\deg(w)} \sigma_{\nu,x}(w\delta(t')) \\
&+ (-1)^{\deg(w)+\deg(t')+1} \sigma_{\nu,\rho(x)}(wt') \\
&= \sigma_{\lambda(\nu),x}(t) + \sigma_{\nu,x}(\delta(t)) + (-1)^{\deg(t)+1} \sigma_{\nu,\rho(x)}(t) \\
&+ (-1)^{\deg(w)+1} \sum_i \sigma_{\nu,\rho(x_i)}(w) \sigma_{\nu_i,x}(t') + (-1)^{\deg(w)} \sum_i \sigma_{\nu,x_i}(w) \sigma_{\lambda(\nu_i),x}(t') \\
&= \sigma_{\lambda(\nu),x}(t) + \sigma_{\nu,x}(\delta(t)) + (-1)^{\deg(t)+1} \sigma_{\nu,\rho(x)}(t)
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que $\sum_i \rho(x_i) \otimes \nu_i = \sum_i x_i \otimes \lambda(\nu_i)$.

En efecto, por 2.2.10, tenemos $\rho(x) = \sum_j xp_j \otimes \gamma_j$ y entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_i x_i \otimes \lambda(\nu_i) &= \sum_i x_i \otimes \sum_{i',j} \nu_i(x_{i'}p_j) \gamma_j \otimes \nu_{i'} \\
&= \sum_j \sum_{i,i'} x_i \nu_i(x_{i'}p_j) \otimes \gamma_j \otimes \nu_{i'} \\
&= \sum_{j,i'} x_{i'} p_j \otimes \gamma_j \otimes \nu_{i'} \\
&= \sum_i \rho(x_i) \otimes \nu_i.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $t \in B$, así, $\delta(t) = 0$. Como $\delta^X(S) = 0$, tenemos que $\delta^X(\sigma_{\nu,x}(t)) = \delta^X(\nu(tx)) = 0$. Basta probar que $\sigma_{\lambda(\nu),x}(t) - \sigma_{\nu,\rho(x)}(t) = 0$. Tomemos $x \in X, p \in P$ y recordemos que $t(xp) = (tx)p$. Entonces, por 2.3.6 (2),

$$\begin{aligned}
\sigma_{\lambda(\nu),x}(t) - \sigma_{\nu,\rho(x)}(t) &= \sum_{i,j} \nu[x_i p_j] \gamma_j \sigma_{\nu_i,x}(t) - \sum_j \sigma_{\nu,x p_j}(t) \gamma_j \\
&= \sum_{i,j} \nu[x_i p_j] \gamma_j \nu_i(tx) - \sum_j \nu[t(x p_j)] \gamma_j \\
&= \sum_i [\sum_j \nu[x_i p_j] \gamma_j \nu_i(tx) - \sum_j \nu[x_i \nu_i(tx) p_j] \gamma_j] \\
&=: \Delta
\end{aligned}$$

Veamos que $\Delta = 0$. Para $q \in P, s \in S$ y $x \in X$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_j \nu[xsp_j]\gamma_j(q) &= \nu[xs \sum_j p_j \gamma_j(q)] \\
&= \nu[xsq] \\
&= \nu[x \sum_j p_j \gamma_j(sq)] \\
&= \sum_j \nu[xp_j]\gamma_j(sq) \\
&= \sum_j \nu[xp_j](\gamma_j s)(q)
\end{aligned}$$

Luego, $\sum_j \nu[xsp_j]\gamma_j = \sum_j \nu[xp_j]\gamma_j s$. Si tomamos $s = \nu_i(tx)$ y $x = x_i$, obtenemos que $\Delta = 0$. $\square$

Lema 2.3.9. *Se tiene $(\delta^X)^2(P^*) = 0$ y, para todo $w \in \underline{W}_0 \cup \underline{W}_1, \nu \in X^*$ y $x \in X$*

$$(\delta^X)^2(\sigma_{\nu,x}(w)) = \sigma_{\nu,x}(\delta^2(w)).$$

Demostración: Por 2.3.8, sabemos que

$$(\delta^X)^2(\sigma_{\nu,x}(w)) = \delta^X(\sigma_{\lambda(\nu),x}(w) + \sigma_{\nu,x}(\delta(w)) + (-1)^{\deg(w)+1}\sigma_{\nu,\rho(x)}(w)).$$

Veamos a que es igual cada uno de los sumandos, supongamos que $\lambda(\nu) = \sum_t \gamma'_t \otimes \nu'_t$ y $\rho(x) = \sum_s x'_s \otimes \gamma'_s$. Por 2.2.11, tenemos

$$\begin{aligned}
\delta^X[\sigma_{\lambda(\nu),x}(w)] &= \sum_t \delta^X(\gamma'_t \otimes \nu'_t \otimes w \otimes x - \sum_t \gamma'_t \otimes \lambda(\nu'_t) \otimes w \otimes x \\
&\quad - \sum_t \gamma'_t \otimes \sigma_{\nu'_t,x}(\delta(w)) - (-1)^{\deg(w)+1} \sum_t \gamma'_t \otimes \nu'_t \otimes w \otimes \rho(x)) \\
&= (\mu \otimes 1)\lambda(\nu) \otimes w \otimes x - (1 \otimes \lambda)\lambda(\nu) \otimes w \otimes x \\
&\quad - \sum_t \gamma'_t \otimes \sigma_{\nu'_t,x}(\delta(w)) - (-1)^{\deg(w)+1} \sum_t \gamma'_t \otimes \nu'_t \otimes w \otimes \rho(x) \\
&= -\sigma_{\lambda(\nu),x}(\delta(w)) - (-1)^{\deg(w)+1}\lambda(\nu) \otimes w \otimes \rho(x)
\end{aligned}$$

De nuevo por 2.3.8, tenemos

$$\begin{aligned}
\delta^X[\sigma_{\nu,x}(\delta(w))] &= \sigma_{\lambda(\nu),x}(\delta(w)) + \sigma_{\nu,x}(\delta^2(w)) + (-1)^{\deg(w)+2}\sigma_{\nu,\rho(x)}(\delta(w)) \\
&= \sigma_{\lambda(\nu),x}(\delta(w)) + \sigma_{\nu,x}(\delta^2(w)) + (-1)^{\deg(w)}\sigma_{\nu,\rho(x)}(\delta(w)).
\end{aligned}$$

Por la regla de Leibniz y 2.2.11,

$$\begin{aligned}
\delta^X[\sigma_{\nu,\rho(x)}(w)] &= \sum_s \sigma_{\lambda(\nu),x'_s}(w) \otimes \gamma'_s + \sum_s \sigma_{\nu,x'_s}(\delta(w)) \otimes \gamma'_s \\
&+ (-1)^{\deg(w)+1} \sum_s \sigma_{\nu,\rho(x'_s)}(w) \otimes \gamma'_s + (-1)^{\deg(w)} \sum_s \sigma_{\nu,x'_s}(w) \otimes \mu(\gamma'_s) \\
&= \lambda(\nu) \otimes w \otimes \rho(x) + \sigma_{\nu,\rho(x)}(\delta(w)) \\
&+ (-1)^{\deg(w)+1} \nu \otimes w \otimes (\rho \otimes 1)\rho(x) + (-1)^{\deg(w)} \nu \otimes w \otimes (1 \otimes \mu)\rho(x) \\
&= \lambda(\nu) \otimes w \otimes \rho(x) + \sigma_{\nu,\rho(x)}(\delta(w)).
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\delta^X)^2[\sigma_{\nu,x}(w)] &= -\sigma_{\lambda(\nu),x}(\delta(w)) - (-1)^{\deg(w)+1} \lambda(\nu) \otimes w \otimes \rho(x) \\
&+ \sigma_{\lambda(\nu),x}(\delta(w)) + \sigma_{\nu,x}(\delta^2(w)) + (-1)^{\deg(w)} \sigma_{\nu,\rho(x)}(\delta(w)) \\
&+ (-1)^{\deg(w)+1} [\lambda(\nu) \otimes w \otimes \rho(x) + \sigma_{\nu,\rho(x)}(\delta(w))] \\
&= \sigma_{\nu,x}(\delta^2(w)).
\end{aligned}$$

Ahora, si $\gamma \in P^*$ y $\mu(\gamma) = \sum_t \gamma'_t \otimes \gamma''_t$, entonces por 2.2.6, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\delta^X)^2(\gamma) &= \delta^X\left(\sum_t \gamma'_t \otimes \gamma''_t\right) \\
&= \sum_t [\mu(\gamma'_t) \otimes \gamma''_t - \gamma'_t \otimes \mu(\gamma''_t)] \\
&= [(\mu \otimes 1) - (1 \otimes \mu)]\mu(\gamma) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

2.4 Reducción con módulos admisibles

En esta sección estudiamos el proceso de reducción que utiliza los llamados **módulos admisibles**.

Proposición 2.4.1. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada, donde $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil con estratificación (R, W) , tal que hay una descomposición de R - R -bimódulos $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$, con $\delta(W'_0) = 0$. Supongamos que B es la subálgebra de $\mathcal{A}$, asociada a la descomposición de W_0 , X un B -módulo admisible y $\mathcal{A}^X = (T^X, \delta^X)$ la ditálgebra débil de 2.3.7. Consideremos el ideal I^X de $\mathcal{A}^X$ generado por los elementos $\sigma_{\nu,x}(h)$ para $\nu \in X^*$, $h \in I$ y $x \in X$, entonces*

- (1) *El par $(\mathcal{A}^X, I^X)$ es una ditálgebra débil entrelazada.*
- (2) *Hay un funtor $F^X : (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, tal que para cada $M \in (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$, el B -módulo subyacente de $F^X(M)$ es $X \otimes_S M$ y*

$$a \cdot (x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i,x}(a)m, \text{ para } a \in A, x \in X \text{ y } m \in M.$$

Dado $f = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}^X, I^X)}(M, N)$, su imagen $F^X(f) = (F^X(f)^0, F^X(f)^1)$ está dada por

$$F^X(f)^0[x \otimes m] = x \otimes f^0(m) + \sum_j x p_j \otimes f^1(\gamma_j)[m],$$

y

$$F^X(f)^1(v)[x \otimes m] = \sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v))[m],$$

para $v \in V, x \in X$ y $m \in M$.

Demostración: Veamos que $\mathcal{A}^X$ está entrelazada con el ideal I^X . Para esto bastará mostrar que $(\delta^X)^2(W_0^X) \subseteq J^X$ y $(\delta^X)^2(W_1^X) \subseteq J^X$, donde J^X es el ideal de T^X generado por I^X . Por 2.3.9, tenemos que $(\delta^X)^2(P^*) = 0$. También por 2.3.9, sabemos que $(\delta^X)^2(\sigma_{\nu, x}(w)) = \sigma_{\nu, x}(\delta^2(w))$. Por 2.3.6 (3), tenemos que

$$\sigma_{\nu, x}(\delta^2(w)) \in \sigma_{\nu, x}(IV^2 + VIV + V^2I) \subseteq I^X(V^X)^2 + V^X I^X V^X + (V^X)^2 I^X,$$

para $w \in \underline{W}_0$ y

$$\sigma_{\nu, x}(\delta^2(w)) \in \sigma_{\nu, x}(IV^3 + VIV^2 + V^2IV + V^3I) \subseteq I^X(V^X)^3 + V^X I^X (V^X)^2 + (V^X)^2 I^X V^X + (V^X)^3 I^X,$$

para $w \in \underline{W}_1$.

Afirmación 1: Veremos que la fórmula del enunciado efectivamente define una estructura de A -módulo sobre $X \otimes_S M$, cuando M es un A^X -módulo. Además $I(X \otimes_S M) = 0$.

Primero recordemos que tener un morfismo de anillos $\rho : A \rightarrow \text{End}_k(X \otimes_S M)$ es equivalente a tener una estructura de A -módulo sobre $X \otimes_S M$.

Como $A \cong T_B(\underline{W}_0)$, lo anterior equivale a dar un morfismo de anillos $\rho_b : B \rightarrow \text{End}_k(X \otimes_S M)$ y un morfismo de B - B -bimódulos $\rho_0 : \underline{W}_0 \rightarrow \text{End}_k(X \otimes_S M)$.

El morfismo ρ_b se tiene porque $X \otimes_S M$ es un B -módulo izquierdo. El morfismo ρ_0 puede obtenerse mediante el isomorfismo

$$\text{Hom}_{B-B}(\underline{W}_0, \text{End}_k(X \otimes_S M)) \cong \text{Hom}_B(\underline{W}_0 \otimes_B X \otimes_S M, X \otimes_S M),$$

una vez que tengamos un morfismo natural $\rho'_0 : \underline{W}_0 \otimes_B X \otimes_S M \rightarrow X \otimes_S M$ de B -módulos izquierdos. Ese morfismo natural está dado por la composición

$$\underline{W}_0 \otimes_B X \otimes_S M \rightarrow \text{End}_S(X) \otimes_B \underline{W}_0 \otimes_B X \otimes_S M \xrightarrow{\phi^{-1} \otimes 1} X \otimes_S (X^* \otimes_B \underline{W}_0 \otimes_B X) \otimes_S M \xrightarrow{1 \otimes *} X \otimes_S M,$$

donde el primer morfismo envía cada $w \otimes x \otimes m$ en $1 \otimes w \otimes x \otimes m$, ϕ es el isomorfismo de 2.2.12 y $*$ es la acción de A^X sobre M . Un cálculo sencillo muestra que

$$\rho'_0(w \otimes x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * m.$$

Luego, hay una estructura de A -módulo sobre $X \otimes_S M$ que cumple:

$$w(x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x}(w) * m \text{ y } b(x \otimes m) = bx \otimes m.$$

Vamos a verificar la fórmula de la acción de A en $X \otimes_S M$ dada en el enunciado de esta proposición. La prueba será por inducción.

Base de inducción. Para $w \in \underline{W}_0$,

$$w(x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * m = \sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x}(w) * m$$

por definición.

Hipótesis de inducción: Supongamos que la fórmula es cierta para $a = w = w_1 w_2 \cdots w_n$, con $w_1, \dots, w_n \in \underline{W}_0$ y $n \geq 1$.

Paso inductivo: Tomemos $w = w_1 w'$, donde $w' = w_2 w_3 \cdots w_{n+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} w(x \otimes m) &= w_1 w'(x \otimes m) \\ &= w_1 \left(\sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x}(w') * m \right) \\ &= \sum_j x_j \otimes \sum_i \sigma_{\nu_j, x_i}(w_1) * \sigma_{\nu_i, x}(w') * m \\ &= \sum_j x_j \otimes \sigma_{\nu_j, x}(w_1 w') * m. \end{aligned}$$

Finalmente, para $b \in B$, tenemos que

$$\begin{aligned} b(x \otimes m) &= bx \otimes m \\ &= \sum_i x_i \nu_i(bx) \otimes m \\ &= \sum_i x_i \otimes \nu_i(bx) * m \\ &= \sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x}(b) * m \end{aligned}$$

Como A está generada libremente por B y $\underline{W}_0$, tenemos la fórmula deseada.

Finalmente, veamos que $IF^X(N) = 0$, para $N \in (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$. Sabemos que $I^X * N = 0$, entonces para $a \in A, x \in X$ y $n \in N$ tenemos que $a(x \otimes n) = \sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x}(a) * n$, por lo cual que $I^X * N = 0$ implica que $IF^X(N) = 0$.

Afirmación 2: Las reglas de asociación de F^X están bien definidas.

Primero vamos a probar que la función $F^X(f)^0 \in \text{Hom}_k(F^X(M), F^X(N))$ está bien definida. Para eso, definamos primero $g^0 : X \times M \rightarrow X \otimes N$, de la siguiente manera:

$$g^0(x, m) := x \otimes f^0(m) + \sum_j x p_j \otimes f^1(\gamma_j)[m].$$

Hay que notar que g^0 es una función S -balanceada, en efecto

$$\begin{aligned}
g^0(xs, m) &= xs \otimes f^0(m) + \sum_j [xs]p_j \otimes f^1(\gamma_j)[m] \\
&= x \otimes f^0(sm) + \sum_j xp_j \otimes f^1(\gamma_j s)[m] \\
&= x \otimes f^0(sm) + \sum_j xp_j \otimes f^1(\gamma_j)[sm] \\
&= g^0(x, sm),
\end{aligned}$$

ya que

$$\sum_j (xs)p_j \otimes \gamma_j = \rho(xs) = \rho(x)s = \sum_j xp_j \otimes \gamma_j s.$$

Por lo que $F^X(f)^0$ está bien definida.

Para ver que $F^X(f)^1$ está bien definida, primero veamos que

$$F^X(f)^1 \in \text{Hom}_{R-R}(W_1, \text{Hom}_k(F^X(M), F^X(N)))$$

donde

$$F^X(f)^1(w)(x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m].$$

Es claro que $F^X(f)^1(w) \in \text{Hom}_k(F^X(M), F^X(N))$, para cada $w \in W_1$. Veamos que $F^X(f)^1$ es morfismo de R - R -bimódulos, si $r, r' \in R$:

$$\begin{aligned}
F^X(f)^1(rwr')(x \otimes m) &= \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes rwr' \otimes x)[m] \\
&= \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i r \otimes w \otimes r'x)[m] \\
&= r \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes r'x)[m] \\
&= (rF^X(f)^1(w)r')(x \otimes m)
\end{aligned}$$

dado que $r(\sum_i x_i \otimes \nu_i) = (\sum_i x_i \otimes \nu_i)r$.

Como $F^X(M)$ y $F^X(N)$ son A -módulos, podemos extender $F^X(f)^1$ a un morfismo $F^X(f)^1 \in \text{Hom}_{A-A}(V, \text{Hom}_k(F^X(M), F^X(N)))$, de la manera usual: como en 1.3.5.

Mostraremos ahora la siguiente afirmación.

Afirmación 3: Para $v \in V, x \in X$ y $m \in M$,

$$(F^X(f))^1(v)[x \otimes m] = \sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v))[m].$$

Sabemos que T tiene estratificación $(B, \underline{W})$. Por tanto $V = A'\underline{W}_1A'$, donde A' está generada libremente por B y $\underline{W}_0$. Por tanto podemos asumir que $v = w'_1w'_2 \cdots w'_tww''_1w''_2 \cdots w''_s$, con $w'_i, w''_j \in \underline{W}_0$ y $w \in \underline{W}_1$. La prueba de la afirmación será por inducción en los siguientes casos.

Caso 1 $v = bw b'$, con $w \in W_1$ y $b, b' \in B$.

$$\begin{aligned}
(F^X(f))^1(v)[x \otimes m] &= [F^X(f)]^1(bw b')[x \otimes m] \\
&= b(F^X)^1(w)[b'x \otimes m] \\
&= b\left(\sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes b'x)[m]\right) \\
&= \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i b \otimes w \otimes b'x)[m] \\
&= \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes bw b' \otimes x)[m] \\
&= \sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v))[m].
\end{aligned}$$

Caso 2 $v = wv'$, con $w \in \underline{W}_0$ y $v' \in V$ y v' satisface la afirmación.

$$\begin{aligned}
(F^X(f))^1(v)[x \otimes m] &= [F^X(f)]^1(wv')[x \otimes m] \\
&= w \cdot (F^X)^1(v')[x \otimes m] \\
&= \sum_i w \cdot (x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v'))[m]) \\
&= \sum_{i,j} x_j \otimes (\nu_j \otimes w \otimes x_i) * f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v'))[m] \\
&= \sum_{i,j} x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x_j}(w) * f^1(\sigma_{\nu_j, x}(v'))[m] \\
&= \sum_{i,j} x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x_j}(w) \sigma_{\nu_j, x}(v'))[m] \\
&= \sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v))[m].
\end{aligned}$$

Caso 3 $v = v'w$, con $w \in \underline{W}_0$ y $v' \in V$ y v' satisface la afirmación.

$$\begin{aligned}
(F^X(f))^1(v)[x \otimes m] &= [F^X(f)]^1(v'w)[x \otimes m] \\
&= (F^X(f))^1(v')[w \cdot (x \otimes m)] \\
&= (F^X(f))^1(v')\left(\sum_j x_j \otimes (\nu_j \otimes w \otimes x) * m\right) \\
&= \sum_{i,j} x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x_j}(v'))[(\nu_j \otimes w \otimes x) * m] \\
&= \sum_{i,j} x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x_j}(v') \sigma_{\nu_j, x}(w))[m] \\
&= \sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v))[m].
\end{aligned}$$

Nuestra afirmación ha sido demostrada.

Ahora, para mostrar que $F^X(f) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(F^X(M), F^X(N))$, tenemos que probar que

$$a(F^X(f))^0(x \otimes m) = (F^X(f))^0(a[x \otimes m]) + (F^X(f))^1(\delta(a))[x \otimes m].$$

Como A es generado libremente por B y $\underline{W}_0 = BW_0''B$, es suficiente probarlo para $a = b \in B$ y $a = w \in \underline{W}_0$. Para $b \in B$, tenemos

$$b(F^X(f))^0(x \otimes m) = bx \otimes f^0(m) + \sum_j b[xp_j] \otimes f^1(\gamma_j)[m].$$

Por otro lado, puesto que X es un B - Γ -bimódulo,

$$\begin{aligned} (F^X(f))^0(b[x \otimes m]) + (F^X(f))^1(\delta(b))[x \otimes m] &= (F^X(f))^0(bx \otimes m) \\ &= bx \otimes f^0(m) + \sum_j (bx)p_j \otimes f^1(\gamma_j)[m] \\ &= b(F^X(f))^0(x \otimes m). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (F^X(f))^0(w[x \otimes m]) &= (F^X(f))^0[\sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * m] \\ &= \sum_i x_i \otimes f^0([\nu_i \otimes w \otimes x] * m) + \sum_{i,j} x_i p_j \otimes f^1(\gamma_j)[(\nu_i \otimes w \otimes x) * m] \\ &= \sum_i x_i \otimes f^0([\nu_i \otimes w \otimes x] * m) + \sum_{i,j} x_i p_j \otimes f^1(\gamma_j \otimes \nu_i \otimes w \otimes x)[m] \\ &= \sum_i x_i \otimes f^0([\nu_i \otimes w \otimes x] * m) + \sum_i x_i \otimes f^1(\lambda(\nu_i) \otimes w \otimes x)[m]. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} w(F^X(f))^0([x \otimes m]) &= \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * f^0(m) + \sum_{i,j} x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes xp_j) * f^1(\gamma_j)[m] \\ &= \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * f^0(m) + \sum_{i,j} x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes xp_j \otimes \gamma_j)[m] \\ &= \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * f^0(m) + \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes \rho(x))[m]. \end{aligned}$$

Restando, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_i x_i \otimes [(\nu_i \otimes w \otimes x) * f^0(m) - f^0((\nu_i \otimes w \otimes x) * m)] \\
& + \sum_i x_i \otimes [f^1(\nu_i \otimes w \otimes \rho(x))[m] - f^1(\lambda(\nu_i) \otimes w \otimes x)[m]] \\
& = \sum_i x_i \otimes f^1(\delta^X(\nu_i \otimes w \otimes x))[m] \\
& + \sum_i x_i \otimes [f^1(\nu_i \otimes w \otimes \rho(x))[m] - f^1(\lambda(\nu_i) \otimes w \otimes x)[m]] \\
& = \sum_i x_i \otimes f^1[\lambda(\nu_i) \otimes w \otimes x + \sigma_{\nu_i, x}(\delta(w)) + (-1)^{\deg(w)+1} \nu_i \otimes w \otimes \rho(x)][m] \\
& + \sum_i x_i \otimes [f^1(\nu_i \otimes w \otimes \rho(x))[m] - f^1(\lambda(\nu_i) \otimes w \otimes x)[m]] \\
& = \sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(\delta(w)))[m] \\
& = (F^X(f))^1(\delta(w))[m].
\end{aligned}$$

Afirmación 4: F^X es funtor.

Es claro que F^X preserva identidades.

Para ver que F^X conserva la composición, sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow L$ morfismos en $(\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$, veamos que $F^X(gf) = F^X(g)F^X(f)$.

Sean $x \in X, m \in M$ y $\delta^X(\gamma_j) = \mu(\gamma_j) = \sum_s \gamma_{js}^1 \otimes \gamma_{js}^2$, sabemos que

$$\sum_{i,j} xp_i p_j \otimes \gamma_j \otimes \gamma_i = (\rho \otimes 1)\rho(x) = (1 \otimes \mu)\rho(x) = \sum_{j,s} xp_j \otimes \gamma_{js}^1 \otimes \gamma_{js}^2.$$

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}
(F^X(g)F^X(f))^0[x \otimes m] &= F^X(g)^0(x \otimes f^0(m) + \sum_j xp_j \otimes f^1(\gamma_j)[m]) \\
&= x \otimes g^0 f^0(m) + \sum_j xp_j \otimes g^0 f^1(\gamma_j)[m] + \sum_j xp_j \otimes g^1(\gamma_j) f^0(m) \\
&+ \sum_{j,t} xp_j p_t \otimes g^1(\gamma_t) f^1(\gamma_j)[m] \\
&= x \otimes g^0 f^0(m) + \sum_j xp_j \otimes (gf)^1(\gamma_j)[m] \\
&= F^X(gf)^0(x \otimes m).
\end{aligned}$$

Hemos verificado que $F^X(gf)^0 = F^X(g)^0 F^X(f)^0$.

Para $w \in W_1$, supongamos que $\delta(w) = \sum_s v_s^1 \otimes v_s^2$. Entonces, para cada $i \in I$ y $\nu_i \otimes w \otimes x \in X^* \otimes_B \underline{W}_1 \otimes_B X$, tenemos

$$\begin{aligned}
\delta^X(\nu_i \otimes w \otimes x) &= \sigma_{\lambda(\nu_i), x}(w) + \sigma_{\nu_i, x}(\delta(w)) + (-1)^{\deg(w)+1} \sigma_{\nu_i, \rho(x)}(w) \\
&= \sum_{r,t} \nu_i(x_r p_t) \gamma_t \otimes \nu_r \otimes w \otimes x + \sum_{r,s} \sigma_{\nu_i, x_r}(v_s^1) \otimes \sigma_{\nu_r, x}(v_s^2) + \sum_r \nu_i \otimes w \otimes xp_r \otimes \gamma_r
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(F^X(g)F^X(f))^1(w)[x \otimes m] &= F^X(g)^0 F^X(f)^1(w)[x \otimes m] + F^X(g)^1(w)F^X(f)^0[x \otimes m] \\
&+ (F^X(g)^1 \star F^X(f)^1)(\sum_s v_s^1 \otimes v_s^2)[x \otimes m] \\
&= F^X(g)^0(\sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m]) \\
&+ F^X(g)^1(w)(x \otimes f^0(m)) + \sum_j x p_j \otimes f^1(\gamma_j)[m] \\
&+ \sum_{s,i} F^X(g)^1(v_s^1)(x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i,x}(v_s^2)))[m] \\
&= \sum_i x_i \otimes g^0 f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m] + \sum_{i,j} x_i p_j \otimes g^1(\gamma_j)[f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)(m)] \\
&+ \sum_i x_i \otimes g^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[f^0(m)] + \sum_{i,j} x_i \otimes g^1(\nu_i \otimes w \otimes x p_j)[f^1(\gamma_j)(m)] \\
&+ \sum_{i,r,s} x_r \otimes g^1(\sigma_{\nu_r,x_i}(v_s^1))[f^1(\sigma_{\nu_i,x}(v_s^2))(m)] \\
&= \sum_i x_i \otimes g^0 f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m] + \sum_i x_i \otimes g^1(\nu_i \otimes w \otimes x) f^0[m] \\
&+ \sum_i x_i \otimes \pi[g^1 \otimes f^1](\delta^X(\nu_i \otimes w \otimes x))[m] \\
&= \sum_i x_i \otimes (gf)^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m] \\
&= F^X(gf)^1(w)[x \otimes m].
\end{aligned}$$

Así, $(F^X(g)F^X(f))^1 = (F^X(gf))^1$.

□

Lema 2.4.2. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada, donde $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil con estratificación (R, W) , tal que hay una descomposición de R - R -bimódulos $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$, con $\delta(W'_0) = 0$.*

Supongamos que B es la subálgebra de $\mathcal{A}$ asociada a esa descomposición y que X es un B -módulo admisible. Considere la ditálgebra débil entrelazada $(\mathcal{A}^X, I^X)$ y el funtor asociado

$$F^X : (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}.$$

Supongamos que M es un S -módulo tal que existe un objeto $\overline{X \otimes_S M} \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ que tiene B -módulo subyacente $X \otimes_S M$, donde

$$b(x \otimes m) = bx \otimes m, \text{ para } b \in B, x \in X \text{ y } m \in M.$$

Entonces, existe un único objeto $\overline{M} \in (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$ con S -módulo subyacente M tal que $F^X(\overline{M}) = \overline{X \otimes_S M}$. Si $\varepsilon : X^ \otimes_B X \rightarrow S$ es la función evaluación y $\sigma : S \otimes_S M \rightarrow M$ es la función producto, entonces la acción $*$ de $\mathcal{A}^X$ en $\overline{M}$ está determinada por la acción $\circ$ de $\mathcal{A}$ en $X \otimes_S M$ por la fórmula:*

$$(\nu \otimes w \otimes x) * m := \sigma(\varepsilon \otimes 1)[\nu \otimes w \circ (x \otimes m)],$$

para $\nu \in X^, w \in W''_0, x \in X$ y $m \in M$.*

Demostración: La función evaluación está dada por $\epsilon(\nu \otimes x) = \nu(x)$ y, claramente, es un morfismo de S - S -bimódulos. Entonces la composición

$$W_0^X \otimes_S M = X^* \otimes_B BW_0'' B \otimes_B X \otimes_S M \xrightarrow{1 \otimes \circ} X^* \otimes_B X \otimes_S M \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} S \otimes_S M \xrightarrow{\sigma} M$$

determina una estructura de A^X -módulo $*$ en el S -módulo M . El correspondiente módulo es denotado por $\overline{M}$. Adoptamos la notación $\cdot$ para la estructura de A -módulo del objeto $F^X(\overline{M})$. Para probar que $F^X(\overline{M}) = \overline{X \otimes_S M}$ vamos a probar que $\cdot = \circ$.

Por hipótesis sabemos que, para $w \in W_0'$, se tiene $w \cdot (x \otimes m) = wx \otimes m = w \circ (x \otimes m)$. Para $w \in W_0''$, tenemos $w \circ (x \otimes m) = \sum_t x^t \otimes m^t$, con $x^t \in X$ y $m^t \in M$. Entonces:

$$\begin{aligned} w \cdot (x \otimes m) &= \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * m \\ &= \sum_i x_i \otimes \sigma(\epsilon \otimes 1)[\nu_i \otimes w \circ (x \otimes m)] \\ &= \sum_{i,t} x_i \otimes \nu_i(x^t) m^t \\ &= \sum_{i,t} x_i \nu_i(x^t) \otimes m^t \\ &= \sum_t x^t \otimes m^t. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\widehat{M}$ es otro objeto en $(A^X, I^X)\text{-Mod}$, con S -módulo subyacente M , tal que $F^X(\widehat{M}) = \overline{X \otimes_S M}$ y denotamos por $\otimes$ a su acción de A^X -módulo. Entonces para $\nu \in X^*, w \in W_0'', x \in X$ y $m \in M$, tenemos

$$\begin{aligned} (\nu \otimes w \otimes x) * m &= \sigma(\epsilon \otimes 1)[\nu \otimes w \circ (x \otimes m)] \\ &= \sigma(\epsilon \otimes 1)[\nu \otimes w \cdot (x \otimes m)] \\ &= \sigma(\epsilon \otimes 1)[\nu \otimes (\sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) \otimes m)] \\ &= \sum_i (\nu(x_i) \nu_i \otimes w \otimes x) \otimes m \\ &= (\nu \otimes w \otimes x) \otimes m. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\widehat{M} = \overline{M}$.

Resta mostrar que $I^X \widehat{M} = 0$. Para ello conviene notar lo siguiente:

Afirmación: Si $a \in \langle W_0 \rangle \subseteq A$, entonces

$$\sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes a \cdot (x \otimes m)) = \sigma_{\nu, x}(a) * m.$$

Por hipótesis, A actúa sobre $\overline{X \otimes_S M}$ con acción $\circ$. Por definición de F^X , A actúa sobre $F^X(\overline{M})$ con acción $\cdot$ dada por

$$a \cdot (x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x}(a) * m.$$

Ya hemos demostrado que $\cdot = 0$. En el caso de la afirmación se tiene:

$$\begin{aligned}
\sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes a \cdot (x \otimes m)) &= \sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes \sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x}(a) * m) \\
&= \sum_i \nu(x_i) \sigma_{\nu_i, x}(a) * m \\
&= \sigma_{\nu, x}(a) * m.
\end{aligned}$$

Ahora, si $h = a + b \in B \oplus \langle \underline{W}_0 \rangle$, con $h \in I$,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\nu, x}(h) * m &= \sigma_{\nu, x}(b)m + \sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes a \cdot (x \otimes m)) \\
&= \nu(bx)m + \sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes a \cdot (x \otimes m)) \\
&= \sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes (bx \otimes m)) + \sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes a \cdot (x \otimes m)) \\
&= \sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes (b + a) \cdot (x \otimes m)) \\
&= \sigma(\epsilon \otimes 1)(\nu \otimes h \cdot (x \otimes m)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pues $\overline{IX \otimes_S M} = 0$.

□

Corolario 2.4.3. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada, donde $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil con estratificación (R, W) , tal que hay una descomposición de R - R -bimódulos $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$, con $\delta(W'_0) = 0$.*

Supongamos que B es la subálgebra de $\mathcal{A}$ asociada a esa descomposición y que X es un B -módulo admisible. Considere la ditálgebra débil entrelazada $(\mathcal{A}^X, I^X)$ y el correspondiente funtor F^X . Entonces, para cualquier $N \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, isomorfo como B -módulo a algún B -módulo de la forma $X \otimes_S M$, para algún $M \in S\text{-Mod}$, tenemos $N \cong F^X(\underline{M})$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, para algún $\underline{M} \in (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$.

Demostración: La prueba se sigue del Lema anterior.

En efecto, si $N \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es tal que hay un isomorfismo de B -módulos $g^0 : X \otimes_S M \rightarrow N$, donde M es un S -módulo, entonces podemos transferir la estructura de A/I -módulo de N sobre $X \otimes_S M$ para obtener un A/I -módulo $\overline{X \otimes_S M}$, tal que $g^0 : \overline{X \otimes_S M} \rightarrow N$ es isomorfismo en $A/I\text{-Mod}$. Así, $\mathcal{L}(g^0) : \overline{X \otimes_S M} \rightarrow N$ es isomorfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Podemos ahora aplicar 2.4.2 para obtener $\overline{M} \in (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$ tal que $F^X(\overline{M}) = \overline{X \otimes_S M} \cong N$. □

2.5 Módulos admisibles triangulares

En esta sección estudiamos condiciones de triangularidad sobre un módulo admisible X que garantizan que $(\mathcal{A}^X, I^X)$ resulta una ditálgebra débil entrelazada triangular, cuando partimos de una ditálgebra débil entrelazada triangular $(\mathcal{A}, I)$.

Definición 2.5.1. Una filtración $\mathcal{F}(U)$ de R - S -bimódulos de longitud ℓ del R - S -bimódulo U , es una sucesión de R - S -subbimódulos.

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_{\ell-1} \subseteq U_\ell = U.$$

La **altura** asociada a la filtración de U es la función $\mathfrak{h} : U \rightarrow [0, \ell]$, definida por

$$\mathfrak{h}(u) = j \text{ si } u \in U_j \setminus U_{j-1}, \text{ para } j \in [1, \ell] \text{ y } \mathfrak{h}(0) = 0.$$

Por tanto, para $u \in U$, tendremos $\mathfrak{h}(u) \leq t$ syss $u \in U_t$. La filtración se llamará **aditiva derecha** (respectivamente **aditiva izquierda**) syss como S -módulo derecho (respectivamente como R -módulo izquierdo) U_j es un sumando directo de U_{j+1} para todo j . Se llama **aditiva** si U_j es sumando directo de U_{j+1} como un R - S -bimódulo para todo j .

Una familia de generadores $Z = \{u_i \mid i \in I\}$ del S -módulo derecho U se llama **compatible con la filtración** $\mathcal{F}(U)$ syss cada S -módulo derecho U_j está generado por $Z \cap U_j$ para todo $j \in [0, \ell]$.

Definición 2.5.2. Supongamos que tenemos una filtración $\mathcal{F}(U)$ de R - S -bimódulos de longitud ℓ del R - S -bimódulo U ,

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_{\ell-1} \subseteq U_\ell = U.$$

Entonces la **filtración dual** $\mathcal{F}(U)^*$ de $\mathcal{F}(U)$ es la siguiente filtración de S - R -bimódulos.

$$0 = [U^*]_0 \subseteq [U^*]_1 \subseteq \cdots \subseteq [U^*]_{\ell-1} \subseteq [U^*]_\ell = U^*,$$

donde $[U^*]_j := \{\lambda \in U^* \mid \lambda(U_{\ell-j}) = 0\}$.

Definición 2.5.3. Supongamos que tenemos una filtración $\mathcal{F}(U)$ de R - S -bimódulos de longitud ℓ del R - S -bimódulo U ,

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_{\ell-1} \subseteq U_\ell = U.$$

Si U es proyectivo finitamente generado como S -módulo derecho, una base dual finita $\{(u_i, \lambda_i) \mid i \in I\}$ para U es **compatible con la filtración** syss $\mathfrak{h}(u_i) + \mathfrak{h}(\lambda_i) = \ell + 1$ para toda i .

Aquí, la altura de cada u_i es tomada relativa a la filtración dada $\mathcal{F}(U)$ y la altura de cada λ_i es tomada relativa a la filtración $\mathcal{F}(U)^*$.

Lema 2.5.4. Supongamos que tenemos una filtración aditiva derecha $\mathcal{F}(U)$ de R - S -bimódulos de longitud ℓ del R - S -bimódulo U ,

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_{\ell-1} \subseteq U_\ell = U.$$

Supongamos que el S -módulo U es proyectivo finitamente generado. Entonces U_S admite una base dual finita compatible con $\mathcal{F}(U)$. Esta se construye como sigue: por hipótesis, tenemos descomposiciones de S -módulos derechos

$$U_j = T_j \oplus \cdots \oplus T_1, \text{ donde } U_j = U_{j-1} \oplus T_j.$$

Consideramos, para cada j , la proyección canónica $\phi_j : U \rightarrow T_j$ y consideramos una base dual $\{(u_i, \lambda_i) \mid i \in I(j)\}$ del S -módulo derecho proyectivo T_j (con $u_i \neq 0$ y $\lambda_i \neq 0$ para toda i). Denotaremos por $\hat{\lambda}_i = \lambda_i \phi_j$ para cada $i \in I(j)$. Por tanto $u_i \in U$ y $\hat{\lambda}_i \in U^*$, para $i \in I(j)$. Si tomamos $I = \bigcup_{j \in [1, \ell]} I(j)$, entonces $\{(u_i, \hat{\lambda}_i) \mid i \in I\}$ es una base dual finita para U_S compatible con $\mathcal{F}(U)$.

Demostración: Dado $u \in U$, tenemos $u = \sum_{j \in [1, \ell]} v_j$, $v_j \in T_j$. Entonces,

$$u = \sum_{j \in [1, \ell]} \left(\sum_{i \in I(j)} u_i \lambda_i(v_j) \right) = \sum_{j \in [1, \ell]} \sum_{i \in I(j)} u_i \widehat{\lambda}_i(u)$$

Por tanto $\{(u_i, \widehat{\lambda}_i) \mid i \in I\}$ es una base dual para U . Ahora fijemos $i \in I$ y consideremos j tal que, $i \in I(j)$, entonces $\mathfrak{h}(u_i) = j$. Necesitamos probar que $\mathfrak{h}(\widehat{\lambda}_i) = \ell + 1 - j$. Dado que $\widehat{\lambda}_i = \lambda_i \phi_j$, tenemos que

$$\widehat{\lambda}_i(U_{j-1}) = \widehat{\lambda}_i(T_1 \oplus \cdots \oplus T_{j-1}) = 0.$$

Dado que $\lambda_i \neq 0$, $\widehat{\lambda}_i(U_j) = \lambda_i(T_j) \neq 0$. Tomando, $t := \ell + 1 - j$ hemos visto que $\widehat{\lambda}_i(U_{\ell-t}) = 0$, pero $\widehat{\lambda}_i(U_{\ell-t+1}) \neq 0$, entonces $\widehat{\lambda}_i \in [U^*]_t \setminus [U^*]_{t-1}$. Por tanto $\mathfrak{h}(\widehat{\lambda}_i) = t = \ell + 1 - j$. $\square$

Lema 2.5.5. *Supongamos que tenemos una filtración de R - S -bimódulos $\mathcal{F}(U)$ del R - S -bimódulo U . Supongamos que U_S admite una base dual finita $\{(u_i, \lambda_i) \mid i \in I\}$ compatible con $\mathcal{F}(U)$. Entonces,*

- $\{u_i \mid i \in I\}$ es una familia de generadores derechos de U compatible con $\mathcal{F}(U)$
- $\{\lambda_i \mid i \in I\}$ es una familia de generadores izquierdos de U^* compatible con $\mathcal{F}(U^*)$

Demostración: Tenemos nuestras filtraciones $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}(U)^*$, con longitud ℓ :

$$0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_{\ell-1} \subseteq U_\ell = U$$

y

$$0 = [U^*]_0 \subseteq [U^*]_1 \subseteq \cdots \subseteq [U^*]_{\ell-1} \subseteq [U^*]_\ell = U^*.$$

De nuestras hipótesis, $\mathfrak{h}(u_i) + \mathfrak{h}(\lambda_i) = \ell + 1$ para toda $i \in I$. Probemos las siguientes afirmaciones para $i \in I$ fijo:

- Si $u \in U$ satisface que $\mathfrak{h}(u) < \mathfrak{h}(u_i)$, entonces $\lambda_i(u) = 0$.
- Si $\lambda \in U^*$ satisface que $\mathfrak{h}(\lambda) < \mathfrak{h}(\lambda_i)$, entonces $\lambda(u_i) = 0$.

Supongamos que $\mathfrak{h}(\lambda_i) = j$, entonces λ_i está en $[U^*]_j \setminus [U^*]_{j-1}$, lo cual nos dice que

$$\lambda_i(U_{\ell-j}) = 0 \text{ y } \lambda_i(U_{\ell-j+1}) \neq 0.$$

Dado que $j = \mathfrak{h}(\lambda_i) = \ell + 1 - \mathfrak{h}(u_i)$, entonces $\lambda_i(U_{\mathfrak{h}(u_i)-1}) = 0$. Pero U_t consiste de todos los elementos u en U con $\mathfrak{h}(u) \leq t$. En particular, si $u \in U$ y satisface $\mathfrak{h}(u) < \mathfrak{h}(u_i)$, entonces $\lambda_i(u) = 0$.

Para el otro punto, supongamos que $\mathfrak{h}(\lambda) = j$, entonces λ está en $[U^*]_j$ y $\lambda(U_{\ell-j}) = 0$. Ahora $\mathfrak{h}(\lambda) < \mathfrak{h}(\lambda_i)$, nos implica

$$\mathfrak{h}(u_i) = \ell + 1 - \mathfrak{h}(\lambda_i) \leq \ell - \mathfrak{h}(\lambda) = \ell - j$$

y por tanto $\lambda(u_i) = 0$.

Sabemos que $\{u_i \mid i \in I\}$ generan el S -módulo derecho U . Denotemos por I^j al conjunto de

índices $i \in I$, con $u_i \in U_j$, para $j \in [0, \ell]$.

Para probar el primer punto del Lema, hay que probar que cada U_j es generado como S -módulo derecho por $\{u_i \mid i \in I^j\}$. Si $u \in U_j$, como tenemos una base dual derecha para U , de las afirmaciones anteriores tenemos

$$u = \sum_i u_i \lambda_i(u) = \sum_{i \in I \mid \mathfrak{h}(u_i) \leq \mathfrak{h}(u) \leq j} u_i \lambda_i(u) = \sum_{i \in I^j} u_i \lambda_i(u).$$

También sabemos que $\{\lambda_i \mid i \in I\}$ generan el S -módulo izquierdo U^* . Denotemos por I^j al conjunto de índices $i \in I$, con $\lambda_i \in [U^*]_j$, para $j \in [0, \ell]$.

Para probar el segundo punto del Lema hay que probar que cada $[U^*]_j$ es generado como S -módulo izquierdo por $\{\lambda_i \mid i \in I^j\}$. Si $\lambda \in [U^*]_j$, de las afirmaciones anteriores tenemos

$$\lambda = \sum_i \lambda(u_i) \lambda_i = \sum_{i \in I \mid \mathfrak{h}(\lambda_i) \leq \mathfrak{h}(\lambda) \leq j} \lambda(u_i) \lambda_i = \sum_{i \in I^j} \lambda(u_i) \lambda_i.$$

□

Definición 2.5.6. Si X es un B -módulo admisible y (S, P) es el par divisor asociado a $\Gamma = \text{End}_B(X)^{\text{op}}$, decimos que X es **triangular** sys

- (1) Tenemos una filtración aditiva derecha de S - S -subbimódulos de P :
 $0 = P^{(\ell_P+1)} \subseteq P^{(\ell_P)} \subseteq \dots \subseteq P^{(1)} = P$ tal que $P^{(i)} P^{(j)} \subseteq P^{(i+j)}$ para toda $i, j \in [1, \ell_P]$,
con $i + j \leq \ell_P$ y $P^{(i)} P^{(j)} = 0$ en otro caso.
- (2) Tenemos una filtración aditiva derecha de B - S -subbimódulos de X :
 $\mathcal{F}(X) : 0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_{\ell_X-1} \subseteq X_{\ell_X} = X$ tal que $X_j P \subseteq X_{j-1}$, para toda $j \in [1, \ell_X]$.

Lema 2.5.7. Sea X un B -módulo admisible y (S, P) es el par divisor asociado a $\Gamma = \text{End}_B(X)^{\text{op}}$. Si ordenamos la sucesión de S - S -subbimódulos de P dados en la definición anterior, tomando $P_j := P^{(\ell_P-j+1)}$ para toda $j \in [0, \ell_P]$, obtenemos una filtración de S - S -bimódulos aditiva derecha:

$$\mathcal{F}(P) : 0 = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots \subseteq P_{\ell_P-1} \subseteq P_{\ell_P} = P.$$

Consideremos una base dual $\{(x_i, \nu_i) \mid i \in I\}$ para el S -módulo X compatible con la filtración $\mathcal{F}(X)$ y una base dual $\{(p_j, \gamma_j) \mid j \in J\}$ para el S -módulo P compatible con la filtración $\mathcal{F}(P)$. Considerando las alturas asociadas a las filtraciones $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{F}(X)^*$ y $\mathcal{F}(P)^*$ tenemos:

- (1) $\mathfrak{h}(xp) < \mathfrak{h}(x)$ para $0 \neq x \in X$ y $p \in P$.
- (2) Si $\nu(x_i p) \neq 0$, entonces $\mathfrak{h}(\nu_i) < \mathfrak{h}(\nu)$ para toda $i \in I, p \in P$ y $\nu \in X^*$.
- (3) Si $\gamma(p_i p_j) \neq 0$, entonces $\mathfrak{h}(\gamma_i) + \mathfrak{h}(\gamma_j) \leq \mathfrak{h}(\gamma)$ para cualquier $\gamma \in P^*$ e $i, j \in I$.

Demostración: Notemos que si $x \neq 0$, entonces $\mathfrak{h}(x) \neq 0$.

- (1) Sean $x \in X$ y $p \in P$. Recordemos que $\mathfrak{h}(x) = j$ syss $x \in X_j \setminus X_{j-1}$ y $X_j P \subseteq X_{j-1}$. Por tanto $\mathfrak{h}(xp) < \mathfrak{h}(x)$.
- (2) Supongamos que $r = \mathfrak{h}(\nu)$ y $\nu(x_i p) \neq 0$. Si $x_i \in X_{\ell_X - r + 1}$, entonces $x_i p \in X_{\ell_X - r}$ y entonces usando que $\nu \in [X^*]_r$, obtenemos que $\nu(x_i p) = 0$ lo cual es una contradicción. Entonces $\mathfrak{h}(x_i) > \ell_X - r + 1$. Dado que la base dual de X es compatible con la filtración, esto es equivalente a que $\mathfrak{h}(\nu_i) < r$.
- (3) Si $m = \mathfrak{h}(\gamma)$ y $\gamma(p_i p_j) \neq 0$. Dado que $\gamma \in [P^*]_m$, $p_i p_j \notin P_{\ell_P - m}$ entonces, $\ell_P - m + 1 \leq \mathfrak{h}(p_i p_j)$. Tomando $\mathfrak{h}(p_i) = u$ y $\mathfrak{h}(p_j) = v$. Entonces

$$p_i p_j \in P_u P_v = P^{(\ell_P - u + 1)} P^{(\ell_P - v + 1)} \subseteq P^{(2\ell_P - u - v + 2)} = P_{u+v-\ell_P-1}.$$

Como la base dual de P es compatible con la filtración $\mathcal{F}(P)$, tenemos las igualdades $u = \ell_P + 1 - \mathfrak{h}(\gamma_i)$ y $v = \ell_P + 1 - \mathfrak{h}(\gamma_j)$. Entonces,

$$\ell_P - m + 1 \leq \mathfrak{h}(p_i p_j) \leq u + v - \ell_P - 1 = \ell_P + 1 - \mathfrak{h}(\gamma_i) - \mathfrak{h}(\gamma_j).$$

Por tanto $\mathfrak{h}(\gamma_i) + \mathfrak{h}(\gamma_j) \leq m$.

□

Definición 2.5.8. Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil triangular entrelazada, con $\mathcal{A} = (T, \delta)$. Entonces, tenemos una filtración de R - R -bimódulos

$$\mathcal{F}(W_0) : 0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \cdots \subseteq W_0^{\ell_0} = W_0 \text{ tal que } \delta(W_0^{s+1}) \subseteq A_s W_1 A_s$$

para toda $s \in [0, \ell_0 - 1]$, donde A_s denota la R -subálgebra de A generada por W_0^s . Existe también una filtración de R - R -subbimódulos

$$\mathcal{F}(W_1) : 0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq \cdots \subseteq W_1^{\ell_1} = W_1 \text{ tal que } \delta(W_1^{s+1}) \subseteq A W_1^s A W_1^s A + I V^2 + V^2 I + V I V, \text{ para toda } s \in [0, \ell_1 - 1].$$

Sea B la subálgebra de $\mathcal{A}$ asociada a la descomposición de R - R -bimódulos $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$. Decimos que B es la **subálgebra inicial** de $(\mathcal{A}, I)$ syss $W'_0 = W_0^1$.

Lema 2.5.9. Sea B la subálgebra inicial de la ditálgebra débil triangular entrelazada $(\mathcal{A}, I)$ con estratificación (R, W) como en la definición anterior. Entonces, si denotamos por $[W_0'']^s = W_0'' \cap W_0^{1+s}$ para toda $s \in [0, \ell_0 - 1]$, obtenemos una filtración de R - R -bimódulos

$$\mathcal{F}(W_0'') : 0 = [W_0'']^0 \subseteq \cdots \subseteq [W_0'']^{\ell_0-1} = W_0''$$

que satisface $W_0^{1+s} = W'_0 \oplus [W_0'']^s$, para toda $s \in [0, \ell_0 - 1]$.

Demostración: Claramente, se tiene una filtración de R - R -bimódulos

$$0 = [W_0'']^0 \subseteq \cdots \subseteq [W_0'']^{\ell_0-1} = W_0'',$$

resta mostrar que $W_0^{1+s} = W_0' \oplus [W_0'']^s$, para toda $s \in [0, \ell_0 - 1]$.

Para esto hay que notar que $W_0', [W_0'']^s \subseteq W_0^{1+s}$ para cada $s \in [0, \ell_0 - 1]$; además, la suma $W_0' + [W_0'']^s$ es directa gracias a que $W_0 = W_0' \oplus W_0''$. Para la otra contención hay que notar que si $w \in W_0^{1+s} \subseteq W_0^1 \oplus W_0''$, se tiene $w = w_1 + w_2$, donde $w_1 \in W_0^1$ y $w_2 \in W_0''$. Pero $w_2 = w - w_1 \in W_0^{1+s}$, con lo cual ya tenemos que $W_0^{1+s} = W_0' \oplus [W_0'']^s$. $\square$

Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil triangular entrelazada y adoptemos la notación de 2.5.8

Teorema 2.5.10. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil triangular entrelazada, donde $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es una ditálgebra débil con estratificación (R, W) . Sea B la subálgebra inicial de $\mathcal{A}$ asociada a la descomposición $W_0 = W_0' \oplus W_0''$. Si X es un B -módulo admisible triangular, entonces la ditálgebra débil entrelazada $(\mathcal{A}^X, I^X)$ es triangular.*

Demostración: Primero nos ocuparemos en construir las filtraciones de W_0^X y W_1^X . Note que las filtraciones $\mathcal{F}(W_0'')$ y $\mathcal{F}(W_1)$ determinan filtraciones:

- $\mathcal{F}(W_0) : 0 = \underline{W}_0^0 \subseteq \underline{W}_0^1 \subseteq \cdots \subseteq \underline{W}_0^{\ell_0} = \underline{W}_0$, donde $\underline{W}_0^s := B[W_0'']^s B$, para todo $s \in [0, \ell_0 - 1]$.
- $\mathcal{F}(W_1) : 0 = \underline{W}_1^0 \subseteq \underline{W}_1^1 \subseteq \cdots \subseteq \underline{W}_1^{\ell_1} = \underline{W}_1$, donde $\underline{W}_1^t := BW_1^t B$, para todo $t \in [0, \ell_1]$.

Considere la filtración de S - S -bimódulos

$$\mathcal{F}(P) : 0 = P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_{\ell_P-1} \subseteq P_{\ell_P} = P$$

y la filtración de B - S -bimódulos

$$\mathcal{F}(X) : 0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{\ell_X-1} \subseteq X_{\ell_X} = X,$$

como en 2.5.7.

Para $m \in [0, 2\ell_X\ell_0]$, consideremos el conjunto

$$[\mathcal{G}_0^X]^m := \{\nu \otimes \underline{w} \otimes x \in X^* \otimes_B \underline{W}_0 \otimes_B X \mid \mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(\underline{w}) + \mathfrak{h}(x) \leq m\},$$

donde las alturas se toman con respecto a las filtraciones $\mathcal{F}(X)^*$, $\mathcal{F}(\underline{W}_0)$ y $\mathcal{F}(X)$, respectivamente.

Para $m \in [0, 2\ell_X(\ell_1 + 1)]$, consideremos el conjunto

$$[\mathcal{G}_1^X]^m := \{\nu \otimes \underline{w} \otimes x \in X^* \otimes_B \underline{W}_1 \otimes_B X \mid \mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(\underline{w}) + \mathfrak{h}(x) \leq m\},$$

donde las alturas se toman con respecto a las filtraciones $\mathcal{F}(X)^*$, $\mathcal{F}(\underline{W}_1)$ y $\mathcal{F}(X)$, respectivamente.

Para $m \in [0, 2\ell_X\ell_0]$, consideremos el S - S -subbimódulo de W_0^X :

$$[W_0^X]^m := \langle [\mathcal{G}_0^X]^m \rangle.$$

Para $m \in [0, \ell_P]$, tomamos

$$[W_1^X]^m := [P^*]_m.$$

Para $m \in [0, 2\ell_X(\ell_1 + 1)]$, consideremos el S - S -subbimódulo de W_1^X .

$$[W_1^X]^{\ell_P+m} := \langle [\mathcal{G}_1^X]^m \rangle \oplus P^*.$$

Claramente se tiene:

$$0 = [W_0^X]^0 \subseteq \dots \subseteq [W_0^X]^{2\ell_X\ell_0} = W_0^X$$

y

$$0 = [W_1^X]^0 \subseteq \dots \subseteq [W_1^X]^{\ell_P+2\ell_X(\ell_1+1)} = W_1^X.$$

Observemos que

$$[\mathcal{G}_0^X]^0 = 0 = [\mathcal{G}_0^X]^1 \text{ y } [\mathcal{G}_1^X]^0 = 0 = [\mathcal{G}_1^X]^1$$

pues si $\gamma \otimes \underline{w} \otimes x \in [\mathcal{G}_r^X]^1$, con $r \in \{0, 1\}$, entonces $h(\gamma) = 0$ ó $h(x) = 0$. Por lo tanto, $\nu = 0$ ó $x = 0$ y, de allí, que $\nu \otimes \underline{w} \otimes x = 0$.

Entonces, se tiene

$$[W_0^X]^0 = [W_0^X]^1 \text{ y } [W_1^X]^{\ell_P} = [W_1^X]^{\ell_P+1}.$$

Primero hay que notar que el S - S -bimódulo $[W_0^X]^m$ está generado por los elementos $\nu \otimes w \otimes x$ tales que $\nu \in X^*$, $w \in W_0''$ y $x \in X$ tales que $\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X\mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) \leq m$.

En efecto, cualquier elemento de $[W_0^X]^m$ es una suma finita de elementos de la forma $\nu \otimes \underline{w} \otimes x$, con $\nu \in [X^*]_r$, $\underline{w} \in B[W_0'']^s B$ y $x \in X_t$, con $r + 2\ell_X s + t \leq m$. Pero $\underline{w} = \sum_q b_q w_q b'_q$, con $w_q \in [W_0'']^s$ y $b_q, b'_q \in B$. Entonces $\nu \otimes \underline{w} \otimes x = \sum_q \nu b_q \otimes w_q \otimes b'_q x$, donde

$$\mathfrak{h}(\nu b_q) \leq \mathfrak{h}(\nu) \leq r, \mathfrak{h}(w_q) \leq s \text{ y } \mathfrak{h}(b'_q x) \leq \mathfrak{h}(x) \leq t.$$

Por tanto, $\mathfrak{h}(\nu b_q) + 2\ell_X\mathfrak{h}(w_q) + \mathfrak{h}(b'_q x) \leq m$.

Similarmente, $[W_1^X]^m$ está generado, para $m > \ell_P$ como S - S -bimódulo por P^* y los elementos $\nu \otimes w \otimes x$, con $\nu \in X^*$, $w \in W_1$ y $x \in X$ tales que $\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X\mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) \leq m$.

Para poder manejar la comultiplicación μ y las funciones λ y ρ involucradas en la definición de la derivación δ^X , fijamos bases duales de X y P que sean compatibles con las filtraciones $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{F}(P)$ respectivamente (como en 2.5.7).

Caso 1 Demostremos que $\delta^X([W_0^X]^{m+1}) \subseteq A_m^X W_1^X A_m^X$, donde A_m^X es la subálgebra de A^X generada por S y $[W_0^X]^m$, para cada $m \in [0, 2\ell_X\ell_0 - 1]$.

Elijamos un generador $\nu \otimes w \otimes x$ de $[W_0^X]^{m+1}$ como especificamos antes. Esto es, donde $\nu \in X^*$, $w \in W_0''$, $x \in X$ y $\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X\mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) \leq m + 1$. Deseamos probar que cada sumando de

$$\delta^X(\nu \otimes w \otimes x) = \lambda(\nu) \otimes w \otimes x + \sigma_{\nu, x}(\delta(w)) - \nu \otimes w \otimes \rho(x)$$

está en $A_m^X W_1^X A_m^X$. Podemos suponer que ν, w y x no son cero.

Entonces, de la desigualdad $\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) \leq m+1$, obtenemos que $2\ell_X \mathfrak{h}(w) < m+1$. Dado que $\lambda(\nu) = \sum_{i,j} \nu(x_i p_j) \gamma_j \otimes \nu_i$, el primer sumando

$$\sum_{i,j} \nu(x_i p_j) \gamma_j \otimes \nu_i \otimes w \otimes x \in P^*[W_0^X]^m \subseteq W_1^X A_m^X,$$

debido a que $\mathfrak{h}(\nu_i) + 2\ell_X \mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) < \mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) \leq m+1$ siempre que $\nu(x_i p_j) \neq 0$, por 2.5.7.

De manera similar, obtendremos que el sumando

$$-\nu \otimes w \otimes \rho(x) = -\sum_j \nu \otimes w \otimes x p_j \otimes \gamma_j \in A_m^X W_1^X.$$

Denotemos por $\underline{A}_s$ la subálgebra de A generada por B y $[W_0'']^s$, para $s \in [0, \ell_0 - 1]$. Entonces la subálgebra A_{s+1} de A generada por R y W_0^{s+1} coincide con $\underline{A}_s$. **En efecto:** Por construcción, los generadores de cada una de estas álgebras están contenidos en la otra. Ahora, la condición de triangularidad para W_0 implica

$$\delta([W_0'']^{s+1}) \subseteq \delta(W_0^{s+2}) \subseteq A_{s+1} W_1 A_{s+1} = \underline{A}_s W_1 \underline{A}_s \text{ para todo } s.$$

Aplicamos lo anterior a $s := \mathfrak{h}(w) - 1$. Como $\mathfrak{h}(w) = s + 1$, tenemos $w \in [W_0'']^{s+1}$. Por lo anterior, podemos escribir $\delta(w) = \sum_q a_q w_q a'_q$, con $a_q, a'_q \in \underline{A}_s$ y $w_q \in W_1$. Entonces,

$$\sigma_{\nu,x}(\delta(w)) = \sum_q \sum_{i,j} \sigma_{\nu,x_i}(a_q) \sigma_{\nu_i,x_j}(w_q) \sigma_{\nu_j,x}(a'_q),$$

donde $\sigma_{\nu_i,x_j}(w_q) \in W_1^X$. Para concluir que $\sigma_{\nu,x}(\delta(w)) \in A_m^X W_1^X A_m^X$, probaremos que $\sigma_{\nu,x}(a) \in A_m^X$ para toda $a \in \underline{A}_s$.

Podemos asumir que $a = b_0 w_1 b_1 w_2 \cdots b_{n-1} w_n b_n$, con $b_i \in B$ y $w_j \in [W_0'']^s$, entonces $\sigma_{\nu,x}(a)$ es una suma de productos de la forma $\sigma_{\nu_i,x_j}(b \widehat{w} b')$, con $i, j \in I$ y $b, b' \in B$ y $\widehat{w} \in [W_0'']^s$. De nuevo,

$$\sigma_{\nu_i,x_j}(b \widehat{w} b') = \nu_i b \otimes \widehat{w} \otimes b' x_j$$

y, como $\mathfrak{h}(w) = s + 1 > s \geq \mathfrak{h}(\widehat{w})$, tendremos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(\nu_i b) + 2\ell_X \mathfrak{h}(\widehat{w}) + \mathfrak{h}(b' x_j) &\leq \mathfrak{h}(\nu_i) + 2\ell_X \mathfrak{h}(\widehat{w}) + \mathfrak{h}(x_j) \\ &\leq 2\ell_X + 2\ell_X \mathfrak{h}(\widehat{w}) \\ &= 2\ell_X (\mathfrak{h}(\widehat{w}) + 1) \\ &\leq 2\ell_X \mathfrak{h}(w) \\ &< m + 1 \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\nu_i b \otimes \widehat{w} \otimes b' x_j \in [W_0^X]^m$.

Caso 2: Supongamos que $\gamma \in P^* \cap [W_1^X]^{m+1}$, con $m \in [\ell_P, \ell_P + 2\ell_X(\ell_1 + 1) - 1]$, hay que mostrar que $\delta^X(\gamma) = \mu(\gamma) \in A^X [W_1^X]^m A^X [W_1^X]^m A^X + I^X (V^X)^2 + (V^X)^2 I^X + V^X I^X V^X$.

Sabemos que $\mu(\gamma) = \sum_{i,j} \gamma(p_i p_j) \gamma_j \otimes \gamma_i$. Entonces, tenemos que

$$P^* \subseteq [W_1^X]^m \text{ y } \mu(\gamma) \in P^*P^* \subseteq A^X[W_1^X]^m A^X[W_1^X]^m A^X.$$

Si $m \in [0, \ell_P - 1]$, tenemos $\gamma \in [W_1^X]^{m+1} = [P^*]_{m+1}$, del lema anterior tenemos $\gamma(p_i p_j) \neq 0$ implica que

$$\mathfrak{h}(\gamma_i) + \mathfrak{h}(\gamma_j) \leq \mathfrak{h}(\gamma) \leq m + 1 \text{ y } \mathfrak{h}(\gamma_i), \mathfrak{h}(\gamma_j) \text{ son ambos menores que } m.$$

$$\text{Entonces } \mu(\gamma) \in [P^*]_m [P^*]_m \subseteq A^X[W_1^X]^m A^X[W_1^X]^m A^X.$$

$$\text{Por tanto, } \delta^X(\gamma) = \mu(\gamma) \in A^X[W_1^X]^m A^X[W_1^X]^m A^X + I^X(V^X)^2 + (V^X)^2 I^X + V^X I^X V^X.$$

Caso 3 Finalmente, probaremos que

$$\delta^X([W_1^X]^{m+1}) \subseteq A^X[W_1^X]^m A^X[W_1^X]^m A^X + I^X(V^X)^2 + (V^X)^2 I^X + V^X I^X V^X,$$

para toda $m \in [0, \ell_P + 2\ell_X(\ell_1 + 1) - 1]$.

Note que para $m \in [0, \ell_P - 1]$ el Caso 3 se sigue del Caso 2. Como $[W_1^X]^{\ell_P} = [W_1^X]^{\ell_P+1}$, el caso $m = \ell_P$ también se tiene por lo anterior.

Entonces supongamos que $m \in [\ell_P + 1, \ell_P + 2\ell_X(\ell_1 + 1) - 1]$, entonces de nuevo del Caso 2 es suficiente elegir un generador $\nu \otimes w \otimes x$ de $[W_1^X]^{m+1}$ con $x \in X, w \in W_1$ y $\nu \in X^*$, con $\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) \leq m + 1$. Deseamos probar que cada sumando de

$$\delta^X(\nu \otimes w \otimes x) = \lambda(\nu) \otimes w \otimes x + \sigma_{\nu, x}(\delta(w)) + \nu \otimes w \otimes \rho(x)$$

está en $A^X[W_1^X]^m A^X[W_1^X]^m A^X + I^X(V^X)^2 + (V^X)^2 I^X + V^X I^X V^X$. Dado que $\lambda(\nu) = \sum_{i,j} \nu(x_i p_j) \gamma_j \otimes \nu_i$, el primer sumando

$$\sum_{i,j} \nu(x_i p_j) \gamma_j \otimes \nu_i \otimes w \otimes x \in P^*[W_1^X]^m \subseteq A^X[W_1^X]^m A^X[W_1^X]^m A^X,$$

debido a que $\mathfrak{h}(\nu_i) + 2\ell_X \mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) < \mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) \leq m + 1$ siempre que $\nu(x_i p_j) \neq 0$.

De manera similar, obtendremos que el sumando

$$\nu \otimes w \otimes \rho(x) = \sum_j \nu \otimes w \otimes x p_j \otimes \gamma_j \in [W_1^X]^m P^* \subseteq A^X[W_1^X]^m A^X[W_1^X]^m A^X,$$

debido a que $\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x p_j) < \mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(w) + \mathfrak{h}(x) \leq m + 1$ siempre que $x \neq 0$.

Supongamos que x, w y ν son no cero y pongamos $s := \mathfrak{h}(w) - 1$, tenemos que gracias a que x y ν son no cero, $2\ell_X \mathfrak{h}(w) < m + 1$. Por la hipótesis de triangularidad, como $w \in W_1^{s+1}$, podemos escribir

$$\delta(w) = \sum_q a_q u_q b_q v_q c_q + d_q w_q^{1,1} w_q^{1,2} + w_q^{2,1} w_q^{2,2} e_q + w_q^{3,1} m_q w_q^{3,2},$$

donde $a_q, b_q, c_q \in A$, $u_q, v_q \in W_1^s$, $d_q, e_q, m_q \in I$ y $w_q^{z,1}, w_q^{z,2} \in V$, con $z = 1, 2, 3$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu, x}(\delta(w)) &= \sum_{i,j,r,t} \sigma_{\nu, x_i}(a_q) \sigma_{\nu_i, x_j}(u_q) \sigma_{\nu_j, x_r}(b_q) \sigma_{\nu_r, x_t}(v_q) \sigma_{\nu_t, x}(c_q) + \sum_{i,j} \sigma_{\nu, x_i}(d_q) \sigma_{\nu_i, x_j}(w_q^{1,1}) \sigma_{\nu_j, x}(w_q^{1,2}) \\ &+ \sum_{i,j} \sigma_{\nu, x_i}(w_q^{2,1}) \sigma_{\nu_i, x_j}(w_q^{2,2}) \sigma_{\nu_j, x}(e_q) + \sum_{i,j} \sigma_{\nu, x_i}(w_q^{3,1}) \sigma_{\nu_i, x_j}(m_q) \sigma_{\nu_j, x}(w_q^{3,2}), \end{aligned}$$

donde

$$\sigma_{\nu, x_i}(a_q), \sigma_{\nu_j, x_r}(b_q), \sigma_{\nu_t, x}(c_q) \in A^X,$$

$$\sigma_{\nu, x_i}(d_q), \sigma_{\nu_j, x}(e_q), \sigma_{\nu_i, x_j}(m_q) \in I^X$$

y

$$\sigma_{\nu_i, x_j}(w_q^{1,1}), \sigma_{\nu_j, x}(w_q^{1,2}), \sigma_{\nu, x_i}(w_q^{2,1}), \sigma_{\nu_i, x_j}(w_q^{2,2}), \sigma_{\nu, x_i}(w_q^{3,1}), \sigma_{\nu_j, x}(w_q^{3,2}) \in V^X.$$

Para concluir que $\sigma_{\nu, x}(\delta(w)) \in A^X[W_1^X]^m A^X[W_1^X]^m A^X$, probaremos que $\sigma_{\nu', x'}(u) \in [W_1^X]^m$ para toda $u \in W_1^s, \nu' \in X^*$ y $x' \in X$. Sabemos que $\mathfrak{h}(u) \leq s < s+1 = \mathfrak{h}(w)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(\nu') + 2\ell_X \mathfrak{h}(u) + \mathfrak{h}(x') &\leq 2\ell_X + 2\ell_X \mathfrak{h}(u) \\ &= 2\ell_X(\mathfrak{h}(u) + 1) \\ &\leq 2\ell_X \mathfrak{h}(w) \\ &< m+1 \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\sigma_{\nu', x'}(u) = \nu' \otimes u \otimes x' \in [W_1^X]^m$, como deseábamos.

Por 2.4.1, $(\mathcal{A}^X, I^X)$ es ditálgebra débil entrelazada. Vamos a mostrar que el ideal I^X de A^X es un ideal $\mathcal{A}^X$ -triangular.

De nuestra hipótesis, tenemos una filtración de espacios vectoriales

$$0 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_\ell = I, \text{ tal que } \delta(H_i) \subseteq AH_{i-1}V + VH_{i-1}A \text{ para } i \in [1, \ell].$$

Entonces, tenemos la siguiente filtración de espacios vectoriales

$$0 = H_0^X \subseteq H_1^X \subseteq \cdots \subseteq H_{2\ell_X(\ell+1)}^X \subseteq I^X,$$

donde cada espacio H_m^X es generado por el conjunto

$$\{\sigma_{\nu, x}(h) \mid \nu \in X^*, h \in I, x \in X \text{ con } \mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(h) + \mathfrak{h}(x) \leq m\}$$

y las alturas son tomadas relativas a las filtraciones de X^*, I y X . Veamos que

$$\delta^X(H_m^X) \subseteq A^X H_{m-1}^X V^X + V^X H_{m-1}^X A^X \text{ para } m \in [1, 2\ell_X(\ell+1)].$$

Dado que $h \in H \subseteq A$ tiene grado 0, entonces para $\nu \in X^*, h \in H$ y $x \in X$ tales que

$$\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(h) + \mathfrak{h}(x) \leq m,$$

se tiene, de 2.3.8,

$$\delta^X(\sigma_{\nu, x}(h)) = \sigma_{\lambda(\nu), x}(h) + \sigma_{\nu, x}(\delta(h)) - \sigma_{\nu, \rho(x)}(h).$$

Como $\lambda(\nu) = \sum_{i,j} \nu(x_i p_j) \gamma_j \otimes \nu_i$, entonces por 2.3.6 (2) el primer sumando es

$$\sum_{i,j} \nu(x_i p_j) \gamma_j \sigma_{\nu_i, x}(h) \in P^* H_{m-1}^X \subseteq V^X H_{m-1}^X,$$

pues tenemos que

$$\mathfrak{h}(\nu_i) + 2\ell_X \mathfrak{h}(h) + \mathfrak{h}(x) < \mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(h) + \mathfrak{h}(x) \leq m \text{ cuando } \nu(x_i p_j) \neq 0.$$

Ahora, dado que $\rho(x) = \sum_j xp_j \otimes \gamma_j$, tenemos por 2.3.6 (2), que el tercer sumando es

$$-\sum_j \sigma_{\nu, xp_j}(h) \gamma_j \in H_{m-1}^X P^* \subseteq H_{m-1}^X V^X,$$

debido a que

$$\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(h) + \mathfrak{h}(xp_j) < \mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(h) + \mathfrak{h}(x) \leq m, \text{ cuando } x \neq 0.$$

Por la triangularidad de I ,

$$\delta(h) = \sum_r a_r h_r v_r + \sum_s v'_s h'_s a'_s,$$

donde $a_r, a'_s \in A$, $h_r, h'_s \in H_{\mathfrak{h}(h)-1}$ y $v_r, v'_s \in V$. Entonces,

$$\sigma_{\nu, x}(\delta(h)) = \sum_{r, i, j} \sigma_{\nu, x_i}(a_r) \sigma_{\nu_i, x_j}(h_r) \sigma_{\nu_j, x}(v_r) + \sum_{s, i, j} \sigma_{\nu, x_i}(v'_s) \sigma_{\nu_i, x_j}(h'_s) \sigma_{\nu_j, x}(a'_s).$$

Este elemento está en $A^X H_{m-1}^X V^X + V^X H_{m-1}^X A^X$. En efecto, podemos asumir que $\nu \neq 0$ y $x \neq 0$. Por tanto, $2\ell_X \mathfrak{h}(h) < m$. Entonces,

$$\mathfrak{h}(\nu_i) + 2\ell_X \mathfrak{h}(h_r) + \mathfrak{h}(x_j) \leq 2\ell_X (\mathfrak{h}(h_r) + 1) \leq 2\ell_X \mathfrak{h}(h) < m$$

y entonces $\sigma_{\nu_i, x_j}(h_r) \in H_{m-1}^X$. Similarmente $\sigma_{\nu_i, x_j}(h'_s) \in H_{m-1}^X$.

Recordemos que I^X es el ideal de A^X generado por el conjunto

$$H = \{\sigma_{\nu, x}(h) \mid \nu \in X^*, h \in I \text{ y } x \in X\}.$$

Así, $I^X = \langle \overline{H} \rangle$, donde $\overline{H}$ es el subespacio vectorial de I^X generado por H . Sabemos que $H_{2\ell_X(\ell+1)} \subseteq \overline{H}$. Ahora, si $h \in I, \nu \in X^*$ y $x \in X$, tenemos que

$$\mathfrak{h}(\nu) + 2\ell_X \mathfrak{h}(h) \leq 2\ell_X (\mathfrak{h}(h) + 1).$$

Por lo tanto, $\overline{H} = H_{2\ell_X(\ell+1)}$.

Por 1.2.3, I^X es ideal $\mathcal{A}^X$ -triangular. □

2.6 Módulos admisibles completos

En esta sección, dada una ditálgebra débil triangular entrelazada $(\mathcal{A}^X, I^X)$, daremos condiciones sobre X que garanticen que el funtor

$$F^X : (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$$

sea fiel y pleno, que $(\mathcal{A}^X, I^X)$ sea de Roiter cuando $(\mathcal{A}, I)$ lo es y examinaremos situaciones especiales donde estas condiciones se satisfacen.

Sea $B = T_R(W_0)$ una álgebra tensorial y X un B -módulo admisible. Así, tenemos un par divisor (S, P) del álgebra $\Gamma = \text{End}_B(X)^{op}$. Tenemos la ditálgebra regular $\mathcal{B} = (B, 0)$, que

tiene diferencial 0 y estratificación (R, W_0) , con descomposición asociada $W_0 \oplus 0$. Podemos entonces considerar la ditálgebra $\mathcal{B}^X = (T_S(P^*), \delta)$, donde δ es la diferencial determinada por la comultiplicación $\mu : P^* \rightarrow P^* \otimes_S P^*$, ver 2.2.5 y 2.3.9. Con el lenguaje empleado en este trabajo, nos referimos a la ditálgebra débil $(\mathcal{B}, I_B)$ equipada con el ideal trivial $I_B = 0$ y a la ditálgebra débil $(\mathcal{B}^X, I_B^X)$, también con ideal trivial $I_B^X = 0$.

Definición 2.6.1. *Con la notación anterior, diremos que el B -módulo X es **completo** si y sólo si el funtor*

$$F^X : \mathcal{B}^X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{B}\text{-Mod}$$

es fiel y pleno.

Proposición 2.6.2. *Sea $B = T_R(W_0)$ y X un B -módulo admisible. Entonces, son equivalentes:*

- (1) *X es completo.*
- (2) *Para cada ideal I_B de B , el funtor $F^X : (\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$ es fiel y pleno.*

Demostración: Para ver que 1 implica 2, observe que $(\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod}$ es la subcategoría plena de $\mathcal{B}^X\text{-Mod}$ formada por los S -módulos M tales que $I_B^X M = 0$ y se tiene el cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod} & \xrightarrow{F^X} & (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}^X\text{-Mod} & \xrightarrow{F^X} & \mathcal{B}\text{-Mod} \end{array}$$

con F^X fiel y pleno.

Para ver que 2 implica 1, basta notar que el funtor

$$F^X : \mathcal{B}^X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{B}\text{-Mod}$$

Es fiel y pleno, pues es el caso particular de 2, donde $I_B = 0$. □

Observación 2.6.3. *Sea $B = T_R(W'_0)$ una subálgebra inicial de una ditálgebra débil triangular entrelazada $(\mathcal{A}, I)$. Sean X un B -módulo admisible y $F^X : (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ el funtor asociado.*

Supongamos que $\mathcal{A} = (T, \delta)$ tiene estratificación triangular (R, W) y que $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$ donde W'_0 es el primer término de la filtración triangular de W_0 . Así, $\mathcal{B} = (B, \delta_B)$ con $\delta_B = 0$, también es una ditálgebra débil con estratificación triangular (R, W') , con

$$W' = W'_0 \oplus W'_1 \text{ y } W'_1 = 0$$

y con filtraciones triangulares

$$0 \subseteq W'_0 \text{ y } 0 \subseteq 0 = W'_1.$$

Si tomamos $I_B = I \cap B$, obtenemos que $(\mathcal{B}, I_B)$ es una ditalgebra débil triangular entrelazada. Entonces, podemos construir $(\mathcal{A}^X, I^X)$ y $(\mathcal{B}^X, I_B^X)$ usando el mismo B -módulo admisible X .

Si $\Gamma = \text{End}_B(X)^{op}$ tiene par divisor (S, P) , tendremos

$$\mathcal{B}^X = (T_S(W'^X), \delta_B^X) \text{ y } \mathcal{A}^X = (T_S(W^X), \delta^X),$$

$$W_0^X = X^* \otimes_B \underline{W}_0'' \otimes_B X \text{ y } (W_0')^X = X^* \otimes_B 0 \otimes_B X = 0$$

$$W_1^X = (X^* \otimes_B \underline{W}_1 \otimes_B X) \oplus P^* \text{ y } (W_1')^X = (X^* \otimes_B 0 \otimes_B X) \oplus P^* = P^*$$

$$\delta_B^X|_{(W_0')^X} = 0 \text{ y } \delta_B^X|_{(W_1')^X} = \mu.$$

Las inclusiones

$$T_R(W_0') \rightarrow T_R(W) \text{ y } T_S(P^*) \rightarrow T_S(W^X)$$

determinan inclusiones de ditalgebras débiles

$$j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \text{ y } j^X : \mathcal{B}^X \rightarrow \mathcal{A}^X$$

y también inclusiones de ditalgebras débiles entrelazadas

$$j : (\mathcal{B}, I_B) \rightarrow (\mathcal{A}, I) \text{ y } j^X : (\mathcal{B}^X, I_B^X) \rightarrow (\mathcal{A}^X, I^X).$$

Entonces, tendremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}^X, I^X) - \text{Mod} & \xrightarrow{F^X} & (\mathcal{A}, I) - \text{Mod} \\ F_{j^X} \downarrow & & \downarrow F_j \\ (\mathcal{B}^X, I_B^X) - \text{Mod} & \xrightarrow{F_B^X} & (\mathcal{B}, I_B) - \text{Mod} \end{array}$$

Proposición 2.6.4. Sean $B = T_R(W_0')$ una subálgebra inicial de una ditalgebra débil triangular entrelazada $(\mathcal{A}, I)$ y X un B -módulo completo. Entonces, el funtor

$$F^X : (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \text{ es fiel y pleno.}$$

Demostración: Tengamos presente la notación de la observación previa.

Denotaremos por $\pi : S \otimes_S N \rightarrow N$ el morfismo dado por el producto, para $N \in S\text{-Mod}$.

F^X es fiel :

Supongamos que $f \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}^X, I^X)}(M, N)$ es tal que $F^X(f) = 0$. Entonces $0 = F_j F^X(f) = F_B^X F_{j^X}(f)$, pero como X es completo, tenemos que $0 = F_{j^X}(f)$, lo cual implica que $f^0 = 0$ y $f^1(\gamma) = 0$ para toda $\gamma \in P^*$.

Por otra parte, $f^1(X^* \otimes_B \underline{W}_1 \otimes_B X) = 0$ porque, si $w \in \underline{W}_1, x \in X, \nu \in X^*$ y $m \in M$, se tiene

$$\begin{aligned}
f^1(\nu \otimes w \otimes x)[m] &= \sum_i \nu(x_i) f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m] \\
&= \pi(\nu \otimes 1) \left(\sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m] \right) \\
&= \pi(\nu \otimes 1) (F^X(f)^1(w)[x \otimes m]) = 0.
\end{aligned}$$

Entonces, $f = 0$ y F^X es fiel.

F^X es pleno:

Sea $g \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(F^X(M), F^X(N))$, vamos a tomar a

$$\bar{g} := F_j(g) \in \text{Hom}_{(\mathcal{B}, I_B)}(F_j F^X(M), F_j F^X(N)).$$

Entonces, sabemos que existe h en $(\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod}$ tal que $F_B^X(h) = \bar{g}$, entonces podemos definir $f \in \text{Phom}_{S-W^X}(M, N)$ de la siguiente manera $f := (h^0, [h_1, h^1])$, donde $h_1 : X^* \otimes_B \underline{W}_1 \otimes_B X \rightarrow \text{Hom}_k(M, N)$ y está dado por la fórmula

$$h_1(\nu \otimes w \otimes x)[m] := \pi(\nu \otimes 1)(g^1(w)[x \otimes m]).$$

Afirmación 1: $f^1(\sigma_{\nu, x}(v))[m] = \pi(\nu \otimes 1)[g^1(v)[x \otimes m]]$, para todo $v \in V, \nu \in X^*, x \in X$.

En efecto, primero hay que recordar que $V \subseteq \langle \underline{W} \rangle = \bigoplus_{n \geq 1} \underline{W}^n$, por lo cual $V = \bigoplus_{n \geq 1} (\underline{W}^n \cap V)$. Por lo que la afirmación se demostrará por inducción.

Para $n = 1$ y $v \in \underline{W}_1$, la afirmación se sigue por definición.

Supongamos ahora que la hemos probado para $v \in \underline{W}^{n-1} \cap V$.

Para el siguiente paso, para $v \in \underline{W}^n \cap V$, $v = w_1 w_2 \cdots w_n$, vamos a tomar a $w = w_1$ y $w' = w_2 \cdots w_n$, con $w_i \in \underline{W}$ homogéneos.

Tenemos dos casos:

Caso 1 $\deg(w) = 0$ y $\deg(w') = 1$

Caso 2 $\deg(w') = 0$ y $\deg(w) = 1$

Solo probaremos el Caso 1, ya que el otro caso es similar.

Escribamos $g^1(w')[x \otimes m] = \sum_q x^q \otimes n^q$. Por hipótesis de inducción, se tiene:

$$\begin{aligned}
f^1(\sigma_{\nu,x}(v))[m] &= f^1(\sigma_{\nu,x}(ww'))[m] \\
&= \sum_i f^1(\sigma_{\nu,x_i}(w)\sigma_{\nu_i,x}(w'))[m] \\
&= \sum_i \sigma_{\nu,x_i}(w) * f^1(\sigma_{\nu_i,x}(w'))[m] \\
&= \sum_i \sigma_{\nu,x_i}(w) * \pi(\nu_i \otimes 1)g^1(w')[x \otimes m] \\
&= \sum_i \sigma_{\nu,x_i}(w) * \sum_q \nu_i(x^q)n^q \\
&= \sum_q \sigma_{\nu, \sum_i x_i \nu_i(x^q)}(w) * n^q \\
&= \sum_q \sigma_{\nu, x^q}(w) * n^q \\
&= \sum_{i,q} \sigma_{\nu(x_i) \nu_i, x^q}(w) * n^q \\
&= \pi(\nu \otimes 1) \left[\sum_{i,q} x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x^q}(w) * n^q \right] \\
&= \pi(\nu \otimes 1) w \sum_q x^q \otimes n^q \\
&= \pi(\nu \otimes 1) w g^1(w')[x \otimes m] \\
&= \pi(\nu \otimes 1) [g^1(v)[x \otimes m]].
\end{aligned}$$

Así, hemos probado la afirmación 1.

Afirmación 2: $f \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}^X, I^X)}(M, N)$ y $F^X(f) = g$.

Note que, para $m \in M$ y $x \in X$, se tiene

$$g^0(x \otimes m) = x \otimes h^0(m) + \sum_j x p_j \otimes h^1(\gamma_j)[m].$$

Entonces, para $w \in \underline{W}_0$, tendremos

$$g^0(w(x \otimes m)) = \sum_i x_i \otimes h^0[(\nu_i \otimes w \otimes x) * m] + \sum_{i,j} x_i p_j \otimes h^1(\gamma_j)[(\nu_i \otimes w \otimes x) * m].$$

De lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i,x}(\delta(w)))[m] &= \sum_i x_i \otimes \pi(\nu_i \otimes 1)(g^1(\delta(w))[x \otimes m]) \\
&= g^1(\delta(w))[x \otimes m] \\
&= w g^0(x \otimes m) - g^0(w(x \otimes m)) \\
&= \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * f^0(m) + \sum_{i,j} x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x p_j) * f^1(\gamma_j)[m] \\
&\quad - \sum_i x_i \otimes f^0((\nu_i \otimes w \otimes x) * m) - \sum_{i,j} x_i p_j \otimes f^1(\gamma_j)[(\nu_i \otimes w \otimes x) * m].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tendremos

$$\begin{aligned}
f^1(\nu_i \otimes w \otimes \rho(x))[m] - f^1(\lambda(\nu_i) \otimes w \otimes x)[m] &= f^1\left(\sum_j \nu_i \otimes w \otimes xp_j \otimes \gamma_j\right)[m] \\
&- f^1\left(\sum_{r,j} \nu_i(x_r p_j) \gamma_j \otimes \nu_r \otimes w \otimes x\right)[m] \\
&= \sum_j (\nu_i \otimes w \otimes xp_j) * f^1(\gamma_j)[m] \\
&- \sum_{r,j} \nu_i(x_r p_j) f^1(\gamma_j)(\nu_r \otimes w \otimes x)[m] \\
&= \sum_j (\nu_i \otimes w \otimes xp_j) * f^1(\gamma_j)[m] \\
&- \sum_{r,j} \nu_i(x_r p_j) f^1(\gamma_j)[(\nu_r \otimes w \otimes x) * m]
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(\delta(w)))[m] &= \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes \rho(x))[m] - \sum_i x_i \otimes f^1(\lambda(\nu_i) \otimes w \otimes x)[m] \\
&+ \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * f^0(m) - \sum_i x_i \otimes f^0[(\nu_i \otimes w \otimes x) * m].
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\sum_i x_i \otimes f^1(\delta^X(\nu_i \otimes w \otimes x))[m] = \sum_i x_i \otimes (\nu_i \otimes w \otimes x) * f^0(m) - \sum_i x_i \otimes f^0[(\nu_i \otimes w \otimes x) * m]$$

Aplicando $\pi(\nu \otimes 1)$, obtenemos

$$f^1(\delta^X(\nu \otimes w \otimes x))[m] = (\nu \otimes w \otimes x) * f^0[m] - f^0[(\nu \otimes w \otimes x) * m].$$

Para ver que $F^X(f) = g$ hay que ver que ambas componentes coinciden. Ya vimos que $F^X(f)^0 = g^0$ al inicio de esta afirmación 2. Para ver que $F^X(f)^1 = g^1$, tomamos $v \in V$, $x \in X$, $m \in M$ y suponemos que $g^1(v)[x \otimes m] = \sum_q x^q \otimes n^q$. Entonces,

$$\begin{aligned}
F^X(f)^1(v)[x \otimes m] &= \sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v))[m] \\
&= \sum_i x_i \otimes \pi(\nu_i \otimes 1)(g^1(v)[x \otimes m]) \\
&= \sum_i x_i \otimes \sum_q \nu_i(x^q) n^q \\
&= \sum_q \sum_i x_i \nu_i(x^q) \otimes n^q \\
&= g^1(v)[x \otimes m].
\end{aligned}$$

□

Lema 2.6.5. *Supongamos que tenemos $(\mathcal{A}, I)$ una álgebra débil triangular entrelazada con estratificación (R, W) , y consideramos a B la subálgebra inicial de $\mathcal{A}$. Si X es un B -módulo admisible y F_0 es el funtor $X \otimes_S \square : S\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$, definimos:*

$$\xi_X : \text{Phom}_{S-W^X}(M, N) \rightarrow \text{Phom}_{R-W}(F_0(M), F_0(N)),$$

para $(f^0, f^1) \in \text{Phom}_{S-W^X}(M, N)$, $w \in W_1$, $x \in X$ y $m \in M$ por las fórmulas:

- $\xi_X(f)^0(x \otimes m) = x \otimes f^0(m) + \sum_j x p_j \otimes f^1(\gamma_j)[m]$.
- $\xi_X(f)^1(w)(x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m]$.

Entonces, el par (F_0, ξ_X) es un marco para el funtor $F^X : (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Además, para cada $M, N \in S\text{-Mod}$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Phom}_{S-W^X}(M, N) & \xrightarrow{\xi_X} & \text{Phom}_{R-W}(F_0(M), F_0(N)) \\ \downarrow \widehat{\phi} & & \downarrow \phi \\ \text{Phom}_{S-W'^X}(M, N) & \xrightarrow{\xi'_X} & \text{Phom}_{R-W'}(F_0(M), F_0(N)) \end{array}$$

donde $\widehat{\phi}$ y ϕ son las funciones restricción definidas por

$$\phi((g^0, g^1)) = (g^0, g^1|_{W'_1}) \text{ y } \widehat{\phi}((f^0, f^1)) = (f^0, f^1|_{W_1^X}),$$

y ξ'_X denota a la función correspondiente al funtor F_B^X .

Si X es un B -módulo admisible triangular completo, entonces ξ_X es inyectiva.

Además, si $\xi_X(f) = g$ con f^0 biyectiva, entonces g^0 es biyectiva.

Demostración: Veamos primero que (F_0, ξ_X) es un marco para F^X , de acuerdo con 2.1.8. Claramente F_0 es un funtor. Para ver la naturalidad de ξ_X , consideremos $M, M', N \in S\text{-Mod}$ y un morfismo de S -módulos $t : M \rightarrow M'$. Vamos a probar que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Phom}_{S-W^X}(M, N) & \xrightarrow{\xi_X} & \text{Phom}_{R-W}(F_0(M), F_0(N)) \\ t_* \uparrow & & \uparrow F_0(t)_* \\ \text{Phom}_{S-W^X}(M', N) & \xrightarrow{\xi_X} & \text{Phom}_{R-W}(F_0(M'), F_0(N)) \end{array}$$

Dado $f = (f^0, f^1) \in \text{Phom}_{S-W^X}(M', N)$, $x \otimes m \in X \otimes M$ y $w \in W$, tendremos que

$$[\xi_X(t_*(f))]^0(x \otimes m) = x \otimes f^0 t(m) + \sum_j x p_j \otimes f^1(\gamma_j) t[m] = [F_0(t)_* \xi_X(f)]^0(x \otimes m).$$

De manera similar, tenemos que

$$[\xi_X(t_*(f))]^1(w)(x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes x) t[m] = [F_0(t)_* \xi_X(f)]^1(w)(x \otimes m).$$

La verificación de la naturalidad para N es análoga.

Que $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(F^X(M)) = F_0(\mathcal{U}_{\mathcal{A}^X}(M))$ es clara pues ambos son $X \otimes_S M$.

El cuadro

$$\begin{array}{ccc}
\text{Phom}_{S-W^X}(M, N) & \xrightarrow{\xi_X} & \text{Phom}_{R-W}(F_0(M), F_0(N)) \\
\sigma \uparrow & & \sigma' \uparrow \\
\text{Hom}_{(\mathcal{A}^X, I^X)}(M, N) & \xrightarrow{F^X} & \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(F^X(M), F^X(N))
\end{array}$$

conmuta gracias a la definición de ξ_X , ver 2.1.8. Así, (F_0, ξ_X) es marco para F .

Es sencillo verificar que el cuadro del enunciado conmuta.

Finalmente, supongamos que el B -módulo X es completo y triangular. Como $(W'_0)^X = 0$, tenemos que

$$\text{Phom}_{S-W'^X}(M, N) \subseteq \text{Hom}_{(\mathcal{B}^X, I_B^X)}(M, N),$$

y $(\mathcal{B}^X, I_B^X)$ resulta de Roiter.

Sea $f = (f^0, f^1) \in \text{Phom}_{S-W^X}(M, N)$, donde f^0 es un isomorfismo. Entonces $\widehat{\phi}(f)$ es un isomorfismo en $(\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod}$. Supongamos que $\xi_X(f) = (g^0, g^1)$ y veamos que g^0 es biyectiva. Como F_B^X es funtor, tenemos que $F_B^X(\widehat{\phi}(f))$ es isomorfismo en $(\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$. Como $F_B^X(\widehat{\phi}(f)) = \xi'_X \widehat{\phi}(f) = \phi \xi_X(f) = \phi(g^0, g^1) = (g^0, g^1|_{(W'_1)^X})$ es isomorfismo, g^0 es biyectiva.

Finalmente, si $0 = \xi_X(f)$, entonces $0 = \phi(\xi_X(f)) = \xi'_X \widehat{\phi}(f) = F_B^X(\widehat{\phi}(f))$. Como F_B^X es fiel, $\widehat{\phi}(f) = 0$, por tanto $f^0 = 0$ y $f^1(W_1^X) = 0$, de lo cual deducimos que $f = 0$ y entonces ξ_X es inyectiva. □

Proposición 2.6.6. *Supongamos que B es la subálgebra inicial de la ditálgebra débil triangular entrelazada de Roiter $(\mathcal{A}, I)$, y que X es un B -módulo admisible triangular completo. Entonces, $(\mathcal{A}^X, I^X)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter.*

Demostración: Si consideramos el marco (F_0, ξ_X) del funtor F^X definido en 2.6.5, solo resta probar 4 (y 4^{op}) de 2.1.9. Vamos a tomar $M \in S\text{-Mod}$ y $\overline{X \otimes_S M} \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ con R -módulo subyacente $X \otimes_S M$. Tomamos $N \in (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$ y suponemos que

$$g = (g^0, g^1) = \xi_X(f^0, f^1) \in \text{Phom}_{R-W}(F_0(M), F_0(N))$$

es un isomorfismo que va de $\overline{X \otimes_S M}$ a $F^X(N)$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Vamos a mostrar que existe $\overline{M} \in (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$ con S -módulo subyacente M tal que $F^X(\overline{M}) = \overline{X \otimes_S M}$. Por 2.4.2, es suficiente mostrar que la acción de B en $\overline{X \otimes_S M}$, la cual denotamos por $\cdot$, es la acción canónica de B en $X \otimes_S M$.

Vamos a mostrar que $b \cdot (x \otimes m) = bx \otimes m$. Tenemos que $(g^0, g^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(\overline{X \otimes_S M}, F^X(N))$ es un isomorfismo, por lo que $g^0 : \overline{X \otimes_S M} \rightarrow X \otimes_S M$ es un isomorfismo de R -módulos. Entonces es suficiente probar que

$$g^0(b \cdot (x \otimes m)) = g^0(bx \otimes m).$$

Primero note que para $w \in \underline{W}_1$, tenemos:

$$g^1(w)[x \otimes m] = \sum_i x_i \otimes f^1(\nu_i \otimes w \otimes x)[m],$$

donde $g^1 \in \text{Hom}_{B-B}(W_1, \text{Hom}_k(X \otimes_S M, X \otimes_S N))$. Como $\delta(b) = 0$, tenemos $g^0(b \cdot (x \otimes m)) = bg^0(x \otimes m)$. Entonces, puesto que X es un B - Γ -bimódulo,

$$\begin{aligned}
g^0(b \cdot (x \otimes m)) - g^0(bx \otimes m) &= bg^0(x \otimes m) - g^0(bx \otimes m) \\
&= bx \otimes f^0(m) + \sum_j b(xp_j) \otimes f^1(\gamma_j)[m] \\
&\quad - bx \otimes f^0(m) - \sum_j (bx)p_j \otimes f^1(\gamma_j)[m] \\
&= \sum_j [b(xp_j) - (bx)p_j] \otimes f^1(\gamma_j)[m] \\
&= 0
\end{aligned}$$

La prueba de 4^{op} es similar. □

Hemos visto que el funtor F^X es fiel y pleno cuando el B -módulo X es completo, ahora vamos a mostrar situaciones en las cuales aparece un B -módulo X completo.

En el resto de esta sección, para mostrar que un B -módulo admisible es completo, utilizamos la caracterización de 2.6.2. Específicamente, en 2.6.7, 2.6.10 y 2.6.13 hacemos esto con el fin de familiarizarnos más con el funtor F^X para ditálgebras débiles entrelazadas. Obtenemos así descripciones explícitas de I_B^X en los casos 2.6.10 y 2.6.13.

Lema 2.6.7. *Sea $B = T_R(W_0)$ un álgebra tensorial y supongamos que X es un B -módulo, donde $\Gamma = \text{End}_B(X)^{op}$ admite un par divisor (S, P) . Supongamos además que X es de dimensión finita sobre k y que S es semisimple, entonces X es B -módulo admisible completo.*

Demostración: X es un B -módulo admisible porque tiene dimensión finita y S es semisimple. Sea I un ideal de B y vamos a mostrar que dados $M, N \in (\mathcal{B}^X, I^X)\text{-Mod}$ la función

$$F_B^X : \text{Hom}_{(\mathcal{B}^X, I^X)}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{B}, I)}(F_B^X(M), F_B^X(N))$$

es un isomorfismo. Dado que S es semisimple tendremos que el S -módulo N es proyectivo y podemos considerar entonces una base dual (posiblemente infinita) $\{(n_t, \eta_t) \mid t \in \tau\}$.

Entonces, para cada $g \in \text{Hom}_k(X \otimes M, X \otimes N)$, $m \in M$ y $t \in \tau$, podemos considerar un morfismo lineal $g_{t,m} \in \text{End}_k(X)$ dado por $g_{t,m}(x) := \sigma(1 \otimes \eta_t)g(x \otimes m)$, donde $\sigma : X \otimes_S S \rightarrow X$ es el producto. Dado que X es de dimensión finita y tenemos una base dual para N , para un m fijo hay sólo un número finito de t 's con $g_{t,m} \neq 0$.

En efecto, si tomamos una k -base $\{x_q \mid q \in Q\}$ de X , tenemos

$$g(x_q \otimes m) = \sum_{p \in Q} c_p g(x_p \otimes m) = \sum_{p \in Q} c_p n_p^q, \text{ con } n_p^q \in N.$$

Si escribimos $x = \sum_{q \in Q} c_q x_q$, con $c_q \in k$, obtenemos

$$g\left(\sum_q c_q x_q \otimes m\right) = \sum_q c_q g(x_q \otimes m) = \sum_{q,p} c_q x_p \otimes n_p^q.$$

De donde obtenemos $g_{t,m}(x) = \sum_{q,p} c_q x_p \eta_t(n_p^q)$. Ahora, para cada n_p^q se tiene $n_p^q = \sum_t \eta_t(n_p^q) n_t$ donde $\tau_p^q := \{t \in \tau \mid \eta_t(n_p^q) \neq 0\}$ es finito. Como sólo hay finitos n_p^q , si $t \notin \bigcup_{p,q} \tau_p^q$, $g_{t,m}(x) = 0$.

Así, tendremos una función

$$\phi : Hom_{(\mathcal{B}, I_B)}(F_B^X(M), F_B^X(N)) \rightarrow End_B(X)^{op} = \Gamma, \text{ dada por } \phi[(f^0, 0)] = f_{t,m}^0.$$

Veamos que en efecto cada $f_{t,m}^0$ es de B -módulos. Para $w \in W_0$ y $x \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} wf_{t,m}^0(x) - f_{t,m}^0(wx) &= w\sigma(1 \otimes \eta_t)f^0(x \otimes m) - \sigma(1 \otimes \eta_t)f^0(wx \otimes m) \\ &= \sigma(1 \otimes \eta_t)wf^0(x \otimes m) - \sigma(1 \otimes \eta_t)f^0(wx \otimes m) \\ &= \sigma(1 \otimes \eta_t)f^0(w \cdot (x \otimes m)) - \sigma(1 \otimes \eta_t)f^0(wx \otimes m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, se tiene $f_{t,sm}^0 = sf_{t,m}^0$, lo cual será importante en los cálculos siguientes.

En efecto, hay que recordar que, si $s \in S$ y $h \in \Gamma$, entonces $sh = h \circ s$. Por lo que

$$sf_{t,m}^0(x) = f_{t,m}^0(xs) = \sigma(1 \otimes \eta_t)f^0(xs \otimes m) = f_{t,sm}^0(x).$$

Vamos a denotar por $\pi_S : \Gamma \rightarrow S$ y $\pi_P : \Gamma \rightarrow P$ a las proyecciones. Queremos definir una inversa G para F_B^X :

$$G : Hom_{(\mathcal{B}, I_B)}(F_B^X(M), F_B^X(N)) \rightarrow Hom_{(\mathcal{B}^X, I_X)}(M, N).$$

Para $f = (f^0, 0) \in Hom_{(\mathcal{B}, I_B)}(F_B^X(M), F_B^X(N))$, definimos $G(f) \in Hom_{(\mathcal{B}^X, I_X)}(M, N)$ dada, para $m \in M$ y $\gamma \in P^*$, por las fórmulas:

$$G(f)^0[m] = \sum_t \pi_S(f_{t,m}^0)n_t \text{ y } G(f)^1(\gamma)[m] = \sum_t \gamma[\pi_P(f_{t,m}^0)]n_t.$$

Como $f_{t,sm}^0 = sf_{t,m}^0$, $G(f)^0 \in Hom_S(M, N)$. Mostremos que $G(f)^1$ es de S - S -bimódulos.

$$\begin{aligned} G(f)^1[s\gamma s'][m] &= \sum_t (s\gamma s')(\pi_P(f_{t,m}^0))n_t \\ &= s \sum_t \gamma(s'\pi_P(f_{t,m}^0))n_t \\ &= s \sum_t \gamma(\pi_P(f_{t,s'm}^0))n_t \\ &= sG(f)^1[\gamma][s'm] \\ &= sG(f)^1[\gamma]s'[m]. \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que G es inversa de F_B^X . Primero hay que notar que Γ_S admite una base dual $\{(1_X, \pi_S)\} \cup \{(p_j, \gamma_j \pi_P) \mid j \in J\}$. Donde $\{(p_j, \gamma_j) \mid j \in J\}$ es la base dual de P que ya hemos fijado para la construcción de F_B^X . Por tanto, tendremos lo siguiente para $f \in Hom_{(\mathcal{B}, I_B)}(F_B^X(M), F_B^X(N))$:

$$\begin{aligned}
(F_B^X G(f))^0(x \otimes m) &= x \otimes G(f)^0[m] + \sum_j xp_j \otimes G(f)^1(\gamma_j)[m] \\
&= \sum_t x \otimes \pi_S(f_{t,m}^0)n_t + \sum_{t,j} xp_j \otimes \gamma_j[\pi_P(f_{t,m}^0)]n_t \\
&= \sum_t x[1_X \pi_S(f_{t,m}^0) + \sum_j p_j \gamma_j[\pi_P(f_{t,m}^0)]] \otimes n_t \\
&= \sum_t x f_{t,m}^0 \otimes n_t \\
&= \sum_t f_{t,m}^0(x) \otimes n_t \\
&= \sum_t \sigma(1 \otimes \eta_t)[f^0(x \otimes m)] \otimes n_t \\
&= f^0(x \otimes m).
\end{aligned}$$

Se sigue que $[F_B^X G(f)]^0 = f^0$. Además, tenemos $[F_B^X G(f)]^1 = 0 = f^1$. Así, $F_B^X G = Id$.

Por otro lado, dado $h \in Hom_{(\mathcal{B}^X, I^X)}(M, N)$. Por definición de G , tenemos $(GF_B^X(h))^0(m) = \sum_t \pi_S(F_B^X(h)_{t,m}^0)n_t$. Se tiene,

$$\begin{aligned}
F_B^X(h)_{t,m}^0(x) &= \sigma(1 \otimes \eta_t)F_B^X(h)^0(x \otimes m) \\
&= \sigma(1 \otimes \eta_t)(x \otimes h^0(m) + \sum_j xp_j \otimes h^1(\gamma_j)[m]) \\
&= \sigma(x \otimes \eta_t h^0(m) + \sum_j xp_j \otimes \eta_t h^1(\gamma_j)[m]) \\
&= x\eta_t h^0(m) + \sum_j xp_j \eta_t h^1(\gamma_j)[m].
\end{aligned}$$

Se sigue que $F_B^X(h)_{t,m}^0 = 1_X[\eta_t h^0(m) + \sum_j p_j \eta_t h^1(\gamma_j)(m)]$. Aplicando el morfismo π_S y sumando sobre t obtenemos que $(GF_B^X(h))^0(m) = h^0(m)$. Ahora

$$\begin{aligned}
[GF_B^X(h)]^1[\gamma](m) &= \sum_t \gamma[\pi_P(F_B^X(h)_{t,m}^0)]n_t \\
&= \sum_t \gamma[\pi_P \sigma(1 \otimes \eta_t)F_B^X(h)^0(x \otimes m)]n_t \\
&= \sum_t \gamma \pi_P[\sigma(1 \otimes \eta_t)(x \otimes h^0(m) + \sum_j xp_j \otimes h^1(\gamma_j)[m])]n_t \\
&= \sum_t \gamma \pi_P[\sigma(x \otimes \eta_t h^0(m) + \sum_j xp_j \otimes \eta_t h^1(\gamma_j)[m])]n_t \\
&= \sum_t \gamma \pi_P[x\eta_t h^0(m) + \sum_j xp_j \eta_t h^1(\gamma_j)[m]]n_t \\
&= h^1(\gamma)[m].
\end{aligned}$$

Se sigue que $GF_B^X = Id$. □

En el resto de esta sección $B = T_R(W_0)$.

Lema 2.6.8. *Supongamos que $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ es una suma directa finita de B -módulos inescindibles no isomorfos de dimensión finita. Además que cada $\Gamma_i = \text{End}_B(X_i)^{\text{op}}$ se descompone como $\Gamma_i = D_i \text{Id}_{X_i} \oplus P_i$, donde P_i es el radical de Jacobson de Γ_i y D_i es una k -álgebra con división. Entonces $\Gamma = \text{End}_B(X)^{\text{op}}$ admite un par divisor (S, P) , donde P es el radical de Jacobson de Γ y X es un B -módulo admisible completo.*

Demostración: Sabemos que $\text{End}_B(M)$ es un anillo local para cada B -módulo inescindible de dimensión finita M . Por tanto $f : M \rightarrow N$ entre inescindibles en $B\text{-mod}$ es un isomorfismo o para todo $g : N \rightarrow M$ $gf \in \text{radEnd}_B(M)$ y $fg \in \text{radEnd}_B(N)$. Nuestra hipótesis garantiza que:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \text{Hom}_B(X_2, X_1) & \cdots & \text{Hom}_B(X_n, X_1) \\ \text{Hom}_B(X_1, X_2) & \Gamma_2 & \cdots & \text{Hom}_B(X_n, X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Hom}_B(X_1, X_n) & \text{Hom}_B(X_2, X_n) & \cdots & \Gamma_n \end{pmatrix}$$

y

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \text{Hom}_B(X_2, X_1) & \cdots & \text{Hom}_B(X_n, X_1) \\ \text{Hom}_B(X_1, X_2) & P_2 & \cdots & \text{Hom}_B(X_n, X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Hom}_B(X_1, X_n) & \text{Hom}_B(X_2, X_n) & \cdots & P_n \end{pmatrix}$$

En efecto, si P' denota el ideal de Γ recién descrito matricialmente, se tiene

$$\Gamma/P' \cong \Gamma_1/P_1 \times \cdots \times \Gamma_n/P_n \cong D_1 \times \cdots \times D_n$$

que es semisimple y ninguna de las entradas de P' es isomorfismo, por lo que P' es nilpotente y $P = P'$.

Considerando los idempotentes $e_i = \sigma_i \pi_i$ (donde $\pi_i : X \rightarrow X_i$ y $\sigma_i : X_i \rightarrow X$), asociados a la descomposición $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ y la subálgebra $S = D_1 e_1 + \cdots + D_n e_n$, $\Gamma = S \oplus P$ es un par divisor de Γ y claramente X es proyectivo finitamente generado como S -módulo derecho. Así, podemos aplicar 2.6.7. $\square$

Lema 2.6.9. *Supongamos que X es un B -módulo de dimensión finita. Supongamos que $\Gamma = \text{End}_B(X)^{\text{op}}$ tiene par divisor (S, P) , con P el radical de Jacobson de Γ . Entonces, X es completo triangular.*

Demostración: Tenemos una filtración canónica de S - S -bimódulos $\mathcal{F}(P)$ de P dada por las potencias del radical $0 = P^n \subseteq P^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq P^1$, la cual satisface que $P^i P^j \subseteq P^{i+j}$ para toda i, j . También tenemos una filtración de B - S -bimódulos

$$\mathcal{F}(X) : 0 \subseteq XP^n \subseteq XP^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq XP \subseteq X.$$

Como $S \cong \Gamma/P$ es una k -álgebra semisimple de dimensión finita, ambas filtraciones son aditivas derechas. Entonces X es un B -módulo triangular por definición y X es completo por el 2.6.7. $\square$

Lema 2.6.10. Sea $\phi : B \rightarrow S$ un epimorfismo en la categoría de k -álgebras y sea X el B -módulo obtenido del S -módulo regular por restricción de escalares usando ϕ . Entonces, X es un B -módulo completo triangular.

Demostración: Dado que

$$\Gamma = \text{End}_B(X)^{op} = \text{End}_S(S)^{op} = S \oplus P,$$

con $P = 0$, entonces X es un B -módulo admisible. Sea I_B un ideal de B .

Aquí la base dual de X es $(Id_S, 1_S)$, de modo que el ideal I_B^X está generado por los elementos

$$\sigma_{Id_S, 1}(b) = Id_S(b1) = b1 = \phi(b)1 = \phi(b), \text{ con } b \in I_B.$$

Así vemos, que si I_S denota el ideal de S generado por $\phi(I_B)$, se tiene $I_B^X = I_S$. Se tiene el cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{B}^X, I_B^X) - \text{Mod} & \xrightarrow{F_B^X} & (\mathcal{B}, I_B) - \text{Mod} \\ \mathcal{L}_{(\mathcal{B}^X, I_B^X)} =: \mathcal{L}^X \uparrow & & \mathcal{L}_{(\mathcal{B}, I_B)} =: \mathcal{L} \uparrow \\ S/I_S - \text{Mod} & \xrightarrow{F_{\bar{\phi}}} & B/I_B - \text{Mod} \end{array}$$

donde $\bar{\phi}$ es el epimorfismo de k -álgebras que hace conmutar el cuadro

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/I_B & \xrightarrow{\bar{\phi}} & S/I_S \end{array}$$

Aquí son fieles y plenos $\mathcal{L}^X$ y $\mathcal{L}$ y, por el Lema de Silver, $F_{\bar{\phi}}$ es fiel y pleno. Se sigue que F_B^X es fiel y pleno y, entonces, X es completo. $\square$

Lema 2.6.11. Supongamos que $(\mathcal{A}_1, I_1)$ y $(\mathcal{A}_2, I_2)$ son ditálgebras débiles entrelazadas. Entonces, dada cualquier ditálgebra $(\mathcal{A}', I')$ entrelazada y cualquier par de funtores

$$F_i : (\mathcal{A}_i, I_i) - \text{Mod} \rightarrow (\mathcal{A}', I') - \text{Mod},$$

existe un funtor

$$F : (\mathcal{A}_1, I_1) - \text{Mod} \times (\mathcal{A}_2, I_2) - \text{Mod} \rightarrow (\mathcal{A}', I') - \text{Mod}$$

tal que, dados $f_1 \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}_1, I_1)}(M_1, M_2)$ y $f_2 \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}_2, I_2)}(N_1, N_2)$, el morfismo

$$F(f_1, f_2) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}', I')}(F_1(M_1) \oplus F_2(M_2), F_1(N_1) \oplus F_2(N_2)),$$

está dado por

$$F(f_1, f_2)^0 := \begin{pmatrix} F_1(f_1)^0 & 0 \\ 0 & F_2(f_2)^0 \end{pmatrix} \quad F(f_1, f_2)^1(v') := \begin{pmatrix} F_1(f_1)^1(v') & 0 \\ 0 & F_2(f_2)^1(v') \end{pmatrix}$$

para $v' \in V'$. Denotamos a F por $F_1 \oplus F_2$.

Las proyecciones $\pi_i : (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, I_1 \times I_2) \rightarrow (\mathcal{A}_i, I_i)$ inducen un funtor como el anterior que es una equivalencia de categorías:

$$F_{\pi_1} \oplus F_{\pi_2} : (\mathcal{A}_1, I_1) - \text{Mod} \times (\mathcal{A}_2, I_2) - \text{Mod} \rightarrow (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, I_1 \times I_2) - \text{Mod}.$$

Demostración: El funtor F está bien definido en objetos porque dados $M_i \in (\mathcal{A}_i, I_i)\text{-Mod}$, tenemos que $F(M_1, M_2) = F_1(M_1) \oplus F_2(M_2)$ es un A' -módulo anulado por I' .

La composición de morfismos en la primera componente está dada por

$$\begin{aligned} F[(f_1, f_2)(f'_1, f'_2)]^0 &= \begin{pmatrix} F_1(f_1 f'_1)^0 & 0 \\ 0 & F_2(f_2 f'_2)^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_1(f_1)^0 F_1(f'_1)^0 & 0 \\ 0 & F_2(f_2)^0 F_2(f'_2)^0 \end{pmatrix} \\ &= F[(f_1, f_2)]^0 F[(f'_1, f'_2)]^0. \end{aligned}$$

Análogamente, tenemos que:

$$F[(f_1, f_2)(f'_1, f'_2)]^1 = (F[(f_1, f_2)] F[(f'_1, f'_2)]^1)^1.$$

$$\text{En efecto: } F[(f_1, f_2)(f'_1, f'_2)]^1(v') = \begin{pmatrix} F_1(f_1 f'_1)^1(v') & 0 \\ 0 & F_2(f_2 f'_2)^1(v') \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$F_1(f_1 f'_1)^1(v') = F_1(f_1)^1(v') F_1(f'_1)^0 + F_1(f_1)^0 F_1(f'_1)^1(v') + (F_1(f_1)^1 \star F_1(f'_1)^1)(\delta'(v'))$$

y

$$F_2(f_2 f'_2)^1(v') = F_2(f_2)^1(v') F_2(f'_2)^0 + F_2(f_2)^0 F_2(f'_2)^1(v') + (F_2(f_2)^1 \star F_2(f'_2)^1)(\delta'(v')).$$

Por tanto, se tiene la igualdad matricial

$$F[(f_1, f_2)(f'_1, f'_2)]^1(v') = (F[(f_1, f_2)] F[(f'_1, f'_2)]^1)^1(v').$$

Claramente, las identidades van a identidades.

Para la segunda parte de la demostración, denotamos por $(\mathcal{A}, I) := (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, I_1 \times I_2)$, $F_1 = F_{\pi_1}$ y $F_2 = F_{\pi_2}$. Vamos a mostrar que el funtor

$$F := F_1 \oplus F_2 : (\mathcal{A}_1, I_1)\text{-Mod} \times (\mathcal{A}_2, I_2)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, I_1 \times I_2)\text{-Mod}$$

admite un funtor casi inverso.

Denotamos por A_1, A_2 y A las componentes homogéneas de grado cero de T_1, T_2 y $T = T_1 \times T_2$, respectivamente. Consideramos la descomposición $1 = e_1 + e_2$ de la unidad de A como suma de idempotentes ortogonales centrales que corresponde a la descomposición $A = A_1 \times A_2$. También tenemos que $V = V_1 \times V_2$.

Note que dado $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, cada espacio $e_i M$ tiene una estructura natural de A_i -módulo anulado por I_i . Por ejemplo, para $i = 1$, esta estructura está dada por la acción $a_1 m_1 = (a_1, 0) m_1$, donde $m_1 \in e_1 M$. Entonces, cada $M \in \mathcal{A}\text{-Mod}$ se puede descomponer como la suma directa interna $M = e_1 M \oplus e_2 M$.

Dado $g \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$, como $\delta = \delta_1 \times \delta_2$ y $\delta(e_i) = 0$, obtenemos $g^0(e_i m) = e_i g^0(m)$, por lo que g^0 se divide como la suma directa de sus restricciones $g_i^0 : e_i M \rightarrow e_i N$. Mas aún, $g^1 : V \rightarrow \text{Hom}_k(M, N)$ es un morfismo de A - A -bimódulos, y para $v \in V$, la (i, j) -componente de la matriz de 2×2 de funciones lineales $g^1(v) : e_1 M \oplus e_2 M \rightarrow e_1 N \oplus e_2 N$ tiene componentes $g^1(e_j v e_i) = e_j g^1(v) e_i : e_i M \rightarrow e_j N$. Como $e_i V e_j = \delta_{i,j} V_i$, entonces concluimos que $g^1(e_i v e_j) = 0$ para $i \neq j$. Por lo que podemos definir, para cada $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, el morfismo $g_1^1(v_1) := g^1((v_1, 0))$ y $g_2^1(v_2) := g^1((0, v_2))$.

Afirmación 1: $(g_i^0, g_i^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}_i, I_i)}(e_i M, e_i N)$.

En efecto, mostraremos esto solo para el caso $i = 1$. Dados $a \in A_1$ y $m \in e_1 M$, tendremos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} a g_1^0(m) - g_1^0(am) &= (a, 0) g^0(m) - g^0[(a, 0)m] \\ &= g^1(\delta[(a, 0)])(m) \\ &= g^1((\delta_1(a), 0))(m) \\ &= g_1^1(\delta_1(a))(m). \end{aligned}$$

Entonces definimos el funtor $G_i : (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}_i, I_i)\text{-Mod}$ tal que $G_i(M) = e_i M$ y dado $g \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$, $G_i(g) = g_i$. Los funtores G_1 y G_2 determinan un funtor

$$G : (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}_1, I_1)\text{-Mod} \times (\mathcal{A}_2, I_2)\text{-Mod}.$$

Afirmación 2: G es un casi-inverso de F .

En efecto, tomaremos el isomorfismo natural $\Psi : FG \rightarrow 1_{(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}}$ dado, para cada $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, por el isomorfismo $\Psi_M = (\Psi_M^0, 0)$, donde $\Psi_M^0 : F_1(e_1 M) \oplus F_2(e_2 M) \rightarrow M$ es el isomorfismo dado por $\Psi_M^0(e_1 m, e_2 m') = e_1 m + e_2 m'$. Veamos la naturalidad. Tomemos $f = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$ y veamos que el siguiente cuadrado es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} F_1(e_1 M) \oplus F_2(e_2 M) & \xrightarrow{\Psi_M} & M \\ \downarrow F_1(f_1) \oplus F_2(f_2) & & \downarrow (f^0, f^1) \\ F_1(e_1 N) \oplus F_2(e_2 N) & \xrightarrow{\Psi_N} & N \end{array}$$

En efecto, dado $(e_1 m, e_2 m') \in F_1(e_1 M) \oplus F_2(e_2 M)$, tenemos

$$(f \Psi_M)^0(e_1 m, e_2 m') = f^0(e_1 m + e_2 m') = F_1(f_1)^0(e_1 m) + F_2(f_2)^0(e_2 m').$$

Similarmente, para $v = (v_1, v_2) \in V$, tenemos

$$\begin{aligned} (f \Psi_M)^1(v)[e_1 m, e_2 m'] &= f^1(v) \Psi_M^0(e_1 m, e_2 m') \\ &= f^1(v)(e_1 m + e_2 m') \\ &= f_1^1(v_1)(e_1 m) + f_2^1(v_2)(e_2 m') \\ &= [\Psi_N(F_1(f_1) \oplus F_2(f_2))]^1(v)(e_1 m, e_2 m'). \end{aligned}$$

De manera análoga, tendremos $GF \cong Id$. □

Observación 2.6.12. Sea X un B -módulo admisible y sea (S, P) el par divisor de $\Gamma = \text{End}_B(X)^{op}$, denotemos por $\mathcal{I}_X$ la clase de los B -módulos de la forma $X \otimes_S N$ para algún $N \in S\text{-Mod}$.

Sabemos que para un B -módulo admisible completo X la subcategoría plena de $(\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$ con clase de objetos $\mathcal{I}_X$ contiene la imagen de $F_B^X : (\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$.

Proposición 2.6.13. Supongamos que X_1, X_2 son B -módulos admisibles tales que para $i \neq j$ $\text{Hom}_B(\mathcal{I}_{X_i}, \mathcal{I}_{X_j}) = 0$. Entonces $X = X_1 \oplus X_2$ es un B -módulo admisible.

Si cada $\text{End}_B(X_i)^{op}$ tiene par divisor (S_i, P_i) , entonces $\text{End}_B(X)^{op}$ tiene par divisor (S, P) , que puede ser identificado con $(S_1 \times S_2, P_1 \times P_2)$. Si X_1 y X_2 son completos, entonces X también lo es.

Demostración: Supongamos que tenemos $\text{End}_B(X_i)^{op} = S_i \oplus P_i$, con (S_i, P_i) par divisor. Nuestras hipótesis garantizan que

$$\Gamma = \text{End}_B(X)^{op} \cong \begin{pmatrix} \text{End}_B(X_1)^{op} & 0 \\ 0 & \text{End}_B(X_2)^{op} \end{pmatrix} \cong (S_1 \times S_2) \oplus (P_1 \times P_2)$$

y entonces X es un B -módulo admisible. Podemos identificar $S_1 \times S_2$ y $P_1 \times P_2$ con sus imágenes S y P , respectivamente en Γ , bajo el isomorfismo anterior.

Vamos a mostrar ahora que, para cada ideal I_B de B , el funtor

$$F_B^X : (\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$$

es fiel y pleno.

Afirmación: $(\mathcal{B}^X, I_B^X) \cong (\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1}) \times (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})$.

En efecto, pues $\mathcal{B}^X$ tiene estratificación $(S_1 \times S_2, W^X)$, con $W_0^X = 0$ y $W_1^X = P^*$. Similarmente, $(\mathcal{B}^{X_i}, I_B^{X_i})$ tiene estratificación (S_i, W^{X_i}) , con $W_0^{X_i} = 0$ y $W_1^{X_i} = P_i^*$.

Podemos identificar $\text{Hom}_S(X, S)$ con $\text{Hom}_{S_1}(X_1, S_1) \oplus \text{Hom}_{S_2}(X_2, S_2)$. Así, dadas bases duales $\{(x_{i_r}, \nu_{i_r}) \mid i_r \in I_r\}$ de X_r sobre S , para $r = 1, 2$, consideremos la base dual

$$\{(x_{i_r}, \nu_{i_r}) \mid i_r \in I_r, r = 1, 2\}$$

para X sobre S . Si recordamos que el ideal I_B^X de B^X tiene la forma

$$I_B^X = \langle \sigma_{\nu, x}(h) \mid \nu \in X^*, h \in I_B, x \in X \rangle$$

y similarmente para los ideales $I_B^{X_r}$ de B^{X_r} , con $r = 1, 2$, y tenemos en mente la definición de los morfismos $\sigma_{\nu, x} : T \rightarrow T^X$ y $\sigma_{\nu, x} : T \rightarrow T^{X_r}$, vemos que se tiene

$$I_B^X = I_B^{X_1} \times I_B^{X_2}.$$

Ahora las inclusiones $P_i^* \hookrightarrow P^*$ inducen un isomorfismo $P_1^* \times P_2^* \rightarrow P^*$, que se extiende a un isomorfismo $\theta : T^{X_1} \times T^{X_2} \rightarrow T^X$, donde identificamos a $\text{Hom}_S(P, S)$ con $\text{Hom}_{S_1}(P_1, S_1) \oplus \text{Hom}_{S_2}(P_2, S_2)$, entonces si $\{(p_{j_r}, \gamma_{j_r}) \mid j_r \in J_r\}$ es una base dual para P_r sobre S_r , entonces $\{(p_{j_r}, \gamma_{j_r}) \mid j_r \in J_r, r \in \{1, 2\}\}$ es una base dual para P sobre S . Finalmente, veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
P^* & \xrightarrow{\mu} & T^X \\
\uparrow \theta| & & \uparrow \theta \\
P_1^* \times P_2^* & \xrightarrow{\mu_1 \times \mu_2} & T^{X_1} \times T^{X_2}.
\end{array}$$

En efecto, si $(\gamma_1, \gamma_2) \in P_1^* \times P_2^*$, y definimos $\gamma := \theta(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 + \gamma_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\mu(\gamma) &= \sum_{i_r, j_s, r, s} \gamma(p_{i_r} p_{j_s}) \gamma_{j_s} \otimes \gamma_{i_r} \\
&= \sum_{i_r, j_r, r} \gamma(p_{i_r} p_{j_r}) \gamma_{j_r} \otimes \gamma_{i_r} \\
&= \theta \left[\sum_{i_1, j_1} \gamma(p_{i_1} p_{j_1}) \gamma_{j_1} \otimes \gamma_{i_1}, \sum_{i_2, j_2} \gamma(p_{i_2} p_{j_2}) \gamma_{j_2} \otimes \gamma_{i_2} \right] \\
&= \theta(\mu_1(\gamma_1), \mu_2(\gamma_2)).
\end{aligned}$$

Hemos construido un isomorfismo de ditálgebras débiles entrelazadas

$$\theta : (\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1}) \times (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2}) \rightarrow (\mathcal{B}^X, I_B^X).$$

Ahora el funtor $F_B^{X_1} \oplus F_B^{X_2} : (\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1})\text{-Mod} \times (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$ es fiel, porque $F_B^{X_1}$ y $F_B^{X_2}$ lo son. La hipótesis sobre $\mathcal{I}_{X_1}$ e $\mathcal{I}_{X_2}$ garantiza que, dados $M_1, M_2 \in (\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1})\text{-Mod}$ y $N_1, N_2 \in (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})\text{-Mod}$, se tiene que

$$\text{Hom}_{(\mathcal{B}, I_B)}(X_i \otimes_{S_i} M_i, X_j \otimes_{S_j} N_j) = 0, \text{ si } i \neq j,$$

lo que implica que $F_B^{X_1} \oplus F_B^{X_2}$ es pleno, pues cada $F_B^{X_i}$ lo es. Consideramos $F_i = F_{\pi_i}$, donde

$$\pi_i : (\mathcal{B}^{X_1} \times \mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_1} \times I_B^{X_2}) \rightarrow (\mathcal{B}^{X_i}, I_B^{X_i}),$$

es la proyección. Tenemos las equivalencias

$$(\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1})\text{-Mod} \times (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})\text{-Mod} \xrightarrow{F_1 \oplus F_2} [(\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1}) \times (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})]\text{-Mod}$$

y

$$[(\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1}) \times (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})]\text{-Mod} \xrightarrow{F_{\theta}^{-1}} (\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod}.$$

Entonces, $G := F_{\theta^{-1}}(F_1 \oplus F_2)$ es equivalencia de categorías. Veremos que el siguiente diagrama de funtores conmuta, hasta isomorfismo, de donde se obtiene la proposición:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1})\text{-Mod} \times (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})\text{-Mod} & \xrightarrow{G} & (\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod} \\
& \searrow F_B^{X_1} \oplus F_B^{X_2} & \downarrow F_B^X \\
& & (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}
\end{array}$$

Dados $M_1 \in (\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1})$ y $M_2 \in (\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})$, consideremos $M = F_1(M_1) \oplus F_2(M_2)$ y el isomorfismo canónico de B -módulos $\sigma^0 : X \otimes_S M \rightarrow (X_1 \otimes_{S_1} M_1) \oplus (X_2 \otimes_{S_2} M_2)$, donde dados $x \in X = X_1 \oplus X_2$, $x = x_1 + x_2$ y $m \in M = F_1(M_1) \oplus F_2(M_2)$, $m = m_1 + m_2$, se tiene

$$\sigma^0(x \otimes m) = x_1 \otimes m_1 + x_2 \otimes m_2.$$

Veamos que σ^0 determina un isomorfismo de funtores $\sigma = (\sigma^0, 0) : F_B^X G \rightarrow F_B^{X_1} \oplus F_B^{X_2}$.

Debemos ver que cada

$$\sigma : F_B^X(G((M_1, M_2))) \rightarrow (F_B^{X_1} \oplus F_B^{X_2})(M_1, M_2)$$

es isomorfismo en $(\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$, lo cual es claro porque σ^0 es isomorfismo de B -módulos. También debemos ver que conmuta el siguiente cuadro para $(f_1, f_2) : (M_1, M_2) \rightarrow (N_1, N_2)$

$$\begin{array}{ccc} F_B^{X_1}(M_1) \oplus F_B^{X_2}(M_2) & \xleftarrow{\sigma} & F_B^X G(M_1, M_2) \\ \downarrow (F_B^{X_1} \oplus F_B^{X_2})(f_1, f_2) & & \downarrow F_B^X G(f_1, f_2) \\ F_B^{X_1}(N_1) \oplus F_B^{X_2}(N_2) & \xleftarrow{\sigma} & F_B^X G(N_1, N_2) \end{array}$$

En efecto, $f_1 \in \text{Hom}_{(\mathcal{B}^{X_1}, I_B^{X_1})}(M_1, N_1)$ y $f_2 \in \text{Hom}_{(\mathcal{B}^{X_2}, I_B^{X_2})}(M_2, N_2)$, tenemos que

$$G(f_1, f_2)^0 = \begin{pmatrix} F_1(f_1)^0 & 0 \\ 0 & F_2(f_2)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^0 & 0 \\ 0 & f_2^0 \end{pmatrix}$$

$$G(f_1, f_2)^1(\gamma) = \begin{pmatrix} F_1(f_1)^1(\theta^{-1}(\gamma)) & 0 \\ 0 & F_2(f_2)^1(\theta^{-1}(\gamma)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1[\pi_1 \theta^{-1}(\gamma)] & 0 \\ 0 & f_2^1[\pi_2 \theta^{-1}(\gamma)] \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma^0(F_B^X G(f_1, f_2))^0[x \otimes m] &= \sigma^0(x \otimes G(f_1, f_2)^0[m]) + \sigma^0\left(\sum_{j_r, r} x p_{j_r} \otimes G(f_1, f_2)^1(\gamma_{j_r})[m]\right) \\ &= \sigma^0(x \otimes [f_1^0(m_1) + f_2^0(m_2)]) + \sigma^0\left(\sum_{j_r, r} x p_{j_r} \otimes f_1^1[\pi_1 \bar{\theta}^{-1}(\gamma_{j_r})][m_1]\right) \\ &\quad + \sigma^0\left(\sum_{j_r, r} x p_{j_r} \otimes f_2^1[\pi_2 \bar{\theta}^{-1}(\gamma_{j_r})][m_2]\right) \\ &= \sigma^0(x \otimes [f_1^0(m_1)]) + \sum_{j_1} x p_{j_1} \otimes f_1^1[\pi_1 \bar{\theta}^{-1}(\gamma_{j_1})][m_1] \\ &\quad + \sigma^0(x \otimes [f_2^0(m_2)]) + \sum_{j_2} x p_{j_2} \otimes f_2^1[\pi_2 \bar{\theta}^{-1}(\gamma_{j_2})][m_2] \\ &= x \otimes [f_1^0(m_1)] + \sum_{j_1} x p_{j_1} \otimes f_1^1[\pi_1 \bar{\theta}^{-1}(\gamma_{j_1})][m_1] \\ &\quad + x \otimes [f_2^0(m_2)] + \sum_{j_2} x p_{j_2} \otimes f_2^1[\pi_2 \bar{\theta}^{-1}(\gamma_{j_2})][m_2] \\ &= ([F_B^{X_1} \oplus F_B^{X_2}](f_1, f_2))^0 \sigma^0[x \otimes m]. \end{aligned}$$

Y $\sigma^0(F_B^X G(f_1, f_2))^1 = 0$. Entonces, el cuadro anterior conmuta.

Finalmente, al tener el isomorfismo de funtores $F_B^X G \cong F_B^{X_1} \oplus F_B^{X_2}$, obtenemos que F_B^X es fiel y pleno. $\square$

2.7 Funtores de reducci3n y bifunctor $Ext_{\mathcal{E}}(-, ?)$

En esta secci3n vamos a explorar la exactitud de los funtores de reducci3n que hemos presentado antes. As3, todas las dit3lgebras d3biles triangulares entrelazadas que consideramos en esta secci3n son de Roiter, lo cual garantiza la existencia de la estructura exacta $\mathcal{E}$ en la categor3a de m3dulos asociada.

Lema 2.7.1. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ y $(\mathcal{B}, J)$ son dit3lgebras d3biles entrelazadas y consideremos cualquier funtor exacto $F : (\mathcal{B}, J)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, entonces se induce una transformaci3n natural de bifuntores*

$$F^* : Ext_{(\mathcal{B}, J)}(-, ?) \rightarrow Ext_{(\mathcal{A}, I)}(F(-), F(?)).$$

Adem3s, F^* es un monomorfismo cuando F es fiel y pleno.

Demostraci3n: Esto es un caso particular de 4.3.26. □

Observaci3n 2.7.2. *Recordemos que si $(\mathcal{A}, I)$ es una dit3lgebra d3bil triangular entrelazada con estratificaci3n (R, W) , entonces $A = T_R(W_0)$, por lo que tener un A -m3dulo M es equivalente a tener:*

- Un morfismo de k -3lgebras $\phi_b : R \rightarrow End_k(M)$ y;
- Un morfismo de R - R -bim3dulos $\phi_1 : W_0 \rightarrow End_k(M)$.

Recuerde adem3s que $Hom_{R-R}(W_0, Hom_k(M, M)) \cong Hom_R(W_0 \otimes_R M, M)$, via el isomorfismo η , el cual env3a $\phi_1 \mapsto \bar{\phi}_1$, definido en un generador b3sico de la forma $w \otimes m$ como $\bar{\phi}_1(w \otimes m) := \phi_1(w)[m]$.

Los elementos de $A = T_R(W_0)$ tienen la forma

$$a = r + \sum_{j \in J} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_2} w_{j_1},$$

donde $r \in R$, $w_{j_i} \in W_0$ y $n_j \geq 1$. Se tiene la siguiente forma recursiva que describe la acci3n de a sobre M mediante $\bar{\phi}_1$.

Lema 2.7.3. *Para cada $a = r + \sum_{j \in J} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_1} \in A$ y $m \in M$, tendremos que*

$$am = rm + \sum_{j \in J} \bar{\phi}_1(w_{j_{n_j}} \otimes w_{j_{n_j-1}} \cdots w_{j_2} w_{j_1} m)$$

Demostraci3n: Veamos que, para todo $t \geq 1$, $(w_t w_{t-1} \cdots w_2 w_1)m = \bar{\phi}_1(w_t \otimes w_{t-1} \cdots w_2 w_1 m)$.

La prueba ser3 por inducci3n sobre t .

Para $t = 1$, tendremos que $w_1 m := \phi_1(w)[m] = \bar{\phi}_1(w_1 \otimes m)$.

Supongamos que se tiene cierto para $t \geq 1$.

Para $t + 1$ note que $w_{t+1} \cdots w_1 m = \phi_1(w_{t+1})[w_t \cdots w_2 w_1 m] = \bar{\phi}_1(w_{t+1} \otimes w_t \cdots w_2 w_1 m)$. □

Observación 2.7.4. *Dados $M, N \in A/I\text{-Mod}$ y $\gamma \in \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N)$, vamos a construir primero un A -módulo $N \oplus_\gamma M$.*

- *Consideremos al R -módulo $N \oplus M$.*
- *Consideramos el morfismo de R -módulos $\hat{\gamma} : W_0 \otimes_R (N \oplus M) \rightarrow N \oplus M$, dado por la siguiente composición de morfismos*

$$W_0 \otimes_R (N \oplus M) \xrightarrow{\cong} (W_0 \otimes_R N) \oplus (W_0 \otimes_R M) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \phi_N & \gamma \\ 0 & \phi_M \end{pmatrix}} N \oplus M.$$

Donde ϕ_N y ϕ_M son los morfismos de R -módulos correspondientes a la acción de A sobre N y M . Entonces, en representación matricial, tendremos que la fórmula

$$w \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wn + \gamma(w \otimes m) \\ wm \end{pmatrix},$$

determina una estructura de A -módulo sobre el R -módulo $N \oplus M$, que vamos a denotar por $N \oplus_\gamma M$.

Veremos que se tiene una fórmula que describe la acción de A sobre $N \oplus_\gamma M$, para ello necesitamos la siguiente noción.

Definición 2.7.5. *Si M y N son A -módulos, definimos la siguiente transformación lineal:*

$$(-)^e : \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(A \otimes_R M, N)$$

que envía cada $\gamma \in \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N)$ en γ^e definido por: $\gamma^e(r \otimes m) = 0$, si $r \in R$, y

$$\gamma^e(w_t w_{t-1} \cdots w_1 \otimes m) = \sum_{i=2}^t w_t \cdots w_i \gamma(w_{i-1} \otimes w_{i-2} \cdots w_1 m) + \gamma(w_t \otimes w_{t-1} \cdots w_1 m),$$

si $w_1, \dots, w_t \in W_0$ y $t \geq 1$.

Esto nos ayuda a visualizar, de forma más concreta la estructura de A -módulo que tiene $N \oplus_\gamma M$.

Lema 2.7.6. *Para $a \in A$ y $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \in N \oplus_\gamma M$, la acción de a sobre $N \oplus_\gamma M$ satisface:*

$$a \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an + \gamma^e(a \otimes m) \\ am \end{pmatrix}.$$

Demostración: Para $t \geq 1$ y $w_1, \dots, w_t \in W_0$, se tiene

$$w_t \cdots w_1 \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \cdots w_1 n + \gamma^e(w_t \cdots w_1 \otimes m) \\ w_t \cdots w_1 m \end{pmatrix}.$$

La prueba de esto será por inducción sobre t .

Para $t = 1$, tendremos que $w_1 \binom{n}{m} = \binom{w_1 n + \gamma(w_1 \otimes m)}{w_1 m}$.

Supongamos que se tiene la fórmula válida para $t \geq 1$.

Para $t + 1$ note que

$$\begin{aligned} w_{t+1} w_t \cdots w_1 \binom{n}{m} &= w_{t+1} \binom{w_t \cdots w_1 n + \gamma^e(w_t w_{t-1} \cdots w_1 \otimes m)}{w_t \cdots w_1 m} \\ &= \binom{w_{t+1} \cdots w_1 n + w_{t+1} \gamma^e(w_t w_{t-1} \cdots w_1 \otimes m) + \gamma(w_{t+1} \otimes w_t \cdots w_1 m)}{w_{t+1} \cdots w_1 m} \\ &= \binom{w_{t+1} \cdots w_1 n + \gamma^e(w_{t+1} w_t \cdots w_1 \otimes m)}{w_{t+1} \cdots w_1 m}. \end{aligned}$$

Luego, para $a = r + \sum_{j \in J} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_2} w_{j_1} \in A$, tendremos que

$$a \binom{n}{m} = \binom{an + \sum_{j \in J} \gamma^e(w_{j_{n_j}} w_{j_{n_j-1}} \cdots w_{j_1} \otimes m)}{am}$$

□

Definición 2.7.7. El morfismo inclusión $\sigma : I \rightarrow A$, determina la transformación lineal

$$(\sigma \otimes Id)^* : Hom_R(A \otimes_R M, N) \rightarrow Hom_R(I \otimes_R M, N).$$

Nos fijamos en su núcleo $K := \ker(\sigma \otimes Id)^*$ y en el espacio

$$\mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N) := ((-)^e)^{-1}(K) \subseteq Hom_R(W_0 \otimes_R M, N).$$

Lema 2.7.8. Si M, N son A/I -módulos y $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$, entonces el A -módulo $N \oplus_\gamma M$ es un A/I -módulo.

Demostración: Si $a \in I$, entonces

$$a \binom{n}{m} = \binom{an + \gamma^e(a \otimes m)}{am} = \binom{0}{0}$$

puesto que $IM = 0$, $IN = 0$ y, dado que $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$, se tiene que $\gamma^e \in K$, lo que significa que $0 = (\sigma \otimes Id)^*(\gamma^e)(a \otimes m) = \gamma^e(\sigma \otimes Id)(a \otimes m) = \gamma^e(a \otimes m)$. □

Lema 2.7.9. Para cada $(f^0, f^1) \in Phom_{R-W_0}(M, N)$, definimos

$$\partial((f^0, f^1))(w \otimes m) = f^0(wm) - wf^0(m) + f^1(\delta(w))[m],$$

entonces $\partial(Phom_{R-W_0}(M, N)) \subseteq \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$.

Demostración: Sea $\gamma := \partial((f^0, f^1))$, tomemos $a \in I$ y veamos que $\gamma^e(a \otimes m) = 0$. Supongamos que $a = r + \sum_{j \in J} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_2} w_{j_1}$, entonces tendremos

$$\begin{aligned} & \gamma^e(a \otimes m) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i=2}^{n_j} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_i} f^0(w_{j_{i-1}} \cdots w_{j_1} m) - \sum_{j \in J} \sum_{i=2}^{n_j} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_i} w_{j_{i-1}} f^0(w_{j_{i-2}} \cdots w_{j_1} m) \\ &+ \sum_{j \in J} \sum_{i=2}^{n_j} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_i} f^1(\delta(w_{j_{i-1}})) [w_{j_{i-2}} \cdots w_{j_1} m] + \sum_{j \in J} f^0(w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_1} m) \\ &- \sum_{j \in J} w_{j_{n_j}} f^0(w_{j_{n_j-1}} \cdots w_{j_1} m) + \sum_{j \in J} f^1(\delta(w_{j_{n_j}})) [w_{j_{n_j-1}} \cdots w_{j_1} m] \end{aligned}$$

Recordando que $f^0(rm) = rf^0(m)$ y $f^1(\delta(r))[m] = 0$, tenemos que $\gamma^e(a \otimes m)$ es

$$\begin{aligned} &= \left[\sum_{j \in J} \sum_{i=2}^{n_j-1} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_i} f^0(w_{j_{i-1}} \cdots w_{j_1} m) - \sum_{j \in J} \sum_{i=3}^{n_j} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_i} w_{j_{i-1}} f^0(w_{j_{i-2}} \cdots w_{j_1} m) \right] \\ &+ \left[\sum_{j \in J} w_{j_{n_j}} f^0(w_{j_{n_j-1}} \cdots w_{j_1} m) - \sum_{j \in J} w_{j_{n_j}} f^0(w_{j_{n_j-1}} \cdots w_{j_1} m) \right] \\ &- [rf^0(m) + \sum_{j \in J} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_1} f^0(m)] + [f^0(rm) + \sum_{j \in J} f^0(w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_1} m)] \\ &+ \left[\sum_{j \in J} f^1(\delta(w_{j_{n_j}})) [w_{j_{n_j-1}} \cdots w_{j_1} m] + \sum_{j \in J} \sum_{i=2}^{n_j} w_{j_{n_j}} \cdots w_{j_i} f^1(\delta(w_{j_{i-1}})) [w_{j_{i-2}} \cdots w_{j_1} m] \right] \end{aligned}$$

Como $IM = 0$ e $IN = 0$, la suma anterior coincide con $f^1(\delta(a))[m]$. Como I es un ideal triangular, es balanceado por lo que se tiene $\delta(a) \in VI + IV$. Utilizando nuevamente que $IM = 0$ e $IN = 0$, obtenemos $f^1(\delta(a))[m] = 0$, como deseábamos. $\square$

Lema 2.7.10. Sean $M, N \in A/I\text{-Mod}$ y $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$. Sean $s^0 := (1, 0)^t : N \rightarrow N \oplus_\gamma M$ y $p^0 : (0, 1) : N \oplus_\gamma M \rightarrow M$ la inyección y la proyección en $R\text{-Mod}$. Entonces, la sucesión

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{s^0} N \oplus_\gamma M \xrightarrow{p^0} M \rightarrow 0$$

es exacta en $A/I\text{-Mod}$. En consecuencia,

$$\Psi_\gamma : N \xrightarrow{(s^0, 0)} N \oplus_\gamma M \xrightarrow{(p^0, 0)} M$$

es una confluencia en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

Demostración: Por 2.7.8, $N \oplus_\gamma M$ es A/I -módulo. Por 2.7.6, es fácil ver que s^0 y p^0 son morfismos de A -módulos y, por consecuencia, de A/I -módulos. Por 1.5.4, Ψ_γ es una confluencia. $\square$

Lema 2.7.11. Si $0 \rightarrow N \xrightarrow{(1,0)^t} E \xrightarrow{(0,1)} M \rightarrow 0$ es exacta en $A\text{-Mod}$, con $E = N \oplus M$ como R -módulos, entonces existe $\gamma \in \text{Hom}_R(W_0 \otimes M, N)$ tal que $E = N \oplus_\gamma M$.

Además, si la sucesión es de A/I -módulos, entonces $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$.

Demostración: Recuerde que la acción de A en E está dada por la acción de W_0 en E . Sean $w \in W_0$, $n \in N$ y $m \in M$. Supongamos que

$$w \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } w \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Denotemos por $s = (1, 0)^t$ y $p = (0, 1)$, entonces

$$y = p \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = p \left(w \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \right) = wp \left[\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \right] = w0 = 0.$$

De manera similar, tendremos

$$\begin{pmatrix} wn \\ 0 \end{pmatrix} = s(wn) = ws(n) = w \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por tanto $x = wn$. Ahora note que

$$y' = p \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = p \left(w \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \right) = wp \left[\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \right] = wm.$$

Por lo tanto, tenemos que $w \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wn + \gamma(w \otimes m) \\ wm \end{pmatrix}$, donde $\gamma(w \otimes m) = x'$ depende de w y m de forma R -balanceada.

Entonces, $E = N \oplus_\gamma M$. Ahora, si M, N, E son anulados por el ideal I , por 2.7.6, obtenemos que $\gamma^e(a \otimes m) = 0$, para todo $a \in I$.

Esto es, $(\sigma \otimes Id)^*(\gamma^e) = 0$, y $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$. □

Lema 2.7.12. Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada de Roiter con estratificación (R, W) y consideremos la estructura exacta canónica $\mathcal{E}$ que tiene la categoría de módulos $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Entonces, para cada $M, N \in A/I\text{-Mod}$, consideramos la función

$$\Psi : \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N) \rightarrow \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N),$$

que envía cada γ sobre la clase de la conflación $\Psi_\gamma : N \xrightarrow{(s^0, 0)} N \oplus_\gamma M \xrightarrow{(p^0, 0)} M$. Entonces, Ψ es un morfismo k -lineal natural en ambas variables.

Demostración: Ψ está bien definido por 2.7.10. Para la naturalidad en la primera variable, tomemos $g^0 : M' \rightarrow M$ en $A/I\text{-Mod}$, denotamos por $g = \mathcal{L}(g^0) = (g^0, 0)$ y queremos probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N) \\
\downarrow (1 \otimes g^0)^* & & \downarrow \bar{g} \\
\mathcal{K}(W_0 \otimes_R M', N) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(M', N)
\end{array}$$

Afirmación 1: $(\gamma(1 \otimes g^0))^e = \gamma^e(1 \otimes g^0)$, para cada $\gamma \in \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N)$. En consecuencia, si $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$, resulta que $(\gamma(1 \otimes g^0))^e$ se anula en $(\sigma \otimes 1)(I \otimes M')$.

En efecto, pues

$$\begin{aligned}
(\gamma(1 \otimes g^0))^e(w_t w_{t-1} \cdots w_1 \otimes m) &= \sum_{i=2}^t w_t \cdots w_i \gamma(1 \otimes g^0)(w_{i-1} \otimes w_{i-2} \cdots w_1 m) \\
&+ \gamma(1 \otimes g^0)(w_t \otimes w_{t-1} \cdots w_1 m) \\
&= \gamma^e(1 \otimes g^0)(w_t w_{t-1} \cdots w_1 \otimes m),
\end{aligned}$$

como deseábamos. Por lo cual el cuadro anterior tiene sentido.

Hay que demostrar $\Psi_{\gamma(1 \otimes g^0)} \sim \Psi_\gamma g$.

Vamos a considerar el morfismo $h := (1_N \oplus g^0, 0) : N \oplus_{\gamma(1 \otimes g^0)} M' \rightarrow N \oplus_\gamma M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Dado que el siguiente diagrama conmuta en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\Psi_{\gamma(1 \otimes g^0)} : & N & \xrightarrow{(s^0, 0)} & N \oplus_{\gamma(1 \otimes g^0)} M' & \xrightarrow{(p^0, 0)} & M' & \\
& \parallel & & \downarrow h & & \downarrow g & \\
\Psi_\gamma : & N & \xrightarrow{(s^0, 0)} & N \oplus_\gamma M & \xrightarrow{(p^0, 0)} & M &
\end{array}$$

se tiene la naturalidad en la primera variable.

Para la naturalidad de la segunda variable, tomemos $f^0 : N \rightarrow N'$ un morfismo de A/I -módulos, escribimos $f = \mathcal{L}(f^0) = (f^0, 0)$, veremos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N) \\
\downarrow f_*^0 & & \downarrow \bar{f} \\
\mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N') & \xrightarrow{\Psi} & \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N')
\end{array}$$

Afirmación 2: $(f^0 \gamma)^e = f^0 \gamma^e$, para cada $\gamma \in \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N)$. En consecuencia, si $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$, resulta que $(f^0 \gamma)^e$ se anula en $(\sigma \otimes 1)(I \otimes M)$. En efecto, pues

$$\begin{aligned}
(f^0 \gamma)^e(w_t w_{t-1} \cdots w_1 \otimes m) &= \sum_{i=2}^t w_t \cdots w_i f^0 \gamma(w_{i-1} \otimes w_{i-2} \cdots w_1 m) \\
&+ f^0 \gamma(w_t \otimes w_{t-1} \cdots w_1 m) \\
&= f^0 \gamma^e(w_t w_{t-1} \cdots w_1 \otimes m),
\end{aligned}$$

como deseábamos. Por tanto el cuadro anterior tiene sentido.

Hay que demostrar que $f\Psi_\gamma \sim \Psi_{f^0\gamma}$, para $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$.

Vamos a considerar el morfismo $h := (f^0 \oplus 1_M, 0) : N \oplus_\gamma M \rightarrow N' \oplus_{f^0\gamma} M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Dado que el siguiente diagrama conmuta en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccccc} \Psi_\gamma : & N & \xrightarrow{(s^0, 0)} & N \oplus_\gamma M & \xrightarrow{(p^0, 0)} & M \\ & \downarrow f & & \downarrow h & & \parallel \\ \Psi_{f^0\gamma} : & N' & \xrightarrow{(s^0, 0)} & N' \oplus_{f^0\gamma} M & \xrightarrow{(p^0, 0)} & M, \end{array}$$

se tiene la naturalidad en la segunda variable.

Ahora veamos que con esto podemos mostrar que Ψ es k -lineal.

Sean $\gamma, \lambda \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$. Denotemos por $\gamma \hat{\oplus} \lambda$ a la composición

$$W_0 \otimes_R (M \oplus M) \xrightarrow{\phi} (W_0 \otimes_R M) \oplus (W_0 \otimes_R M) \xrightarrow{\gamma \oplus \lambda} N \oplus N,$$

donde el morfismo ϕ es el isomorfismo canónico.

Note que $\gamma + \lambda = \nabla^0(\gamma \hat{\oplus} \lambda)(1 \otimes \Delta^0)$, pues $\phi(1 \otimes \Delta^0) = \Delta^0$.

Aquí $M \oplus M$ y $N \oplus N$ son A -módulos. Notemos que $\gamma \hat{\oplus} \lambda \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R (M \oplus M), N \oplus N)$, pues si $\hat{\phi} : A \otimes_R (M \oplus M) \rightarrow (A \otimes_R M) \oplus (A \otimes_R M)$ es el isomorfismo canónico, se tiene la fórmula

$$(\gamma \hat{\oplus} \lambda)^e = [(\gamma \oplus \lambda)\phi]^e = (\gamma^e \oplus \lambda^e)\hat{\phi}.$$

Por lo que $(\gamma \hat{\oplus} \lambda)^e(\sigma \otimes 1) = 0$.

Finalmente, es fácil ver que $h^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es morfismo de A -módulos. Tendremos

entonces que el siguiente diagrama conmuta en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \Psi_{\gamma \hat{\oplus} \lambda} : & N \oplus N & \xrightarrow{(s^0, 0)} & (N \oplus N) \oplus_{\gamma \hat{\oplus} \lambda} (M \oplus M) & \xrightarrow{(p^0, 0)} & M \oplus M \\ & \parallel & & \downarrow (h^0, 0) & & \parallel \\ \Psi_\gamma \oplus \Psi_\lambda : & N \oplus N & \longrightarrow & (N \oplus_\gamma M) \oplus (N \oplus_\lambda M) & \longrightarrow & M \oplus M. \end{array}$$

Por tanto, gracias a la naturalidad de Ψ , tenemos que

$$[\Psi_{\gamma + \lambda}] = [\Psi_{\nabla^0(\gamma \hat{\oplus} \lambda)(1 \otimes \Delta^0)}] = [\nabla \Psi_{\gamma \hat{\oplus} \lambda} \Delta] = [\nabla(\Psi_\gamma \oplus \Psi_\lambda) \Delta] = [\Psi_\gamma] + [\Psi_\lambda].$$

□

Proposición 2.7.13. *Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra débil entrelazada de Roiter con estratificación (R, W) y consideremos la estructura exacta canónica $\mathcal{E}$ que tiene la categoría de módulos*

$(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Entonces, para cada $M, N \in A/I\text{-Mod}$, existe una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N) \xrightarrow{\sigma} \text{Phom}_{R-W}(M, N) \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N) \xrightarrow{\Psi} \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N) \rightarrow 0$$

Demostración: Veamos que Ψ es sobreyectiva. Pues la exactitud central de σ y ∂ es clara.

Tomemos una confluencia $\xi : N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, para ver que $[\xi] \in \text{Im}(\Psi)$, podemos asumir que $f^1 = 0$ y $g^1 = 0$ y que la sucesión exacta $0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$ se divide en $R\text{-Mod}$, ver 1.5.1.

Entonces, existe un isomorfismo h^0 en $R\text{-Mod}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{f^0} & E & \xrightarrow{g^0} & M \\ \parallel & & \downarrow h^0 & & \parallel \\ N & \xrightarrow{s^0} & N \oplus M & \xrightarrow{p^0} & M \end{array}$$

Como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, entonces el R -módulo $N \oplus M$ admite una estructura de A/I -módulo $\widehat{N \oplus M}$ tal que $h = (h^0, 0) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(E, \widehat{N \oplus M})$.

Entonces tendremos que $s^0 = h^0 f^0$ y $p^0 = g^0 (h^0)^{-1}$ son morfismos de A/I -módulos. Por 2.7.11, sabemos que $\widehat{N \oplus M} = N \oplus_\gamma M$, para algún $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes M, N)$ y encajamos el diagrama resultante en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ con el funtor $\mathcal{L}_{(\mathcal{A}, I)}$ para obtener $\Psi(\gamma) = [\xi]$. Así Ψ es sobre.

Veamos que la sucesión es exacta en $\mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$. Por 2.7.12, el morfismo Ψ es un morfismo de k -lineal. Entonces, si $\Psi(\gamma) = 0$, existe un isomorfismo $h \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que conmuta el siguiente diagrama en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \Psi_0 : & N & \xrightarrow{(s^0, 0)} & N \oplus_0 M & \xrightarrow{(p^0, 0)} & M \\ & \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ \Psi_\gamma : & N & \xrightarrow{(s^0, 0)} & N \oplus_\gamma M & \xrightarrow{(p^0, 0)} & M. \end{array}$$

Se tienen entonces las relaciones

$$s^0 = h^0 s^0, p^0 = p^0 h^0 \text{ y, para cada } v \in V, h^1(v) s^0 = 0, p^0 h^1(v) = 0.$$

Por tanto, $h^0 = \begin{pmatrix} 1 & g^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $h^1(v) = \begin{pmatrix} 0 & g^1(v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, para alguna $(g^0, g^1) \in \text{Phom}_{R-W}(M, N)$.

La condición

$$0 = w h^0 \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} - h^0(w \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}) - h^1(\delta(w)) \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

para $w \in W_0$, $n \in N$ y $m \in M$, es equivalente a la igualdad

$$\gamma(w \otimes m) = g^0(wm) - w g^0(m) + g^1(\delta(w))[m].$$

En efecto, note que

$$\begin{aligned}
0 &= wh^0 \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} - h^0(w \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}) - h^1(\delta(w)) \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \\
&= w \left[\begin{pmatrix} 1 & g^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 1 & g^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (w \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}) - \begin{pmatrix} 0 & g^1(\delta(w)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \\
&= w \begin{pmatrix} n + g^0(m) \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & g^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wn + 0(w \otimes m) \\ wm \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g^1(\delta(w))[m] \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} wn + wg^0(m) + \gamma(w \otimes m) \\ wm \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} wn + g^0(wm) \\ wm \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g^1(\delta(w))[m] \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $\partial(g^0, g^1) = \gamma$. Este argumento es reversible. Para $(g^0, g^1) \in \text{Phom}_{R-W}(M, N)$, tomando $\gamma := \partial((g^0, g^1))$, y un isomorfismo con la descripción matricial dada como antes.

Esto nos muestra que la sucesión del enunciado es exacta en $\mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$. $\square$

Lema 2.7.14. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter con estratificación (R, W) . Sea W'_0 un sumando directo del R - R -bimódulo W_0 tal que $\delta(W'_0) = 0$. Considere a B la subálgebra de A generada por R y W'_0 . Sea $I_B = B \cap I$. Por tanto B es generada libremente por R y W'_0 . El morfismo de ditálgebras débiles $j : (\mathcal{B}, I_B) \rightarrow (\mathcal{A}, I)$ induce un funtor restricción que es exacto*

$$F_j : (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod},$$

el cual induce un morfismo de bifuntores $F_j^* : \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(-, ?) \rightarrow \text{Ext}_{(\mathcal{B}, I_B)}(F_j(-), F_j(?))$.

Además, si $i : W'_0 \rightarrow W_0$ es la inclusión, el morfismo $(i \otimes 1)^* : \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(W'_0 \otimes_R M, N)$ se restringe como se indica en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Phom}_{R-W_0}(M, N) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N) \\
\downarrow \pi & & \downarrow (i \otimes 1)^* & & \downarrow F_j^* \\
\text{Hom}_R(M, N) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{K}(W'_0 \otimes_R M, N) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Ext}_{(\mathcal{B}, I_B)}(M, N).
\end{array}$$

donde π es la proyección.

Demostración: Por 2.1.6, es claro que F_j es exacto. Por 2.7.13, para $M, N \in A/I\text{-Mod}$, se tiene una sucesión exacta

$$\text{Phom}_{R-W_0}(M, N) \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N) \xrightarrow{\Psi} \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N) \rightarrow 0$$

Así mismo, para $M, N \in B/I_B\text{-Mod}$, se tiene una sucesión exacta

$$\text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\partial_B} \mathcal{K}(W'_0 \otimes_R M, N) \xrightarrow{\Psi_B} \text{Ext}_{(\mathcal{B}, I_B)}(M, N) \rightarrow 0.$$

Donde hay que recordar que aquí $\text{Hom}_R(M, N) = \text{Phom}_{R-W_0}(M, N)$, pues son morfismos de R -módulos. Además sabemos que existen los morfismos inclusiones $i : W'_0 \hookrightarrow W_0$, $j : B \hookrightarrow A$

y $l : I_B \hookrightarrow I$, los cuales nos inducen epimorfismos

$$(i \otimes 1)^* : \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(W'_0 \otimes_R M, N)$$

$$(j \otimes 1)^* : \text{Hom}_R(A \otimes_R M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(B \otimes_R M, N)$$

y el morfismo

$$(l \otimes 1)^* : \text{Hom}_R(I \otimes_R M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(I_B \otimes_R M, N)$$

Entonces, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & \text{Hom}_R(A \otimes_R M, N) & \xrightarrow{(\sigma \otimes 1)^*} & \text{Hom}_R(I \otimes_R M, N) \\ \downarrow (j \otimes 1)^* & & \downarrow (j \otimes 1)^* & & \downarrow (l \otimes 1)^* \\ K' & \longrightarrow & \text{Hom}_R(B \otimes_R M, N) & \xrightarrow{(\sigma' \otimes 1)^*} & \text{Hom}_R(I_B \otimes_R M, N). \end{array}$$

También se tiene el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) & \xrightarrow{(-)^e} & \text{Hom}_R(A \otimes_R M, N) \\ \downarrow (i \otimes 1)^* & & \downarrow (j \otimes 1)^* \\ \text{Hom}_R(W'_0 \otimes_R M, N) & \xrightarrow{(-)^e} & \text{Hom}_R(B \otimes_R M, N). \end{array}$$

En efecto, si $\gamma \in \text{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N)$, $m \in M$ y $w_t, \dots, w_1 \in W'_0$, tenemos:

$$\begin{aligned} [\gamma(i \otimes 1)]^e(w_t \cdots w_1 \otimes m) &= \sum_{i=2}^t w_t \cdots w_i \gamma(i \otimes 1)(w_{i-1} \otimes w_{i-2} \cdots w_1 m) + \gamma(i \otimes 1)(w_t \otimes w_{t-1} \cdots w_1 m) \\ &= \sum_{i=2}^t w_t \cdots w_1 \gamma(w_{i-1} \otimes w_{i-2} \cdots w_1 m) + \gamma(w_t \otimes w_{t-1} \cdots w_1 m) \\ &= \gamma^e(j \otimes 1)(w_t \cdots w_1 \otimes m). \end{aligned}$$

Entonces, el morfismo $(i \otimes 1)^*$ se restringe a

$$(i \otimes 1)^*| : \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N) \rightarrow \mathcal{K}(W'_0 \otimes_R M, N).$$

En efecto, si $\gamma \in \mathcal{K}(W_0 \otimes_R M, N)$, entonces $\gamma^e \in K$. En consecuencia, $((i \otimes 1)^*(\gamma))^e = (j \otimes 1)^*(\gamma^e) \in K'$. Se sigue que $(i \otimes 1)^*(\gamma) \in \mathcal{K}(W'_0 \otimes_R M, N)$.

La conmutatividad del cuadro derecho en el enunciado se debe a que $F_j(N \oplus_\gamma M) = N \oplus_{\gamma(i \otimes 1)} M$ y, en consecuencia, $F_j([\Psi_\gamma]) = [\Psi_{\gamma(i \otimes 1)}]$

□

Lema 2.7.15. *Supongamos que (A, I) es una ditalgebra de Roiter con estratificación (R, W) . Sea W'_0 un sumando directo del R - R -bimódulo W_0 tal que $\delta(W'_0) = 0$. Considere a R^a la subálgebra de T generada por R y W'_0 . Por tanto R^a es generada libremente por R y W'_0 . Consideremos $I' = R^a \cap I$. Entonces, tenemos el funtor exacto F_j*

$$F_j : (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \rightarrow R^a/I'\text{-Mod},$$

que envía cada A/I -módulo en el R^a/I' -módulo obtenido por restricción y cada $f = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{(\mathcal{A}, I)}(M, N)$ en f^0 , el cual induce un morfismo de bifuntores

$$F_j^* : \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(-, ?) \rightarrow \text{Ext}_{R^a/I', R}(F_j(-), F_j(?)),$$

donde $\text{Ext}_{R^a/I', R}(F_j(-), F_j(?))$ corresponde a la categoría exacta $(R^a/I'\text{-Mod}, \xi)$ del ejemplo 4.2.2.

Demostración: Se sigue de 2.7.14, pues $B = R^a$, $I_B = I'$ y la categoría exacta $(R^a/I'\text{-Mod}, \xi)$ puede identificarse con $(\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$. □

Lema 2.7.16. Sea $(\mathcal{A}, I)$ una ditálgebra de Roiter con estratificación (R, W) . Sea W'_0 un sumando directo del R - R -bimódulo W_0 tal que $\delta(W'_0) = 0$ y sea $(\mathcal{A}^a, I^a)$ la ditálgebra débil con estratificación (R^a, W^a) obtenida de $(\mathcal{A}, I)$ por absorción de W'_0 como antes. Note que la equivalencia $F^a : (\mathcal{A}^a, I^a)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es exacta.

Entonces, se tiene una sucesión exacta de bifuntores

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{(\mathcal{A}^a, I^a)}(-, ?) \xrightarrow{(F^a)^*} \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(F^a(-), F^a(?)) \xrightarrow{F_j^*} \text{Ext}_{R^a/I', R}(F_j F^a(-), F_j F^a(?)).$$

Demostración: Veamos que F^a es un funtor exacto, para esto tomemos una confluación $N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ en $(\mathcal{A}^a, I^a)\text{-Mod}$, entonces tenemos la sucesión $F^a(N) \xrightarrow{F^a(f)} F^a(E) \xrightarrow{F^a(g)} F^a(M)$, donde su composición es cero por ser F^a un funtor. Sabemos que $0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$ es exacta y se divide en $R^a\text{-Mod}$.

Además, como $[F^a(f)]^0 = f^0$ y $[F^a(g)]^0 = g^0$, se tiene que la sucesión

$$0 \rightarrow F^a(N) \xrightarrow{[F^a(f)]^0} F^a(E) \xrightarrow{[F^a(g)]^0} F^a(M) \rightarrow 0$$

se divide en $R\text{-Mod}$, por lo tanto la sucesión es una confluación y entonces F^a es exacto.

Si $\xi : N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ es confluación en $(\mathcal{A}^a, I^a)\text{-Mod}$, entonces la sucesión $0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$ es exacta y se divide en $R^a\text{-Mod}$. Entonces, la confluación $F_j F^a(\xi)$ tiene la forma $0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$ y se divide en $(R^a\text{-Mod}, \xi)$. Así, $(F_j)^*(F^a)^* = 0$.

Recíprocamente, si $\eta : N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ es una confluación $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ tal que $F_j(\eta)$ se divide en $(R^a\text{-Mod}, \xi)$, entonces la sucesión $0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$ es exacta y se divide en $R^a\text{-Mod}$. Entonces, el par exacto $\xi : N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ es una confluación en $(\mathcal{A}^a, I^a)\text{-Mod}$ tal que $F^a(\xi) = \eta$.

Se tiene en particular que, por ser F^a una equivalencia, $(F^a)^*$ es un monomorfismo. □

Lema 2.7.17. *Supongamos que $(\mathcal{A}^s, I^s)$ es una ditálgebra obtenida de la ditálgebra de Roiter $(\mathcal{A}, I)$ con estratificación (R, W) por eliminación de un ideal I_R de R . Entonces, el correspondiente funtor fiel y pleno $F^s : (\mathcal{A}^s, I^s)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es exacto e induce un isomorfismo de bifuntores*

$$\text{Ext}_{(\mathcal{A}^s, I^s)}(-, ?) \xrightarrow{(F^s)^*} \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(F^s(-), F^s(?)).$$

Demostración: Veamos que el funtor F^s es exacto. Tome $\xi : N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ una confluación en $(\mathcal{A}^s, I^s)\text{-Mod}$, entonces la composición en el par $F^s(N) \xrightarrow{F^s(f)} F^s(E) \xrightarrow{F^s(g)} F^s(M)$ es cero. Además, como $[F^s(f)]^0 = f^0$ y $[F^s(g)]^0 = g^0$, la sucesión

$$0 \rightarrow F^s(N) \xrightarrow{[F^s(f)]^0} F^s(E) \xrightarrow{[F^s(g)]^0} F^s(M) \rightarrow 0$$

se divide en $R\text{-Mod}$, por lo tanto la sucesión es una confluación en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ y entonces F^s es exacto.

Por 4.3.26, ya sabemos que F^s produce un monomorfismo $(F^s)^*$.

Supongamos que tenemos una confluación $\zeta : F^s(N) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} F^s(M)$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$. Como $(\mathcal{A}, I)$ es de Roiter, por 1.5.1, podemos asumir que $f^1 = 0, g^1 = 0$ y que la sucesión

$$0 \rightarrow F^s(N) \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} F^s(M) \rightarrow 0$$

es exacta en $A/I\text{-Mod}$ y se divide en $R\text{-Mod}$. Por tanto, el R -módulo $E = N \oplus M$ es anulado por I_R . Esto implica que $E = F^s(E)$, entonces la sucesión

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$$

es exacta en $\mathcal{A}^s/I^s\text{-Mod}$ y se divide en $R^s\text{-Mod}$. Entonces, si aplicamos F^s a la confluación

$$\zeta' : N \xrightarrow{(f^0, 0)} E \xrightarrow{(g^0, 0)} M \rightarrow 0,$$

obtenemos $F^s(\zeta') = \zeta$.

Concluimos que F^s es mono y epi. □

Lema 2.7.18. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter con estratificación (R, W) , supongamos que se tiene la descomposición de R - R -bimódulos $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$ y $W_1 = \delta(W'_0) \oplus W''_1$. Considere la ditálgebra débil entrelazada $(\mathcal{A}^r, I^r)$ obtenida de $(\mathcal{A}, I)$ por regularización del bimódulo W'_0 . Entonces, el funtor F^r de 2.1.5 es exacto, por lo que se tiene un monomorfismo de bifuntores*

$$\text{Ext}_{(\mathcal{A}^r, I^r)}(-, ?) \xrightarrow{(F^r)^*} \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(F^r(-), F^r(?)).$$

Mas aún, si $\delta|_{W'_0}$ es inyectiva, $(F^r)^*$ es un isomorfismo.

Demostración: Sabemos que $(\mathcal{A}^r, I^r)$ es de Roiter, por lo que para verificar la primera afirmación basta mostrar que el funtor F^r es exacto.

Tome $\xi : N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ una confluencia en $(\mathcal{A}^r, I^r)\text{-Mod}$, entonces $gf = 0$ y la composición $F^r(N) \xrightarrow{F^r(f)} F^r(E) \xrightarrow{F^r(g)} F^r(M)$ es cero.

Además, $[F^r(f)]^0 = f^0$ y $[F^r(g)]^0 = g^0$, por lo que la sucesión

$$0 \rightarrow F^r(N) \xrightarrow{[F^r(f)]^0} F^r(E) \xrightarrow{[F^r(g)]^0} F^r(M) \rightarrow 0$$

se divide en $R\text{-Mod}$. Por lo tanto, la sucesión es una confluencia y entonces F^r es exacto.

Finalmente, si $\delta|_{W'_0}$ es inyectiva, entonces el funtor F^r es denso y por tanto una equivalencia.

De aquí se sigue que $(F^r)^*$ es epimorfismo. En efecto, si $\xi' : F^r(N) \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} F^r(M)$ es una confluencia en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, entonces existe $E \in (\mathcal{A}^r, I^r)\text{-Mod}$ y un isomorfismo $h : F^r(E) \rightarrow E'$. Así, se tiene un diagrama conmutativo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\xi} : & F^r(N) & \xrightarrow{\widehat{f}} & F^r(E) & \xrightarrow{\widehat{g}} & F^r(M) \\ & \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ \xi' : & F^r(N) & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & F^r(M), \end{array}$$

Por lo que $\widehat{\xi}$ es también una confluencia de $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ que resulta equivalente a ξ' . Como F^r es pleno, hay morfismos $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ tales que $F^r(f) = \widehat{f}$ y $F^r(g) = \widehat{g}$. Como F^r es equivalencia, tenemos el par exacto $\xi : N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ en $(\mathcal{A}^r, I^r)\text{-Mod}$ que es una confluencia porque $f^0 = F^r(f)^0 = \widehat{f}^0$ y $g^0 = F^r(g)^0 = \widehat{g}^0$ son tales que la sucesión

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\widehat{f}^0} E \xrightarrow{\widehat{g}^0} M \rightarrow 0$$

es exacta y se divide en $R\text{-Mod}$. Ahora, basta notar que $F^r(\xi) = \widehat{\xi} \sim \xi'$ para deducir que $(F^r)^*$ es suprayectivo. □

Lema 2.7.19. *Supongamos que $(\mathcal{A}, I)$ es una ditálgebra débil entrelazada de Roiter con estratificación (R, W) . Sea W'_0 un sumando directo de el R - R -bimódulo W_0 tal que $\delta(W'_0) = 0$. Considere B la subálgebra inicial de $(\mathcal{A}, I)$. Consideremos el morfismo de ditálgebras débiles entrelazadas $j : (\mathcal{B}, I_B) \rightarrow (\mathcal{A}, I)$, el funtor restricción de 2.7.14*

$$F_j : (\mathcal{A}, I)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}.$$

Si $M \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ y $N \in (\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$ tal que $F_j(M) \cong N$ en $(\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$, entonces existe $\bar{N} \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ con $\bar{N} \cong M$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ y $F_j(\bar{N}) = N$.

Demostración: Sea $f = (f^0, f^1) : F_j(M) \rightarrow N$ un isomorfismo en $(\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$. Así, $f^1 = 0$ y f^0 es isomorfismo de B -módulos.

Dado que $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es de Roiter, existe $\overline{N} \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ con R -módulo subyacente N tal que $\widehat{f} = (f^0, 0) : M \rightarrow \overline{N}$ es un morfismo en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, por tanto un isomorfismo.

Para probar que $F_j(\overline{N}) = N$, veamos que la acción en W'_0 es la misma. Denotemos por $\cdot$ la acción de W'_0 en N y sea $\circ$ la acción de W'_0 en N obtenida por restricción de la acción de A sobre el $(\mathcal{A}, I)$ -módulo $\overline{N}$.

Sean $w \in W'_0$, $n \in N$ y $m \in M$ tal que $f^0(m) = n$. Entonces, tenemos que

$$w \cdot n = w \cdot f^0(m) = f^0(wm) = w \circ f^0(m) = w \circ n.$$

□

Lema 2.7.20. *Supongamos que X es un B -módulo triangular completo, donde B es la subálgebra inicial de una ditalgebra débil entrelazada de Roiter $(\mathcal{A}, I)$. Entonces, el funtor $F^X : (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod} \rightarrow (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ es exacto e induce la siguiente sucesión exacta de bifuntores*

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{(\mathcal{A}^X, I^X)}(-, ?) \xrightarrow{(F^X)^*} \text{Ext}_{(\mathcal{A}, I)}(F^X(-), F^X(?)) \xrightarrow{F_j^*} \text{Ext}_{(\mathcal{B}, I_B)}(F_j F^X(-), F_j F^X(?)).$$

Demostración: Como $(\mathcal{A}^X, I^X)$ es de Roiter si $N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ es una confluencia en $(\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$, podemos suponer que $f = (f^0, 0)$ y $g = (g^0, 0)$. Como F^X es k -functor, la composición del siguiente par de morfismos $F^X(N) \xrightarrow{F^X(f)} F^X(E) \xrightarrow{F^X(g)} F^X(M)$ es cero.

Además, como $F^X(f)^0 = 1 \otimes f^0$ y $F^X(g)^0 = 1 \otimes g^0$, entonces la sucesión exacta

$$0 \rightarrow F^X(N) \xrightarrow{F^X(f)^0} F^X(E) \xrightarrow{F^X(g)^0} F^X(M) \rightarrow 0$$

se divide en $R\text{-Mod}$, pues es la imagen bajo $X \otimes_S -$ de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0,$$

que se divide en $S\text{-Mod}$. Por tanto, F^X es un funtor exacto.

Como X es completo, F^X es fiel y pleno, por lo que $(F^X)^*$ es monomorfismo. Resta mostrar la exactitud central.

Supongamos que $N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ es una confluencia en $(\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$, donde asumimos que $f = (f^0, 0)$ y $g = (g^0, 0)$ como antes. Entonces, tenemos que la sucesión $0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$ se divide en $S\text{-Mod}$.

Tensorizando por el B - S -bimódulo X , se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow X \otimes_S N \xrightarrow{1 \otimes f^0} X \otimes_S E \xrightarrow{1 \otimes g^0} X \otimes_S M \rightarrow 0$$

que se divide en $B\text{-Mod}$ y es anulada por I_B , pues la sucesión

$$F^X(N) \xrightarrow{F^X(f)} F^X(E) \xrightarrow{F^X(g)} F^X(M)$$

es anulada por I . Notemos que

$$F_j F^X(N) \rightarrow F_j F^X(E) \rightarrow F_j F^X(M)$$

coincide con

$$X \otimes_S N \xrightarrow{(1 \otimes f^0, 0)} X \otimes_S E \xrightarrow{(1 \otimes g^0, 0)} X \otimes_S M.$$

Por tanto $F_j^*(F^X)^* = 0$.

Supongamos ahora que $\xi : F^X(N) \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} F^X(M)$ es una confluencia que es enviada a 0 bajo F_j^* . Por 4.1.3, hay un diagrama conmutativo en $(\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccccc} F_j F^X(N) & \xrightarrow{F_j(u)} & F_j(H) & \xrightarrow{F_j(v)} & F_j F^X(M) \\ \parallel & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \downarrow \cong & & \parallel \\ X \otimes_S N & \xrightarrow{\quad} & (X \otimes_S N) \oplus (X \otimes_S M) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} & X \otimes_S M. \end{array}$$

Por lo tanto, $F_j(H) \cong X \otimes_S (N \oplus M)$ en $B\text{-Mod}$.

Por 2.7.19, existe $E \in (\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$, con $E \cong H$ en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ y $F_j(E) = X \otimes_S (N \oplus M)$. Por 2.4.3, existe algún $\underline{E} \in (\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$ con $F^X(\underline{E}) \cong E$.

Como F^X es pleno, obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} F^X(\zeta) : & F^X(N) & \xrightarrow{F^X(f)} & F^X(\underline{E}) & \xrightarrow{F^X(g)} & F^X(M) \\ & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel \\ \xi : & F^X(N) & \xrightarrow{u} & H & \xrightarrow{v} & F^X(M). \end{array}$$

donde $\zeta : N \xrightarrow{f} \underline{E} \xrightarrow{g} M$ es un par de morfismos en $(\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$ tal que $gf = 0$, pues F^X es fiel.

Así, el primer renglón es una confluencia en $(\mathcal{A}, I)\text{-Mod}$ equivalente a ξ .

Además, como vimos en 2.6.4, tenemos que $F_B^X F_{jX} = F_j F^X$. Entonces, $F_B^X(F_{jX}(\zeta))$ es una confluencia en $(\mathcal{B}, I_B)\text{-Mod}$ que se divide y, como F_B^X es fiel y pleno, por 4.3.28, obtenemos que $F_{jX}(\zeta)$ es una confluencia que se divide en $(\mathcal{B}^X, I_B^X)\text{-Mod}$. En particular,

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f^0} \underline{E} \xrightarrow{g^0} M \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $S\text{-Mod}$ que se divide. Por lo tanto, tenemos que ζ es confluencia en $(\mathcal{A}^X, I^X)\text{-Mod}$ tal que $F^X(\zeta) \cong \xi$, como queríamos demostrar. $\square$

Capítulo 3

Apéndice 1

Este apéndice presenta resultados conocidos de M. Auslander e I. Reiten sobre categorías $Mod(\mathcal{C})$ de funtores sobre una categoría aditiva $\mathcal{C}$ con idempotentes que se dividen. Este material, que usamos en 1.7, lo hemos presentado de manera elemental y detallada. Muestra relaciones interesantes que permiten estudiar $\mathcal{C}$ a partir de $Mod(\mathcal{C})$.

3.1 Categorías aditivas con idempotentes que se dividen

En esta sección, supondremos que $\mathcal{C}$ es una k -categoría aditiva.

Definición 3.1.1. Dado $Y \in \mathcal{C}$, un idempotente $e \in End_{\mathcal{C}}(Y)$ **se divide** si y sólo si existen morfismos

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{r} X \text{ en } \mathcal{C} \text{ tales que } ri = 1_X \text{ y } e = ir.$$

Decimos que **los idempotentes se dividen en $\mathcal{C}$** si y sólo si lo anterior ocurre para cada $Y \in \mathcal{C}$ y cada idempotente $e \in End_{\mathcal{C}}(Y)$.

Lema 3.1.2. Supongamos que los idempotentes se dividen en $\mathcal{C}$. Sean $Y \in \mathcal{C}$ y $e \in End_{\mathcal{C}}(Y)$ un idempotente. El idempotente e se divide y existen morfismos

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{r} X \text{ en } \mathcal{C} \text{ tales que } ri = 1_X \text{ y } e = ir.$$

También se divide el idempotente $1_Y - e$ y existen morfismos

$$Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{p} Z \text{ en } \mathcal{C} \text{ tales que } ps = 1_Z \text{ y } 1_Y - e = sp.$$

Entonces, $(r, p)^t : Y \rightarrow X \oplus Z$ es isomorfismo con inversa $(i, s) : X \oplus Z \rightarrow Y$ y conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} & Y & \xrightarrow{r} & X & \\ \begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} \downarrow & & & & \parallel \\ X \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} & X & & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & X \oplus Z \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} i & s \end{pmatrix} \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix}} & X \oplus Z \\ e \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix}} & X \oplus Z \end{array}$$

Demostración: Hay que notar que

$$(i \ s) \begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} = ir + sp = e + 1_Y - e = 1_Y.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} (i \ s) = \begin{pmatrix} ri & rs \\ pi & ps \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_X & rs \\ pi & 1_Z \end{pmatrix}.$$

Finalmente note que $(1_Y - e)s = sps = s$, por lo que $irs = es = 0$, entonces $rs = 0$. Ahora, note que $p = psp = p(1_Y - e) = p - pe$. Entonces $pir = pe = 0$, de lo cual concluimos que $pi = 0$.

La conmutatividad de los primeros dos diagramas es clara. Para el último diagrama, hay que notar que $re = rir = r$. Por lo que

$$\begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} re \\ pe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix}$$

□

Corolario 3.1.3. *Los idempotentes se dividen en $\mathcal{C}$ si y sólo si para cada idempotente $e \in \text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$ existen $X, Z \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo $h : Y \rightarrow X \oplus Z$ tal que conmuta el cuadro*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & X \oplus Z \\ \downarrow e & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y & \xrightarrow{h} & X \oplus Z \end{array}$$

Demostración: Por 3.1.2, tendremos que existe tal cuadro conmutativo. □

Observación 3.1.4. *Notemos que en la situación del corolario anterior, como $(0, 1)^t : Z \rightarrow X \oplus Z$ es el núcleo de $\begin{pmatrix} 1_X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en la categoría $\mathcal{C}$, entonces e tiene núcleo en $\mathcal{C}$ de la forma $Z \rightarrow Y$.*

Demostración: Hay que notar primero que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Veamos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene la propiedad universal del núcleo de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supongamos que existe $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : K \rightarrow X \oplus Z$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces tendremos que $a = 0$ y b es arbitrario. Por tanto $b : K \rightarrow Z$ es el único morfismo tal que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

Por lo cual $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es núcleo de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ahora el cuadrado conmutativo induce un isomorfismo a los núcleos, por lo que e tiene núcleo en $\mathcal{C}$ de la forma $Z \rightarrow Y$. □

3.2 Categorías Krull-Schmidt

Fijamos una k -categoría $\mathcal{C}$ aditiva donde los idempotentes se dividen. A partir de cierto punto, supondremos además que $\mathcal{C}$ es **Hom-finita**. Esto último significa que $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es finita, para cada $X, Y \in \mathcal{C}$.

Definición 3.2.1. Diremos que la categoría $\mathcal{C}$ es **Krull-Schmidt** si y sólo si cada objeto $X \in \mathcal{C}$ se descompone como suma directa finita de inescindibles con álgebra de endomorfismos local.

En lo que sigue aplicaremos una técnica de proyectivización: Todo objeto de una categoría aditiva puede transformarse en un proyectivo finitamente generado sobre su anillo de endomorfismos.

Recordemos que si X es un objeto en una categoría aditiva $\mathcal{C}$, entonces $\text{add}X$ denota la subcategoría plena de $\mathcal{C}$ formada por los sumandos directos de sumas directas finitas de copias de X .

Proposición 3.2.2. Sean $\mathcal{C}$ una k -categoría aditiva y $X \in \mathcal{C}$. Denotemos por Γ a su álgebra de endomorfismos $\Gamma := \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$. El funtor

$$F := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod-}\Gamma$$

tiene las siguientes propiedades:

- (1) El funtor F induce biyecciones $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(FY, FZ)$, para cada $Y, Z \in \text{add}X$.
- (2) Si $Y \in \text{add}X$, entonces $FY \in \text{proj-}\Gamma$.

Entonces, F induce un funtor fiel y pleno $\text{add}X \rightarrow \text{proj-}\Gamma$, donde $\text{proj-}\Gamma$ denota la subcategoría plena de $\text{mod-}\Gamma$ formada por los Γ -módulos proyectivos finitamente generados. Este funtor es una equivalencia si los idempotentes se dividen en $\mathcal{C}$.

Demostración: (1) Claramente esta es una biyección para $Y = X = Z$ pues, en este caso, la composición

$$\Gamma = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \xrightarrow{F} \text{Hom}_{\Gamma}(F(X), F(X)) = \text{Hom}_{\Gamma}(\Gamma, \Gamma) \xrightarrow{\theta} \Gamma,$$

donde θ es el isomorfismo canónico dado por evaluar en 1, es la función identidad. Si $Y = X^n$ y $Z = X^m$, tenemos el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, X^m) & \xrightarrow{F} & \text{Hom}_{\Gamma}(\Gamma^n, \Gamma^m) \\ \uparrow \phi_X & & \uparrow \Phi_{\Gamma} \\ (M_{m \times n}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X))) & \xrightarrow{M_{m \times n}(F)} & M_{m \times n}(\text{Hom}_{\Gamma}(\Gamma, \Gamma)) \end{array}$$

donde hemos considerado al isomorfismo $F(X^n) \cong F(X)^n$, que existe porque F es aditivo, como una identificación y similarmente para m ; los isomorfismos ϕ_X y Φ_{Γ} son los que asocian los morfismos entre sumas directas y sus matrices correspondientes. Es decir ϕ_X manda a

cada matriz de morfismos $\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \cdots & f_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X))$ en el morfismo $f = \sum_{i,j} \sigma_j f_{j,i} \pi_i$, donde $\pi_i : X^n \rightarrow X$ y $\sigma_j : X \rightarrow X^m$ denotan proyecciones e inyecciones de las sumas directas X^n y X^m respectivamente.

Se sigue que la función F del diagrama es biyectiva.

Para el razonamiento que sigue, conviene observar que la transformación

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(FY, FZ)$$

es natural en la variable Y y en la variable Z .

Ahora consideremos el caso general donde se tiene $X^n = Y \oplus Y'$ y $X^m = Z \oplus Z'$ en $\mathcal{C}$. Consideremos las inyecciones $s : Y \rightarrow X^n$ y $\sigma : Z \rightarrow X^m$ y las proyecciones $p : X^n \rightarrow Y$ y $\pi : X^m \rightarrow Z$. Se tiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \xrightarrow{F} & \text{Hom}_{\Gamma}(FY, FZ) \\ \begin{array}{c} s^* \uparrow \\ \downarrow p^* \end{array} & & \begin{array}{c} F(s)^* \uparrow \\ \downarrow F(p)^* \end{array} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, Z) & \xrightarrow{F} & \text{Hom}_{\Gamma}(FX^n, FZ) \\ \begin{array}{c} \pi_* \uparrow \\ \downarrow \sigma_* \end{array} & & \begin{array}{c} F(\pi)_* \uparrow \\ \downarrow F(\sigma)_* \end{array} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, X^m) & \xrightarrow{F} & \text{Hom}_{\Gamma}(FX^n, FX^m) \end{array}$$

De aquí obtenemos que, como p es retracción y σ sección, p^* y σ_* son secciones. Como la F del renglón inferior es inyectiva, se sigue que la F del renglón superior también lo es. Similarmente π retracción y s sección, tenemos que $F(\pi)_*$ y $F(s)^*$ son retracciones. Como la F del renglón inferior es suprayectiva, se sigue que la F del renglón superior también lo es. Hemos probado (1).

(2) Tenemos que $F(X) = \Gamma$ es proyectivo, y también $F(X^n) \cong F(X)^n \cong \Gamma^n$ es proyectivo. Si $X^n = Y \oplus Y'$, entonces como $F(Y) \oplus F(Y') \cong F(Y \oplus Y') = F(X^n)$ es proyectivo, también lo es $F(Y)$.

Veamos ahora que, si los idempotentes se dividen en $\mathcal{C}$, entonces el funtor $F : \text{add}X \rightarrow \text{proj-}\Gamma$ es denso. Si $P \in \text{proj-}\Gamma$, existe un natural n tal que $\Gamma^n = Q \oplus P$. Si denotamos por $r : \Gamma^n \rightarrow Q$ la proyección y $s : Q \rightarrow \Gamma^n$ la inyección canónicas, entonces, $e := sr \in \text{End}_{\Gamma}(\Gamma^n)$ es un idempotente y tenemos un cuadro conmutativo en $\text{mod-}\Gamma$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^n & \xrightarrow{t} & Q \oplus P \\ \downarrow e & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma^n & \xrightarrow{t} & Q \oplus P \end{array}$$

con t isomorfismo y $P \cong \ker(e)$. Como F es fiel y pleno, existe un idempotente $g \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X^n)$ tal que $F(g) = e$. Por hipótesis, g se divide, por lo que existe un isomorfismo h tal que conmuta en $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{h} & Y \oplus Z \\ \downarrow g & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X^n & \xrightarrow{h} & Y \oplus Z \end{array}$$

Aplicando F obtenemos un cuadro conmutativo en $\text{mod-}\Gamma$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^n & \xrightarrow{F(h)} & F(Y) \oplus F(Z) \\ \downarrow F(g)=e & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma^n & \xrightarrow{F(h)} & F(Y) \oplus F(Z) \end{array}$$

donde $F(h)$ es isomorfismo. Por 3.1.3, se tiene $F(Z) \cong \ker(e) \cong P$. $\square$

El siguiente teorema es cierto para categorías aditivas arbitrarias. En esta sección sólo lo enunciamos y demostramos en el caso que mas nos interesa a saber, cuando $\mathcal{C}$ es Hom-finita. Ver [11] y [13].

Teorema 3.2.3. *Sea X un objeto en la k -categoría aditiva Hom-finita $\mathcal{C}$, donde los idempotentes se dividen. Supongamos que hay descomposiciones*

$$X_1 \oplus \cdots \oplus X_r \cong X \cong Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_s$$

en suma directa de objetos con álgebras de endomorfismos locales. Entonces, $r = s$ y existe una permutación $\sigma \in S_r$ tal que $Y_i \cong X_{\sigma(i)}$, para cada i .

Demostración: Sea $\mathcal{C} = \text{add}X$, consideremos el álgebra $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ y la equivalencia de categorías $F : \text{add}X \rightarrow \text{proj-}\Gamma$. Nuestra hipótesis nos dice que Γ es un álgebra de dimensión finita, por lo que sabemos que vale el teorema de Krull-Schmidt en $\text{mod-}\Gamma$. Aplicando F a las descomposiciones de la hipótesis, obtenemos

$$F(X_1) \oplus \cdots \oplus F(X_r) \cong F(X) \cong F(Y_1) \oplus \cdots \oplus F(Y_s)$$

con $F(X_i), F(Y_j)$ inescindibles. Luego, $r = s$ y existe una permutación $\sigma \in S_r$ tal que $F(Y_i) \cong F(X_{\sigma(i)})$, para cada i . Como F es fiel y pleno, esos isomorfismos provienen de isomorfismos $Y_i \cong X_{\sigma(i)}$ en $\mathcal{C}$. $\square$

Corolario 3.2.4. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría Krull-Schmidt Hom-finita, siempre que tengamos $X \cong d_1 X_1 \oplus \cdots \oplus d_n X_n$ en $\mathcal{C}$, donde $X_1, \dots, X_n$ son inescindibles no isomorfos dos a dos, con $n \in \mathbb{N}$ y cada $d_i \geq 1$. Entonces las clases de isomorfismo de los inescindibles X_i 's así como sus multiplicidades están determinadas de manera única.*

Observación 3.2.5. *De hecho puede probarse (ver [13]), que si $\mathcal{C}$ es una k -categoría aditiva Hom-finita, son equivalentes:*

- (1) $\mathcal{C}$ es una categoría Krull-Schmidt.

(2) Los idempotentes en $\mathcal{C}$ se dividen.

(3) Para cada $Y \in \mathcal{C}$, el álgebra $\text{End}_{\mathcal{C}}(Y)$ es local si y sólo si Y es inescindible.

La revisión de este resultado escapa al plan de este trabajo, donde las propiedades enlistadas ya se tienen para las categorías que nos interesan.

3.3 Categoría de funtores

En lo que sigue fijamos una k -categoría Krull-Schmidt $\mathcal{C}$ cuyos idempotentes se dividen y es Hom-finita. Suponemos también que $\mathcal{C}$ tiene un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de objetos. El material de esta sección es bien conocido, puede encontrarse en una serie de artículos de **M. Auslander** e **I. Reiten** en la revista *Communications in Algebra*. Ver [1]. Se trata, en cierto sentido, de otra forma de proyectivizar los objetos de una categoría aditiva $\mathcal{C}$, para estudiar $\mathcal{C}$. Al final de la sección veremos una aplicación de esto.

Ejemplo 3.3.1. Para una ditálgebra débil entrelazada especial $(\mathcal{A}, I)$, nos interesa aplicar lo que sigue a la categoría $\mathcal{C} := (\mathcal{A}, I)\text{-mod}$, que es un ejemplo de lo anterior.

Observación 3.3.2. Si $h : X \rightarrow Y$ es un morfismo entre inescindibles en $\mathcal{C}$, son equivalentes:

- (1) h es isomorfismo;
- (2) h es sección;
- (3) h es retracción.

Demostración: Supongamos que h es retracción, entonces existe $g : Y \rightarrow X$ en $\mathcal{C}$ tal que $hg = \text{Id}_Y$. Entonces, $e := gh$ es un idempotente del álgebra local $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$. Se sigue que $e = 0$ o bien $e = \text{Id}_X$. En el primer caso, tendremos

$$0 = he = hgh = h \text{ y } \text{Id}_Y = hg = 0,$$

por lo que $Y = 0$, lo que contradice que Y es inescindible. Entonces $e = \text{Id}_X$ y h es isomorfismo. Hemos mostrado $3 \Rightarrow 1$. El argumento $2 \Rightarrow 1$ es dual. $\square$

Observación 3.3.3. Notemos que un ideal I de $\mathcal{C}$ está determinado por los espacios $I(X, Y)$, donde $X, Y \in \mathcal{C}$ son inescindibles.

En efecto, si $X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ y $Y = \bigoplus_{j=1}^m Y_j$ en $\mathcal{C}$, con X_i, Y_j inescindibles, tenemos las inyecciones $\sigma_i : X_i \rightarrow X$ y las proyecciones $\pi_i : X \rightarrow X_i$. Similarmente, tenemos las inyecciones $\sigma'_j : Y_j \rightarrow Y$ y las proyecciones $\pi'_j : Y \rightarrow Y_j$. Entonces, por ser I un ideal de $\mathcal{C}$, si $f \in I(X, Y)$, tendremos que cada morfismo $f_{j,i} := \pi'_j f \sigma_i \in I(X_i, Y_j)$. Recíprocamente, si cada $f_{j,i} \in I(X_i, Y_j)$, tendremos

$$f = \left(\sum_j \sigma'_j \pi'_j \right) f \left(\sum_i \sigma_i \pi_i \right) = \sum_{i,j} \sigma'_j \pi'_j f \sigma_i \pi_i = \sum_{i,j} \sigma'_j f_{j,i} \pi_i \in I(X, Y).$$

Definición 3.3.4. El **radical** $\text{rad}_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ es el ideal de $\mathcal{C}$ generado por los morfismos que no son isomorfismos entre inescindibles.

Lema 3.3.5. Para cada par $X, Y \in \mathcal{C}$, consideremos el conjunto $I(X, Y)$ cuyos elementos son los morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tales que para cada inescindible $Z \in \mathcal{C}$, cada $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ y $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, no es isomorfismo hfg .

Dichos espacios conforman un ideal I de $\mathcal{C}$ que coincide con el ideal radical $\text{rad}_{\mathcal{C}}$.

Además, se tiene lo siguiente:

- (1) Si X es inescindible, $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ consiste de los morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ que no son secciones.
- (2) Si Y es inescindible, $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ consiste de los morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ que no son retracciones.
- (3) Si ambos X, Y son inescindibles, $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ consiste de los morfismos que no son isomorfismos.

Demostración: Vamos a demostrar que en efecto I es un ideal de $\mathcal{C}$.

Note que si $f, f' \in I(X, Y)$ y $c \in k$, para cada inescindible Z , $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ y $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, se tiene que

$$h(f + cf')g = hfg + chf'g$$

es suma de dos elementos nilpotentes y, por tanto, no es isomorfismo. Así cada $I(X, Y)$ es un subespacio de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Dado $f \in I(X, Y)$, es fácil ver que al componer a la izquierda o a la derecha con otro morfismo de $\mathcal{C}$, obtenemos nuevamente un elemento de I . De modo que I es efectivamente un ideal de $\mathcal{C}$.

Finalmente, veamos que $I = \text{rad}_{\mathcal{C}}$:

De 3.3.3, I está generado por los elementos de los espacios $I(X, Y)$, para cada $X, Y \in \mathcal{C}$ inescindibles. Si tenemos un tal generador $f \in I(X, Y)$, entonces $hf1_X$ no es isomorfismo para cada $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ y, por lo tanto f no es sección, y tampoco es isomorfismo. Luego, f es un no isomorfismo entre inescindibles, por lo que $f \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Así $I \subseteq \text{rad}_{\mathcal{C}}$.

Recíprocamente, si $f \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un generador de $\text{rad}_{\mathcal{C}}$, es decir un no isomorfismo entre inescindibles, y existen morfismos $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ y $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, con Z un objeto inescindible de $\mathcal{C}$, tales que hfg es isomorfismo, entonces h es retracción y g es sección. Por 3.3.2, h y g son isomorfismos, por lo que también f lo es: contradicción. Se sigue que los generadores de $\text{rad}_{\mathcal{C}}$ pertenecen a I y, por lo tanto, $\text{rad}_{\mathcal{C}} \subseteq I$.

Solo probaremos el punto (1) ya que el (2) es dual.

Note que si $f \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y f es sección, entonces existe un morfismo $t : Y \rightarrow X$ tal que $tf = 1_X$. Entonces como X es inescindible y $tf1_X$ es un isomorfismo, obtenemos una contradicción.

Si $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \setminus \text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, existen $g : Z \rightarrow X$ y $h : Y \rightarrow Z$ en $\mathcal{C}$ con Z inescindible tales que $hf'g$ es isomorfismo. Por 3.3.2, g es isomorfismo y de allí derivamos que f' es sección. Por lo que $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ consiste de los morfismos no secciones.

□

Definición 3.3.6. *La categoría de funtores $Mod(\mathcal{C})$ tiene por objetos los k -funtores contravariantes $M : \mathcal{C} \rightarrow k\text{-Mod}$. Un morfismo $f : M \rightarrow N$ en $Mod(\mathcal{C})$ es una transformación natural de M en N . Como $\mathcal{C}$ tiene un conjunto de representantes de las isoclases de los objetos, la colección de las transformaciones naturales de M en N es un conjunto. La composición es la composición usual de transformaciones naturales.*

Notemos que $Mod(\mathcal{C})$ es una k -categoría de manera natural, donde dos morfismos $f, f' : M \rightarrow N$ en $Mod(\mathcal{C})$ se combinan linealmente de manera puntual, es decir, $(f + cf')_Z = f_Z + cf'_Z : M(Z) \rightarrow N(Z)$, para cada $Z \in \mathcal{C}$.

Definición 3.3.7. *Sea $M \in Mod(\mathcal{C})$. Por definición, un **subfuntor** L de M es otro funtor $L \in Mod(\mathcal{C})$ tal que $L(Z) \leq M(Z)$, para cada $Z \in \mathcal{C}$, y tal que las inclusiones $j_Z : L(Z) \rightarrow M(Z)$ definen una transformación natural $j : L \rightarrow M$. Denotamos esta situación con la notación $L \leq M$. Se definen de manera natural (puntual) la suma de subfuntores $L_1 + L_2$ y la intersección de subfuntores $L_1 \cap L_2$ de dos funtores L_1 y L_2 de M .*

*Cada $L \leq M$, determina un **funtor cociente** $M/L \in Mod(\mathcal{C})$ definido en cada $Z \in \mathcal{C}$ por $(M/L)(Z) = M(Z)/L(Z)$, y si $\alpha : Z \rightarrow Z'$ en $\mathcal{C}$, su imagen $(M/L)(\alpha) : M(Z')/L(Z') \rightarrow M(Z)/L(Z)$ es la transformación lineal inducida por $M(\alpha) : M(Z') \rightarrow M(Z)$. Tenemos entonces, la proyección canónica $p : M \rightarrow M/L$, dada por las proyecciones canónicas $p_Z : M(Z) \rightarrow (M/L)(Z)$, para cada $Z \in \mathcal{C}$.*

Dado un morfismo $f : M \rightarrow N$ en $Mod(\mathcal{C})$, tenemos el subfuntor $Im f$ de N definido por los subespacios $(Im f)(Z) = Im f_Z \leq N(Z)$, para $Z \in \mathcal{C}$.

Proposición 3.3.8. *La categoría $Mod(\mathcal{C})$ es abeliana.*

Demostración: (1): Es claro que $Mod(\mathcal{C})$ es una categoría aditiva, cuyo objeto cero es el funtor $0 : \mathcal{C} \rightarrow k\text{-Mod}$, que envía todos los objetos de $\mathcal{C}$ al 0. La suma directa $M_1 \oplus M_2$ de $M_1, M_2 \in Mod(\mathcal{C})$ está dada en cada objeto $Z \in \mathcal{C}$ por el espacio $(M_1 \oplus M_2)(Z) = M_1(Z) \oplus M_2(Z)$ y en cada morfismo α de $\mathcal{C}$ por la transformación lineal $(M_1 \oplus M_2)(\alpha) = M_1(\alpha) \oplus M_2(\alpha)$. Se tienen inyecciones canónicas $\sigma_i : M_i \rightarrow M_1 \oplus M_2$ y proyecciones canónicas $\pi_i : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_i$, para $i = 1, 2$, que satisfacen las relaciones

$$\pi_i \sigma_i = id_{M_i}, \pi_i \sigma_j = 0 \text{ si } i \neq j, \text{ y } \sum_{i=1}^2 \sigma_i \pi_i = id_{M_1 \oplus M_2}.$$

(2): La categoría $Mod(\mathcal{C})$ tiene núcleos. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo en $Mod(\mathcal{C})$. Consideramos el subfuntor K de M definido en cada objeto $Z \in \mathcal{C}$ como el espacio vectorial $K(Z) := \ker f_Z \leq M(Z)$, y para cada morfismo $\alpha : Z \rightarrow Z'$, $K(\alpha) : \ker f_{Z'} \rightarrow \ker f_Z$ es la restricción de $M(\alpha)$. Tenemos la inclusión $j : K \rightarrow M$. Supongamos que $g : L \rightarrow M$ es otro morfismo tal que $fg = 0$ en $Mod(\mathcal{C})$. Para cada $Z \in \mathcal{C}$, tenemos $f_Z g_Z = 0$ y, entonces, existe $h_Z : L(Z) \rightarrow K(Z)$ tal que $j_Z h_Z = g_Z$. Veamos que $h : L \rightarrow K$ es natural. Si $\alpha : Z \rightarrow Z'$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, tenemos

$$j_Z K(\alpha) h_{Z'} = M(\alpha) j_{Z'} h_{Z'} = M(\alpha) g_{Z'} = g_Z L(\alpha) = j_Z h_Z L(\alpha).$$

Como j_Z es inyectiva, obtenemos $K(\alpha) h_{Z'} = h_Z L(\alpha)$, como deseábamos. La unicidad de h se obtiene de la unicidad de cada h_Z . Hemos mostrado que $j : K \rightarrow M$ es el núcleo del morfismo f en $Mod(\mathcal{C})$.

(3): La categoría $Mod(\mathcal{C})$ tiene conúcleos. La prueba es similar a la anterior, dado $f : M \rightarrow N$ en $Mod(\mathcal{C})$, la proyección $p : N \rightarrow N/Im f$ es conúcleo de f en $Mod(\mathcal{C})$.

(4): Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo en $Mod(\mathcal{C})$. Entonces, tenemos su morfismo núcleo $j : \ker(f) \rightarrow M$ y su morfismo conúcleo $p : N \rightarrow \text{Cok}(f)$ en $Mod(\mathcal{C})$. También tenemos el morfismo núcleo $\sigma : \ker(p) \rightarrow N$ de p y el morfismo conúcleo $\pi : M \rightarrow \text{Coker}(j)$ de j , en $Mod(\mathcal{C})$.

Entonces, si utilizamos las definiciones categóricas, tenemos $Im(f) = \ker(p)$ y $Coim(f) = \text{Coker}(j)$. Consideremos el único morfismo $\bar{f} : Coim(f) \rightarrow Im(f)$ tal que la composición

$$M \xrightarrow{\pi} Coim(f) \xrightarrow{\bar{f}} Im(f) \xrightarrow{\sigma} N$$

coincide con f . Entonces, como $k\text{-Mod}$ es una categoría abeliana, cada $\bar{f}_Z$ es isomorfismo y, por lo tanto, $\bar{f}$ también lo es. Se sigue que $Mod(\mathcal{C})$ es una categoría abeliana. $\square$

Corolario 3.3.9. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo en $Mod(\mathcal{C})$, entonces:

- (1) f es epimorfismo si y sólo si, para cada $Z \in \mathcal{C}$, f_Z es suprayectivo;
- (2) f es monomorfismo si y sólo si, para cada $Z \in \mathcal{C}$, f_Z es inyectiva;
- (3) f es isomorfismo si y sólo si, para cada $Z \in \mathcal{C}$, f_Z es biyectiva.

Corolario 3.3.10. Dada una sucesión de morfismos $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ en $Mod(\mathcal{C})$, la sucesión $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ es exacta en $Mod(\mathcal{C})$ si y sólo si lo es

$$0 \rightarrow M(Z) \xrightarrow{f_Z} E(Z) \xrightarrow{g_Z} N(Z) \rightarrow 0$$

en $k\text{-Mod}$, para cada $Z \in \mathcal{C}$.

La categoría $Mod(\mathcal{C})$ es muy parecida a una categoría de módulos sobre un anillo con uno. Son válidas las versiones correspondientes de los teoremas de Noether. Tenemos por ejemplo, los dos siguientes.

Proposición 3.3.11. Si $f : M \rightarrow N$ y $g : M \rightarrow Q$ son morfismos en $Mod(\mathcal{C})$, con g epimorfismo y tales que $\ker(g) \subseteq \ker(f)$, existe un único morfismo $\bar{f} : Q \rightarrow N$ tal que $g\bar{f} = f$.

Demostración: Para cada $X \in \mathcal{C}$ existe una transformación lineal $\bar{f}_X : Q(X) \rightarrow N(X)$ única tal que $g_X \bar{f}_X = f_X$. La naturalidad de $\bar{f} = \{\bar{f}_X\}_X$ se sigue de que g es epimorfismo. $\square$

La prueba de la siguiente versión del teorema de la correspondencia es sencilla y la omitimos.

Proposición 3.3.12. Sean $K \leq M$ con $M \in Mod(\mathcal{C})$ y $g : M \rightarrow M/K$ la proyección. Entonces, hay una correspondencia biyectiva entre la clase $\mathcal{S}_K(M)$ de los subfuntores de M que contienen a K y la clase $\mathcal{S}(M/K)$ de los subfuntores de M/K . Esta biyección $\phi : \mathcal{S}_K(M) \rightarrow \mathcal{S}(M/K)$ envía cada $N \in \mathcal{S}_K(M)$ en $\phi(N) = N/K$.

Si $T \leq M/K$, entonces $\phi^{-1}(T)$ es el subfuntor de M definido, para $X \in \mathcal{C}$, por $\phi^{-1}(T)(X) = g_X^{-1}(T(X))$, y para $s : X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, $\phi^{-1}(T)(s)$ es la restricción $\phi^{-1}(T)(Y) \rightarrow \phi^{-1}(T)(X)$ de $M(s) : M(Y) \rightarrow M(X)$.

Observación 3.3.13. Para cada $Z \in \mathcal{C}$, se tiene el funtor $(-, Z) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z) \in \text{Mod}(\mathcal{C})$. Para cada $M \in \text{Mod}(\mathcal{C})$, por el lema de Yoneda, se tiene el isomorfismo

$$\text{Hom}_{\text{Mod}(\mathcal{C})}((-, Z), M) \rightarrow M(Z),$$

dado por $g \mapsto g_Z(1_Z)$.

Lo anterior implica que cada funtor $(-, Z)$ es proyectivo en $\text{Mod}(\mathcal{C})$. En efecto, si $f : M \rightarrow N$ es un epimorfismo y $g : (-, Z) \rightarrow N$ es un morfismo en $\text{Mod}(\mathcal{C})$, se tiene que $g_Z(1_Z) \in N(Z)$, que tiene que ser de la forma

$$f_Z(m) = g_Z(1_Z), \text{ para algún } m \in M(Z),$$

porque f_Z es suprayectivo. Ese elemento $m \in M(Z)$ determina un morfismo $\bar{g} : (-, Z) \rightarrow M$ tal que $\bar{g}_Z(1_Z) = m$. Entonces, tenemos

$$f_Z \bar{g}_Z(1_Z) = f_Z(m) = g_Z(1_Z),$$

de donde usando el isomorfismo de Yoneda, obtenemos $f\bar{g} = g$.

También se obtiene del lema de Yoneda que cada morfismo $(-, X) \rightarrow (-, Y)$ en $\text{Mod}(\mathcal{C})$ es de la forma $(-, f)$, para algún morfismo $f : X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$.

Definición 3.3.14. Un funtor $M \in \text{Mod}(\mathcal{C})$ se llama **finitamente generado** si y sólo si hay un epimorfismo $p : \bigoplus_{i=1}^n (-, Z_i) \rightarrow M$ en $\text{Mod}(\mathcal{C})$, para algunos $Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{C}$.

Observación 3.3.15. Notemos que $M \in \text{Mod}(\mathcal{C})$ es finitamente generado si y sólo si existe una familia finita $Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{C}$ y $m_i \in M(Z_i)$ tales que, para cada $X \in \mathcal{C}$ y $m \in M(X)$, existen $s_i \in (X, Z_i)$ tales que $m = \sum_{i=1}^n M(s_i)(m_i)$.

En efecto, si $p : \bigoplus_{i=1}^n (-, Z_i) \rightarrow M$ es epimorfismo, los elementos $m_i := p_{Z_i}(1_{Z_i}) \in M(Z_i)$ cumplen esa condición. Esto se debe a que, si $X \in \mathcal{C}$ y $m \in M(X)$, como

$$p_X : \bigoplus_{i=1}^n (X, Z_i) \rightarrow M(X)$$

es suprayectiva, obtenemos $m = \sum_{i=1}^n p_X(s_i)$, para algunos $s_i \in (X, Z_i)$. Pero, para cada i , conmuta el cuadro

$$\begin{array}{ccc} (Z_i, Z_i) & \xrightarrow{p_{Z_i}|} & M(Z_i) \\ \downarrow s_i^* & & \downarrow M(s_i) \\ (X, Z_i) & \xrightarrow{p_X|} & M(X) \end{array}$$

por lo que

$$M(s_i)(m_i) = M(s_i)p_{Z_i}(1_{Z_i}) = p_X s_i^*(1_{Z_i}) = p_X(s_i).$$

Recíprocamente, dada una tal familia de objetos $Z_i \in \mathcal{C}$ y elementos $m_i \in M(Z_i)$, por el lema de Yoneda, existe un morfismo $p : \bigoplus_i (-, Z_i) \rightarrow M$ con $m_i = p_{Z_i}(1_{Z_i})$, que es suprayectivo gracias a la condición expresada en las primeras líneas de esta observación.

Llamaremos a los elementos $m_1, \dots, m_n$ **elementos generadores** de M .

Notemos que si $N \leq M$ y $m_1, \dots, m_n$ son elementos generadores de M , con $m_i \in M(Z_i)$, y $m_i \in N(Z_i)$, para cada i , entonces $N = M$.

Lema 3.3.16. Si $0 \neq M \in \text{Mod}(\mathcal{C})$ es finitamente generado y $K \leq M$ es subfunctor propio, existe un subfunctor maximal de M que contiene a K .

Demostración: Nos fijamos en un conjunto finito de elementos $m_1, \dots, m_n$ generadores de M , digamos que $m_i \in M(Z_i)$, con $Z_i \in \mathcal{C}$. Consideramos la clase

$$\mathcal{Z} := \{N \leq M \mid K \leq N \text{ y } m_i \notin N(Z_i) \text{ para alguna } i\}.$$

Notemos que cada N está determinado por la familia $\{N(Z) \mid Z \in \mathcal{C}\}$, con $N(Z) \leq M(Z)$. Si $\mathcal{C}'$ denota un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de los objetos de $\mathcal{C}$ y $s_Z : Z \rightarrow Z'$ es un isomorfismo, para $Z \in \mathcal{C}$ con $Z' \in \mathcal{C}'$, entonces la familia anterior está determinada por $\{N(Z') \mid Z' \in \mathcal{C}'\}$. En efecto, si $j : N \rightarrow M$ es la inclusión, tenemos cuadros conmutativos

$$\begin{array}{ccc} N(Z') & \xrightarrow{j_{Z'}} & M(Z') \\ \downarrow N(s_Z) & & \downarrow M(s_Z) \\ N(Z) & \xrightarrow{j_Z} & M(Z) \end{array}$$

De donde derivamos que $N(Z) = M(s_Z)(N(Z'))$. Esto implica que, si denotamos por $\mathcal{P}$ al conjunto potencia del conjunto $\bigcup_{X' \in \mathcal{C}'} M(X')$ y por $F(\mathcal{C}', \mathcal{P})$ al conjunto de funciones de $\mathcal{C}'$ en $\mathcal{P}$, cada $N \leq M$ corresponde a una única función allí $X' \mapsto N(X')$. Se sigue que $\mathcal{Z}$ es un conjunto.

El conjunto $\mathcal{Z}$ está parcialmente ordenado por la relación $\leq$ y es no vacío porque $K \in \mathcal{Z}$.

Aplicaremos el lema de Zorn a $\mathcal{Z}$, para lo cual tomamos una cadena no vacía $\mathcal{F}$ de $\mathcal{Z}$. Definiremos un subfunctor U de M como sigue:

$$\text{Para cada } X \in \mathcal{C}, \text{ definimos } U(X) := \bigcup_{N \in \mathcal{F}} N(X),$$

que es un subespacio de $M(X)$ debido a que $\{N(X) \mid N \in \mathcal{F}\}$ es una cadena de subespacios de $M(X)$. Si $s : X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, definimos $U(s)$ por medio de los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} U(Y) & \xrightarrow{U(s)} & U(X) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigcup_N N(Y) & & \bigcup_N N(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ N(Y) & \xrightarrow{N(s)} & N(X) \end{array}$$

La función $U(s)$ está bien definida porque siempre que $N_1, N_2 \in \mathcal{F}$, si $N_1 \leq N_2$, entonces $N_2(s)$ se restringe a $N_1(s)$. Así, $N \leq U$, para cada $N \in \mathcal{F}$. La naturalidad de la inclusión $j : U \rightarrow M$ se sigue de que $N \leq M$, $N \leq U$ y de la definición de U .

Si $m_i \in U(Z_i)$, para $i \in [1, n]$, entonces $m_i \in N_i(Z_i)$, para algún $N_i \in \mathcal{F}$, por definición de $U(Z_i)$. Como $\mathcal{F}$ es una cadena, existe $N \in \mathcal{F}$ tal que $m_i \in N(Z_i)$, para cada $i \in [1, n]$. Esto no es posible y, entonces, $U \in \mathcal{Z}$ y U es cota superior de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{Z}$.

Por el lema de Zorn, existe $N \in \mathcal{Z}$ maximal. Supongamos que $N \leq N' \leq M$ con $N \neq N'$. Entonces, $N' \notin \mathcal{Z}$ y, por lo tanto, $m_i \in N'(Z_i)$ para cada i . Así, $N' = M$ y N es el subfunctor maximal que contiene a K que buscábamos. $\square$

Nos interesa reformular las nociones de morfismo casi se divide a derecha y morfismo minimal casi se divide a derecha de $\mathcal{C}$ en términos de $Mod(\mathcal{C})$. Para ello tendremos que estudiar cubiertas proyectivas de funtores finitamente generados en $Mod(\mathcal{C})$.

Definición 3.3.17. Si $M \in Mod(\mathcal{C})$ y $K \leq M$, decimos que K es un **subfunctor superfluo** de M si y sólo si para cada $L \leq M$ tal que $K + L = M$ se tiene que $L = M$. Escribimos $K \ll M$ si y sólo si ocurre lo anterior.

Definición 3.3.18. Un epimorfismo $g : M \rightarrow N$ en $Mod(\mathcal{C})$ es **epi superfluo** si y sólo si para cada $h : L \rightarrow M$ tal que gh es epimorfismo en $Mod(\mathcal{C})$ se tiene que h es epimorfismo.

Lema 3.3.19. Si $g : M \rightarrow N$ en $Mod(\mathcal{C})$, entonces g es epi superfluo si y sólo $ker g \ll M$.

Demostración: Si $L \leq M$ satisface la fórmula $ker g + L = M$, se tiene que la composición $L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{g} N$, donde i es la inclusión, es epi. Como g es superfluo, i es epimorfismo. Luego $L = M$.

Recíprocamente, si la composición $L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{g} N$ es epimorfismo, se tiene que $M = ker g + Im h$. Entonces $M = Im h$. $\square$

Lema 3.3.20. Dado $M \in Mod(\mathcal{C})$, se tiene:

- (1) Si $K \ll N \leq M$, entonces $K \ll M$.
- (2) Si $K_1 \ll M$ y $K_2 \ll M$, entonces $K_1 + K_2 \ll M$.

Demostración: Para probar (1), suponemos que $K + L = M$. Entonces se tiene que $K + (L \cap N) = N$. Luego, $L \cap N = N$ y $K \subseteq N \subseteq L$. Entonces, $L = M$.

Para verificar (2), suponemos que $K_1 + K_2 + L = M$. Entonces, $K_2 + L = M$ y, también, $L = M$. $\square$

Definición 3.3.21. Un epimorfismo $p : \bigoplus_{i=1}^n (-, Z_i) \rightarrow N$ en $Mod(\mathcal{C})$ es **cubierta proyectiva** de $N \in Mod(\mathcal{C})$ si y sólo p es un epimorfismo superfluo o, equivalentemente, $ker p \ll \bigoplus_i (-, Z_i)$.

Corolario 3.3.22. Si $\{(-, Z_i) \xrightarrow{p_i} N_i\}_i$ es una familia finita de cubiertas proyectivas en $Mod(\mathcal{C})$, entonces el epimorfismo $\bigoplus_i p_i : \bigoplus_i (-, Z_i) \rightarrow \bigoplus_i N_i$ es cubierta proyectiva.

Demostración: Se tiene que $K := \ker(\bigoplus_i p_i) = \bigoplus_i K_i$, donde $K_i := \ker p_i \ll (-, Z_i)$. Por la primera parte de 3.3.20, cada $K_j \ll \bigoplus_i (-, Z_i)$. Por la segunda parte de 3.3.20, $K = \sum_j K_j \ll \bigoplus_i (-, Z_i)$. $\square$

Definición 3.3.23. Hemos definido antes el ideal radical $\text{rad}_{\mathcal{C}}$ de la categoría $\mathcal{C}$. Para cada $Z \in \mathcal{C}$, se tiene el funtor $r(-, Z) := \text{rad}_{\mathcal{C}}(-, Z) \in \text{Mod}(\mathcal{C})$. Claramente, se tiene $r(-, Z) \leq (-, Z)$.

Lema 3.3.24. Sea $f : X \rightarrow Z$ en $\mathcal{C}$ con Z inescindible. Entonces,

- (1) f es casi se divide a derecha si y sólo si $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$ es epimorfismo en $\text{Mod}(\mathcal{C})$.
- (2) Si $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$ es cubierta proyectiva en $\text{Mod}(\mathcal{C})$, entonces f es minimal casi se divide a derecha.

Demostración: (1): Si f no es retracción en $\mathcal{C}$, se tiene que $f \in r(X, Z)$. Se sigue que la imagen de $(-, f) : (-, X) \rightarrow (-, Z)$ esta contenida en $r(-, Z)$. Para cada $Y \in \mathcal{C}$, vimos que $r(Y, Z)$ consiste de los morfismos no retracciones de Y en Z .

Como f es casi de divide derecho, cada uno de ellos $t : Y \rightarrow Z$ se factoriza por f . Esto es que cada $(Y, f) : (Y, X) \rightarrow r(Y, Z)$ es suprayectivo. Luego, $(-, f)$ es epimorfismo.

Recíprocamente, si $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$ es epimorfismo, en particular, $r(Z, Z)$ consiste de los elementos de la forma fh , con $h \in (Z, X)$. Esto implica que f no es retracción. También se tiene que si $Y \in \mathcal{C}$, cada elemento de $r(Y, Z)$, que consiste de las no retracciones, es de la forma fh , con $h \in (Y, X)$, y se sigue que f casi se divide a derecha.

(2): Supongamos que $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$ es cubierta proyectiva. Por (1), nos resta verificar que f es minimal derecho. Supongamos entonces que un morfismo $h : X \rightarrow X$ de $\mathcal{C}$ satisface $fh = f$. Entonces, el morfismo $(-, h) : (-, X) \rightarrow (-, X)$ seguido de $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$ coincide con $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$. Como el epimorfismo $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$ es superfluo, obtenemos que $(-, h) : (-, X) \rightarrow (-, X)$ es epimorfismo. Entonces, evaluando en X vemos que existe $h' : X \rightarrow X$ tal que $hh' = 1_X$. Por 3.1.2 aplicado al idempotente $e = h'h$, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow \cong & & \parallel \\ X \oplus Y & \xrightarrow{(1,0)} & X \end{array}$$

Como $\mathcal{C}$ es Krull-Schmidt, $Y = 0$ y h es isomorfismo. $\square$

Veremos un poco más adelante que vale la recíproca de la segunda parte del Lema anterior.

Lema 3.3.25. Si $M \in \text{Mod}(\mathcal{C})$ es finitamente generado y tiene cubierta proyectiva, entonces es cubierta proyectiva el epimorfismo $p : \bigoplus_{i=1}^n (-, X_i) \rightarrow M$, donde n es el mínimo natural tal que existe un epimorfismo $q : \bigoplus_{i=1}^s (-, X_i) \rightarrow M$, con $X_1, \dots, X_s$ inescindibles de $\mathcal{C}$.

Demostración: Por hipótesis, existe una cubierta proyectiva $q : \bigoplus_{j=1}^t (-, Z_j) \rightarrow M$, donde podemos suponer que todos los objetos $Z_1, \dots, Z_t \in \mathcal{C}$ son inescindibles, dado que

$$(-, X \oplus Y) \cong (-, X) \oplus (-, Y), \text{ para cada } X, Y \in \mathcal{C}.$$

Tenemos entonces un cuadro conmutativo en $Mod(\mathcal{C})$,

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n (-, X_i) & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow h & & \parallel \\ \bigoplus_{j=1}^t (-, Z_j) & \xrightarrow{q} & M \end{array}$$

donde el morfismo h existe porque el dominio de p es proyectivo. Como q es superfluo y $qh = p$ es epi, resulta que h es epi. Si definimos $X := \bigoplus_{i=1}^n X_i$ y $Z := \bigoplus_{j=1}^t Z_j$, el morfismo h determina un morfismo $r : X \rightarrow Z$ tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc} (-, X) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{i=1}^n (-, X_i) \\ \downarrow (-, r) & & \downarrow h \\ (-, Z) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{j=1}^t (-, Z_j) \end{array}$$

donde $(-, r)$ es también epimorfismo. Si evaluamos en Z , vemos que existe $i \in (Z, X)$ tal que $(-, r)_Z(i) = 1_Z \in (Z, Z)$. Es decir $ri = 1_Z$. Esto implica por 3.1.2, que hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{r} & Z \\ \downarrow \cong & & \parallel \\ Z \oplus Y & \xrightarrow{(1,0)} & Z \end{array}$$

para algún $Y \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es Krull-Schmidt, $X \cong Z \oplus Y$ implica que $t \leq n$ y, por la minimalidad de n , resulta que $t = n$. Por lo tanto, $Y = 0$. Así, r es isomorfismo, y también lo son $(-, r)$ y h . Por la conmutatividad del primer diagrama, p también es cubierta proyectiva de M . □

Vamos a ver ahora que todo funtor finitamente generado $M \in Mod(\mathcal{C})$ tiene cubierta proyectiva. Como en el caso de las álgebras de artin, esto se puede hacer utilizando los objetos simples.

Lema 3.3.26. *Los funtores simples de $Mod(\mathcal{C})$ son, hasta isomorfismo, los funtores de la forma $(-, Z)/r(-, Z)$, con $Z \in \mathcal{C}$ inescindible.*

Demostración: Veamos primero que si Z es inescindible, entonces $(-, Z)/r(-, Z)$ es simple. Para ello, bastará ver que $r(-, Z)$ es subfuntor maximal de $(-, Z)$.

Como $1_Z \notin r(Z, Z)$, sabemos que $r(-, Z)$ no coincide con $(-, Z)$. Sea $L \leq (-, Z)$ un subfuntor propio, veamos que $L \leq r(-, Z)$. Sea $j : L \rightarrow (-, Z)$ la inclusión. Notemos que si $1_Z \in L(Z)$, dado que el siguiente diagrama conmuta para cada $X \in \mathcal{C}$ y $p \in (X, Z)$

$$\begin{array}{ccc}
L(X) & \xrightarrow{j_X} & (X, Z) \\
L(p) \uparrow & & \uparrow p^* \\
L(Z) & \xrightarrow{j_Z} & (Z, Z)
\end{array}$$

resulta que j_X es suprayectivo. Es decir $L = (-, Z)$, una contradicción. Se sigue que $L(Z) \subseteq r(Z, Z)$, pues $End_{\mathcal{C}}(Z)$ es local con radical $r(Z, Z)$.

Si X es inescindible no isomorfo a Z , claramente, cada $\ell \in L(X) \subseteq (X, Z)$ pertenece a $r(X, Z)$. Por otro lado, si $X \cong Z$, consideramos un isomorfismo $s : X \rightarrow Z$, y tenemos el cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
L(X) & \xrightarrow{j_X} & (X, Z) \\
L(s) \uparrow & & \uparrow s^* \\
L(Z) & \xrightarrow{j_Z} & (Z, Z)
\end{array}$$

donde $L(s)$ es isomorfismo. Así, se tiene

$$Im j_X = Im j_X L(s) = s^* Im j_Z \subseteq s^* r(Z, Z) \subseteq r(X, Z),$$

por ser r ideal de $\mathcal{C}$. Si escribimos $X = \bigoplus_i X_i$, una suma de inescindibles en $\mathcal{C}$, tenemos la siguiente composición

$$L(X) = L\left(\bigoplus_i X_i\right) \xrightarrow{\phi} \bigoplus_i L(X_i) \xrightarrow{\bigoplus j_{X_i}} \bigoplus_i (X_i, Z),$$

donde ϕ es el isomorfismo que envía cada $\ell \in L(X) \subseteq (X, Z)$ en $\sum_i \ell s_i$, con $s_i : X_i \rightarrow X$ la inyección canónica. Lo anterior nos dice que cada componente ℓs_i de ℓ está en $r(X_i, Z)$. Entonces, $\ell \in r(X, Z)$. Hemos visto que $L \subseteq r(-, Z)$.

Así $r(-, Z)$ es subfunctor maximal de $(-, Z)$ y el cociente es un functor simple.

Si $S \in Mod(\mathcal{C})$ es un functor simple, $S \neq 0$ y por lo tanto, existe $0 \neq s \in S(Z)$, para algún $Z \in \mathcal{C}$ inescindible. Por Yoneda, existe un morfismo $q : (-, Z) \rightarrow S$ tal que $q_Z(1_Z) = s$.

Entonces, como $0 \neq Im q \leq S$, obtenemos que q es epimorfismo. Su núcleo es un subfunctor propio de $(-, Z)$, dado que $q \neq 0$. Se tiene entonces que $ker q \subseteq r(-, Z)$ y, por el teorema del isomorfismo para funtores existe un morfismo

$$\bar{p} : S \rightarrow (-, Z)/r(-, Z) \text{ tal que } q\bar{p} = p,$$

donde $p : (-, Z) \rightarrow (-, Z)/r(-, Z)$ es la proyección canónica. Como $\bar{p}$ es un morfismo no nulo entre funtores simples, resulta ser un isomorfismo. $\square$

Lema 3.3.27. *Para cada inescindible $Z \in \mathcal{C}$, la proyección canónica*

$$p : (-, Z) \rightarrow (-, Z)/r(-, Z)$$

es cubierta proyectiva.

Demostración: Supongamos que $h : N \rightarrow (-, Z)$ es un morfismo tal que ph es epimorfismo. Deseamos mostrar que h es epimorfismo. Si evaluamos en Z , obtenemos el siguiente diagrama en $End_{\mathcal{C}}(Z)$ -módulos derechos

$$\begin{array}{ccc} (Z, Z) & \xrightarrow{p_Z} & (Z, Z)/r(Z, Z) \\ \uparrow h_Z & & \parallel \\ N(Z) & \xrightarrow{(ph)_Z} & (Z, Z)/r(Z, Z) \end{array}$$

Cada elemento $s \in End_{\mathcal{C}}(Z)$ actúa por la derecha sobre $N(Z)$ mediante la regla $ns := N(s)[n]$, para $n \in N(Z)$. Aquí, $End_{\mathcal{C}}(Z)$ es local y de dimensión finita de modo que p_Z es cubierta proyectiva del simple $(Z, Z)/r(Z, Z)$ en la categoría $mod-End_{\mathcal{C}}(Z)$. Se sigue que h_Z es un epimorfismo. Sea $n_0 \in N(Z)$ tal que $h_Z(n_0) = 1_Z$. Entonces, para cada $X \in \mathcal{C}$ y $t \in (X, Z)$, del cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N(X) & \xrightarrow{h_X} & (X, Z) \\ N(t) \uparrow & & \uparrow t^* \\ N(Z) & \xrightarrow{h_Z} & (Z, Z) \end{array}$$

obtendremos $h_X(N(t)[n_0]) = t^*(h_Z(n_0)) = t^*(1_Z) = t$, y h es epimorfismo. $\square$

Definición 3.3.28. Si $M \in Mod(\mathcal{C})$ e I es un ideal de $\mathcal{C}$, tenemos el subfunctor MI de M definido por las familias de subespacios siguientes. Para cada $Z \in \mathcal{C}$, $(MI)(Z)$ consiste de las sumas finitas $\sum_i M(r_i)[m_i] \in M(Z)$, donde $Z_i \in \mathcal{C}$, $m_i \in M(Z_i)$ y $r_i \in I(Z, Z_i)$.

Observación 3.3.29. Si $M \in Mod(\mathcal{C})$ e I es ideal de $\mathcal{C}$, se tiene lo siguiente:

- (1) Si $Z \in \mathcal{C}$, entonces $(-, Z)I = I(-, Z)$.
- (2) Si $N \leq M$, entonces $(M/N)I = (MI + N)/N$.

En efecto, si $X \in \mathcal{C}$ y $s \in ((-, Z)I)(X)$, entonces s tiene la forma $s = \sum_{i=1}^n (r_i, Z)[s_i]$, donde $Z_i \in \mathcal{C}$, $r_i \in I(X, Z_i)$ y $s_i \in (Z_i, Z)$. Como I es ideal de $\mathcal{C}$, resulta $s = \sum_i s_i r_i \in I(X, Z)$. Recíprocamente, si $s \in I(X, Z)$, se tiene $s = (1_X, Z)[s] \in ((-, Z)I)(X)$. Se sigue que, para cada $X \in \mathcal{C}$, tenemos $((-, Z)I)(X) = I(X, Z)$, y vale (1).

Para mostrar (2), tomamos $X \in \mathcal{C}$ y notamos que cada elemento del espacio

$$\left(\frac{MI + N}{N}\right)(X) = \frac{(MI)(X) + N(X)}{N(X)}$$

es la clase $\overline{m}$ de un elemento m en $(MI)(X)$, es decir, de la forma $m = \sum_{i=1}^n M(r_i)[m_i]$, con $Z_i \in \mathcal{C}$, $r_i \in I(X, Z_i)$ y $m_i \in M(Z_i)$. Al tomar la clase de estos elementos vemos que esos son precisamente los elementos de $[(M/N)I](X)$, debido a la definición de cociente de funtores.

Corolario 3.3.30. Para cualquier $Z \in \mathcal{C}$ se tiene $(-, Z)r = r(-, Z)$. En consecuencia, r anula los módulos simples de $Mod(\mathcal{C})$.

Demostración: Se sigue de lo anterior y de 3.3.26. $\square$

Se tiene la siguiente versión del Lema de Nakayama para $Mod(\mathcal{C})$.

Lema 3.3.31. *Si $M \in Mod(\mathcal{C})$ es un funtor finitamente generado tal que $Mr = M$, entonces $M = 0$. En consecuencia, $Mr \ll M$.*

Demostración: Supongamos que $Mr = M$ y $M \neq 0$. Como M es finitamente generado, por 3.3.16, existe $K \leq M$ subfunctor maximal. Entonces

$$0 = (M/K)r = (Mr + K)/K = M/K,$$

lo que no es posible. Luego, $M = 0$.

Para la segunda parte, supondremos que $N \leq M$ y $Mr + N = M$, entonces

$$(M/N)r = (Mr + N)/N = M/N,$$

lo que implica que $M/N = 0$, es decir, $N = M$. Luego, $Mr \ll M$. $\square$

Proposición 3.3.32. *Todo funtor finitamente generado $M \in Mod(\mathcal{C})$ tiene cubierta proyectiva.*

Demostración: Como M es un funtor finitamente generado, existe un epimorfismo $f : \bigoplus_{i=1}^n (-, Z_i) \rightarrow M$. Veamos que $f(r(-, Z_i)) \leq Mr$, para cada Z_i , donde r denota el radical de $\mathcal{C}$. Si consideramos la composición $f' := f\sigma_i$, donde $\sigma_i : (-, Z_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n (-, Z_i)$ es la i -ésima inyección, lo anterior equivale a mostrar que $f'(r(-, Z_i)) \subseteq Mr$, es decir que $f'_X(r(X, Z_i)) \subseteq (Mr)(X)$, para cada $X \in \mathcal{C}$. En efecto, si $r_i \in r(X, Z_i)$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (X, Z_i) & \xrightarrow{f'_X} & M(X) \\ r_i^* \uparrow & & \uparrow M(r_i) \\ (Z_i, Z_i) & \xrightarrow{f'_{Z_i}} & M(Z_i) \end{array}$$

De allí que $f'_X(r_i) = f'_X(r_i^*(1_{Z_i})) = M(r_i)[f'_{Z_i}(1_{Z_i})] \in (Mr)(X)$.

Entonces, f determina el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos en $Mod(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_i r(-, Z_i) & \xrightarrow{s} & \bigoplus_i (-, Z_i) & \longrightarrow & \bigoplus_i (-, Z_i)/r(-, Z_i) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ 0 & \longrightarrow & Mr & \xrightarrow{s'} & M & \longrightarrow & M/Mr \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde s y s' son inclusiones. Como f es epimorfismo, también lo es $\bar{f}$. Esto implica que M/Mr es isomorfo a una suma finita de algunos de los simples $(-, Z_j)/r(-, Z_j)$ de los que aparecen en el dominio de $\bar{f}$. Denotemos por $h : \bigoplus_j (-, Z_j)/r(-, Z_j) \rightarrow M/Mr$ a dicho isomorfismo. Tenemos el cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_j(-, Z_j) & \xrightarrow{\bigoplus_j p_j} & \bigoplus_j(-, Z_j)/r(-, Z_j) \\
\downarrow p & & \downarrow h \\
M & \xrightarrow{q} & M/Mr
\end{array}$$

donde q es la proyección, $\bigoplus_j p_j$ es suma directa finita de cubiertas proyectivas, ver 3.3.27, que es cubierta proyectiva por 3.3.22, y p existe porque $\bigoplus_j(-, Z_j)$ es proyectivo.

Veamos que $p : \bigoplus_j(-, Z_j) \rightarrow M$ es cubierta proyectiva de M . Como $\bigoplus_j p_j$ es cubierta proyectiva, también lo es su composición con h , es decir qp . Por 3.3.31, q es superfluo, y como el diagrama conmuta obtenemos que p es epimorfismo. Consideremos ahora un morfismo $g : N \rightarrow \bigoplus_j(-, Z_j)$ tal que pg es epimorfismo. Entonces, también lo es qpg y, como qp es cubierta proyectiva, resulta que g es epimorfismo, como deseábamos. $\square$

A continuación mostramos la caracterización anunciada de morfismos minimales casi se dividen a derecha en $\mathcal{C}$ mediante cubiertas proyectivas en $Mod(\mathcal{C})$.

Proposición 3.3.33. *Sea $f : X \rightarrow Z$ un morfismo en $\mathcal{C}$ con Z inescindible. Entonces, f es minimal casi se divide a derecha si y sólo si $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$ es cubierta proyectiva en $Mod(\mathcal{C})$.*

Demostración: Una de las implicaciones es 3.3.24(2). Supongamos entonces que $f : X \rightarrow Z$ es minimal casi se divide a derecha. Entonces, por 3.3.24(1), $r(-, Z)$ es finitamente generado y, por 3.3.32, tiene cubierta proyectiva.

Si $Y \in \mathcal{C}$, denotemos por $m(Y)$ el número de inescindibles que aparecen en la descomposición en inescindibles de Y . Por 3.3.25, cualquier cubierta proyectiva de $r(-, Z)$ es un epimorfismo

$$\bigoplus_{i=1}^n(-, Y_i) \rightarrow r(-, Z)$$

con Y_i inescindibles y n mínimo. Si tomamos $Y = \bigoplus_{i=1}^n Y_i$, puesto que $(-, Y) \cong \bigoplus_{i=1}^n(-, Y_i)$, se trata de cualquier epimorfismo $(-, Y) \rightarrow r(-, Z)$ con $m(Y)$ mínimo. Este epimorfismo es de la forma $(-, g)$, con $g : Y \rightarrow Z$, como observamos en 3.3.13. Por 3.3.24(2), obtenemos que $g : Y \rightarrow Z$ es minimal casi se divide a derecha.

Luego, hay un isomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $gh = f$. Entonces, $(-, h) : (-, X) \rightarrow (-, Y)$ es isomorfismo tal que $(-, g)(-, h) = (-, f)$ y $(-, f)$ también es cubierta proyectiva de $r(-, Z)$, como deseábamos probar. $\square$

Corolario 3.3.34. *Sea $Z \in \mathcal{C}$ tal que existe un morfismo casi se divide a derecha $f : X \rightarrow Z$ en $\mathcal{C}$, entonces también existe un morfismo casi se divide a derecha minimal $g : Y \rightarrow Z$. Además, cualquier morfismo $g : W \rightarrow Z$ casi se divide a derecha de $\mathcal{C}$ donde W tiene mínimo número de inescindibles en su descomposición en inescindibles es minimal csdd.*

Demostración: Sabemos que la existencia de un morfismo casi se divide a derecha $f : X \rightarrow Z$, implica que Z es inescindible. Por 3.3.24, $(-, f) : (-, X) \rightarrow r(-, Z)$ es epimorfismo y, entonces, $r(-, Z)$ es finitamente generado.

Sabemos que $g : Y \rightarrow Z$ es casi se divide a derecha en $\mathcal{C}$ si y sólo si $(-, g) : (-, Y) \rightarrow r(-, Z)$ es epimorfismo en $Mod(\mathcal{C})$. Entonces, $g : Y \rightarrow Z$ es csdd en $\mathcal{C}$ con $m(Y)$ mínimo si y sólo si $(-, g) : (-, Y) \rightarrow r(-, Z)$ es epimorfismo en $Mod(\mathcal{C})$ con $m(Y)$ mínimo. Tal morfismo $(-, g) : (-, Y) \rightarrow (-, Z)$ es cubierta proyectiva y, por lo tanto, $g : Y \rightarrow Z$ es minimal casi se divide a derecha. $\square$

Capítulo 4

Apéndice 2

En este apartado, revisamos la noción de estructura exacta sobre una k -categoría $\mathcal{C}$ aditiva con idempotentes que se dividen. Presentamos material conocido que se revisa en [12] y [10], aunque esta versión es más detallada y enfocada a los resultados que requerimos en los primeros capítulos de la tesis.

4.1 Preliminares

Fijemos $\mathcal{C}$ una k -categoría aditiva con idempotentes que se dividen.

Definición 4.1.1. *Un par de morfismos (s, d) que pueden componerse*

$$N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$$

*es un **par exacto** si y sólo si s es núcleo de d y d es conúcleo de s .*

Por ejemplo, si $X, Y \in \mathcal{C}$, se tiene **el par exacto trivial**:

$$\xi_0 : X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Y.$$

Definición 4.1.2. *Un par exacto $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ en una categoría aditiva $\mathcal{C}$ **se divide** si y sólo si existen morfismos $t : M \rightarrow E$ y $p : E \rightarrow N$ tales que $dt = 1_M$ y $ps = 1_N$.*

Lema 4.1.3. *En una categoría aditiva se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes para un par exacto $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$.*

- (1) ξ se divide;
- (2) d es una retracción;
- (3) s es una sección;

(4) Hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ \xi_0 & N & \xrightarrow{(1_N, 0)^t} & N \oplus M & \xrightarrow{(0, 1_M)} & M. \end{array}$$

con h isomorfismo

Demostración: Note que (1) implica (2), antes de demostrar que (2) implica (1), vamos a demostrar que (2) implica (3).

En efecto, si d es una retracción, se tiene que existe $t : M \rightarrow E$, tal que $dt = 1_M$, note entonces que tenemos el morfismo $1_E - td \in \text{End}_{\mathcal{C}}(E)$ que cumple $d(1_E - td) = 0$, pero al ser s el núcleo de d se tiene que existe un morfismo $p : E \rightarrow N$ tal que $sp = 1_E - td$, y además tenemos que $sps = (1_E - td)s = s$ y por ser s un mono concluimos que $ps = 1_N$.

Note que este argumento es dual si suponemos que s es una sección, por lo cual se tiene que (2) es equivalente a (3).

También dentro del argumento se mostró que (2) implica (1).

Finalmente, veamos la equivalencia de (1) a (4).

Suponiendo (4) y tomamos $h = (h_1, h_2)^t$ y $h^{-1} = (h'_1, h'_2)$. Tenemos de la conmutatividad del diagrama $hs = (h_1, h_2)^t s = (1_N, 0)^t$, por lo que $h_1 s = 1_N$, y s es sección. De manera similar, se cumple que $dh^{-1} = d(h'_1, h'_2) = (0, 1_M)$, por lo cual $dh'_2 = 1_M$ y d es retracción.

Para la recíproca, consideramos los morfismos t y s que aparecen suponiendo (2). Note

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ \xi_0 & N & \xrightarrow{(1_N, 0)^t} & N \oplus M & \xrightarrow{(0, 1_M)} & M. \end{array} \quad \text{toman-}$$

do $h = (p, d)^t$, el cual es un isomorfismo, pues su inversa es (s, t) . Por lo que tenemos las equivalencias requeridas. $\square$

Una propiedad muy útil que relaciona a los pares exactos con los pullbacks y pushouts es la siguiente.

Lema 4.1.4. *Supongamos que se tiene en $\mathcal{C}$ el siguiente cuadro de morfismos*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f_1} & E_1 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow g_1 \\ E_2 & \xrightarrow{g_2} & M \end{array}$$

y consideremos los morfismos:

$$N \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}} E_1 \oplus E_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g_1 & g_2 \end{pmatrix}} M$$

Entonces,

(1) *El cuadro es un pullback si y sólo si $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ es núcleo de $\begin{pmatrix} -g_1 & g_2 \end{pmatrix}$.*

(2) *El cuadro es un pushout si y sólo si $\begin{pmatrix} -g_1 & g_2 \end{pmatrix}$ es conúcleo de $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.*

Demostración: La prueba es fácil de ver. $\square$

De modo que todo cuadro como el anterior que sea un pushout y pullback determina el par exacto señalado y viceversa.

Definición 4.1.5. Un **morfismo de pares exactos** de $M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} N$ en $M' \xrightarrow{s'} E' \xrightarrow{d'} N'$ es una terna de morfismos (u, v, w) en $\mathcal{C}$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & N \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ M' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & N' \end{array}$$

Un tal morfismo es un **isomorfismo** si y sólo si u, v y w son isomorfismos.

Una clase de pares exactos $\mathcal{E}$ en $\mathcal{C}$ se llama **cerrada bajo isomorfismos** si, para cada isomorfismo como el anterior, donde el primer renglón pertenece a $\mathcal{E}$, también el segundo renglón está en $\mathcal{E}$.

Lema 4.1.6. Consideremos en $\mathcal{C}$ un cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & E \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ N' & \xrightarrow{f'} & E' \end{array}$$

- Si el cuadro es un pushout y f y f' tienen conúcleos, entonces $\text{Coker } f \cong \text{Coker } f'$.
- Si el cuadro es un pullback y f y f' tienen núcleos, entonces $\ker f \cong \ker f'$.

Demostración: Solo vamos a probar el primer punto, pues el segundo es dual. Consideremos el siguiente cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{\rho} & C \\ g \downarrow & & \downarrow g' & & \\ N' & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{\rho'} & C' \end{array}$$

donde ρ es el conúcleo de f y ρ' es el conúcleo de f' . Entonces, existe un morfismo $\nu : C \rightarrow C'$ que hace conmutar el diagrama.

Consideramos los morfismos $0 : N' \rightarrow C$ y $\rho : E \rightarrow C$, los cuales cumplen que $0g = 0 = \rho f$.

Como $\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & E \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ N' & \xrightarrow{f'} & E' \end{array}$ es pushout, existe un único $h : E' \rightarrow C$ tal que $hg' = \rho$ y $hf' = 0$. Y,

por la propiedad universal del conúcleo ρ' , tendremos que existe $\nu' : C' \rightarrow C$ tal que $\nu'\rho' = h$.

Veamos que $\nu'\nu = \text{Id}_C$. Tenemos que $\nu'\nu\rho = \nu'\rho'g' = hg' = \rho$.

Como ρ es epimorfismo, $\nu'\nu = \text{Id}_C$.

Para probar que $\nu\nu' = \text{Id}_{C'}$, consideremos los morfismos $\rho'g' : E \rightarrow C'$ y $0 : N' \rightarrow C'$, los cuales cumplen que $\rho'g'f = \rho'f'g = 0 = 0g$. Por la propiedad universal del pushout, existe un único $h' : E' \rightarrow C'$ tal que $h'f' = 0$ y $h'g' = \rho'g'$. Note que

$$\nu\nu'\rho'g' = \nu hg' = \nu\rho = \rho'g', \text{ y } \nu\nu'\rho'f' = 0 = \rho'f'.$$

Por la unicidad de h' tendremos que $\nu\nu'\rho' = h' = \rho'$, por lo que $\nu\nu' = Id_{C'}$. $\square$

4.2 Categorías exactas

Sea $\mathcal{C}$ una k -categoría aditiva con idempotentes que se dividen. Fijemos una clase $\mathcal{E}$ de pares exactos en $\mathcal{C}$ cerrada bajo isomorfismos.

En este contexto, con $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ fijos, llamamos **conflaciones** a los pares exactos de $\mathcal{E}$. Por definición una **deflación** d es un morfismo que aparece como segunda componente de una conflación (s, d) . La primera componente será llamada **inflación**.

Definición 4.2.1. Diremos que la clase de pares exactos $\mathcal{E}$ es una **estructura exacta** sobre $\mathcal{C}$ si y sólo si se cumplen los siguientes axiomas:

A1 Composición de deflaciones es deflación.

A2 Para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(M', M)$ y cada deflación $d \in Hom_{\mathcal{C}}(E, M)$, existe $g \in Hom_{\mathcal{C}}(E', E)$ y una deflación $d' \in Hom_{\mathcal{C}}(E', M')$ tal que $dg = fd'$.

A3 Identidades son deflaciones. Si d es una deflación, entonces d es una deflación.

A3' Identidades son inflaciones. Si s es una inflación, entonces s es una inflación.

Ejemplo 4.2.2. Sean A y R k -álgebras y $\phi : R \rightarrow A$ un morfismo de k -álgebras. La clase $\mathcal{E}$ formada por las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow 0$$

en $A\text{-Mod}$ que se dividen en $R\text{-Mod}$ es una estructura exacta en $A\text{-Mod}$.

En efecto, note que las deflaciones son los epimorfismos en $A\text{-Mod}$ que son retracciones en $R\text{-Mod}$, y análogamente los inflaciones son monomorfismos en $A\text{-Mod}$ que son secciones en $R\text{-Mod}$. Por lo cual los puntos A1, A3 y A3' son claros. Entonces, resta mostrar A2.

Consideremos el diagrama de pullback en $R\text{-Mod}$,

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{d'} & E \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ M' & \xrightarrow{d} & M \end{array}$$

donde d es un epimorfismo que se divide. Como d es un epimorfismo que se divide, existe $r : M \rightarrow M'$ tal que $dr = 1_M$. Tenemos el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{Id} & E \\ rf \downarrow & & \downarrow f \\ M' & \xrightarrow{d} & M \end{array}$$

Por la propiedad universal del pullback, existe un único morfismo $s : E \rightarrow E'$ tal que $d's = 1_E$. Concluimos que d' es un epimorfismo que se divide en $R\text{-Mod}$.

Mostraremos ahora que se cumple A2, sea $f : M' \rightarrow M$ un morfismo de A -módulos y $d : E \rightarrow M$ una deflación. Consideremos el pullback correspondiente en $A\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{d'} & M' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{d} & M \end{array}$$

Por 4.1.4, se tiene la sucesión exacta en $A\text{-Mod}$

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{(d', f')^t} M' \oplus E \xrightarrow{(-f, d)} M,$$

que también es sucesión exacta en $R\text{-Mod}$. Entonces, el cuadro anterior también es un pullback en $R\text{-Mod}$. Por el razonamiento anterior, veamos que d' es suprayectivo y se divide en $R\text{-Mod}$, es decir, d' es deflación.

En lo que sigue suponemos que tenemos una estructura exacta $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{C}$. Exploremos algunas de sus propiedades básicas.

Observación 4.2.3. Si $X, Y \in \mathcal{C}$, se tiene la confluencia trivial $\xi_0 : X \xrightarrow{(1,0)^t} X \oplus Y \xrightarrow{(0,1)} Y$.

En efecto, ya observamos antes que el par es exacto. Como la composición $Y \xrightarrow{(0,1)^t} X \oplus Y \xrightarrow{(0,1)} Y$ es 1_Y , que es deflación, se sigue que $(0, 1)$ es deflación. Entonces hay una confluencia ξ que aparece en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi_0 : & Y & \xrightarrow{(1,0)^t} & X \oplus Y & \xrightarrow{(0,1)} Y \\ & h \downarrow & & \parallel & \parallel \\ \xi : & X' & \xrightarrow{i} & X \oplus Y & \xrightarrow{(0,1)} Y \end{array}$$

donde h es un isomorfismo porque i y $(1, 0)^t$ son núcleos de $(0, 1)$. Como $\mathcal{E}$ es cerrada bajo isomorfismos, resulta que ξ_0 también es confluencia.

Lema 4.2.4. Para cada $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$ y cada deflación $d \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ existe un pullback

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{d'} & Z' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{d} & Z \end{array}$$

donde d' es deflación.

Demostración: Sean $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$ y $d \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ una deflación. Definamos $\rho := (-f, d) : Z' \oplus Y \rightarrow Z$, tenemos que $\rho \iota_Y = d$, donde $\iota_Y : Y \rightarrow Z' \oplus Y$ es la inyección canónica. Por A3 se tiene que ρ es deflación.

Por tanto ρ admite un núcleo $Y' \xrightarrow{(d', f')^t} Z' \oplus Y$ y, por 4.1.4, tenemos el diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc}
Y' & \xrightarrow{d'} & Z' \\
\downarrow f' & & \downarrow f \\
Y & \xrightarrow{d} & Z
\end{array}$$

Resta mostrar que d' es una deflación. Elijamos cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
Y'' & \xrightarrow{d''} & Z' \\
\downarrow f'' & & \downarrow f \\
Y & \xrightarrow{d} & Z
\end{array}$$

donde d'' es una deflación (Estos diagramas existen pues se cumple A2).

Por la propiedad universal del pullback, tenemos que existe un único morfismo $e : Y'' \rightarrow Y'$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
& & d'' & & \\
& \searrow & & \searrow & \\
Y'' & \xrightarrow{e} & Y' & \xrightarrow{d'} & Z' \\
& \searrow & \downarrow f' & & \downarrow f \\
& & Y & \xrightarrow{d} & Z \\
& \nearrow f'' & & \nearrow &
\end{array}$$

Como $d'' = d'e$, se tiene que $d'e$ es una deflación y, por A3, se concluye que d' es una deflación. □

Proposición 4.2.5. *Si los renglones del siguiente diagrama conmutativo son conflaciones*

$$\begin{array}{ccccc}
N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{d} & M \\
\downarrow f & & \downarrow f' & & \parallel \\
N' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{d'} & M
\end{array}$$

entonces el cuadro izquierdo es un cuadro pullback y pushout. Más aún, el par exacto asociado $N \xrightarrow{(i,f)^t} E \oplus N' \xrightarrow{(-f',i')} E'$ es una conflación.

Demostración: Veamos que el cuadro de la izquierda es un pullback. Esto es porque en la sucesión

$$N \xrightarrow{(i,f)^t} E \oplus N' \xrightarrow{(-f',i')} E'$$

$(i, f)^t$ es núcleo de $(-f', i')$.

En efecto: Claramente $(-f', i')(i, f)^t = 0$. Supongamos que $(a, b)^t : Z \rightarrow E \oplus N'$ es tal que $(-f', i')(a, b)^t = 0$, entonces tendremos que $-f'a + i'b = 0$. Por lo cual conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
Z & \xrightarrow{a} & E & \xrightarrow{d} & M \\
\downarrow b & & \downarrow f' & & \parallel \\
N' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{d'} & M.
\end{array}$$

Entonces, $da = d'f'a = d'i'b = 0$. Por tanto, por ser i el núcleo de d , existe un único morfismo $m : Z \rightarrow N$ tal que $im = a$. Note ahora que $i'fm = f'im = f'a = i'b$, por lo que $fm = b$, ya que i' es monomorfismo. Por lo cual tendremos que $(i, f)^t$ es núcleo de $(-f', i')$, y podemos aplicar 4.1.4.

Mostremos ahora que $(-f', i')$ es una deflación.

Veamos primero que el diagrama siguiente es un pullback:

$$\begin{array}{ccc}
E \oplus N' & \xrightarrow{(-f', i')} & E' \\
(-id, 0) \downarrow & & \downarrow d' \\
E & \xrightarrow{d} & M
\end{array}$$

En efecto: Supongamos que conmuta el cuadro

$$\begin{array}{ccc}
T & \xrightarrow{a} & E' \\
\downarrow b & & \downarrow d' \\
E & \xrightarrow{d} & M
\end{array}$$

Entonces, $d'a = db = d'f'b$ y $d'(a - f'b) = 0$. Como i' es el núcleo de d' , existe $y : T \rightarrow N'$ único tal que $a - f'b = i'y$. Si definimos $x = -b$, entonces conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
& & a & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
T & \xrightarrow{(x, y)^t} & E \oplus N' & \xrightarrow{(-f', i')} & E' \\
& \searrow b & \downarrow (-1, 0) & & \downarrow d' \\
& & E & \xrightarrow{d} & M
\end{array}$$

La unicidad de $(x, y)^t$ tal que conmutan los triángulos se sigue de la unicidad de y . Por 4.2.4, hay un pullback

$$\begin{array}{ccc}
Y'' & \xrightarrow{d''} & E' \\
\downarrow f'' & & \downarrow d' \\
E & \xrightarrow{d} & M
\end{array}$$

donde d'' es deflación. Por la unicidad hasta isomorfismo de los pullbacks, hay un isomorfismo h tal que conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
K & \xrightarrow{i''} & Y'' & \xrightarrow{d''} & E' \\
\parallel & & \downarrow h & & \parallel \\
K & \xrightarrow{hi''} & E \oplus N' & \xrightarrow{(-f', i')} & E'
\end{array}$$

donde el primer renglón es la confluación de d'' . Se sigue que el segundo renglón es confluación, y que $(-f', i')$ es deflación. Entonces, hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & E \oplus N' & \xrightarrow{(-f', i')} & E' \\ \downarrow g & & \parallel & & \parallel \\ N & \xrightarrow{(i, f)^t} & E \oplus N' & \xrightarrow{(-f', i')} & E' \end{array}$$

con g isomorfismo, pues hi'' y $(i, f)^t$ son núcleos de $(-f', i')$. Se sigue que el renglón inferior es confluación. Por 4.1.4, el cuadro izquierdo del enunciado es un pushout.

Concluimos que el cuadro izquierdo es un pushout y un pullback. $\square$

Lema 4.2.6. *En cualquier diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{d} & M \\ \parallel & & \downarrow f & & \parallel \\ N & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{d'} & M \end{array}$$

donde los renglones son confluaciones tenemos que f es un isomorfismo.

Demostración: En efecto, por 4.2.5 tenemos que el primer cuadro es un pushout. Entonces, hay un único morfismo $f' : E' \rightarrow E$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{i} & E & & \\ \parallel & & \downarrow f & & \uparrow 1_E \\ N & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{f'} & E \end{array}$$

i

En particular, $f'f = 1_E$. Por otro lado, conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{i} & E & & \\ \parallel & & \downarrow f & & \uparrow f \\ N & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{ff'} & E' \end{array}$$

i'

y también conmuta si reemplazamos ff' por $1_{E'}$. Por la propiedad universal del pushout, resulta $ff' = 1_{E'}$. Así, f es un isomorfismo. $\square$

Hay que notar que en los axiomas de estructura exacta no se tiene un axioma A2'. Veamos que de hecho se cumple el dual de 4.2.4.

Lema 4.2.7. Para cada $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ y cada inflación $i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ existe un

$$\text{pushout} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' \end{array} \quad \text{donde } i' \text{ es inflación.}$$

Demostración: Tomemos el diagrama

$$X' \xleftarrow{f} X \xrightarrow{i} Y$$

donde i es una inflación. Definamos $j := (i, f)^t : X \rightarrow Y \oplus X'$. Entonces, $\pi_Y j = i$. Por A3', j es una inflación. Entonces hay una confluencia

$$\xi : X \xrightarrow{(i, f)^t} Y \oplus X' \xrightarrow{(-f', i')} Y'.$$

Entonces, por 4.1.4, tenemos que el cuadro siguiente es pushout.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y'. \end{array}$$

Veamos que i' es una inflación para una confluencia $X' \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{\rho'} Z$.

Como i es una inflación, entonces se tiene una confluencia

$$\zeta : X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\rho} Z.$$

Tomando entonces los morfismos $\rho : Y \rightarrow Z$ y $0 : X' \rightarrow Z$, tendremos que $0f = 0 = \rho i$. Entonces, por la propiedad universal del pushout existe un único morfismo $\rho' : Y' \rightarrow Z$ tal que $\rho = \rho' f'$ y $\rho' i' = 0$. Por lo cual tendremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{\rho} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow f' & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{\rho'} & Z \end{array}$$

de donde ρ' es una deflación por A3.

Veamos que ρ' es conúcleo de i' :

Supongamos que $\rho'' : Y' \rightarrow Z'$ satisface $\rho'' i' = 0$. Entonces, $\rho'' f' i = \rho'' i' f = 0f = 0$. Como ρ es conúcleo de i , existe $x : Z \rightarrow Z'$ tal que $x\rho = \rho'' f'$. Por la propiedad universal del pushout, hay un único morfismo $\theta : Y' \rightarrow Z'$ tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & & \\ f \downarrow & & \downarrow f' & \nearrow x\rho & \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{\theta} & Z' \\ & & \searrow 0 & & \end{array}$$

Pero ρ'' y $x\rho'$ desempeñan ese papel de θ . Se sigue que $\rho'' = \theta = x\rho'$. Como ρ' es epi, x es el único morfismo que satisface $\rho'' = x\rho'$. Entonces, ρ' es conúcleo de i' .

Veamos ahora que i' es el núcleo de ρ' :

Como ρ' es deflación, existe una confluencia

$$\zeta'' : X'' \xrightarrow{i''} Y' \xrightarrow{\rho'} Z.$$

Así, $i'' : X'' \rightarrow Y'$ es el núcleo de ρ' . Como $\rho'i' = 0$, existe un único morfismo $g : X' \rightarrow X''$ tal que $i' = i''g$. Por lo que tendremos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \zeta : & X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{\rho} & Z \\ & \downarrow f & & \downarrow f' & & \parallel \\ & X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{\rho'} & Z \\ & \downarrow g & & \parallel & & \parallel \\ \zeta'' : & X'' & \xrightarrow{i''} & Y' & \xrightarrow{\rho'} & Z \end{array}$$

Entonces, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \zeta : & X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{\rho} & Z \\ & \downarrow gf & & \downarrow f' & & \parallel \\ \zeta'' : & X'' & \xrightarrow{i''} & Y' & \xrightarrow{\rho'} & Z \end{array}$$

con renglones confluencias. Por 4.2.5, obtenemos la confluencia ξ' que aparece como segundo renglón en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & X & \xrightarrow{(i,f)^t} & Y \oplus X' & \xrightarrow{(-f',i')} & Y' \\ & \parallel & & \downarrow m & & \parallel \\ \xi' : & X & \xrightarrow{(i,gf)^t} & Y \oplus X'' & \xrightarrow{(-f',i'')} & Y' \end{array}$$

donde $m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. Por 4.2.6, m es un isomorfismo. Concluimos que g es un isomorfismo, y, entonces, $i' : X' \rightarrow Y'$ es núcleo de ρ' . Se tiene entonces el isomorfismo de pares exactos

$$\begin{array}{ccccc} & X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{\rho'} & Z \\ & \downarrow g & & \parallel & & \parallel \\ \zeta'' : & X'' & \xrightarrow{i''} & Y' & \xrightarrow{\rho'} & Z \end{array}$$

con segundo renglón confluencia. Así, el primer renglón es confluencia y, en particular, i' es inflación. $\square$

Proposición 4.2.8. *Si los renglones del siguiente diagrama conmutativo son confluencias*

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{d} & M \\ \parallel & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \end{array}$$

entonces el cuadro derecho es un cuadro pullback y pushout. Más aún, el par exacto asociado $E \xrightarrow{(d,f')^t} M \oplus E' \xrightarrow{(-f,d')} M'$ es una confluencia

Demostración: La prueba es dual de la prueba de 4.2.5, y la omitimos. $\square$

4.3 Propiedades de las confluencias y bifuntor $Ext_{\mathcal{E}}(-, ?)$.

En esta sección vamos a estudiar propiedades importantes de las confluencias para una estructura exacta fija en la categoría $\mathcal{C}$. Mantendremos la notación de 4.2.

Proposición 4.3.1. *Si $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ es una confluencia, entonces:*

- *Cada morfismo $f : N \rightarrow N'$ determina un diagrama conmutativo con renglones confluencias*

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow f & & \downarrow f' & & \parallel \\ f\xi : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M. \end{array}$$

- *Cada morfismo $g : M' \rightarrow M$ determina un diagrama conmutativo con renglones confluencias*

$$\begin{array}{ccccc} \xi g : & N & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \\ & \parallel & & \downarrow f' & & \downarrow g \\ \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M. \end{array}$$

Demostración: Vamos solo a mostrar el primer punto, porque el segundo es dual. Por 4.2.7 podemos calcular el pushout de (s, f) , por lo cual podemos considerar el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow \nu \\ N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{p} & M' \end{array}$$

donde s' es inflación y (s', p) es la confluencia donde aparece s' . Por 4.1.6 existe un isomorfismo $\nu : M \rightarrow M'$ que hace conmutar el segundo cuadro. Entonces, tomando el morfismo $d' := \nu^{-1}p$ tendremos el diagrama deseado. $\square$

Lema 4.3.2. de factorización Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \\ \xi' : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \end{array}$$

con renglones conflagaciones. Entonces tendremos un diagrama conmutativo con renglones conflagaciones:

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & f \downarrow & & g' \downarrow & & \parallel \\ \xi'' : & N' & \xrightarrow{s''} & E'' & \xrightarrow{d''} & M \\ & \parallel & & g'' \downarrow & & h \downarrow \\ \xi' : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \end{array}$$

donde $g = g''g'$.

Además, podemos construir el diagrama de dos maneras:

- (1) La parte superior del diagrama que involucra ξ y ξ'' es el primer diagrama de 4.3.1 ó
- (2) La parte inferior del diagrama que involucra ξ'' y ξ' es el segundo diagrama de 4.3.1 asociado a ξ' .

Demostración: Podemos considerar el primer diagrama conmutativo de 4.3.1.

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & f \downarrow & & g' \downarrow & & \parallel \\ f\xi : & N' & \xrightarrow{s''} & E'' & \xrightarrow{d''} & M, \end{array}$$

en donde el primer cuadro es un cuadro de pushout, por 4.2.5. Como $s'f = gs$, por la propiedad universal existe un único morfismo $g'' : E'' \rightarrow E'$ tal que $g''s'' = s'$ y $g = g''g'$. Tenemos así el diagrama del enunciado, donde resta por verificar que el cuadrado inferior derecho conmuta.

Para esto note que los morfismos $hd : E \rightarrow M'$ y $0 : N' \rightarrow M'$ son tales que $hds = 0 = 0f$, entonces por la propiedad universal del pushout tendremos que existe un único $\theta : E'' \rightarrow M'$ tal que $hd = \theta g'$ y $0 = \theta s''$.

Entonces $hd''g' = hd$ y $hd''s'' = 0$, y también $d'g''g' = d'g = hd$ y $d'g''s'' = d's' = 0$. Por la unicidad tendremos que $hd'' = \theta = d'g''$.

Para construir el diagrama tal que $\xi'' = \xi'h$, procedemos dualmente: iniciando con el segundo diagrama de 4.3.1. □

Definición 4.3.3. Diremos que las conflagaciones

$$\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M \text{ y } \xi' : N \xrightarrow{s'} E' \xrightarrow{d'} M,$$

son equivalentes si y sólo si existe $h : E \rightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ N & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M \end{array}$$

Escribiremos $\xi \sim \xi'$. Denotaremos por $[\xi]$ la clase de equivalencia de la conflagación ξ .

Corolario 4.3.4. Sea $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ una conflagación.

- Si el morfismo $f : N \rightarrow N'$ aparece en un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow f & & \downarrow g & & \parallel \\ \zeta : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M \end{array}$$

con renglones conflagaciones, entonces $\zeta \sim f\xi$.

- Si el morfismo $g : M' \rightarrow M$ aparece en un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \zeta : & N & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \\ & \parallel & & \downarrow f & & \downarrow g \\ \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \end{array}$$

con renglones conflagaciones, entonces $\xi g \sim \zeta$.

Además, tendremos que si $\zeta \sim \xi$, entonces $\zeta g \sim \xi g$ y $f\zeta \sim f\xi$.

Demostración: Solo mostraremos el primer punto, pues el segundo punto es dual.

Aplicando el lema de factorización tendremos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow f & & \downarrow g' & & \parallel \\ f\xi : & N' & \xrightarrow{s''} & E'' & \xrightarrow{d''} & M \\ & \parallel & & \downarrow g'' & & \parallel \\ \zeta : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M \end{array}$$

Por lo cual $\zeta \sim f\xi$.

□

Lema 4.3.5. Sea $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ una conflagación, $f : N \rightarrow N'$ y $g : M' \rightarrow M$ morfismos, entonces $f(\xi g) \sim (f\xi)g$.

Demostración: Primero hay que notar que tenemos el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \xi g : & N & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \\
 & \parallel & & \downarrow h & & \downarrow g \\
 \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\
 & \downarrow f & & \downarrow h' & & \parallel \\
 f\xi : & N' & \xrightarrow{s''} & E'' & \xrightarrow{d''} & M
 \end{array}$$

Aplicando el lema de factorización, tendremos el siguiente cuadrado conmutativo con renglones confluencias

$$\begin{array}{ccccc}
 \xi g : & N & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \\
 & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\
 \zeta : & N' & \xrightarrow{\hat{s}} & \hat{E} & \xrightarrow{\hat{d}} & M' \\
 & \parallel & & \downarrow & & \downarrow g \\
 f\xi : & N' & \xrightarrow{s''} & E'' & \xrightarrow{d''} & M
 \end{array}$$

Por 4.3.4, tenemos $f(\xi g) \sim \zeta \sim (f\xi)g$. □

Definición 4.3.6. Decimos que un objeto $P \in \mathcal{C}$ es **$\mathcal{E}$ -proyectivo** si para toda deflación $d : E \rightarrow M$ y cada morfismo $f : P \rightarrow M$ existe un morfismo $\bar{f} : P \rightarrow E$ tal que $d\bar{f} = f$, es decir conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \bar{f} \swarrow & & \downarrow f \\
 E & \xrightarrow{d} & M
 \end{array}$$

Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ tiene **suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos**, si para cada objeto M existe una deflación $d : P \rightarrow M$, donde P es un $\mathcal{E}$ -proyectivo.

Vamos a denotar por $Ext_{\mathcal{E}}(M, N)$ a la colección de clases de equivalencia $[\xi]$ de confluencias ξ de M por N .

Proposición 4.3.7. Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos. Entonces $Ext_{\mathcal{E}}(M, N)$ es un conjunto.

Demostración: Basta ver que hay un conjunto $\mathcal{S}(M, N)$ de confluencias de M por N , tal que cualquier confluencia es equivalente a una de $\mathcal{S}(M, N)$.

Como $\mathcal{C}$ tiene suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos, existe una confluencia $\xi : K \xrightarrow{s} P \xrightarrow{d} M$, donde P es $\mathcal{E}$ -proyectivo y consideremos el conjunto

$$\mathcal{S}(M, N) := \{h\xi \mid h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K, N)\}.$$

Si tomamos $\xi' : N \xrightarrow{s'} E \xrightarrow{d'} M$ una confluación, como P es $\mathcal{E}$ -proyectivo, existe un diagrama conmutativo con renglones confluaciones de la forma

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & K & \xrightarrow{s} & P & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow h & & \downarrow & & \parallel \\ \xi' : & N & \xrightarrow{s'} & E & \xrightarrow{d'} & M \end{array}$$

y entonces $\xi' \sim h\xi$. □

De aquí en adelante, cuando se quiera que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ sea un conjunto, estaremos suponiendo que $\mathcal{E}$ tiene suficientes proyectivos.

Proposición 4.3.8. *Para $M \in \mathcal{C}$ se tiene un funtor covariante*

$$\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$$

donde a cada $N \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ y cada morfismo $f : N \rightarrow N'$ lo envía a $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f)$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f) : \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N')$ que envía $[\xi]$ en $[f\xi]$.

Así mismo, para cada $N \in \mathcal{C}$, tendremos un funtor contravariante

$$\text{Ext}_{\mathcal{E}}(?, N) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$$

donde a cada $M \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ y cada morfismo $g : M' \rightarrow M$ lo envía a $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(g, N)$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(g, N) : \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M', N)$ que envía $[\xi]$ en $[\xi g]$.

Demostración: Por 4.3.4, la regla de asociación de $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f)$ está bien definida. Solo mostraremos que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, -)$ preserva composiciones e identidades, pues la prueba para $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(?, N)$ es dual.

Veamos que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, g)\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f) = \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, gf)$. Para esto, note que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\ f\xi : & N' & \xrightarrow{\hat{s}} & E' & \xrightarrow{\hat{d}} & M \\ & \downarrow g & & \downarrow & & \parallel \\ g(f\xi) : & N'' & \xrightarrow{s''} & E'' & \xrightarrow{d''} & M \end{array}$$

Pero se tiene que $g(f\xi) \sim (gf)\xi$ por 4.3.4.

Para ver que las identidades van a identidades, note que se tiene el cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow 1_N & & \downarrow id & & \parallel \\ \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \end{array}$$

Y por 4.3.4, se tiene que $1_N \xi \sim \xi$. □

Observación 4.3.9. Para cada $M \in \mathcal{C}$ tenemos morfismos especiales

$$\Delta_M := (1, 1)^t : M \rightarrow M \oplus M$$

y

$$\nabla_M := (1, 1) : M \oplus M \rightarrow M.$$

Además, si $f : M \rightarrow M'$ y $g : N \rightarrow N'$ son morfismos en $\mathcal{C}$, tenemos el morfismo suma directa

$$f \oplus g := \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} : M \oplus N \longrightarrow M' \oplus N'.$$

Notemos que, para cada $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$, se tiene:

$$f + g = \nabla_N(f \oplus g)\Delta_M.$$

Lema 4.3.10. Si $\xi : N \xrightarrow{s_1} E \xrightarrow{d_1} M$ y $\xi' : N' \xrightarrow{s_2} E' \xrightarrow{d_2} M'$ son conflagaciones, entonces

$$\xi \oplus \xi' : N \oplus N' \xrightarrow{s_1 \oplus s_2} E \oplus E' \xrightarrow{d_1 \oplus d_2} M \oplus M' \text{ es conflagación.}$$

Demostración: Como $s_i = \ker d_i$ y $d_i = \text{Coker } s_i$ tendremos que $s_1 \oplus s_2 = \ker(d_1 \oplus d_2)$ y $d_1 \oplus d_2 = \text{Coker}(s_1 \oplus s_2)$. Por tanto, tendremos que $\xi \oplus \xi'$ es un par exacto.

Afirmación: El siguiente cuadro es un pullback

$$\begin{array}{ccc} M \oplus E' & \xrightarrow{1 \oplus d_2} & M \oplus M' \\ (0,1) \downarrow & & \downarrow (0,1) \\ E' & \xrightarrow{d_2} & M' \end{array}$$

En efecto: Sean a y b morfismos tales que conmuta el cuadro

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{b} & M \oplus M' \\ a \downarrow & & \downarrow (0,1) \\ E' & \xrightarrow{d_2} & M' \end{array}$$

Aquí b es un morfismo de la forma $b = (b_1, b_2)^t$. El morfismo $c : R \rightarrow M \oplus E'$ definido por $c = (b_1, a)^t$ conmuta como queremos y es único.

Como d_2 es deflación entonces $1 \oplus d_2$ es deflación por 4.2.4, pues los pullbacks son únicos hasta isomorfismo. De la misma manera tendremos que $d_1 \oplus 1$ es deflación.

Por tanto $(1 \oplus d_2)(d_1 \oplus 1) = d_1 \oplus d_2$ es deflación. Por lo tanto existe una confluencia $\bar{\xi}$ y un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\xi} : & \widehat{M} & \xrightarrow{j} & E \oplus E' & \xrightarrow{d_1 \oplus d_2} M \oplus M' \\ & \downarrow \cong & & \parallel & \parallel \\ \xi \oplus \xi' : & N \oplus N' & \xrightarrow{s_1 \oplus s_2} & E \oplus E' & \xrightarrow{d_1 \oplus d_2} M \oplus M' \end{array}$$

Como $\mathcal{E}$ es cerrada bajo isomorfismos, $\xi \oplus \xi'$ es confluencia. $\square$

Lema 4.3.11. *Para morfismos $f : N \rightarrow N_1$, $f' : N' \rightarrow N'_1$ y confluencias $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{\rho} M$ y $\xi' : N' \xrightarrow{s'} E' \xrightarrow{\rho'} M'$ tenemos lo siguiente:*

- (1) $(f \oplus f')(\xi \oplus \xi') \sim f\xi \oplus f'\xi'$.
- (2) $(\xi \oplus \xi')(g \oplus g') \sim \xi g \oplus \xi' g'$.

Demostración: (1) Se sigue de 4.3.4, después de sumar los diagramas que corresponden a las construcciones $f\xi$ y $f'\xi'$. $\square$

Lema 4.3.12. • *Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo,*

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} M \\ & \downarrow f & & \downarrow g & \parallel \\ \xi' : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} M \end{array} \quad \text{donde } \xi, \xi' \text{ son confluencias,}$$

entonces, existe $j : E \rightarrow N'$ tal que $js = f$ si y sólo si ξ' se divide.

- *Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo,*

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} M \\ & \parallel & & \downarrow g & \downarrow h \\ \xi' : & N & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} M' \end{array} \quad \text{donde } \xi, \xi' \text{ son confluencias,}$$

entonces, existe $t : M \rightarrow E'$ tal que $d't = h$ si y sólo si ξ se divide.

Demostración: Sólo vamos a mostrar el primer punto, pues el segundo es dual.

“ $\Leftarrow$ ” Recordemos que si ξ' se divide entonces existe $d'' : E' \rightarrow N'$ tal que $d''s' = Id_{N'}$. Por tanto definimos $j := d''g$, note que $js = d''gs = d''s'f = f$.

“ $\implies$ ” Supongamos que existe $j : E \rightarrow N'$ con $js = f$. Por la propiedad universal del pushout

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{s} & E \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ N' & \xrightarrow{s'} & E' \end{array}$$

aplicada al par de morfismos $(j, 1_{N'})$, existe $\pi : E' \rightarrow N'$ tal que $\pi s' = 1_{N'}$ y $\pi g = j$. Por tanto, ξ' se divide. $\square$

Lema 4.3.13. *Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones confluencias*

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ \xi' : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \end{array}$$

entonces existe $j : E \rightarrow N'$ tal que $js = f$ si y sólo si existe $t : M \rightarrow E'$ tal que $d't = h$.

Demostración: Por el lema de factorización y 4.3.4 tendremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow f & & \downarrow g' & & \parallel \\ f\xi \sim \xi'h : & N' & \xrightarrow{s''} & E'' & \xrightarrow{d''} & M \\ & \parallel & & \downarrow g'' & & \downarrow h \\ \xi' : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M' \end{array}$$

Por lo cual existe $j : E \rightarrow N'$ tal que $js = f$ si y sólo si $f\xi$ se divide es decir si y sólo si $\xi'h$ se divide, por lo cual existe $t : M \rightarrow E'$ tal que $d't = h$ $\square$

Lema 4.3.14. *Si ξ, ξ', ξ_1 y ξ'_1 son confluencias tales que $\xi \sim \xi_1$ y $\xi' \sim \xi'_1$, entonces tendremos que $\xi \oplus \xi' \sim \xi_1 \oplus \xi'_1$.*

Demostración: En efecto, si tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M \\ & \parallel & \downarrow h \\ \xi_1 : & N & \xrightarrow{s_1} E_1 \xrightarrow{d_1} M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \xi' : & N' & \xrightarrow{s'} E' \xrightarrow{d'} M' \\ & \parallel & \downarrow h' \\ \xi'_1 : & N' & \xrightarrow{s'_1} E'_1 \xrightarrow{d'_1} M' \end{array}$$

también conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\xi \oplus \xi' : & N \oplus N' & \xrightarrow{s \oplus s'} & E \oplus E' & \xrightarrow{d \oplus d'} & M \oplus M' \\
& \parallel & & \downarrow h \oplus h' & & \parallel \\
\xi_1 \oplus \xi'_1 : & N \oplus N' & \xrightarrow{s_1 \oplus s'_1} & E_1 \oplus E'_1 & \xrightarrow{d_1 \oplus d'_1} & M \oplus M'
\end{array}$$

□

Definición 4.3.15. *Suma de Baer* Dadas $[\xi], [\xi'] \in \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ definimos la **suma de Baer** $[\xi] + [\xi'] \in \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ como sigue:

$$[\xi] + [\xi'] := [\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta].$$

Observación 4.3.16. La suma de Baer de $[\xi]$ y $[\xi']$ no depende de los representantes.

En efecto, si $\xi \sim \xi_1$ y $\xi' \sim \xi'_1$, por 4.3.14, $\xi \oplus \xi' \sim \xi_1 \oplus \xi'_1$. Por 4.3.4, $\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta \sim \nabla(\xi_1 \oplus \xi'_1)\Delta$.

Para $[\xi] \in \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ y $f : N \rightarrow N'$, denotamos $f[\xi] := [f\xi]$ y si $g : M' \rightarrow M$, $[\xi]g := [\xi g]$.

Nuevamente, gracias a 4.3.4, estas notaciones son válidas pues no dependen del representante.

Lema 4.3.17. Para $[\xi], [\xi'] \in \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ tenemos lo siguiente:

- (1) $(f + f')[\xi] = [f\xi] + [f'\xi]$, si $f, f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, N')$.
- (2) $f([\xi] + [\xi']) = [f\xi] + [f\xi']$, si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, N')$.
- (1') $[\xi](g + g') = [\xi g] + [\xi g']$, si $g, g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', M)$.
- (2') $([\xi] + [\xi'])g = [\xi g] + [\xi' g]$, si $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', M)$.

Demostración: Solo demostraremos 1, 2, ya que los demás son duales.

Para demostrar 1 hay que considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{\rho} & M \\
& \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\
\xi \oplus \xi & N \oplus N & \xrightarrow{s \oplus s} & E \oplus E & \xrightarrow{\rho \oplus \rho} & M \oplus M.
\end{array}$$

Por el lema de factorización obtenemos que $\Delta\xi \sim (\xi \oplus \xi)\Delta$. Por 4.3.9, tendremos

$$\begin{aligned}
(f + f')[\xi] &= [\nabla(f \oplus f')\Delta\xi] \\
&= [\nabla(f \oplus f')(\xi \oplus \xi)\Delta] \\
&= [\nabla(f\xi \oplus f'\xi)\Delta] \\
&= [f\xi] + [f'\xi].
\end{aligned}$$

Finalmente, para mostrar el punto 2, notamos que $f\nabla = \nabla(f \oplus f)$ y entonces, por 4.3.11, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f([\xi] + [\xi']) &= [f\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta] \\
&= [\nabla(f \oplus f)(\xi \oplus \xi')\Delta] \\
&= [\nabla(f\xi \oplus f\xi')\Delta] \\
&= [f\xi] + [f\xi'].
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.3.18. *El conjunto $Ext_{\mathcal{E}}(M, N)$ resulta ser un k -espacio vectorial con la suma de Baer y la acción del campo k dada por:*

$$\lambda[\xi] := [\lambda 1_N \xi], \text{ para } \lambda \in k \text{ y } [\xi] \in Ext_{\mathcal{E}}(M, N).$$

Demostración: Por 4.3.16, la suma de Baer no depende del representante y es binaria.

Conmutatividad: Sean $[\xi], [\xi'] \in Ext_{\mathcal{E}}(M, N)$, primero vamos a demostrar que $\tau(\xi \oplus \xi') \sim (\xi' \oplus \xi)\tau$, donde $\tau := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En efecto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\xi \oplus \xi' : & N \oplus N & \xrightarrow{s \oplus s'} & E \oplus E' & \xrightarrow{d \oplus d'} & M \oplus M \\
& \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\
\xi' \oplus \xi : & N \oplus N & \xrightarrow{s' \oplus s} & E' \oplus E & \xrightarrow{d' \oplus d} & M \oplus M.
\end{array}$$

Usando el lema de factorización, tendremos

$$\begin{array}{ccccc}
\xi \oplus \xi' : & N \oplus N & \xrightarrow{s \oplus s'} & E \oplus E' & \xrightarrow{d \oplus d'} & M \oplus M \\
& \downarrow \tau & & \downarrow \tau_1 & & \parallel \\
\tau(\xi \oplus \xi') \sim (\xi' \oplus \xi)\tau : & N \oplus N & \longrightarrow & \overline{E} & \longrightarrow & M \oplus M \\
& \parallel & & \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau \\
\xi' \oplus \xi : & N \oplus N & \xrightarrow{s' \oplus s} & E' \oplus E & \xrightarrow{d' \oplus d} & M \oplus M.
\end{array}$$

Hay que notar que $\nabla\tau = \nabla$ y $\tau\Delta = \Delta$. Por tanto, tendremos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
[\xi] + [\xi'] &= [\nabla_N(\xi \oplus \xi')\Delta_M] \\
&= [\nabla_N\tau(\xi \oplus \xi')\Delta_M] \\
&= [\nabla_N(\tau(\xi \oplus \xi'))\Delta_M] \\
&= [\nabla_N((\xi' \oplus \xi)\tau)\Delta_M] \\
&= [\nabla_N(\xi' \oplus \xi)\tau\Delta_M] \\
&= [\nabla_N(\xi' \oplus \xi)\Delta_M] \\
&= [\xi'] + [\xi].
\end{aligned}$$

Asociatividad: Sean $[\xi]$, $[\xi']$ y $[\xi''] \in Ext_{\mathcal{E}}(M, N)$, veamos que $[\xi] + ([\xi'] + [\xi'']) = ([\xi] + [\xi']) + [\xi'']$.

$$\begin{aligned}
[\xi] + ([\xi'] + [\xi'']) &= [\xi] + [\nabla(\xi' \oplus \xi'')\Delta] \\
&= [\nabla(\xi \oplus \nabla(\xi' \oplus \xi'')\Delta)\Delta] \\
&= [\nabla((1 \oplus \nabla)(\xi \oplus (\xi' \oplus \xi''))(1 \oplus \Delta))\Delta] \\
&= [\nabla(1 \oplus \nabla)(\xi \oplus (\xi' \oplus \xi''))(1 \oplus \Delta)\Delta].
\end{aligned}$$

Similarmente, tenemos $([\xi] + [\xi']) + [\xi''] = [\nabla(\nabla \oplus 1)((\xi \oplus \xi') \oplus \xi'')(\Delta \oplus 1)\Delta]$.

Notemos que los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccccc}
N \oplus (N \oplus N) & \xrightarrow{1 \oplus \nabla} & N \oplus N & \xrightarrow{\nabla} & N \\
\downarrow \phi & & & & \parallel \\
(N \oplus N) \oplus N & \xrightarrow{\nabla \oplus 1} & N \oplus N & \xrightarrow{\nabla} & N \\
M & \xrightarrow{\Delta} & M \oplus M & \xrightarrow{1 \oplus \Delta} & M \oplus (M \oplus M) \\
\parallel & & & & \downarrow \phi \\
M & \xrightarrow{\Delta} & M \oplus M & \xrightarrow{\Delta \oplus 1} & (M \oplus M) \oplus M \\
\xi \oplus (\xi' \oplus \xi'') : & N \oplus (N \oplus N) & \longrightarrow & E \oplus (E' \oplus E'') & \longrightarrow & M \oplus (M \oplus M) \\
& \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\
(\xi \oplus \xi') \oplus \xi'' : & (N \oplus N) \oplus N & \longrightarrow & (E \oplus E') \oplus E'' & \longrightarrow & (M \oplus M) \oplus M
\end{array}$$

donde ϕ es el isomorfismo canónico determinado por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por 4.3.2, obtenemos:

$$\phi(\xi \oplus (\xi' \oplus \xi'')) \cong ((\xi \oplus \xi') \oplus \xi'')\phi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\nabla(1 \oplus \nabla)(\xi \oplus (\xi' \oplus \xi''))(1 \oplus \Delta)\Delta &= \nabla(\nabla \oplus 1)\phi(\xi \oplus (\xi' \oplus \xi''))(1 \oplus \Delta)\Delta \\
&\sim \nabla(\nabla \oplus 1)(\xi \oplus (\xi' \oplus \xi''))\phi(1 \oplus \Delta)\Delta \\
&= \nabla(\nabla \oplus 1)(\xi \oplus (\xi' \oplus \xi''))(\Delta \oplus 1)\Delta.
\end{aligned}$$

Neutro: Consideremos la confluencia trivial $\xi_0 : N \xrightarrow{(1,0)^t} N \oplus M \xrightarrow{(0,1)} M$ y consideramos también la confluencia $\zeta_0 : 0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{Id_M} M$.

Tomemos $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ una confluencia de M por N arbitraria, tendremos entonces el siguiente cuadro conmutativo con renglones confluencias

$$\begin{array}{ccccc}
\xi_0 \oplus \xi : & N \oplus N & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}} & (N \oplus M) \oplus E & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}} & M \oplus M \\
& \downarrow \nabla_N & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \parallel \\
\zeta_0 \oplus \xi : & N & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}} & M \oplus E & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}} & M \oplus M \\
& \parallel & & \uparrow \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix} & & \uparrow \Delta_M \\
\xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M
\end{array}$$

Se sigue que $\zeta_0 \oplus \xi \sim \nabla_N(\xi_0 \oplus \xi)$ y que $(\zeta_0 \oplus \xi)\Delta_M \sim \xi$. Luego $\xi \sim \nabla_N(\xi_0 \oplus \xi)\Delta_M$. Por lo tanto hemos demostrado que $[\xi] = [\xi_0] + [\xi]$. Así, el neutro de $Ext_{\mathcal{E}}(M, N)$ es $[\xi_0]$.

Inversos: Para verificar la existencias del inverso de $[\xi]$, primero hay que notar que $0\xi \sim \xi_0$. En efecto, por 4.3.4 , tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\
& \downarrow 0 & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} & & \parallel \\
0\xi \sim \xi_0 : & N & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & N \oplus M & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} & M.
\end{array}$$

Con todo esto, usando 4.3.17, tendremos

$$0 = [\xi_0] = [0\xi] = (1 + (-1))[\xi] = [\xi] + (-1)[\xi].$$

Hemos demostrado que $Ext_{\mathcal{E}}(M, N)$ es un grupo abeliano.

Para ver las propiedades de espacio vectorial hay que notar primero que $\lambda[\xi]$ está bien definido por 4.3.4. Las siguientes propiedades se tienen de 4.3.17 y del hecho que $End_{\mathcal{C}}(N)$ es k -espacio vectorial:

- $\lambda([\xi] + [\xi']) = \lambda[\xi] + \lambda[\xi']$.
- $(\lambda + \lambda')[\xi] = \lambda[\xi] + \lambda'[\xi]$.
- $\lambda(\lambda'[\xi]) = (\lambda\lambda')[\xi]$.
- $1[\xi] = [\xi]$.

□

Proposición 4.3.19. Para $M \in \mathcal{C}$, se tiene un k -funtor covariante.

$$\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, -) : \mathcal{C} \longrightarrow k\text{-Mod}$$

donde a cada $N \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ y cada morfismo $f : N \rightarrow N'$ lo envía a $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f)$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f) : \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N')$ que envía $[\xi]$ en $[f\xi]$ es un morfismo de k -espacios vectoriales

Así mismo, para cada $N \in \mathcal{C}$, tendremos un k -funtor contravariante

$$\text{Ext}_{\mathcal{E}}(?, N) : \mathcal{C} \longrightarrow k\text{-Mod}$$

donde a cada $M \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N)$ y cada morfismo $g : M' \rightarrow M$ lo envía a $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(g, N)$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(g, N) : \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M', N)$ que envía $[\xi]$ en $[\xi g]$ es un morfismo de k -espacios vectoriales.

Demostración: Para la prueba de la primera parte, basta mostrar que cada $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f)$ es morfismo de k -espacios vectoriales, y que $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, \lambda f + f') = \lambda \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f) + \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, f')$. Esto se sigue de 4.3.17 y la estructura de k -espacio vectorial de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, N')$.

La segunda parte es dual. □

Lema 4.3.20. Supongamos que en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & & \\ f \downarrow & & \downarrow \sigma & & \\ Y & \xrightarrow{i} & W & \xrightarrow{p} & A \\ g \downarrow & & \downarrow \pi & & \parallel \\ Z & \xrightarrow{i''} & \overline{W} & \xrightarrow{p'} & A \end{array}$$

son conflagaciones la primera columna, el renglón central y el renglón inferior, entonces la columna central también es una conflagación.

Demostración: Por hipótesis, se tiene $\sigma = if$. Por 4.2.5, el cuadro inferior izquierdo es un pushout. Vamos a demostrar el lema en tres pasos.

Paso 1: $\sigma = \ker(\pi)$.

Supongamos que $\bar{\sigma} : X' \rightarrow W$ es un morfismo tal que $\pi\bar{\sigma} = 0$. Entonces,

$$p\bar{\sigma} = p'\pi\bar{\sigma} = 0.$$

Como i es núcleo de p , existe $\hat{\sigma} : X' \rightarrow Y$ tal que $i\hat{\sigma} = \bar{\sigma}$. Entonces,

$$i''g\hat{\sigma} = \pi i\hat{\sigma} = \pi\bar{\sigma} = 0$$

y se sigue que $g\hat{\sigma} = 0$. Pero, como $f = \ker(g)$, existe $\sigma' : X' \rightarrow X$ tal que $f\sigma' = \hat{\sigma}$. Entonces, obtenemos $\sigma\sigma' = if\sigma' = i\hat{\sigma} = \bar{\sigma}$. Como σ es mono, esta σ' es única tal que $\sigma\sigma' = \bar{\sigma}$.

Así, $\sigma = \ker(\pi)$.

Paso 2: $\pi = \text{Coker}(\sigma)$. Como composición de inflaciones es inflación, $\sigma = if$ es inflación y existe la confluación que aparece como primer renglón del siguiente digrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sigma} & W & \xrightarrow{\hat{\pi}} & U \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{\sigma} & W & \xrightarrow{\pi} & \overline{W} \end{array}$$

donde u es el morfismo que existe porque $\hat{\pi} = \text{Coker}(\sigma)$ y $\pi\sigma = \pi if = i''gf = 0$. Como $(\hat{\pi}i)f = \hat{\pi}if = \hat{\pi}\sigma = 0$ y $g = \text{Coker}(f)$, entonces, existe $\eta : Z \rightarrow U$ tal que $\hat{\pi}i = \eta g$. Aplicando la propiedad del pushout de la esquina inferior izquierda del diagrama de la hipótesis al cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & W \\ g \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ Z & \xrightarrow{\eta} & U \end{array}$$

sabemos que hay un morfismo $v : \overline{W} \rightarrow U$ tal que $v\pi = \hat{\pi}$ y $vi'' = \eta$. Ahora, para verificar que π es epimorfismo, suponemos que $x : \overline{W} \rightarrow T$ tal que $x\pi = 0$ y veamos que $x = 0$. En efecto, si aplicamos nuevamente la propiedad del pushout de la esquina inferior izquierda del diagrama de la hipótesis al cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & W \\ g \downarrow & & \downarrow 0 \\ Z & \xrightarrow{0} & T \end{array}$$

sabemos que hay un único morfismo $y : \overline{W} \rightarrow T$ tal que $y\pi = 0$ y $yi'' = 0$. Notemos que $xi''g = x\pi i = 0$ y, como g es epimorfismo, se tiene que $xi'' = 0$. Como los morfismos $x, 0 : \overline{W} \rightarrow T$ tienen las propiedades de y coinciden los tres. Entonces, tanto π como $\hat{\pi}$ son epimorfismos. Entonces, de las igualdades $\hat{\pi} = v\pi = vu\hat{\pi}$ y $\pi = u\hat{\pi} = uv\pi$, obtenemos $vu = id_U$ y $uv = id_{\overline{W}}$. Se sigue que π es conúcleo de σ .

Paso 3: La columna central es confluación. En el diagrama que aparece al principio del **Paso 2**, tenemos ahora un isomorfismo de pares exactos y, como $\mathcal{E}$ es cerrada bajo isomorfismos, el renglón inferior también es una confluación. $\square$

Lema 4.3.21. Si $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ es una confluación, entonces para cada $Z \in \mathcal{C}$ existe un **morfismo conectivo** $\theta : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{E}}(Z, N)$, definido por la regla

$$\theta(h) = [\xi h], \text{ para } h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M).$$

Demostración: Veamos que en efecto esta función es un morfismo de k -espacios vectoriales.

Notemos que, para $\lambda \in k$, del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & \downarrow \lambda 1_N & & \downarrow \lambda 1_E & & \downarrow \lambda 1_M \\ \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \end{array}$$

obtenemos, después de aplicar el lema de factorización, que $(\lambda 1_N)\xi \sim \xi(\lambda 1_M)$. Entonces, si $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M)$, $\xi(\lambda h) \sim \xi(\lambda 1_M h) \sim (\lambda 1_N)\xi h$. Así, $\theta(\lambda h) = \lambda \theta(h)$.

Note que $\theta(\lambda h_1 + h_2) = [\xi(\lambda h_1 + h_2)] = [\xi \lambda h_1] + [\xi h_2] = [\lambda 1_N \xi h_1] + [\xi h_2] = \lambda [\xi h_1] + [\xi h_2]$, gracias a 4.3.17 y la estructura de k -espacio vectorial de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M)$ y la de $\text{End}_{\mathcal{C}}(N)$. $\square$

Teorema 4.3.22. Si $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ es una confluencia, entonces, para cada $Z \in \mathcal{C}$, existe una sucesión exacta en $k\text{-Mod}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, N) & \xrightarrow{s_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, E) & \xrightarrow{d_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M) \\ & & & & \searrow \theta & & \\ & & \text{Ext}_{\mathcal{E}}(Z, N) & \xrightarrow{\bar{s}} & \text{Ext}_{\mathcal{E}}(Z, E) & \xrightarrow{\bar{d}} & \text{Ext}_{\mathcal{E}}(Z, M) \end{array}$$

Demostración: La sucesión superior claramente es exacta, por lo que resta mostrar que pasa con la última.

Recordemos quienes son los morfismos $\bar{s}$ y $\bar{d}$.

El morfismo $\bar{s} := \text{Ext}_{\mathcal{E}}(Z, s)$ envía la clase de cada confluencia $\xi' : N \xrightarrow{s'} U \xrightarrow{d'} Z$ en la clase de la confluencia $s\xi'$. Se tiene el diagrama conmutativo asociado

$$\begin{array}{ccccc} \xi' : & N & \xrightarrow{s'} & U & \xrightarrow{d'} & Z \\ & \downarrow s & & \downarrow & & \parallel \\ s\xi' : & E & \xrightarrow{s''} & U' & \xrightarrow{d''} & Z. \end{array}$$

El morfismo $\bar{d} := \text{Ext}_{\mathcal{E}}(Z, d)$ envía la clase de cada confluencia $\xi'' : E \xrightarrow{s''} U'' \xrightarrow{d''} Z$ en la clase de la confluencia $d\xi''$. Se tiene el diagrama conmutativo asociado

$$\begin{array}{ccccc} \xi'' : & E & \xrightarrow{s''} & U'' & \xrightarrow{d''} & Z \\ & \downarrow d & & \downarrow & & \parallel \\ d\xi'' : & M & \xrightarrow{\underline{s}} & \bar{U} & \xrightarrow{\underline{d}} & Z. \end{array}$$

El morfismo θ se definió en 4.3.21 y tiene el diagrama conmutativo asociado

$$\begin{array}{ccccc} \xi h : & N & \xrightarrow{s''} & U'' & \xrightarrow{d''} & Z \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow h \\ \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M. \end{array}$$

Veamos que $Im(d_*) = ker(\theta)$
 En efecto, note que $\theta d_*(h) = \theta(dh)$, y recordando que $\theta(dh) = [\xi dh]$, entonces tendremos el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi dh : & N & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & Z \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow dh \\ \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M. \end{array}$$

Allí vemos que dh se factoriza por d . Entonces, por 4.3.12, $[\xi dh] = 0$. Concluimos que $\theta d_* = 0$. Luego $Im(d_*) \subseteq ker(\theta)$. Usando 4.3.12, podemos revertir el argumento y obtenemos la otra inclusión.

Mostremos ahora que $ker(\bar{s}) = Im(\theta)$:
 En efecto tenemos que si $\bar{s}[\xi'] = 0$, entonces, por 4.3.13, para el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi' : & N & \xrightarrow{s'} & U & \xrightarrow{d'} & Z \\ & \downarrow s & & \downarrow & & \parallel \\ \xi_0 \sim s\xi' : & E & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & Z \end{array}$$

existe $t : U \rightarrow E$ tal que $ts' = s$. Ahora tenemos el siguiente cuadro con renglones confluencias

$$\begin{array}{ccccc} \xi' : & N & \xrightarrow{s'} & U & \xrightarrow{d'} & Z \\ & \parallel & & \downarrow t & & \downarrow h \\ \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \end{array}$$

en el cual existe el morfismo h gracias a que los renglones son confluencias y se induce h , por lo que $\theta(h) = [\xi']$. Luego, $ker(\bar{s}) \subseteq Im(\theta)$.

Para ver que $Im(\theta) \subseteq ker(\bar{s})$, note que si $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, M)$, tenemos el siguiente cuadro conmutativo con renglones confluencias

$$\begin{array}{ccccc} \xi h : & N & \xrightarrow{s'} & U' & \xrightarrow{d'} & Z \\ & \parallel & & \downarrow h' & & \downarrow h \\ \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M. \end{array}$$

Usando 4.3.4 aplicado a s obtenemos un cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi h : & N & \xrightarrow{s'} & U' & \xrightarrow{d'} & Z \\ & \downarrow s & & \downarrow & & \parallel \\ s\xi h : & E & \longrightarrow & \bar{U} & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Por 4.3.12, obtenemos que $s\xi h$ se divide pues $s = h's'$. Así, $\bar{s}\theta(h) = 0$.

Finalmente veamos que $\ker(\bar{d}) = \text{Im}(\bar{s})$. Como $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(Z, -)$ es funtor y $ds = 0$, se tiene que $\bar{d}\bar{s} = 0$. Se sigue que $\text{Im}(\bar{s}) \subseteq \ker(\bar{d})$. Para verificar la otra inclusión, consideremos una confluencia $\xi' : E \xrightarrow{s'} U \xrightarrow{d'} Z$ tal que $d\xi'$ se divide. Entonces obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \xi' : & E & \xrightarrow{s'} & U & \xrightarrow{d'} & Z \\ & \downarrow d & & \downarrow g' & & \parallel \\ d\xi' : & M & \xrightarrow{s''} & U' & \xrightarrow{d''} & Z \\ & \parallel & & \downarrow g'' & & \parallel \\ \xi_0 : & M & \xrightarrow{(1,0)^t} & M \oplus Z & \xrightarrow{(0,1)} & Z \end{array}$$

porque $d\xi'$ se divide y podemos aplicar 4.1.3 para deducir que $d\xi' \sim \xi_0$.

Si definimos $g = g''g'$, a partir del diagrama anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & N & \xlongequal{\quad} & N & \\ & \downarrow s & & \downarrow s's & \\ \xi' : & E & \xrightarrow{s'} & U & \xrightarrow{d'} & Z \\ & \downarrow d & & \downarrow g & & \parallel \\ \xi_0 : & M & \xrightarrow{(1,0)^t} & M \oplus Z & \xrightarrow{(0,1)} & Z \end{array}$$

Por 4.3.20, la columna central ζ es una confluencia. Como el diagrama conmuta, vemos que g tiene la forma $g = (t, d')^t$, con $ts' = d$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, donde el primer renglón es $\xi'' := \zeta(0, 1)^t$:

$$\begin{array}{ccccc} \xi'' : & N & \longrightarrow & \hat{U} & \longrightarrow & Z \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow (0,1)^t \\ \zeta : & N & \xrightarrow{s's} & \hat{U} & \xrightarrow{(t,d')^t} & M \oplus Z \\ & \downarrow s & & \parallel & & \downarrow (0,1) \\ \xi' : & N & \xrightarrow{s'} & U & \xrightarrow{d'} & Z \end{array}$$

Componiendo en las columnas, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi'' : & N & \longrightarrow & \hat{U} & \longrightarrow & Z \\ & \downarrow s & & \downarrow & & \parallel \\ \xi' : & E & \xrightarrow{s'} & U & \xrightarrow{d'} & Z \end{array}$$

Por 4.3.4, $s\xi'' \sim \xi'$. Esto es que $\bar{s}[\xi''] = \xi'$ y entonces $\ker(\bar{d}) \subseteq \text{Im}(\bar{s})$, como se quería verificar. $\square$

Corolario 4.3.23. Si $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ es una confluencia, entonces, para cada $Z \in \mathcal{C}$, existe una sucesión exacta en $k\text{-Mod}$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Z) & \xrightarrow{d^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Z) & \xrightarrow{s^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Z) \\ & & & & \bar{\theta} & & \\ & \nwarrow & & & & & \\ \text{Ext}_{\mathcal{E}}(M, Z) & \xrightarrow{\underline{d}} & \text{Ext}_{\mathcal{E}}(E, Z) & \xrightarrow{\underline{s}} & \text{Ext}_{\mathcal{E}}(N, Z) & & \end{array}$$

Demostración: La prueba es dual a la anterior. $\square$

El siguiente corolario nos da otra forma de describir la estructura del espacio $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(N, M)$

Corolario 4.3.24. Si $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ tiene suficientes $\mathcal{E}$ -proyectivos, entonces para cada $M \in \mathcal{C}$ y cada confluencia

$$K \xrightarrow{s} P \xrightarrow{d} N,$$

donde P es un $\mathcal{E}$ -proyectivo, se tiene la siguiente sucesión exacta,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M) & \xrightarrow{d^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, M) & \xrightarrow{s^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K, M) \\ & & & & \bar{\theta} & & \\ & \nwarrow & & & & & \\ \text{Ext}_{\mathcal{E}}(N, M) & \xrightarrow{\underline{d}} & 0 & & & & \end{array}$$

donde $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(N, M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K, M)/\text{Im}(s^*)$

Demostración: Por 4.3.23, se tiene la sucesión exacta larga, pero por ser P un $\mathcal{E}$ -proyectivo, se tiene $\text{Ext}_{\mathcal{E}}(P, M) = 0$. Por lo tanto, $\bar{\theta}$ resulta ser un epimorfismo y se tiene lo deseado. $\square$

Definición 4.3.25. Decimos que un funtor entre categorías exactas $F : (\mathcal{C}_1, \mathcal{E}_1) \rightarrow (\mathcal{C}_2, \mathcal{E}_2)$ es **exacto** si y sólo si F envía $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_2$.

Donde cada confluencia $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ se envía a $F(\xi) : F(N) \xrightarrow{F(s)} F(E) \xrightarrow{F(d)} F(M)$.

Lema 4.3.26. Supongamos que $(\mathcal{C}_1, \mathcal{E}_1)$ y $(\mathcal{C}_2, \mathcal{E}_2)$ son categorías exactas y supongamos que tenemos un funtor exacto $F : (\mathcal{C}_1, \mathcal{E}_1) \rightarrow (\mathcal{C}_2, \mathcal{E}_2)$. Entonces, F induce una transformación natural de bifuntores

$$F^* : \text{Ext}_{\mathcal{E}_1}(-, ?) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{E}_2}(F(-), F(?)).$$

Tal que $F[\xi] = [F(\xi)]$. Además, F^* es un monomorfismo cuando F es fiel y pleno.

Demostración: Claramente si $\xi \sim \xi'$ en $(\mathcal{C}_1, \mathcal{E}_1)$, entonces $F(\xi) \sim F(\xi')$ en $(\mathcal{C}_2, \mathcal{E}_2)$, por lo que la función F^* está bien definida.

Primero veamos que en efecto se obtiene una transformación natural en ambas variables.

Para esto tomemos $M \in \mathcal{C}_1$ fijo y $f : N \rightarrow N'$ un morfismo en $\mathcal{C}_1$, veamos que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{E}_1}(M, N) & \xrightarrow{F^*} & \text{Ext}_{\mathcal{E}_2}(F(M), F(N)) \\ \downarrow \text{Ext}_{\mathcal{E}_1}(M, f) & & \downarrow \text{Ext}_{\mathcal{E}_2}(F(M), F(f)) \\ \text{Ext}_{\mathcal{E}_1}(M, N') & \xrightarrow{F^*} & \text{Ext}_{\mathcal{E}_2}(F(M), F(N')) \end{array}$$

Dada una confluencia $\xi : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ en $\mathcal{E}_1$ tendremos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{E}_2}(F(M), F(f))F^*[\xi] = \text{Ext}_{\mathcal{E}_2}(F(M), F(f))[F(\xi)] = [F(f)F(\xi)].$$

Por otro lado,

$$F^*\text{Ext}_{\mathcal{E}_1}(M, f)[\xi] = F^*[f\xi] = [F(f\xi)].$$

Vamos a mostrar que $[F(f)F(\xi)] = [F(f\xi)]$.

En efecto, note que al aplicar el funtor F al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{d} & M \\ & f \downarrow & & \downarrow g & & \parallel \\ f\xi : & N' & \xrightarrow{s'} & E' & \xrightarrow{d'} & M \end{array}$$

obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} F(\xi) : & F(N) & \xrightarrow{F(s)} & F(E) & \xrightarrow{F(d)} & F(M) \\ & F(f) \downarrow & & \downarrow F(g) & & \parallel \\ F(f\xi) : & F(N') & \xrightarrow{F(s')} & F(E') & \xrightarrow{F(d')} & F(M) \end{array}$$

Por 4.3.4, se tiene que $[F(f)F(\xi)] = [F(f\xi)]$.

La verificación de la naturalidad de F^* en la otra variable es análoga.

Finalmente veamos que se cumple la última afirmación.

Como F^* es una transformación natural entre k -bifuntores vamos sólo a mostrar que $F^*([\zeta]) = 0$ implica que $[\zeta] = 0$.

Sea $\zeta : N \xrightarrow{s} E \xrightarrow{d} M$ una confluencia tal que $F(\zeta)$ se divide.

Como $F(\zeta) : F(N) \xrightarrow{F(s)} F(E) \xrightarrow{F(d)} F(M)$ se divide entonces existe un morfismo $r : F(E) \rightarrow F(N)$, tal que $rF(s) = id_{F(N)}$, por lo tanto, por ser F fiel y pleno existe un morfismo $v : E \rightarrow N$ tal que $F(v) = r$, y entonces ζ se divide, pues $vs = id_N$. $\square$

Lema 4.3.27. *El espacio $Ext_{\mathcal{E}}(M, N)$ tiene estructura natural de $End_{\mathcal{C}}(N) - End_{\mathcal{C}}(M)$ -bimódulo dada por las reglas*

$$f[\xi] = [f\xi], \text{ para } f \in End_{\mathcal{C}}(N)$$

$$[\xi]g = [\xi g], \text{ para } g \in End_{\mathcal{C}}(M).$$

Demostración: Se sigue de 4.3.4, 4.3.5 y 4.3.17. □

Lema 4.3.28. *Sea $F : (\mathcal{C}', \mathcal{E}') \rightarrow (\mathcal{C}, \mathcal{E})$ un funtor exacto fiel y pleno. Sea $\xi : N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ un par de morfismos de $\mathcal{C}'$ tal que $F(\xi)$ es una confluencia que se divide en $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$. Entonces, ξ es una confluencia que se divide en $(\mathcal{C}', \mathcal{E}')$.*

Demostración: Como $F(\xi)$ es un par exacto que se divide, hay un diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$ de la forma

$$\begin{array}{ccccc} F(N) & \xrightarrow{F(f)} & F(E) & \xrightarrow{F(g)} & F(M) \\ & \parallel & \downarrow s & & \parallel \\ F(N) & \xrightarrow{(1,0)^t} & F(N) \oplus F(M) & \xrightarrow{(0,1)} & F(M) \\ & \parallel & \downarrow t & & \parallel \\ F(N) & \xrightarrow{F[(1,0)^t]} & F(N \oplus M) & \xrightarrow{F[(0,1)]} & F(M) \end{array}$$

donde la parte superior aparece por 4.1.3 con s isomorfismo y la parte inferior es consecuencia de que F preserva biproductos, y t es isomorfismo. Como F es fiel y pleno, del rectángulo externo obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \xi : & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M \\ & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel \\ \xi_0 : & N & \xrightarrow{(1,0)^t} & N \oplus M & \xrightarrow{(0,1)} & M \end{array}$$

donde ξ_0 es la confluencia trivial en $(\mathcal{C}', \mathcal{E}')$, ver 4.2.3. Como $\mathcal{E}'$ es cerrada bajo isomorfismos ξ es confluencia en $(\mathcal{C}', \mathcal{E}')$, que se divide por 4.1.3. □

Bibliografía

- [1] Auslander, M., and Reiten, I. (1978). Representation theory of artin algebras VI: A functorial approach to almost split sequences. *Communications in Algebra*, 6(3), 257–300.
- [2] Bautista, R., Salmerón, L., y Zuazua, R. (2009). *Differential tensor algebras and their module categories* (Vol. 362). Cambridge University Press.
- [3] Bautista, R., Pérez, E., y Salmerón, L. (2023). Homological systems and bocses. *Journal of Algebra*, 617, 192-274.
- [4] Bautista, R., Pérez, E., y Salmerón, L. (2024). Tame and wild theorem for the category of modules filtered by standard modules. *Journal of Algebra*, 650, 394-457.
- [5] Bautista, R., Pérez, E., y Salmerón, L. (2024). Generic modules for the category of modules filtered by standard modules, Preprint, 2024.
- [6] Burt, W.L. Almost split sequences and bocses, Unpublished Monograph (2005).
- [7] Crawley-Boevey, W. W. (1988). On tame algebras and bocses. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3), 451-483.
- [8] Crawley-Boevey, W. W. Tame Algebras and Generic Modules, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Volume 63, Issue 2, 1991, 241–265.
- [9] Drozd, J. A. (2006, October). Tame and wild matrix problems. In *Representation Theory II: Proceedings of the Second International Conference on Representations of Algebras* Ottawa, Carleton University, August 13–25, 1979 (pp. 242-258). Berlin, Heidelberg: Springer.
- [10] Dräxler, P., Reiten, I., Smalø, S., Solberg, Ø., Keller, B. (1999). Exact categories and vector space categories. *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(2), 647-682.
- [11] Krause, H. (2015). Krull–Schmidt categories and projective covers. *Expositiones Mathematicae*, 33(4), 535-549.
- [12] Mitchell, B. (1965). *Theory of categories*. Academic Press.
- [13] Shah, A. (2023). Krull-Remak-Schmidt decompositions in Hom-finite additive categories. *Expositiones Mathematicae*, 41(1), 220-237.

Gabriel Hernández Martínez

Funtores de reducción y problemas matriciales.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:432650830

Fecha de entrega

21 feb 2025, 10:39 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

21 feb 2025, 10:43 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

Funtores de reducción y problemas matriciales.pdf

Tamaño de archivo

1.4 MB

180 Páginas

63,776 Palabras

244,004 Caracteres

5% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 5%  Fuentes de Internet
- 1%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	Funtores de reducción y problemas matriciales	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Gabriel Hernández Martínez	ghernandez@matmor.unam.mx
Director	Leonardo Salmerón Castro	salmeron@matmor.unam.mx
Codirector		
Coordinador del programa		

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	 Gabriel Hernández Martínez
Lugar y fecha	Morelia Michoacan a 21 de Febrero de 2025