



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

GENERALIZACIÓN DE RÖSSLER CON MULTIESTABILIDAD

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
Maestro en Ciencias en Ingeniería Física

PRESENTA:

Adrián Alonso López

ASESOR:

Dr. Joaquin Estevez Delgado

Morelia, Michoacán, Agosto, 2025



A mi esposa, Jenny. Sigamos siendo el mejor equipo del mundo.

Agradecimientos

Primero, quiero agradecer a Jenny, mi esposa, por estar siempre al pendiente de mi trabajo, por darme estabilidad y la ayuda necesaria para terminar todo en tiempo. Gracias por estar siempre ahí para mí, por aconsejarme y acompañarme en todo este proceso. Gracias por esos días de trabajo en las que veíamos tus novelas, alguna película o simplemente cantabas algo. Gracias por confiar en mí, por el apoyo moral y por siempre ver por los dos y nuestro futuro. Quiero que sepas que te adoro con todo mi ser y que yo también estaré para tí en todo momento. También, quiero agradecer a mi familia. A mis padres que se siguen preocupando por mí y que en todo momento querían saber mi desempeño en posgrado y en el trabajo. A mi hermano que venía a pasar el rato conmigo en casa y me platicaba distintas cosas mientras yo estaba metido en la computadora, siempre haciendo algo. Gracias por no desesperarte. Gracias a Diego, por no abandonarme y seguir soportando que te incluya en cosas donde es necesaria la interacción social. Gracias por seguir siendo mi amigo dentro de todo este proceso, esperando que así sea siempre. Gracias a mi asesor de tesis, el Dr. Joaquín, por sus consejos y lecciones en todo este tiempo que lo he conocido, por ayudarme a crecer como profesionista y como persona. Quiero agradecer la confianza que ha depositado en mí. También, en una mención especial, quiero agradecer a Cocoa y Mantecado, mis gatos. Siempre estuvieron conmigo en las madrugadas que me quedaba trabajando, nunca se separaron de mí a pesar de que se caían del sueño. Y si se dormían no era muy lejos de mí. También por obligarme a dormir cuando ya lo creían prudente y comenzaban a brincar en la computadora o hacer travesuras alrededor. No sé que tienen ellos pero mejor ayuda o apoyo moral no puede haber y eso lo puede confirmar Jenny.

Resumen

En este trabajo se presenta una generalización del sistema de Rössler dividida en dos casos, con el objetivo de estudiar cómo ciertas modificaciones no lineales en sus ecuaciones afectan la dinámica del sistema. Mediante simulaciones numéricas, análisis teóricos y validación experimental en una computadora analógica (THE ANALOG THING), se caracterizan las trayectorias, bifurcaciones, atractores y estabilidad de los sistemas. Se identifican comportamientos caóticos robustos, rutas al caos diversas y, de manera destacada, fenómenos de multiestabilidad bajo parámetros fijos. Las generalizaciones propuestas muestran estructuras dinámicas que no habían sido reportadas previamente, lo que representa una aportación original al estudio de sistemas no lineales.

Palabras Clave: Sistemas dinámicos no lineales, Multiestabilidad, Computación analógica, Generalización, sistema de Rössler.

Abstract

This work presents two generalizations of the Rössler system, aiming to study how specific nonlinear modifications to its equations affect the system's dynamics. Through numerical simulations, theoretical analysis, and experimental validation using an analog computer (THE ANALOG THING), the trajectories, bifurcations, attractors, and stability of the systems are characterized. Robust chaotic behavior, diverse routes to chaos, and notably, multistability phenomena under fixed parameters are identified. The proposed generalizations exhibit dynamic structures not previously reported, representing an original contribution to the study of nonlinear systems.

Keywords: Nonlinear dynamical systems, Multistability, Analog computing, Generalization, Rössler system.

Índice general

1	Introducción	1
2	Introducción a los Sistemas Dinámicos	7
2.1	Conceptos Básicos	7
2.2	Sistemas no Lineales y Caos Determinista	10
2.3	Análisis de Estabilidad y Comportamiento de los Sistemas	13
2.3.1	Estabilidad de Equilibrio	13
2.3.2	Análisis de Estabilidad Local	14
3	El Sistema de Rössler	19
3.1	Descripción y Ecuaciones del Sistema de Rössler	19
3.2	Propiedades Dinámicas del Sistema de Rössler	20
3.2.1	Atractor de Rössler	20
3.2.2	Estabilidad y Bifurcaciones en el Sistema de Rössler	22
3.3	Análisis de comportamiento caótico en el sistema de Rössler . . .	28
4	Generalización del Sistema de Rössler	30
4.1	Algunos Sistemas que Generalizan al Sistema de Rössler	30
4.2	Modificación del Sistema mediante un Parámetro	31
4.2.1	Puntos de Equilibrio y su Estabilidad	34
4.2.2	Exponentes de Lyapunov y Diagrama de Bifurcación	37
4.2.3	Sección de Poincaré	44
4.3	Del Parámetro al Efecto de un Término no Lineal Adicional . . .	47
4.3.1	Puntos de Equilibrio y su Estabilidad	49
4.3.2	Exponentes de Lyapunov	52
4.4	Estudio de Bifurcaciones y Cambios de Comportamiento	57
4.4.1	Diagrama de Bifurcación	57
4.4.2	Sección de Poincaré	60

4.5	Comportamiento Caótico y Transiciones de Fase en el Sistema Generalizado	63
5	Modelación del Sistema de Rössler modificado	66
5.1	Computación Analógica	67
5.1.1	Computadora The Analog Thing (THAT)	72
5.2	Implementación del Circuito en THAT	75
5.3	Comparación entre el Sistema, el Circuito en THAT y su implementación	79
5.4	Efectos de los Parámetros del Sistema en las Bifurcaciones	81
6	Discusión de Resultados	84
7	Conclusiones	94
	Bibliografía	98

Capítulo 1

Introducción

El caos es un fenómeno muy interesante en sistemas dinámicos no lineales que ha sido intensamente estudiado en las últimas décadas. Un sistema caótico es un sistema determinista no lineal que exhibe un comportamiento no periódico e impredecible [1]. En particular, los sistemas caóticos han sido de gran interés para comprender el comportamiento caótico de la naturaleza. Los sistemas más estudiados y representativos son los de Lorenz, Chua, Rössler, Van der Pol y Duffing [2, 3, 4, 5, 6].

Los sistemas dinámicos han demostrado ser una herramienta fundamental para comprender la evolución y el comportamiento de numerosos fenómenos en la ciencia y la naturaleza. Desde la física hasta la biología, su aplicación ha permitido modelar interacciones complejas y predecir patrones en sistemas de gran diversidad.

Uno de los ámbitos donde los sistemas dinámicos han sido especialmente influyentes es en la ecología y la biología de poblaciones. Modelos como el de Lotka-Volterra describen la dinámica entre especies depredadoras y presas, proporcionando una estructura matemática para analizar la estabilidad y persistencia de los ecosistemas [7]. De manera similar, en epidemiología, los modelos compartimentales como SIR han permitido estudiar la propagación de enfermedades infecciosas y evaluar estrategias de control [8].

En el ámbito físico, el estudio de sistemas dinámicos ha sido crucial para comprender fenómenos como el caos y la turbulencia. El sistema de Lorenz, por ejemplo, mostró cómo pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden generar

1. INTRODUCCIÓN

trayectorias impredecibles, introduciendo el concepto de sensibilidad a las condiciones iniciales. Este tipo de comportamiento caótico se ha observado en diversos contextos, como la meteorología y la dinámica planetaria.

Además, en la neurociencia, los sistemas dinámicos han proporcionado marcos teóricos para modelar la actividad neuronal y la sincronización de redes de neuronas [9]. Estos modelos han sido fundamentales para comprender patrones de oscilación en el cerebro y su relación con funciones cognitivas y enfermedades neurológicas.

Los sistemas dinámicos han demostrado ser esenciales para el análisis y la predicción de una amplia gama de fenómenos naturales. Su capacidad para capturar la complejidad de interacciones no lineales y su aplicabilidad en diversas disciplinas los convierte en una herramienta indispensable para la investigación científica.

En este trabajo se tendrá como base el sistema de Rössler. Este sistema es un conjunto de ecuaciones diferenciales que ejemplifica el comportamiento caótico en sistemas dinámicos continuos. Desde su introducción ha sido objeto de numerosos estudios debido a su simplicidad y la riqueza de fenómenos que exhibe. Su importancia radica en que permite estudiar el caos de manera más accesible en comparación con otros sistemas más complejos.

El sistema fue propuesto en 1976 por el bioquímico y matemático alemán Otto E. Rössler [10], quien buscaba una formulación matemática que capturara la esencia del caos con una estructura más simple que el sistema de Lorenz. Rössler estaba interesado en los sistemas dinámicos no lineales y en cómo estos podían dar lugar a comportamientos impredecibles. Inspirado en los trabajos previos de Edward Lorenz sobre la meteorología y el caos determinista, Rössler desarrolló un sistema de ecuaciones diferenciales de tres dimensiones con el objetivo de demostrar que el caos podía emerger incluso en sistemas con dinámicas más sencillas. El sistema de Rössler está definido por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c). \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ representan las derivadas de las variables respecto al tiempo y a, b, c

son parámetros que determinan el comportamiento del sistema. A diferencia del sistema de Lorenz, que incluye términos cuadráticos y bilineales en todas sus ecuaciones, el sistema de Rössler contiene solo una no linealidad cuadrática en la tercera ecuación, lo que facilita su análisis matemático.

Dependiendo de los valores de los parámetros a , b y c , el sistema de Rössler puede exhibir diferentes tipos de comportamiento. En primer lugar, cuando los parámetros se eligen dentro de ciertos rangos, el sistema puede presentar un *ciclo límite*, es decir, una órbita periódica estable. Por ejemplo, con $a = 0.1$, $b = 0.1$ y $c = 2.0$, se observa un ciclo límite de período 1. En segundo lugar, para otros valores de los parámetros, el sistema puede mostrar un comportamiento *caótico*, caracterizado por trayectorias que nunca se repiten y una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. Un conjunto de parámetros que da lugar a este tipo de comportamiento es $a = 0.2$, $b = 0.2$ y $c = 5.7$, donde el sistema genera un atractor extraño.

El sistema de Rössler es relevante en el estudio del caos por varias razones. En primer lugar, su estructura matemática simple permite realizar análisis teóricos y simulaciones computacionales de manera más accesible que otros modelos más complejos. En segundo lugar, el atractor de Rössler ha servido como un caso de estudio para explorar las propiedades del caos, la teoría de bifurcaciones y los exponentes de Lyapunov.

Otro aspecto importante del sistema de Rössler es su aplicabilidad interdisciplinaria. Ha sido utilizado para modelar fenómenos en diferentes áreas del conocimiento, incluyendo la química, la biología, la electrónica y la neurociencia. Su comportamiento caótico lo convierte en un excelente ejemplo de cómo los sistemas dinámicos pueden producir estructuras aparentemente aleatorias pero gobernadas por ecuaciones deterministas.

El sistema de Rössler ha sido utilizado en diversas disciplinas científicas debido a su capacidad para modelar fenómenos caóticos en sistemas dinámicos. En el ámbito de la electrónica, se han diseñado circuitos que replican el comportamiento del atractor de Rössler, permitiendo estudiar experimentalmente las propiedades del caos en sistemas eléctricos. En química, este sistema ha sido empleado para modelar reacciones oscilatorias y sistemas fuera del equilibrio que presentan comportamientos caóticos. En biología y neurociencia, el sistema de Rössler se ha utilizado para describir patrones de actividad neuronal que muestran características caóticas, contribuyendo a la comprensión de fenómenos como

1. INTRODUCCIÓN

las crisis epilépticas y la dinámica de redes neuronales. Además, en meteorología y dinámica de fluidos, se ha aplicado en el estudio de sistemas turbulentos y modelos simplificados de dinámica atmosférica. Gracias a su relativa simplicidad y riqueza en comportamientos dinámicos, el sistema de Rössler sigue siendo una herramienta fundamental en la investigación de los sistemas dinámicos no lineales y el estudio del caos.

Aún con todo esto el sistema de Rössler puede volverse más complejo, como el sistema de Rössler por partes estudiado por Pisarchik [11, 12] representa una modificación del sistema Rössler al reemplazar el elemento no lineal por una función lineal por partes. Las ecuaciones que describen el sistema se pueden escribir de la siguiente forma.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x - \beta y - z, \\ \dot{y} = x + \gamma z, \\ \dot{z} = g(x) - z, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $g(x)$ es una función lineal por partes.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3, \\ \mu(x - 3) & x > 3. \end{cases} \quad (1.3)$$

También se encuentra otro tipo de sistema de Rössler como el propuesto por Antonio Algaba y Emilio Freire [13], cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - cz + xz. \end{cases} \quad (1.4)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son parámetros que determinan la dinámica del sistema. Se ha demostrado que el punto de equilibrio en el origen exhibe una degeneración triple-cero cuando $a = c = \sqrt{2}$ y $b = 1$. En la dinámica de este sistema de Rössler se ha observado la presencia de resonancias en las órbitas periódicas emergentes de la

bifurcación Hopf-cero. En particular, aparecen resonancias del tipo $1 : n$, donde n varía desde 3 hasta valores superiores. Estas resonancias se manifiestan cuando los multiplicadores de Floquet de una órbita periódica cruzan una raíz k -ésima de la unidad, dando lugar a la aparición de nuevas órbitas periódicas simétricas, una hiperbólica y otra elíptica, con períodos aproximadamente iguales a $2k\pi$. Se ha identificado el fenómeno de *fusión de resonancias*, en el cual órbitas periódicas con diferentes períodos colapsan en bifurcaciones tipo saddle-node. Este fenómeno se ha analizado en detalle mediante diagramas de bifurcación, donde se observa cómo las resonancias 1:3, 1:4 y 1:5 convergen en una rama única. Además, la evolución del sistema muestra la existencia de una cascada de Feigenbaum, en la que se producen secuencias de duplicación de período conectadas por curvas invariantes de tori, lo que indica una transición progresiva hacia el caos.

Por su lado, A. C. Fowler y M. J. McGuinness nos muestran una variante más compleja del sistema original [14]. Al reescalar las variables con c , el sistema de Rössler puede escribirse en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \varepsilon \dot{z} = \varepsilon^2 b + (x - 1)z, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $\varepsilon = 1/c$. Esta reformulación permite analizar el comportamiento asintótico del sistema cuando c toma valores grandes.

El sistema de Rössler exhibe un atractor extraño que, para ciertos valores de los parámetros, adopta una estructura en forma de lámina (*sheet-like*). Este atractor se caracteriza por un conjunto de trayectorias espiraladas que se expanden en el plano (x, y) antes de plegarse sobre sí mismas. Se ha identificado la existencia de órbitas homoclínicas en la proximidad del punto de equilibrio, lo que sugiere la presencia de dinámicas caóticas. Además, el análisis de las trayectorias muestra que el atractor posee una dimensión efectiva reducida, similar a estructuras observadas en otros sistemas caóticos como el de Lorenz. El sistema presenta soluciones que alternan entre fases de crecimiento lento y explosiones rápidas, un fenómeno conocido como *bursting*. En la fase lenta, las trayectorias permanecen cercanas a una espiral estable en el plano $z = 0$, mientras que en la fase de pulso, la variable z experimenta incrementos abruptos antes de retornar gradualmente a la dinámica inicial. Se ha identificado que en el régimen de múltiples pulsos,

1. INTRODUCCIÓN

las soluciones pueden generar secuencias de disparos (*bursts*), donde cada pulso sucesivo decrece en amplitud antes de que el sistema regrese a la fase lenta. Estos patrones de bursting son similares a los encontrados en modelos de actividad neuronal, lo que sugiere una posible aplicación del sistema de Rössler en la modelización de señales biológicas.

Para este trabajo de investigación se propone un sistema Rössler generalizado al modificar la ecuación $\dot{z}$ dividido en dos casos: cuando $\dot{z} = b + s_2(x - c)(z - s_1)$ y $\dot{z} = b + s_2(x - c)(z - s_1y)$. Con el objetivo de analizar y determinar el impacto que tiene la adición de dos parámetros nuevos, así como la incorporación de una función junto al parámetro s_1 . Este tipo de generalizaciones no se han realizado antes, por lo que tampoco se ha investigado y analizado la parte dinámica de este tipo de sistemas que influyen una función que retroalimenta una de las ecuaciones, obteniendo fenómenos tan interesantes como la multiestabilidad en sistemas dinámicos no lineales. Así, este trabajo contribuye en la generación de conocimiento e invita a la investigación sobre otras funciones que se puedan incorporar y ahondar más en sus dinámicas para comprender mejor la naturaleza y los fenómenos con los que convivimos cada día.

Y así, en el segundo capítulo de este trabajo, se habla sobre los conceptos básicos de sistemas dinámicos, el análisis de estabilidad local así como la clasificación y el impacto que tienen las diferentes formas en las que se presentan las funciones propias y valores propios. Para el tercer capítulo se estará hablando sobre el sistema de Rössler de manera más detallada, agregando sus propiedades dinámicas, la revisión de su atractor, estabilidad y bifurcaciones con su análisis de comportamiento caótico. En el cuarto capítulo se abordará la generalización del sistema de Rössler, analizando por partes cómo se comporta dependiendo los parámetros indicados, su estabilidad y puntos de equilibrio junto a sus respectivos exponentes de Lyapunov, diagramas de bifurcación y sección de Poincaré, para introducir ahí mismo un término no lineal adicional (generalización del parámetro) con sus respectivos análisis. Se realizará la modelación del sistema en el quinto capítulo mediante un circuito electrónico adecuado para su implementación en una computadora analógica (computadora THAT) para continuar con la comparación del sistema y su visualización con dicha computadora y un osciloscopio. Para tener toda la información necesaria y poder discutir el análisis comparativo del sistema de Rössler, el sistema generalizado, su impacto del parámetro y su generalización al otro término no lineal en el sexto capítulo. Finalizando el séptimo capítulo de este trabajo dando las conclusiones necesarias con los resultados más importantes de esta investigación y dando pie a futuras investigaciones con este tema.

Capítulo 2

Introducción a los Sistemas Dinámicos

En matemáticas, los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones y dinámicos porque sus parámetros varían con respecto alguna variable que generalmente es el tiempo. Los sistemas dinámicos permiten analizar y describir el cambio o evolución que experimenta una variable a lo largo del tiempo. La evolución en el tiempo de un sistema dinámico se simula calculando los valores de los estados del sistema dinámico en cada paso de la simulación mediante el uso de algoritmos de resolución numéricos basados en tiempo o en eventos. Se utiliza software de simulación para simular el comportamiento de sistemas representados por modelos matemáticos.

2.1. Conceptos Básicos

Los sistemas dinámicos constituyen una herramienta fundamental para modelar fenómenos en diversas disciplinas. En particular, el análisis de su comportamiento permite comprender la evolución temporal de los sistemas bajo diferentes condiciones iniciales y parámetros. En este trabajo se abordan conceptos clave como los sistemas autónomos y no autónomos, el espacio de fase, la estabilidad y los atractores, así como los principales tipos de comportamiento dinámico.

Un sistema dinámico está definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de

2. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Si la función $\mathbf{f}$ no depende explícitamente del tiempo t , el sistema se dice autónomo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

En cambio, si $\mathbf{f}$ depende explícitamente del tiempo, el sistema es no autónomo. Los sistemas autónomos son más fáciles de analizar porque las soluciones dependen solo del estado actual y no de una dependencia temporal explícita.

El espacio de fase es el conjunto de todas las posibles configuraciones de un sistema dinámico. Cada punto en este espacio representa un estado del sistema. La evolución de un sistema puede visualizarse mediante su trayectoria en el espacio de fase. Estas trayectorias pueden ser:

- **Órbitas cerradas:** Indican comportamiento periódico.
- **Puntos fijos:** Estados estacionarios del sistema.
- **Órbitas caóticas:** Sensibilidad extrema a condiciones iniciales.

Las variables de estado de un sistema dinámico se puede visualizar en forma de serie de tiempo, esto es, graficar la variable de estado contra el tiempo, o en forma de espacio fase [15]. El concepto de espacio de fases se desarrolló en el siglo XIX gracias a las contribuciones de Ludwig Boltzmann, Henri Poincaré, James Maxwell y Josiah Gibbs a la mecánica estadística y la mecánica hamiltoniana. En dinámica no lineal, el espacio de fases es un espacio cuyas coordenadas corresponden a las variables del sistema. La trayectoria del sistema en el espacio de fases representa todos los estados posibles durante una evolución en el tiempo infinito. La dimensión del espacio de fase es igual al número de variables del sistema. Cuando el espacio de fases tiene una dimensión muy grande, la trayectoria de un sistema suele visualizarse mediante proyecciones sobre el subespacio correspondiente a dos o tres variables. Estas proyecciones se denominan retratos

de fase. El espacio fase de un sistema dinámico $\dot{X} = F(x)$ es el espacio donde todos los posibles estados de un sistema son representados, cada parámetro del sistema se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada punto del espacio representa cada posible estado de las variables de sistema.

El espacio fase está descrito por un campo vectorial F que rige el recorrido de las variables del sistema $x(t)$ en el tiempo, el recorrido de estas variables recibe el nombre de trayectoria. Se dice que una singularidad del espacio fase es estable, sumidero o atractor si toda trayectoria que comienza cerca de ella se aproxima a ella conforme el tiempo transcurre, todas las trayectorias se acercan al punto fijo. La importancia de la estabilidad de las singularidades radica en que ésta determina la estabilidad del sistema en el que se presenten las singularidades. En sistemas lineales las singularidades sólo pueden ser puntos, los cuales se conocen como puntos fijos; en cambio los sistemas no lineales pueden presentar puntos fijos, ciclos límite y regiones llamadas atractores extraños.

La estabilidad de un sistema dinámico describe cómo evoluciona en respuesta a pequeñas perturbaciones. Si una trayectoria se mantiene cercana a un estado estacionario bajo perturbaciones, este es un punto fijo estable. Un atractor es un subconjunto del espacio de fase hacia el cual evolucionan las trayectorias. Tipos de atractores incluyen:

- **Puntos fijos:** Estados estables donde las trayectorias convergen.
- **Ciclos límite:** Trayectorias cerradas que atraen soluciones.

Los sistemas dinámicos pueden presentar distintos tipos de evolución:

- **Movimiento periódico:** El sistema regresa a su estado inicial tras un tiempo determinado.
- **Caos:** Sensibilidad a condiciones iniciales con trayectorias impredecibles a largo plazo.
- **Movimientos cuasi-periódicos:** Combinación de frecuencias incommensurables.
- **Atractores extraños:** Estructuras complejas que describen dinámicas caóticas.

2. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

El estudio de sistemas dinámicos permite comprender fenómenos en diversas disciplinas. La clasificación en autónomos y no autónomos, el análisis del espacio de fase y la estabilidad, así como la identificación de distintos comportamientos dinámicos, son fundamentales en la modelización matemática de procesos naturales y artificiales.

2.2. Sistemas no Lineales y Caos Determinista

Los sistemas no lineales y el caos determinista son temas fundamentales en la teoría de sistemas dinámicos. Mientras que los sistemas lineales pueden analizarse mediante métodos algebraicos convencionales, los sistemas no lineales presentan comportamientos más complejos, incluyendo fenómenos como la bifurcación, la sensibilidad a condiciones iniciales y la presencia de atractores extraños. El caos determinista, una de las características más notables de los sistemas no lineales, se refiere a un comportamiento aparentemente aleatorio en sistemas de ecuaciones deterministas. Este concepto desafió las nociones clásicas de predictibilidad en la física y las matemáticas.

Un sistema es no lineal si la función f no es lineal con respecto a las variables de estado. Esto implica que no se pueden usar técnicas de superposición para resolver las ecuaciones del sistema, lo que a menudo resulta en comportamientos complejos como oscilaciones no periódicas, bifurcaciones y caos [16].

Las principales características de los sistemas no lineales incluyen la dependencia sensible a condiciones iniciales, es decir, un pequeño cambio en el estado inicial puede dar lugar a trayectorias completamente diferentes en el futuro. También, atractores extraños pues, en algunos casos, los sistemas no lineales no convergen a un punto fijo ni a un ciclo límite, sino a estructuras fractales en el espacio de fase. Algo que se debe considerar son las bifurcaciones, es decir, cambios cualitativos en la dinámica del sistema cuando un parámetro varía. Así como, oscilaciones no periódicas y caos, soluciones que no son ni periódicas ni estacionarias, sino que evolucionan de manera impredecible a pesar de la determinación de sus ecuaciones subyacentes.

El caos determinista es una propiedad de ciertos sistemas dinámicos en los que una evolución aparentemente aleatoria surge de reglas completamente deterministas.

Este concepto fue popularizado por Edward Lorenz en 1963 al estudiar modelos climáticos simplificados. Una de las características más relevantes de los sistemas caóticos es la sensibilidad a las condiciones iniciales, un fenómeno conocido como el “efecto mariposa”, que describe cómo pequeñas diferencias en el estado inicial pueden generar trayectorias completamente distintas. Matemáticamente, esta propiedad se expresa mediante un exponente de Lyapunov positivo:

$$\delta x(t) \approx \delta x(0)e^{\lambda t},$$

donde λ es el exponente de Lyapunov. Si $\lambda > 0$, el sistema es caótico, ya que la separación entre trayectorias cercanas crece exponencialmente con el tiempo, haciendo que la predicción a largo plazo sea prácticamente imposible.

Otro aspecto fundamental del caos determinista es la presencia de atractores extraños. En los sistemas caóticos, las soluciones no convergen a puntos fijos ni a ciclos límite, sino que se agrupan en estructuras fractales conocidas como atractores extraños. Estos atractores tienen dimensión no entera y describen la dinámica de sistemas como el modelo de Lorenz, cuyas ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x),$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y,$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z.$$

Este sistema exhibe caos para ciertos valores de los parámetros ($\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$), produciendo un atractor extraño en el espacio tridimensional que refleja la evolución impredecible pero determinista del sistema.

A pesar de su apariencia aleatoria, el caos determinista no implica falta de estructura. Aunque el sistema es impredecible a largo plazo debido a su sensibilidad a las condiciones iniciales, su evolución sigue trayectorias bien definidas dentro del

2. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

atractor extraño. Esto significa que el comportamiento caótico no es sinónimo de ruido o aleatoriedad pura, sino que obedece reglas deterministas subyacentes.

Además, muchos sistemas caóticos exhiben propiedades fractales en sus atractores, lo que implica que presentan autosemejanza a diferentes escalas. Este comportamiento se puede analizar mediante herramientas matemáticas como la dimensión fractal de Hausdorff o la dimensión de correlación, que permiten cuantificar la complejidad geométrica de los atractores.

Un ejemplo clásico de sistema caótico es el péndulo doble, un sistema mecánico simple que consiste en dos péndulos acoplados en serie. Aunque las ecuaciones que rigen su movimiento son completamente deterministas, su dinámica es altamente no lineal y muy sensible a perturbaciones, lo que lo convierte en un caso paradigmático de caos en mecánica. Incluso con pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, el péndulo doble puede exhibir trayectorias drásticamente diferentes, imposibilitando la predicción precisa de su evolución a largo plazo.

Otro sistema ampliamente estudiado en el contexto del caos determinista es el mapa logístico, un modelo discreto que describe la dinámica de poblaciones mediante la ecuación:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Dependiendo del valor del parámetro r , el sistema puede exhibir diferentes comportamientos. Para valores pequeños de r , la población converge a un estado estable. A medida que r aumenta, el sistema experimenta bifurcaciones que conducen a oscilaciones periódicas. Finalmente, para valores de $r > 3.57$, el sistema se vuelve caótico y sensible a las condiciones iniciales, mostrando la transición desde la estabilidad hasta el caos a través de una serie de bifurcaciones sucesivas.

Además de los sistemas mecánicos y biológicos, el caos también se observa en circuitos electrónicos no lineales, como el circuito de Chua. Este sistema es un ejemplo experimental de caos determinista, en el que la inclusión de un componente no lineal da lugar a oscilaciones caóticas. Sus ecuaciones diferenciales muestran bifurcaciones y atractores extraños, permitiendo el estudio del caos en un entorno físico controlado. Este tipo de circuitos ha sido fundamental para la validación experimental de las predicciones teóricas sobre el caos y sus aplicaciones en telecomunicaciones y procesamiento de señales.

Así, podemos decir que el caos determinista es un fenómeno que emerge en muchos sistemas dinámicos no lineales y que se caracteriza por la sensibilidad que demuestra a sus condiciones iniciales, la presencia de atractores extraños y una estructura fractal en el espacio de fase. Ejemplos como el péndulo doble, el mapa logístico y los circuitos electrónicos de Chua ilustran la universalidad del caos en distintos campos de la ciencia, desde la mecánica y la biología hasta la ingeniería y las telecomunicaciones. Aunque el caos puede parecer impredecible, su estudio ha permitido desarrollar herramientas matemáticas y computacionales para describirlo y comprender su impacto en diversos fenómenos de la naturaleza.

2.3. Análisis de Estabilidad y Comportamiento de los Sistemas

El estudio de los sistemas dinámicos se basa en comprender cómo evolucionan en el tiempo bajo diferentes condiciones iniciales y perturbaciones. Un aspecto central de este análisis es la estabilidad de los puntos de equilibrio y su comportamiento en el espacio de fases. La estabilidad de un sistema determina si pequeñas perturbaciones en su estado inicial se desvanecerán con el tiempo o si, por el contrario, amplificarán, llevando el sistema a una evolución caótica o divergente.

Para evaluar la estabilidad de un sistema, se emplean diversas herramientas matemáticas, como el análisis de la matriz jacobiana, la teoría de Lyapunov y el estudio del espacio fase. Estas técnicas permiten clasificar los puntos de equilibrio en estables, inestables o neutrales y entender la naturaleza de las soluciones en sus cercanías.

2.3.1. Estabilidad de Equilibrio

La estabilidad de un punto de equilibrio se define en términos de la evolución de las soluciones en su vecindad:

- **Estabilidad en el sentido de Lyapunov:** El punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ es estable si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$,

2. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

entonces $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

- **Asintótica estable:** Además de ser estable en el sentido de Lyapunov, si existe $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$ implica que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces el equilibrio es asintóticamente estable.
- **Inestabilidad:** Si el equilibrio no es estable en el sentido de Lyapunov, entonces es inestable.

Un punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ es una solución estacionaria del sistema. Su estabilidad depende de la evolución de pequeñas perturbaciones alrededor de este punto. Para analizar su comportamiento, se introducen pequeñas desviaciones ξ tal que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \xi. \quad (2.3)$$

Sustituyendo en la ecuación original y expandiendo en serie de Taylor alrededor de $\mathbf{x}^*$:

$$\dot{\xi} = J(\mathbf{x}^*)\xi + O(\|\xi\|^2), \quad (2.4)$$

donde $J(\mathbf{x}^*)$ es la matriz jacobiana evaluada en $\mathbf{x}^*$, definida como:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

El comportamiento de ξ está determinado por los valores propios de $J(\mathbf{x}^*)$.

2.3.2. Análisis de Estabilidad Local

El análisis de estabilidad en sistemas dinámicos permite determinar cómo responde un sistema ante pequeñas perturbaciones en su estado inicial. En particular,

se estudia si un sistema regresa a su estado de equilibrio o si diverge hacia otra región del espacio fase.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, un punto $\mathbf{x}^*$ es un punto de equilibrio si $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$. El objetivo del análisis de estabilidad es determinar si las trayectorias cercanas a $\mathbf{x}^*$ permanecen próximas a medida que el tiempo avanza.

Existen diferentes métodos para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio. Algunos de los más utilizados son los siguientes.

En el método de Lyapunov [17] se busca una función $V(\mathbf{x})$ con las siguientes propiedades:

1. $V(\mathbf{x})$ es positiva definida, es decir, $V(\mathbf{x}) > 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ y $V(\mathbf{x}^*) = 0$.
2. Su derivada temporal $\dot{V}(\mathbf{x})$ es negativa definida en un entorno de $\mathbf{x}^*$, es decir, $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$.

Si tales condiciones se cumplen, el equilibrio es asintóticamente estable. Este método es útil cuando el análisis de valores propios no es concluyente.

La estabilidad local se estudia linealizando el sistema alrededor del punto de equilibrio. La ecuación resultante es:

$$\dot{\xi} = J(\mathbf{x}^*)\xi. \quad (2.7)$$

La solución de este sistema es de la forma:

$$\xi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n, \quad (2.8)$$

donde λ_i son los valores propios de $J(\mathbf{x}^*)$ y $\mathbf{v}_i$ sus vectores propios asociados, que se estudiará a continuación.

2. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

Los puntos x^* para los cuales $F(x^*) = 0$ son llamados puntos fijos o puntos de equilibrio. En estos puntos, el campo vectorial que determina la dirección de las trayectorias en el espacio fase es nulo. Los valores propios λ del sistema están estrechamente relacionados con los puntos fijos, ya que determinan la forma en que las trayectorias interactúan con el punto fijo. Consideremos sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = ax + by + cz, \quad (2.9)$$

$$\dot{y} = dx + ey + fz, \quad (2.10)$$

$$\dot{z} = gx + hy + iz. \quad (2.11)$$

Se necesita obtener la matriz jacobiana de este sistema de ecuaciones que ayudará en el análisis de su estabilidad:

$$J_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Para estudiar la estabilidad de un punto fijo, calculamos los valores propios λ de la matriz A resolviendo la ecuación característica:

$$\det(J_A - \lambda I) = 0. \quad (2.12)$$

Dado que la matriz es 3×3 , el determinante nos da un polinomio cúbico en λ :

$$\lambda^3 - \text{Tr}(J_A)\lambda^2 + Q\lambda - \det(J_A) = 0, \quad (2.13)$$

donde $\text{Tr}(J_A)$ es la traza de la matriz J_A y Q es una cantidad que depende de los elementos de la matriz:

$$Q = ae + ai + ei - bf - ch - dg. \quad (2.14)$$

Dependiendo de la naturaleza de las raíces de este polinomio, podemos clasificar los puntos fijos en un sistema tridimensional. En la Figura 2.1, se ilustra gráficamente la disposición de los valores propios en el plano complejo λ para los distintos tipos de comportamiento dinámico en sistemas tridimensionales [18]. Las combinaciones posibles incluyen nodos, espirales atractoras o repulsoras, puntos silla y sillas espirales, cada uno asociado con un patrón específico de valores propios reales o complejos.

Los nodos atractores y repulsores indican que el sistema tiene un comportamiento monótono de atracción o repulsión en todas las direcciones. En cambio, las espirales atractivas o repulsivas representan movimientos oscilatorios combinados con expansión o contracción. Las sillas y sillas espirales presentan una mezcla de estabilidad e inestabilidad en diferentes direcciones del espacio fase.

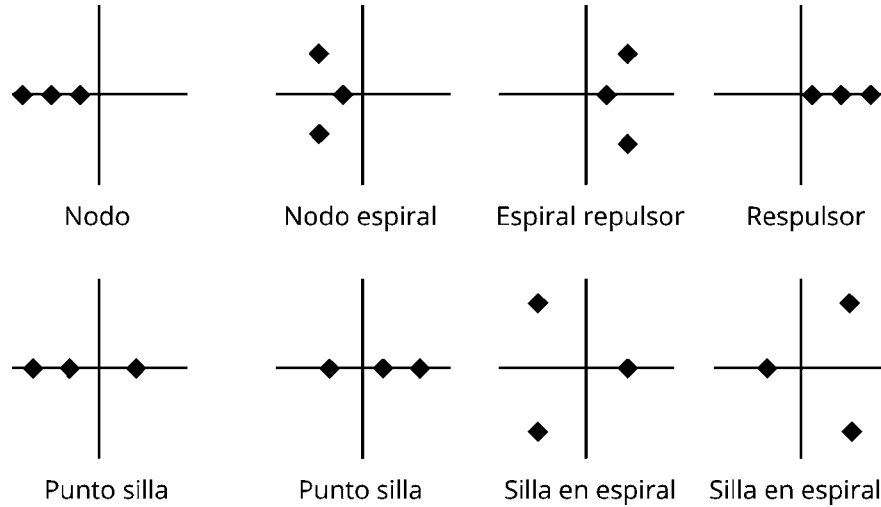


Figura 2.1: Valores propios en el plano complejo λ para flujos hiperbólicos tridimensionales. Cada configuración corresponde a un tipo distinto de punto fijo, dependiendo de la cantidad y naturaleza (real o compleja) de los valores propios.

Para determinar la estabilidad del punto fijo, examinamos la parte real de los valores propios:

- Si todos los valores propios tienen parte real negativa, el punto fijo es asintóticamente estable.

2. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

- Si al menos un valor propio tiene parte real positiva, el punto fijo es inestable.
- Si todos los valores propios son imaginarios puros, el punto fijo es un centro, lo que significa que las trayectorias oscilan sin decaer ni crecer.

En sistemas no lineales, los puntos fijos pueden cambiar de estabilidad mediante una bifurcación. Un caso interesante ocurre cuando un valor propio tiene parte real exactamente cero, lo que indica la presencia de una transición crítica en la dinámica del sistema.

Capítulo 3

El Sistema de Rössler

El sistema de Rössler, propuesto en 1976 por Otto Rössler [19], constituye uno de los ejemplos paradigmáticos en el estudio de sistemas dinámicos no lineales y del caos determinista [20]. Su estructura simple y la riqueza de comportamientos que presenta lo convierten en un modelo ideal tanto para la investigación teórica como para la ilustración de conceptos fundamentales en dinámica no lineal. A diferencia del sistema de Lorenz, cuya formulación está inspirada en modelos físicos concretos, el sistema de Rössler fue concebido directamente como un ejemplo matemático minimalista capaz de exhibir caos, lo que le ha permitido mantenerse como una herramienta central en la docencia y en la investigación.

3.1. Descripción y Ecuaciones del Sistema de Rössler

El sistema de Rössler está constituido por un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con dependencia temporal. Estas ecuaciones definen un flujo continuo en el espacio tridimensional y están dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \end{cases} \quad (3.1)$$

3. EL SISTEMA DE RÖSSLER

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ representan las variables dinámicas del sistema y a , b , y c son parámetros reales que controlan el comportamiento del sistema. Valores típicos utilizados para observar caos son $a = 0.2$, $b = 0.2$ y $c = 5.7$, aunque pequeñas variaciones en estos parámetros pueden generar transiciones notables en la dinámica.

El sistema posee una simetría importante: es invariante bajo el cambio de signo en la variable x , lo que implica que si $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución, entonces $(-x(t), -y(t), z(t))$ también lo es. Esta propiedad tiene implicaciones en la forma del atractor y en la estructura de sus órbitas. Además, el sistema no presenta términos cuadráticos o cúbicos, lo que lo distingue de otros modelos caóticos clásicos como el de Lorenz o Chen.

3.2. Propiedades Dinámicas del Sistema de Rössler

Las soluciones del sistema de Rössler presentan una gran diversidad de comportamientos dependiendo del conjunto de valores iniciales y de los parámetros elegidos. El sistema puede presentar dinámicas periódicas, cuasi-periódicas y caóticas. Esta riqueza lo hace especialmente útil para el estudio de bifurcaciones y de rutas al caos.

3.2.1. Atractor de Rössler

El sistema de Rössler es célebre por su atractor caótico, una estructura fractal en el espacio de fases tridimensional que revela una órbita no periódica contenida en una región acotada del espacio. A diferencia del atractor de Lorenz, que presenta una simetría de mariposa, el atractor de Rössler tiene una forma espiralada plana que se eleva lentamente en la dirección z , generando una apariencia similar a una cinta enredada [21].

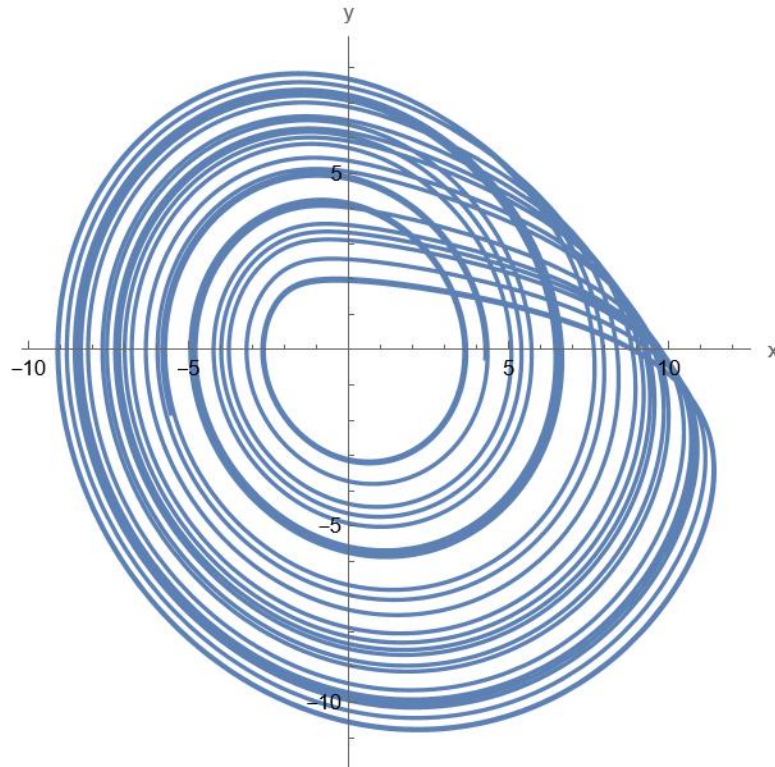


Figura 3.1: Visualización del atractor de Rössler en el plano xy . Los parámetros utilizados son $a = b = 0.2$ y $c = 5.7$, con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = -6.78$ y $z(0) = 0.02$.

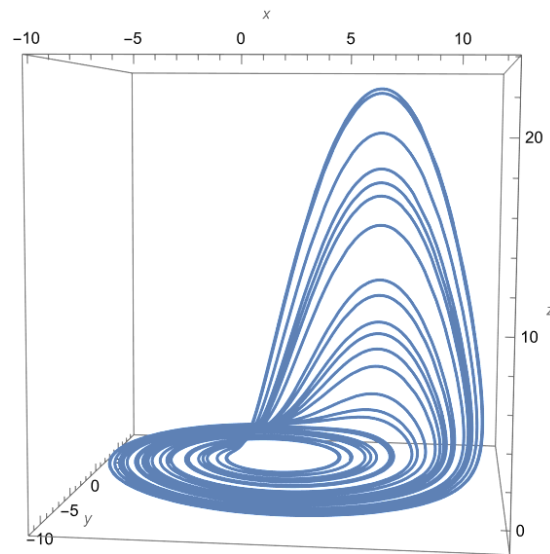


Figura 3.2: Visualización en tres dimensiones del atractor de Rössler con las mismas condiciones iniciales y parámetros que propuso en su trabajo original.

3. EL SISTEMA DE RÖSSLER

El atractor de Rössler es un ejemplo de atractor extraño, caracterizado por su sensibilidad a las condiciones iniciales y por la presencia de una estructura auto-similar a múltiples escalas. Esta geometría fractal implica que, aunque el sistema evoluciona de manera determinista, cualquier pequeña perturbación en la condición inicial puede llevar a trayectorias divergentes, imposibilitando la predicción a largo plazo.

3.2.2. Estabilidad y Bifurcaciones en el Sistema de Rössler

Desde el punto de vista de la estabilidad, el primer paso en el análisis del sistema de Rössler consiste en identificar sus puntos de equilibrio. Estos se obtienen al anular las derivadas del sistema, es decir, resolviendo el sistema algebraico resultante de igualar a cero las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z = 0 \\ \dot{y} = x + ay = 0 \\ \dot{z} = b + z(x - c) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

De la segunda ecuación se despeja $x = -ay$. Sustituyendo esto en la primera se obtiene $-y - z = 0$, lo que implica que $z = -y$. Finalmente, sustituyendo $x = -ay$ y $z = -y$ en la tercera ecuación se tiene:

$$b + (-y)(-ay - c) = 0 \quad \Rightarrow \quad b + y(ay + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad ay^2 + cy + b = 0 \quad (3.3)$$

Esta es una ecuación cuadrática en y , cuyas soluciones están dadas por:

$$y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \quad (3.4)$$

Sustituyendo estos valores en las relaciones $x = -ay$ y $z = -y$, se hallan las coordenadas de x y z , obteniendo así los dos puntos de equilibrio del sistema:

$$P_1 = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right) \quad (3.5)$$

$$P_2 = \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right) \quad (3.6)$$

Para que estos puntos sean reales, es necesario que el discriminante $c^2 - 4ab$ sea mayor o igual que cero. En la mayoría de los estudios del sistema de Rössler, incluyendo aquellos donde se desea analizar caos, se eligen valores de a , b y c que cumplen esta condición.

Con los puntos de equilibrio identificados, el siguiente paso es analizar su estabilidad local mediante el análisis lineal. Esto se logra linealizando el sistema alrededor del punto de equilibrio y evaluando el Jacobiano:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Al evaluar esta matriz en un punto de equilibrio específico (x_0, y_0, z_0) , se obtiene una matriz constante cuyas propiedades espectrales determinan el comportamiento del sistema en un entorno infinitesimal alrededor del equilibrio. Los valores propios λ de esta matriz se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (3.8)$$

Al expandir esta expresión para el Jacobiano evaluado en el punto de equilibrio, se obtiene una ecuación cúbica en λ :

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + (c - x_0)\lambda + [a(x_0 - c) + z_0] = 0 \quad (3.9)$$

La naturaleza de las raíces de esta ecuación, ya sean reales o complejas, con parte real positiva o negativa, determina el tipo de estabilidad. Como se ha visto en la sección 2.3.3, si los tres autovalores tienen parte real negativa, el punto de

3. EL SISTEMA DE RÖSSLER

equilibrio es un foco espiral o nodo estable; si alguno tiene parte real positiva, el punto es inestable. En caso de que exista un par de autovalores complejos conjugados con parte real positiva y un valor real negativo, se tiene una espiral inestable, lo que suele asociarse a trayectorias que escapan del equilibrio y son eventualmente atrapadas por un atractor. Por último, si un par de autovalores complejos cruza el eje imaginario al variar un parámetro, puede originarse una bifurcación de Hopf, dando lugar a una órbita periódica alrededor del equilibrio.

Sustituyendo los valores $a = 0.2$, $b = 0.2$ y $c = 5.7$, se obtiene que $c^2 - 4ab = 32.49 - 0.16 = 32.33$, cuyo valor positivo garantiza la existencia de dos puntos de equilibrio reales distintos.

Los puntos de equilibrio aproximados son:

$$P_1 \approx (0.017, -28.56, 28.56), \quad P_2 \approx (5.683, -0.09, 0.09).$$

Evaluyendo el jacobiano en el punto $P_1 \approx (0.017, -28.56, 28.56)$, los valores propios son:

$$\lambda_1 \approx -0.113, \quad \lambda_{2,3} \approx 0.096 \pm 0.995i.$$

Dado que uno de los valores propios es negativo y el par complejo tiene parte real positiva, este punto es un punto silla en espiral de índice 2, por lo tanto, inestable.

Para el punto $P_2 \approx (5.683, -0.09, 0.09)$, los valores propios calculados son:

$$\lambda_1 \approx -5.64, \quad \lambda_{2,3} \approx 0.035 \pm 0.98i.$$

Nuevamente, se tiene un valor propio negativo y un par con parte real positiva, lo que indica que también se trata de un punto silla en espiral de índice 2 e inestable.

En particular, para los valores típicos el punto de equilibrio correspondiente resulta ser inestable, con un par complejo conjugado de valores propios con parte real positiva. Esto indica que las trayectorias divergen inicialmente del equilibrio, pero son atrapadas por un atractor. Conforme se varía el parámetro c , este par de

autovalores puede cruzar el eje imaginario, originando un cambio cualitativo en la dinámica del sistema, conocido como bifurcación de Hopf. Esta bifurcación marca el surgimiento de un ciclo límite, es decir, una órbita cerrada estable alrededor del punto de equilibrio.

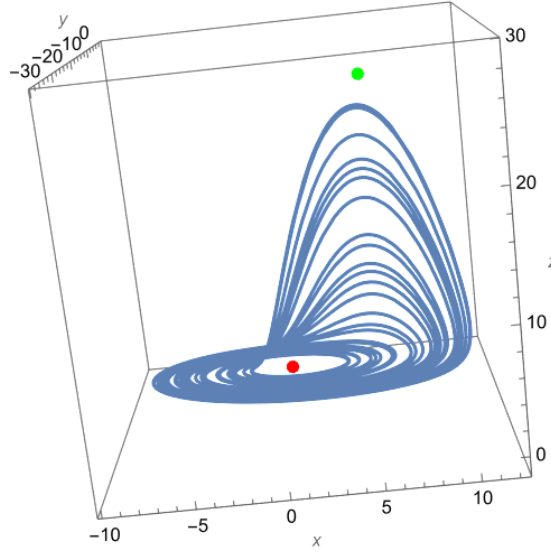


Figura 3.3: Visualización de los puntos de equilibrio en tres dimensiones. El punto P_1 en rojo y el punto P_2 en verde.

Posteriormente, cuando se sigue incrementando el parámetro, este ciclo puede experimentar duplicaciones de periodo y otras bifurcaciones, dando lugar finalmente a un comportamiento caótico. La aparición de estas transiciones puede observarse de manera muy clara en los diagramas de bifurcación, los cuales se describen a continuación.

El estudio de estas bifurcaciones puede realizarse mediante herramientas numéricas y teóricas, como diagramas de bifurcación [22] y cálculo de exponentes de Lyapunov. Estos análisis revelan que la ruta al caos del sistema de Rössler sigue, en muchos casos, la conocida secuencia de Feigenbaum, aunque también se observan ventanas periódicas y transiciones abruptas entre regímenes.

El análisis de bifurcaciones en el sistema de Rössler permite explorar cómo varía el comportamiento cualitativo del sistema conforme se modifica alguno de sus parámetros. Una herramienta fundamental para este estudio es el *diagrama de bifurcación* [23], el cual representa los valores asintóticos de una variable del

3. EL SISTEMA DE RÖSSLER

sistema (usualmente z) para distintos valores del parámetro que se analiza.

A continuación, se presentan tres diagramas de bifurcación, uno por cada parámetro del sistema: a , b y c .

En este primer diagrama, se fija $b = 0.2$, $c = 5.7$, y se hace variar a . Se observa que conforme a aumenta, el sistema atraviesa una serie de bifurcaciones que incluyen periodos dobles y zonas caóticas.

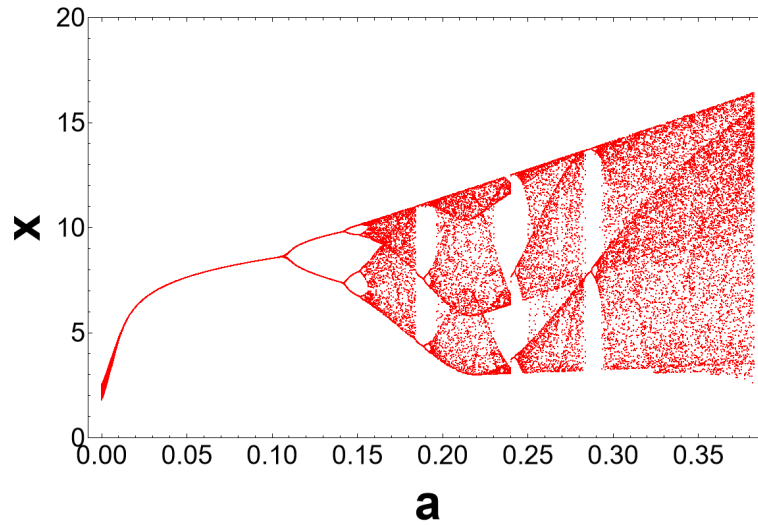


Figura 3.4: Diagrama de bifurcación del sistema de Rössler al variar a .

En el segundo caso, se fija $a = 0.2$, $c = 5.7$, y se permite que b varíe, por ejemplo en el rango $[0.1, 0.5]$. Aunque la sensibilidad del sistema a b suele ser menor que a los otros parámetros, también se detectan bifurcaciones importantes, incluyendo la aparición de órbitas periódicas y regiones de caos.

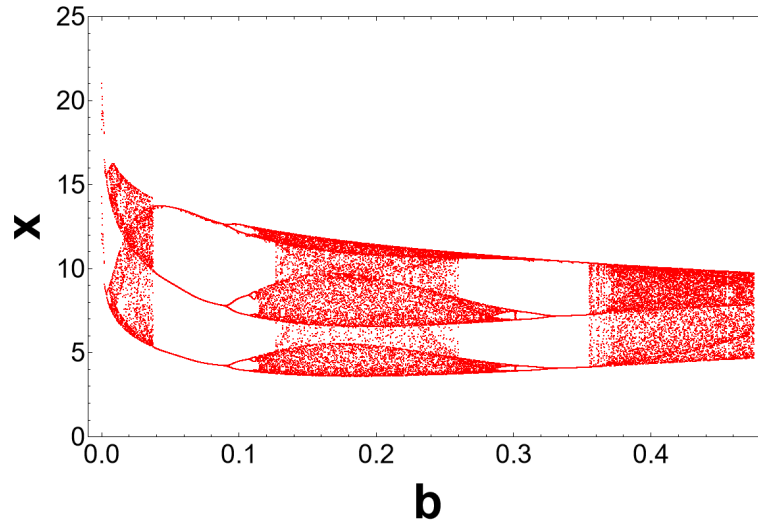


Figura 3.5: Diagrama de bifurcación del sistema de Rössler al variar b .

Finalmente, el parámetro c es uno de los más relevantes para inducir comportamiento caótico. Con $a = 0.2$, $b = 0.2$, se hace variar c en un rango más amplio, por ejemplo entre 2.5 y 6.0. Se observa una transición clara desde un punto de equilibrio estable, seguido por una bifurcación de Hopf que da lugar a un ciclo límite, múltiples duplicaciones de periodo y finalmente caos.

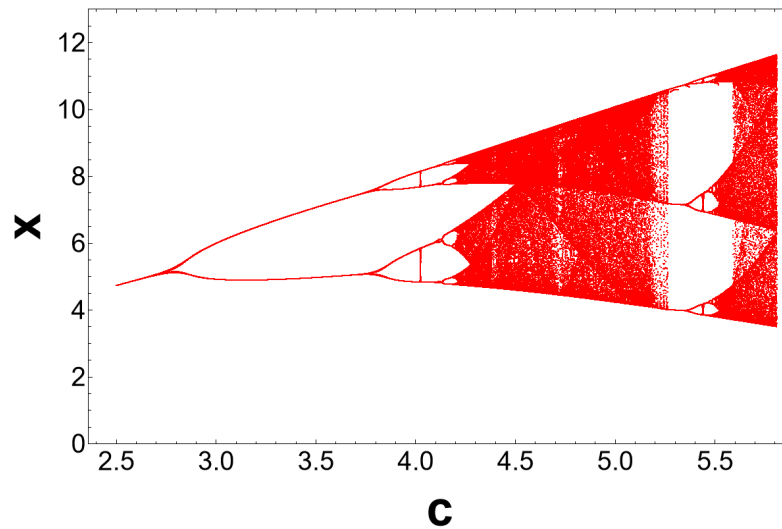


Figura 3.6: Diagrama de bifurcación del sistema de Rössler al variar c .

Estos diagramas permiten observar los comportamientos dinámicos del sistema y cómo la sensibilidad a cada parámetro puede conducir a rutas distintas hacia el caos. El caso del parámetro c , en particular, ha sido ampliamente estudiado por su capacidad para inducir trayectorias caóticas con atractores bien definidos.

3.3. Análisis de comportamiento caótico en el sistema de Rössler

El sistema de Rössler exhibe un comportamiento caótico característico dentro de ciertos rangos del parámetro c , como se evidenció en la sección anterior mediante el diagrama de bifurcación (Figura 3.6). Este comportamiento se manifiesta en la evolución temporal de las variables del sistema, donde, por ejemplo, $x(t)$ presenta oscilaciones irregulares, acotadas pero no periódicas, que nunca se repiten exactamente. Tal comportamiento es una firma del caos determinista.

Una herramienta fundamental para confirmar la presencia de caos es el cálculo del exponente de Lyapunov mayor, el cual cuantifica la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales [24]. Cuando este exponente es positivo, se indica que trayectorias inicialmente cercanas divergen exponencialmente con el tiempo, lo cual es un indicador inequívoco de caos. En el sistema de Rössler, este fenómeno se observa a partir de valores de c mayores a cierto umbral, en correspondencia con las bifurcaciones de periodo-doblamiento descritas anteriormente.

Desde el punto de vista geométrico, el análisis en el espacio de fase ofrece una representación intuitiva del atractor caótico. En el plano xy , las órbitas trazan espirales elongadas que se desarrollan lentamente hacia fuera, sin cerrar ciclos. En el espacio tridimensional xyz , las trayectorias describen una cinta continua que nunca se cruza consigo misma, una manifestación de la naturaleza determinista del sistema y de la unicidad de las soluciones del sistema diferencial.

Para caracterizar cuantitativamente la complejidad del atractor, puede calcularse su dimensión fractal, por ejemplo, mediante el algoritmo de Grassberger-Procaccia [25]. Los valores típicos de esta dimensión para el atractor de Rössler caen entre 2 y 3, lo cual sugiere que la dinámica se desarrolla sobre una estructura intermedia entre una superficie y un volumen completo, lo que refleja la riqueza del comportamiento caótico dentro de una geometría aparentemente simple.

Más allá de su interés teórico, el sistema de Rössler ha sido aplicado en múltiples contextos, como el modelado de señales biológicas, el diseño de circuitos electrónicos generadores de caos, y en esquemas de criptografía caótica [26]. Estas aplicaciones aprovechan precisamente la sensibilidad, la impredecibilidad y la estructura compleja del sistema, lo cual lo convierte en una herramienta útil para simular fenómenos dinámicos no lineales con alta fidelidad y relativa simplicidad estructural.

Capítulo 4

Generalización del Sistema de Rössler

La naturaleza del caos en sistemas dinámicos no lineales ha sido ampliamente estudiada a partir de modelos clásicos como el sistema de Rössler. Sin embargo, para una comprensión más profunda de sus propiedades y su posible aplicación a contextos reales, es fundamental considerar generalizaciones del mismo. Estas generalizaciones permiten explorar nuevas dinámicas introduciendo parámetros adicionales o términos no lineales que amplían el comportamiento posible del sistema. En este capítulo se presenta un estudio detallado de estas modificaciones, analizando los efectos sobre los atractores, la estabilidad, las bifurcaciones y el comportamiento caótico.

4.1. Algunos Sistemas que Generalizan al Sistema de Rössler

El sistema de Rössler ha servido como punto de partida para múltiples extensiones y generalizaciones, motivadas tanto por la exploración matemática de nuevos comportamientos dinámicos como por la necesidad de modelar fenómenos más complejos en sistemas físicos, químicos y biológicos. Estas generalizaciones se obtienen mediante la inclusión de nuevos parámetros, términos no lineales o acoplamientos funcionales que alteran la estructura original del sistema.

A continuación, se presentan dos formas generalizadas del sistema de Rössler que

introducen modificaciones en la ecuación correspondiente a la tercera variable. Estas modificaciones incluyen nuevos términos paramétricos y no lineales que permiten un control más preciso del comportamiento dinámico del sistema. En particular, se destacan las influencias de los parámetros s_1 y s_2 , los cuales modulan la intensidad y la forma de la no linealidad introducida.

El primer sistema generalizado que se estudia está definido por las siguientes ecuaciones diferenciales donde ya se involucra los nuevos parámetros:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + s_2(x - c)(z - s_1), \end{cases} \quad (4.1)$$

mientras que el segundo sistema incorpora una dependencia adicional de la variable $y(t)$ en la tercera ecuación siendo el término no lineal, como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + s_2(x - c)(z - s_1y), \end{cases} \quad (4.2)$$

Estas formulaciones permiten analizar de forma más rica las bifurcaciones, la sensibilidad a condiciones iniciales, los atractores extraños y las transiciones entre comportamientos periódicos y caóticos. En las siguientes secciones se detallará el análisis de cada sistema, incluyendo el estudio de los puntos de equilibrio, su estabilidad, los exponentes de Lyapunov, las secciones de Poincaré y los diagramas de bifurcación asociados.

4.2. Modificación del Sistema mediante un Parámetro

Aquí se analiza el primer sistema generalizado introducido previamente en la ecuación (4.1), en el que se incorpora un parámetro adicional en la tercera ecuación

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

del sistema de Rössler clásico. La inclusión de los parámetros s_1 y s_2 permite una mayor flexibilidad en la estructura no lineal del modelo, afectando directamente la evolución temporal de la variable $z(t)$.

La ecuación modificada para $\dot{z}$, dada por $b + s_2(x - c)(z - s_1)$, introduce una interacción cuadrática entre las variables x y z , modulada por los parámetros s_1 y s_2 . Esta forma de acoplamiento implica que el crecimiento o decrecimiento de z depende no solo del desplazamiento de x respecto a un valor crítico c , sino también del alejamiento de z con respecto a un valor de referencia s_1 . Esta estructura permite inducir dinámicas más complejas y sensibles a las condiciones iniciales, así como generar atractores con geometría distinta al sistema de Rössler clásico.

En la figura 4.1 se muestra el atractor tridimensional generado por el sistema para ciertos valores de los parámetros. A diferencia del atractor clásico de Rössler, este presenta una dinámica que parece estabilizarse en una órbita de tipo periódico o cuasi-periódico, con una forma suavemente curva en el espacio de fases y con una estructura del lazo mucho más ordenada. No se observan las espirales caóticas características del sistema original, lo que sugiere que el nuevo término ha reducido el grado de caos presente, al menos para los parámetros elegidos.

Este comportamiento puede atribuirse a la forma multiplicativa del término $s_2(x - c)(z - s_1)$, el cual regula el crecimiento de z en función de cuán alejadas estén las variables de sus respectivos valores de referencia. Para ciertas combinaciones de s_1 y s_2 , esta regulación puede suavizar la dinámica del sistema y estabilizarla en órbitas periódicas, limitando la expansión del atractor y restringiendo la sensibilidad a condiciones iniciales.

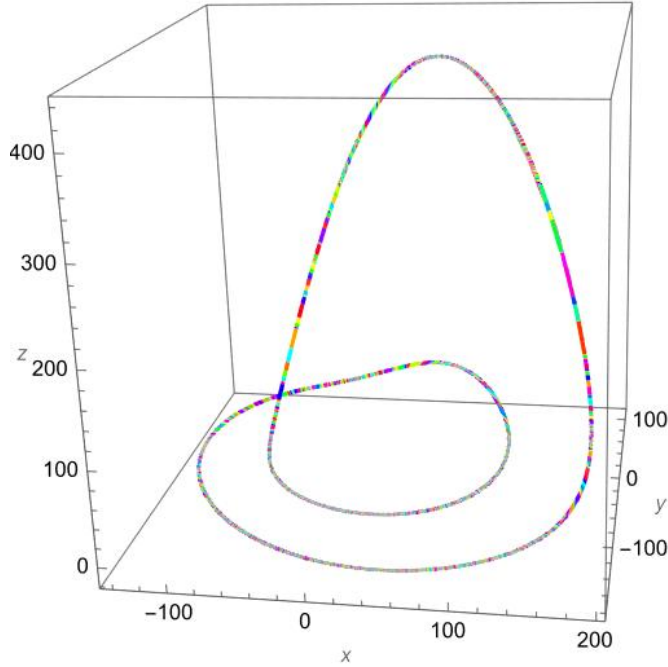


Figura 4.1: Atractor del sistema generalizado con término cuadrático en z y la adición del parámetro s_1 . La forma indica una dinámica más ordenada y menos caótica que en el sistema clásico. Consideramos: $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = 1/11.12$ y $s_2 = 7.17(1/177)$

Si se modifican los valores de los parámetros dentro del sistema (como se puede apreciar en la figura 4.2) se pueden obtener el mismo atractor pero más caótico, con más trayectorias.

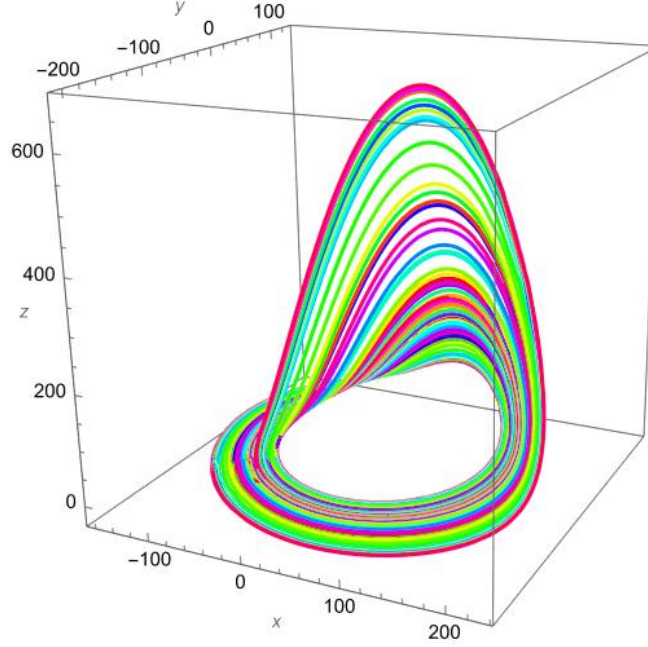


Figura 4.2: Al modificar algunos de los parámetros del sistema (4.1) se obtienen más trayectorias en el atractor. Consideramos: $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = 1/200$ y $s_2 = 7.17(1/177)$

(4.1)

La adición de los parámetros s_1 y s_2 en la tercera ecuación modifica significativamente el comportamiento del sistema de Rössler, permitiendo controlar el grado de caos y la forma del atractor. Esta modificación puede ser útil para aplicaciones en las que se requiera una transición entre comportamientos caóticos y periódicos mediante pequeñas variaciones paramétricas.

4.2.1. Puntos de Equilibrio y su Estabilidad

Para estudiar la estabilidad del sistema generalizado, primero se determinan los puntos de equilibrio resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, obtenido al igualar a cero las derivadas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z = 0, \\ \dot{y} &= x + as_1y + as_2z + as_1s_2y = 0, \\ \dot{z} &= b + z(x - cs_1 - cs_2 - cs_1s_2) = 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

De la primera ecuación se deduce que $z = -y$. Sustituyendo esta relación en la segunda ecuación se obtiene:

$$x + as_1y - as_2y + as_1s_2y = 0,\tag{4.4}$$

de donde se puede despejar x como:

$$x = -a(s_1 - s_2 - s_1s_2)y.\tag{4.5}$$

Sustituyendo estas expresiones de x y z en la tercera ecuación se llega a:

$$b + (-y)(-a(s_1 - s_2 - s_1s_2)y - cs_1 - cs_2 - cs_1s_2) = 0,\tag{4.6}$$

que se reescribe como una ecuación cuadrática en y :

$$a(s_1 - s_2 - s_1s_2)y^2 + (cs_1 + cs_2 + cs_1s_2)y + b = 0.\tag{4.7}$$

La solución de esta ecuación cuadrática proporciona dos posibles valores para y , a partir de los cuales se obtienen las coordenadas correspondientes de x y z mediante las relaciones anteriores. Así, se hallan dos puntos de equilibrio reales distintos:

$$P_1 = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)\tag{4.8}$$

$$P_2 = \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right)\tag{4.9}$$

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

Para que estos puntos sean reales, es necesario que el discriminante de la ecuación cuadrática sea no negativo. En particular, para los valores $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5.7$, $s_1 = 1$, y $s_2 = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}(cs_1 + cs_2 + cs_1s_2)^2 - 4a(s_1 - s_2 - s_1s_2)b &= (5.7 + 5.7 + 5.7)^2 - 4(0.2)(-1)(0.2) \\ &= 292.41 + 0.16 = 292.57 > 0,\end{aligned}\tag{4.10}$$

lo cual garantiza la existencia de dos puntos de equilibrio reales.

Con los puntos de equilibrio identificados, el siguiente paso es analizar su estabilidad local mediante el análisis lineal. Esto se logra linealizando el sistema alrededor de cada punto de equilibrio y evaluando el Jacobiano:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & as_1 + as_1s_2 & as_2 \\ z & 0 & x - cs_1 - cs_2 - cs_1s_2 \end{pmatrix}\tag{4.11}$$

Al evaluar esta matriz en un punto de equilibrio específico (x_0, y_0, z_0) , se obtiene una matriz constante cuyas propiedades espectrales determinan el comportamiento del sistema en un entorno infinitesimal alrededor del equilibrio. Los valores propios λ se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\det(J - \lambda I) = 0.\tag{4.12}$$

Para los valores dados de los parámetros, los puntos de equilibrio aproximados son:

$$P_1 \approx (6.88, -5.10, 5.10), \quad P_2 \approx (-0.28, 0.21, -0.21).$$

Evaluando el Jacobiano en el punto P_1 , los valores propios obtenidos son:

$$\lambda_1 \approx 0.25 + 1.57i, \quad \lambda_2 \approx 0.25 - 1.57i, \quad \lambda_3 \approx -0.03.$$

Dado que el par de valores propios complejos posee parte real positiva, se concluye que P_1 es un punto silla en espiral de índice 2, por lo tanto, inestable.

En el caso del punto P_2 , los valores propios calculados son:

$$\lambda_1 \approx -0.09 + 0.40i, \quad \lambda_2 \approx -0.09 - 0.40i, \quad \lambda_3 \approx -0.06.$$

Aquí todos los autovalores poseen parte real negativa, lo que implica que P_2 es un foco espiral localmente estable.

En particular, para los valores típicos de los parámetros utilizados en este estudio, el sistema generalizado presenta un punto de equilibrio inestable y otro localmente estable. Esta coexistencia sugiere la posibilidad de comportamientos dinámicos ricos, incluyendo trayectorias que divergen de un equilibrio inestable y se acercan a un atractor alrededor del equilibrio estable. Cambios en los parámetros podrían inducir bifurcaciones que alteren estas características, como la aparición de órbitas periódicas o incluso caos, dependiendo de la topología del espacio de fases.

4.2.2. Exponentes de Lyapunov y Diagrama de Bifurcación

Los exponentes de Lyapunov (LCE, por sus siglas en inglés: *Lyapunov Characteristic Exponents*) son herramientas fundamentales para el análisis de la estabilidad de trayectorias en sistemas dinámicos no lineales y otras áreas con este comportamiento, como en biología [27], con aplicaciones biológicas. Estos exponentes cuantifican [28] la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial de trayectorias inicialmente cercanas en el espacio de fases.

Sea un sistema dinámico tridimensional como el descrito en la Ec. (4.1), éste tendrá tres exponentes de Lyapunov: λ_1 , λ_2 y λ_3 , ordenados típicamente de mayor a menor. Dichos exponentes se pueden interpretar como:

- Si $\lambda_1 > 0$, el sistema presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que indica comportamiento caótico.
- Si $\lambda_1 = 0$ y los demás son negativos, el sistema es no caótico pero puede

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

tener órbitas periódicas o cuasi-periódicas.

- Si todos los exponentes son negativos, el sistema converge hacia un atractor estable (punto fijo o ciclo límite).
- La suma de los exponentes está relacionada con la disipación del sistema: una suma negativa implica un sistema disipativo.

Para los parámetros $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, 69.7 , $s_1 = 1/11.12$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ en el sistema generalizado (4.1) se obtuvo el siguiente conjunto de exponentes de Lyapunov:

$$\lambda_1 \approx 0.0260, \quad \lambda_2 \approx 0.000499, \quad \lambda_3 \approx -2.0520.$$

Se puede graficar la convergencia de este conjunto de exponentes de Lyapunov (figura 4.3) para ver su evolución y obtener información de ello.

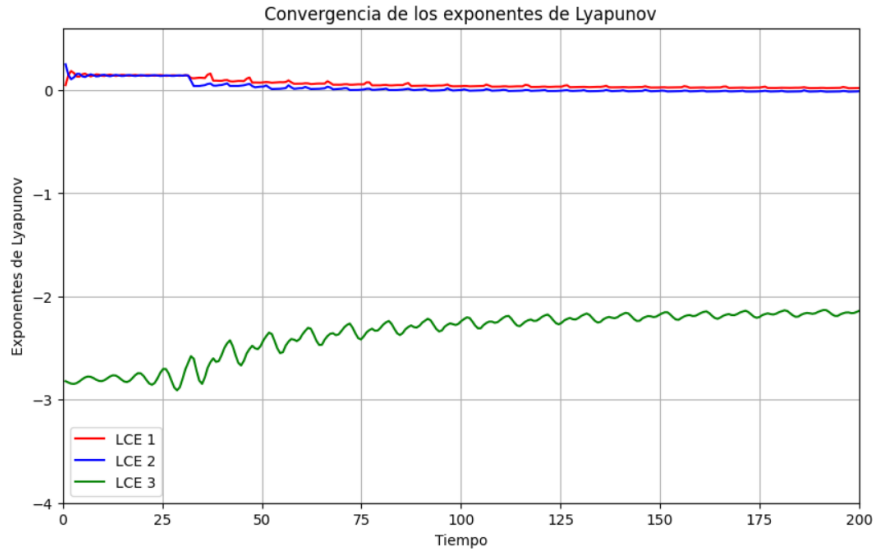


Figura 4.3: Convergencia de los exponentes de Lyapunov para $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, 69.7 , $s_1 = 1/11.12$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ del sistema generalizado (4.1).

El análisis de este espectro permite obtener un análisis detallado. La presencia de un exponente positivo muy pequeño ($\lambda_1 \approx 0.000499$) indica que el sistema exhibe

una dinámica caótica débil, es decir, presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, aunque con una tasa de divergencia exponencial muy baja. Esto puede ser indicativo de caos transitorio o cercano a una bifurcación. El segundo exponente ligeramente negativo ($\lambda_2 \approx -0.0260$) refleja contracción débil en otra dirección del espacio de fases, compatible con la dinámica en un atractor de dimensión fraccionaria. El tercer exponente fuertemente negativo ($\lambda_3 \approx -2.0520$): implica contracción significativa, lo cual confirma el carácter disipativo del sistema.

La configuración de estos exponentes (un positivo muy pequeño, uno negativo débil y otro muy negativo) es típica de un sistema con un atractor caótico delgado o poco desarrollado, donde la expansión del espacio de fases es muy limitada. Esto podría estar asociado a un caos intermitente o a un sistema cerca del umbral entre orden y caos.

Para el siguiente conjunto de parámetros de este sistema generalizado, $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, 69.7 , $s_1 = 1/200$ y $s_2 = 7.17(1/177)$, se obtuvo el siguiente conjunto de exponentes de Lyapunov:

$$\lambda_1 \approx 0.0714, \quad \lambda_2 \approx 0.0006, \quad \lambda_3 \approx -2.0175.$$

El análisis de estos valores permite caracterizar la naturaleza dinámica del sistema:

- $\lambda_1 > 0$: La existencia de un exponente positivo confirma que el sistema presenta caos determinista, ya que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales se amplifican exponencialmente a lo largo del tiempo.
- $\lambda_2 \approx 0$: Este valor cercano a cero corresponde a una dirección neutra en el espacio de fases, usualmente asociada al movimiento a lo largo del atractor. Esto es típico en sistemas caóticos tridimensionales.
- $\lambda_3 < 0$: El tercer exponente, al ser negativo, indica una fuerte contracción en una dirección, lo que implica que el sistema es disipativo y que las trayectorias tienden a concentrarse en un subconjunto del espacio de fases.

Este conjunto de exponentes es característico de un sistema tridimensional con un atractor extraño, en el que coexisten expansión, neutralidad y contracción.

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

La dinámica caótica robusta se manifiesta en la sensibilidad a las condiciones iniciales y en la estructura compleja del atractor.

También se puede graficar la evolución en el tiempo de los exponentes de Lyapunov previamente calculados, como se muestra en la Figura 4.4, lo que proporciona información valiosa sobre su convergencia y estabilidad.

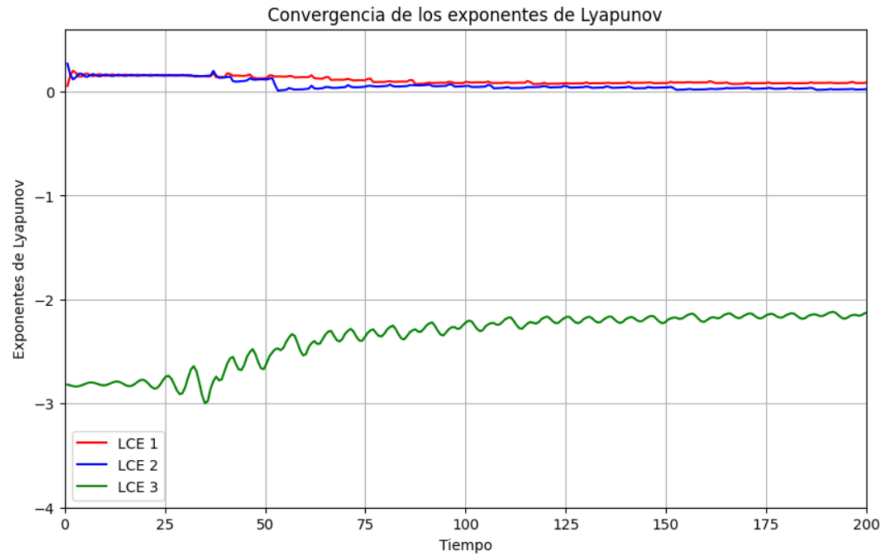


Figura 4.4: Convergencia de los exponentes de Lyapunov para $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = 1/200$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ del sistema generalizado (4.1).

La Figura 4.4 muestra cómo los exponentes de Lyapunov tienden a sus respectivos valores asintóticos. Se observa que:

- La curva roja (LCE 1) converge a un valor claramente positivo, lo cual es una fuerte evidencia de comportamiento caótico.
- La curva azul (LCE 2) permanece cerca de cero, indicando una dirección tangente al atractor.
- La curva verde (LCE 3) converge a un valor significativamente negativo (alrededor de -2.0175), indicando la dirección de máxima disipación del sistema.

Esta estructura es consistente con la dinámica caótica previamente descrita, y refuerza la idea de que el sistema presenta un atractor de dimensión fraccionaria con trayectorias no periódicas que evolucionan dentro de una región limitada del espacio de fases.

El diagrama de bifurcación mostrado en la figura 4.5 corresponde al sistema trabajado variando el parámetro s_1 dejando fijos los demás: $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$ y $s_2 = \frac{7.17}{177}$, en el cual se explora la dinámica del sistema al variar el parámetro s_1 en un rango amplio. El eje horizontal representa el parámetro s_1 , mientras que el eje vertical muestra los valores del estado variable x en la sección de Poincaré o tras un régimen transitorio suficientemente descartado. El gráfico está construido al registrar los valores de x para cada valor de s_1 tras la evolución del sistema a estado estacionario, permitiendo así visualizar las transiciones cualitativas en el comportamiento dinámico conforme se barre el parámetro de control.

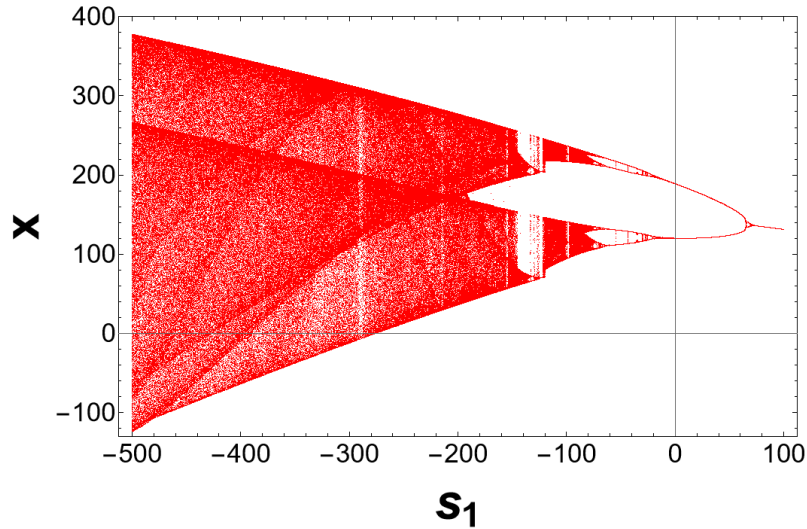


Figura 4.5: Convergencia de los exponentes de Lyapunov para $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ y variando s_1 del sistema (4.1).

En el extremo derecho del diagrama (cerca de valores positivos de s_1), se observa una dinámica relativamente simple, con un solo ramo que corresponde a un atractor periódico o a un punto fijo estable. Sin embargo, conforme s_1 disminuye, el diagrama exhibe la aparición de ramificaciones sucesivas y divisiones de las trayectorias, característica de bifurcaciones de periodo-doblamiento (period-

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

doubling bifurcations) que son un preludio clásico de la transición al caos en sistemas no lineales. Esta sucesión de duplicaciones de rama lleva a un régimen en el que las trayectorias ya no se limitan a un conjunto finito de valores discretos, sino que se dispersan densamente formando un continuo, lo cual es indicativo de comportamiento caótico.

En la región central e izquierda del diagrama (valores negativos de s_1 grandes en magnitud), se aprecia un abanico extremadamente rico de estructuras. Se distinguen zonas densamente pobladas de puntos que reflejan atractores caóticos con sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, junto con bandas blancas o vacías que corresponden a ventanas de periodicidad, donde el sistema recupera temporalmente una dinámica regular y estable antes de volver a bifurcar hacia el caos. Estas ventanas periódicas son manifestaciones clásicas de islas de estabilidad incrustadas dentro del mar caótico y suelen ser resultado de bifurcaciones internas (como period-doubling inversas o bifurcaciones de ciclo límite).

El diagrama exhibe además bandas claramente delimitadas, dentro de las cuales se pueden distinguir estructuras filamentosas y huecos, reflejando la existencia de atractores extraños de geometría fractal. La compleja estratificación de regiones caóticas y periódicas es evidencia de un sistema altamente no lineal y sensible a las variaciones paramétricas, con una dinámica rica que depende fuertemente del valor elegido de s_1 . En particular, las transiciones abruptas entre caos y periodicidad remarcan la presencia de bifurcaciones de tipo saddle-node o crisis internas del atractor.

En conjunto, este diagrama de bifurcación no solo confirma la presencia de caos determinista en amplias zonas del espacio de parámetros, sino que ilustra la complejidad jerárquica de las transiciones dinámicas en el sistema generalizado de Rössler. Su estructura revela la coexistencia de orden y caos, la sensibilidad a las condiciones iniciales y la dependencia crítica respecto a los parámetros, características esenciales para la comprensión de su comportamiento en aplicaciones reales y para la clasificación de su atractor dentro de las familias de sistemas dinámicos caóticos conocidos.

El diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 4.6 corresponde al mismo sistema, variando s_1 pero con parámetros $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c = 69.7$ y $s_2 = \frac{7.17}{177}$. En el eje horizontal se representa el barrido del parámetro s_1 , mientras que en el eje vertical se muestran los valores de x en una sección de Poincaré o bien una muestra tomada tras descartar un régimen transitorio suficientemente

largo. Este tipo de representación permite visualizar los cambios cualitativos en el comportamiento dinámico del sistema conforme varía un parámetro de control.

En esta versión del sistema se observan estructuras complejas y ramificadas que señalan la presencia de bifurcaciones de periodo-doblamiento y caos determinista. A diferencia del gráfico previo, en el cual el caos y las bifurcaciones se presentaban con un nivel de dispersión más denso y en un patrón altamente entrelazado, en este nuevo gráfico se nota una mayor organización en bandas definidas y regiones con vacíos bien marcados. Esto sugiere que, aunque el sistema sigue presentando un comportamiento caótico en amplias regiones del espacio de parámetros, la forma en la que las bifurcaciones se estructuran es distinta y está más delimitada, posiblemente por la reducción del parámetro b , lo cual atenúa la fuerza de crecimiento de la variable z y por ende su retroalimentación sobre la dinámica global.

Una característica notoria de este nuevo gráfico es la presencia de ventanas periódicas con mayor claridad. Estas regiones, en las cuales el sistema pasa de un régimen caótico a uno periódico de forma abrupta, se manifiestan como vacíos blancos y bandas curvas en el interior de zonas caóticas. También es visible una mayor apertura de los abanicos bifurcados conforme se avanza hacia valores más negativos de s_1 , lo cual indica que la sensibilidad del sistema al parámetro se intensifica en dicha región. La geometría en forma de abanico, con una gran densidad de puntos en la parte izquierda del diagrama, refleja la expansión caótica de las órbitas, mientras que las zonas con patrones más claros, incluso con repeticiones, revelan una organización periódica o cuasiperiódica.

Comparado con el diagrama anterior, el presente muestra una transición más ordenada entre el comportamiento regular y caótico, así como una disposición simétrica más evidente en torno a ciertas regiones del eje horizontal. Esto puede interpretarse como un indicio de que la nueva configuración de parámetros genera un sistema con transiciones más suaves o con mayor tendencia a bifurcaciones estructuradas. La forma y tamaño de las ventanas de periodicidad también ha cambiado, siendo en este caso más grandes y detectables a simple vista, lo cual podría estar relacionado con la disminución de la constante b , que modifica la dinámica del sistema en el eje z , y por ende la retroalimentación general del modelo.

En resumen, este diagrama de bifurcación ofrece una visión detallada del comportamiento no lineal del sistema generalizado 1 bajo un nuevo conjunto de paráme-

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

tros. Muestra regiones extensas de caos intercaladas con zonas periódicas bien definidas, bifurcaciones múltiples y una topología característica de atractores extraños. La comparación con el gráfico anterior confirma que pequeñas modificaciones en los parámetros del sistema pueden inducir cambios significativos en la estructura de bifurcaciones, lo cual es consistente con la naturaleza altamente sensible y compleja de los sistemas dinámicos no lineales.

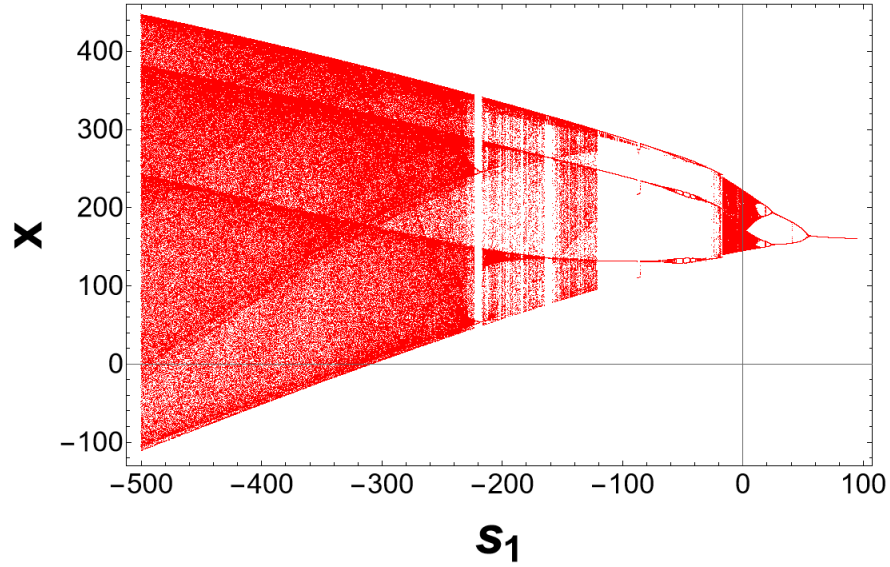


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación del sistema (4.1) variando s_1 con los parámetros $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c = 69.7$, y $s_2 = \frac{7.17}{177}$.

4.2.3. Sección de Poincaré

La sección de Poincaré es una herramienta cualitativa clave en el estudio de sistemas dinámicos [29]. Consiste en observar las intersecciones de las trayectorias del sistema con un hiperplano transversal al flujo, reduciendo así la dimensión del sistema en uno. Esta técnica permite visualizar la estructura interna de atractores y detectar comportamientos periódicos, cuasiperiódicos o caóticos [30].

El objetivo principal de una sección de Poincaré es transformar un sistema continuo en un mapa discreto, facilitando el análisis de la dinámica recurrente del sistema. Si la sección contiene un número finito de puntos, se sugiere una órbita periódica. Si los puntos se agrupan en curvas cerradas, el sistema puede ser

cuasiperiódico. Una dispersión aparente e irregular de puntos indica un comportamiento caótico.

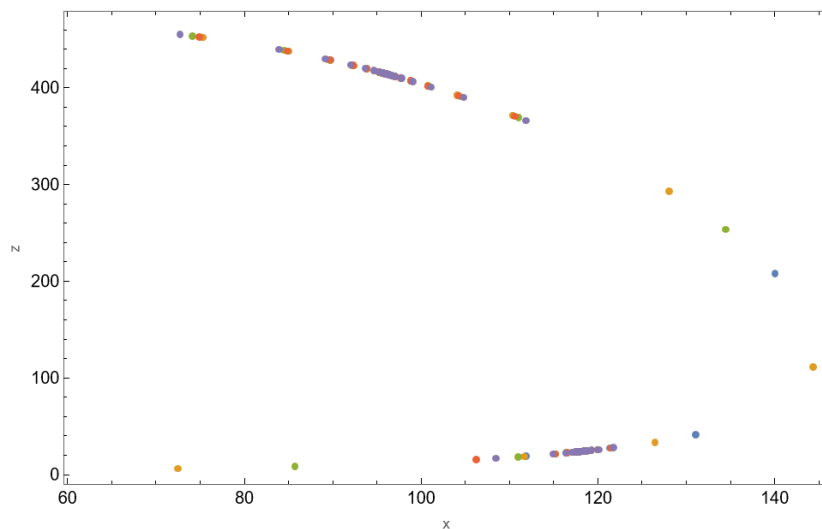


Figura 4.7: Sección de Poincaré en el plano $y = \text{constante}$ para el sistema generalizado con $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = 1/11.12$, $s_2 = 7.17/177$.

En la Figura 4.7 se presenta la sección de Poincaré obtenida para el sistema generalizado (4.1). La distribución de los puntos en el plano (x, z) sugiere las siguientes observaciones: Los puntos no se agrupan en un número discreto de ubicaciones ni siguen trayectorias cerradas. Esto descarta la posibilidad de un comportamiento estrictamente periódico o cuasiperiódico. En su lugar, los puntos se distribuyen formando una estructura dispersa pero confinada, lo que es característico de un atractor extraño. La densidad variable de puntos en distintas regiones del plano indica que la dinámica del sistema es compleja y no uniforme: algunas zonas del espacio de fases son visitadas con mayor frecuencia que otras, un rasgo típico de sistemas caóticos.

Este comportamiento es consistente con los exponentes de Lyapunov previamente calculados, que confirmaron la presencia de un exponente positivo. Por lo tanto, la sección de Poincaré en la Figura 4.7 proporciona una evidencia visual complementaria del comportamiento caótico del sistema bajo los parámetros considerados.

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

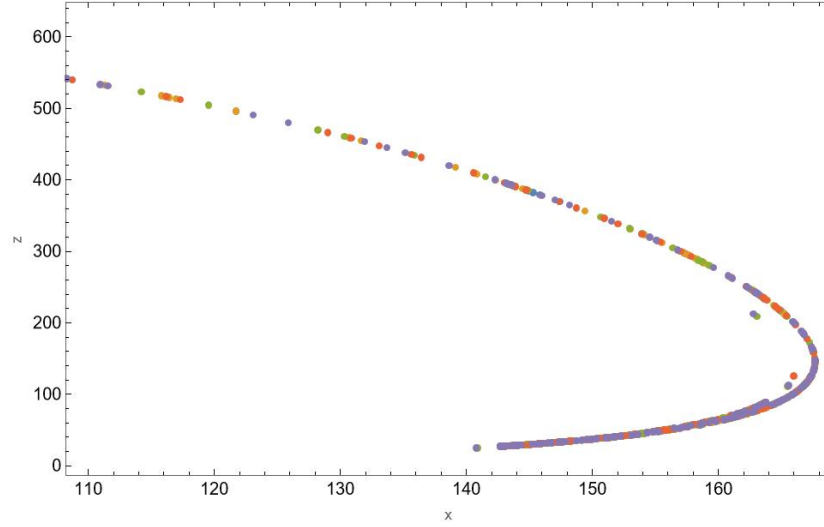


Figura 4.8: Sección de Poincaré en el plano xz del sistema generalizado (4.1) con parámetros $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = 1/200$ y $s_2 = 7.17(1/177)$.

La Figura 4.8 muestra la sección de Poincaré obtenida para el sistema generalizado definido en la Ec. (4.1), con los parámetros previamente especificados.

La sección se construyó considerando intersecciones del flujo con un plano transversal (por ejemplo, $y = \text{constante}$), registrando los valores de x y z en cada cruce. Como puede observarse, los puntos no se agrupan en un número finito, ni forman curvas cerradas bien definidas. En cambio, aparecen densamente distribuidos sobre una curva ancha y suavemente doblada, lo cual es característico de un atractor caótico.

Este comportamiento confirma que el sistema no sigue órbitas periódicas ni cuasiperiódicas, sino que presenta una dinámica más compleja, con sensibilidad a las condiciones iniciales y evolución no repetitiva. Esta observación es coherente con los resultados previos obtenidos a partir del análisis de los exponentes de Lyapunov.

4.3. Del Parámetro al Efecto de un Término no Lineal Adicional

El segundo sistema generalizado introducido en la ecuación (4.2), que incorpora una modificación más compleja en la tercera ecuación respecto al sistema de Rössler clásico. En este caso, la ecuación de $z(t)$ incluye un acoplamiento no lineal entre x , z y y , mediante la expresión $s_2(x - c)(z - s_1y)$. Esta modificación agrega una dependencia cruzada entre las tres variables del sistema, con dos parámetros de control adicionales: s_1 y s_2 .

Este nuevo término cuadrático extiende la estructura del atractor al introducir un acoplamiento entre el desplazamiento de x respecto a un umbral c y la interacción de z con y ponderada por s_1 . La dinámica de z se vuelve altamente sensible a la interacción combinada de estas dos desviaciones, lo que permite obtener estructuras dinámicas más ricas y potencialmente más caóticas, dependiendo de los valores paramétricos elegidos.

En la figura 4.9 se observa el atractor tridimensional generado con los siguientes parámetros: $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = \frac{1}{11.12}$ y $s_2 = \frac{1}{177}(7.17)$. A diferencia del primer sistema generalizado, este atractor exhibe una dinámica más expandida y compleja, con la presencia de trayectorias que se dispersan en el espacio de fases y sugieren un comportamiento caótico persistente. Se aprecia una geometría que recuerda al atractor clásico de Rössler, pero con una torsión adicional inducida por el término acoplado $z - s_1y$.

Este tipo de acoplamiento tiene un efecto amplificador: pequeños cambios en x o en y pueden inducir variaciones notables en la evolución de z , lo que incrementa la sensibilidad a las condiciones iniciales. Este fenómeno es típico de sistemas caóticos y se refleja en la figura mencionada, donde el atractor no colapsa en una órbita periódica, sino que se mantiene en un régimen de oscilación irregular.

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

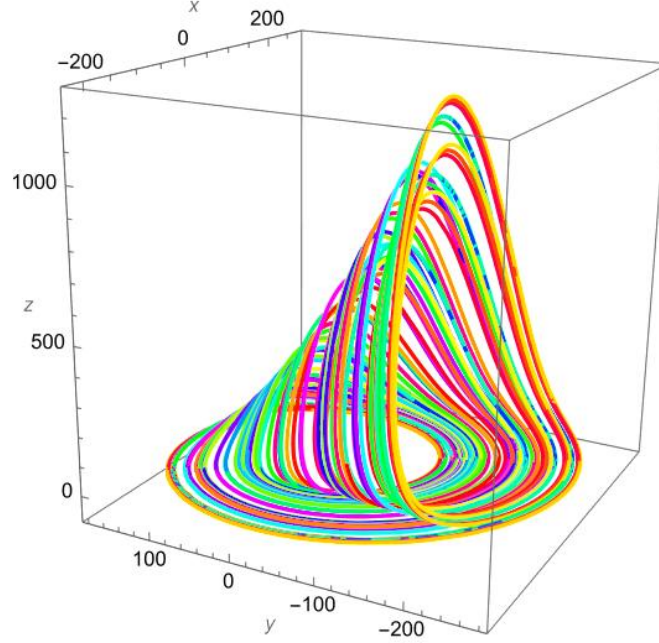


Figura 4.9: Atractor del segundo sistema generalizado con acoplamiento cruzado en la variable z mediante el término $s_2(x - c)(z - s_1y)$. Se observa una dinámica caótica persistente y de mayor sensibilidad a condiciones iniciales. Parámetros: $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = 1/11.12$ y $s_2 = 1/177(7.17)$.

De la misma forma, como se hizo con el sistema (4.1), al variar algunos de los parámetros que sean sensibles al caos se obtiene un atractor distinto, con mayor o menor caos dependiendo la variación de dichos parámetros. La figura 4.10 muestra el comportamiento al cambiar los parámetros a y c .

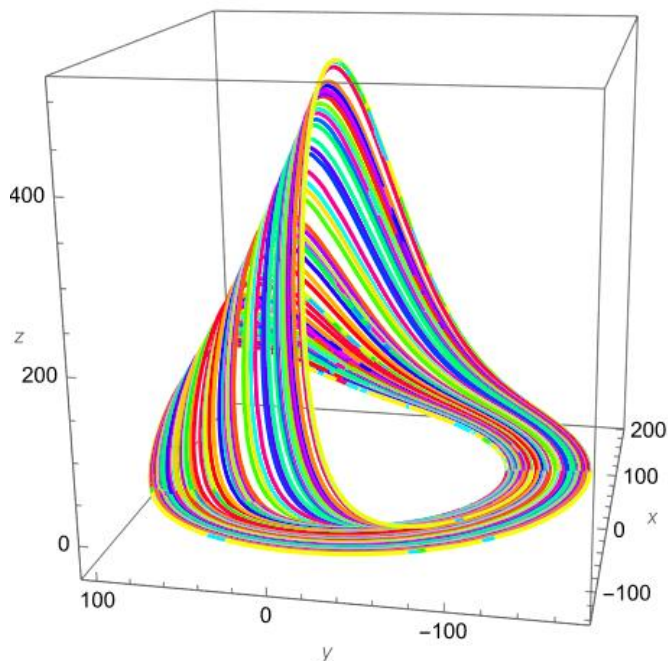


Figura 4.10: Atractor del segundo sistema generalizado. Se observa una dinámica caótica persistente y de menor sensibilidad con los parámetros: $a = 0.323012$, $b = 3.98740002$, $c = 55.7$, $s_1 = 1/10$ y $s_2 = 1/177(7.17)$.

La inclusión de los parámetros s_1 y s_2 en esta forma permite estudiar cómo la interacción cruzada entre variables puede desencadenar dinámicas caóticas incluso en presencia de pequeñas perturbaciones. Este tipo de sistemas puede ser útil para modelar fenómenos donde el acoplamiento entre diferentes procesos produce inestabilidad, bifurcaciones o tránsito al caos.

4.3.1. Puntos de Equilibrio y su Estabilidad

Para estudiar la estabilidad del sistema generalizado 2, primero se determinan los puntos de equilibrio resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, obtenido al igualar a cero las derivadas:

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z = 0, \\ \dot{y} &= x + ay = 0, \\ \dot{z} &= b + s_2(x - c)(z - s_1y) = 0.\end{aligned}\tag{4.13}$$

De la primera ecuación se deduce que $z = -y$. Sustituyendo esta relación en la segunda ecuación se obtiene:

$$x = -ay.\tag{4.14}$$

Sustituyendo estas expresiones en la tercera ecuación, se llega a:

$$b + s_2(-ay - c)(-y - s_1y) = 0,\tag{4.15}$$

que se reescribe como una ecuación cuadrática en y :

$$as_2(1 + s_1)y^2 + cs_2(1 + s_1)y + b = 0.\tag{4.16}$$

La solución de esta ecuación cuadrática proporciona dos posibles valores reales para y , a partir de los cuales se obtienen las coordenadas correspondientes de x y z mediante las relaciones anteriores. Así, se hallan dos puntos de equilibrio reales, que se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left(\frac{c}{2} + \frac{a\sqrt{-((1+s_1)s_2(4ab-c^2(1+s_1)s_2))}}{2a(1+s_1)s_2}, \right. \\
 &\quad \left. -\frac{c}{2a} - \frac{\sqrt{-((1+s_1)s_2(4ab-c^2(1+s_1)s_2))}}{2a(1+s_1)s_2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{c}{2a} + \frac{\sqrt{-((1+s_1)s_2(4ab-c^2(1+s_1)s_2))}}{2a(1+s_1)s_2} \right) \\
 P_2 &= \left(\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{-((1+s_1)s_2(4ab-c^2(1+s_1)s_2))}}{2(1+s_1)s_2}, \right. \\
 &\quad \left. -\frac{c}{2a} + \frac{\sqrt{-((1+s_1)s_2(4ab-c^2(1+s_1)s_2))}}{2a(1+s_1)s_2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{c}{2a} - \frac{\sqrt{-((1+s_1)s_2(4ab-c^2(1+s_1)s_2))}}{2a(1+s_1)s_2} \right)
 \end{aligned}$$

donde y_1 y y_2 son las soluciones de la cuadrática anterior. Utilizando los valores

$$a = 0.3012, \quad b = 3.98740002, \quad c = 69.7, \quad s_1 = \frac{1}{11.12}, \quad s_2 = \frac{7.17}{177},$$

los puntos de equilibrio se obtienen numéricamente como:

$$P_1 \approx (6.926, -5.135, 5.135), \quad P_2 \approx (-0.275, 0.915, -0.915).$$

Con los puntos de equilibrio identificados, el siguiente paso es analizar su estabilidad local mediante el análisis lineal. Esto se logra linealizando el sistema alrededor de cada punto de equilibrio y evaluando el Jacobiano:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ s_2(z - s_1 y) & -s_1 s_2(x - c) & s_2(x - c) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

Al evaluar esta matriz en un punto de equilibrio específico (x_0, y_0, z_0) , se obtiene una matriz constante cuyas propiedades espectrales determinan el comportamiento del sistema en un entorno infinitesimal alrededor del equilibrio. Los valores propios λ se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\det(J - \lambda I) = 0. \quad (4.18)$$

Para el punto P_1 , el cálculo de los valores propios del Jacobiano da:

$$\lambda_1 \approx 0.2729, \quad \lambda_2 \approx 0.0062 + 3.3393i, \quad \lambda_3 \approx 0.0062 - 3.3393i.$$

El hecho de que todos los valores propios tengan parte real positiva implica que este punto de equilibrio es **inestable**, con una estructura de tipo *foco-repulsor tridimensional*.

En el caso del punto P_2 , los valores propios son:

$$\lambda_1 \approx -2.8150, \quad \lambda_2 \approx 0.1543 + 1.0281i, \quad \lambda_3 \approx 0.1543 - 1.0281i.$$

Este punto de equilibrio también es **inestable**, ya que presenta un par de valores propios con parte real positiva. El comportamiento local alrededor de este punto corresponde a un *silla-foco tridimensional*.

En conclusión, el sistema generalizado 2 presenta dos puntos de equilibrio reales, ambos inestables para los valores dados de los parámetros. Este resultado es consistente con la presencia de comportamiento caótico en las trayectorias numéricas, las cuales no son atraídas hacia un equilibrio sino que exploran una región más amplia del espacio de fases, típicamente en torno a un atractor extraño.

4.3.2. Exponentes de Lyapunov

Para el primer análisis se considera el sistema generalizado (4.2) con parámetros $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = \frac{1}{11.12}$, $s_2 = \frac{7.17}{177}$.

Los exponentes de Lyapunov aproximados para este conjunto de parámetros son:

$$\lambda_1 \approx 0.1328, \quad \lambda_2 \approx 0.0006, \quad \lambda_3 \approx -1.7181.$$

La figura 4.11 muestra la evolución temporal de los tres exponentes de Lyapunov (LCE) del sistema. Cada curva representa el valor acumulado de cada exponente en función del tiempo, a medida que se integran las ecuaciones diferenciales y se actualiza el cálculo de la divergencia o contracción de trayectorias cercanas en el espacio de fases. Se observa que la curva roja (LCE 1) se estabiliza claramente en un valor positivo cercano a 0.13. Esto es evidencia directa de caos determinista: la presencia de un exponente de Lyapunov positivo implica sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, trayectorias infinitesimalmente cercanas divergen exponencialmente en el tiempo. El valor de aproximadamente 0.13 indica una tasa moderada de divergencia, lo cual sugiere un atractor caótico con una expansión característica en alguna dirección del espacio de fases.

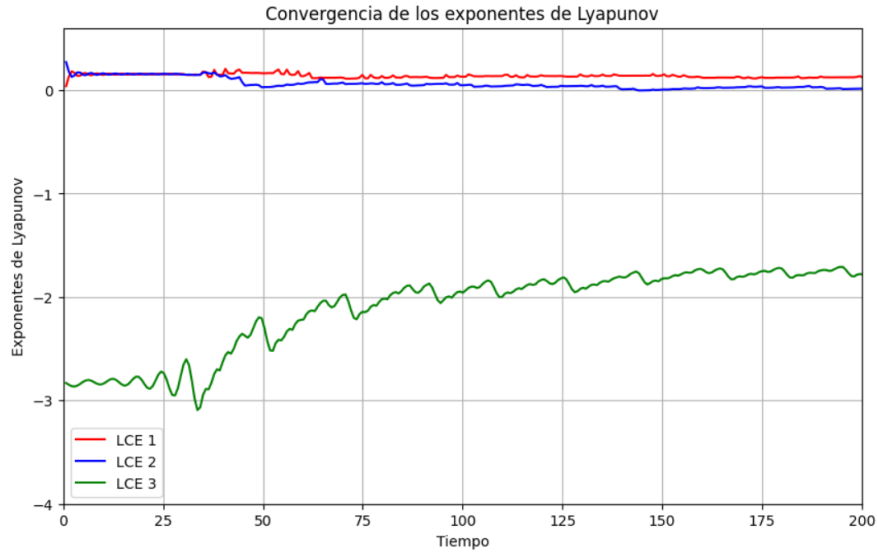


Figura 4.11: Convergencia de los exponentes de Lyapunov para $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, 69.7 , $s_1 = 1/11.12$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ del sistema generalizado (4.2).

La curva azul (LCE 2) converge a un valor muy cercano a cero (aprox. 0.0006). Esto es típico en sistemas continuos con atractores caóticos de dimensión fraccionaria, donde un exponente cerca de cero suele representar la dirección tangente

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

al atractor (relacionada con la evolución en el tiempo a lo largo de la órbita). En otras palabras, es la manifestación de la invariancia del atractor bajo el flujo del sistema dinámico: el movimiento a lo largo de la trayectoria en el atractor no se expande ni se contrae.

La curva verde (LCE 3) se estabiliza en un valor negativo de aproximadamente -1.718 . Este exponente negativo indica contracción fuerte en una dirección del espacio de fases. La dinámica en esa dirección aplasta el volumen de fases, característica de sistemas disipativos. Este resultado confirma que el atractor está embebido en una subvariedad de dimensión fractal menor que la dimensión completa del sistema.

En conjunto, el espectro $\{0.1328, 0.0006, -1.7181\}$ es característico de un sistema caótico tridimensional con atractor extraño: un exponente positivo (caos), uno cercano a cero (dirección neutra), y uno negativo (disipación). Además, la suma de los exponentes es negativa, lo que es consistente con un sistema disipativo en su conjunto, ya que el volumen en el espacio de fases se contrae a largo plazo.

Visualmente, la gráfica muestra cómo estas tres curvas alcanzan su convergencia asintótica a lo largo del tiempo de integración. Las oscilaciones iniciales se amortiguan conforme aumenta la integración, revelando con claridad el valor de cada exponente. Esta dinámica rica está influenciada por el hecho de que en el sistema generalizado 2, la ecuación para z incluye un término multiplicativo en s_1 . Este acoplamiento más fuerte con el parámetro puede amplificar la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales y a los parámetros, favoreciendo la aparición de caos robusto incluso con un parámetro a . El valor más alto del exponente mayor respecto a otros sistemas indica que la modificación en la ecuación de z incrementa la tasa de divergencia de trayectorias cercanas, generando un atractor más “activo” o “explosivo” en términos de expansión local en el espacio de fases.

En síntesis, la figura confirma de manera cuantitativa el carácter caótico del sistema generalizado 2 en el régimen de parámetros dado, y pone en evidencia el papel clave de la forma modificada de la ecuación de z en amplificar la complejidad del comportamiento dinámico.

Para el siguiente conjunto de parámetros mostrados en la figura 4.10 los exponentes de lyapunov obtenidos son:

$$\{0.0730, 0.0006, -1.4734\}$$

La figura muestra la convergencia de los tres exponentes de Lyapunov (LCE) del sistema (4.2) para los parámetros $a = 0.323012$, $b = 3.98740002$, $c = 55.7$, $s_1 = \frac{1}{10}$ y $s_2 = \frac{7.17}{177}$.

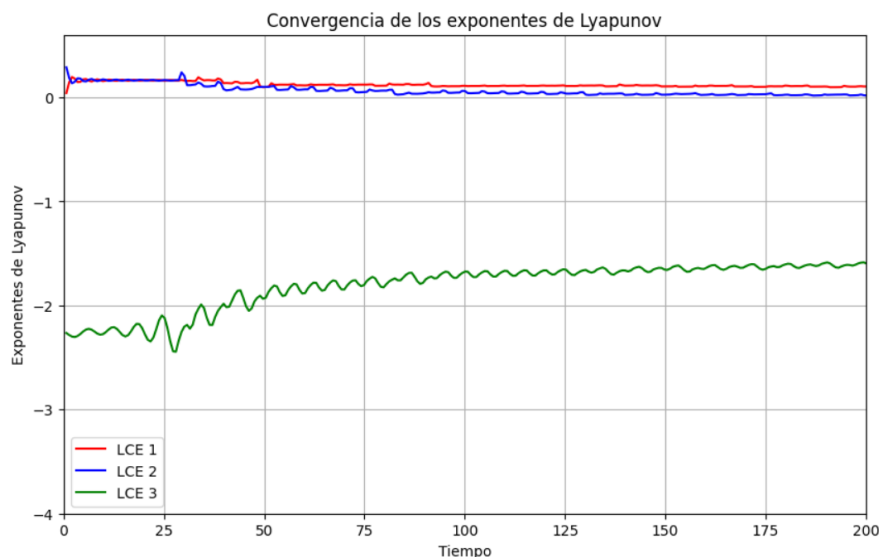


Figura 4.12: Convergencia de los exponentes de Lyapunov para $a = 0.323012$, $b = 3.98740002$, $c = 55.7$, $s_1 = 1/10$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ del sistema generalizado (4.2).

En la gráfica, la curva roja (LCE 1) representa el mayor exponente de Lyapunov. Tras las oscilaciones iniciales, se estabiliza alrededor de 0.0730. La positividad de este valor confirma la presencia de caos determinista en el sistema: pequeñas diferencias en condiciones iniciales se amplifican exponencialmente a largo plazo. Comparado con otros regímenes de parámetros, este exponente es positivo pero más pequeño que en algunos casos previos (como cuando a es mucho mayor), lo que indica que la tasa de divergencia de trayectorias cercanas es más moderada. Aun así, sigue siendo suficiente para caracterizar un atractor caótico.

La curva azul (LCE 2) se estabiliza en un valor muy cercano a cero (aproximadamente 0.0006). Esto es típico en sistemas tridimensionales con atractores caóticos, donde el exponente cercano a cero describe la dirección neutra correspondiente a la evolución a lo largo del atractor: no hay expansión ni contracción neta en esa dimensión del espacio de fases. Su presencia confirma la estructura de flujo continuo en el atractor.

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

Por su parte, la curva verde (LCE 3) desciende rápidamente al principio y luego se estabiliza cerca de -1.4734 . Este exponente claramente negativo indica contracción fuerte en una dirección del espacio de fases, característica de sistemas disipativos. En términos geométricos, la dinámica “aplana” el volumen de fases a largo plazo en esa dirección, concentrándolo en una variedad de dimensión fractal más baja.

La forma de las curvas en la figura muestra convergencia clara hacia valores asintóticos a lo largo del tiempo de integración. Aunque hay oscilaciones transitorias, el esquema de cálculo de exponente de Lyapunov logra estabilizar las estimaciones para cada dirección característica del espacio de fases.

Es típico de un sistema caótico tridimensional con un atractor extraño. El exponente positivo confirma la sensibilidad a condiciones iniciales (caos), el cercano a cero representa invarianza a lo largo del flujo, y el negativo la disipación en otra dirección. Además, la suma de los tres exponentes es negativa, lo que es consistente con la naturaleza disipativa global del sistema.

Es relevante notar que el valor del parámetro $c = 55.7$ en este caso es más bajo que en el caso anterior, donde $c = 69.7$. Esto puede explicar en parte que el exponente máximo de Lyapunov sea menor, indicando un régimen caótico menos agresivo o con un atractor de menor dimensión fractal. En el contexto del sistema (4.2), la inclusión del factor s_1 en la ecuación de z sigue permitiendo la aparición de caos incluso con este ajuste en c , pero modifica cuantitativamente la intensidad de la divergencia de trayectorias cercanas.

En síntesis, la gráfica y los valores de los exponentes de Lyapunov confirman que el sistema (4.2) en el régimen de parámetros dado es caótico, con expansión en al menos una dirección, neutra en otra, y fuerte contracción en la tercera, formando un atractor extraño característico de sistemas dinámicos no lineales tridimensionales.

4.4. Estudio de Bifurcaciones y Cambios de Comportamiento

Los diagramas de bifurcación son herramientas fundamentales para visualizar cómo cambia el comportamiento dinámico de un sistema al variar alguno de sus parámetros. Al representar los valores asintóticos de una variable de interés en función de un parámetro de control, estos diagramas permiten identificar transiciones entre estados estables, órbitas periódicas, cuasiperiódicas y regímenes caóticos. En el contexto del sistema (4.2) que se estudia aquí, se exploran estas transiciones al modificar parámetros específicos, particularmente el parámetro c , que influye de manera significativa en la geometría del atractor.

El sistema presenta una forma generalizada de la ecuación para z que incluye términos dependientes de s_1 y s_2 , introduciendo una riqueza adicional en la dinámica al alterar la intensidad y la forma de las no linealidades. Para analizar esta complejidad, se han generado diagramas de bifurcación correspondientes a dos conjuntos distintos de parámetros, sobre todo viendo el impacto que tiene el parámetro s_1 . Este enfoque permite observar de manera comparativa cómo pequeños cambios paramétricos pueden inducir comportamientos cualitativamente diferentes en el sistema, revelando bifurcaciones que marcan las fronteras entre orden y caos.

4.4.1. Diagrama de Bifurcación

A continuación se presentan los diagramas de bifurcación obtenidos para cada conjunto de parámetros, con el objetivo de ilustrar visualmente estas transiciones y características dinámicas.

Ambos diagramas de bifurcación muestran la evolución de la dinámica del sistema al variar el parámetro s_1 , el cual participa directamente en el término no lineal de la tercera ecuación. La diferencia entre las dos gráficas radica en los valores fijos de los parámetros a, b, c y s_2 , lo que permite comparar cómo distintas configuraciones del sistema afectan el desarrollo de bifurcaciones y la transición al caos.

En el primer diagrama 4.13, correspondiente a un conjunto específico de paráme-

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

tros, se observa que para valores suficientemente negativos de s_1 , aproximadamente $s_1 \lesssim -0.25$, el sistema presenta un comportamiento periódico simple. Las iteraciones de la sección de Poincaré se agrupan en un solo valor, lo que indica la existencia de un ciclo límite de periodo uno. A medida que se incrementa el parámetro s_1 , comienza una bifurcación de periodo doble, manifestada por la aparición de dos ramas simétricas en el diagrama. Esta transición marca el inicio de una cascada de duplicaciones de periodo, conforme se aproxima a $s_1 \approx 0.03$. A partir de este punto, el sistema entra en un régimen caótico, donde las iteraciones se dispersan formando una nube densa de puntos. También se observan ventanas de periodicidad intercaladas dentro de la región caótica, una característica típica en atractores de tipo Rössler, que revela la coexistencia de comportamiento periódico y caótico en distintos subintervalos del parámetro. Este patrón indica que conforme s_1 incrementa su valor, el acoplamiento $z - s_1 y$ modifica de forma progresiva la estructura del atractor, conduciendo eventualmente a una dinámica caótica de alta amplitud.

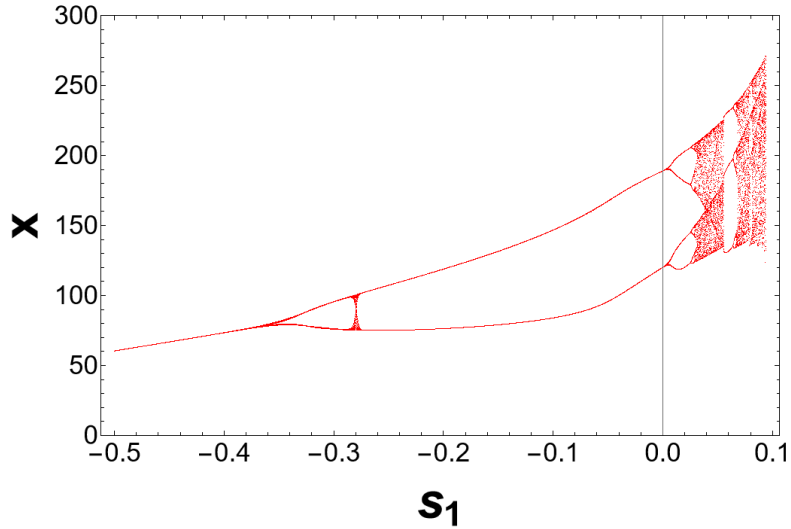


Figura 4.13: Diagrama de bifurcación del sistema (4.2) con parámetros $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ y variando s_1 .

En el segundo diagrama 4.14, generado con otro conjunto distinto de valores para los parámetros fijos, el comportamiento cualitativo del sistema es similar, pero con rasgos adicionales que lo distinguen del caso anterior. Para valores de $s_1 \lesssim -0.33$, la dinámica es de periodo uno, como en el caso anterior. Sin em-

bargo, conforme s_1 se aproxima a -0.31 , aparece una región de dispersión de puntos que sugiere la existencia de una crisis interior: un atractor caótico de baja dimensión emerge dentro del régimen periódico. Esta transición anticipada hacia una dinámica compleja ocurre antes de que se inicie la bifurcación de periodo doble convencional. Posteriormente, entre $s_1 \approx 0.29$ y $s_1 \approx 0.02$, el sistema entra en una fase de re-estabilización. La variable x permanece acotada a un rango muy estrecho, lo que refleja un comportamiento casi estacionario, con oscilaciones de muy baja amplitud. Este fenómeno no aparece en el primer conjunto de parámetros y es consecuencia directa de cómo el término $s_1 y$ influye en la retroalimentación del sistema. A medida que s_1 se acerca a cero, el sistema pierde nuevamente estabilidad y se desencadena una nueva secuencia de bifurcaciones de periodo que culminan en un régimen caótico más amplio y estructurado que el del primer caso. En esta última fase, se observan múltiples ventanas periódicas de orden superior, regiones con señales de intermitencia y zonas caóticas de mayor extensión, indicando una dinámica más rica y sensible a las condiciones iniciales.

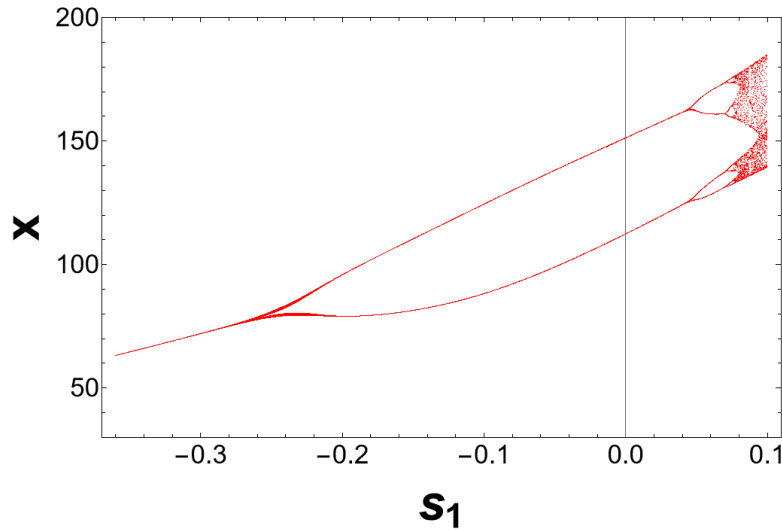


Figura 4.14: Diagrama de bifurcación del sistema (4.2) con parámetros $a = 0.323012$, $b = 3.98740002$, $c = 55.7$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ y variando s_1 .

En conjunto, ambos diagramas muestran cómo la forma funcional del sistema se mantiene constante, pero pequeñas variaciones en los parámetros pueden modificar profundamente la ruta bifurcacional. En particular, el parámetro s_1 , al interactuar con la variable y , se comporta como un modulador clave del grado de

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

no linealidad del sistema. Su influencia es tal que determina no solo el punto de inicio de las transiciones dinámicas, sino también la amplitud y complejidad del atractor resultante.

4.4.2. Sección de Poincaré

En las secciones de Poincaré correspondientes a los dos atractores estudiados anteriormente se tienen comportamientos evidentemente distintos entre sí, a diferencia de las secciones de Poincaré analizadas en la sección 4.2.3 donde solo difería la cantidad de trayectorias que incidían sobre la misma.

La figura 4.15 presenta una sección de Poincaré del sistema (4.2), calculada para los parámetros $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = \frac{1}{11.12}$ y $s_2 = \frac{7.17}{177}$. La ecuación de z incorpora un acoplamiento adicional con s_1 en forma multiplicativa, lo que altera la estructura no lineal del sistema y su dinámica en el espacio de fases como se comprueba en la figura 4.9.

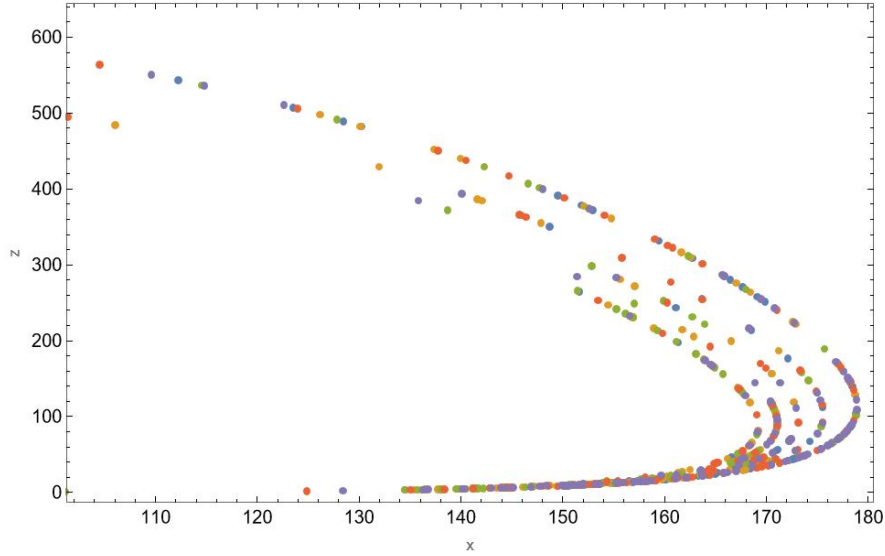


Figura 4.15: Sección de Poincaré para $a = 0.3012$, $b = 3.98740002$, $c = 69.7$, $s_1 = 1/11.12$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ del sistema generalizado (4.2).

La gráfica muestra un conjunto de puntos en el plano (x, z) correspondientes a las intersecciones de las trayectorias del sistema con una superficie de sección

definida en el espacio de fases tridimensional. La dispersión y la organización de los puntos en la figura reflejan la estructura del atractor subyacente y permiten caracterizar la naturaleza de la dinámica.

En esta sección de Poincaré se observa una distribución densa de puntos que se curva y se abre en forma de abanico hacia valores altos de z . Los puntos no se agrupan en líneas o ciclos cerrados bien definidos, sino que forman múltiples bandas entrelazadas y estructuradas que llenan la región del plano con aparente complejidad fractal. Esta disposición indica la presencia de un atractor extraño: la dinámica no converge a un ciclo límite sencillo ni a un conjunto periódico de intersecciones, sino que explora de forma densa una variedad de mayor dimensión en la sección.

Además, la figura revela que las trayectorias atraviesan la sección formando varias ramas o filamentos paralelos pero separados, especialmente hacia valores altos de x y z . Este trenzado y la multiplicidad de capas reflejan la sensibilidad a condiciones iniciales característica del caos: trayectorias cercanas en el espacio de fases se separan de manera exponencial y producen intersecciones dispares en la sección de Poincaré. La estructura multilaminada sugiere plegados y estiramientos del atractor en el espacio de fases global, mecanismos clásicos de la generación de caos en sistemas dinámicos tridimensionales.

El hecho de que la figura presente regiones con mayor densidad de puntos también es relevante. Estas zonas más pobladas indican regiones del atractor donde el flujo pasa más tiempo, un efecto relacionado con la geometría del campo de velocidades y la atracción hacia regiones de menor divergencia local. En contraste, las regiones más vacías corresponden a trayectorias que pasan rápidamente a través de la sección, o a exclusiones dinámicas impuestas por la topología del atractor.

En conjunto, esta sección de Poincaré para el sistema generalizado 2 confirma de manera visual el carácter caótico del sistema en el régimen de parámetros considerado. La distribución amplia y compleja de intersecciones, la multiplicidad de bandas y el aspecto fractal del conjunto de puntos son consistentes con un atractor extraño tridimensional. La inclusión del término modificado con s_1 en la ecuación de z introduce no linealidades adicionales que enriquecen la dinámica y contribuyen a la generación de estructuras complejas en la sección. Así, la figura es evidencia de un régimen caótico robusto y sirve como herramienta clave para entender la organización geométrica del atractor en el espacio de fases.

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

Ahora, la figura 4.16 muestra la sección de Poincaré del mismo sistema, evaluado con los parámetros $a = 0.323012$, $b = 3.98740002$, $c = 55.7$, $s_1 = \frac{1}{10}$ y $s_2 = \frac{7.17}{177}$.

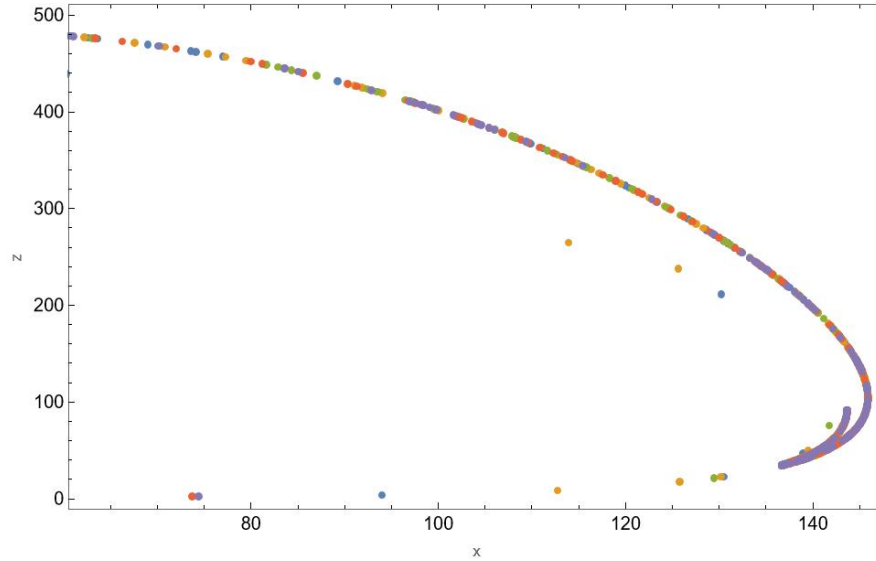


Figura 4.16: Sección de Poincaré para $a = 0.323012$, $b = 3.98740002$, 55.7 , $s_1 = 1/10$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ del sistema generalizado (4.2).

En la gráfica se observa el conjunto de puntos correspondientes a las intersecciones de la trayectoria con una superficie de sección en el espacio tridimensional. Estos puntos, proyectados en el plano (x, z) , permiten analizar la organización geométrica de las órbitas del sistema y su naturaleza periódica o caótica.

Lo primero que destaca en la imagen es la forma suavemente curvada y bastante bien definida de la nube de puntos, que se extiende desde valores relativamente altos de x y z hacia una región más concentrada en la parte inferior derecha del gráfico. A diferencia de secciones de Poincaré caóticas densamente llenas o de apariencia fractal, aquí se aprecia una organización notablemente ordenada: los puntos se agrupan en una o dos bandas principales y siguen una curva continua bien diferenciada, con escasa dispersión transversal.

Esta organización sugiere un régimen dinámico menos caótico y más próximo a la periodicidad o la cuasiperiodicidad. En un atractor caótico típico, la sección de Poincaré mostraría múltiples filamentos entrelazados y una densa población de puntos llenando el plano, reflejo de la divergencia exponencial de trayectorias

vecinas. En contraste, la figura actual carece de esos indicios claros de plegado y estiramiento extremo del flujo. El hecho de que los puntos formen una curva bien delimitada indica que la dinámica global del sistema explora una región de dimensión más baja en el espacio de fases.

Otro aspecto importante es la forma de la curva, que se abre suavemente en la parte superior izquierda y se curva hacia abajo en la derecha. Esta geometría sugiere la presencia de ciclos límite estables o toros invariantes donde la dinámica se encuentra confinada. La dispersión muy reducida en ciertas áreas, especialmente hacia valores altos de z , refuerza la idea de que el sistema sigue trayectorias coherentes y repetitivas en esas regiones.

Aunque existe una pequeña dispersión de puntos aislados en zonas bajas de z , esta dispersión es poco densa y no forma estructuras ramificadas o filamentos caóticos. Es posible que represente intersecciones transitorias o efectos de perturbaciones numéricas, pero no altera la interpretación global de un régimen dinámico más regular.

En conjunto, la sección de Poincaré obtenida para estos parámetros indica que el sistema (4.2) se encuentra en un régimen de oscilación regular o moderadamente cuasiperiódico. La modificación del parámetro c a 55.7 y los valores elegidos para s_1 y s_2 parecen desplazar el sistema hacia un atractor de menor dimensión, en contraste con parámetros que favorecen el caos. Así, esta figura es evidencia geométrica de un comportamiento más predecible y estructurado en el espacio de fases, útil para comprender cómo los parámetros controlan la transición entre el caos y la regularidad en este sistema dinámico.

4.5. Comportamiento Caótico y Transiciones de Fase en el Sistema Generalizado

La dinámica del sistema generalizado de Rössler, en particular aquellos que incorporan términos no lineales como $s_2(x - c)(z - s_1y)$, exhibe una notable riqueza estructural en sus trayectorias y en la evolución de sus atractores. En este contexto, el análisis del comportamiento caótico y las transiciones de fase adquiere un papel importante para caracterizar las distintas regiones del espacio para el conjunto de parámetros donde el sistema presenta cambios en su comportamiento.

4. GENERALIZACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER

A lo largo del estudio de los diagramas de bifurcación, se ha evidenciado que la variación del parámetro s_1 , manteniendo fijos los valores de a , b , c y s_2 , produce una secuencia ordenada de transiciones que incluyen desde órbitas periódicas de baja complejidad hasta dinámicas caóticas. Estas transiciones no ocurren de manera aleatoria, sino que obedecen a mecanismos bifurcacionales bien conocidos en la teoría de sistemas dinámicos, como lo son las bifurcaciones de periodo-doble, las crisis internas del atractor y la aparición de ventanas periódicas dentro de zonas caóticas.

En particular, se observa que, para ciertos valores de s_1 , el sistema entra en una fase de regularidad, donde las trayectorias se estabilizan en órbitas periódicas o cuasiperiódicas. Sin embargo, pequeños cambios en s_1 pueden desencadenar una ruptura súbita de esta estabilidad, conduciendo a la formación de atractores caóticos con geometría fractal. Este fenómeno se conoce como una transición de fase dinámica y puede interpretarse como el paso de una fase ordenada a una fase caótica, análoga al concepto de transición de fase en física estadística, donde el sistema atraviesa un umbral crítico que modifica su estado global.

El análisis de los exponentes de Lyapunov ha confirmado este comportamiento: la presencia de un exponente positivo es indicativa de sensibilidad a condiciones iniciales y, por ende, de caos determinista. En contraste, en regiones donde todos los exponentes son negativos o uno de ellos se aproxima a cero mientras los demás permanecen negativos, la dinámica es no caótica y tiende hacia atractores más simples.

Desde una perspectiva geométrica, las secciones de Poincaré han permitido visualizar con claridad estas transiciones. En las regiones periódicas, las secciones se reducen a un número finito de puntos o curvas cerradas bien definidas. En cambio, cuando el sistema se encuentra en un régimen caótico, la sección se puebla de puntos dispersos que forman estructuras irregulares, altamente sensibles a las condiciones iniciales y con una organización que sugiere plegado y estiramiento continuo del flujo en el espacio de fases.

Estas observaciones son consistentes con la existencia de un umbral crítico en el parámetro s_1 , a partir del cual se desencadena una cascada de duplicaciones de periodo que desemboca en caos. Adicionalmente, la aparición de crisis internas, intermitencia y ventanas periódicas revela que las transiciones no son necesariamente monótonas, sino que el sistema puede alternar entre fases ordenadas y caóticas conforme se explora el espacio paramétrico.

4.5 Comportamiento Caótico y Transiciones de Fase en el Sistema Generalizado

En conjunto, el comportamiento caótico del sistema generalizado y sus transiciones de fase constituyen evidencia clara de su capacidad para modelar fenómenos donde coexisten orden y caos, estabilidad e inestabilidad, y donde pequeñas perturbaciones pueden inducir cambios profundos en la dinámica. Esta sensibilidad y complejidad lo hacen un candidato natural para estudiar sistemas reales en física, biología o ingeniería, donde este tipo de comportamiento es frecuentemente observado.

Capítulo 5

Modelación del Sistema de Rössler modificado

El estudio de sistemas dinámicos caóticos ha desempeñado un papel fundamental en la comprensión de fenómenos complejos en ciencias naturales y aplicadas. Entre estos sistemas, el modelo propuesto por Otto Rössler ha destacado por su simplicidad estructural y, al mismo tiempo, por su rica dinámica, incluyendo comportamientos caóticos. No obstante, con el propósito de capturar con mayor fidelidad ciertos fenómenos observables o extender su aplicabilidad, se han propuesto diversas modificaciones al sistema original.

Estas modificaciones conservan la estructura básica del sistema de Rössler pero incorporan nuevas relaciones no lineales que introducen parámetros adicionales. Dichas extensiones permiten explorar un espacio de parámetros más amplio, lo que facilita la aparición de nuevos atractores, rutas de transición hacia el caos y bifurcaciones más diversas. La modelación precisa de estas variantes es esencial no solo para su análisis teórico, sino también para su implementación práctica mediante herramientas como la simulación computacional o la computación analógica.

En este capítulo se aborda la modelación detallada de un sistema modificado derivado del modelo de Rössler. Este análisis es fundamental para comprender su comportamiento dinámico, así como para su implementación física a través de plataformas de computación analógica. De manera específica, se hace uso de un dispositivo moderno que permite representar sistemas de ecuaciones diferenciales

en tiempo real mediante circuitos analógicos, lo que ofrece una alternativa tangible a las simulaciones digitales y permite validar experimentalmente las predicciones del modelo matemático.

5.1. Computación Analógica

La computación analógica es una forma de procesamiento de información en la que los datos se representan mediante cantidades físicas continuas. A diferencia de la computación digital, que codifica la información mediante valores discretos (generalmente binarios), la computación analógica emplea señales eléctricas, mecánicas, hidráulicas u ópticas que varían de manera continua para modelar directamente los fenómenos del mundo real [31].

La computación analógica es uno de los tres paradigmas computacionales: analógica, digital y cuántica. Cada uno de estos paradigmas tiene sus propias fortalezas y debilidades, y difieren tanto en su desarrollo como en su prevalencia. La computación digital es omnipresente hoy en día, mientras que la computación cuántica está en sus primeras etapas. La computación analógica es una tecnología probada y comprobada, aunque ha pasado de moda y hoy en día es en gran medida desconocida.

Durante la Segunda Guerra Mundial, la necesidad de resolver rápidamente ecuaciones diferenciales llevó al desarrollo de computadoras analógicas electromecánicas y electrónicas más avanzadas[32]. Entre ellas destaca el Differential Analyzer, desarrollado por Vannevar Bush en el MIT en la década de 1930, el cual resolvía ecuaciones mediante integradores mecánicos [33]. Posteriormente, surgieron computadoras analógicas electrónicas, que sustituían componentes mecánicos por amplificadores operacionales y elementos eléctricos, lo que mejoró su velocidad y precisión.

En los años 1950 y 1960, la computación analógica vivió su auge. Instituciones de investigación y desarrollo militar, como la NASA y laboratorios de defensa, emplearon computadoras analógicas para simular trayectorias balísticas, modelos de vuelo y sistemas de control [34]. Incluso en el diseño de aeronaves y cohetes, estos dispositivos fueron esenciales antes de que existieran computadores digitales lo suficientemente potentes.

5. MODELACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER MODIFICADO

No obstante, a partir de la década de 1970, la computación digital se impuso debido a la miniaturización de componentes, el desarrollo de microprocesadores y la facilidad de reprogramación, lo que llevó a una disminución significativa del uso de computadoras analógicas.

En términos generales, la computación analógica consiste en modelar sistemas dinámicos [35], es decir, sistemas que cambian con el tiempo de acuerdo con relaciones conocidas. Ejemplos de ello incluyen las economías de mercado, la propagación y control de enfermedades, la dinámica poblacional, la absorción de nutrientes, las reacciones nucleares en cadena y los sistemas mecánicos. Los modelos de sistemas dinámicos son útiles de manera similar a como lo son los modelos arquitectónicos en el diseño de edificios o los muñecos de pruebas de choque en la ingeniería de seguridad automotriz. Estos modelos ofrecen perspectivas sobre fenómenos que serían demasiado difíciles, laboriosos, costosos o peligrosos de estudiar directamente.

La computación analógica puede tener diversos propósitos. Puede ayudar a comprender lo que es (modelos de), o puede ayudar a lograr lo que debería ser (modelos para). Puede usarse para explicar en contextos educativos, para imitar en videojuegos, para predecir en las ciencias naturales y para controlar en ingeniería, o puede simplemente practicarse por el puro gusto de hacerlo. La computación analógica también es una excelente forma de aprender cálculo, ciencia e ingeniería.

Las computadoras analógicas son modulares, y la programación en una computadora analógica consiste en traducir el comportamiento de un sistema dado en conexiones entre los elementos de cómputo: los módulos que constituyen una computadora analógica [36]. Como pasos intermedios, este proceso requiere describir el comportamiento temporal en forma de ecuaciones diferenciales y, posteriormente, convertir estas ecuaciones en diagramas de conexión. Mientras que las soluciones de ecuaciones algebraicas son valores únicos, las soluciones de ecuaciones diferenciales son funciones, es decir, relaciones que pueden representarse mediante gráficos. Por consiguiente, las computadoras analógicas producen salidas en forma de gráficos (típicamente bidimensionales). Todas las ecuaciones diferenciales pueden modelarse usando solo unos pocos tipos de elementos de cómputo: inversores, sumadores, multiplicadores y, de manera crucial, integradores .

Una de las raíces principales de la computación analógica se encuentra en la invención del integrador mecánico de disco-esfera-y-cilindro. De forma comparable a como los engranajes entrelazados de distintos tamaños multiplican velocidades

de rotación y pueden considerarse como una forma de realizar multiplicaciones matemáticas, el integrador de disco-esfera-y-cilindro puede entenderse como una forma de realizar integraciones matemáticas, al calcular el área bajo una curva en el espacio x/y

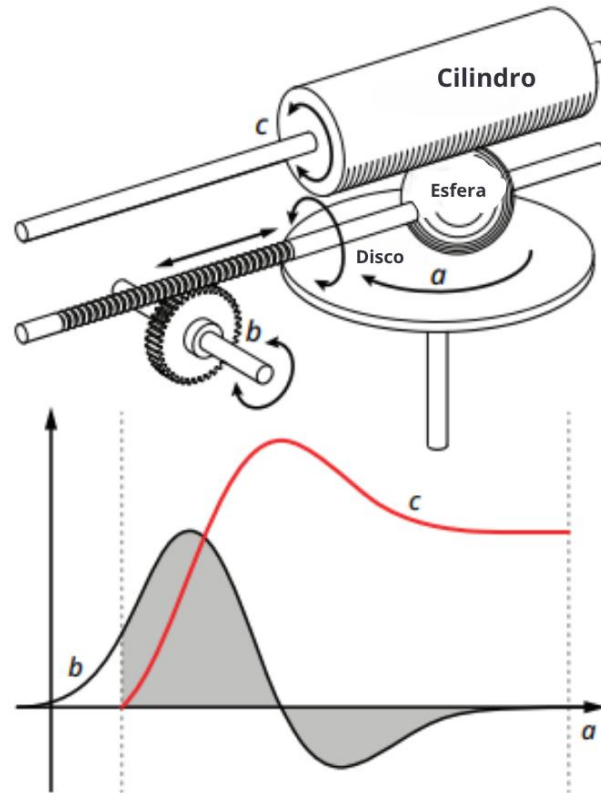


Figura 5.1: Representación del integrador mecánico de disco-esfera-cilindro.

El integrador de disco-esfera-y-cilindro, ilustrado en la figura 5.1, consiste en un disco, una esfera (o globo) y un cilindro, todos montados para girar. El disco, la esfera y el cilindro están dispuestos de modo que la superficie circular del disco toca la esfera y la esfera, a su vez, toca la superficie curva del cilindro, de tal manera que al girar cualquiera de los tres, normalmente se produce el movimiento de los otros dos.

Además de su capacidad de rotación, la esfera puede moverse linealmente hacia adelante y hacia atrás a lo largo de su eje de rotación, que es paralelo al diámetro

5. MODELACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER MODIFICADO

del disco, sin perder nunca el contacto con el disco ni con el cilindro. Con el disco girando a una velocidad constante a para marcar el paso del tiempo, la rotación de entrada b sigue una curva que cambia a lo largo del eje temporal horizontal, desplazando la esfera a través del diámetro del disco. La rotación de salida c del cilindro representa entonces la integral del área bajo la curva b .

Al retroalimentar la rotación de salida del cilindro c para accionar la rotación de entrada b , el integrador puede usarse, en principio, para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y trazar gráficamente sus soluciones. Dos integradores en serie, donde la salida del segundo se retroalimenta a la entrada del primero, permiten resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, y así sucesivamente.

Este principio de funcionamiento de las computadoras analógicas mecánicas puede implementarse de manera más eficiente utilizando electrónica analógica, específicamente mediante el uso de amplificadores operacionales configurados para integrar sus entradas eléctricas en el tiempo mediante la carga y descarga de capacitores.

Entre las ventajas más destacadas de la computación analógica se encuentran:

- **Procesamiento en tiempo real:** La computación analógica permite resolver ecuaciones diferenciales sin discretización, lo que habilita la simulación directa y continua de sistemas dinámicos.
- **Representación continua:** Es especialmente adecuada para modelar fenómenos del mundo real que cambian de forma continua en el tiempo, como sistemas biológicos, físicos o económicos.
- **Alta eficiencia energética:** En muchas aplicaciones específicas, las computadoras analógicas consumen significativamente menos energía que sus contrapartes digitales.
- **Visualización directa:** Los resultados pueden visualizarse como funciones continuas (gráficas), lo que permite una interpretación inmediata del comportamiento del sistema.
- **Simplicidad de hardware en ciertos casos:** Para modelos específicos, el hardware analógico puede ser más simple que una implementación digital equivalente.

Sin embargo, también presenta desventajas como:

- **Precisión limitada:** Las señales analógicas son susceptibles al ruido, las variaciones térmicas y las tolerancias en los componentes, lo que reduce su precisión frente a la computación digital.
- **Baja flexibilidad:** Cambiar el modelo computado implica rediseñar físicamente el circuito (reconfigurar conexiones), lo cual no es tan práctico como reprogramar un software digital.
- **Escalabilidad reducida:** Ampliar un sistema analógico a un número grande de variables o ecuaciones puede volverse complejo y costoso.
- **Dificultad de integración con sistemas digitales modernos:** Su implementación actual requiere adaptadores o interfaces específicas para conectarse con sistemas digitales predominantes.
- **Obsolescencia tecnológica:** La producción comercial de computadoras analógicas es limitada, y muchos componentes especializados ya no se fabrican a gran escala.

A pesar de estas limitaciones, ha resurgido recientemente un interés en la computación analógica debido a su potencial en aplicaciones como la inteligencia artificial neuromórfica, el control robótico autónomo y, de manera particular, en la representación física de sistemas no lineales donde las soluciones en tiempo real ofrecen ventajas cruciales.

Históricamente, la computación analógica tuvo un impacto profundo en la ciencia y la tecnología. Permitió, por ejemplo, simular con alta fidelidad sistemas eléctricos, mecánicos y biológicos antes de la aparición de las herramientas computacionales actuales. Incluso en el ámbito educativo, estas computadoras han servido para ilustrar conceptos de dinámica, control, y sistemas no lineales de forma tangible y directa[37].

En el contexto contemporáneo, dispositivos como The Analog Thing (THAT) representan una nueva generación de computadoras analógicas que, aprovechando componentes modernos y un diseño pedagógico, permiten revivir el potencial de esta tecnología en el aula y el laboratorio. En particular, su uso para simular sistemas dinámicos caóticos ofrece una plataforma valiosa tanto para la enseñanza como para la experimentación empírica de fenómenos no lineales.

5.1.1. Computadora The Analog Thing (THAT)

En años recientes, el resurgimiento del interés por la computación analógica ha dado lugar a dispositivos innovadores diseñados para fines educativos, de investigación y experimentación. Entre ellos, destaca The Analog Thing (THAT) [38], una computadora analógica moderna que combina la potencia conceptual de los sistemas analógicos clásicos con la accesibilidad y portabilidad necesarias en entornos contemporáneos.

THAT permite construir y analizar modelos de sistemas dinámicos mediante conexiones físicas entre módulos computacionales básicos, lo que proporciona una experiencia tangible e intuitiva del comportamiento de ecuaciones diferenciales. Su diseño modular y su enfoque práctico la convierten en una herramienta valiosa para comprender la dinámica no lineal, la teoría del caos y el modelado continuo, áreas donde la intuición física y la visualización directa desempeñan un papel crucial.

THAT es una computadora analógica electrónica diseñada para uso de escritorio, cuyo propósito es resolver (conjuntos de) ecuaciones diferenciales. A diferencia de sus contrapartes digitales de programa almacenado, su interfaz de usuario es notablemente distinta, ya que en lugar de teclado, ratón y monitor, cuenta con un panel de conexiones (patch panel). Este panel está dividido en grupos de elementos de cómputo analógico, como integradores, sumadores y multiplicadores. Estos elementos están listados y explicados en la Sección 7. Cada uno tiene una o más entradas y una salida, accesibles mediante conectores tipo jack en el tablero de conexiones. La programación en THAT se realiza conectando estos elementos a través de cables de conexión: cables de un solo hilo con conectores tipo banana en ambos extremos.

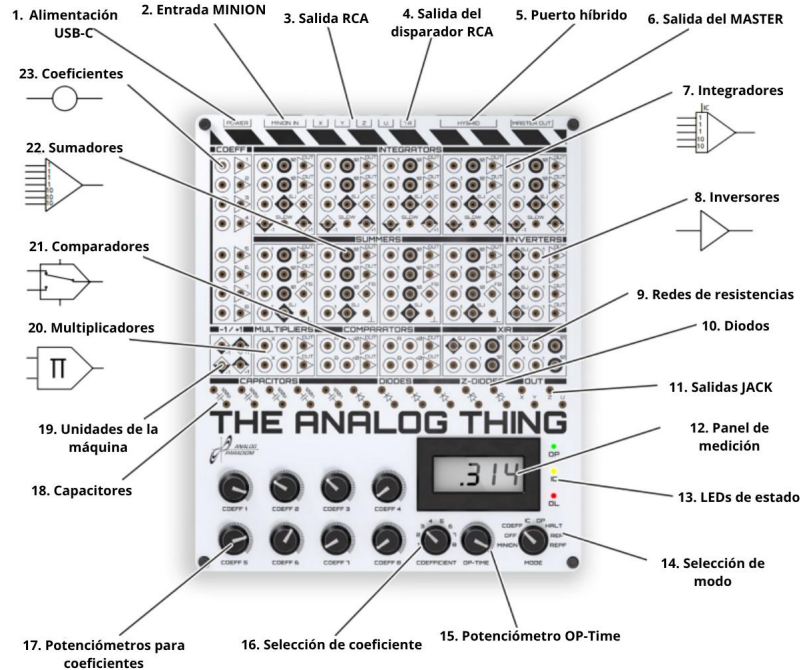


Figura 5.2: Computadora analógica THAT. Se muestra cómo se distribuyen los módulos y se compone la propia computadora.

La salida de cada elemento puede alimentarse a una o más entradas de otros elementos. Sin embargo, cada entrada solo puede recibir una única señal, como la salida de otro elemento. Para resolver ecuaciones diferenciales, las cadenas de elementos conectados deben contener al menos un lazo de retroalimentación cerrado. La retroalimentación alrededor de un integrador permite resolver ecuaciones diferenciales de primer orden; con dos integradores en retroalimentación, se pueden resolver ecuaciones de segundo orden, y así sucesivamente.

THAT representa cantidades mediante voltajes que varían con el tiempo dentro de un rango con límites fijos. Este rango, llamado unidad de máquina, se conceptualiza como de -1 a $+1$. No obstante, el rango real de voltaje que utiliza THAT es de -10 V a $+10$ V. Traducir los patrones de cambio de sistemas dinámicos a ecuaciones diferenciales y luego a conexiones físicas en una computadora analógica implica comúnmente aplicar escalamiento de la velocidad y de las cantidades.

El escalamiento de la velocidad permite comprimir o expandir la variable independiente (el tiempo), típicamente en varios órdenes de magnitud, para que la

5. MODELACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER MODIFICADO

duración de la simulación se ajuste a un intervalo conveniente de observación y medición. De este modo, la descomposición rápida de un compuesto volátil puede simularse a una velocidad más lenta, permitiendo su observación y manipulación; mientras que fenómenos como la dinámica poblacional a lo largo de décadas o siglos pueden simularse en un abrir y cerrar de ojos.

El escalamiento de cantidades consiste en multiplicar uniformemente todos los valores involucrados en una simulación, de forma que el valor más alto se ajuste adecuadamente al intervalo de la unidad de máquina. Por ejemplo, un modelo del tamaño de la población humana mundial, que representa millones de individuos, no requiere millones de voltios, sino que se escala para ajustarse al rango de -1 a $+1$ (es decir, -10 V a $+10$ V).

THAT entrega las soluciones de las ecuaciones diferenciales en forma de voltajes que varían con el tiempo. Estos pueden capturarse mediante una computadora digital conectada para procesamiento posterior, o bien observarse visual y directamente mediante un osciloscopio u otro sistema de visualización similar. Al igual que las computadoras digitales de placa única pueden operar "sin cabeza" (es decir, sin monitor), THAT puede funcionar sin un sistema visual. Sin embargo, especialmente en las primeras etapas de uso, se recomienda utilizar una visualización en tiempo real. La Sección 6 muestra diversas opciones de visualización.

Una vez que THAT está conectada a una fuente de alimentación y a un sistema de visualización, está lista para conectarse o "parchearse". Este proceso suele comenzar con la comprensión de las relaciones cuantitativas presentes en un sistema dinámico, expresadas mediante una o más ecuaciones diferenciales. Esta información guía el desarrollo de un diagrama de conexión (patching diagram) que luego se implementa físicamente en el panel de conexiones de THAT.

Las cantidades ingresan al sistema mediante potenciómetros de coeficientes. Estos se configuran al inicio del proceso de parcheo, conectando la entrada de cada potenciómetro a $+1$, ajustando el selector de modo a COEFF, seleccionando el potenciómetro con el botón selector, monitoreando su salida en el medidor del panel, y girando la perilla del potenciómetro hasta que se obtenga el valor deseado.

Establecer THAT en los modos OP, REP o REPF inicia la simulación para resolver la(s) incógnita(s) de las ecuaciones diferenciales y entregar las soluciones como voltajes que varían con el tiempo, correspondientes al cambio temporal del sistema dinámico modelado. La forma más directa de leer estas soluciones y mani-

pularlas interactivamente es visualizarlas en tiempo real mediante un osciloscopio o una configuración similar.

5.2. Implementación del Circuito en THAT

Antes de comenzar a conectar cualquier cable en la computadora analógica THAT se necesita trabajar el sistema de ecuaciones diferenciales que se quiere manipular en dicha computadora. Así, el sistema Rössler modificado que se ha estudiado en este trabajo también debe normalizarse o escalarse para poder ser correctamente evaluado en la computadora analógica, ya que la magia de la misma es transformar ese lenguaje abstracto en soluciones en función de voltaje que varía en el tiempo. Los sistemas de ecuaciones (4.1) y (4.2) ya analizado en el capítulo anterior toman la siguiente forma una vez ya normalizados:

$$\begin{cases} \dot{x} = -0.8y - 2.3z, \\ \dot{y} = 1.25x + a^*y, \\ \dot{z} = b^* + s_2^*(x - c^*)(z - s_1^*), \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -0.8y - 2.3z, \\ \dot{y} = 1.25x + a^*y, \\ \dot{z} = b^* + s_2^*(x - c^*)(z - s_1^*y), \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $a^* = 0.3012$, $b^* = 0.3987$, $c^* = 0.697$, $s_1^* = 0.0899$, $s_2^* = 0.15$. Con estos nuevos parámetros y la normalización de las ecuaciones ya es posible simularlo con la ayuda de la computadora analógica. Para este proceso es importante tener una guía del cableado para que las conexiones entre las ecuaciones sean más entendibles y, sobre todo, para entender la lógica que hay detrás de las ecuaciones diferenciales con la computación analógica. Es importante hacer notar que cada una de las computadoras THAT cuenta con una pequeña cantidad de integradores y coeficientes, por lo tanto, se requieren dos computadoras THAT para cablear de manera correcta los dos sistemas normalizados. En la segunda THAT se tienen los coeficientes 8 y 9, con sus salidas hacia la primera THAT para terminar las operaciones.

5. MODELACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER MODIFICADO

A continuación, en la figura 5.3 se muestra el diagrama del circuito para la conexión del sistema (5.1) en THAT. La figura 5.2 ayuda a entender los símbolos que aparecen en el diagrama.

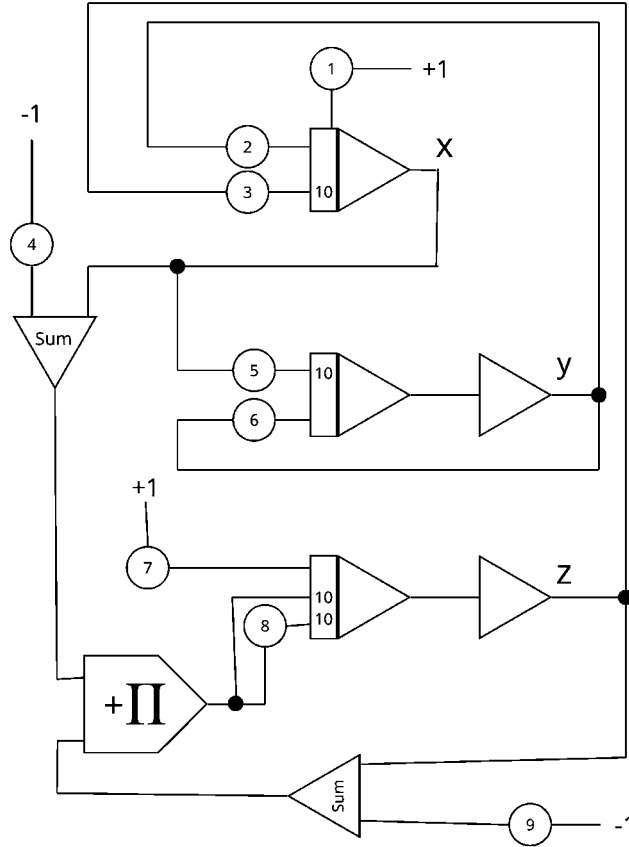


Figura 5.3: Diagrama del circuito para el sistema (5.1).

En el diagrama se observan pequeños círculos que no se muestran en la figura 5.2 como parte de la simbología, pero, esos círculos son la representación de los coeficientes del sistema. Sin embargo, el coeficiente 1 no corresponde a ninguno de los valores en los parámetros en el sistema (5.1) debido a que se trata de la condición inicial con la que se alimenta el sistema y que también podemos variar con el potenciómetro correspondiente de ese coeficiente (los demás parámetros también se pueden variar con sus potenciómetros). Algo muy similar sucede con las unidades de la máquina, que en el diagrama se muestran con $+1$ o -1 (según

sea el caso) y otorgan el signo que se requiere a los coeficientes necesarios.

El cableado se muestra en la figura 5.4. Cada color en los cables ayuda a identificar la dinámica de cada integrador o las operaciones que se están realizando. Así, el color rojo corresponde a la integración de la ecuación $\dot{x}$, los coeficientes que lo alimentan y la salida del mismo integrador. El color azul, es el integrador de la ecuación $\dot{y}$ con sus operaciones que entran y salen. El color verde, con el integrador de la ecuación $\dot{z}$. Por último, el color amarillo son todas las operaciones cruzadas (como las multiplicaciones, sumas o restas) y los coeficientes que nacen solos (antes de entrar a algún integrador u operación). Los dos cables negros son la comunicación entre THAT y el osciloscopio, es decir, son la salida general del sistema.

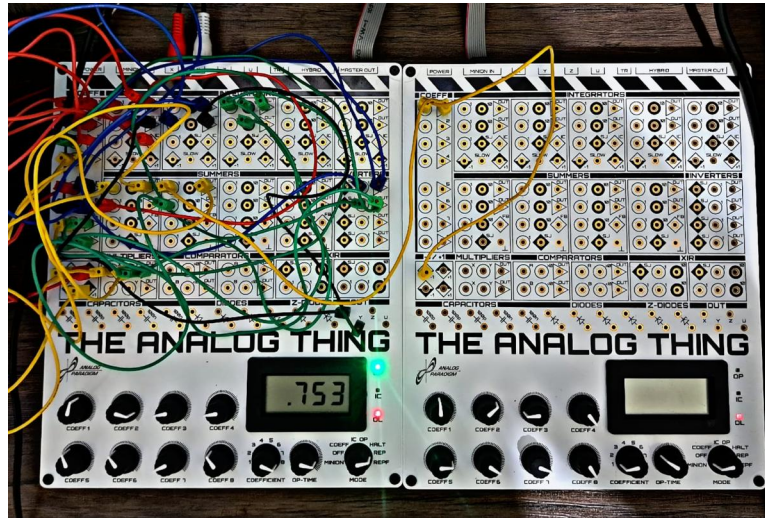


Figura 5.4: Cableado en THAT. Así se verían las conexiones del diagrama 5.3.

Para el sistema (5.2) su diagrama correspondiente se muestra en la figura 5.5. Como la diferencia entre los sistemas solo es el término no lineal que se agrega en la ecuación de z solo se agrega un pequeño puente desde la salida del integrador de la ecuación y (para conservar el signo menos) y el coeficiente 9 relacionado con el parámetro s_1 .

5. MODELACIÓN DEL SISTEMA DE RÖSSLER MODIFICADO

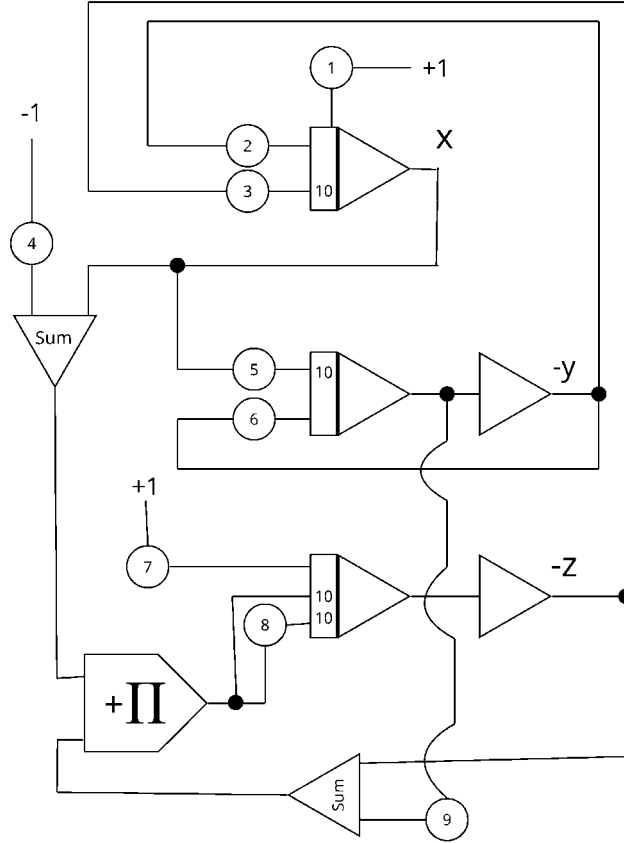


Figura 5.5: Diagrama del circuito para el sistema (5.2).

El cableado del diagrama anterior se muestra en la figura 5.6, donde podemos notar ese puente entre el integrador de la ecuación $\dot{y}$ y el parámetro s_1 .

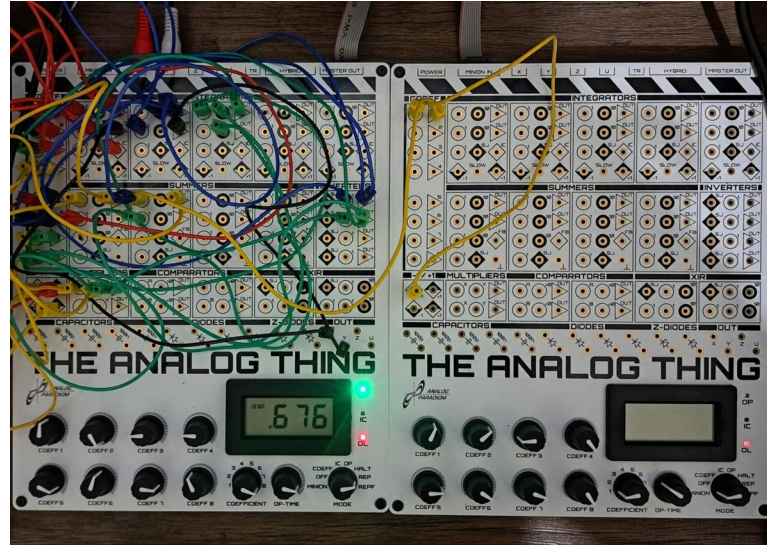


Figura 5.6: Cableado en THAT. Así se verían las conexiones del diagrama 5.5.

5.3. Comparación entre el Sistema, el Circuito en THAT y su implementación

La visualización de los sistemas (5.1) y (5.2) mediante los diagramas y cableados mostrados en la subsección anterior será apoyada por el osciloscopio Hameg HM1507-2 [39] que cuenta con un ancho de banda de 150MHz y una tasa de muestreo de 200MS/s , lo que le permite capturar señales de alta frecuencia con una resolución de hasta 2048 puntos por barrido. Dispone de dos canales para medir señales y una sensibilidad vertical que varía desde 1 mV/div hasta 50 V/div . Su conversión A/D es de 8 bits, lo que garantiza una buena precisión en la visualización de señales. La pantalla CRT de 810cm ofrece una resolución clara, y su interfaz RS-232 permite control remoto y documentación en PC. Además, tiene un calibrador interno que facilita la calibración de las sondas y una memoria de referencia para la comparación de señales.

De esta forma, podemos comparar las simulaciones realizadas en la computadora digital y la señal que nos muestra el osciloscopio procedente de la computadora analógica THAT.

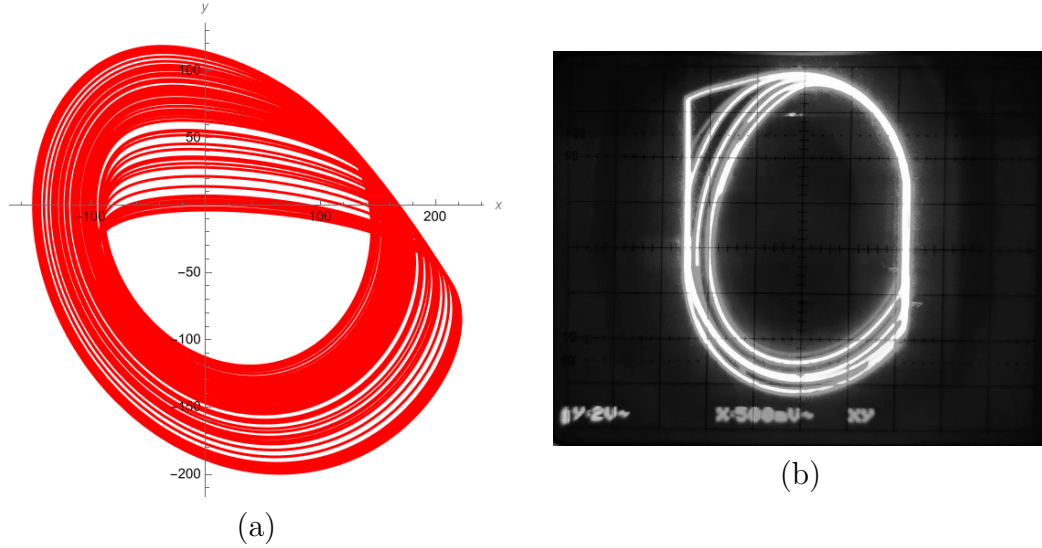


Figura 5.7: Proyecciones en el plano xy . En (a) tenemos la proyección de la simulación y en (b) la proyección dada por la computadora analógica para el (5.1).

De la figura 5.7 podemos apreciar algunas diferencias pero el comportamiento es el mismo. La diferencia en la rotación se debe a la forma en que el osciloscopio procesa la señal, así mismo, por el tiempo de operación en la computadora analógica podemos apreciar la diferencia en el número de las trayectorias.

Algo muy similar sucede en la comparación del sistema con la adición de la función y . Los comportamientos se siguen manteniendo aunque de manera casi incompleta. En la figura 5.8 se notan más las diferencias, en principio, por el tiempo de operación como ocurrió anteriormente, pero también es debido a la naturaleza del sistema que es mucho más inestable que el caso del primer sistema con los parámetros iniciales. En el osciloscopio se muestra estas rupturas de manera rápida que es difícil capturar el momento exacto donde el atractor mpas parecido al atractor.

También se debe mencionar que en la computadora analógica THAT los potenciómetros de los coeficientes se pueden manipular al tiempo que opera la computadora y, con esto, modificar en tiempo real el atractor del sistema de ecuaciones.

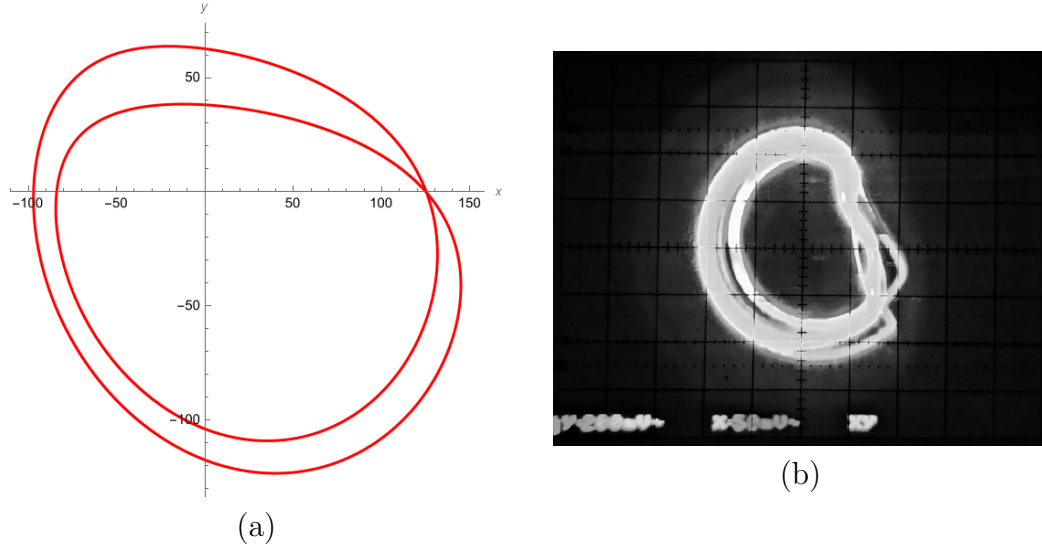


Figura 5.8: Proyecciones en el plano xy . En (a) tenemos la proyección de la simulación y en (b) la proyección dada por la computadora analógica para el sistema (5.2).

5.4. Efectos de los Parámetros del Sistema en las Bifurcaciones

Es sabido que los parámetros en este tipo de sistemas influyen directamente en el comportamiento del atractor que se forma. En particular, al introducir el parámetro s_1 vuelve al sistema sensible a sus cambios, de forma muy similar a como se comporta el sistema original con el parámetro c . Gracias a la computadora analógica podemos ver estos cambios y el impacto que tiene el parámetro s_1 en tiempo real con la visualización del osciloscopio.

A continuación, se muestran dos ejemplos de la dinámica que adquieren los sistemas previamente estudiados al manipular el potenciómetro del parámetro s_1 . En la figura 5.9 se puede apreciar un atractor con dos periodos bien definidos, pero mientras más se van desarrollando las trayectorias estas tienden a juntarse en el centro y forman esa banda ancha más iluminada.

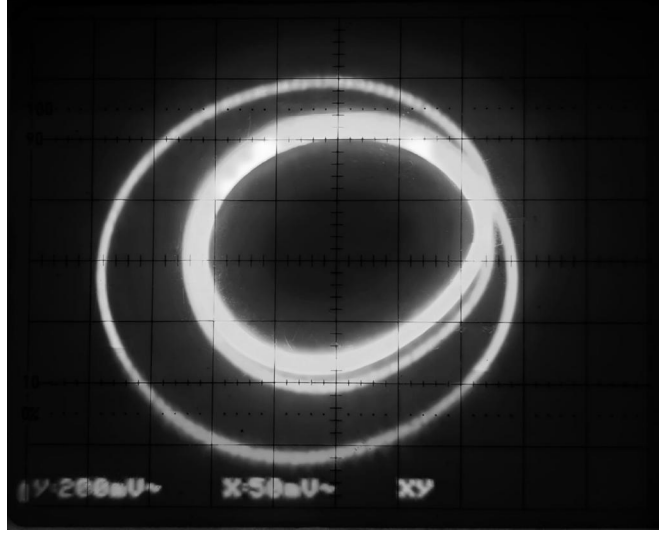


Figura 5.9: Atractor que se forma al manipular el parámetro s_1 en el sistema (5.1). La proyección está sobre el plano xy

Para el sistema (5.2) se obtienen casos más interesantes pero un poco más compeljas de apreciar desde el osciloscopio debido a la complejidad de las ecuaciones. Si estamos en el plano xy al manipular el parámetro s_1 para este caso se obtendrán cosas muy similares a los del sistema (5.1) que se aprecian en la figura anterior. Sin embargo, si se analiza en otro plano, como lo muestra la figura 5.10, veremos un comportamiento más parecido al sistema Rössler que estamos acostumbrados.

Es importante mencionar que en tiempo real al manipular cualquier parámetro se observa como cambian o se construyen las trayectorias en el tiempo de operación que se defina. En el osciloscopio es un poco más sencillo de observar los puntos en el que el sistema empieza a crear bifurcaciones con los parámetros manipulados, pues al funcionar con las variaciones de voltaje, estas bifurcaciones se pueden ver como las descargas del sistema y dan acceso a estados que desaparecen muy rápido pero que son visibles. En THAT es posible ver aún más fino estos estados donde el sistema se estabiliza o queda inestable, pues su modo REPF hace que las apariciones sean más cortas y se repitan en periodos más pequeños. En cambio, con su modo REP solo veremos uno de esos estados, sin embargo, si observamos por un tiempo la pantalla del osciloscopio seremos capaces de apreciar las bifurcaciones del sistema, ya que se queda evaluando en el mismo tiempo, solo que su periodo es más amplio que cuando tenemos la versión rápida.

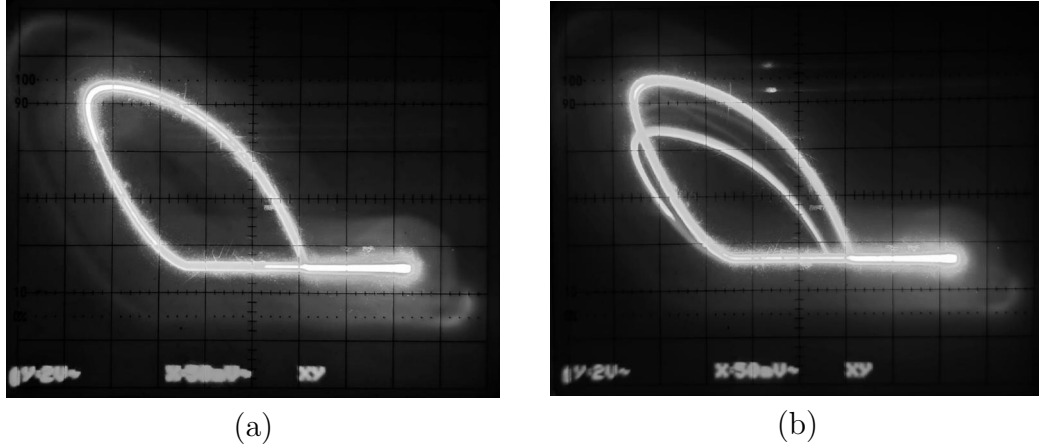


Figura 5.10: Proyecciones en el plano xz . En (a) el parámetro s_1 se mantiene fijo, con el comportamiento característico del sistema. En (b) se observa cómo cambian las trayectorias en periodos bien definidos (aunque con el mismo comportamiento) al manipular el parámetro s_1 .

Estos sistemas son demasiado sensibles a sus parámetros, en especial al parámetro s_1 , por eso mismo es muy difícil mantener el sistema estable en el osciloscopio, ya que el intervalo donde existe el atractor es demasiado pequeño.

Capítulo 6

Discusión de Resultados

Los resultados obtenidos a lo largo del análisis de los sistemas generalizados derivados del modelo de Rössler permiten identificar una serie de características dinámicas que enriquecen considerablemente la comprensión del comportamiento no lineal y caótico en estos modelos. Tanto el sistema generalizado 1, con su término cuadrático en la ecuación de z , como el sistema generalizado 2, que incluye un acoplamiento no lineal adicional con la variable y , exhiben una diversidad de comportamientos que incluyen atractores caóticos, órbitas periódicas, bifurcaciones múltiples, sensibilidad a condiciones iniciales y transiciones abruptas entre regímenes dinámicos. La comparación entre estos modelos, así como la validación empírica mediante computación analógica, ha permitido constatar la influencia que ejercen los parámetros estructurales y funcionales sobre el desarrollo y evolución del sistema.

En el caso del sistema generalizado 1, se identificó que la modificación en la ecuación de z mediante el término $s_2(x - c)(z - s_1)$ introduce una regulación sensible que puede atenuar o amplificar la dinámica caótica. En particular, se observó que para ciertos valores de s_1 y s_2 , el sistema tiende a generar atractores de tipo periódico o cuasiperiódico, con geometrías más ordenadas y trayectorias más confinadas en el espacio de fases. Este fenómeno quedó claramente ilustrado en la Figura 4.1, donde el atractor resultante presenta una forma más controlada y menos dispersa que la del sistema de Rössler clásico. Sin embargo, al modificar los parámetros hacia valores que intensifican la no linealidad, como ocurre en la Figura 4.2, el sistema transita nuevamente hacia un régimen de caos, incrementando la complejidad del atractor y la cantidad de trayectorias visibles.

Este comportamiento fue confirmado mediante el análisis de los exponentes de Lyapunov. La presencia de un exponente positivo, aunque pequeño, en el primer conjunto de parámetros, sugiere un caos débil o cercano a una transición bifurcacional. Por el contrario, en el segundo conjunto de parámetros utilizados, se identificó un exponente positivo más elevado, con un espectro típico de sistemas caóticos tridimensionales. Esta evolución en el grado de caos también se reflejó en los diagramas de bifurcación obtenidos al variar el parámetro s_1 . Dichos diagramas, como los presentados en las Figuras 4.5 y 4.6, revelan transiciones ordenadas de tipo periodo-doblamiento, aparición de ventanas periódicas, bandas caóticas densas y regiones fractales, lo que demuestra la capacidad del sistema para generar dinámicas altamente sensibles y estructuradas conforme se varía un solo parámetro de control.

La representación geométrica de estas transiciones fue reforzada por el uso de secciones de Poincaré, las cuales permitieron observar la distribución de puntos en el plano xz a partir de intersecciones sucesivas con un hiperplano transversal. Las secciones obtenidas para el sistema generalizado 1, tanto en sus versiones con bajo y alto nivel de caos, mostraron estructuras densas, no periódicas y con patrones claramente caóticos, en coherencia con el comportamiento esperado de un atractor extraño.

En el caso del sistema generalizado 2, la dinámica resultó aún más rica y compleja. La introducción del término $s_2(x - c)(z - s_1y)$ en la ecuación de z provoca una retroalimentación cruzada entre las tres variables del sistema, lo que tiene como efecto una amplificación del caos, mayor sensibilidad a condiciones iniciales y una topología más intrincada del atractor. Esto se observó claramente en la Figura 4.9, donde el atractor resultante muestra una estructura expandida y retorcida, en comparación con los casos anteriores. El análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio también mostró que, en este caso, ambos puntos son inestables, lo que contrasta con el sistema generalizado 1, donde uno de los puntos era localmente estable. Esta pérdida de estabilidad refuerza la idea de que el sistema tiende, de forma natural, a una dinámica no periódica y dispersa.

Los exponentes de Lyapunov correspondientes a este sistema confirmaron esta intuición: se identificaron valores positivos más elevados para el mayor exponente, lo cual indica una divergencia más rápida de trayectorias cercanas, reflejo de un caos más robusto. Además, se mantuvo la estructura típica de un sistema caótico tridimensional, con un exponente positivo, uno cercano a cero y otro fuertemente negativo. La suma negativa del espectro refuerza la conclusión de que el sistema

6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

es disipativo, característica clave para la formación de atractores extraños.

Los diagramas de bifurcación generados para el sistema generalizado 2 mostraron una mayor diversidad de comportamientos conforme se manipuló el parámetro s_1 . A diferencia del sistema anterior, en este caso las transiciones al caos no solo se produjeron mediante duplicaciones de periodo, sino también a través de crisis internas y ventanas de comportamiento estacionario que anticipaban nuevas fases caóticas. Las Figuras 4.13 y 4.14 ilustran estas diferencias: en el segundo caso, además del caos tradicional, se observaron zonas donde el sistema permanecía casi estático, seguido por un estallido repentino de trayectorias complejas, lo que refleja una transición abrupta entre fases cualitativamente distintas.

Este tipo de transiciones dinámicas fue también capturado en las secciones de Poincaré correspondientes. En el primer conjunto de parámetros del sistema generalizado 2, la sección mostró bandas anchas, estructuras trenzadas y una organización fractal típica de caos determinista. Sin embargo, con el segundo conjunto de parámetros, la figura cambió drásticamente, presentando una nube de puntos más ordenada y agrupada en curvas, lo que sugiere una transición hacia una dinámica cuasiperiódica o incluso periódica. Estas observaciones refuerzan la noción de que el sistema generalizado 2 no solo permite un caos más fuerte, sino también mayor diversidad estructural, dependiendo de la elección de los parámetros.

Una aportación destacada de este trabajo fue la implementación experimental de ambos sistemas en una computadora analógica moderna, THE ANALOG THING. Esta implementación permitió validar empíricamente los resultados obtenidos por simulación digital, además de ofrecer una herramienta de exploración en tiempo real de la sensibilidad del sistema a parámetros como s_1 . Las proyecciones sobre el plano xy , obtenidas tanto por simulación como por el osciloscopio conectado a THAT, evidenciaron un alto grado de similitud en el comportamiento general, aunque con pequeñas variaciones atribuibles a la duración del experimento, a la rotación de señales y a la resolución visual del sistema. Las Figuras 5.7 y 5.8 muestran estas correspondencias, destacando que, en ambos casos, la forma del atractor es conservada, incluso cuando hay diferencias en densidad o simetría.

Además de servir como herramienta de verificación, THAT permitió visualizar bifurcaciones en tiempo real mediante la manipulación directa de potenciómetros. El parámetro s_1 , cuya influencia se había evidenciado teóricamente como crítica, pudo ser modificado dinámicamente, permitiendo observar cómo el sistema tran-

sicionaba entre distintas fases, incluso detectando rupturas súbitas en el patrón de trayectorias. La figura 5.9 es un ejemplo claro de cómo se puede observar el surgimiento de bandas amplias a partir de trayectorias con periodicidad definida. Asimismo, en la figura 5.10 se documenta cómo el análisis en diferentes planos permite descubrir atractores con mayor similitud al sistema de Rössler original, al ajustar los parámetros en tiempo real.

Este enfoque experimental aportó evidencia visual directa de la sensibilidad del sistema y del carácter caótico de sus soluciones. En particular, se evidenció que pequeños cambios en el parámetro s_1 podían generar bifurcaciones notorias, transiciones hacia estados más ordenados o inestables, y fenómenos de ruptura que solo pueden detectarse observando la dinámica a través de un osciloscopio. El uso de modos como REP o REPF permitió identificar estos estados con mayor claridad o en ciclos repetitivos, respectivamente, enriqueciendo la comprensión de las trayectorias transitorias y de las fases críticas del sistema.

En conjunto, el estudio realizado demuestra que las generalizaciones propuestas al sistema de Rössler, tanto en sus versiones con término cuadrático como con acoplamiento cruzado, permiten no solo reproducir comportamientos caóticos conocidos, sino también generar nuevas formas de atractores, nuevas rutas hacia el caos, y estructuras dinámicas más versátiles. Además, la posibilidad de implementar estos sistemas en una computadora analógica moderna permitió validar los resultados obtenidos por métodos numéricos, así como explorar de forma experimental las bifurcaciones y transiciones de fase inducidas por parámetros clave del modelo.

Finalmente, cabe introducir una propiedad que ha sido observada en algunos de los experimentos pero que requiere un estudio más profundo: la multiestabilidad [40]. Este fenómeno se refiere a la coexistencia de múltiples atractores en el sistema bajo los mismos parámetros, donde diferentes condiciones iniciales pueden llevar a trayectorias que convergen hacia distintos regímenes dinámicos [41]. La multiestabilidad implica que el sistema posee varias soluciones estables simultáneas, y que la elección del estado final depende de la historia del sistema, es decir, de sus condiciones iniciales. Este tipo de comportamiento no solo añade complejidad al análisis teórico, sino que plantea desafíos en la predicción y control de sistemas reales, ya que pequeños cambios pueden llevar a resultados cualitativamente distintos [42]. Con esto en mente, se abordará con mayor detalle este fenómeno y se explorarán condiciones específicas bajo las cuales aparece.

6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Se toma el sistema (4.1). Primero, es importante revisar el atractor generado por el nuevo conjunto de parámetros $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c = 69.74$, $s_1 = -100$, $s_2 = 1/177 * 7.17$, cambiando las condiciones iniciales. En la figura 6.1 se observa el nuevo atractor.

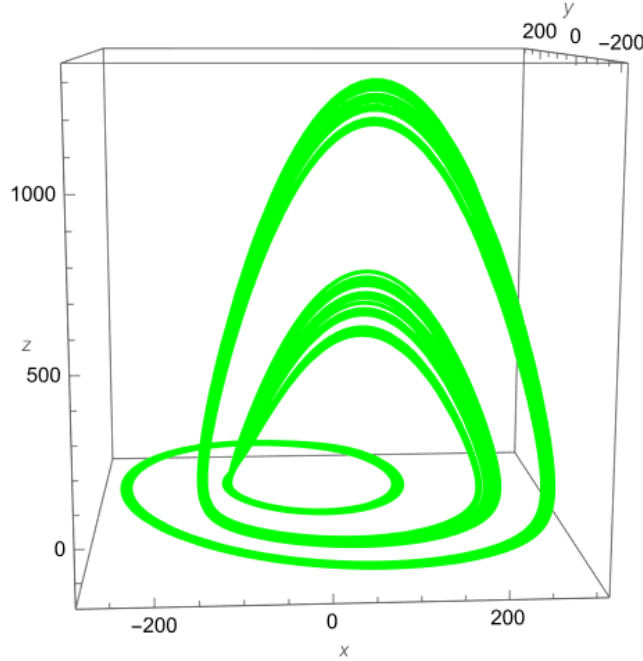


Figura 6.1: Atractor del sistema (4.1). Se considera: $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c=69.7$, $s_1 = -100$ y $s_2 = 7.17(1/177)$, con condiciones iniciales $x(0) = -1.2$, $y(0) = -50$, $z(0) = -50$

Este nuevo atractor tiene el comportamiento que se ha estudiado a lo largo de este trabajo, sin embargo, la manera en la que se agrupan sus periodos difiere de los vistos con anterioridad. Se nota más organizado pero con espacios vacíos considerables. Este tipo de trayectorias podría ser un indicador de multiestabilidad, ya que sugiere la presencia de otro atractor que en algún momento termine completando esos espacios que existen entre los periodos.

Entonces, siguiendo esta idea de multiestabilidad ahora se cambia el conjunto de condiciones iniciales manteniendo los parámetros del sistema exactamente igual. Esto con la finalidad de asegurar que se trata del mismo atractor y poder detectar

diferencias inmediatas en caso de tenerlas. En la figura 6.2 se muestra el atractor del mismo sistema ahora cambiando sus condiciones iniciales.

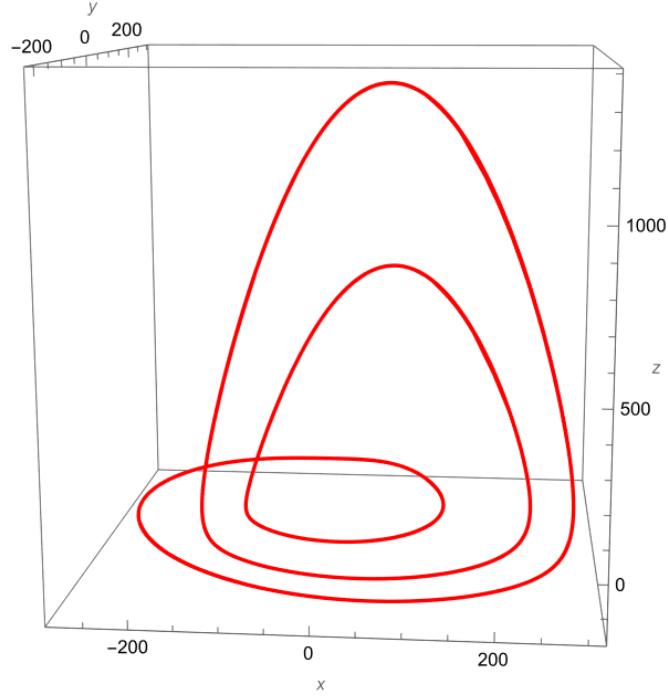


Figura 6.2: Atractor del sistema (4.1). Se considera: $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c=69.7$, $s_1 = -100$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ y condiciones iniciales $x(0) = -1.055$, $y(0) = -0.11$, $z(0) = -10$

Es evidente que este nuevo atractor, a pesar de seguir el mismo comportamiento como el atractor anterior, presenta diferencias en sus periodos ya que son más definidos y no caóticos como el primer caso. Para visualizar la coexistencia de los atractores basta con sobreponer ambos en el mismo gráfico, como en la figura 6.3

En algunos puntos, las trayectorias del segundo atractor (el atractor de color rojo) parecen unirse al primer atractor, sin embargo, no es así. Los dos atractores siguen trayectorias distintas y con sus propias dinámicas a pesar de que se trata del mismo atractor por sus parámetros iguales, solo varían desde donde empieza cada atractor.

Esto no significa que si nosotros damos otro conjunto distinto de condiciones ini-

6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

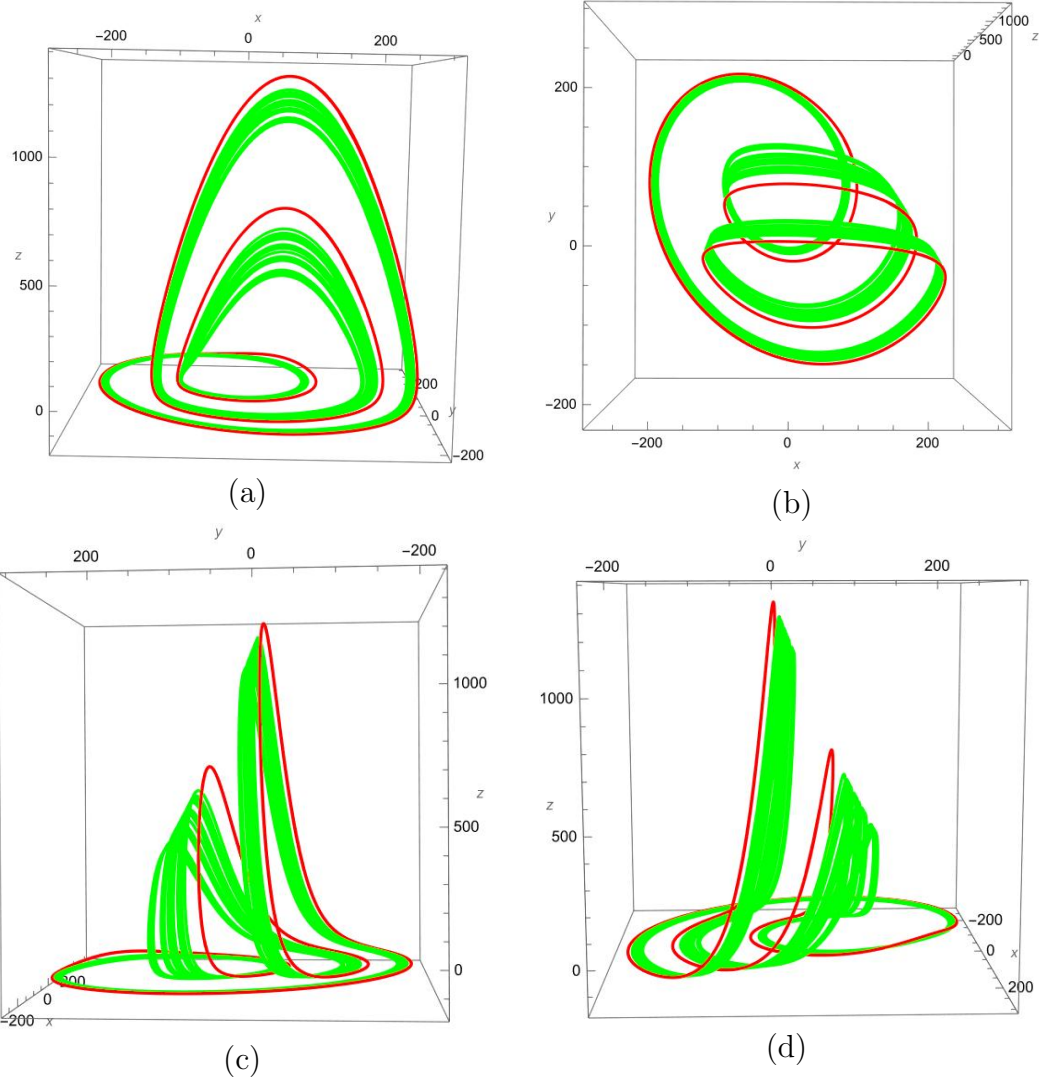


Figura 6.3: Coexistencia de los atractores del sistema (4.1) donde el atractor verde tiene condiciones iniciales $x(0) = -1.2, y(0) = -50, z(0) = -50$ y el atractor rojo $x(0) = -1.055, y(0) = -0.11, z(0) = -10$. En (a) la proyección en el plano xz de frente, (b) en el plano xy desde arriba, (c) y (d) en los planos zy de los costados.

ciales siempre tendremos multiestabilidad. Solo sucede en casos muy específicos y sobre ciertos rangos, aunque, es verdad que si damos algún otro conjunto de condiciones iniciales a tiempos cortos en la evolución del atractor podremos apreciar dos comportamientos distintos, pero no se trata de multiestabilidad, es la natu-

raleza de las condiciones iniciales; el atractor se comienza a generar en distintos puntos, a veces desde el centro, otras veces desde la periferia del mismo, incluso iniciando con dos o más trayectorias. Pero al evaluar por más tiempo todas estas trayectorias se convierten en el mismo atractor.

si revisamos el diagrama de bifurcación podemos notar cosas interesantes [43]. Primero, en la figura 6.4 se muestra el diagrama de bifurcación del atractor 6.1. Posteriormente, la figura ?? corresponde al diagrama de bifurcación del atractor 6.2.

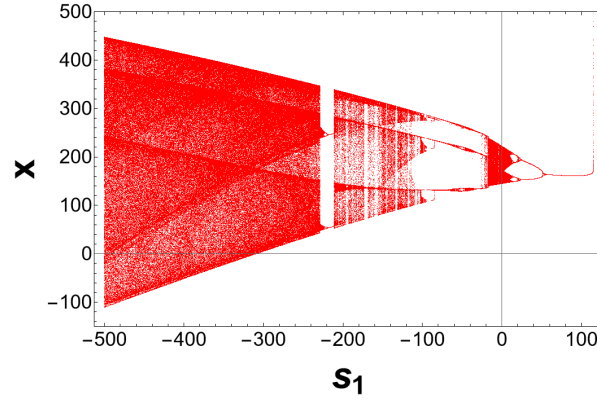


Figura 6.4: Diagrama de bifurcación del atractor 6.1. Consideramos: $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c=69.7$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ y condiciones iniciales $x(0) = -1.2, y(0) = -50, z(0) = -50$.

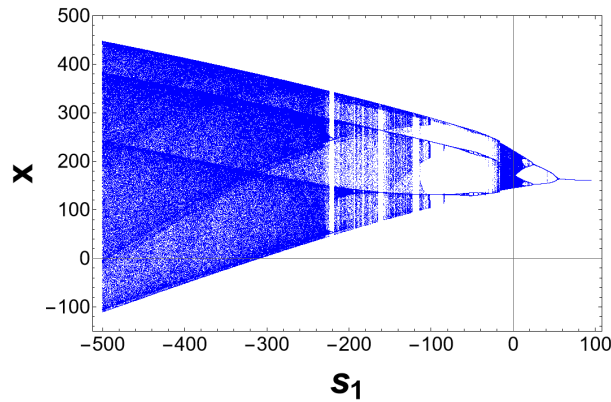


Figura 6.5: Diagrama de bifurcación del atractor 6.2. Consideramos: $a = 0.323012$, $b = 1.98740002$, $c=69.7$ y $s_2 = 7.17(1/177)$ y condiciones iniciales $x(0) = -1.055, y(0) = -0.11, z(0) = -10$.

6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A simple vista parecen el mismo diagrama, incluso, se parecen a los analizados en la sección 4.2.2 porque se trata del mismo sistema. Si se presta atención sí hay diferencias sutiles sobre todo en donde se muestran los períodos, las zonas estables del sistema. Una vez más, si se sobreponen (6.6) los dos diagramas de bifurcación se hacen notorias las diferencias que tiene uno sobre el otro.

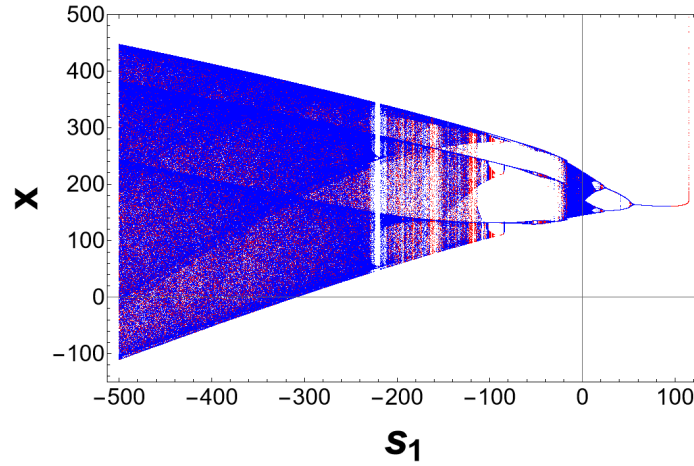


Figura 6.6: Diagrama de bifurcación de los dos atractores. En color rojo el diagrama de bifurcación del atractor 6.1 y en azul el diagrama de bifurcación del atractor 6.2.

Cuando los dos diagramas se encuentran juntos se aprecia mejor la manera en la que se comportan. Se observa fácilmente las zonas donde un diagrama complementa al otro y aquí es donde se puede revisar la multiestabilidad. En particular, los dos atractores están evaluados en el parámetro $s_1 = -100$ porque este parámetro es muy notable en los diagramas de bifurcación. Al analizar con detalle el diagrama 6.6, cuando $s_1 = -100$ los atractores toman comportamientos distintos, siendo el primero un poco más caótico que el segundo y que coincide con los períodos que se muestran con cada uno. De esta manera se determina la multiestabilidad desde el comportamiento general al determinar el diagrama de bifurcación para el parámetro de estudio.

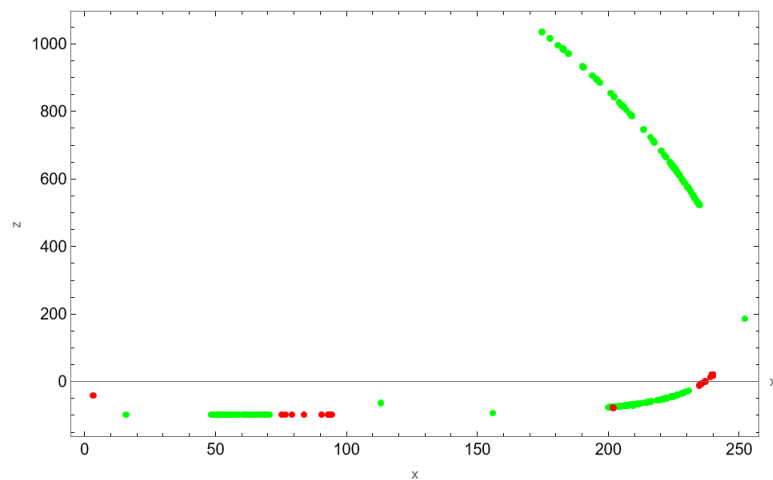


Figura 6.7: Sección de poincaré de de la figura 6.3 donde coexisten los dos atractores.

La figura 6.7 muestra la sección de Poincaré cuando los atractores coexisten (figura 6.3). Es más sencillo determinar que las trayectorias no se unen ni se cruzan en ningún momento, aunque hay lugares donde se acercan bastante.

Capítulo 7

Conclusiones

El presente trabajo se ha centrado en el estudio y análisis de una generalización al modelo clásico de Rössler, incorporando nuevos parámetros y un término no lineal con el propósito de explorar con mayor profundidad las propiedades caóticas, las bifurcaciones, las trayectorias y, en particular, la sensibilidad a condiciones iniciales que caracteriza a los sistemas tridimensionales no lineales. A través de una metodología que combinó simulación numérica, análisis teórico y validación experimental mediante una computadora analógica, se logró caracterizar con detalle la complejidad dinámica de estas generalizaciones.

Uno de los logros más importantes de este trabajo fue demostrar que pequeñas modificaciones en la estructura del sistema original, como la inclusión de términos cuadráticos o acoplamientos cruzados con otras variables, son suficientes para generar una rica variedad de fenómenos dinámicos, muchos de ellos ausentes en el sistema de Rössler original. A través del análisis del sistema (4.1), en donde se introduce un término de la forma $s_2(x - c)(z - s_1)$, se observó que esta forma de retroalimentación permite al sistema transitar entre comportamientos caóticos, cuasiperiódicos y periódicos de una manera más estructurada, dando lugar a atractores con una geometría más definida y con bandas caóticas que se organizan de manera particular en el espacio de fases. Este sistema resultó ser un punto intermedio entre la simplicidad del modelo clásico y la complejidad de nuevas formas caóticas inducidas en la ecuación de evolución de z .

Por otro lado, el sistema (4.2), con un acoplamiento adicional dependiente de la variable y en la forma $s_2(x - c)(z - s_1y)$, mostró una dinámica considerablemente más compleja, donde el caos se vio amplificado y las trayectorias adquirieron

mayor sensibilidad a las condiciones iniciales. La estructura de los atractores generados en este sistema evidenció comportamientos más complejos, con trayectorias densamente trenzadas y regiones de transición abrupta entre fases estables y caóticas. Asimismo, se detectaron zonas en los diagramas de bifurcación donde el sistema experimenta cambios drásticos de comportamiento ante variaciones mínimas en los parámetros, lo cual representa un hallazgo significativo sobre la forma en que ciertas modificaciones estructurales del sistema original pueden conducir a nuevas rutas hacia el caos.

El análisis de estabilidad, tanto local como global, mostró que en estas generalizaciones es posible encontrar puntos de equilibrio con distintas naturalezas: algunos estables, otros tipo silla, y otros completamente inestables, dependiendo de los valores de los parámetros. Este tipo de estructura de equilibrio, junto con el estudio detallado de los exponentes de Lyapunov, permitió cuantificar con precisión la expansión del caos en ambos modelos. Se verificó que en todos los casos analizados, al menos uno de los exponentes es positivo, lo que certifica la presencia de caos determinista, mientras que la suma negativa de los exponentes confirma que los sistemas son disipativos, es decir, que sus trayectorias convergen hacia un atractor en el espacio de fases.

Una contribución clave de este trabajo fue la validación experimental mediante el uso de la computadora analógica THE ANALOG THING (THAT). Esta implementación permitió observar de manera física las trayectorias del sistema en tiempo real, así como explorar las bifurcaciones y transiciones de fase ajustando directamente los potenciómetros que controlan los parámetros del modelo. Las trayectorias obtenidas de esta forma coincidieron de forma notable con las obtenidas numéricamente, validando así los resultados de las simulaciones digitales y demostrando la viabilidad de estudiar sistemas dinámicos complejos con herramientas analógicas. Esta validación experimental representa un aporte metodológico valioso, ya que permite visualizar de manera tangible las dinámicas caóticas y explorar fenómenos que, en simulación digital, podrían pasar desapercibidos por restricciones de visualización, resolución o tiempo de integración.

Uno de los hallazgos más sobresalientes surgió en la última etapa del análisis, al identificar evidencia clara de multiestabilidad en el sistema generalizado 1. Este fenómeno, caracterizado por la coexistencia de múltiples atractores bajo un mismo conjunto de parámetros pero con distintas condiciones iniciales, añade una capa de complejidad significativa al estudio de sistemas no lineales. La coexistencia de dos atractores con trayectorias diferentes, geometría particular y diagramas de

7. CONCLUSIONES

bifurcación con regiones que se complementan, demuestra que el sistema puede responder de manera distinta a perturbaciones iniciales. Este comportamiento no solo complica el análisis teórico y la predicción de estados futuros, sino que abre nuevas líneas de estudio respecto al control de trayectorias, la ingeniería de atractores y la manipulación intencionada del estado final de un sistema para aplicaciones en ciencias físicas, químicas o biológicas.

Desde una perspectiva más amplia, el presente trabajo constituye una aportación original al conocimiento en el estudio de sistemas dinámicos no lineales. Aunque el sistema de Rössler ha sido ampliamente estudiado, las generalizaciones propuestas aquí no habían sido analizadas previamente. La incorporación de términos no triviales, el estudio sistemático de sus parámetros, la validación experimental con dispositivos analógicos y la identificación de fenómenos complejos como la multiestabilidad hacen de este trabajo importante en el estudio de las generalizaciones del tipo Rössler.

Las aplicaciones de estos hallazgos son múltiples. Por ejemplo, la multiestabilidad y la sensibilidad a condiciones iniciales pueden ser útiles en el diseño de sistemas de codificación o cifrado caótico, donde distintas trayectorias pueden representar diferentes canales de información bajo las mismas reglas dinámicas. También, la estructura rica en bifurcaciones y ventanas periódicas podría utilizarse en sistemas de detección o predicción donde pequeños cambios en entradas o parámetros generen saltos entre regímenes que sean detectables. Adicionalmente, el uso de THAT como plataforma educativa y experimental representa una herramienta didáctica poderosa para introducir de manera visual conceptos como atractores extraños, los propios sistemas dinámicos, el impacto histórico del desarrollo de la computación así como la resolución de problemas reales y las ventajas tecnológicas que conlleva.

Finalmente, este estudio deja abiertas diversas líneas de investigación futuras. Entre ellas destacan: (1) el análisis detallado del espacio de parámetros para identificar regiones de coexistencia de múltiples atractores; (2) la aplicación de técnicas de control de caos sobre las trayectorias para inducir o suprimir comportamientos deseados; (3) la incorporación de ruido o perturbaciones externas para estudiar la robustez de los atractores encontrados; (4) la implementación de estas generalizaciones en circuitos electrónicos reales más allá de THAT, y (5) la exploración del impacto que tendrían estas modificaciones en sistemas físicos, biológicos o de ingeniería modelados a partir del sistema de Rössler.

En conclusión, el estudio desarrollado demuestra que, a partir de pequeñas pero bien dirigidas modificaciones al sistema de Rössler, es posible acceder a una gama muy amplia de comportamientos dinámicos. Estas nuevas estructuras permiten no solo comprender mejor los fundamentos del caos determinista, sino también construir puentes hacia aplicaciones experimentales, educativas y tecnológicas que aprovechen la riqueza de los sistemas dinámicos no lineales.

Bibliografía

- [1] G. Conde and G. M. Ramírez. Estudio de dos circuitos caóticos. *Revista Boliviana de Física*, 13:58–74, 2007. [1](#)
- [2] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCE*, 1963. [1](#)
- [3] Takahashi Matsumoto. A chaotic attractor from chua’s circuit. *IEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS VOL. CAS-31, NO. 12*, 1984. [1](#)
- [4] Otto E. Rössler. Chemical turbulence: Chaos in a simple reaction-diffusion system. *Z.Naturforsch.* 31a, pages 1168–1172, 1976. [1](#)
- [5] Balth. van der Pol. Lxxxviii. on “relaxation-oscillations”. *Philosophical Magazine Series 7, 2:11*, pages 978–992, 1926. [1](#)
- [6] G. Duffing. *Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigenfrequenz und ihre technische bedeutung*. Series: Sammlung Vieweg, No 41/42. Vieweg Sohn, Braunschweig, 1983. [1](#)
- [7] J. D Murray. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer, 2002. [1](#)
- [8] José Fernando Izaza Delgado and Diógenes Campos Romero. *Ecología: una mirada desde los sistemas dinámicos*. Editorial Pontificia Universidad Javeriana, 2006. [1](#)
- [9] E. M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. MIT Press, 2007. [2](#)

- [10] O. E. Rössler. Different types of chaos in two simple differential equations. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 31:1664–1670, 1976. [2](#)
- [11] A. N. Pisarchik, R. Jaimes-Reátegui, and J.H García-López. Synchronization of multistable systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18, 2008. [4](#)
- [12] A. N. Pisarchik and Jaimes-Reátegui. *Journal of Physics: Conference Series*, 23, 2005. [4](#)
- [13] Antonio Algaba, Emilio Freire, Estanislao Gamero, and Alejandro J. Rodríguez-Luis. Resonances of periodic orbits in rössler system in presence of a triple-zero bifurcation. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2007. [4](#)
- [14] A. C. Fowler and M. J. McGuinness. Bursting solutions of the rössler equations. *Cambridge University Press*, 2023. [5](#)
- [15] M. W. Hirsh and S. Smale. *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra Lineal*. Alianza Editorial, 1983. [8](#)
- [16] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vectors Fields*. Springer, 1983. [10](#)
- [17] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002. [15](#)
- [18] J. C. Sprott. *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press, 2003. [17](#)
- [19] O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters*, 1976. [19](#)
- [20] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2018. [19](#)
- [21] Eran Igra. One-dimensional dynamics and the rössler attractor. *arXiv pre-print arXiv:2312.13840*, 2023. [20](#)
- [22] J. D. Crawford. Introduction to bifurcation theory. *Reviews of Modern Physics*, 63(4):991–1037, 1991. [25](#)
- [23] R. Barrio, S. Serrano, F. Blesa, and O. Serrano. Topological structures in the bifurcation diagram of the rössler system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(11):3631–3644, 2005. [25](#)

- [24] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317, 1985. [28](#)
- [25] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9(1-2):189–208, 1983. [28](#)
- [26] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001. [29](#)
- [27] J. B. Dingwell and J. P. Cusumano. Lyapunov exponents and local dynamic stability in human walking. *Nonlinear Dynamics*, 43:29–51, 2006. [37](#)
- [28] L. Young. Mathematical theory of lyapunov exponents. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2013. [37](#)
- [29] E. S. Cheb-Terrab and J. Roche. Lie symmetry analysis of systems of second-order differential equations. *Computer Physics Communications*, 98:15–27, 1996. [44](#)
- [30] K. Murthy, P. Sorjitra, A. Rahman, I. Jordan, and D. Blackmore. Generalized attracting horseshoe in the rossler attractor. 2018. [44](#)
- [31] M. Small. *Applied Nonlinear Time Series Analysis: Applications in Physics, Physiology and Finance*. World Scientific, 2005. [67](#)
- [32] William Aspray. *John von Neumann and the Origins of Modern Computing*. MIT Press, 1990. [67](#)
- [33] T. Owen. *Analog and Hybrid Computing*. Adam Hilger, 1991. [67](#)
- [34] David A. Mindell. *Between Human and Machine: Feedback, Control, and Computing before Cybernetics*. Johns Hopkins University Press, 2002. [67](#)
- [35] A. Vergis, K. Steiglitz, and B. Dickinson. The complexity of analog computation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 28(6):497–510, 1986. [68](#)
- [36] B. J. MacLennan. A review of analog computing. Technical report, Department of Electrical Engineering and Computer Science, 2007. [68](#)
- [37] Bruce J. MacLennan. Unconventional computing: A historical overview. In *Proceedings of the 1st International Workshop on Unconventional Computing*, 2004. [71](#)

- [38] anabrid. The analog thing - first steps, 2023. [72](#)
- [39] Hameg Instruments. Manual oscilloscope hm1507-2, 1998. [79](#)
- [40] Roberto Barrio, Fernando Blesa, and Sergio Serrano. Topological changes in periodicity hubs of dissipative systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(3):033119, 2012. [87](#)
- [41] C. A. Ramos, J. R. Pulido, N. R. Cazares, and J. A. López. *Multi-Scroll Attractors and Multi-Stability Gnerated Via Fractional-Order Switching Linear Systems*. Congreso Nacional de Control Automático, 2023. [87](#)
- [42] E. E. Colón Hernández. Estudio de una clase de sistemas con dinámica inestable para la generación de multiestabilidad. *Posgrado en Control y Sistemas Dinámicos, Insituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica*, 2019. [87](#)
- [43] R. Barrio, S. Serrano, and F. Blesa. Qualitative analysis of the rossler equations: Bifurcations of limit cycles and chaotic attractors. *Physica D: Non Linear Systems*, 238:1087–1100, 2009. [91](#)

Adrián Alonso López

GENERALIZACION DE RÖSSLER CON MULTIESTABILIDAD.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:478608198

Fecha de entrega

5 ago 2025, 1:31 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

5 ago 2025, 1:34 p.m. GMT-6

Nombre de archivo

GENERALIZACION DE RÖSSLER CON MULTIESTABILIDAD.pdf

Tamaño de archivo

4.9 MB

113 Páginas

25.878 Palabras

138.861 Caracteres

10% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 10%  Fuentes de Internet
- 4%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

31 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias en Ingeniería Física	
Título del trabajo	GENERALIZACIÓN DE SISTEMA RÖSSLER CON MULTIESTABILIDAD	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Adrián Alonso López	adrian.alonso.lopez@umich.mx
Director	Joaquin Estévez Delgado	joaquin.estavez@umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Dagoberto Cardona Ramírez	dagoberto.cardona@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	Sí	Para eliminar muletillas.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	Sí	En las especificaciones y descripción de la computadora analógica THE ANALOG THING (THAT).
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	Sí	Para las citas correctas y automatizar la bibliografía que tenía disponible durante la investigación. Esto para hacer buen uso de LATEX y citar más sencillo en el escrito.
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Adrián Alonso López
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, 05 de agosto de 2025