



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**



INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

“De Fusiones Binarias a Vórtices Estacionarios: Estructuras con Momento Angular en Materia Oscura Bosónica y su Impacto Sobre un Gas Ideal”

Tesis que para obtener el título de Maestro en
Ciencias en el Área de Física

Presenta:

Carlos Alberto Tena Contreras

Asesor:

Dr. Francisco Shidarth Guzmán Murillo

Co-asesor:

Dr. Iván Margarito Álvarez Ríos

A Miriam.

*Sé que no ha sido fácil el camino,
pero cada paso habrá valido la pena
cuando veamos realizado
aquello que siempre soñamos.*

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Miriam y Javier. Ustedes son mi principal fuente de inspiración. Gracias a ustedes, día con día trabajo con esfuerzo para ser una mejor versión de mí. Los amo siempre.

A mi familia: mi madre Arcelia, mis hermanos Alejandro y Ricardo, y mi padre Carlos. Estuvieron en todo momento a mi lado; a pesar de que el camino ha sido largo, siempre sentí su apoyo y amor incondicional.

Al Dr. Francisco Shidarth Guzmán Murillo, por la oportunidad de trabajar y aprender en el grupo de Física Computacional. Su experiencia y orientación contribuyeron significativamente a mi desarrollo académico.

A mi buen amigo el Dr. Iván, por los conocimientos brindados, así como por los consejos y comentarios que fortalecieron mi formación académica. Pero, sobre todo, por el apoyo emocional y por creer en mí desde el principio.

A mis compañeros y amigos: Daniela, Pedro, Dania, Flavio y Curicaveri, por los debates, los consejos y la amistad brindada.

A mis sinodales: Dr. José Antonio González Cervera, Dr. Umberto Cotti Gollini y Dr. Cederik León de León Acuña. Gracias por sus comentarios y aportaciones a este trabajo.

Agradezco a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y al Instituto de Física y Matemáticas por brindarme los recursos y el entorno necesarios para el desarrollo de este trabajo.

También agradezco a la SECIHTI por el financiamiento recibido durante mis estudios de posgrado, cuyo respaldo fue crucial para la realización de este proyecto.

Publicaciones

Durante el desarrollo de esta tesis se generaron los siguientes artículos académicos:

1. Iván Álvarez Ríos, **Carlos Tena-Contreras**, Francisco S. Guzmán.
Kinematic Imprints of vortex-lines of BEC Dark Matter on Baryonic Matter.
arXiv:2506.17535, (2025).
<https://arxiv.org/abs/2506.17535>
2. **Carlos Tena-Contreras**, Iván Álvarez Ríos, Francisco S. Guzmán.
Construction of ground state solutions of the Gross-Pitaevskii-Poisson system using genetic algorithms.
arXiv:2504.03934, (2024).
<https://arxiv.org/abs/2504.03934>
3. **Carlos Tena-Contreras**, Iván Álvarez Ríos, Francisco S. Guzmán.
Formation and Evolution of Soliton Cores in BECDM: Analysis of Mass Ratios and Density Profiles from Binary Merger Models.
Manuscrito en preparación.

De Fusiones Binarias a Vórtices Estacionarios: Estructuras con Momento Angular en Materia Oscura Bosónica y su Impacto Sobre un Gas Ideal

Escrito por:
Carlos Alberto Tena Contreras

En este trabajo se estudia el comportamiento dinámico de configuraciones autogravitantes de materia oscura bosónica tipo condensado de Bose–Einstein (BECDM, por sus siglas en inglés) bajo dos contextos principales: fusiones binarias de solitones y evolución de vórtices con momento angular en presencia de gas bariónico. El sistema físico se modela con las ecuaciones de Gross–Pitaevskii–Poisson–Euler (GPPE), resueltas mediante simulaciones tridimensionales con el código CAFE-BECDM.

Primero, se construyeron soluciones estacionarias del sistema GPPE para configuraciones esféricas y con vorticidad axial, incluyendo los efectos de autointeracción. Se propuso un ajuste empírico para el perfil de densidad solitónico, el cual depende explícitamente de la autointeracción y de la amplitud central del campo. Estas soluciones sirvieron como estados base para estudiar la dinámica de fusiones binarias.

Se realizaron simulaciones de colisiones entre dos estrellas de bosones, con y sin gas acoplado, analizando el impacto de la autointeracción y del cociente de masas entre ambas componentes. Se encontró que la autointeracción repulsiva y la presencia de la componente bariónica favorecen la retención de masa de la componente bosónica y estabilizan la estructura final. Además, se observó una estructura núcleo-halo resultante en la materia bosónica en todos los casos, confirmando la robustez del sistema.

Por otro lado, se analizaron configuraciones con líneas de vórtice, evolucionando dentro de un entorno aleatorio de gas ideal. Los resultados mostraron que las líneas de vórtice en BECDM son estructuras estables incluso ante perturbaciones bariónicas. En dicha configuración el gas tiende a condensarse alrededor del núcleo del vórtice, formando estructuras coherentes inducidas gravitacionalmente.

En conjunto, estos resultados resaltan el papel fundamental que juegan las interacciones internas de la materia oscura y su acoplamiento gravitacional con materia bariónica en la formación y estabilidad de estructuras. Las configuraciones obtenidas podrían tener implicaciones observacionales relevantes en escenarios cosmológicos y galácticos, particularmente dentro del marco de modelos de materia oscura ultraligera.

Palabras clave: Condensado de Bose–Einstein, fusiones binarias, vórtices cuánticos, gas bariónico, simulaciones numéricas.

From Binary Mergers to Stationary Vortices: Angular Momentum Structures in Bosonic Dark Matter and Their Impact on an Ideal Gas

Written by:
Carlos Alberto Tena Contreras

This work studies the dynamical behavior of self-gravitating configurations of bosonic dark matter in the form of a Bose–Einstein condensate (BECDM) under two main contexts: binary soliton mergers and the evolution of vortices with angular momentum in the presence of baryonic gas. The physical system is modeled using the Gross–Pitaevskii–Poisson–Euler (GPPE) equations, solved through three-dimensional simulations with the CAFE-BECDM code.

First, stationary solutions of the GPPE system were constructed for spherical and axially rotating configurations, including the effects of repulsive self-interaction. An empirical fit was proposed for the solitonic density profile, which explicitly depends on the auto-interaction and on the central amplitude of the field. These solutions served as base states for studying the dynamics of binary mergers.

Simulations of collisions between two boson stars were carried out, both with and without coupled gas, analyzing the impact of the auto-interaction and the mass ratio between both components. It was found that repulsive self-interaction and the presence of a baryonic component favor mass retention on bosonic dark matter and stabilize the final structure. Additionally, a core–halo structure was observed in the bosonic matter in all cases, confirming the robustness of the system.

On the other hand, configurations with vortex lines were analyzed, evolving within a random environment of ideal gas. The results showed that vortex lines in BECDM are stable structures even under baryonic perturbations. In such configuration, the gas tends to condense around the vortex core, forming gravitationally induced coherent structures.

Taken together, these results highlight the fundamental role played by internal interactions of dark matter and its gravitational coupling with baryonic matter in the formation and stability of structures. The configurations obtained could have relevant observational implications in cosmological and galactic scenarios, particularly within the framework of ultralight dark matter models.

Keywords: Bose–Einstein condensate, binary mergers, quantum vortices, baryonic gas, numerical simulations.

Índice general

Introducción	1
1 Modelo y Ecuaciones	5
1.1 Sistema de Gross-Pitaevskii–Poisson–Euler	6
1.2 Invarianza	7
1.3 Adimensionalización del sistema	8
2 Métodos Numéricos	11
2.1 Dominio Espacial y Temporal	11
2.2 Solución del sistema GPP	12
2.2.1 Solución de la Ecuación de Gross-Pitaevskii	12
2.2.2 Solución de la Ecuación de Poisson	14
2.3 Evolución del sistema GPPE	14
2.3.1 Métodos de Volúmenes Finitos	15
2.4 CAFE-BECDM: Código de Evolución del Sistema GPPE	17
3 Construcción de Soluciones Estacionarias	19
3.1 Sistema GPP: Estrellas de Bosones	19
3.1.1 Ecuaciones Estacionarias	20
3.1.2 Descripción del Método para Encontrar Valores Propios	21
3.1.3 Solución del Problema de Valores Propios	23
3.2 Sistema GPP: Soluciones con Vorticidad Axial	25
3.2.1 Ecuaciones Estacionarias	25
3.2.2 Impacto del Número de Vórtice m	27
3.2.3 Impacto del Coeficiente de Autointeracción g	28
3.2.4 Impacto de la masa total M	28
3.3 Sistema GPPE: Estrellas de Fermiones-Bosones	30
3.3.1 Ecuaciones Estacionarias	30
3.3.2 Relación de masas	32
4 Fusiones de Binarias	35
4.1 Condiciones Iniciales	35
4.1.1 Sistema Binario de Estrellas de Bosones.	35
4.1.2 Sistema Binario de Estrellas Fermiones y Bosones.	36

4.2	Configuración Numérica	37
4.3	Espacio de Parámetros	38
4.4	Diagnóstico	38
4.5	Resultados	39
4.5.1	Efectos de la Auto-interacción	39
4.5.2	Efectos del Gas Politrópico	44
5	Vórtices en BECDM y su Interacción con un Gas Ideal	49
5.1	Condiciones Iniciales	49
5.2	Configuración Numérica	50
5.3	Espacio de Parámetros	50
5.4	Diagnósticos	51
5.5	Resultados	52
5.5.1	Estabilidad del Vórtice	52
5.5.2	Condensación del gas ideal	54
5.5.3	Análisis: Energías y Función Virial	55
6	Conclusiones Generales	61
A	Apéndice	65
A.1	Detección de estructuras mediante filtrado Laplaciano de Gauss	65
	Bibliografía	69

Introducción

La naturaleza de la materia oscura constituye uno de los problemas abiertos más importantes en la física contemporánea. Diversas observaciones astronómicas, desde la rotación de galaxias hasta la anisotropía del fondo cósmico de microondas, apuntan a la existencia de una componente no luminosa la cual domina la masa del universo [1]. A pesar de su influencia gravitacional a gran escala, la composición microscópica de la materia oscura sigue siendo desconocida.

El modelo de *materia oscura fría* (CDM, por sus siglas en inglés) ha sido notablemente exitoso al describir una amplia gama de fenómenos cosmológicos y astrofísicos. Por ejemplo, proporciona un marco teórico sólido y coherente para explicar la formación de estructuras a gran escala, permitiendo el crecimiento de pequeñas perturbaciones desde la época del fondo cósmico de microondas (CMB, por sus siglas en inglés) hasta la formación de galaxias y cúmulos observados en la actualidad. Además, reproduce con gran precisión la distribución de galaxias en filamentos y vacíos —la llamada red cósmica— observada en mapas del universo como los generados por el SDSS [2]. Otro resultado clave es la coincidencia entre el espectro de potencias de la materia ($P(k)$) derivado de simulaciones de N-cuerpos y las observaciones, lo que respalda la validez del modelo a escalas cosmológicas [3].

El CDM también es consistente con las anisotropías del CMB, donde las posiciones y amplitudes de los picos acústicos sugieren la existencia de un componente no bariónico, frío y dominante en el contenido de materia del universo [4]. A escalas galácticas, el modelo explica las curvas de rotación planas de galaxias espirales —que muestran velocidades orbitales constantes a grandes radios— mediante la presencia de halos extensos de materia no luminosa [5]. Asimismo, permite entender la dinámica de galaxias elípticas y esferoidales, cuyas dispersiones de velocidad y perfiles de masa requieren una componente adicional a la materia bariónica. A nivel estructural, el CDM predice que las galaxias se forman de manera jerárquica a partir de la fusión de halos más pequeños, lo que concuerda con diversas observaciones [3]. También reproduce correctamente la abundancia de subestructuras dentro de halos galácticos más grandes, como los numerosos subhalos que se infieren en la Vía Láctea. Finalmente, el modelo permite explicar fenómenos de lentes gravitacionales fuertes en cúmulos de galaxias, los cuales requieren grandes cantidades de masa no bariónica para ser consistentes con las observaciones [4].

No obstante, a pesar de este éxito en escalas cosmológicas y galácticas, el modelo CDM enfrenta desafíos importantes en escalas más pequeñas. Uno de los problemas más discutidos es el del *núcleo-cúspide*, ya que las simulaciones de CDM tienden a predecir perfiles de densidad con cúspides pronunciadas en los centros galácticos, mientras que muchas observaciones favorecen núcleos de densidad constante, especialmente en galaxias enanas. Otro desafío es el de los satélites faltantes, relacionado con la discrepancia entre el número de galaxias satélite observadas en halos como el de la Vía Láctea y el número mucho mayor de subhalos predicho por simulaciones. Asimismo, el llamado problema del *too big to fail* apunta a que algunos de los subhalos más masivos predichos por CDM parecen demasiado densos para alojar a las galaxias satélite observadas, lo que sugiere una posible tensión entre teoría y observación.

Estos problemas han motivado la exploración de alternativas o extensiones al paradigma estándar, entre ellas el modelo *Materia Oscura Cálida* (WDM, por sus siglas en inglés) [6], o ultraligera, también conocida como *Materia Oscura Difusa* (FDM, por sus siglas en inglés). Dentro de esta última categoría, los escenarios de *Materia Oscura Ultraligera* (ULDM, por sus siglas en inglés) han ganado atención por su capacidad de suavizar los perfiles de densidad en galaxias pequeñas y reducir la sobreabundancia de subhalos [7].

Estos problemas han motivado la exploración de alternativas o extensiones al paradigma estándar, entre ellas el modelo *Materia Oscura Cálida* (WDM, por sus siglas en inglés) [6], o ultraligera, también conocida como *Materia Oscura Difusa* (FDM, por sus siglas en inglés). Dentro de esta última categoría, los escenarios de *Materia Oscura Ultraligera* (ULDM, por sus siglas en inglés) han ganado atención por su capacidad de suavizar los perfiles de densidad en galaxias pequeñas y reducir la sobreabundancia de subhalos [7].

En particular, el modelo conocido como *Materia Oscura tipo Condensado de Bose Einstein* (BECDM, por sus siglas en inglés) describe a la materia oscura como un campo escalar complejo ultraligero cuya evolución está gobernada por las ecuaciones de Gross–Pitaevskii–Poisson (GPP). Este enfoque permite capturar efectos cuánticos relevantes a escalas astrofísicas, como patrones de interferencia y la formación de estructuras solitónicas autogravitantes en los centros galácticos [8].

Una característica notable del modelo BECDM es la aparición de soluciones solitónicas estables, conocidas como núcleos de materia oscura tipo solitón o estrellas de bosones, que podrían explicar las distribuciones de densidad observadas en los centros galácticos [9, 10, 11, 12]. Además, este marco teórico admite configuraciones rotacionales con líneas de vórtice cuántico, análogas a las observadas en sistemas condensados en laboratorio, lo cual abre la posibilidad de estructuras con momento angular cuantizado en el universo [13, 14].

Este trabajo se enfoca en el análisis dinámico de configuraciones autogravitantes de BECDM en dos contextos relevantes: fusiones binarias y líneas de vórtice en presencia de gas bariónico. En ambos escenarios se busca explorar el papel de la autointeracción bosónica, el acoplamiento gravitacional con la materia bariónica y la estabilidad de las estructuras resultantes. Para abordar estos problemas, se resuelve el sistema completo de ecuaciones GPPE (Gross–Pitaevskii–Poisson–Euler) en tres dimensiones, utilizando esquemas numéricos espectrales y de volúmenes finitos implementados en el código CAFE-BECDM.

Los objetivos principales de esta tesis son:

- Estudiar la fusión de dos núcleos de BECDM con y sin presencia de gas bariónico, cuantificando la retención de masa y la formación de estructuras núcleo–halo.
- Construir estados base estacionarios del sistema GPPE, incluyendo efectos de vorticidad y autointeracción repulsiva o atractiva.
- Analizar la estabilidad de líneas de vórtice bajo colapso gravitacional inducido por gas bariónico, y proponer métodos para su posible detección indirecta.

La tesis se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presenta el modelo físico y las ecuaciones gobernantes. El Capítulo 2 describe los métodos numéricos implementados y la estructura del código CAFE-BECDM. En el Capítulo 3 se presenta los métodos para construir las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones GPPE y sus subsistemas. En el Capítulo 4 se estudia la fusión de configuraciones binarias. En el Capítulo 5 se aborda el comportamiento dinámico de vórtices y su interacción con gas ideal. Finalmente, se presentan las conclusiones generales del trabajo.

Modelo y Ecuaciones

En este capítulo se presentan las ecuaciones necesarias para modelar sistemas en los que la materia oscura se describe como un condensado de Bose-Einstein. Estos modelos surgen como una alternativa a los enfoques tradicionales de materia oscura, permitiendo incorporar propiedades cuánticas a escalas astrofísicas mediante el uso de una función de onda macroscópica que describe el estado colectivo del condensado.

Para analizar la evolución dinámica del BECDM y las posibles interacciones que puede tener consigo mismo o con otros componentes del universo, se consideran dos escenarios principales: sistemas compuestos únicamente por BECDM autogravitante, y sistemas mixtos en los que la materia oscura y bariónica coexisten interactuando exclusivamente a través de la gravedad.

A pesar de que este enfoque considera únicamente la interacción gravitacional y desestima otros efectos físicos como la viscosidad, colisiones o correcciones relativistas, el modelo resulta ser una herramienta efectiva y robusta para capturar el comportamiento global del sistema en las escalas de interés. Esta idealización es común en cosmología y astrofísica, donde los modelos proporcionan aproximaciones útiles del comportamiento colectivo de la materia oscura, incluso sin recurrir a una teoría cinética completa. En particular, el uso del formalismo del condensado de Bose-Einstein permite describir fenómenos como el perfil de densidad de halos galácticos, la estabilidad de configuraciones autogravitantes o la supresión de estructuras a pequeña escala, sin necesidad de incluir interacciones no gravitacionales [15, 16].

La dinámica del condensado se modela mediante la ecuación de Gross-Pitaevskii, una versión no lineal de la ecuación de Schrödinger que incluye términos de interacción entre las partículas del condensado. Esta ecuación es adecuada debido a que, a temperaturas suficientemente bajas, la mayoría de los bosones ocupan el mismo estado cuántico, permitiendo una descripción efectiva en términos de una función de onda macroscópica Ψ colectiva [17].

Por otro lado, se utilizan las ecuaciones de Euler para modelar la contribución de la

materia bariónica al sistema. Este conjunto forma un sistema no lineal de leyes de conservación que gobierna la dinámica de un fluido compresible, como los gases o líquidos, donde se desprecia la fricción, la viscosidad y la conducción de calor [18].

La forma macroscópica que se asume para la materia bariónica es la de un gas compresible, que puede seguir una ecuación de estado politrópica o de gas ideal. Por simplicidad, nos referimos a ambos casos como *gas de fermiones* (GF), asumiendo que la materia visible o bariónica (protones, neutrones) está compuesta en su mayoría por partículas que obedecen la estadística de Fermi-Dirac. Sin embargo, el modelo hidrodinámico adoptado puede describir tanto un régimen clásico (alta temperatura, baja densidad), como un régimen cuántico degenerado (baja temperatura, alta densidad). En el primer caso, se emplea una ecuación de estado de gas ideal, válida para fermiones cuando los efectos de degeneración cuántica son despreciables y el sistema se aproxima a una estadística de Maxwell-Boltzmann. En el segundo caso, se usa una ecuación de estado politrópica que emula la presión de degeneración característica de un gas fermiónico degenerado, como el que se encuentra en estrellas compactas.

SECCIÓN 1.1

Sistema de Gross-Pitaevskii–Poisson–Euler

Consideremos un sistema idealizado en el que la BECDM y un gas de fermiones coexisten en la misma región del espacio, interactuando únicamente a través del campo gravitacional. El sistema de ecuaciones que describe su dinámica es [19]:

$$i\hbar \partial_t \tilde{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla_{\vec{x}}^2 \tilde{\Psi} + m_B \tilde{V} \tilde{\Psi} + \tilde{g} |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi}, \quad (1.1)$$

$$\partial_t \tilde{\rho} + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\vec{v}}) = 0, \quad (1.2)$$

$$\partial_t (\tilde{\rho} \tilde{\vec{v}}) + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\vec{v}} \otimes \tilde{\vec{v}} + \tilde{p} \mathbf{I}) = -\tilde{\rho} \nabla_{\vec{x}} \tilde{V}, \quad (1.3)$$

$$\partial_t \tilde{E} + \nabla_{\vec{x}} \cdot [\tilde{\vec{v}} (\tilde{E} + \tilde{p})] = -\tilde{\rho} \tilde{\vec{v}} \cdot \nabla_{\vec{x}} \tilde{V}, \quad (1.4)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \tilde{V} = 4\pi G (\tilde{\rho}_T - \epsilon \langle \tilde{\rho}_T \rangle). \quad (1.5)$$

donde $\nabla_{\vec{x}} = (\partial_{\vec{x}}, \partial_{\vec{y}}, \partial_{\vec{z}})$ y $\nabla_{\vec{x}}^2 = \partial_{\vec{x}}^2 + \partial_{\vec{y}}^2 + \partial_{\vec{z}}^2$ es el operador nabla y el operador de Laplace respectivamente.

La ecuación (1.1) describe la evolución del condensado bosónico, donde $\tilde{\Psi}$ es la función de onda macroscópica y $m_B |\tilde{\Psi}|^2$ representa la densidad de masa. El parámetro m_B es la masa del bosón, $\hbar$ es la constante reducida de Planck, y $\tilde{g} = 4\pi\hbar^2 \tilde{a}_s / m_B$ es el coeficiente de autointeracción no lineal, con $\tilde{a}_s$ la longitud de dispersión entre los bosones.

Las ecuaciones (1.2)–(1.4) corresponden al sistema de Euler hidrodinámico para la materia bariónica. Donde $\tilde{\rho}$ es la densidad del gas de fermiones, $\tilde{\vec{v}}$ el campo de velocidades, $\tilde{p}$ la presión, y la energía total por unidad de volumen $\tilde{E} = \tilde{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{1}{2} |\tilde{\vec{v}}|^2 \right)$, donde $\tilde{e}$ es la energía interna específica e $\mathbf{I}$ es el tensor identidad.

Para cerrar el sistema es necesario añadir una ecuación de estado que relacione presión, densidad y energía interna. Consideramos dos casos relevantes:

■ **Gas politrópico:**

$$\tilde{p} = \tilde{K} \tilde{\rho}^{1+1/n}, \quad (1.6)$$

con $\tilde{K}$ constante y n el índice politrópico. Esta forma describe sistemas autogravitantes fríos como estrellas degeneradas [20, 21].

■ **Gas ideal:**

$$\tilde{p} = (\gamma - 1) \tilde{\rho} \tilde{e}, \quad (1.7)$$

con γ el índice adiabático. Esta ecuación es adecuada para gases en régimen clásico o relativista.

Finalmente, el potencial gravitacional $\tilde{V}$ se obtiene de la ecuación de Poisson (1.5), acoplando la materia oscura y bariónica a través de la densidad total $\tilde{\rho}_T = \tilde{\rho} + m_B |\tilde{\Psi}|^2$. La constante ϵ indica el tipo de frontera: $\epsilon = 0$ para condiciones aisladas, $\epsilon = 1$ para condiciones periódicas [22].

Este sistema completo se conoce como sistema de Gross–Pitaevskii–Poisson–Euler (GPPE). Un subsistema se presenta cuando no hay presencia de gas bariónico ($\tilde{\rho} = 0$), con lo que se recupera el sistema de Gross–Pitaevskii–Poisson (GPP), utilizado para describir materia oscura autogravitante pura.

SECCIÓN 1.2

Invarianza

Una propiedad útil del sistema de ecuaciones GPPE es su invarianza bajo transformaciones de escala:

$$\begin{aligned} \{\tilde{t}, \tilde{\vec{x}}, \tilde{\Psi}, \tilde{g}, \tilde{V}\} &\rightarrow \{\lambda^{-2}\tilde{t}, \lambda^{-1}\tilde{\vec{x}}, \lambda^2\tilde{\Psi}, \lambda^{-2}\tilde{g}, \lambda^2\tilde{V}\} \\ \{\tilde{\rho}, \tilde{\vec{v}}, \tilde{e}, \tilde{p}, \tilde{E}\} &\rightarrow \{\lambda^4\tilde{\rho}, \lambda^{-1}\tilde{\vec{v}}, \lambda^{-2}\tilde{e}, \lambda^2\tilde{p}, \lambda^2\tilde{E}\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde λ es el factor de escala y en el caso en que se considere una ecuación de estado politrópica $\tilde{K} \rightarrow \lambda^{-(2+4/n)} \tilde{K}$.

Esta propiedad de invarianza implica que el sistema admite soluciones autosemejantes: configuraciones cuya estructura espacial y temporal se conserva salvo por un cambio en la escala física. Esta característica no solo permite generar una familia de soluciones equivalentes a partir de una solución base, sino que también aporta una herramienta útil para el análisis teórico y computacional del sistema. Además, esta simetría fundamenta el uso de variables adimensionales, facilitando la resolución numérica del sistema y la comparación entre distintos escenarios físicos.

SECCIÓN 1.3

Adimensionalización del sistema

Una estrategia hasta cierto punto poderosa, es adimensionalizar el sistema de ecuaciones. El objetivo es transformar un sistema con coordenadas físicas a uno con coordenadas adimensionales. Este cambio de coordenadas tiene múltiples ventajas:

- Reduce el número de parámetros en el problema, haciendo más fácil el análisis numérico y analítico.
- Mejora la estabilidad y precisión de los métodos numéricos. Las variables con magnitudes muy diferentes pueden causar errores de redondeo o mala condición en los métodos numéricos.
- Los resultados adimensionales se pueden aplicar a una familia de problemas similares con diferentes escalas físicas lo que facilita la comparación entre modelos y datos observacionales, en general permite comparar distintos sistemas físicos de forma unificada.

La forma de lograr un conjunto de ecuaciones sin dimensiones físicas es redefiniendo sus variables a través de una transformación de tal manera que absorban las constantes físicas de las ecuaciones (1.1)-(1.5). Para el sistema GPPE se considera la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}
 \tilde{t} &= \frac{m_B x_0^2}{\hbar^2} t, & \tilde{\vec{x}} &= x_0 \vec{x}, \\
 \tilde{\Psi} &= \frac{\hbar}{\sqrt{4\pi G m_B^3 x_0^2}} \Psi, & \tilde{g} &= 4\pi G m_B^2 x_0^2 g, & \tilde{a}_s &= \frac{G m_B x_0^2}{\hbar^2} a_s, \\
 \tilde{\rho} &= \frac{\hbar^2}{4\pi G m_B^2 x_0^4} \rho, & \tilde{\vec{v}} &= \frac{\hbar}{m_B x_0} \vec{v}, & \tilde{p} &= \frac{\hbar^4}{4\pi G m_B^4 x_0^6} p, \\
 \tilde{e} &= \frac{\hbar^2}{m_B^2 x_0^2} e, & \tilde{E} &= \frac{\hbar^4}{4\pi G m_B^4 x_0^6} E, & \tilde{V} &= \frac{\hbar^2}{m_B^2 x_0^2} V.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Las cantidades con tilde representan las variables con dimensiones físicas, mientras que las que no tienen tilde son sus contrapartes adimensionales. La elección natural de los

parámetros de escala se hace en base a la masa del bosón $m_B = m_{22} \times 10^{-22} \text{ eV}/c^2$ y su longitud de escala característica $x_0 = 1\text{kpc}/\lambda$. El tamaño típico de un halo galáctico es $\sim 1\text{kpc}$, por lo que la elección de λ permite comparar escalas relevantes de la materia oscura en contextos astrofísicos.

Usando las transformaciones (1.9) el sistema GPPE se reescribe de manera adimensional como:

$$i \partial_t \Psi = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi + V \Psi + g |\Psi|^2 \Psi, \quad (1.10)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.11)$$

$$\partial_t (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \mathbf{I}) = -\rho \nabla V, \quad (1.12)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot [\vec{v} (E + p)] = -\rho \vec{v} \cdot \nabla V, \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 V = \rho_T + \epsilon \langle \rho_T \rangle, \quad (1.14)$$

con $\rho_T = \rho + |\Psi|^2$, $E = \rho (e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2)$ y sus respectivas ecuaciones de estado en forma adimensional: $p = K \rho^{1+1/n}$ para el gas politrópico y $p = (\gamma - 1) \rho e$ para el gas ideal.

Como mencionamos anteriormente, el sistema GPP es un subsistema o un caso especial del sistema GPPE. Si hacemos $\rho = 0$ y lo sustituimos en (1.10)-(1.14) obtenemos:

$$i \partial_t \Psi = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi + V \Psi + g |\Psi|^2 \Psi, \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 V = |\Psi|^2 + \epsilon \langle |\Psi|^2 \rangle, \quad (1.16)$$

que es la forma adimensional de sistemas de BECDM puro.

En general, para el sistema GPPE o GPP no se han encontrado soluciones analíticas exactas, por lo que su estudio requiere el uso de métodos numéricos. En el siguiente capítulo se describen las estrategias computacionales empleadas para resolver las ecuaciones dinámicas del sistema en tres dimensiones, incluyendo los esquemas de integración temporal y espacial, así como el tratamiento de las condiciones de frontera. Como paso inicial hacia la exploración de la dinámica no lineal de estos sistemas, se construyen configuraciones estacionarias que representan estados base estables. Dichas configuraciones sirven como punto de partida para simulaciones más complejas como fusiones binarias o evoluciones con materia bariónica, y serán abordados en el capítulo posterior a los métodos numéricos.

Métodos Numéricos

Este capítulo describe los esquemas numéricos empleados para la resolución del sistema de ecuaciones que modela la dinámica de sistemas formados por materia oscura bosónica y materia bariónica. En particular, se resuelven numéricamente el sistema de GPP y su extensión con materia bariónica, el sistema GPPE. Las simulaciones se realizaron en tres dimensiones, utilizando esquemas explícitos en el tiempo y discretizaciones pseudoespectrales para la resolución de la ecuación de Gross-Pitaevskii y Poisson, así como volúmenes finitos para las ecuaciones de Euler.

SECCIÓN 2.1

Dominio Espacial y Temporal

Consideramos un dominio discreto de la forma $(t, x, y, z) \in [0, t_f] \times D = [0, t_f] \times [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$ donde t, x, y, z representan coordenadas Cartesianas.

La resolución computacional de problemas de este tipo requiere de una discretización tanto espacial como temporal. Definimos un dominio espacial y temporal discreto de la siguiente manera $D^d = \{(x_i, y_j, z_k) \in D\}$ en donde

$$\begin{aligned} x_i &= x_{\min} + i \Delta x, & i &= 0, 1, \dots, N_x - 1 \\ y_j &= y_{\min} + j \Delta y, & j &= 0, 1, \dots, N_y - 1 \\ z_k &= z_{\min} + k \Delta z, & k &= 0, 1, \dots, N_z - 1 \\ t^n &= n \Delta t, & n &= 0, 1, \dots, N_t - 1 \end{aligned}$$

con N_x, N_y, N_z y N_t como el número de puntos totales de la discretización en las coordenadas x, y, z y t respectivamente, además

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N_x}, \quad \Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N_y}, \quad \Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{N_z},$$

representan las resoluciones espaciales.

El dominio temporal se discretiza de manera análoga, utilizando pasos de tiempo uniformes de tamaño Δt . Este paso debe elegirse cuidadosamente para asegurar la estabilidad del esquema numérico utilizado. En particular, debe satisfacer la condición de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), que en su forma general está dada por

$$\Delta t = \text{CFL} * \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^2.$$

El parámetro CFL depende del esquema numérico utilizado y, típicamente, debe ser menor que 1 para garantizar la estabilidad [23].

Intuitivamente, la condición CFL garantiza que la información física no se propague más allá de una celda espacial en un solo paso de tiempo. Si no se cumple esta restricción, las soluciones pueden volverse inestables, generando errores numéricos que crecen con el tiempo.

SECCIÓN 2.2

Solución del sistema GPP

2.2.1 Solución de la Ecuación de Gross-Pitaevskii

La dinámica del campo escalar complejo $\Psi(t, \vec{x})$ está gobernada por la ecuación de Gross-Pitaevskii (1.15), la cual se puede escribir de manera compacta como

$$i\partial_t \Psi = \hat{H} \Psi, \quad \text{con} \quad \hat{H} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V + g|\Psi|^2,$$

donde el operador Hamiltoniano $\hat{H}$ contiene una parte cinética, una parte potencial gravitacional V , y un término no lineal de autointeracción $g|\Psi|^2$. Para resolver esta ecuación de manera eficiente, se emplean métodos numéricos explícitos e implícitos, cuya elección depende de los requisitos de estabilidad, precisión y costo computacional.

Métodos Explícitos

Los métodos explícitos actualizan la función de onda utilizando únicamente su estado en el tiempo actual. Una manera efectiva de implementar este enfoque es mediante la descomposición de operadores, que separa la evolución en términos cinéticos y potenciales. El avance temporal se expresa entonces como una aproximación del operador de evolución:

$$\Psi^{n+1} \approx e^{-i\hat{H}\Delta t} \Psi^n, \quad (2.1)$$

donde Ψ^n y Ψ^{n+1} representan las funciones de onda en los tiempos t^n y t^{n+1} , respectivamente. El operador $\hat{H}$ contiene el potencial gravitacional y la autointeracción evaluados

en t^n : V^n y $g|\Psi^n|^2$.

Dado que la evaluación directa del operador de evolución es compleja, se emplea una aproximación conocida como *split de operadores*, en la que se aplican por separado los operadores cinético y potencial. Definiendo el potencial efectivo como

$$V_{\text{eff}}^n = V^n + g|\Psi^n|^2,$$

la evolución por partes se expresa como

$$\Psi^{n+1} \approx e^{-i\nabla^2 \Delta t/2} e^{-iV_{\text{eff}}^n \Delta t} \Psi^n + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (2.2)$$

En esta estrategia, primero se aplica el potencial efectivo en el espacio real, seguido del operador cinético en el espacio de Fourier, lo que da lugar al conocido como *método de la evolución por partes*. La evolución puede representarse como

$$\Psi^{n+a} = e^{-iV_{\text{eff}}^n \Delta t} \Psi^n, \quad (2.3)$$

$$\Psi^{n+1} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-i(2\pi k)^2 \Delta t/2} \mathcal{F}(\Psi^{n+a}) \right\}, \quad (2.4)$$

donde $k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}$ es el número de onda y $\mathcal{F}$ representa la transformada discreta de Fourier.

Una mejora de esta técnica es el *Strang splitting*, que consiste en aplicar simétricamente el operador de potencial efectivo en dos pasos:

$$\Psi^{n+1} = e^{-iV_{\text{eff}}^n \Delta t/2} e^{-i\nabla^2 \Delta t} e^{-iV_{\text{eff}}^n \Delta t/2} \Psi^n + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (2.5)$$

Este enfoque mejora la precisión temporal y es particularmente útil cuando el potencial (gravitacional o de autointeracción) varía significativamente.

Si bien estos métodos son sencillos de implementar y computacionalmente rápidos, también presentan limitaciones. Su estabilidad es condicional, exigiendo pasos de tiempo pequeños para mantener la precisión. Además, su desempeño disminuye en presencia de potenciales intensos o con grandes gradientes espaciales, y pueden acumular errores a lo largo de simulaciones prolongadas.

Métodos Implícitos

Para mejorar la estabilidad y permitir pasos de tiempo más grandes, se recurre a métodos implícitos. Estos consideran tanto la información en el tiempo actual como en el futuro, lo cual requiere resolver sistemas de ecuaciones en cada iteración temporal. Un ejemplo clásico es el método de Crank–Nicolson, cuya formulación en términos del operador de evolución es:

$$e^{i\hat{H}^{n+1} \Delta t/2} \Psi^{n+1} = e^{i\hat{H}^n \Delta t/2} \Psi^n. \quad (2.6)$$

Al expandir esta ecuación en una aproximación de segundo orden, obtenemos

$$\left(1 + i\frac{\Delta t}{2}\hat{H}^{n+1}\right)\Psi^{n+1} = \left(1 - i\frac{\Delta t}{2}\hat{H}^n\right)\Psi^n + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (2.7)$$

reescribiendo encontraremos

$$\Psi^{n+1} = \Psi^n - i\frac{\Delta t}{2} \left[\hat{H}^{n+1}\Psi^{n+1} + \hat{H}^n\Psi^n \right] + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.8)$$

donde el operador $\hat{H}^{n+1}$ contiene la autointeracción evaluada en el tiempo futuro:

$$\hat{H}^{n+1} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V^{n+1} + g|\Psi^{n+1}|^2.$$

Este sistema es no lineal debido al término $g|\Psi^{n+1}|^2\Psi^{n+1}$, y se resuelve mediante una iteración de punto fijo. Se define una función de iteración $h(\Psi^{n+1})$ igual a el lado derecho de la ecuación (2.8), y se busca un punto fijo mediante

$$\Psi_{k+1}^{n+1} = h(\Psi_k^{n+1}),$$

hasta que se cumpla la condición de convergencia $\|\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_k^{n+1}\| < \epsilon$, donde ϵ es una tolerancia prefijada. Este enfoque mejora la estabilidad numérica y permite una evolución precisa incluso con pasos de tiempo grandes. No obstante, tiene un mayor costo computacional debido a la necesidad de resolver sistemas iterativos en cada paso.

2.2.2 Solución de la Ecuación de Poisson

El potencial gravitacional $V(t, \vec{x})$ se obtiene resolviendo la ecuación (1.16). Dado que esta ecuación es lineal, puede resolverse de manera eficiente aplicando un método pseudoespectral. Aplicando la transformada de Fourier se obtiene

$$\hat{V}(\vec{k}) = -\frac{4\pi}{|\vec{k}|^2} \mathcal{F}\{\rho_T - \langle\rho_T\rangle\}, \quad (2.9)$$

luego, el potencial se recupera en el espacio real mediante la transformada inversa:

$$V(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{V}(\vec{k})\right\}. \quad (2.10)$$

Para evitar divergencias en el modo nulo ($\vec{k} = \vec{0}$), se impone la condición $\hat{V}(\vec{0}) = 0$, eliminando el componente del potencial medio.

SECCIÓN 2.3

Evolución del sistema GPPE

Una vez descritos los procedimientos numéricos necesarios para resolver tanto la ecuación de Poisson como la de Schrödinger, el siguiente paso en la integración del

sistema GPPE completo (1.11)-(1.13) consiste en abordar la solución de las ecuaciones de Euler. Para ello, en esta sección se presenta el enfoque numérico adoptado, basado en métodos de volúmenes finitos.

2.3.1 Métodos de Volúmenes Finitos

Las ecuaciones de Euler pueden expresarse de manera compacta en forma conservativa como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{U}$ es el vector de variables conservadas, $\vec{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}^x, \mathbf{F}^y, \mathbf{F}^z)$ representa los flujos en cada dirección espacial, y $\mathbf{S}$ es el término fuente. Estos se definen como:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v^x \\ \rho v^y \\ \rho v^z \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \partial_x V \\ -\rho \partial_y V \\ -\rho \partial_z V \\ -\rho \vec{v} \cdot \nabla V \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^i = \begin{pmatrix} \rho v^i \\ \rho v^i v^x + \delta_{ix} p \\ \rho v^i v^y + \delta_{iy} p \\ \rho v^i v^z + \delta_{iz} p \\ v^i (E + p) \end{pmatrix},$$

donde $i \in \{x, y, z\}$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker. El sistema también puede escribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_i \mathbf{A}^i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.12)$$

con $\mathbf{A}^i = \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial \mathbf{U}}$ siendo las matrices jacobianas del flujo. Estas matrices son diagonalizables con autovalores reales, lo cual garantiza que el sistema es hiperbólico. Los autovalores de $\mathbf{A}^i$ son:

$$\Lambda^i = \text{diag}(v^i - c_s, v^i, v^i, v^i, v^i + c_s), \quad (2.13)$$

y las matrices de eigenvectores $\mathbf{R}^i$ que diagonalizan a $\mathbf{A}^i$ permiten expresar:

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{R}^i \Lambda^i (\mathbf{R}^i)^{-1}. \quad (2.14)$$

Aquí, c_s es la velocidad del sonido local y $H = (E + p)/\rho$ la entalpía total. Este análisis es esencial para el desarrollo de esquemas numéricos basados en la propagación de ondas características [18].

Método HLLE

El método de volúmenes finitos se basa en la discretización del dominio espacial en celdas finitas, sobre las cuales se considera constante el valor promedio de las variables conservadas. Definimos el volumen de control tridimensional $\Omega_{i,j,k}$ centrado en el punto (x_i, y_j, z_k) , con volumen $\Delta\Omega = \Delta x \Delta y \Delta z$. La integración del sistema de Euler sobre dicho volumen produce la forma semidiscreta:

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}}{dt} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^x - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}^x}{\Delta x} + \frac{\mathbf{F}_{i,j+1/2,k}^y - \mathbf{F}_{i,j-1/2,k}^y}{\Delta y} + \frac{\mathbf{F}_{i,j,k+1/2}^z - \mathbf{F}_{i,j,k-1/2}^z}{\Delta z} = \bar{\mathbf{S}}_{i,j,k}, \quad (2.15)$$

donde $\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}$ es el promedio de $\mathbf{U}$ en el volumen de control:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Omega_{i,j,k}} \mathbf{U}(t, \vec{x}) d^3x, \quad \bar{\mathbf{S}}_{i,j,k} = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}). \quad (2.16)$$

Para calcular los flujos numéricos en las interfaces, se utiliza el esquema HLLE (Harten-Lax-van Leer-Einfeldt), que aproxima los flujos resolviendo una versión simplificada del problema de Riemann entre celdas adyacentes. En la dirección x , por ejemplo, el flujo se calcula como:

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^{x,\text{HLLE}} = \frac{\lambda_-^x \mathbf{F}^x(\bar{\mathbf{U}}_R) - \lambda_+^x \mathbf{F}^x(\bar{\mathbf{U}}_L) + \lambda_-^x \lambda_+^x (\bar{\mathbf{U}}_L - \bar{\mathbf{U}}_R)}{\lambda_+^x - \lambda_-^x}, \quad (2.17)$$

donde $\bar{\mathbf{U}}_L$ y $\bar{\mathbf{U}}_R$ son los promedios en las celdas izquierda y derecha de la interfaz, y $\lambda_{\pm}^x$ son las velocidades características máximas y mínimas a lo largo de dicha interfaz:

$$\lambda_-^x = \min(0, \min(\Lambda^x(\bar{\mathbf{U}}_L), \Lambda^x(\bar{\mathbf{U}}_R))), \quad (2.18)$$

$$\lambda_+^x = \max(0, \max(\Lambda^x(\bar{\mathbf{U}}_L), \Lambda^x(\bar{\mathbf{U}}_R))). \quad (2.19)$$

La forma semidiscreta del sistema se resuelve temporalmente mediante un integrador explícito Runge-Kutta de tercer orden.

Reconstrucción Espacial: Godunov y Minmod

Para aumentar la precisión espacial, se utilizan técnicas de reconstrucción en las interfaces de las celdas. En el caso más simple, el esquema de Godunov asume que las variables conservadas son constantes dentro de cada celda y resuelve un problema de Riemann entre celdas vecinas, generando una solución de primer orden.

Para mejorar la precisión en regiones suaves del flujo, se emplea la reconstrucción lineal limitada usando el limitador de Minmod. Este limitador previene la aparición de oscilaciones espurias al elegir una pendiente que minimiza la variación entre celdas adyacentes. El esquema resultante es de segundo orden en regiones suaves y de primer orden en zonas con discontinuidades, como ondas de choque [18].

SECCIÓN 2.4**CAFE-BECDM: Código de Evolución del Sistema GPPE**

El código **CAFE-BECDM** fue desarrollado por el grupo de trabajo del Departamento de Física Computacional del Instituto de Física y Matemáticas (IFM) de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). Está implementado en el lenguaje de programación **Fortran**, utilizando librerías desarrolladas desde cero, especializadas en el análisis mediante métodos espectrales y de volúmenes finitos, así como en la optimización de escritura y almacenamiento de datos.

Este código ha sido validado y empleado exitosamente en diversos trabajos previos [22, 24, 25, 12, 26], lo cual respalda su confiabilidad como herramienta para la simulación numérica del sistema GPPE.

Las simulaciones presentadas en este trabajo fueron realizadas utilizando **CAFE-BECDM**, y el análisis posterior de los resultados se llevó a cabo con el lenguaje **Python**, haciendo uso de **Matplotlib**, **SciPy** y **NumPy**, que permiten un procesamiento y visualización eficiente de los datos obtenidos.

Para poder resolver el sistema GPPE con el código **CAFE-BECDM**, es indispensable contar con una condición inicial físicamente consistente, que represente un estado base del sistema bajo estudio. Esta condición inicial no solo garantiza la estabilidad numérica de la simulación, sino que también define las propiedades globales del sistema, como su masa, energía y perfil de densidad. En el siguiente capítulo se describe el procedimiento seguido para obtener estas configuraciones iniciales, así como los métodos numéricos empleados para construir los estados base que sirven como punto de partida para las simulaciones dinámicas.

Construcción de Soluciones Estacionarias

En este capítulo se detalla el enfoque numérico adoptado para obtener las soluciones estacionarias de los sistemas GPP y GPPE. Se exploran distintas estrategias de construcción, resaltando tanto su fundamento teórico como su implementación computacional.

Primero, se introduce un esquema basado en algoritmos genéticos para la obtención de soluciones del sistema GPP, acompañado de una caracterización precisa de los perfiles de densidad resultantes.

A continuación, se describe la aplicación del método ITEM en coordenadas cilíndricas, orientado a generar soluciones con líneas de vórtice perpendiculares al eje z , lo que permite modelar configuraciones con estructuras topológicas no triviales.

Finalmente, se describe las ecuaciones necesarias para construir soluciones estacionarias del sistema GPPE bajo simetría esférica. Este enfoque conduce a la obtención de configuraciones auto-consistentes donde la materia bariónica y bosónica coexisten en equilibrio, acopladas gravitacionalmente en una misma región del espacio.

SECCIÓN 3.1

Sistema GPP: Estrellas de Bosones

Uno de los elementos fundamentales en el estudio de sistemas de materia oscura bosónica es la construcción de soluciones estacionarias del sistema Gross–Pitaevskii–Poisson (GPP). Estas configuraciones, conocidas comúnmente como *estado base* o una versión Newtoniana de las *Estrellas de Bosones* (EB) [11], representan soluciones estables y simétricas que describen núcleos autogravitantes de BECDM en equilibrio hidrostático cuántico.

La importancia de estas soluciones radica en su papel como estructuras atractoras

en la evolución dinámica del sistema. Diversos estudios han mostrado que, independientemente de las condiciones iniciales, los sistemas tienden a estabilizarse hacia una configuración solitónica central con un halo difuso, cuya estructura puede aproximarse por un estado base estacionario [27]. Por esta razón, dichas soluciones se utilizan como punto de partida para simular procesos dinámicos como fusiones binarias, interacciones con materia bariónica o perturbaciones gravitacionales.

3.1.1 Ecuaciones Estacionarias

La forma estacionaria del sistema GPP en su forma adimensional se construye asumiendo simetría esférica, con lo que el parámetro de orden se puede reescribir como $\Psi(t, \vec{x}) = \psi(r)e^{-i\omega t}$, donde $\psi(r)$ es una función real que depende únicamente de la coordenada radial $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y ω representa una frecuencia propia del sistema.

Con tales consideraciones, el sistema (1.15)-(1.16) se reescribe como:

$$-\frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + V\psi + g\psi^3 = \omega\psi, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \psi^2. \quad (3.2)$$

Para asegurar soluciones físicamente aceptables, se imponen condiciones de frontera adecuadas. Para el parámetro de orden estacionario ψ se requiere que $\psi(0) = \psi_c$, $\psi'(0) = 0$ y que en el $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi' = 0$. La comilla superior representa una primera derivada espacial.

Para el potencial gravitacional V tomamos las siguientes condiciones de frontera: $V(0) = V_c$ y $V'(0) = 0$. La elección de V_c puede ser arbitraria, ya que desplazar esta condición a $V_c + V_a$ equivale a hallar un valor propio $\omega + V_a$ para un valor arbitrario de V_a . Estas condiciones de contorno garantizan soluciones físicamente significativas que satisfacen los requisitos de regularidad y aislamiento.

Dado que este conjunto de ecuaciones se resolverá numéricamente, conviene reescribirlo como un sistema de primer orden definiendo las variables $\phi = r^2\psi'$ y $M = r^2V'$. Entonces el sistema anterior se reescribe como:

$$\psi' = \frac{\phi}{r^2}, \quad (3.3)$$

$$\phi' = 2r^2 (V + g\psi^2 - \omega) \psi, \quad (3.4)$$

$$V' = \frac{M}{r^2}, \quad (3.5)$$

$$M' = r^2\psi^2, \quad (3.6)$$

cuyas condiciones de frontera son $\psi(0) = \psi_c$, $\phi(0) = 0$, $V(0) = V_c$, $M(0) = 0$ y

$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$. Este conjunto de ecuaciones junto con las condiciones de frontera definen un problema de valores propios, con ω como el valor propio del sistema.

Por simplicidad, es conveniente definir un vector $u = (\psi, \phi, V, M)$ con el lado derecho del sistema como $f(r, u) = (u_2/r^2, -2r^2(u_3 + gu_1^2 - \omega)u_1, u_4/r^2, r^2u_1^2)$. Entonces, el sistema puede escribirse de manera compacta como:

$$\frac{du}{dr} = f(r, u); \quad u(0) = u_0, \quad (3.7)$$

donde $u_0 = (\psi_c, 0, V_c, 0)$.

Existen diferentes estrategias que pueden ser empleadas para resolver numéricamente el sistema (3.7). Tradicionalmente se resuelve en un dominio discreto y se emplea un método de *shooting* para encontrar el valor propio ω . En este trabajo utilizaremos un dominio discreto pero no el método de shooting.

Construimos la solución en un dominio finito $D = [0, r_{\text{máx}}]$. Consideramos un valor finito para $r_{\text{máx}}$, con el que se busca satisfacer las condiciones de contorno de manera aproximada $\psi(r_{\text{máx}}) \approx \phi(r_{\text{máx}}) \approx 0$. Ahora, se define un dominio discreto como $D^d = \{r_i \in D | i = 0, \dots, N_r\}$ donde N_r es el número de puntos. La manera más sencilla de construir D^d es empleando una partición uniforme donde cada punto es elegido como $r_i = i\Delta r$, con $\Delta r = r_{\text{máx}}/N_r$ la cual representa la resolución del dominio.

3.1.2 Descripción del Método para Encontrar Valores Propios

Encontramos el valor de ω con el que se satisfacen las condiciones de borde en $r_{\text{máx}}$ empleando un Algoritmo Genético (AG) que es un método de optimización que basa su funcionamiento en la teoría de la evolución.

En un algoritmo genético, existe una población inicial dentro de un entorno definido. A cada individuo de esta población se le asigna un nivel de aptitud, que representa su capacidad para sobrevivir en el entorno. Este nivel de aptitud, que denominaremos *fitness*, está determinado únicamente por el ADN de cada individuo de la población. Los individuos mejor adaptados tienen una mayor probabilidad de reproducirse y transmitir su material genético a las generaciones posteriores. La descendencia se genera a partir de dos progenitores, cada uno de los cuales aporta aproximadamente el 50 % de su material genético. Además, en la naturaleza, la descendencia puede adaptarse mejor al entorno que sus progenitores debido a mutaciones en su ADN. Este proceso iterativo continúa durante muchas generaciones hasta que se observan cambios significativos en la población. Con base en esta comprensión de la evolución, describimos nuestro AG de la siguiente manera:

1. **Definir el Problema:** En nuestro contexto, el ADN de cada individuo representa una posible solución al problema de valores propios. La cadena de ADN que representa a cada individuo se representa como $ADN = (\omega, r_{\text{máx}})$, donde los componentes de estos vectores se denominan genes.
2. **Inicialización de la población:** La población se genera aleatoriamente, con un tamaño constante $N_{\text{población}}$ que se mantiene constante a lo largo de la evolución.
3. **Función Fitness:** La función *fitness* representa el nivel de aptitud de cada individuo y se define como

$$fitness(\omega, r_{\text{máx}}) = [\psi(r_{\text{máx}})^2 + \psi'(r_{\text{máx}})^2]^{-1} \quad (3.8)$$

donde $\psi(r)$ es la solución del sistema (3.7) asociada con los valores del ADN de cada individuo. La elección de la forma de la función *fitness* (3.8) se debe al hecho de que tanto la función de onda como su derivada deben desvanecerse en el límite cuando $r \rightarrow r_{\text{máx}}$.

4. **Selección:** Usamos un método de clasificación elitista que agrupa los mejores N_{mejores} individuos: Obtenemos el valor de la función *fitness* de cada individuo de la población, después se ordenan de tal manera que aquellos con un ajuste más alto son los primeros en la lista.
5. **Reproducción:** Elegimos dos padres de los primeros N_{mejores} de manera aleatoria para generar un nuevo individuo. Los genes del ADN del nuevo individuo son seleccionados aleatoriamente de los genes de los padres.
6. **Primera Mutación:** Antes de crear un nuevo individuo, aplicamos una mutación donde cada gen en la cadena de ADN tiene una probabilidad de ser amplificada por un factor de 1.5.
7. **Reemplazo:** Repetimos los pasos 5-6 para $N_{\text{población}} - N_{\text{mejores}}$ con el fin de generar los individuos restantes.
8. **Segunda Mutación:** Aplicamos una mutación diferencial a toda la población. Para cada individuo con ADN_i , seleccionamos aleatoriamente otros dos individuos con ADN_1 y ADN_2 con los que generamos un nuevo individuo $ADN_{\text{nuevo}} = ADN_i + 0.1 (ADN_1 + ADN_2)$. Si $fitness(ADN_{\text{nuevo}}) > fitness(ADN_i)$ reemplazamos el i -ésimo individuo por el nuevo.
9. **Condición para detener el método:** Repetimos los pasos 4-8 durante múltiples generaciones. De cada generación seleccionamos el individuo mejor calificado ADN_{superior} , si $1/fitness(ADN_{\text{superior}}) < 10^{-8}$ decimos que el algoritmo convergió a la solución.

3.1.3 Solución del Problema de Valores Propios

Para integrar el sistema se deben establecer los parámetros ψ_c , V_c , g , ω y $r_{\text{máx}}$, de los cuales desconocemos el valor propio y, por razones de precisión numérica, el radio máximo. Buscamos ω y $r_{\text{máx}}$ emplenado un algoritmo genético (AG). Aplicando el AG es posible encontrar la solución al problema de valores propios especificando únicamente la amplitud del parámetro de orden ψ_c en el origen y el coeficiente no lineal g . Ya que el valor de V_c puede ser elegido de manera arbitraria, una vez que encontramos la solución es necesario reescalar el potencial gravitacional y el valor propio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V - V(r_{\text{máx}}) - \frac{M(r_{\text{máx}})}{r_{\text{máx}}} &\rightarrow V, \\ \omega - V(r_{\text{máx}}) - \frac{M(r_{\text{máx}})}{r_{\text{máx}}} &\rightarrow \omega, \end{aligned}$$

con esto el potencial gravitacional ahora satisface las condiciones de frontera monopolar.

Exploramos un espacio de parámetros que incluye diversos valores de g y ψ_c dentro del rango $(\psi_c, g) \in [1, 2] \times [-0.5, 0.5]$ y lo dividimos en dos casos:

Caso $g = 0$. Utilizamos el AG con una población inicial $N_{\text{población}} = 500$ y una tolerancia de 10^{-8} . La inversa del *fitness* del mejor individuo de la población para $(\psi_c, g) = (1, 0)$, se muestra en la subgráfica izquierda de la Figura 3.1, ilustrando la convergencia tras 120 generaciones. Una vez que se alcanza la tolerancia óptima, los genes resultantes del individuo con mejor aptitud de la última generación son $(r_{\text{máx}}, \omega) \approx (12.24, -0.6922)$, resultado consistente con resultados bien conocidos (por ejemplo, [11]).

Este régimen ha sido estudiado ampliamente. En [28] se presenta una fórmula empírica para el perfil de densidad de las soluciones estacionarias, encontrada a partir de simulaciones de formación de estructuras en el modelo FDM:

$$\psi_{\text{core}}(r)_{g=0} = \psi_c \left[1 + (2^{1/8} - 1) \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-4}, \quad (3.9)$$

donde r_c representa el radio del núcleo, que se define como el radio en el cual la densidad $\psi^2(r_c)$ es la mitad de la densidad central ψ_c^2 . Esta fórmula coincide con el perfil de densidad de la solución del estado fundamental del sistema GPP para $g = 0$. En la subgráfica derecha de la Figura 3.1 se muestra la comparación entre el perfil de densidad obtenido con el AG y el perfil (3.9).

Caso $g \neq 0$. Proponemos una generalización del ajuste empírico (3.9) de la siguiente manera:

$$\psi_{\text{core}}(r)_{g \neq 0} = \psi_c \left[1 + (2^{1/8} - 1) \left(\frac{r}{r_c} \right)^{2+\beta} \right]^{-4}, \quad (3.10)$$

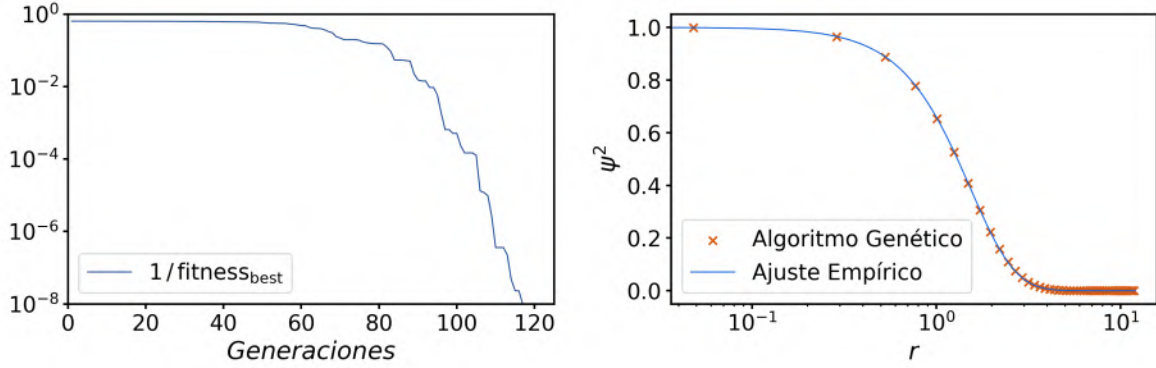


Figura 3.1: A la izquierda se muestra el inverso del *fitness* del mejor individuo de la población del algoritmo genético (AG) como función de las generaciones para el caso $(\psi_c, g) = (1, 0)$, demostrando que el AG proporciona soluciones de manera rápida que se aproximan satisfactoriamente a las soluciones estacionarias del sistema GPP. En la subgráfica de la derecha se compara la solución encontrada por el AG con la fórmula empírica (3.9), para el caso con $\psi_c^2 = 1.0$ y $r_c \approx 1.306$.

donde $r_c = r_c(\psi_c, g)$ y $\beta = \beta(\psi_c, g)$ determinan el radio del núcleo y el exponente del ajuste respectivamente. Buscamos una expresión que determine r_c y β de manera directa, por lo que recurrimos a calcular la masa del núcleo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 M_c &= \int_0^\infty \psi_c^2(r) r^2 dr \\
 &= \frac{(2^{1/8} - 1)^{-\frac{3}{2+\beta}}}{5040} \psi_c^2 r_c^3 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2+\beta}\right) \Gamma\left(8 - \frac{3}{2+\beta}\right)}{2 + \beta} \\
 &= M(r_{\text{máx}}),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

resolviendo para r_c obtenemos la expresión:

$$r_c = \left[\frac{5040(2 + \beta)M_c}{(2^{1/8} - 1)^{-\frac{3}{2+\beta}} \Gamma\left(\frac{3}{2+\beta}\right) \Gamma\left(8 - \frac{3}{2+\beta}\right)} \right]^{1/3}. \tag{3.12}$$

En el caso aislado, en el cual no existe una atmósfera de bosones alrededor del núcleo como en las simulaciones de colapso gravitacional de BECDM, la masa del núcleo coincide con la masa total obtenida de la solución numérica, es decir $M_c = M(r_{\text{máx}})$, y β es el único parámetro libre de ψ_{core}^2 . Consecuentemente, β debe ser ajustado para hacerlo coincidir con el ansatz (3.10). Buscamos el valor óptimo de β con el algoritmo genético estableciendo $ADN = (\beta)$ y una función de aptitud $fitness(\beta) = \left[\int_0^{r_{\text{máx}}} |\psi_{\text{core}}^2 - \psi^2| \right]^{-1} dr$, con una tolerancia de 10^{-8} para el mejor individuo.

Proponemos una función empírica para el radio del núcleo y el exponente β similar a (3.12) pero en esta ocasión para $g \neq 0$, sujeta a las siguientes constricciones:

1. De acuerdo al reescalamiento λ , $r_c \sim \psi_c^{-1/2}$ y $r_c \sim g^{1/2}$.
2. β debería ser λ -invariante.
3. Cuando $g = 0$, $r_c = 1.306\psi_c^{-1/2}$ y $\beta = 0$.

La transformación (1.8) implica que el coeficiente $\alpha = g\psi_c$ es λ -invariante; entonces, β sólo debe depender de α . Basado en estas condiciones se proponen las siguientes funciones:

$$r_c = 1.306\psi_c^{-1/2}(1 + a_1\alpha + a_2\alpha^2), \quad (3.13)$$

$$\beta = b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3|\alpha|^{1/2}, \quad (3.14)$$

donde los parámetros del ajuste son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.3681 \pm 24.50 \times 10^{-5}, \\ a_2 &= 0.0905 \pm 31.34 \times 10^{-5}, \\ b_1 &= 0.2842 \pm 10.71 \times 10^{-5}, \\ b_2 &= 0.0845 \pm 21.80 \times 10^{-5}, \\ b_3 &= -0.0117 \pm 5.443 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Para verificar que la fórmula empírica general es una buena aproximación al estado fundamental, mostramos en la Figura 3.2 la gráfica de r_c (izquierda) y β (derecha) como funciones de la densidad ψ_c^2 usando tanto la solución del problema de autovalores como la fórmula empírica. Se observa que r_c disminuye al aumentar ψ_c y aumenta cuando g crece, como se esperaba. El exponente β cambia de signo cuando g cambia de signo.

SECCIÓN 3.2

Sistema GPP: Soluciones con Vorticidad Axial

3.2.1 Ecuaciones Estacionarias

Consideremos el subsistema (1.15)-(1.16) en coordenadas cilíndricas $(r_\perp, \varphi, z)$ donde la función de onda macrocópica toma la forma $\Psi(t, \vec{x}) = \phi(r_\perp, z) e^{im\varphi}$ donde $m \in \mathbb{Z}$ denota el momento angular cuantizado o número de vórtice. Al sustituir en las ecuaciones del sistema GPP se obtiene un problema no lineal de valores propios

$$H\phi = \omega\phi, \quad (3.15)$$

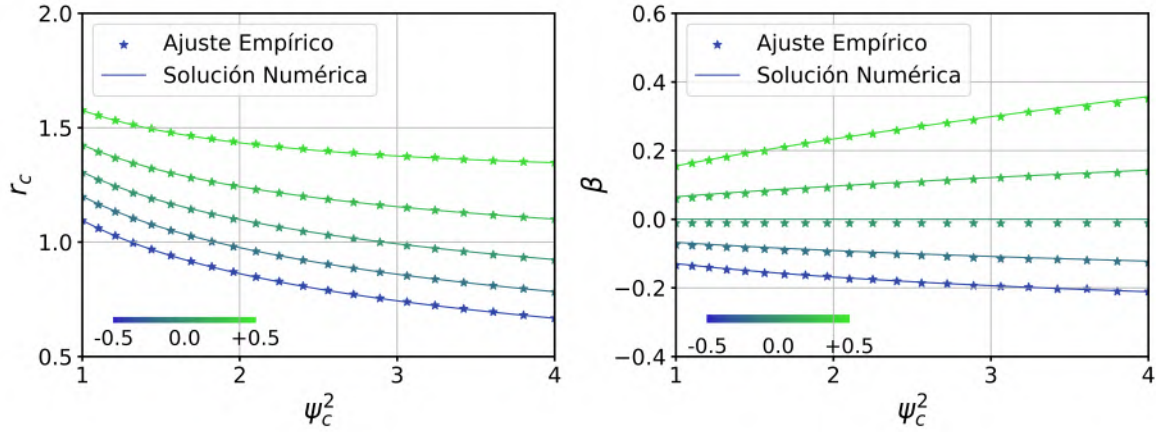


Figura 3.2: Se muestra la comparación entre el ajuste empírico general (3.10) y la solución numérica del sistema GPP en el rango de parámetros $(\psi_c, g) = [1.0, 2.0] \times [-0.5, 0.5]$ para el radio del core r_c (izquierda) y el exponente β (derecha). El rango de colores (azul a verde) que toman las líneas y puntos representa el valor del coeficiente de autointeracción g .

donde ω es el valor propio y H representa el Hamiltoniano efectivo, definido como

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_\perp^2} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r_\perp^2} \right) + V + g\phi^2. \quad (3.16)$$

El potencial gravitacional $V(r_\perp, z)$ se determina de forma autoconsistente a partir de la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r_\perp^2} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \phi^2. \quad (3.17)$$

Imponemos las siguientes condiciones de frontera:

- $\phi(0, z) = 0$ para imponer un vórtice en el centro a lo largo del eje z .
- $\partial_z \phi(r_\perp, 0) = 0$ para garantizar simetría ecuatorial.
- Decaimiento asintótico en el infinito

$$\lim_{\sqrt{r_\perp^2 + z^2} \rightarrow \infty} \phi = \lim_{\sqrt{r_\perp^2 + z^2} \rightarrow \infty} \partial_{r_\perp} \phi = \lim_{\sqrt{r_\perp^2 + z^2} \rightarrow \infty} \partial_z \phi = 0.$$

Estas condiciones garantizan la normalización y, en el caso lineal $g = 0$, la unicidad de la solución. Para el potencial gravitacional, se impone regularidad y simetría mediante $\partial_{r_\perp} V(0, z) = 0$ y $\partial_z V(r_\perp, 0) = 0$ respectivamente.

En este caso, resolveremos el sistema numéricamente usando el método de evolución imaginaria en el tiempo (ITEM, por sus siglas en inglés), donde se resuelve la ecuación GPP dependiente del tiempo bajo la sustitución $\hat{t} = -i t$, obteniendo una ecuación tipo difusión

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{t}} = H\phi. \quad (3.18)$$

Esta evolución suprime los estados excitados y permite la convergencia hacia el estado fundamental del hamiltoniano. Este enfoque también se aplica al caso no lineal $g \neq 0$, típicamente convergiendo hacia una configuración fundamental o metaestable. En cada paso de tiempo, la función de onda se normaliza para conservar la masa total

$$M = 2\pi \int \phi^2 r_{\perp} dr_{\perp} dz, \quad (3.19)$$

asegurando la convergencia hacia un valor propio ω único para la masa elegida. Simultáneamente, el potencial V se actualiza resolviendo la ecuación (3.17) mediante el método de sobre-relajación sucesiva (SOR, por sus siglas en inglés), para acelerar la convergencia.

El dominio es finito: $(r, z) \in [0, R]^2$, con condiciones de contorno de Neumann $\partial_r \phi(R, z) = 0$ y $\partial_z \phi(r, R) = 0$, las cuales aproximan un decaimiento asintótico. Para validar esta aproximación, se exploran diferentes valores de R y se evalúa la sensibilidad a las fronteras para el caso $M = 2\pi$, $g = 0$. La Figura 3.3 muestra perfiles radiales $\phi(r_{\perp}, z = 0)$ para $R = 40, 60, 80$ y 100 , con $m = 1$. Los perfiles convergen al aumentar el tamaño del dominio, a partir de $R = 40$ ya ofrece una buena aproximación a la solución en el dominio infinito.

Todas las soluciones están normalizadas por la amplitud máxima $\phi_{\text{máx}} \approx 0.0422$, que ocurre en $r_{\text{máx}} \approx 8.0$, para $M = 2\pi$ y $g = 0$. Esta normalización hace que los perfiles sean invariantes frente a cambios de escala de longitud λ , como se discute en [11, 29, 19], garantizando la unicidad dentro del escalado adoptado.

3.2.2 Impacto del Número de Vórtice m

El número de vórtice m determina el momento angular cuantizado del condensado y tiene un impacto directo en la estructura del núcleo del vórtice. A medida que m aumenta, el término de barrera centrífuga m^2/r^2 se intensifica, ensanchando la depresión central en el perfil de densidad y dando lugar a configuraciones toroidales con menor densidad central. Como resultado, el pico de la función de onda se desplaza hacia afuera, ampliando la extensión radial de la estructura.

Estos efectos se ilustran en la Figura 3.4, que muestra los perfiles radiales de $\phi(r_{\perp}, z = 0)$

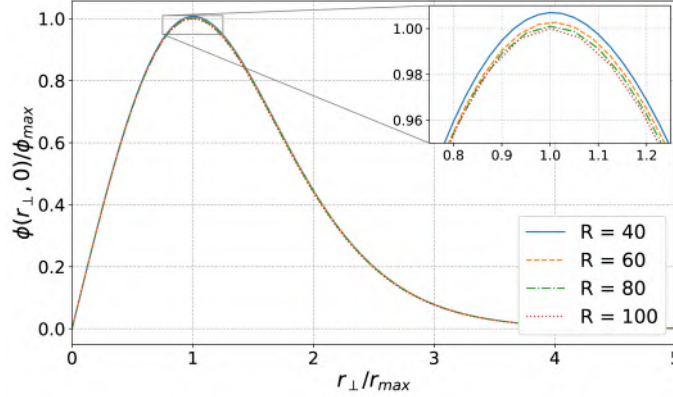


Figura 3.3: Perfiles radiales de la función de onda $\phi(r_{\perp}, z = 0)$ para diferentes tamaños del dominio computacional $R = 40, 60, 80$, y 100 , con número de vórtice $m = 1$, masa total $M = 2\pi$, y $g = 0$. La convergencia de los perfiles al aumentar R confirman que las condiciones de frontera de Neumann se aproximan con precisión al comportamiento asintótico esperado. Todas las curvas están normalizadas por $\phi_{\text{máx}} \approx 0.0422$ a $r_{\text{máx}} \approx 8.000$, lo que hace que las soluciones sean invariantes ante reescalamiento de longitud λ .

para varios valores de m , con parámetros fijos $g = 10$ y $M = 2\pi$. A medida que el número de vórtice aumenta, los perfiles se vuelven progresivamente más anchos y planos del centro, revelando claramente la influencia del momento angular.

3.2.3 Impacto del Coeficiente de Autointeracción g

El parámetro g controla la intensidad y naturaleza de las autointeracciones dentro del condensado. Para $g > 0$, la interacción es repulsiva, lo que favorece perfiles más extendidos y menos concentrados. A medida que g aumenta, la función de onda se vuelve más plana y difusa, acercándose al régimen de Thomas-Fermi. En contraste, para $g < 0$ la interacción es atractiva, promoviendo configuraciones compactas y de alta densidad, que pueden volverse inestables más allá de un umbral crítico de $|g|$.

La Figura 3.5 presenta perfiles radiales de la función de onda para diferentes valores de g , manteniendo fijos $M = 2\pi$ y $m = 1$. A medida que g aumenta, los perfiles se ensanchan y sus amplitudes centrales disminuyen, ilustrando la dispersión inducida por las autointeracciones repulsivas. Por el contrario, para valores negativos de g , las configuraciones se vuelven más compactas.

3.2.4 Impacto de la masa total M

La masa total M determina la normalización general de la función de onda y controla la ligadura gravitacional de la configuración. Masas mayores incrementan el potencial

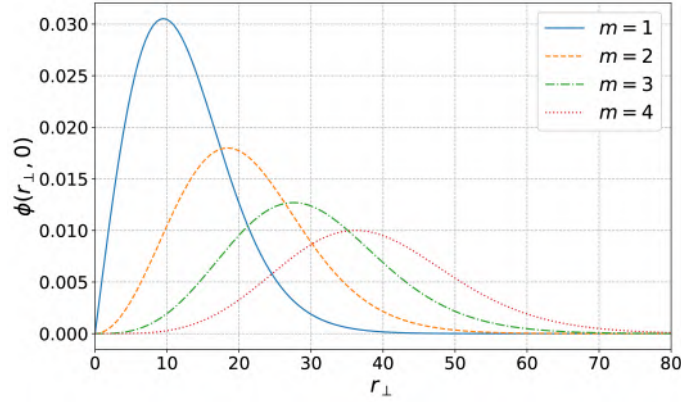


Figura 3.4: Perfiles radiales de la función de onda $\phi(r_{\perp}, z = 0)$ para diferentes números de vórtice m , con coeficiente de autointeracción fija $g = 10$ y masa total $M = 2\pi$. Valores grandes de m conducen a núcleos más amplios y máximos en la densidad desplazados hacia afuera, debido a una mayor barrera centrífuga.

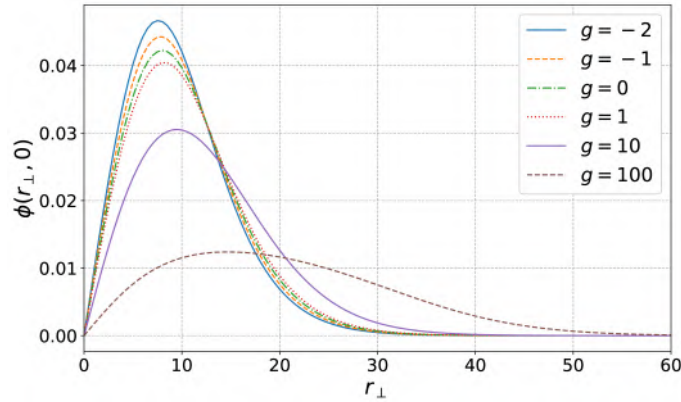


Figura 3.5: Perfiles radiales de la función de onda $\phi(r_{\perp}, z = 0)$ para diferentes valores del coeficiente de autointeracción g , con $M = 2\pi$ y $m = 1$ fijos. Aumentando el valor de g obtenemos perfiles más amplios y difusos con amplitudes centrales reducidas.

gravitacional del sistema, dando lugar a perfiles más compactos con picos centrales más pronunciados. Este efecto compite con la presión cuántica y la autointeracción, modelando el perfil de equilibrio.

La Figura 3.6 muestra los perfiles radiales para distintas masas totales M , con parámetros fijos $m = 1$ y $g = 10$. A medida que M aumenta, el núcleo se vuelve más denso y el perfil más localizado, lo que indica un mayor confinamiento gravitacional.

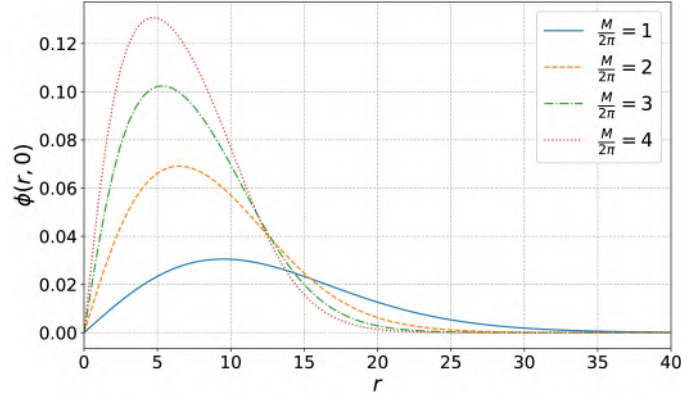


Figura 3.6: Perfiles radiales de la función de onda $\phi(r_\perp, z = 0)$ para diferentes masas totales M , con $m = 1$ y $g = 10$ fijos. Al aumentar M se mejora el confinamiento gravitacional, lo que da como resultado configuraciones más compactas.

SECCIÓN 3.3

Sistema GPPE: Estrellas de Fermiones-Bosones

En esta sección se presentan las soluciones estacionarias del sistema (1.15)-(1.14), las cuales corresponden a la versión Newtoniana de las llamadas Estrellas de Fermiones y Bosones (EFB). Se considerará el caso sin autointeracción en el condensado bosónico, es decir, se fija $g = 0$, con el objetivo de estudiar exclusivamente los efectos generados por la interacción gravitacional entre un gas de bosones y un fluido bariónico.

3.3.1 Ecuaciones Estacionarias

Asumiendo simetría esférica, la función de onda bosónica puede escribirse como $\Psi(t, r) = \psi(r)e^{i\omega t}$, donde $\psi(r)$ es una función real. Esta elección garantiza que la densidad bosónica $|\Psi|^2$ es independiente del tiempo. Se asume que el gas de fermiones se encuentra en equilibrio hidrostático, por lo que $\rho = \rho(r)$, $p = p(r)$, $\vec{v} = \vec{0}$. Como consecuencia, el potencial gravitacional también depende solo de r : $V = V(r)$.

Bajo estas consideraciones, el sistema GPPE se reduce a:

$$-\frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + V\psi = \omega\psi, \quad (3.20)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{dV}{dr}, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \psi^2 + \rho, \quad (3.22)$$

donde el sistema se cierra mediante una ecuación de estado para el fluido bariónico. En este trabajo se considerarán dos opciones: una ecuación de estado politrópica (1.6) y una ecuación de estado de gas ideal (1.7).

En general, el sistema constituye un problema de valores propios para ω , el cual se resuelve aquí mediante el método de shooting, con integración numérica basada en el esquema de Runge-Kutta de cuarto orden. Para facilitar el tratamiento numérico, introducimos las siguientes variables auxiliares:

$$\phi := r^2 \psi', \quad M := r^2 V', \quad \text{con } (' = d/dr),$$

de modo que el sistema puede reescribirse como:

$$\psi' = \frac{\phi}{r^2}, \quad (3.23)$$

$$\phi' = 2r^2 (V - \omega) \psi, \quad (3.24)$$

$$p' = -\rho \frac{M}{r^2}, \quad (3.25)$$

$$V' = \frac{M}{r^2}, \quad (3.26)$$

$$M' = (\psi^2 + \rho) r^2. \quad (3.27)$$

Se busca que las soluciones sean regulares en el origen y localizadas en el espacio, lo cual implica que $\psi(r)$, $\rho(r)$ y $p(r)$ deben tender a cero cuando $r \rightarrow \infty$. Para garantizar estas condiciones, se imponen las siguientes condiciones de frontera:

$$\psi(0) = \psi_c, \quad (3.28)$$

$$\phi(0) = 0, \quad (3.29)$$

$$\rho(0) = \rho_c, \quad (3.30)$$

$$V(0) = V_c, \quad (3.31)$$

$$M(0) = 0, \quad (3.32)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0. \quad (3.33)$$

Para integrar el sistema, basta con establecer los valores iniciales (ψ_c, ρ_c) , ya que V_c puede elegirse arbitrariamente. Cualquier elección de V_c únicamente requiere un reescalamiento posterior del potencial gravitacional y del valor propio ω .

Escalamiento y generación de soluciones

Tal como se discutió en la Sección 1.2, el sistema GPPE es invariante bajo transformaciones de escala, lo que permite generar soluciones autosemejantes. En particular, cuando se considera únicamente el condensado bosónico o el fluido bariónico por separado, esta propiedad permite construir familias completas de soluciones a partir de una configuración base, gracias a la invariancia del sistema de Schrödinger-Poisson o la ecuación de Lane-Emden, respectivamente.

Sin embargo, cuando ambos componentes están acoplados, la transformación de escala requiere que la constante politrópica K se reescale como $K \rightarrow \lambda^{-(2+4/n)} K$, lo cual impide construir toda la familia de soluciones para un par fijo (K, n) . Por tanto, el sistema debe resolverse numéricamente para cada par de valores centrales (ψ_c, ρ_c) , y la simetría de escala solo puede usarse para obtener soluciones equivalentes bajo un cambio de K .

3.3.2 Relación de masas

Para caracterizar la contribución relativa de cada componente, se introduce el cociente de masas:

$$\mu = \frac{M_{\text{gas}}}{M_{\text{BEC}}}, \quad (3.34)$$

donde M_{gas} y M_{BEC} representan la masa total del componente fermiónico y del bosónico, respectivamente, definidas como

$$M_{\text{BEC}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[4\pi \int_0^r \psi(r')^2 (r')^2 dr' \right], \quad (3.35)$$

$$M_{\text{gas}} = \lim_{r \rightarrow R} \left[4\pi \int_0^r \rho(r') (r')^2 dr' \right], \quad (3.36)$$

donde R es el primer cero de la densidad ρ .

En la Figura 3.7, se muestran los perfiles de densidad de ambos componentes, ilustrando cómo la constante μ modifica la estructura del sistema y la dominancia relativa de cada tipo de materia.

Las soluciones obtenidas representan configuraciones de equilibrio donde materia bariónica y bosónica coexisten de manera estable bajo su propia atracción gravitacional. La forma de los perfiles de densidad revela cómo el gas de fermiones puede actuar como un "núcleo" compacto que confina gravitacionalmente al condensado bosónico, o viceversa, dependiendo de la relación de masas μ . Estos resultados son particularmente relevantes en contextos astrofísicos donde se propone la coexistencia de materia oscura bosónica con materia visible en objetos autogravitantes. En particular, el análisis de cómo varía la estructura del sistema al modificar ψ_c o ρ_c permite explorar diferentes escenarios de

dominancia bosónica o fermiónica, cuestión que abordaremos con mayor detalle en los análisis numéricos posteriores.

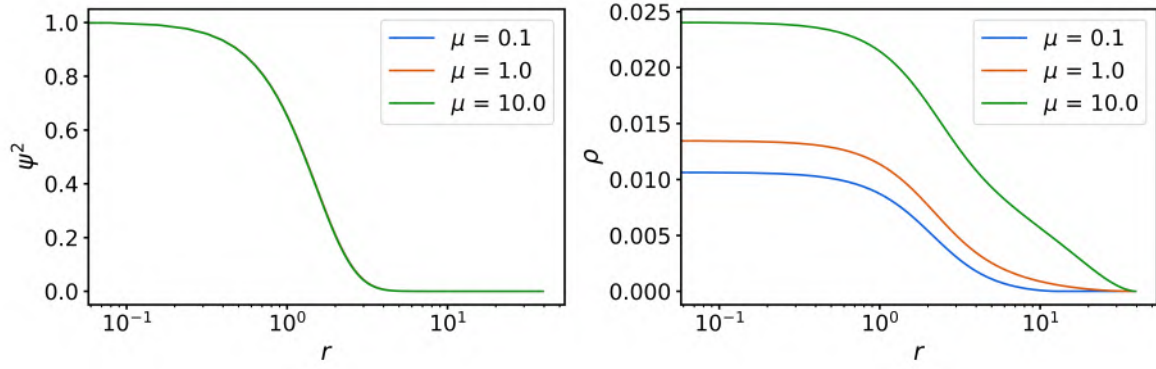


Figura 3.7: Perfiles radiales de la densidad de las contribuciones de materia bosónica (izquierda) y fermiónica (derecha) para tres valores distintos de la razón de masas $\mu = 0.1, 1.0$ y 10.0 .

Fusiones de Binarias

SECCIÓN 4.1

Condiciones Iniciales

Consideramos dos tipos de sistemas binarios: estrellas de bosones (*EB*) y estrellas compuestas de fermiones y bosones (*EFB*). En ambos casos, la configuración inicial consiste en la colisión de dos configuraciones aisladas ubicadas simétricamente con respecto al origen y moviéndose una hacia la otra, como se ilustra en la Figura 4.1. El procedimiento de inicialización para cada caso se detalla a continuación.

4.1.1 Sistema Binario de Estrellas de Bosones.

Cada *EB* está caracterizada por el valor central de su función de onda, ψ_c , el cual determina la masa y el tamaño de cada núcleo solitónico. Para introducir asimetría entre ambas *EBs*, definimos un factor de escala adimensional, denotado por η , que controla la amplitud relativa, posición y velocidad del segundo solitón respecto del primero. El valor central inicial de la función de onda para la configuración izquierda es $\psi_{c,1}$, mientras que para la derecha es $\psi_{c,2} = \eta^2 \psi_{c,1}$. Cada *EB* se ubica inicialmente en $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, 0)$ y $\vec{x}_2 = -\eta \vec{x}_1$, de modo que el centro de masa del sistema está en el origen. Esta construcción usa el hecho de que la segunda *EB* sea una versión escalada de la primera, aprovechando las propiedades de escala del sistema GPP.

La función de onda bosónica total se construye superponiendo ambos paquetes de onda, cada uno impulsado con su respectiva velocidad:

$$\psi(0, \vec{x}) = \psi_1 e^{i\vec{v}_1 \cdot \vec{x}} + \psi_2 e^{i\vec{v}_2 \cdot \vec{x}}. \quad (4.1)$$

donde $\vec{v}_1 = (v_{x,1}, 0, 0)$ y $\vec{v}_2 = -\eta \vec{v}_1$.

4.1.2 Sistema Binario de Estrellas Fermiones y Bosones.

La parte bosónica del sistema EFB se inicializa de la misma manera que en el caso puramente bosónico, utilizando la ecuación (4.1), pero ahora las funciones de onda ψ_1 y ψ_2 corresponden a soluciones en estado fundamental (GS) del sistema GPPE. La componente bariónica, sin embargo, requiere una inicialización adicional para la densidad:

$$\rho(0, \vec{x}) = \text{máx}(\rho_1 + \rho_2, \text{floor}), \quad (4.2)$$

donde $\text{floor} = 10^{-10}$ es una atmósfera artificial introducida para evitar divisiones por cero en las ecuaciones de Euler. El campo de velocidad del gas se define como

$$\vec{v}(0, \vec{x}) = \begin{cases} \vec{v}_1, & \text{si } |\vec{x} - \vec{x}_1| < R_1, \\ \vec{v}_2, & \text{si } |\vec{x} - \vec{x}_2| < R_2, \\ (0, 0, 0), & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (4.3)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de las configuraciones FBS individuales, definidos como el primer cero del perfil de densidad politrópico.

La presión se define de acuerdo con la ecuación de estado politrópica (1.6) con $n = 1.5$ y $K = 10$. El índice politrópico n corresponde a un índice adiabático $\gamma = 1 + 1/n = 5/3$, característico de un gas monoatómico. La elección del valor de la constante politrópica no afecta la generalidad del sistema debido a la invariancia por reescalamiento de las ecuaciones GPPE [12]. Esto nos permite fijar arbitrariamente el valor de K , ya que cualquier otra elección puede recuperarse mediante un cambio de escala.

La contribución relativa del gas al sistema se cuantifica mediante el cociente de masas:

$$\mu = \frac{M_{\text{gas}}}{M_{\text{BEC}}}, \quad (4.4)$$

donde M_{gas} y M_{BEC} son las masas totales de los gases de fermiones y bosones, respectivamente. Definidas por

$$M_{\text{BEC}} = \int |\Psi|^2 d^3x, \quad (4.5)$$

$$M_{\text{gas}} = \int \rho d^3x. \quad (4.6)$$

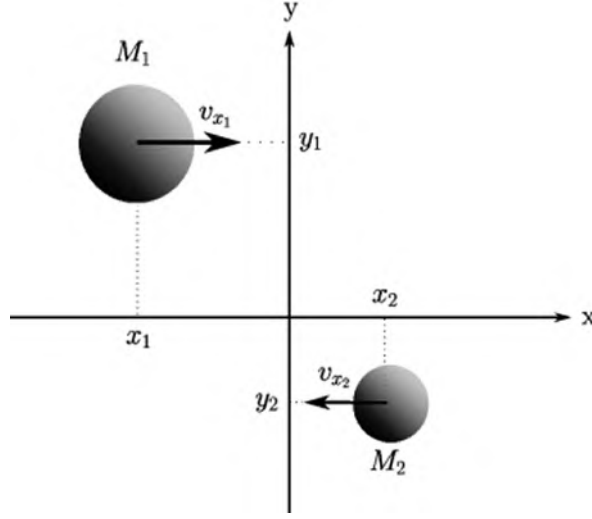


Figura 4.1: Ilustración de las condiciones iniciales para el choque de dos configuraciones.

SECCIÓN 4.2

Configuración Numérica

La evolución se lleva a cabo en un dominio cúbico tridimensional $D = [-20, 20]^3$, discretizado con $N = 128$ puntos por dirección, lo que corresponde a una resolución espacial de $h = 0.3125$. El sistema se evoluciona durante 250 unidades de tiempo con un paso temporal de $\Delta t = 0.01$, el cual satisface la condición de Courant $\Delta t/h^2 < \frac{1}{6\pi^2}$, tal como se recomienda en [27].

Las simulaciones se realizan utilizando el código CAFE-BECMD descrito en la Sección 2.4, donde el sistema GPPE se resuelve mediante un esquema de Runge-Kutta de tercer orden para la integración temporal. La ecuación de Gross-Pitaevskii (1.15) y la ecuación de Poisson (1.16) se resuelven empleando la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Las ecuaciones de Euler (1.11)-(1.13) se resuelven usando métodos HRSC (captura de choques de alta resolución), específicamente el limitador de pendientes Minmod y el solucionador aproximado de Riemann HLLE para calcular los flujos numéricos, tal como se describió en la Sección 2.3.1.

Las condiciones de frontera utilizadas en todas las simulaciones son periódicas, tanto para la función de onda como para las variables hidrodinámicas. Esta elección garantiza la conservación de masa y energía total, y es comúnmente adoptada para emular un entorno cosmológico en el cual las perturbaciones que reingresan al dominio pueden representar influencias externas. Aunque esto implica que el sistema no está estrictamente aislado, las fronteras periódicas permiten una simulación más realista de influencias ex-

ternas, como perturbaciones del medio circundante.

En contraste, para el potencial gravitacional se imponen condiciones de frontera de tipo Dirichlet, fijando $V = 0$ en los bordes del dominio. Esta suposición aísla efectivamente al sistema de fuentes gravitacionales externas. Como resultado, las escalas temporales dinámicas de la colisión binaria se asemejan más a las de un sistema aislado, incluso si los campos materiales evolucionan bajo condiciones periódicas.

SECCIÓN 4.3

Espacio de Parámetros

Para estudiar el efecto de la auto-interacción y de la componente luminosa sobre la compacidad de las configuraciones formadas durante colisiones con momento angular distinto de cero, consideramos los siguientes escenarios:

Efectos de la auto-interacción. Incluimos sólo la contribución del BECDM, variando el parámetro de auto-interacción con los valores $g = -0.1, 0.0, 0.1, 0.2$ y 0.3 . Las condiciones iniciales para el estado fundamental izquierdo se fijan con $\psi_{c,1} = 1$, y posición inicial $\vec{x}_1 = (-5, y_1, 0)$, donde el parámetro de impacto toma los valores $y_1 = 5$ y 10 . La componente de velocidad no nula se toma como $v_{x_1} = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$. Para el estado fundamental derecho, se consideran factores de escala $\eta = \sqrt{1.5}$ y $\sqrt{2.0}$. La elección de posición y velocidad escaladas garantiza que el centro de masa del sistema permanezca en el origen del dominio.

Efectos del gas politrópico. En este caso, consideramos sólo la contribución del gas politrópico, es decir, con $g = 0$. La configuración izquierda tiene una amplitud central de $\psi_{c,1} = 1$ y una razón de masa entre $\mu = 0.1$. Las velocidades y posiciones iniciales son las mismas que en el caso anterior. La configuración derecha toma un valor fijo del factor de escala $\eta = \sqrt{1.5}$ para la componente bosónica y razones de masa entre el gas y el BECDM $\mu = 0.1, 1.0$ y 10.0 . La posición y velocidad se ajustan para que el centro de masa del sistema esté centrado en el origen del dominio.

SECCIÓN 4.4

Diagnóstico

Para analizar la evolución del sistema antes, durante y después de la fusión, monitoreamos el cociente entre las masas de las configuraciones iniciales y finales. Esto nos permite generalizar los hallazgos de [30], que reportaron tendencias de conservación de masa del núcleo en fusiones similares sin auto-interacción.

El perfil de densidad promediado angularmente se define como:

$$f_{\text{avg}}(t, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} f d\Omega, \quad (4.7)$$

donde f representa $|\Psi|^2$ o ρ . El ángulo sólido está dado por $\Omega = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, con elemento diferencial $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Una vez que se ha formado el núcleo final tras la fusión, su masa se calcula como:

$$M_c^{\text{merged}}(t) = 4\pi \int_0^{r_c} f_{\text{avg}}(t, r) r^2 dr, \quad (4.8)$$

donde r_c es el radio del núcleo, definido como el radio en el cual la densidad cae a la mitad de su valor central. La masa del núcleo fusionado M_c^{merged} se compara con las masas iniciales $M_{c,1}$ y $M_{c,2}$ mediante el cociente de masa del núcleo

$$R_{M_c} := \frac{M_c^{\text{merged}}}{M_{c,1} + M_{c,2}}, \quad (4.9)$$

el cual representa la retención de masa de la configuración resultante de la colisión.

SECCIÓN 4.5

Resultados

4.5.1 Efectos de la Auto-interacción

Configuración Final. La Figura 4.2 muestra la evolución del perfil de densidad en el plano $z = 0$ para el caso específico con condiciones iniciales $\eta = \sqrt{2.0}$, $y_1 = 10$ y $v_{x_1} = 0.2$. Se presentan instantáneas en los tiempos $t = 0, 43.2, 64.8$ y 108.0 para diferentes valores de la constante de auto-interacción $g = -0.1, 0, 0.1, 0.2$ y 0.3 .

Un núcleo estable comienza a distinguirse alrededor de $t \sim 64$. A medida que el sistema sigue evolucionando, se forma un halo difuso alrededor del núcleo central. Esto es consecuencia de la masa que escapa hacia las fronteras y posteriormente reingresa al dominio debido a las condiciones de frontera periódicas. Este comportamiento se asemeja al enfriamiento gravitacional (ver [31] para $g = 0$ y [32] para $g \neq 0$), pero contrasta con simulaciones bajo condiciones de frontera aisladas [33, 22], donde los modos salientes son absorbidos y la formación de halos es suprimida.

Las configuraciones resultantes exhiben una estructura característica: un pico denso central (núcleo solitónico) rodeado por un halo que decae lentamente. Estos núcleos solitónicos permanecen estables para todos los valores de g , lo que confirma su robustez

g	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3
$R_{M_c, \max}$	0.6263	0.6866	0.7275	0.7697	0.8263
$R_{M_c, \text{avg}}$	0.5636	0.6011	0.6217	0.6579	0.6839
$R_{M_c, \min}$	0.4921	0.5055	0.5075	0.4387	0.4387

Cuadro 4.1: Valores promedio, máximo y mínimo de la relación de masa del núcleo R_{M_c} provenientes de la fusión de BSs para distintos valores de la constante de auto-interacción g .

tras la fusión. Este comportamiento es consistente con estudios previos [33, 30, 22].

La Figura 4.3 presenta perfiles de densidad promediados angularmente en tres tiempos distintos $t = 100, 180$ y 200 , junto con los ajustes obtenidos mediante la Ec. (3.10). Solo se muestra el caso $\eta = \sqrt{1.5}$, ya que los resultados para $\eta = \sqrt{2.0}$ son cualitativamente idénticos. La estrecha concordancia entre las simulaciones y el modelo empírico (3.10) confirma la formación y estabilidad del núcleo solitónico para cada valor considerado de g .

Relación de Masa Final. Para evaluar el impacto de la auto-interacción sobre la masa final del núcleo, se calcula la relación de masa del núcleo utilizando la Ec. (4.9), enfocándose en el régimen posterior a la fusión, cuando la estructura solitónica ya se ha formado. Esta elección asegura una comparación consistente entre los distintos valores del parámetro de auto-interacción y aísla su efecto en el estado final.

La Figura 4.4 muestra la evolución de la razón R_{M_c} para diferentes valores de g , con resultados de 20 simulaciones por caso. Los datos muestran que R_{M_c} fluctúa alrededor de un valor promedio en cada caso.

La Tabla 4.1 resume los valores promedio ($R_{M_c, \text{avg}}$), máximo ($R_{M_c, \max}$) y mínimo ($R_{M_c, \min}$) de la relación de masa del núcleo. A medida que aumenta la intensidad de la auto-interacción, también lo hace la masa promedio retenida en el núcleo final, lo que indica que las auto-interacciones repulsivas aumentan la eficiencia de fusión y reducen la pérdida de masa durante la relajación.

Estos resultados destacan el papel de la auto-interacción en la regulación de la retención de masa y la formación de halos. Para $g > 0$, las interacciones repulsivas suprimen la pérdida de masa, estabilizan el núcleo resultante y aumentan su compacidad. En contraste, las interacciones atractivas ($g < 0$) conducen a una mayor dispersión de masa en el halo, lo que indica un proceso de relajación menos eficiente. En general, la auto-interacción actúa como un mecanismo de control del enfriamiento gravitacional y de la estructura final del remanente solitónico.

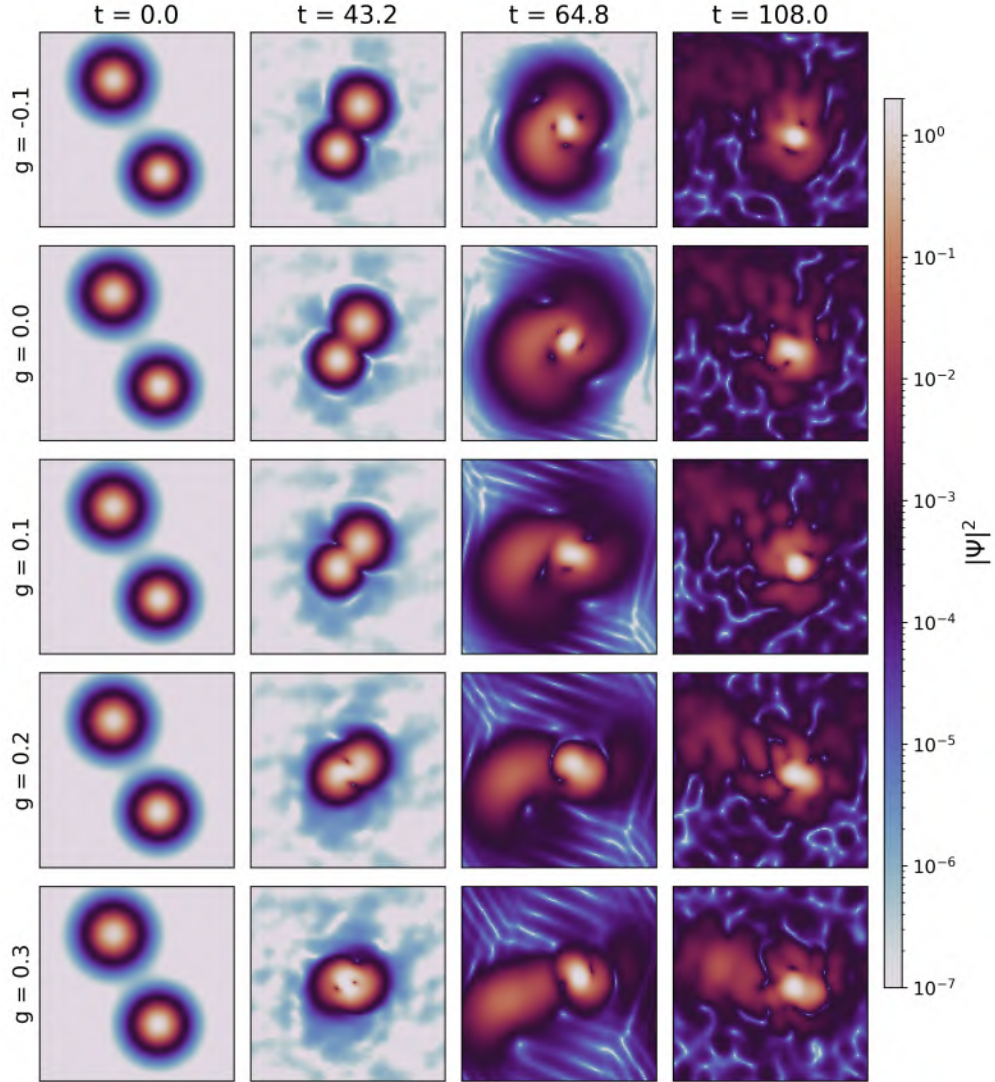


Figura 4.2: Instantáneas de la evolución de la densidad en el plano $z = 0$ en distintos tiempos. Cada fila corresponde a un valor diferente de la intensidad de la auto-interacción $g = -0.1, 0, 0.1, 0.2$ y 0.3 . Parámetros: $\eta = \sqrt{2.0}$, $y_1 = 10$ y $v_{x_1} = 0.2$.

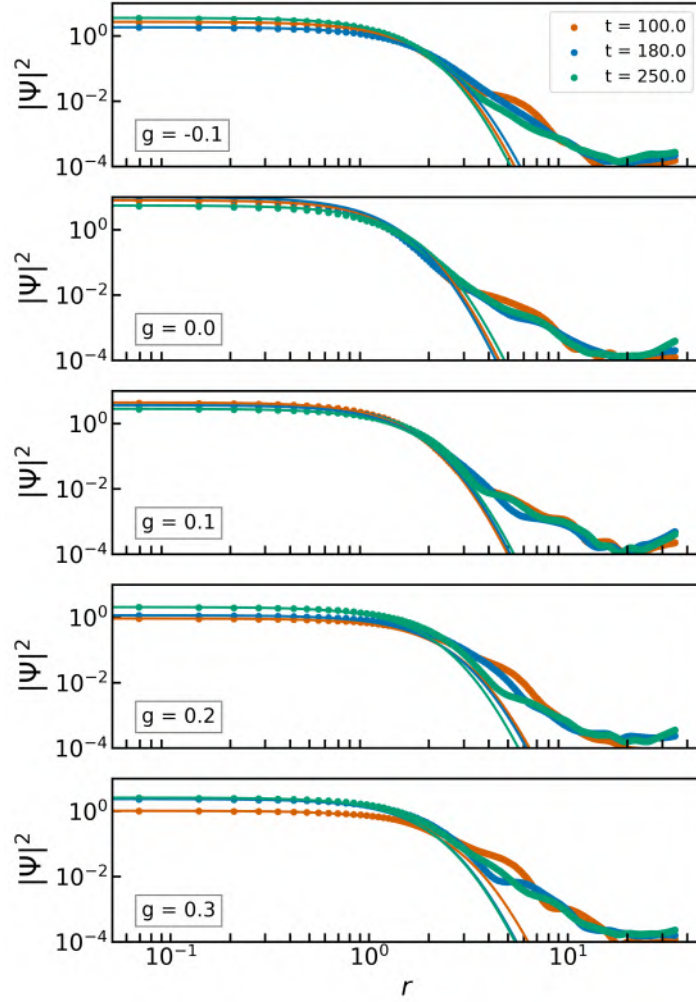


Figura 4.3: Perfil de densidad promediado angularmente (4.7) (mostrado con puntos) en tres tiempos distintos, comparado con el ajuste empírico (3.10) (línea continua). Cada panel corresponde a un valor diferente de $g = -0.1, 0, 0.1, 0.2$ y 0.3 . Parámetros: $\eta = \sqrt{2.0}$, $y_1 = 10$ y $v_{x_1} = 0.2$.

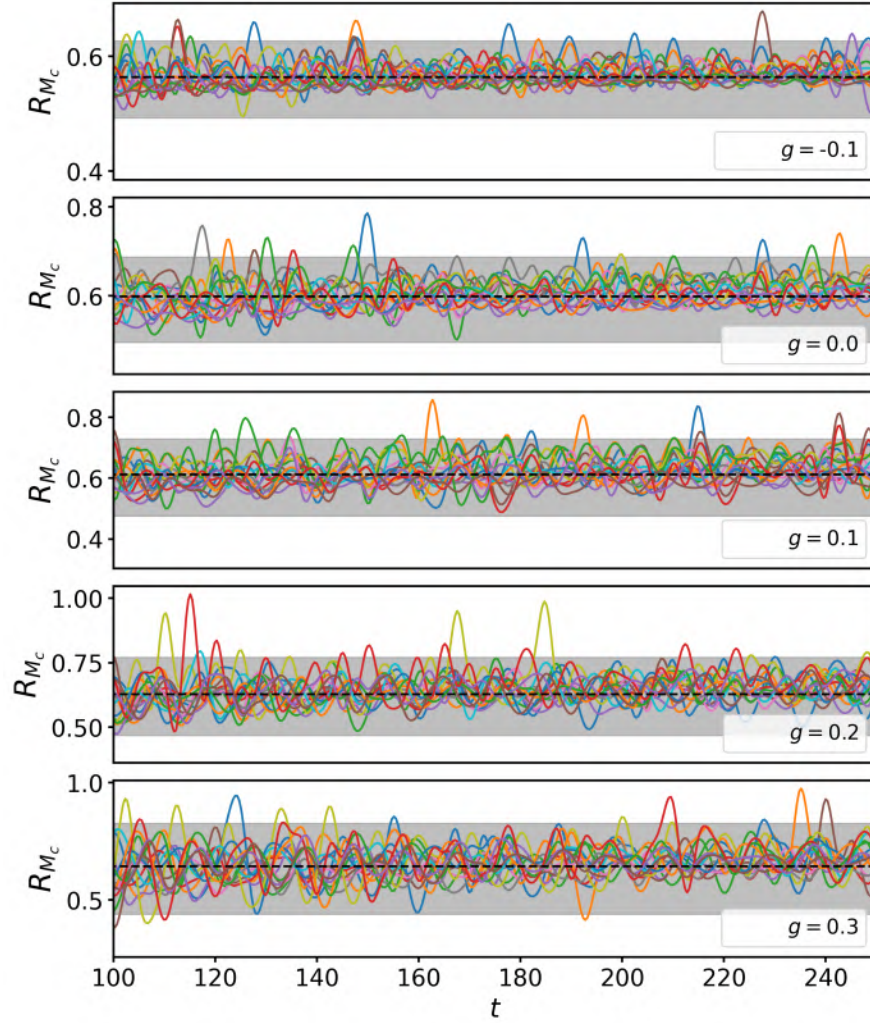


Figura 4.4: Evolución temporal de la relación de masa del núcleo R_{M_c} para $g = -0.1$, 0.0 , 0.1 , 0.2 y 0.3 , mostrados de arriba hacia abajo. Cada panel muestra resultados de 20 simulaciones para un valor fijo de g . Las líneas punteadas indican el valor promedio de R_{M_c} ; las bandas grises denotan el rango de oscilaciones.

μ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$R_{M_c, \text{max}}$	0.6263	0.6911	0.7078	0.7512	0.7643
$R_{M_c, \text{avg}}$	0.5584	0.6102	0.6274	0.6525	0.6737
$R_{M_c, \text{min}}$	0.4921	0.5211	0.5196	0.5073	0.5337

Cuadro 4.2: Valores promedio, máximo y mínimo de la relación de masa del núcleo R_{M_c} para diferentes valores de la razón de masas μ

4.5.2 Efectos del Gas Politrópico

Formación del Núcleo. La Figura 4.5 presenta la evolución del perfil de densidad en el plano $z = 0$ para un caso representativo con condiciones iniciales $\eta = \sqrt{2.0}$, $y_1 = 10$ y $v_{x_1} = 0.2$, y diferentes valores de la constante de presión politrópica $\mu = 0.1, 1.0$ y 10.0 . Las instantáneas corresponden a los tiempos de código $t = 0, 43.2, 64.8$ y 108.0 .

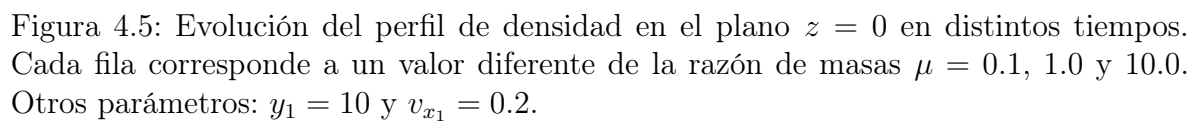
En todos los casos, se observa la formación de un núcleo de BECDM estable rodeado por un halo difuso. Similar al caso con auto-interacción, el halo se genera por la dispersión de materia durante la fusión y la posterior recaptura debido a las condiciones periódicas. El núcleo permanece en el centro del dominio y su tamaño y forma son fuertemente influenciados por la magnitud de μ .

La Figura 4.6 muestra los perfiles de densidad promediados angularmente a tiempos seleccionados, junto con los ajustes mediante la expresión empírica de la Ec. (3.10). Se utilizó nuevamente el caso $\eta = \sqrt{1.5}$ como referencia, dada su similitud cualitativa con $\eta = \sqrt{2.0}$. Los ajustes muestran un excelente acuerdo con los datos simulados, lo que confirma que el perfil solitónico se mantiene incluso en presencia del gas politrópico.

Relación de Masa del Núcleo. Para cuantificar la influencia de la presión politrópica sobre la masa del núcleo final, se calcula nuevamente la relación R_{M_c} a partir de la Ec. (4.9). La Figura 4.7 muestra su evolución para distintos valores de la razón de masas entre el gas y el BEC μ , a partir de 20 simulaciones independientes por cada caso.

La razón R_{M_c} presenta un comportamiento estable después de la fusión, y su valor promedio aumenta con μ , lo que indica que una presión mayor ayuda a retener más masa en el núcleo. La Tabla 4.2 resume los valores promedio, máximo y mínimo de R_{M_c} .

Estos resultados reflejan que el gas politrópico actúa de manera similar a una auto-interacción repulsiva: favorece la retención de masa y reduce la amplitud de las oscilaciones del núcleo resultante. Esto puede interpretarse como una presión efectiva que suaviza los procesos de dispersión durante la relajación, mejorando la eficiencia del enfriamiento gravitacional y la estabilidad del solitón remanente.



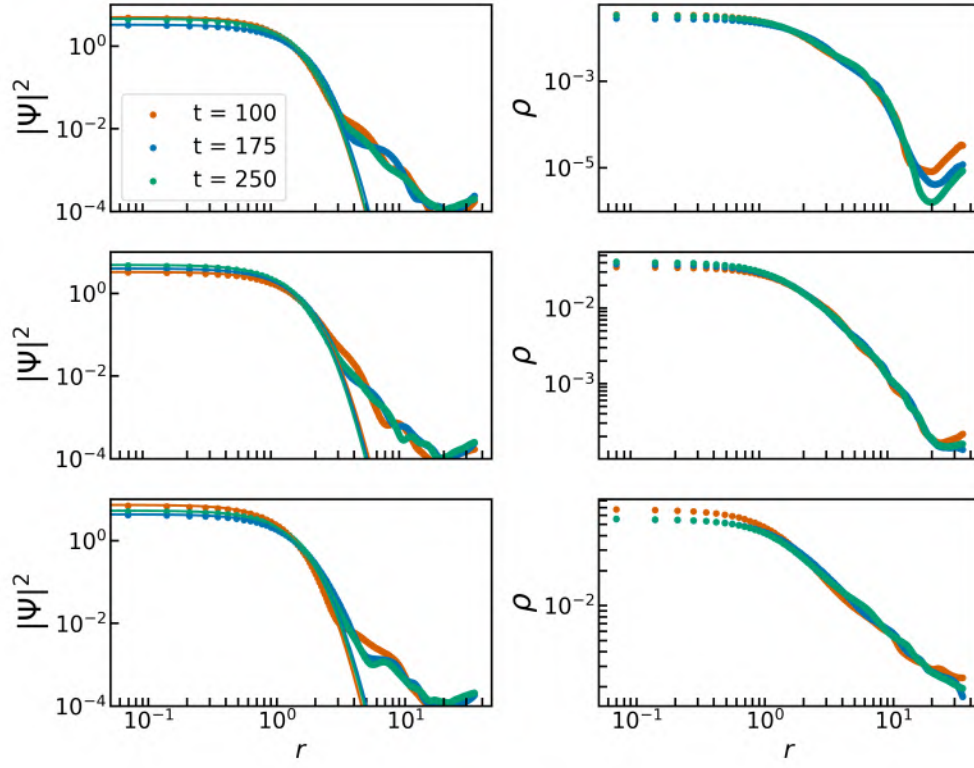


Figura 4.6: Perfiles de densidad promediados angularmente a diferentes tiempos, comparados con el ajuste de la Ec. (3.10). Cada panel corresponde a un valor distinto de $\mu = 0.1, 1.0$ y 10.0 . Otros parámetros: $y_1 = 10$ y $v_{x_1} = 0.2$.

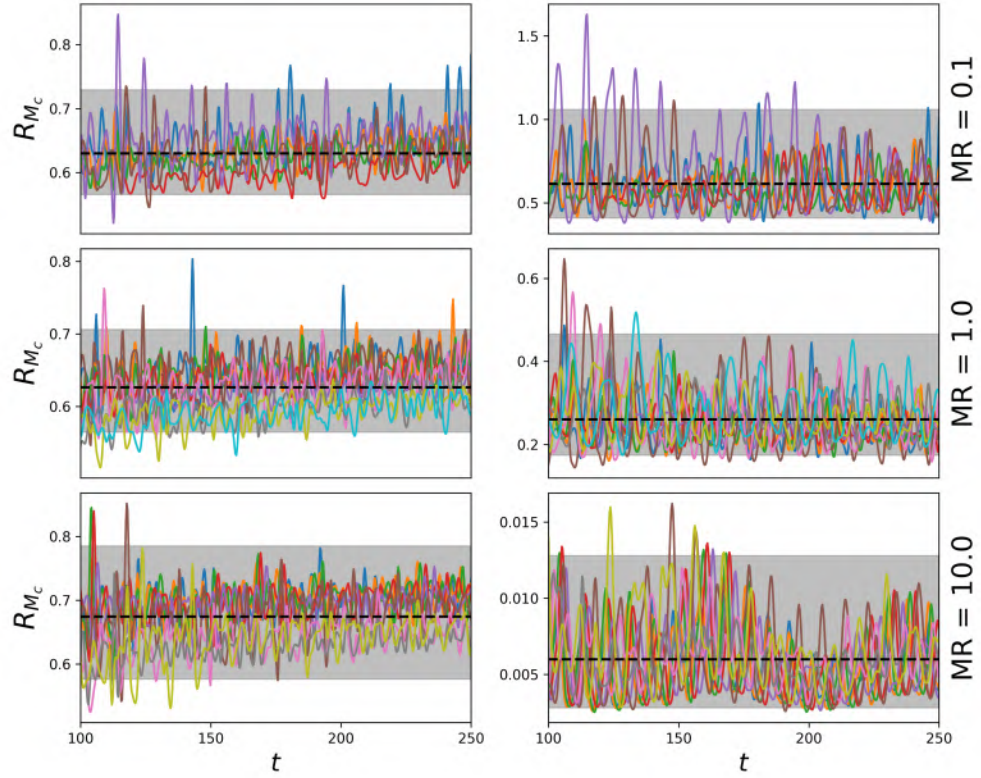


Figura 4.7: Evolución temporal de la relación de masa del núcleo R_{M_c} para valores de $\mu = 0.1, 1.0$ y 10.0 . Cada panel muestra resultados de 20 simulaciones independientes. Las líneas punteadas indican el promedio y las bandas grises el rango de fluctuación.

Vórtices en BECDM y su Interacción con un Gas Ideal

En este capítulo nos centramos en el estudio de líneas de vórtice dentro de un condensado BECDM, particularmente en su interacción gravitacional con un gas ideal.

SECCIÓN 5.1

Condiciones Iniciales

El objetivo es inicializar una línea de vórtice en la componente de BECDM e investigar su influencia dinámica sobre un medio bariónico circundante. Para ello, construimos una solución estacionaria que presente vorticidad axial, tal como se construye en la Sección 3.2. Obtendremos así una función de onda en coordenadas cilíndricas $\Psi(r_\perp, \varphi, z) = \phi(r_\perp, z)e^{im\varphi}$, la cual tendremos que interpolar al dominio tridimensional descrito en coordenadas cartesianas, donde tendrá lugar la evolución.

Las condiciones iniciales para la componente de gas ideal (IG, por sus siglas en inglés) se generan a partir de una función de onda auxiliar:

$$\Psi_{\text{aux}} = A \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-|\vec{p}|^2}, e^{i\Phi(\vec{p})} \right\}, \quad (5.1)$$

donde A es una constante de normalización elegida para que la masa total del gas sea M_{gas} . La densidad inicial del gas se define como $\rho(0, \vec{x}) = |\Psi_{\text{aux}}|^2$. El campo de velocidades $\vec{v}(0, \vec{x})$ se asigna de manera aleatoria, sujeto a la restricción $|\vec{v}(0, \vec{x})| \leq v_m$, donde v_m representa la velocidad máxima permitida para el gas al momento de la inicialización. La presión inicial se establece usando una ecuación de estado politrópica del estilo (1.6). La energía interna correspondiente se calcula a partir de la ley de gases ideales

$$e(0, \vec{x}) = \frac{p(0, \vec{x})}{(\gamma - 1)\rho(0, \vec{x})} = \frac{K}{\gamma - 1} \rho(0, \vec{x})^{\gamma-1}, \quad (5.2)$$

como se define en la ecuación (1.7).

SECCIÓN 5.2**Configuración Numérica**

Las simulaciones se realizaron utilizando el código CAFE-BECDM, descrito en 2.4. El sistema de ecuaciones se resuelve en un dominio tridimensional periódico descrito con coordenadas cartesianas. Todas las ecuaciones de evolución se integran usando un esquema Runge-Kutta de tercer orden.

El sistema se evoluciona por 500 unidades de tiempo adimensionales, en un dominio cúbico de tamaño $L = 80$, discretizado con $N = 128$ puntos por dimensión, dando una resolución espacial uniforme $h = L/N$. El paso de tiempo Δt es fijo y se elige de modo que se satisfaga la condición de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), específicamente $\Delta t/h^2 < 1/(6\pi)$, siguiendo el criterio propuesto en [27].

SECCIÓN 5.3**Espacio de Parámetros**

Para investigar la relajación del IG alrededor de una línea de vórtice en la BECDM, exploramos un espacio de parámetros tridimensional $(g, M_{\text{BEC}}/M_{\text{IG}}, v_{\text{m}})$, donde M_{BEC} y M_{IG} denota las masas totales del condensado y el gas ideal respectivamente. Note que en la sección anterior utilizamos la etiqueta *gas* para referirnos a un gas politrópico de fermiones, ahora usaremos *IG* para denotar que se trata de un gas de fermiones en forma de gas ideal.

Consideramos dos valores para la intensidad de la auto-interacción: $g = 1$ y 100 , para evaluar el impacto de la Autointeracción sobre la estabilidad del vórtice. La masa del núcleo BECDM se fija en $M_{\text{BEC}} = 18.85$, mientras que la razón de masas varía entre $M_{\text{BEC}}/M_{\text{IG}} = 0.1, 1$ y 10 . La velocidad máxima inicial del gas se fija en $v_{\text{m}} = 0.5$ y 1.0 , controlando la respuesta dinámica del componente IG.

Los parámetros restantes se mantienen constantes: el número de vórtices se fija en $m = 1$, correspondiente a la configuración más estable y energéticamente favorable [34, 35]; la constante politrópica es $K = 0.1$, lo que establece una escala de energía interna moderada; y el índice adiabático es $\gamma = 5/3$, apropiado para un gas monoatómico no relativista. Esta configuración da lugar a un total de $2 \times 3 \times 2 = 12$ simulaciones, diseñadas para cuantificar cómo las líneas de vórtice del BECDM influyen en el medio bariónico circundante.

SECCIÓN 5.4**Diagnósticos**

Para caracterizar la evolución del sistema, calculamos varias cantidades macroscópicas para las componentes BECDM e IG en cada paso de tiempo. Para el BECDM evaluamos las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} M_{\text{BEC}} &= \int |\Psi|^2 d^3x, \\ K_{\text{BEC}} &= -\frac{1}{2} \int \Psi^* \nabla^2 \Psi d^3x, \\ W_{\text{BEC}} &= \frac{1}{2} \int |\Psi|^2 V d^3x, \\ I_{\text{BEC}} &= \frac{g}{2} \int |\Psi|^4 d^3x, \end{aligned}$$

donde M_{BEC} es la masa total del condensado, K_{BEC} su energía cinética cuántica, W_{BEC} la energía potencial gravitacional, e I_{BEC} la energía de auto-interacción asociada al término no lineal.

Para la componente IG, calculamos:

$$\begin{aligned} M_{\text{IG}} &= \int \rho d^3x, \\ K_{\text{IG}} &= \frac{1}{2} \int \rho |\vec{v}|^2 d^3x, \\ W_{\text{IG}} &= \frac{1}{2} \int \rho V d^3x, \\ U_{\text{IG}} &= \int \frac{p}{\gamma - 1} d^3x, \end{aligned}$$

donde M_{IG} es la masa total del gas, K_{IG} la energía cinética del volumen, W_{IG} la energía potencial gravitacional y U_{IG} la energía interna.

A partir de estas cantidades, definimos la energía total y las expresiones viriales para cada componente:

$$\begin{aligned} E_{\text{BEC}} &= K_{\text{BEC}} + W_{\text{BEC}}, \\ Q_{\text{BEC}} &= 2K_{\text{BEC}} + W_{\text{BEC}} + 3I_{\text{BEC}}, \\ E_{\text{IG}} &= K_{\text{IG}} + W_{\text{IG}} + U_{\text{IG}}, \\ Q_{\text{IG}} &= 2K_{\text{IG}} + W_{\text{IG}} + 3U_{\text{IG}}, \end{aligned}$$

donde E_{BEC} y E_{IG} son las energías totales del condensado y del gas respectivamente,

mientras que Q_{BEC} y Q_{IG} son escalares viriales derivados del teorema virial generalizado. En equilibrio, estos indicadores deben satisfacer $Q \approx 0$, proporcionando una medida de relajación dinámica y estabilidad para cada componente.

SECCIÓN 5.5

Resultados

5.5.1 Estabilidad del Vórtice

La estabilidad de configuraciones aisladas de líneas de vórtice en BECDM ha sido previamente investigada en [35], su interacción con agujeros negros centrales en [36], y su dinámica durante fusiones frontales en [13]. En este trabajo, analizamos la estabilidad de las líneas de vórtice bajo un tipo de perturbación cualitativamente distinta: una inducida por la condensación gravitacional de un IG con condiciones iniciales aleatorias. Este escenario sirve como banco de pruebas dinámico para evaluar la estabilidad de las configuraciones de líneas de vórtice cuando están inmersas en un medio fermiónico.

La Figura 5.1 ilustra la evolución del sistema en $t = 0, 250$ y 500 . Cada panel muestra una visualización tridimensional de la densidad de BECDM, con una isosuperficie central que resalta la línea de vórtice, superpuesta a un mapa de color volumétrico de la energía interna específica del GI. De arriba hacia abajo, las filas corresponden a razones de masa $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}} = 0.1, 1.0$ y 10.0 , todas para el caso $g = 1$ y velocidad máxima inicial del gas $v_m = 0.5$. El gas inicialmente sigue una distribución homogénea pero con una semilla aleatoria, y se condensa progresivamente debido a la atracción gravitacional.

De manera notable, a pesar de la asimetría del colapso bariónico, la estructura de la línea de vórtice en la BECDM permanece bien definida durante toda la simulación. Esto respalda la hipótesis de que las líneas de vórtice no son simplemente soluciones estacionarias, sino estructuras dinámicamente estables bajo perturbaciones bariónicas.

Una evaluación más cuantitativa se presenta en la Figura 5.2, que muestra la evolución de las densidades máximas de ambas componentes para dos valores de la fuerza de auto-interacción, $g = 1$ y $g = 100$. La columna izquierda corresponde al componente BECDM y la derecha al IG. Cada curva representa una razón de masa distinta ($M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}} = 0.1, 1.0$ y 10.0), con líneas punteadas y sólidas indicando $v_m = 0.5$ y $v_m = 1.0$, respectivamente.

Para $g = 1$, todas las configuraciones exhiben oscilaciones acotadas en la densidad máxima del BECDM, indicando que la estructura de la línea de vórtice permanece estable en todo el espacio de parámetros explorado. El componente gaseoso alcanza un estado cuasi-estacionario tras un transitorio inicial, logrando densidades de equilibrio

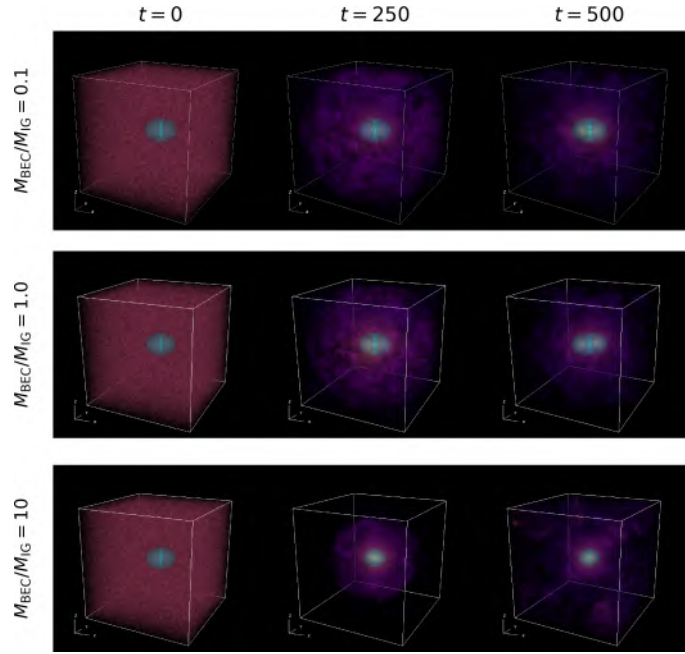


Figura 5.1: Evolución de una configuración de línea de vórtice sumergida en un gas ideal que experimenta condensación gravitacional. Cada panel muestra una visualización volumétrica 3D de la densidad de BECDM, con una isosuperficie (color cian) que resalta el núcleo del vórtice, superpuesta a un mapa de colores de la energía interna específica del gas ideal. Las columnas corresponden a tiempos de simulación $t = 0, 250$, y 500 , y las filas corresponden a $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}} = 0.1, 1.0$, y 10.0 . La intensidad de la autointeracción se fija en $g = 1$, y la velocidad inicial máxima del gas es $v_m = 0.5$.

más altas para mayores razones de masa.

En contraste, el comportamiento para $g = 100$ es marcadamente distinto. La mayoría de las simulaciones con este valor muestran fuertes fluctuaciones de densidad, decaimiento del pico de BECDM y signos claros de inestabilidad—particularmente para razones de masa bajas o moderadas. La única excepción es el caso con $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}} = 10$ y $v_m = 0.5$, que mantiene un núcleo relativamente estable y compacto durante la simulación. Estos resultados indican que una auto-interacción fuerte no mejora universalmente la estabilidad del vórtice; en algunos regímenes, incluso puede desencadenar inestabilidades dinámicas en presencia de perturbaciones bariónicas.

En conjunto, la persistencia de las estructuras de vórtice depende no solo de la autointeracción, sino también del dominio gravitacional de la componente BECDM y de la cantidad de energía cinética inyectada por el gas.

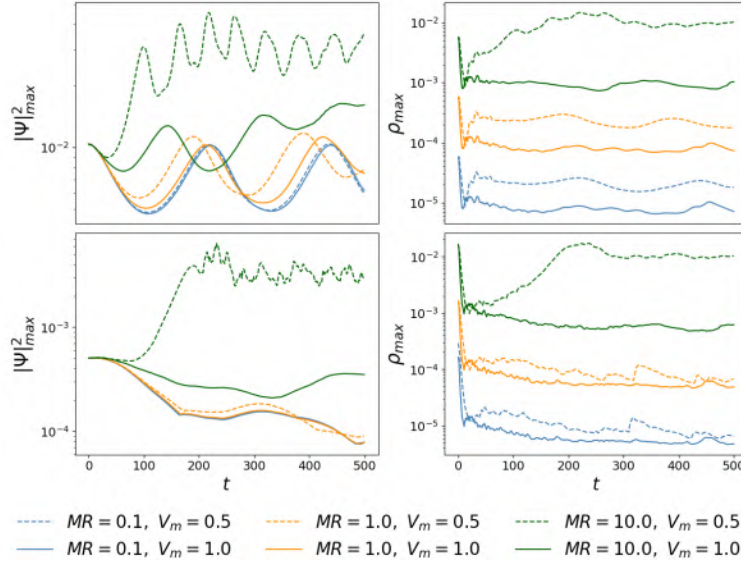


Figura 5.2: evolución temporal de las densidades máximas $|\Psi|^2$ y ρ para las componentes BECDM e IG, respectivamente. Se consideran dos valores de la intensidad de autointeracción : $g = 1$ (fila superior) y $g = 100$ (fila inferior). Las líneas sólidas corresponden a $v_m = 1.0$, y las líneas punteadas a $v_m = 0.5$. Los tres colores representan diferentes razones de masa $M_{IG}/M_{BEC} = 0.1$ (azul), 1.0 (naranja) y 10.0 (verde).

5.5.2 Condensación del gas ideal

La configuración de la línea de vórtice no solo permanece estable dinámicamente en presencia de un gas ideal acoplado gravitacionalmente, sino que también desempeña un papel central en guiar su condensación. Como se muestra en la Figura 5.1, a pesar de la distribución inicial aleatoria del gas, esta colapsa preferentemente alrededor del núcleo del vórtice preexistente de BECDM. Este comportamiento se da para todas las razones de masa M_{IG}/M_{BEC} , aunque la intensidad del colapso depende de dicha razón y de la dispersión de velocidad inicial.

El potencial gravitacional inducido por la línea de vórtice de BECDM actúa como semilla de condensación, atrayendo el gas hacia su centro, donde se acumula y termaliza. Como se ilustra en la Figura 5.2, la densidad del gas atraviesa una fase inicial de compresión rápida, seguida de una estabilización parcial hacia un estado cuasi-estacionario en la mayoría de los casos.

Para $g = 1$, el gas alcanza una densidad central relativamente estable después del colapso inicial, con valores de equilibrio más altos observados para mayores razones de masa M_{IG}/M_{BEC} , reflejando la mayor confinación gravitacional ejercida por un condensado más masivo. En contraste, para $g = 100$, el gas exhibe una dinámica más errática: solo la configuración con $M_{IG}/M_{BEC} = 10$ y $v_m = 0.5$ logra un estado estable, mientras

que los demás casos muestran oscilaciones persistentes y picos de densidad transitorios, impulsados por la inestabilidad del vórtice subyacente.

A pesar de estas fluctuaciones, la densidad máxima del gas permanece acotada en todas las simulaciones, lo que indica que el proceso de condensación no conduce a un colapso descontrolado. Estos resultados sugieren que las líneas de vórtice en BECDM pueden actuar como trampas gravitacionales para la materia bariónica, facilitando potencialmente la formación de estructuras visibles. Sin embargo, la eficiencia y estabilidad de este mecanismo dependen críticamente del balance entre el dominio del condensado y la dinámica del gas, y no son necesariamente mejoradas por una mayor auto-interacción bosónica.

Para evaluar si la línea de vórtice deja una huella morfológica detectable en el gas, las Figuras 5.3 y 5.4 se presentan cortes bidimensionales en $z = 0$ de la densidad del gas filtrada mediante el operador Laplaciano de Gauss (LoG), con isocontornos superpuestos de la BECDM. El mapa de color representa la distribución filtrada del gas, destacando estructuras de borde y gradientes localizados, mientras que los contornos negros trazan regiones de densidad constante del condensado. Para una explicación detallada del operador LoG y su implementación en este contexto, ver el Apéndice A.1.

Los resultados muestran que, a pesar del carácter caótico del gas, la estructura de la línea de vórtice se correlaciona consistentemente con patrones en forma de anillo o crecientes en la densidad filtrada del gas. Estas correlaciones se intensifican en tiempos tardíos ($t \geq 400$) y para mayores razones de masa. En particular, para $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}} = 1.0$ y 10.0 , el filtro LoG revela patrones de ruptura de simetría y distorsiones anulares en el gas que se alinean espacialmente con las isocontornos del vórtice de BECDM.

Esto sugiere que, aunque el gas permanece dinámicamente distinto y no coherente a nivel cuántico, responde gravitacionalmente a la topología subyacente del condensado. Como resultado, la línea de vórtice deja una huella morfológica medible en la componente fermionica, lo que potencialmente permitiría su detección indirecta mediante trazadores luminosos.

5.5.3 Análisis: Energías y Función Virial

Para cuantificar más detalladamente la evolución dinámica y la estabilidad del sistema, analizamos la evolución temporal de las componentes de energía y las cantidades viriales para las componentes BECDM y IG. Las Figuras 5.5 y 5.6 presentan los resultados para todas las combinaciones de g , $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}}$ y v_m , mostrando la energía cinética (K), potencial gravitacional (W), interna (U), de auto-interacción (I), energía total (E) y el escalar virial (Q).

La Figura 5.5 muestra la evolución de las energías del BECDM. Para $g = 1$, el sis-

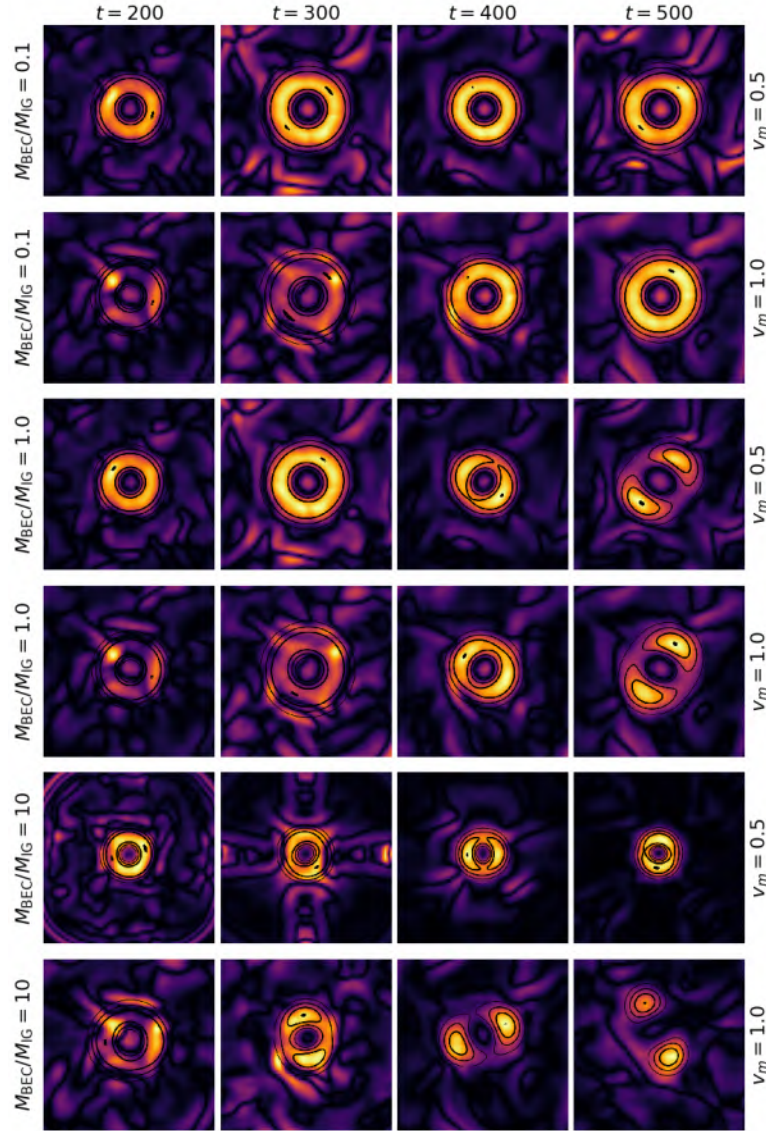


Figura 5.3: Mapas LoG de la densidad del gas ideal en el plano $z = 0$ para $g = 1$, en tiempos $t = 200, 300, 400, 500$. El color de fondo representa la magnitud del filtro, y las curvas negras muestran isodensidades del BECDM. Se observa alineación espacial entre el gas y el núcleo vortical, especialmente para $M_{IG}/M_{BEC} \geq 1.0$.

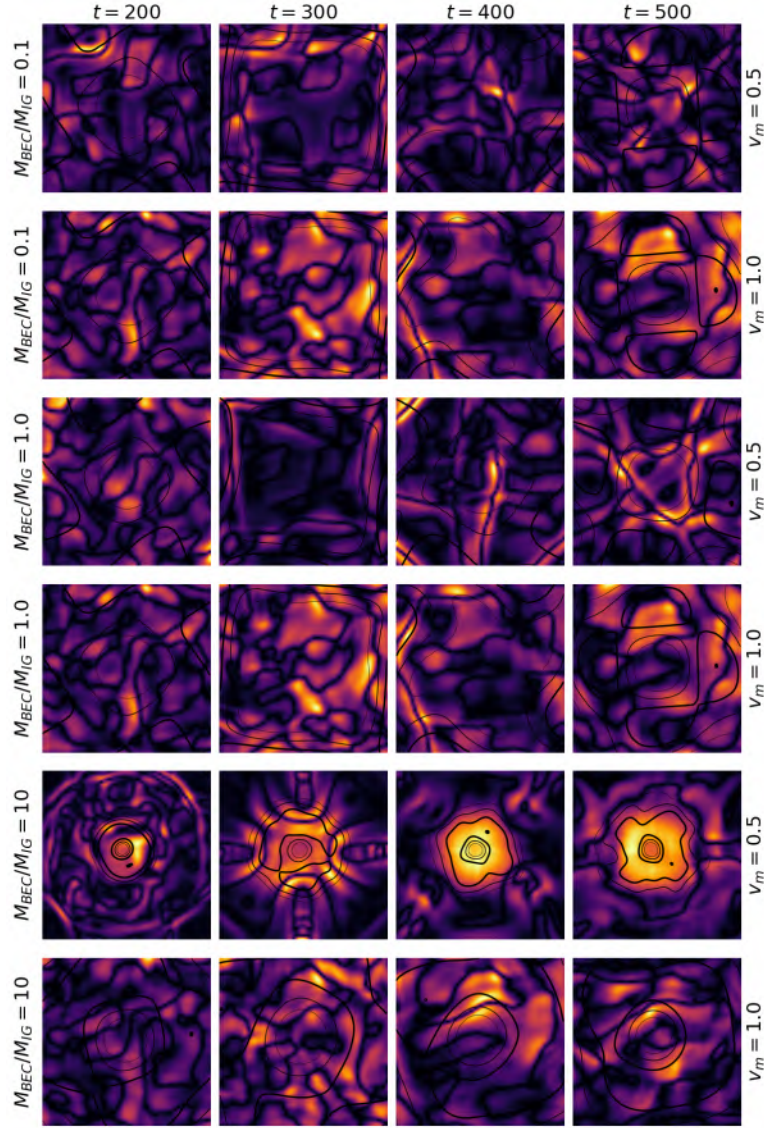


Figura 5.4: Mapas LoG de la densidad del gas ideal en el plano $z = 0$ para $g = 100$, en tiempos $t = 200, 300, 400, 500$. El color de fondo representa la magnitud del filtro, y las curvas negras muestran isodensidades del BECDM. La mayor presión interna del condensado debilita la formación de estructuras coherentes en el gas, salvo en el caso más masivo y frío, donde el colapso del gas refuerza el confinamiento del BECDM.

tema exhibe oscilaciones alrededor de $Q_{\text{BEC}} \approx 0$, particularmente en escenarios con alta razón de masa, lo cual es consistente con una configuración de vórtice dinámicamente estable. La energía total E_{BEC} permanece prácticamente constante en el tiempo, confirmando la conservación global. En contraste, para $g = 100$, la mayoría de las configuraciones muestran desplazamientos monótonos en Q_{BEC} y una reorganización de las componentes de energía, señalando el inicio de inestabilidades y una pérdida gradual de coherencia, excepto en el caso $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}} = 10$, $v_m = 0.5$ que se mantiene marginalmente estable.

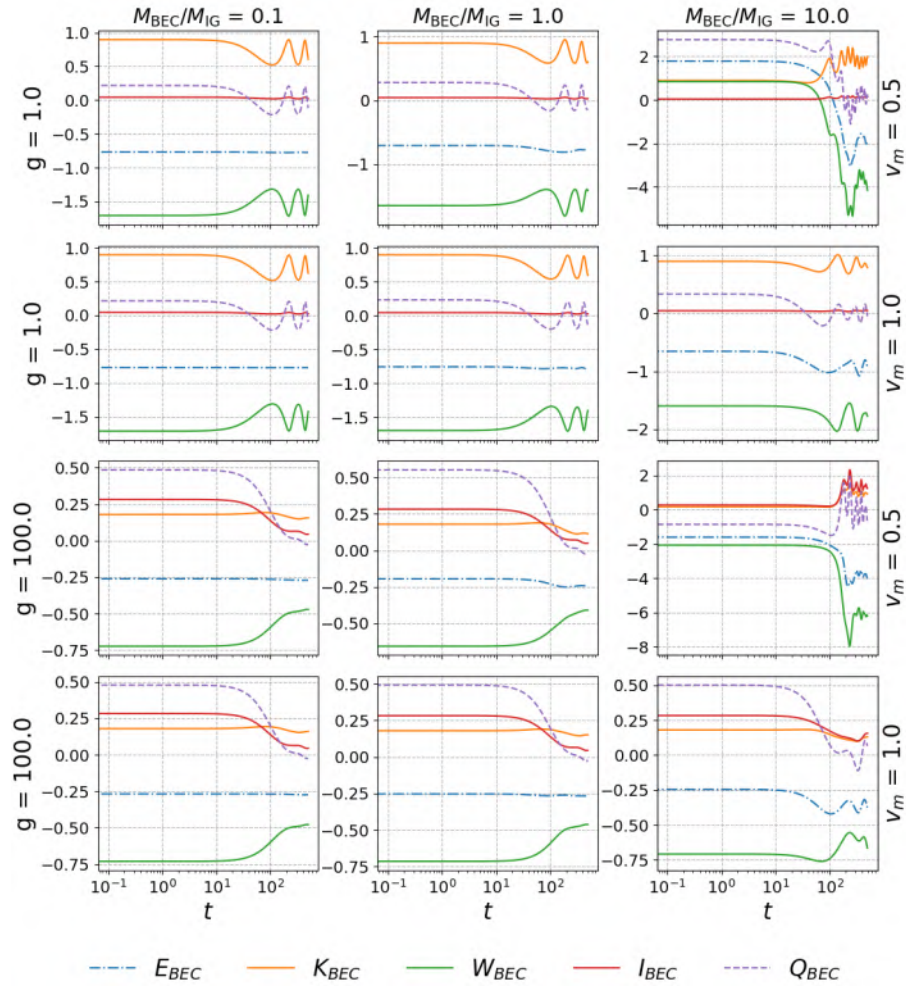


Figura 5.5: Evolución de las energías y de la función virial Q_{BEC} para el componente BECDM, considerando distintas combinaciones de g , $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}}$ y v_m . Las líneas continuas y punteadas corresponden a $v_m = 0.5$ y 1.0 , respectivamente. Para g bajo se observa un comportamiento oscilatorio estable, mientras que con g alto predominan desequilibrios viriales, salvo en el caso más masivo y frío. El eje temporal es logarítmico para resolver la dinámica temprana.

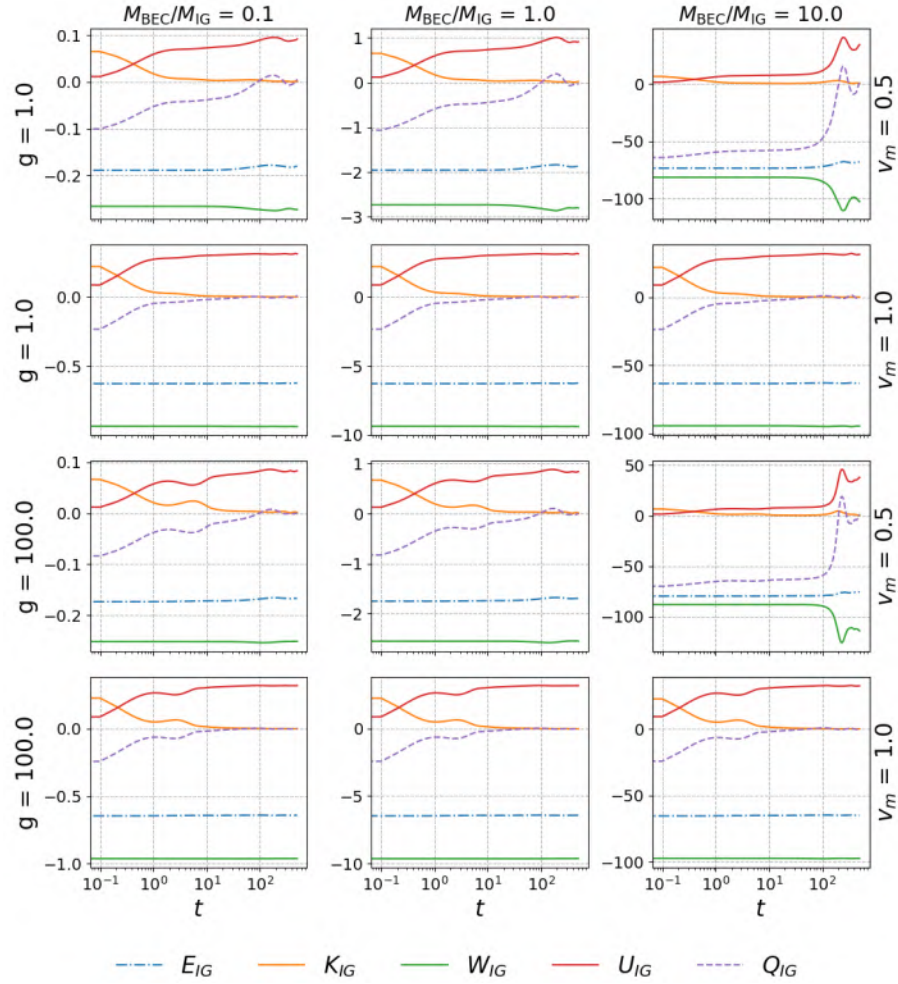


Figura 5.6: Evolución de las energías y de la función virial Q_{IG} para el gas ideal. Se muestran las energías interna, cinética, gravitacional y total. El desacoplamiento más fuerte ocurre en configuraciones con $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}} = 10$. El eje temporal es logarítmico para mayor detalle en tiempos tempranos.

Las energías de la componente IG, mostradas en la Figura 5.6, reflejan su respuesta gravitacional al condensado. Para $g = 1$, el gas alcanza un estado cuasi-estacionario donde las energías cinética e interna se estabilizan, y se satisface aproximadamente la condición virial $Q_{IG} \approx 0$. Sin embargo, para $g = 100$, la mayoría de los casos muestran un claro desequilibrio virial, especialmente para M_{IG}/M_{BEC} grandes, lo cual indica una actividad dinámica sostenida provocada por la inestabilidad del condensado. Cabe destacar que las configuraciones con $M_{IG}/M_{BEC} = 10$ exhiben incrementos significativos tanto en energía interna como cinética, confirmando un fuerte acoplamiento gravitacional entre las componentes.

En conjunto, estos diagnósticos refuerzan la conclusión de que la condensación bariónica inducida por vórtices es más eficiente—y potencialmente observable—cuando el condensado es a la vez masivo y dinámicamente estable. Además, muestran que una fuerte auto-interacción bosónica no necesariamente mejora la estabilidad, y puede en cambio impulsar una redistribución compleja de energía en el sistema.

Conclusiones Generales

Este trabajo ha explorado, mediante simulaciones numéricas, distintos escenarios astrofísicamente relevantes en modelos de materia oscura tipo condensado de Bose-Einstein (BECDM). Los resultados obtenidos posicionan al BECDM como un candidato viable y rico en fenomenología dentro del marco de materia oscura no convencional. Las distintas configuraciones estudiadas (solitones, vórtices) no solo son estables bajo condiciones extremas, sino que también podrían dejar firmas observacionales indirectas a través de su interacción gravitacional con componentes bariónicos.

En particular, se han abordado tres líneas principales: (i) la dinámica de fusiones binarias de solitones bosónicos con auto-interacción, (ii) la evolución conjunta de estrellas Fermión-Bosón (FBS) que incluyen un gas bariónico politrópico, y (iii) la estabilidad y efectos gravitacionales de configuraciones tipo vórtice en presencia de gas ideal. A partir de estos estudios, se desprenden una serie de conclusiones generales que destacamos a continuación.

Autointeracción y fusiones binarias

- La inclusión de una autointeracción repulsiva ($g > 0$) mejora significativamente la retención de masa en el núcleo resultante tras una fusión. Esto se refleja en un aumento del cociente de masa R_{Mc} , lo cual sugiere que dicha interacción actúa como un mecanismo amortiguador durante la colisión, suprimiendo la expulsión violenta de materia.
- La autointeracción también regula la formación del halo difuso: a mayor g , menor es la fracción de materia expulsada, y más estable es el solitón final. Por el contrario, en el caso $g \leq 0$, el sistema presenta mayores oscilaciones y halos más extensos.
- La competencia entre atracción gravitacional y presión cuántica determina la

estructura final, pero de forma no trivial. La dinámica de la fusión no es puramente hidrostática, si no que incluye efectos de interferencia y redistribución energética compleja.

- Estos resultados tienen implicancias para la formación de estructuras en BECDM: los núcleos solitónicos formados tras fusiones serían más masivos, estables y compactos en presencia de auto-interacción repulsiva, con consecuencias directas en su posible detección observacional.

Efectos del gas politrópico sobre la evolución del BECDM

- La presencia de un gas de fermiones modifica la evolución post-fusión. Inicialmente, el gas se dispersa por efectos hidrodinámicos, pero luego tiende a reconcentrarse gravitacionalmente en torno al núcleo bosónico, reforzando su confinamiento.
- A pesar de sus diferentes naturalezas dinámicas (onda vs. fluido), el acoplamiento gravitacional entre el gas y el BECDM permite una evolución cooperativa: la BECDM actúa como trazador del gas de fermiones, estabilizando su morfología.
- La formación del solitón bosónico no se ve inhibida por la presencia del gas. Por el contrario, se mantiene bien localizado y compacto, con un cociente de masa central promedio $M_{cr,avg} \approx 0.63$, similar al caso puramente bosónico.
- El gas aporta una masa extendida adicional a la configuración final, lo que sugiere un proceso de relajación virial más prolongado y una contribución significativa a la forma del perfil gravitacional.
- Estas conclusiones resaltan la importancia de incluir componentes bariónicos o fluidos en modelos de materia oscura: aun interactuando sólo gravitacionalmente, el gas modifica de forma sustantiva las propiedades morfológicas y dinámicas del sistema.

Estabilidad y firmas de vórtices en BECDM con gas

- Las configuraciones de línea de vórtice en BECDM muestran una estabilidad sobresaliente incluso bajo condiciones realistas de colapso gravitacional con gas ideal. En particular, para $g = 1$, las líneas de vórtice se conservan a lo largo de toda la evolución, actuando como atractores dinámicos.

- Estas líneas de vórtice inducen una acumulación sistemática de gas en sus núcleos, formando estructuras cuasiestacionarias que reflejan la morfología del condensado. Esta respuesta gravitacional del gas sugiere una posible vía indirecta de detección mediante trazadores luminosos.
- Se observa una dependencia compleja con el coeficiente de autointeracción: para valores grandes ($g = 100$), la estabilidad de los vórtices se ve comprometida, salvo en el caso más masivo y frío. Esto contradice la expectativa de que una mayor presión interna estabiliza la estructura.
- El análisis energético corrobora este panorama: los casos estables conservan la energía total y alcanzan virialización, mientras que los inestables exhiben redistribución energética y pérdida de equilibrio.
- Finalmente, la eficiencia de condensación del gas está correlacionada con la estabilidad dinámica del vórtice. Esto refuerza la idea de un acoplamiento fuerte entre materia oscura y bariónica en escenarios de formación de estructuras.

Apéndice

SECCIÓN A.1

Detección de estructuras mediante filtrado Laplaciano de Gauss

Para identificar estructuras inducidas por vórtices en la densidad proyectada del gas ideal, aplicamos una técnica de realce de bordes basada en el operador de Marr–Hildreth [37], comúnmente conocido como el filtro Laplaciano de Gauss (LoG, por sus siglas en inglés). Este método se aplica a la densidad del gas ideal evaluada en el plano ecuatorial $z = 0$, y se define como

$$\text{LoG}[\rho|_{z=0}] = \nabla_{(x,y)}^2 (G_\sigma * \rho|_{z=0}) = (\nabla_{(x,y)}^2 G_\sigma) * \rho|_{z=0}, \quad (\text{A.1})$$

donde $G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$ es un núcleo Gaussiano de ancho σ , el símbolo $*$ denota la convolución, y $\nabla_{(x,y)}^2$ es el Laplaciano bidimensional en el plano x - y .

El filtro LoG actúa como un operador pasa-banda: suprime gradientes de gran escala y ruido de alta frecuencia, realzando estructuras a escalas intermedias. En nuestras simulaciones, este filtro resalta de manera efectiva depresiones anulares en la densidad del gas, asociadas con líneas de vórtice del componente BECDM.

Adoptamos un valor fijo de $\sigma = 1$, que ofrece un balance adecuado entre resolución espacial y supresión de ruido cerca del núcleo del vórtice. Para una evaluación eficiente, calculamos el filtro en el espacio de Fourier mediante el teorema de la convolución:

$$\text{LoG}[\rho|_{z=0}] = \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F}(\nabla^2 G_\sigma) \cdot \mathcal{F}(\rho|_{z=0}) \right], \quad (\text{A.2})$$

donde $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ representan las transformadas de Fourier directa e inversa bidimensionales.

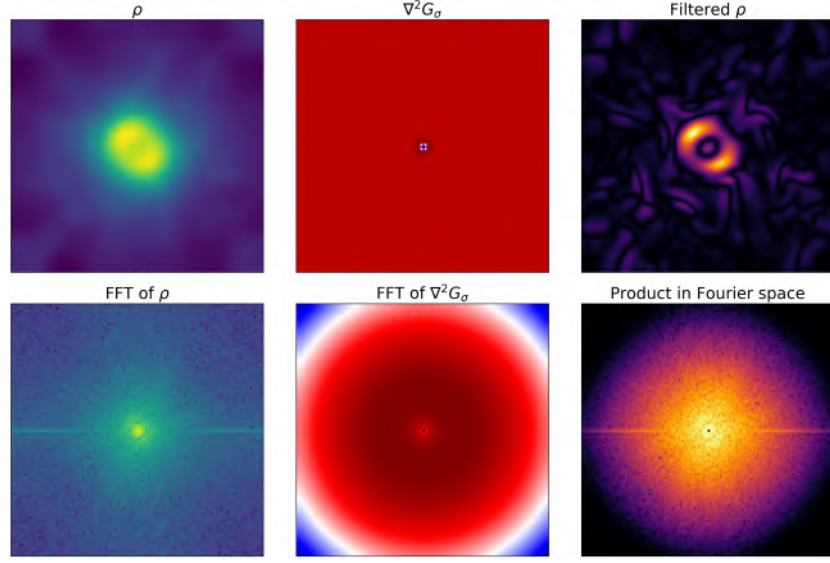


Figura A.1: Aplicación del filtro Laplaciano de Gauss (LoG) a la densidad proyectada del gas ideal en el plano $z = 0$. Fila superior: densidad original ρ , núcleo LoG $\nabla^2 G_\sigma$, y resultado filtrado. Fila inferior: amplitudes de Fourier de ρ , $\nabla^2 G_\sigma$, y su producto. Se utiliza $\sigma = 1$. Parámetros: $g = 1$, $v_m = 0.5$, $M_{\text{IG}}/M_{\text{BEC}} = 1.0$, $t = 500$. El anillo en el resultado filtrado coincide con el núcleo del vórtice, confirmando su origen físico.

La Figura A.1 ilustra este procedimiento para un caso representativo con $g = 1$, $v_m = 0.5$, y $M_{\text{BEC}}/M_{\text{IG}} = 1.0$ en $t = 500$, correspondiente a las simulaciones de la Sección 5.5.2. La fila superior muestra la densidad original del gas, el núcleo LoG y el campo resultante filtrado. La fila inferior presenta las amplitudes de Fourier correspondientes y su producto espectral. La imagen filtrada revela una estructura anular clara alineada con la ubicación del vórtice BECDM, no evidente en los datos sin procesar.

Para confirmar que el anillo detectado no es un artefacto del filtro, aplicamos el mismo procedimiento LoG a un colapso esféricamente simétrico sin formación de vórtices. Este caso corresponde a una distribución inicial homogénea de gas y BECDM. Como se discute en [26], el sistema evoluciona hacia una estrella Fermión-Bosón newtoniana sin momento angular.

La Figura A.2 muestra que el resultado filtrado no presenta estructuras anulares ni asimetrías. La salida del filtro LoG mantiene simetría esférica, coherente con una respuesta de curvatura centrada. Este contraste confirma que la señal asociada al vórtice en la Figura A.1 es genuina y no un artefacto del método.

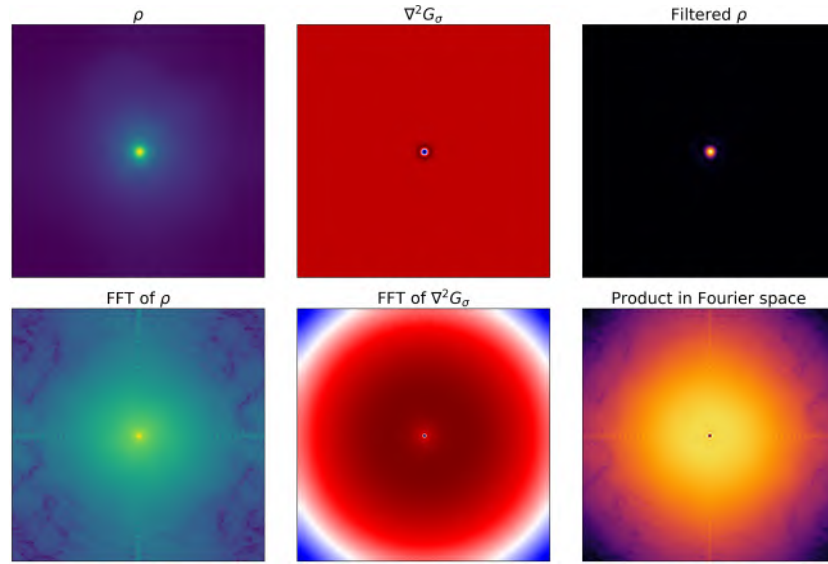


Figura A.2: Filtro LoG aplicado a una configuración esféricamente simétrica sin formación de vórtices. Fila superior: densidad proyectada, núcleo LoG y resultado filtrado. Fila inferior: transformadas de Fourier y producto espectral. La ausencia de estructuras asimétricas confirma que la firma del vórtice en la Figura A.1 no es un artefacto del filtrado.

Bibliografía

- [1] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, and D. Zaritsky. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *The Astrophysical Journal Letters*, 648(2):L109–L113, 2006.
- [2] Max Tegmark, Michael A. Strauss, Michael R. Blanton, Kevork Abazajian, Scott Dodelson, Håvard Sandvik, Xiaomin Wang, David H. Weinberg, Idit Zehavi, Neta A. Bahcall, et al. Cosmological parameters from sdss and wmap. *Physical Review D*, 69(10):103501, 2004.
- [3] Volker Springel, Simon D. M. White, Adrian Jenkins, Carlos S. Frenk, Naoki Yoshida, Liang Gao, Julio Navarro, Robert Thacker, Darren Croton, John Helly, John A. Peacock, Shaun Cole, Peter Thomas, Hugh Couchman, August E. Evrard, Julian Colberg, and Frazer Pearce. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, 435(7042):629–636, 2005.
- [4] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
- [5] Vera C. Rubin, W. Kent Ford Jr, and N. Thonnard. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. iv. systematic dynamical properties, sa through sc. *The Astrophysical Journal Letters*, 225:L107–L111, 1978.
- [6] V. Colín, V. Avila-Reese, and O. Valenzuela. Substructure and halo density profiles in a warm dark matter cosmology. *The Astrophysical Journal*, 542:622–630, 2000.
- [7] Ben Bar-Or, Jean-Baptiste Fouvry, and Scott Tremaine. Relaxation in a fuzzy dark matter halo. *The Astrophysical Journal*, 871(1):28, January 2019.
- [8] Lam Hui. Wave dark matter. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 59(1):247–289, September 2021.
- [9] Iván Álvarez Ríos and Francisco S. Guzmán. Spherical solutions of the schrödinger-poisson system with core-tail structure. *Physical Review D*, 108(6), September 2023.

- [10] Carlos Tena-Contreras, Iván Álvarez-Ríos, and Francisco S. Guzmán. Construction of ground-state solutions of the gross–pitaevskii–poisson system using genetic algorithms. *Universe*, 10(8):309, July 2024.
- [11] F. Siddhartha Guzmán and L. Arturo Ureña López. Evolution of the schrödinger-newton system for a self-gravitating scalar field. *Phys. Rev. D*, 69:124033, Jun 2004.
- [12] Iván Álvarez Rios and Francisco S. Guzmán. Stationary solutions of the schrödinger-poisson-euler system and their stability. *Physics Letters B*, 843:137984, August 2023.
- [13] Anirudh Sivakumar, Pankaj Kumar Mishra, Ahmad A. Hujeirat, and Paulsamy Muruganandam. Revealing turbulent dark matter via merging of self-gravitating condensates. *Physical Review D*, 111(8), April 2025.
- [14] Anirudh Sivakumar, Pankaj Kumar Mishra, Ahmad A. Hujeirat, and Paulsamy Muruganandam. Dynamic instabilities and turbulence of merged rotating bose-einstein condensates, 2024.
- [15] Pierre-Henri Chavanis. Mass-radius relation of newtonian self-gravitating bose-einstein condensates with short-range interactions: I. analytical results. *Physical Review D*, 84(4):043531, 2011.
- [16] Lam Hui, Jeremiah P Ostriker, Scott Tremaine, and Edward Witten. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Physical Review D*, 95(4):043541, 2017.
- [17] Eugene P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2):195–207, 1963.
- [18] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 3rd edition, 2009.
- [19] Iván Álvarez-Rios and Francisco S Guzmán. Exploration of simple scenarios involving fuzzy dark matter cores and gas at local scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 518(3):3838–3849, nov 2022.
- [20] S. Chandrasekhar. The highly collapsed configurations of a stellar mass. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 95(3):207–225, 1935.
- [21] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects. *Wiley-Interscience*, 1983. Capítulo 2 y 3: ecuaciones de estado de gases degenerados.
- [22] Iván Álvarez Rios, Francisco S. Guzmán, and Paul R. Shapiro. Effect of boundary conditions on structure formation in fuzzy dark matter. *Physical Review D*, 107(12), June 2023.

-
- [23] Randall J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [24] Iván Álvarez Rios, Carlos Tena-Contreras, and Francisco S. Guzmán. Kinematic imprints of vortex lines of bec dark matter on baryonic matter. *Physical Review D*, 111(12), June 2025.
- [25] Curicaveri Palomares-Chavez, Ivan Alvarez-Rios, and Francisco S. Guzman. Black holes as condensation points of fuzzy dark matter cores, 2025.
- [26] Ivan Alvarez-Rios, Francisco S. Guzman, and Jens Niemeyer. Fermion-boson stars as attractors in fuzzy dark matter and ideal gas dynamics, 2024.
- [27] Jiajun Chen, Xiaolong Du, Erik W. Lentz, David J. E. Marsh, and Jens C. Niemeyer. New insights into the formation and growth of boson stars in dark matter halos. *Phys. Rev. D*, 104:083022, Oct 2021.
- [28] Hsi-Yu Schive, Ming-Hsuan Liao, Tak-Pong Woo, Shing-Kwong Wong, Tzihong Chiueh, Tom Broadhurst, and W-Y. Pauchy Hwang. Understanding the core-halo relation of quantum wave dark matter from 3d simulations. *Phys. Rev. Lett.*, 113:261302, Dec 2014.
- [29] Philip Mocz, Mark Vogelsberger, Victor H. Robles, Jesús Zavala, Michael Boylan-Kolchin, Anastasia Fialkov, and Lars Hernquist. Galaxy formation with becdm i. turbulence and relaxation of idealized haloes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 471(4):4559–4570, 2017.
- [30] Bodo Schwabe, Jens C. Niemeyer, and Jan F. Engels. Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies. *prd*, 94(4):043513, August 2016.
- [31] Edward Seidel and Wai-Mo Suen. Formation of solitonic stars through gravitational cooling. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2516–2519, Apr 1994.
- [32] F. S. Guzmán and L. Arturo Ureña López. Gravitational cooling of self-gravitating bose condensates. *The Astrophysical Journal*, 645(2):814D819, Jul 2006.
- [33] F. S. Guzmán, I. Alvarez-Ríos, and J. A. González. Merger of galactic cores made of ultralight bosonic dark matter. *Rev. Mex. Fis.*, 67(1 Jan-Feb):75–83, Jan 2021.
- [34] Tanja Rindler-Daller and Paul R. Shapiro. Angular momentum and vortex formation in bose-einstein-condensed cold dark matter haloes: Angular momentum in bec-cdm haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 422(1):135–161, March 2012.
- [35] Y. O. Nikolaieva, A. O. Olashyn, Y. I. Kuriatnikov, S. I. Vilchynskii, and A. I. Yakimenko. Stable vortex in bose-einstein condensate dark matter. *Low Temperature Physics*, 47(8):684–692, August 2021.

- [36] Noah Glennon, Anthony E. Mirasola, Nathan Musoke, Mark C. Neyrinck, and Chanda Prescod-Weinstein. Scalar dark matter vortex stabilization with black holes. *JCAP*, 07:004, 2023.
- [37] David Marr and Ellen Hildreth. Theory of edge detection. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences*, 207(1167):187–217, 1980.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias en el Área de Física	
Título del trabajo	De Fusiones Binarias a Vórtices Estacionarios: Estructuras con Momento Angular en Materia Oscura Bosónica y su Impacto sobre un Gas Ideal	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Carlos Alberto Tena Contreras	1423327c@umich.mx
Director	Francisco Shidarth Guzman Murillo	francisco.s.guzman@umich.mx
Codirector	Iván Margarito Álvarez Rios	ivan.alvarez@umich.mx
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	umberto.cotti@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción

Asistencia en la redacción	No	
----------------------------	----	--

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Carlos Alberto Tena Contreras
Lugar y fecha	Morelia, Mich. Agosto 2025

Carlos Alberto Tena Contreras Carlos Alberto Tena ...

De Fusiones Binarias a Vórtices Estacionarios Estructuras con Momento Angular en Materia Oscura Bosó

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:484586560

Fecha de entrega

19 ago 2025, 9:34 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

19 ago 2025, 9:38 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

De Fusiones Binarias a Vórtices Estacionarios Estructuras con Momento Angular en Materia Oscu....pdf

Tamaño de archivo

16.5 MB

86 Páginas

18.556 Palabras

96.528 Caracteres

7% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 10 palabras)

Fuentes principales

- 7%  Fuentes de Internet
- 6%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
82 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.