



Universidad Nacional Autónoma de México
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de
Hidalgo



Resolución de superficies tóricas con explosiones de Nash normalizada en característica prima.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

José Amador Cruz Fuentes

Tutor: Dr. Andrés Daniel Duarte
Centro de Ciencias Matemáticas UNAM

Morelia, Michoacán, México
Noviembre, 2025

Índice

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VI
Introducción	VII
1 Preliminares	1
1.1 La grassmanniana	1
1.2 Geometría Tórica	2
1.2.1 Variedades tóricas afines	2
1.2.2 Variedades tóricas afines normales	4
1.2.3 Variedades tóricas	7
2 Explosión de Nash	9
2.1 Explosión de Nash en variedades tóricas	11
2.2 Descripción combinatoria de la explosión de Nash en variedades tóricas	15
3 Fracciones continuas	19
4 Explosión de Nash en superficies tóricas	23
4.1 Poliedro de Newton en dimensión 2	25
4.2 Resolución de superficies tóricas	29
4.3 Resolución en un paso	33
Bibliografía	41

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin la presencia y el apoyo de personas fundamentales en mi formación académica, a quienes deseo reconocer con profundo agradecimiento.

Mi más sincero reconocimiento al Dr. Daniel Duarte, mi asesor, quien reavivó en mí la pasión por las matemáticas, una llama que creía apagada. Agradezco su dedicación, sus enseñanzas, el tiempo generosamente compartido y, especialmente, su paciencia. Valoro enormemente su exigencia, pues detrás de ella descubrí lecciones que trascienden lo académico. Además, su acompañamiento en el proceso de redacción fue invaluable; me ayudó a dar forma a mis ideas y a expresar con claridad los resultados de este trabajo.

A mis sinodales, los doctores Abel Castorena, Jawad Snoussi, Mustapha Lahyane y Bosco Frías, por honrarme con su tiempo y sus valiosos comentarios. Su retroalimentación ha enriquecido no solo este trabajo, sino también mi formación profesional.

Agradezco el apoyo brindado por los proyectos CONAHCyT CF-2023-G-33 y CBF2023-2024-224. Gracias a ellos, pude participar en actividades académicas que enriquecieron mi formación y pude disponer del tiempo necesario para dedicarme completamente a escribir esta tesis.

Más allá de lo académico, este logro es también el fruto del amor y la fortaleza que otros me regalaron sin condiciones.

A mi madre, María del Carmen, le debo todo lo que soy. Su amor incondicional ha sido mi sustento en cada paso. Agradezco el apoyo que me ha brindado en todas y cada una de mis locuras.

A mi querida Alma Lizeth, le agradezco profundamente por impulsarme a seguir persiguiendo mi sueño académico y por brindarme su apoyo económico durante los primeros meses de la maestría. Pero, sobre todo, por estar ahí cuando más dudaba de mí mismo.

Quiero agradecer a Cristhian Garay y a mi amiga Rubi Pantaleón por todos los consejos y el apoyo que me han brindado, desde mucho antes de que siquiera iniciara el posgrado. Su presencia y orientación han sido fundamentales en mi camino.

Con cariño, quiero agradecer a mis amigos de posgrado: Jesús Carreño, Jareb Navarro, Francisco Nieto, Sandy Aguilar, Miguel Guerrero, Carlos Pérez, Emmanuel Balderas, Kevin Rodríguez, Ismael Romo, Yhon Castro y David Martínez. Gracias por convertir el rigor de este camino en una aventura llena de risas y locuras inolvidables.

Y a mis pilares emocionales: Itzel Rosas, Óscar Romero, Ana Caren Hernández y Yerly Soler. Ustedes son mi refugio. Cada conversación, cada gesto de apoyo y cada momento compartido han dejado una huella imborrable en mí. Gracias por todo.

Resumen

En este trabajo abordamos el problema de la resolución de singularidades en superficies tóricas por medio de la iteración de la explosión de Nash normalizada. Asimismo, caracterizamos aquellas superficies tóricas normales cuya explosión de Nash normalizada es suave.

Palabras clave: superficies tóricas normales, explosión de Nash, fracciones continuas, resolución de singularidades, geometría algebraica.

Abstract

In this work we address the problem of resolving singularities in toric surfaces by means of the iteration of the normalized Nash blowup. We also characterize those normal toric surfaces whose normalized Nash blowup is smooth.

Introducción

La resolución de singularidades es un problema central en geometría algebraica. En términos generales, consiste en encontrar, para una variedad algebraica, otra variedad que sea suave y birracionalmente equivalente a ella. En 1964, H. Hironaka demostró en [12] que cualquier variedad algebraica sobre un campo de característica cero admite una resolución de singularidades. Sin embargo, es sabido que sus técnicas no se extienden directamente al caso de característica positiva, por lo que la resolución de singularidades en este contexto sigue siendo un problema abierto en general. Resulta entonces necesario explorar nuevas herramientas para abordar esta cuestión.

La explosión de Nash nos proporciona una construcción geométrica que asocia a una variedad algebraica X una nueva variedad X^* la cual reemplaza los puntos singulares de X por límites de espacios tangentes. Se ha planteado la posibilidad de resolver singularidades iterando este proceso.

Es algo incierto dónde surgió originalmente esta estrategia: M. Spivakovsky menciona en [18] que el problema fue propuesto por primera vez por J. Nash a H. Hironaka a principios de los años sesenta. Independientemente del origen de la pregunta, resulta interesante abordar este problema, pues sugiere un método canónico para resolver singularidades. Esta pregunta ha sido ampliamente estudiada por diversos autores ([15], [17], [8], [10], [13], [18],[9],[1],[11],[7],[3]).

En [15], A. Nobile presenta un ejemplo en el que, considerando la curva $y^2 + x^3 = 0$ sobre un campo $\mathbb{K}$ de característica 2, su explosión de Nash consiste en la explosión a lo largo del ideal $I = (2y, 3x^2) = (x^2)$. Dado que este ideal es principal, la proyección $p : X^* \rightarrow X$ resulta ser un isomorfismo. Este ejemplo muestra cómo, en característica 2, la explosión de Nash no siempre da lugar a una desingularización, lo que llevó a que el problema se abordara principalmente en característica cero. Sin embargo, en [5] se retomó el estudio del problema en característica positiva, superando las dificultades anteriores al introducir la condición adicional de normalidad. Este avance ha abierto la puerta para continuar investigando las propiedades de resolución de la “explosión de Nash normalizada” en característica prima. La variante de Nash normalizada consiste en alternar el proceso de explosión de Nash con la normalización de la variedad, lo que permite obtener una descripción más controlada del proceso de resolución de singularidades. De hecho, esta variante, ya se había introducido por González-Springberg en [10], y estudiada posteriormente por H. Hironaka y M. Spivakovsky en [13] y [18].

Si bien la explosión de Nash es una herramienta aplicable a variedades algebraicas

en general, en esta tesis nos enfocaremos en su estudio dentro del contexto de las variedades tóricas. Estas son variedades algebraicas cuya estructura está determinada por datos combinatorios. Además de ser un caso de interés por sí mismas, su descripción combinatoria facilita tanto el análisis de la explosión de Nash como el proceso de normalización. Este enfoque se apoya en el trabajo de González-Springberg [8], donde se introduce el “ideal logarítmico jacobiano”. Este ideal ha sido fundamental para proporcionar una descripción completamente combinatoria de la explosión de Nash, lo que permitió demostrar la resolución de singularidades en superficies tóricas.

En este trabajo abordamos el problema de resolución de singularidades en superficies tóricas normales resuelto por González-Springberg en [8] y posteriormente por A. Atanasov et al. en [1]. Mientras que González-Springberg utilizó el cálculo de un área asociada al cono que define la variedad, mostrando que dicha área decrece durante el proceso, A. Atanasov et al. adoptaron una técnica diferente al asociar una fracción continua al cono que define la superficie tórica. Con esta técnica la mejora se encuentra en los parámetros que definen a la fracción continua. En este trabajo trataremos este enfoque.

El trabajo de A. Atanasov et al. [1] proporciona una solución al problema de resolución de superficies tóricas normales en característica cero. La parte fundamental de dicha solución yace en el estudio de los vértices del llamado “poliedro de Newton”. Posteriormente, en [4] se introduce el “ideal logarítmico jacobiano módulo p ”, lo que permitió extender el concepto de poliedro de Newton a característica prima y con ello, resolver el problema de resolución de singularidades en superficies tóricas en este contexto.

Además de exponer los resultados de [1] y [4], en esta tesis abordamos el siguiente problema: caracterizar de manera precisa las superficies tóricas normales cuya resolución se obtiene mediante una única explosión de Nash normalizada. Esta caracterización se establece a partir del análisis de las fracciones continuas asociadas a dichas superficies. Es importante señalar que este es un resultado original.

Hemos estructurado esta tesis en cuatro capítulos:

En el capítulo 1 presentamos los preliminares necesarios, incluyendo una breve discusión sobre las grassmannianas y las coordenadas de Plücker, así como un recordatorio de aspectos básicos de geometría tórica.

En el capítulo 2 definimos formalmente la explosión de Nash, demostramos que ésta es isomorfa a la explosión de la variedad en cierto ideal adecuado. También en el caso de variedades tóricas definimos el ideal logarítmico jacobiano el cual nos permitirá proporcionar una descripción detallada de la explosión de Nash para el caso tórico, todo esto en característica positiva.

En el capítulo 3 cambiamos un poco la dirección de lo expuesto en los capítulos anteriores para explorar algunos resultados de fracciones continuas, herramientas que serán fundamentales para el capítulo siguiente.

Finalmente, en el capítulo 4 demostraremos que la explosión de Nash normalizada resuelve las singularidades de superficies tóricas en característica positiva. Además, también presentamos nuestra contribución principal: una caracterización precisa de las superficies tóricas normales cuya explosión de Nash normalizada es suave.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo se presentan algunos conceptos necesarios para este trabajo. La lectura de esta tesis requiere conocimientos básicos de geometría algebraica. A menos que se indique lo contrario, a lo largo de este trabajo $\mathbb{K}$ denotará un campo algebraicamente cerrado y de característica arbitraria.

1.1 La grassmanniana

La grassmanniana jugará un papel fundamental para definir la explosión de Nash, por ello comenzaremos haciendo una breve discusión de ésta.

Es bien sabido que la grassmanniana tiene una estructura de variedad proyectiva dada clásicamente por el morfismo de Plücker. Dado que en la prueba del teorema 2.7 utilizaremos dicho morfismo, daremos una breve descripción de éste. Un tratamiento extenso del tema se puede consultar en [14].

Comenzamos fijando notación que sera útil para definir el morfismo de Plücker:

- Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Dado $1 \leq d < n$, denotamos al conjunto $S_d = \{(i_1, \dots, i_{n-d}) \in [n]^{n-d} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-d} \leq n\}$.

Tomamos a S_d como conjunto de índices para etiquetar a las coordenadas de $\mathbb{P}^N$, donde $N = \binom{n}{d} - 1$.

Definición 1.1. Sean $d, n \in \mathbb{N}$, tales que $d \leq n$. La **grassmanniana** de subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^n$ de dimensión d es el conjunto dado por:

$$Gr(d, n) = \{W \leq \mathbb{K}^n : \dim_{\mathbb{K}}(W) = d\}.$$

Sea $W \in G(d, n)$ definido por el sistema de ecuaciones $\sum_{j=1}^n a_j^i x_j = 0$, $i = 1, \dots, n-d$. Consideramos la matriz $M_W = (a_j^i)$, para cada $(j_1, \dots, j_{n-d}) \in S_d$, denotamos como

$$\Delta_{j_1 \dots j_{n-d}} = \det \begin{pmatrix} a_{j_1}^1 & a_{j_2}^1 & \dots & a_{j_{n-d}}^1 \\ a_{j_1}^2 & a_{j_2}^2 & \dots & a_{j_{n-d}}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^{n-d} & a_{j_2}^{n-d} & \dots & a_{j_{n-d}}^{n-d} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

1.2. Geometría Tórica

Definimos el **morfismo de Plücker** como sigue:

$$\begin{aligned}\psi : G(d, n) &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ W &\longmapsto (\cdots : \Delta_{j_1 \dots j_{n-d}} : \cdots).\end{aligned}$$

El morfismo de Plücker induce una biyección entre la grassmanniana $G(d, n)$ y una subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^N$, definida por una familia de polinomios homogéneos de grado 2. Véase [pág. 292 de [14]].

1.2 Geometría Tórica

En esta sección definiremos nuestro objeto básico de estudio y presentaremos algunos resultados fundamentales dentro de esta teoría. No incluiremos demostraciones, las mismas se pueden consultar en [2] y en [6].

1.2.1 Variedades tóricas afines

Dado $n \in \mathbb{N}$ denotaremos $(\mathbb{K}^*)^n = (\mathbb{K} \setminus \{0\})^n$. Este conjunto tiene las siguientes propiedades:

1. $(\mathbb{K}^*)^n$ tiene estructura de grupo multiplicativo.
2. $(\mathbb{K}^*)^n = \mathbb{K}^n \setminus V(x_1 \cdots x_n)$, es decir, $(\mathbb{K}^*)^n$ es un abierto afín de $\mathbb{K}^n$.
3. $(\mathbb{K}^*)^n \cong V(x_1 y_1 - 1, \dots, x_n y_n - 1) \subset \mathbb{K}^{2n}$, es decir, $(\mathbb{K}^*)^n$ es isomorfo a una variedad afín.

Llamamos **toro algebraico** a toda variedad afín que sea isomorfa a $(\mathbb{K}^*)^n$ y cuya estructura de grupo sea heredada por dicho isomorfismo.

Definición 1.3. Una **variedad tórica afín** es una variedad afín irreducible V que contienen un toro algebraico T como abierto de Zariski tal que la acción de T en sí mismo se extiende a una acción algebraica de T en V .

Ejemplo 1.4. Consideremos la cúspide $C = V(x^3 - y^2) \subset \mathbb{K}^2$ que es una variedad afín irreducible. Definimos el subconjunto abierto $T = C \setminus \{(0, 0)\}$ y observamos que T es isomorfo a $\mathbb{K}^*$ a través de los siguientes morfismos:

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^* &\longrightarrow T \longrightarrow \mathbb{K}^* \\ t &\longmapsto (t^2, t^3) \\ (a, b) &\longmapsto b/a\end{aligned}$$

Además, podemos ver que esta acción se extiende naturalmente a toda C , lo que implica que C es una variedad tórica afín.

1.2. Geometría Tórica

Definición 1.5. Una **retícula** es un grupo abeliano libre de rango finito. Un **semi-grupo** es un conjunto S dotado de una operación binaria asociativa con un elemento identidad. Un **semigrupo afín** es un semigrupo que satisface las siguientes condiciones:

- La operación binaria en S es conmutativa.
- S es finitamente generado, es decir, existe un conjunto finito $\mathcal{A} \subseteq S$ tal que

$$\mathbb{N}\mathcal{A} = \left\{ \sum_{m \in \mathcal{A}} a_m m : a_m \in \mathbb{N} \right\} = S.$$

- S puede encajarse en una retícula.

A continuación daremos una caracterización de las variedades tóricas a partir de semigrupos afines.

Dado un semigrupo afín $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ definimos

$$\mathbb{K}[t^\Gamma] = \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma t^\gamma : c_\gamma \in \mathbb{K} \text{ y } c_\gamma \neq 0 \text{ para un número finito de } \gamma \right\}.$$

Este tiene una estructura de $\mathbb{K}$ -álgebra con el producto inducido por:

$$t^{\gamma_1} \cdot t^{\gamma_2} = t^{\gamma_1 + \gamma_2},$$

donde la suma $\gamma_1 + \gamma_2$ corresponde a la operación del semigrupo.

Proposición 1.6. Sea $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ un semigrupo afín, entonces:

1. $\mathbb{K}[t^\Gamma]$ es un dominio entero.
2. $\mathbb{K}[t^\Gamma]$ es una $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente generada.
3. La variedad afín X_Γ correspondiente a $\mathbb{K}[t^\Gamma]$ es una variedad tórica afín.

Ejemplo 1.7. Consideremos el semigrupo afín $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ generado por $\{2, 3\}$, es decir, $\Gamma = \{0, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{N}$. Observemos que

$$\mathbb{K}[t^\Gamma] = \mathbb{K}[t^2, t^3] \cong \frac{\mathbb{K}[x, y]}{\langle x^3 - y^2 \rangle}.$$

Esto implica que la variedad tórica afín asociada a Γ es $X_\Gamma = V(x^3 - y^2)$.

Ahora sabemos que todo semigrupo afín define una variedad tórica afín. Sin embargo, esto es aún más general ya que dichos semigrupos caracterizan completamente estas variedades.

Teorema 1.8. Sea V una variedad afín, entonces V es tórica si y sólo si $V = X_\Gamma$ para algún semigrupo afín Γ .

1.2.2 Variedades tóricas afines normales

El proceso de normalización de una variedad tórica juega un papel fundamental en este trabajo, y los semigrupos afines serán una herramienta clave en su desarrollo. A continuación, describiremos la construcción de variedades tóricas afines normales y posteriormente analizaremos el proceso de normalización.

Consideremos un subconjunto finito $S \subset \mathbb{R}^d$. Definimos el **cono poliedral generado por** S como el conjunto de combinaciones lineales positivas de los elementos de S , es decir

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u : \lambda_u \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Dado un cono poliedral σ en $\mathbb{R}^d$, definimos su **cono dual** como

$$\check{\sigma} = \{m \in \mathbb{R}^d : m \cdot u \geq 0 \text{ para todo } u \in \sigma\},$$

donde $m \cdot u$ denota el producto punto entre m y u .

Proposición 1.9. *Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ un cono poliedral. Entonces $\check{\sigma}$ es un cono poliedral en $\mathbb{R}^d$ y $\check{\check{\sigma}} = \sigma$.*

De aquí en adelante, cada vez que mencionemos un cono poliedral, nos referiremos a él simplemente como cono.

Definición 1.10. Dado un cono $\sigma \subset \mathbb{R}^d$, se dice que

- σ es **fuertemente convexo** si no contiene subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^d$ de dimensión positiva.
- σ es **racional** si existe un conjunto finito $S \subset \mathbb{Z}^d$ tal que $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(S)$.

Es importante notar que si σ es un cono racional, entonces $\check{\sigma}$ también lo es.

Proposición 1.11 (Lema de Gordan). *Sea σ un cono racional en $\mathbb{R}^d$. Entonces el conjunto $S_\sigma := \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$ es un semigrupo afín.*

Del resultado anterior y de la proposición 1.6, tenemos que a cada cono racional le corresponde una variedad tórica afín, dicha variedad la denotaremos por X_σ . Si el cono $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ es fuertemente convexo, entonces $\dim(X_\sigma) = d$.

Ejemplo 1.12. Consideremos el cono $\mathbb{R}_{\geq 0}((3, -1), (0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$. Podemos notar que su cono dual es $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (1, 3))$.

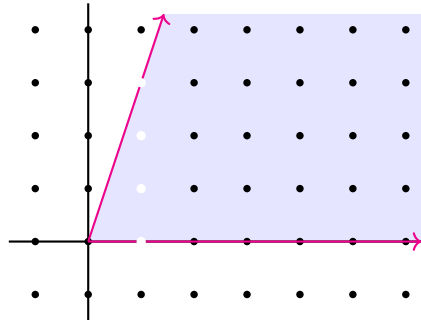


Figura 1.1: Semigrupo $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$

1.2. Geometría Tórica

Notemos que el semigrupo afín $S_\sigma = \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$ esta generado por $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$. De esta manera

$$\mathbb{K}[S_\sigma] = \mathbb{K}[x, xy, xy^2, xy^3] \cong \frac{\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]}{\langle x_1x_3 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2 \rangle}.$$

Por lo tanto concluimos que la variedad tórica, esta dada por $X_\sigma = V(x_1x_3 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2)$.

Teorema 1.13. *Sea X una variedad tórica afín. Entonces X es normal si y sólo si existe σ un cono racional fuertemente convexo tal que $X = X_\sigma$.*

Ahora veamos brevemente el proceso de normalización de una variedad tórica afín. Sea $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ un semigrupo afín. Definimos la **saturación** de Γ como

$$\text{Sat}(\Gamma) = \mathbb{R}_{\geq 0}(\Gamma) \cap \mathbb{Z}^d.$$

De esta manera, la normalización de una variedad tórica afín se describe en el siguiente enunciado.

Teorema 1.14. *Sea $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ un semigrupo afín y sea $\check{\sigma}$ el cono generado por Γ . Entonces, la inclusión $\Gamma \hookrightarrow S_\sigma$ induce el morfismo $X_\sigma \longrightarrow X_\Gamma$, que es la normalización de X_Γ .*

Notemos que en el resultado anterior $S_\sigma = \text{Sat}(\Gamma)$.

Hasta ahora, hemos caracterizado las variedades tóricas afines normales y hemos revisado brevemente el proceso de normalización de una variedad tórica afín. A continuación, abordaremos otro aspecto importante: la descripción de su suavidad, la cual como veremos está determinada por ciertas condiciones en los conos que la definen. Para esto, comencemos definiendo las caras de un cono.

Dado $m \in \mathbb{R}^d$ denotamos como

$$H_m = \{u \in \mathbb{R}^d : m \cdot u = 0\}$$

Definición 1.15. Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ un cono, una **cara** de σ es un subconjunto de la forma $\tau = H_m \cap \sigma$ para algún $m \in \check{\sigma}$. Indicamos que τ es una cara de σ escribiendo $\tau \leq \sigma$.

Observación 1.16. Cada cara de un cono poliedral también es un cono poliedral. Además, si σ es un cono fuertemente convexo y racional es posible encontrar m en $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$ tal que $\tau = H_m \cap \sigma$.

La **dimensión** de un cono σ se define como $\dim(\sigma) = \dim(\text{Span}(\sigma))$, es decir, la dimensión del subespacio vectorial más pequeño que lo contiene. En particular, un **rayo** de σ es una cara de dimensión 1. Estos rayos juegan un papel fundamental ya que determinan un conjunto generador canónico para un cono racional fuertemente convexo.

Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ un cono racional y fuertemente convexo. Consideremos un rayo τ de σ . Dado que τ es racional, el semigrupo $\tau \cap \mathbb{Z}^d$ está generado por un único elemento $u_\tau \in \tau \cap \mathbb{Z}^d$ cuyas entradas son primos relativos. A este elemento se le conoce como el **generador primitivo** de τ .

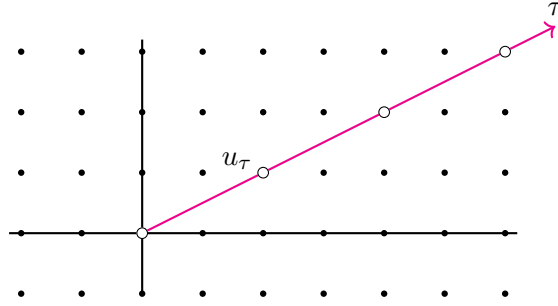


Figura 1.2: Rayo $\tau \subseteq \mathbb{R}^2$ y su generador primitivo u_τ .

Proposición 1.17. *Un cono racional fuertemente convexo es generado por los generadores primitivos de sus rayos.*

Al conjunto descrito en la proposición anterior lo llamamos conjunto mínimo generador de un cono racional fuertemente convexo.

Decimos que un elemento $m \in \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$ no cero es **irreducible** si $m = m_1 + m_2$ para $m_1, m_2 \in \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$ implica que $m_1 = 0$ o $m_2 = 0$.

Para un cono $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ de dimensión máxima, el semigrupo $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$ tiene un conjunto generador minimal único, que se construye de la siguiente manera.

Proposición 1.18. *Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ un cono racional fuertemente convexo de dimensión máxima. Entonces*

$$H = \{m \in \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d : m \text{ es irreducible}\}$$

tiene las siguientes propiedades

1. *H es finito y genera a $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$.*
2. *H contiene los generadores de los rayos generadores de las aristas de $\check{\sigma}$.*
3. *H es el mínimo conjunto generador de $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$ con respecto a la inclusión.*

El conjunto H definido en la proposición anterior es llamado la **base de Hilbert** del semigrupo $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$. Esta base será fundamental en capítulos posteriores.

Definición 1.19. Un cono racional fuertemente convexo $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ de dimensión máxima es **suave** si el conjunto mínimo de generadores de σ es una $\mathbb{Z}$ -base para $\mathbb{Z}^d$.

El concepto de suavidad de una variedad tórica afín normal se relaciona directamente con la suavidad de los conos que la definen, lo cual constituye un ejemplo claro de las ventajas que ofrece la descripción combinatoria de estos objetos.

Teorema 1.20. *Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ un cono racional fuertemente convexo. Entonces X_σ es suave si y sólo si σ es suave. Más aún, toda variedad tórica afín suave es de esta forma.*

1.2.3 Variedades tóricas

En un sentido amplio, una **variedad tórica** es una variedad irreducible X que contiene a un toro $T \cong (\mathbb{K}^*)^n$ como subconjunto abierto de Zariski tal que la acción de T en sí mismo se extiende a una acción algebraica de T en X .

Un resultado fundamental en la teoría de variedades tóricas establece que toda variedad tórica normal puede ser cubierta por variedades tóricas afines normales (véase el teorema 1.23). Este hecho permite asociarles un objeto combinatorio que facilita su estudio. Sin embargo, no todas las variedades tóricas son normales, lo que implica que las herramientas combinatorias del caso normal no siempre son aplicables. En [7] se aborda este problema y se propone una construcción que generaliza el caso normal. A continuación, presentaremos ambas construcciones.

Variedades tóricas normales

La construcción de una variedad tórica normal se apoyará de la construcción dada a partir de conos descrita en la subsección anterior. Comenzamos presentando un resultado que describe el anillo de coordenadas asociado a una cara de un cono dado.

Proposición 1.21. *Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ un cono fuertemente convexo racional y sea $\tau = H_m \cap \sigma$ una cara de σ , con $m \in \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d$. Entonces $\mathbb{K}[S_\tau]$ es la localización de $\mathbb{K}[S_\sigma]$ en $t^m \in \mathbb{K}[S_\sigma]$.*

Definición 1.22. Un **abanico** Σ en $\mathbb{R}^d$ es una colección finita de conos en $\mathbb{R}^d$ tal que

1. Cada cono $\sigma \in \Sigma$ es un cono poliedral fuertemente convexo y racional.
2. Para todo $\sigma \in \Sigma$, cada cara de σ está también en Σ .
3. Para cualesquiera $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, la intersección $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara de ambos conos.

A partir de la información de un abanico, haremos la construcción de una variedad algebraica. Consideremos $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ un abanico:

- Cada $\sigma \in \Sigma$ define una variedad tórica afín X_σ .
- Cada $\tau \leq \sigma$ define un cono $\tau = H_m \cap \sigma$. Por la Proposición 1.21, $\mathbb{K}[S_\tau] = \mathbb{K}[S_\sigma]_{t^m}$. Así, $X_\tau = X_\sigma \setminus V(t^m)$.
- Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ y $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Entonces existe $m \in \check{\sigma}_1 \cap (-\check{\sigma}_2) \cap \mathbb{Z}^d$ tal que $\sigma_1 \cap H_m = \tau = \sigma_2 \cap H_{-m}$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_{\sigma_1} \supset X_{\sigma_1} \setminus V(t^m) & \xrightarrow{\cong} & X_{\sigma_2} \setminus V(t^{-m}) \subset X_{\sigma_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X_{\sigma_1})_{t^m} & \xrightarrow{g_{\sigma_1, \sigma_2}} & (X_{\sigma_2})_{t^{-m}} \end{array}$$

1.2. Geometría Tórica

De esta manera construimos la variedad X_Σ que consta de abiertos afines X_σ , donde dos abiertos $X_{\sigma_1}, X_{\sigma_2}$ se pegan vía el isomorfismo g_{σ_1, σ_2} . Esta es una variedad tórica, normal y separada.

Teorema 1.23 (Sumihiro). *Sea X una variedad tórica normal separada, entonces existe un abanico Σ tal que $X = X_\Sigma$.*

Variedades tóricas no normales

Como mencionamos anteriormente, existen variedades tóricas no normales que no satisfacen el teorema de Sumihiro. Un ejemplo de esto se presenta en [7, Example 41], donde se muestra que la curva proyectiva $V(y^2z - x^2(x+z)) \subset \mathbb{P}^2$ es una variedad tórica que no cumple con dicho teorema. Este ejemplo resalta la necesidad de proponer una construcción que generalice el caso normal. A continuación, presentamos la propuesta realizada por P. González y B. Teissier en [7].

Sea $\Gamma_0 \subset \mathbb{Z}^d$ un semigrupo afín, denotamos como $\check{\sigma}$ al cono generado por Γ_0 y a σ su cono dual. Si τ es una cara de σ , entonces $\Gamma_0 \cap \tau^\perp$ es un subsemigrupo finitamente generado, así $\mathbb{Z}(\Gamma_0 \cap \tau^\perp) \subset \mathbb{Z}^d$ denota su retícula.

Consideramos ahora una pareja (Σ, Γ) , que consta de un abanico Σ en $\mathbb{Z}^d$ y una familia de semigrupos afines $\Gamma = \{\Gamma_\sigma \subset \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^d : \sigma \in \Sigma\}$ que satisfacen lo siguiente:

1. $\mathbb{Z}\Gamma_\sigma = \mathbb{Z}^d$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_\sigma = \check{\sigma}$, para todo $\sigma \in \Sigma$.
2. $\Gamma_\tau = \Gamma_\sigma + \mathbb{Z}(\Gamma_\sigma \cap \tau^\perp)$, para cada $\sigma \in \Sigma$ y para cualquier τ cara de σ .

Así, se define la variedad X_Σ^Γ como la unión de las variedades afines X_{Γ_σ} , con $\sigma \in \Sigma$, donde para cualesquier par $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ pegamos $X_{\Gamma_{\sigma_1}}$ y $X_{\Gamma_{\sigma_2}}$ a lo largo de un abierto común $X_{\Gamma_{\sigma_1 \cap \sigma_2}}$ (ver [7]).

Teorema 1.24. *La variedad X_Σ^Γ es una variedad tórica, y X_Σ es su normalización.*

Capítulo 2

Explosión de Nash

En este capítulo presentaremos la definición formal de la explosión de Nash y demostraremos su equivalencia con la explosión de la variedad a lo largo de un cierto ideal. Posteriormente, ofreceremos una descripción combinatoria de este proceso en el contexto de variedades tóricas. El contenido de este capítulo está basado en los trabajos [15], [4] y [7].

Definición 2.1. Sea X una variedad afín, y sea $I = \langle f_0, \dots, f_s \rangle$ un ideal de $\mathbb{K}[X]$. Consideremos el morfismo

$$\varphi : X \setminus V(I) \longrightarrow X \times \mathbb{P}^s, \quad \varphi(p) = (p, (f_0(p) : \dots : f_s(p))).$$

La **explosión de X a lo largo del ideal I** , denotada por $\text{Bl}_I(X)$, es la cerradura de Zariski de la imagen $\varphi(X \setminus V(I))$ en $X \times \mathbb{P}^s$.

Definición 2.2. Sea $X \subset \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión d . Consideremos la aplicación

$$G : X \setminus \text{Sing}(X) \longrightarrow X \times \text{Gr}(d, n), \quad G(p) = (p, T_p(X)),$$

donde $T_p(X)$ es el espacio tangente de X en p . Denotamos por X^* a la cerradura de Zariski de $G(X \setminus \text{Sing}(X))$ en $X \times \text{Gr}(d, n)$ y llamamos ν a la restricción en X^* de la proyección de $X \times \text{Gr}(d, n)$ sobre X . La **explosión de Nash** es el par (X^*, ν) .

En virtud del morfismo de Plücker, consideramos la grassmanniana $G(d, n)$ como una subvariedad de $\mathbb{P}^N$. Con esta identificación, la explosión de Nash se describe como

$$X^* \cong \overline{\psi_0(X \setminus \text{Sing}(X))} \subset X \times \mathbb{P}^N,$$

donde la aplicación

$$\psi_0 := (\text{Id} \times \psi) \circ G : X \setminus \text{Sing}(X) \longrightarrow X \times \mathbb{P}^N \quad (2.3)$$

asigna a cada punto no singular de X las coordenadas de Plücker del espacio tangente.

Ejemplo 2.4. [17] Consideremos la curva $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^p + y^q = 0\}$, donde $p, q \in \mathbb{N}$ son primos relativos. Notemos que X tiene una única singularidad en el origen. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} X^* &= \overline{\{((x, y), (px^{p-1} : qy^{q-1})) \in X \times \mathbb{P}^1 : (x, y) \neq (0, 0)\}} \\ &= \overline{\{((x, y), (px^{p-1}xy : qy^{q-1}xy)) \in X \times \mathbb{P}^1 : (x, y) \neq (0, 0)\}}. \end{aligned}$$

Usando que $x^p = -y^q$, escribimos

$$\begin{aligned} X^* &= \overline{\{(x, y), (-py^q y : qy^q x) \in X \times \mathbb{P}^1 : (x, y) \neq (0, 0)\}} \\ &= \overline{\{(x, y), (-py : qx) \in X \times \mathbb{P}^1 : (x, y) \neq (0, 0)\}}. \end{aligned}$$

Veamos su representación en cartas afines:

$$\begin{aligned} X^* \cap U_0 &\cong \overline{\left\{ \left(x, y, \frac{-q}{p} \frac{x}{y} \right) \in \mathbb{C}^3 : x^p + y^q = 0, (x, y) \neq (0, 0) \right\}} \\ &\cong \overline{\left\{ \left(x, y, \frac{x}{y} \right) \in \mathbb{C}^3 : x^p + y^q = 0, (x, y) \neq (0, 0) \right\}} \\ &\subset \{(x, y, x') \in \mathbb{C}^3 : x^p + y^q = 0, yx' = x\}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$X^* \cap U_0 \cong \{(y, x') \in \mathbb{C}^2 : (yx')^p + y^q = 0\}.$$

Por lo tanto,

$$X^* \cap U_0 \cong \{(y, x') \in \mathbb{C}^2 : x'^p + y^{q-p} = 0\}, \quad \text{si } q \geq p; \quad (2.5)$$

$$X^* \cap U_0 \cong \{(y, x') \in \mathbb{C}^2 : y^{p-q} x'^q + 1 = 0\}, \quad \text{si } q \leq p. \quad (2.6)$$

La curva (2.6) es no singular. En cambio la curva (2.5) aún presenta una singularidad en el origen, pero con un exponente menor. La representación de $X^* \cap U_1$ se obtiene de manera análoga.

Hemos visto en el caso concreto de la curva X cómo se construye la explosión de Nash y cómo esta transformación modifica la singularidad en el origen. De manera más general, A. Nobile demostró que la explosión de Nash de cualquier variedad puede interpretarse en términos de una explosión a lo largo de un ideal, lo que proporciona una perspectiva más amplia sobre su naturaleza algebraica. A continuación, enunciamos este resultado.

Teorema 2.7. [15, Theorem 1] *Sea $X \subset \mathbb{K}^n$ una variedad irreducible, entonces la explosión de Nash de X es la explosión de X a lo largo de un ideal.*

Demostración. Sea $\mathbb{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ el ideal que define X , y supongamos que $\dim(X) = d$. Consideremos la matriz jacobiana de X :

$$\text{Jac}(X) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Por el criterio jacobiano, existe un menor de tamaño $(n - d) \times (n - d)$ que no se anula en algún punto de X . Sin pérdida de generalidad, supongamos que dicho menor corresponde a la submatriz obtenida al tomar las primeras $n - d$ filas de $\text{Jac}(X)$.

Definamos la matriz

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad 1 \leq i \leq n - d, \quad 1 \leq j \leq n.$$

2.1. Explosión de Nash en variedades tóricas

Para una elección de columnas $\alpha \in S_d$ de la matriz J , denotamos por Δ_α al menor correspondiente a dichas columnas (ver la notación de la grassmanniana, sección 1.1).

Ahora, consideremos el ideal

$$I = \langle \Delta_\alpha \mid \alpha \in S_d \rangle.$$

Afirmamos que $\text{Bl}_I(X)$ coincide con la explosión de Nash de X . Para demostrarlo, primero observemos que por construcción el conjunto de ceros de I , es decir, $V(I)$, contiene al conjunto de puntos singulares de X , esto es

$$S(X) \subseteq V(I).$$

Esto implica que el complemento $X \setminus V(I)$ es denso en $X \setminus S(X)$ en la topología de Zariski. Como la explosión de Nash se define como la cerradura

$$X^* = \overline{\psi_0(X \setminus S(X))},$$

obtenemos que

$$X^* = \overline{\psi_0(X \setminus V(I))}.$$

Sea $z \in X \setminus V(I)$. Entonces, z no es singular. Además,

$$T_z(X) = \bigcap_{i=1}^{n-d} V \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(z)}{\partial x_j} x_j \right).$$

Aplicando el morfismo de Plücker obtenemos

$$\psi(T_z(X)) = (\cdots : \Delta_\alpha : \cdots)_{\alpha \in S_d}, \quad (2.8)$$

donde Δ_α es el determinante obtenido de la matriz $\left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial x_j} \right)$, con $1 \leq i \leq n-d$ y $1 \leq j \leq n$, al seleccionar las columnas correspondientes a α . De esta forma, tomando φ según la definición 2.1, y considerando las igualdades (2.8) y (2.3), concluimos que

$$\varphi(z) = (z, (\cdots : \Delta_\alpha : \cdots)) = \psi_0(z),$$

es decir, la explosión de Nash de X coincide con la explosión de X a lo largo del ideal I . □

2.1 Explosión de Nash en variedades tóricas

En el contexto de variedades tóricas, la explosión de Nash puede describirse de manera combinatoria. En característica cero, esta descripción se basa en el ideal logarítmico jacobiano introducido por González-Sprinberg en [8]. Mucho tiempo después, en [4], este concepto fue generalizado para el caso de característica prima, permitiendo extender dicha descripción. En esta sección, abordaremos el caso de característica prima.

2.1. Explosión de Nash en variedades tóricas

Definición 2.9 ([8],[4]). Supongamos que $\text{char}(\mathbb{K}) = p \geq 0$. Sea $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ un semigrupo afín generado por $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, tal que $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}^d$. El **ideal logarítmico jacobiano módulo p** de X_Γ es el ideal:

$$\mathcal{J}_p = \langle t^{\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_d}} : \det(\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_d}) \not\equiv 0 \pmod{p}, i_1 < \dots < i_d \rangle \subseteq \mathbb{K}[t^\Gamma].$$

Ejemplo 2.10. Consideremos el semigrupo $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ generado por $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$. Calculamos para cada p el correspondiente ideal logarítmico jacobiano módulo p . Para ello, comenzamos calculando los determinantes de las matrices formadas por pares de generadores:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Así, para $p = 2$

$$\mathcal{J}_2 = \langle t^{(1,0)+(1,1)}, t^{(1,1)+(1,2)} \rangle = \langle t^{(2,1)}, t^{(2,3)} \rangle,$$

para $p = 0$ y $p \geq 3$

$$\mathcal{J}_p = \langle t^{(1,0)+(1,1)}, t^{(1,0)+(1,2)}, t^{(1,1)+(1,2)} \rangle = \langle t^{(2,1)}, t^{(2,2)}, t^{(2,3)} \rangle.$$

Teorema 2.11. [4, Theorem 1.9] Supongamos que $\text{char}(\mathbb{K}) = p > 0$. La explosión de Nash de X_Γ es isomorfa a la explosión de la variedad a lo largo de su ideal logarítmico jacobiano módulo p .

Antes de demostrar el teorema 2.11, presentamos algunos lemas que serán fundamentales en la prueba. Además, incluimos un ejemplo para ilustrar una de las ideas clave.

Sea $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ un semigrupo afín generado por $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, tal que $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}^d$. Entonces se tiene que

$$\mathbb{I}(X_\Gamma) = \langle X^{\alpha_i} - X^{\beta_i} : b(\alpha_i) = b(\beta_i) \rangle_{i \in [m]},$$

donde $b : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^d$ se define por $b(e_i) = \gamma_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ (ver Lema 3.6 de [19]).

Observación 2.12. El número de generadores del ideal es al menos la codimensión de la variedad, es decir $c = n - d$.

Sea $K = (k_1, k_2, \dots, k_c) \in S_d$. Definimos a J_K como la submatriz obtenida de $\text{Jac}(X_\Gamma)$ al considerar las primeras c filas y las columnas correspondientes a K . Además, definimos a B_K como la submatriz obtenida de $B = (\alpha_i - \beta_i)_{i \in [c]}$ al tomar las filas correspondientes a K .

Ejemplo 2.13. Consideremos el semigrupo afín $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ generado por los elementos $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$. Del Ejemplo 1.12, sabemos que el ideal de la variedad X_Γ está dado por

$$\mathbb{I}(X_\Gamma) = \langle x_1x_3 - x_2^2, x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 - x_3^2 \rangle.$$

2.1. Explosión de Nash en variedades tóricas

Siguiendo la notación anterior, definimos los vectores

$$\alpha_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \alpha_2 = (1, 0, 0, 1), \quad \alpha_3 = (0, 1, 0, 1),$$

$$\beta_1 = (0, 2, 0, 0), \quad \beta_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \beta_3 = (0, 0, 2, 0).$$

De esta manera, obtenemos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Asimismo, la matriz jacobiana asociada a X_Γ es

$$\text{Jac}(X_\Gamma) = \begin{pmatrix} x_3 & -2x_2 & x_1 & 0 \\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \\ 0 & x_4 & -2x_3 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el subconjunto de índices $K = \{2, 3\}$. Calculamos los determinantes de las submatrices B_K y J_K :

$$\det(B_K) = \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3, \quad \det(J_K) = \det \begin{pmatrix} -2x_2 & x_1 \\ -x_3 & -x_2 \end{pmatrix} = 2x_2^2 + x_1x_3.$$

Ahora, observemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} x_2x_3 \det(J_K) &= x_2x_3(2x_2^2 + x_1x_3) \\ &= 2x_2^3x_3 + x_1x_2x_3x_3 \\ &\equiv 2x_1x_3x_1x_4 + x_1x_1x_4x_3 \pmod{\mathbb{I}(X_\Gamma)} \\ &\equiv 3x_1x_1x_3x_4 \pmod{\mathbb{I}(X_\Gamma)}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la notación multiíndice $X = (x_1, x_2, x_3)$, obtenemos la relación

$$x_2x_3 \det(J_K) \equiv X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \det(B_K). \quad (2.14)$$

La relación (2.14) ilustra un caso especial de un resultado más general, que presentamos en el siguiente lema.

Lema 2.15. *Con la notación anterior*

$$X_{k_1} \dots X_{k_c} \det(J_K) \equiv \prod_{i=1}^c X^{\alpha_i} \det(B_K) \pmod{\mathbb{I}(X_\Gamma)}.$$

Demostración. Para cada $i \in [C]$ escribimos

$$\alpha_i = (\alpha_i(1), \alpha_i(2), \dots, \alpha_i(n)) \text{ y } \beta_i = (\beta_i(1), \beta_i(2), \dots, \beta_i(n)).$$

2.1. Explosión de Nash en variedades tóricas

Por propiedades de determinantes tenemos que

$$\begin{aligned}
X_{k_1} \dots X_{k_c} \det(J_K) &= \det \begin{pmatrix} \alpha_1(k_1)X^{\alpha_1} - \beta_1(k_1)X^{\beta_1} & \dots & \alpha_1(k_c)X^{\alpha_1} - \beta_1(k_c)X^{\beta_1} \\ \alpha_2(k_1)X^{\alpha_2} - \beta_2(k_1)X^{\beta_2} & \dots & \alpha_2(k_c)X^{\alpha_2} - \beta_2(k_c)X^{\beta_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_c(k_1)X^{\alpha_c} - \beta_c(k_1)X^{\beta_c} & \dots & \alpha_c(k_c)X^{\alpha_c} - \beta_c(k_c)X^{\beta_c} \end{pmatrix} \\
&\equiv \det \begin{pmatrix} (\alpha_1(k_1) - \beta_1(k_1))X^{\alpha_1} & \dots & (\alpha_1(k_c) - \beta_1(k_c))X^{\alpha_1} \\ (\alpha_2(k_1) - \beta_2(k_1))X^{\alpha_2} & \dots & (\alpha_2(k_c) - \beta_2(k_c))X^{\alpha_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_c(k_1) - \beta_c(k_1))X^{\alpha_c} & \dots & (\alpha_c(k_c) - \beta_c(k_c))X^{\alpha_c} \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{I}(X_\Gamma)} \\
&\equiv \prod_{i=1}^c X^{\alpha_i} \det(B_K) \pmod{\mathbb{I}(X_\Gamma)}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.16. *Sea*

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}^c \xrightarrow{B} \mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^d \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales. Sea $K \subset [n]$ tal que $|K| = c$. Denotamos por B_K a la matriz formada por los renglones de B correspondientes a K . Y denotamos como $A_{[n] \setminus K}$ a la matriz formada por las columnas de A correspondientes al conjunto $[n] \setminus K$. Entonces $\det(B_K) \neq 0$ si y sólo si $\det(A_{[n] \setminus K}) \neq 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $K = \{d+1, \dots, n\}$ y denotemos $D = [n] \setminus K$.

Supongamos que $\det(B_K) \neq 0$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_d a_d = 0,$$

donde a_j son los vectores columna de A_D . Así, $\lambda_1 A(e_1) + \dots + \lambda_d A(e_d) = 0$, donde $\{e_j\}$ es base canónica de $\mathbb{K}^n$, así $\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \in \ker(A)$, entonces existe $x = (x_1, \dots, x_c) \in \mathbb{K}^c$ tal que $B(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i$, es decir $\sum_{j=1}^c b_{ij} x_j = \lambda_i$ para cada $i = 1, \dots, d$, y $B_K(x) = 0$. Como $\det(B_K) \neq 0$, entonces $x = 0$ y con ello $\lambda_j = 0$ para cada j . Por lo tanto $\det(A_D) \neq 0$.

Para la otra implicación, basta aplicar la discusión anterior en la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}^d \xrightarrow{A^T} \mathbb{K}^n \xrightarrow{B^T} \mathbb{K}^c \longrightarrow 0$$

donde A^T y B^T son las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

□

Demostración del teorema 2.2. Asumamos que $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ es el conjunto mínimo de generadores de $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}^d$ y que $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}^d$. Tomamos $c = n - d$. Por el criterio jacobiano, existen $X^{\alpha_1} - X^{\beta_1}, \dots, X^{\alpha_c} - X^{\beta_c} \in \mathbb{I}(X_\Gamma)$ tales que $\text{rank}(\text{Jac}(X^{\alpha_i} - X^{\beta_i})_{i \in [c]}) = c$.

Consideremos la sucesión

$$\mathbb{Z}^c \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^d \tag{2.17}$$

2.2. Descripción combinatoria de la explosión de Nash en variedades tóricas

donde $A = (\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ y $B = (\alpha_1 - \beta_1 \cdots \alpha_c - \beta_c)$. Notemos que A es sobreyectiva pues $\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}\Gamma$.

Afirmamos que $\text{Im}(B) \subset \ker(A)$. Consideremos el morfismo

$$\pi_\Gamma : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{K}[t^\Gamma], \quad \pi_\Gamma(X_i) = t^{\gamma_i}.$$

Dado que $\ker(\pi_\Gamma) = \mathbb{I}(X_\Gamma)$, entonces $\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} \gamma_j = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} \gamma_j$, donde $\alpha_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})$ y $\beta_i = (\beta_{1i}, \dots, \beta_{ni})$ para $i = 1, \dots, c$. Con ello se sigue que $\text{Im}(B) \subset \ker(A)$.

La sucesión (2.17) induce, cocientando módulo p , la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p^c \xrightarrow{\bar{B}} \mathbb{Z}_p^n \xrightarrow{\bar{A}} \mathbb{Z}_p^d \longrightarrow 0 \quad (2.18)$$

donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ se obtienen con las entradas de A y B módulo p respectivamente. Vamos a mostrar que la sucesión (2.18) es exacta.

Primero notemos que $\bar{A}$ es sobreyectiva pues A lo es y de manera similar, $\text{Im}(\bar{B}) \subset \ker(\bar{A})$.

Sea $J = \text{Jac}(X^{\alpha_i} - X^{\beta_i})_{i \in [c]}$. Como $\text{rango}(J) = c$, existe $K_0 \subset [n]$ con $|K_0| = c$ tal que $\det(J_{K_0}) \neq 0$ en $\mathbb{K}[t^\Gamma]$.

Dado que $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ es un conjunto mínimo de generadores de Γ , se tiene que $X_i \notin \mathbb{I}(X_\Gamma)$, por lo tanto, $\prod_{k \in K_0} X_k \det(J_{K_0}) \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{I}(X_\Gamma)}$. Así, por el Lema 2.15, $\det(B) \neq 0$, entonces $\bar{B}$ tiene rango c y, con ello, $\bar{B}$ es inyectiva. Considerando las dimensiones, concluimos que (2.18) es exacta.

Luego, consideremos $K \subset [n]$, con $|K| = c$. Por el Lema 2.15 tenemos que

$$X_1 X_2 \cdots X_n \det(J_K) \equiv \left(\prod_{i \in [n] \setminus K} X_i \right) \left(\prod_{i=1}^c X^{\alpha_i} \right) \det(\bar{B}_K). \quad (2.19)$$

Por el teorema 2.7, tenemos que X_Γ^* es isomorfo a la explosión de X_Γ a lo largo del ideal $\langle \det(J_K) : K \subset [n], |K| = c \rangle$. Dado que multiplicar por un ideal principal resulta en explosiones isomorfas, al multiplicar por $\langle X_1 \cdots X_n \rangle$ y usar la congruencia (2.19), obtenemos:

$$\begin{aligned} X_\Gamma^* &\cong Bl_{\langle (\prod_{i \in [n] \setminus K} X_i) (\prod_{i=1}^c X^{\alpha_i}) \det(\bar{B}_K) : K \subset [n], |K| = c \rangle} X_\Gamma^* \\ &\cong Bl_{\langle (\prod_{i \in [n] \setminus K} X_i) \det(\bar{B}_K) : K \subset [n], |K| = c \rangle} X_\Gamma^*. \end{aligned}$$

Ahora, en virtud del Lema 2.15, tenemos que

$$\left\langle \prod_{i \in [n] \setminus K} X_i : \det(\bar{B}_K) \neq 0, K \subset [n], |K| = c \right\rangle = \left\langle \prod_{i \in [n] \setminus K} X_i : \det(\bar{A}_{[n] \setminus K}) \neq 0, K \subset [n], |K| = c \right\rangle,$$

el cual corresponde al ideal $\mathcal{J}_p$. □

2.2 Descripción combinatoria de la explosión de Nash en variedades tóricas

En la sección anterior vimos que la explosión de Nash de una variedad tórica corresponde a la explosión de la variedad a lo largo de su ideal logarítmico jacobiano

2.2. Descripción combinatoria de la explosión de Nash en variedades tóricas

módulo p , el cual es un ideal monomial. En esta sección, describiremos la explosión de una variedad tórica afín a lo largo de un ideal monomial desde un enfoque combinatorio. Posteriormente, veremos como se aplica esto en el caso de la explosión de Nash.

Sea $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ un semigrupo afín tal que $\mathbb{Z}\Gamma = \mathbb{Z}^d$. Denotemos por $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma$ y σ su cono dual, asumamos además que $\check{\sigma}$ es fuertemente conexo.

Consideremos un ideal monomial $I = \langle t^{m_1}, \dots, t^{m_k} \rangle \subset \mathbb{K}[t^\Gamma]$. Para simplificar, también denotamos como I al conjunto de exponentes es decir, $I = \{m_1, \dots, m_k\}$. Definimos el **poliedro de Newton** asociado a I como:

$$N_\sigma(I) = \check{\sigma} + \text{Conv}\{m_1, \dots, m_k\},$$

donde Conv denota la envolvente convexa.

Para cada $m_i \in I$, definimos los semigrupos

$$\Gamma_i = \Gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(m_1 - m_i, \dots, m_k - m_i),$$

y denotamos por σ_i a los conos duales de $\check{\sigma}_i = \mathbb{R}_{\geq 0}\Gamma_i$. Además, para $\tau \leq \sigma_i$, definimos el semigrupo $\Gamma_{i,\tau} = \Gamma + \mathbb{Z}(\Gamma \cap \tau^\perp)$ y denotamos por $\Gamma(I)$ a la familia de todos estos semigrupos.

Finalmente, el abanico asociado a I , denotado por $\Sigma(I)$, se define como:

$$\Sigma(I) = \{\tau \leq \sigma_i : m_i \text{ es vértice de } N_\sigma(I)\}.$$

Observación 2.20. Usando la construcción de P. González y B. Teissier descrita en el capítulo 1 (ver teorema 1.24), tenemos que la pareja $(\Sigma(I), \Gamma(I))$ determina una variedad tórica.

Teorema 2.21. Con la notación anterior, la variedad tórica $X_{\Sigma(I)}^{\Gamma(I)}$ es isomorfa a $\text{Bl}_I(X_\Gamma)$.

Demostración. Ver Proposición 32 de [7]. □

Ejemplo 2.22. Consideremos el semigrupo $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ generado por $\{\gamma_1 = (1, 0), \gamma_2 = (1, 1), \gamma_3 = (1, 2)\}$. Recordemos que

$$\mathcal{J}_p = \langle t^{\gamma_{i_1} + \gamma_{i_2}} : \det(\gamma_{i_1} \ \gamma_{i_2}) \not\equiv 0 \pmod{p}, i_1 < i_2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[t^\Gamma].$$

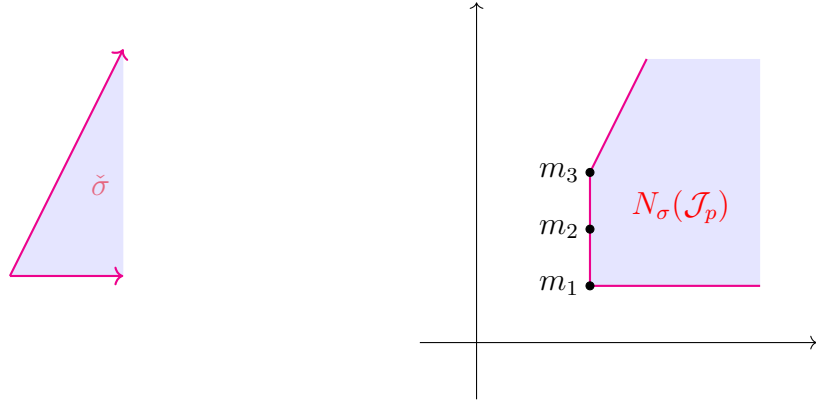
Así del ejemplo 2.10 tenemos que $\mathcal{J}_2 = \{(2, 1), (2, 3)\}$, y $\mathcal{J}_p = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$, para $p = 0$ y $p \geq 3$.

Consideramos el poliedro de Newton $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ y notamos que para cualquier p , los vértices de éste son $m_1 = (2, 1)$ y $m_3 = (2, 3)$.

Por el teorema 2.21 las cartas afines de la explosión de Nash están determinadas por los siguientes semigrupos:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma + \mathbb{N}\{(2, 2) - (2, 1), (2, 3) - (2, 1)\} \\ &= \Gamma + \mathbb{N}\{(0, 1), (0, 2)\} \\ &= \mathbb{N}\{(1, 0), (0, 1)\} \end{aligned}$$

2.2. Descripción combinatoria de la explosión de Nash en variedades tóricas



$$\begin{aligned}
 \Gamma_3 &= \Gamma + \mathbb{N}\{(2, 1) - (2, 3), (2, 2) - (2, 3)\} \\
 &= \Gamma + \mathbb{N}\{(0, -2), (0, -1)\} \\
 &= \mathbb{N}\{(0, -1), (1, 2)\}.
 \end{aligned}$$

Por último, hagamos notar que el poliedro de Newton no dependió de p . Esto no es una coincidencia y será una observación clave cuando demos que en característica arbitraria, la iteración de la explosión de Nash normalizada resuelve superficies tóricas normales.

Capítulo 3

Fracciones continuas

Las fracciones continuas ofrecen una manera de representar números reales mediante cocientes anidados. Más allá de su uso clásico en teoría de números, estas estructuras han encontrado aplicaciones significativas en la teoría de singularidades, especialmente en la resolución de superficies tóricas normales. Su aplicación se vuelve crucial en este contexto, ya que permiten una descripción precisa de la resolución de singularidades. Trabajos como [1], [6], [16],[2], [9] han explorado su utilidad en este contexto, particularmente en relación con la versión de Hirzebruch-Jung que analizaremos en este capítulo.

El objetivo de este capítulo es presentar algunos resultados fundamentales sobre fracciones continuas de Hirzebruch-Jung, tal como se describen en [1]. Estos resultados serán esenciales para el desarrollo de los conceptos abordados en el capítulo siguiente.

Dada una **fracción continua**

$$[a_1, \dots, a_r] = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{a_r}}}}$$

definimos las siguientes sucesiones:

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 0, & p_0 &= 1, & p_i &= a_i p_{i-1} - p_{i-2}, & 1 \leq i \leq r. \\ q_0 &= 0, & q_1 &= 1, & q_i &= a_i q_{i-1} - q_{i-2}, & 2 \leq i \leq r. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Proposición 3.2. *Sea $[a_1, \dots, a_r]$ una fracción continua. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ se tiene que $[a_1, \dots, a_i] = \frac{p_i}{q_i}$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre i . Notemos que para $[a_1]$, es válido el resultado pues, en este caso $p_1 = a_1$ y $q_1 = 1$.

Sea $i > 1$, asumamos el resultado para $i - 1$. Consideremos la fracción continua de $i - 1$ términos $[a_1, a_2, \dots, a_{i-2}, a_{i-1} - 1/a_i]$ y sean P_j, Q_j como en (3.1), las sucesiones definidas por dicha fracción continua. Observemos que $P_j = p_j$ y $Q_j = q_j$ para cada

$j < i - 1$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
[a_1 \cdots, a_i] &= [a_1, \cdots, a_{i-1} - 1/a_i] \\
&= \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} \\
&= \frac{(a_{i-1} - 1/a_i)p_{i-2} - p_{i-3}}{(a_{i-1} - 1/a_i)q_{i-2} - q_{i-3}} \\
&= \frac{(a_{i-1}a_i - 1)p_{i-2} - a_i p_{i-3}}{(a_{i-1}a_i - 1)q_{i-2} - a_i q_{i-3}} \\
&= \frac{a_i(a_{i-1}p_{i-2} - p_{i-3}) - p_{i-2}}{a_i(a_{i-1}q_{i-2} - q_{i-3}) - q_{i-2}} \\
&= \frac{p_i}{q_i}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.3. Para $i > 0$, se satisface $p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} = 1$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre i . Sea $i > 1$, asumamos el resultado cierto para $i - 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} &= p_{i-1}(a_i q_{i-1} - q_{i-2}) - (a_i p_{i-1} - p_{i-2})q_{i-1} \\
&= p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Los dos resultados previos nos dicen que p_i/q_i es una fracción en su forma reducida.

Proposición 3.4. Para $i < j$ el denominador de la fracción $[a_{i+1}, \cdots, a_j]$ en su forma reducida es $p_i q_j - p_j q_i$.

Demostración. El caso $i = j - 1$ se deduce de la Proposición 3.3. Procedamos por inducción decreciente sobre i .

Para cada $i < j$, sean $N_i, D_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $[a_{i+1}, \cdots, a_j] = N_i/D_i$ está en su forma reducida. Por convención tomemos $N_j = 1$ y $D_j = 0$.

Notemos que

$$[a_{i+1}, \cdots, a_j] = \frac{a_{i+1}N_{i+1} - D_{i+1}}{N_{i+1}},$$

está también en su forma reducida. Por lo tanto $D_i = N_{i+1}$ y $N_i = a_{i+1}N_{i+1} - D_{i+1}$, y de esta manera D_i satisface la siguiente recurrencia decreciente

$$D_i = a_{i+2}D_{i+1} - D_{i+2}.$$

Por hipótesis de inducción $D_{i+1} = p_{i+1}q_j - p_j q_{i+1}$ y $D_{i+2} = p_{i+2}q_j - p_j q_{i+2}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
D_i &= a_{i+2}D_{i+1} - D_{i+2} \\
&= a_{i+2}(p_{i+1}q_j - p_j q_{i+1}) - p_{i+2}q_j + p_j q_{i+2} \\
&= (a_{i+2}p_{i+1} - p_{i+2})q_j - p_j(a_{i+2}q_{i+1} - q_{i+2}) \\
&= p_i q_j - p_j q_i.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.5. *Para cualquier número racional x , existe una cantidad finita de enteros $a_1, \dots, a_k$ tales que $x = [a_1, \dots, a_k]$. Dichos a_i están unívocamente determinados.*

Demostración. Daremos un proceso constructivo. Comenzamos renombrando $x_1 = x$, ahora tomemos $a_1 = \lceil x_1 \rceil$ y definamos $b_1 = a_1 - x_1$. Notemos que $0 < b_1 < 1$, por lo que $x_2 = 1/b_1 > 1$. Recursivamente obtenemos x_i , $a_i = \lceil x_i \rceil$, $b_i = a_i - x_i$ y $x_{i+1} = 1/b_i$. Para cada i , sean $n_i, d_i \in \mathbb{Z}$ tales que $x_i = n_i/d_i$ es su forma reducida. Como $x_{i+1} = 1/(a_1 - x_i)$, entonces $x_{i+1} = d_i/(a_i d_i - n_i)$ y esta es su forma reducida, pues n_i y d_i son primos relativos. De esta manera

$$n_{i+1} = d_i. \quad (3.6)$$

Ahora, por como se definieron b_i , tenemos que $x_i > 1$ para toda $i > 1$, entonces $n_{i+1} > d_{i+1}$ y por (3.6),

$$d_i > d_{i+1},$$

es decir la sucesión $\{d_i\}_{i>1}$ es estrictamente decreciente, por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d_k = 1$ y el proceso termina.

El proceso que acabamos de describir implica la unicidad de las a_i . □

Observación 3.7. De la demostración de la proposición anterior, se deducen dos hechos importantes:

- Dado que $x_i > 1$ para toda $i > 1$, se sigue que $a_i > 1$ para toda $i > 1$, pues $a_i = \lceil x_i \rceil$.
- Si x es un número racional tal que $0 < x \leq 1$, entonces el primer coeficiente de su fracción continua es $a_1 = 1$.

Esta observación nos proporciona información general de los valores que aparecen en la fracción continua asociada a un número racional.

Corolario 3.8. *Si $a_i > 1$ para $i > 1$, entonces para $1 < j \leq i$, el denominador de $[a_i, \dots, a_j]$ es estrictamente menor que el de $[a_1, \dots, a_j]$.*

Demostración. Siguiendo la notación presentada en la demostración de la Proposición 3.5, para la fracción continua $[a_1, \dots, a_j]$, tenemos que

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{a_1 - x_1} \\ &= \frac{1}{a_1 - [a_1, \dots, a_j]} = [a_2, \dots, a_j]. \end{aligned}$$

De manera recursiva podemos ver que $x_i = [a_i, \dots, a_j]$. Y dado que la sucesión de las d_i es estrictamente decreciente, se concluye el resultado. □

Proposición 3.9. *Si $a_i > 1$ para $i > 1$, entonces para toda $j > i$, el denominador de $[a_1, \dots, a_i]$ es estrictamente menor que el de $[a_1, \dots, a_j]$.*

Demostración. Sabemos que el denominador de $[a_1, \dots, a_i]$ es q_i , por lo que basta probar que la sucesión de las q_i es estrictamente decreciente.

Procedamos por inducción sobre i . Supongamos que $q_{i-1} - q_{i-2} > 0$. Veamos que

$$\begin{aligned} q_i - q_{i-1} &= a_i q_{i-1} - q_{i-2} - q_{i-1} \\ &= (a_i - 1)q_{i-1} + q_{i-1} - q_{i-2} > 0. \end{aligned}$$

□

Observación 3.10. De la demostración de la proposición anterior vemos que $q_i - q_{i-1} > 0$, esto implica que la sucesión de las q_i es estrictamente creciente.

Corolario 3.11. Si $a_i > 1$ para $i > 1$, entonces para toda $1 < i < j < k$, el denominador de $[a_i, \dots, a_j]$ es estrictamente menor que el de $[a_1, \dots, a_k]$.

Demostración. Dado que $1 < i < j$, el corolario 3.8 garantiza que el denominador en su forma reducida de $[a_i, \dots, a_j]$ es estrictamente menor que el de $[a_1, \dots, a_j]$. Además, por la proposición 3.9, como $j < k$, este denominador es estrictamente menor que el de $[a_1, \dots, a_k]$.

□

Capítulo 4

Explosión de Nash en superficies tóricas

En este capítulo planteamos dos objetivos principales. El primero es analizar cómo la iteración de la explosión de Nash normalizada permite resolver las singularidades de una superficie tórica definida sobre un campo de característica prima. Este resultado fue demostrado en [8] y [1] para característica cero y posteriormente extendido a característica prima en [4]. En nuestra exposición seguimos la estrategia de demostración presentada en [1], incorporando la adaptación a característica prima desarrollada en [4].

El segundo objetivo es clasificar aquellas superficies tóricas normales cuyas singularidades se resuelven mediante una única iteración de la explosión de Nash normalizada. A diferencia del primer objetivo, cuya prueba se basa en trabajos previos, esta clasificación constituye una contribución original.

Comenzamos este capítulo presentando un par de resultados que serán fundamentales para describir el poliedro de Newton en dimensión 2.

Proposición 4.1. *Sea σ un cono racional en $\mathbb{R}^2$ de dimensión 2. Entonces existe un elemento de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ que lleva a σ a un cono de la forma $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (p, q))$, con $0 \leq p < q$ y p, q primos relativos.*

Demostración. Para $(x, y), (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ definimos $\langle (x, y); (a, b) \rangle = xb - ya$.

Sea $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}((a, b), (c, d))$ con generadores primitivos. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\langle (a, b); (c, d) \rangle > 0$.

Como a y b son primos relativos, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $xa + yb = 1$, de esta manera, consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Aplicando la matriz a los generadores de σ obtenemos $\sigma' = \mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (e, f))$, donde $f = \langle (a, b); (c, d) \rangle$, es decir $f > 0$.

Ahora afirmamos que existe $g \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq e + gf < f$. Para probar esto, analizaremos algunos casos:

- Si $f \leq e$, podemos escribir $e = gf + r$, donde $g, r \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r < f$, lo que garantiza que la desigualdad se cumple.

- Si $f < -e$, entonces $-e = gf - r$, con $g, r \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r < f$, y la condición también se verifica.

En cualquier otro caso, el resultado es inmediato. Por lo tanto concluimos que siempre existe $g \in \mathbb{Z}$ que satisface $0 \leq e + gf < f$.

Con esto, basta considerar

$$\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}),$$

para obtener $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (e + gf, f))$. Quitando factores comunes de $e + gf$ y f obtenemos p y q . $\square$

Del resultado anterior, dado un cono σ , podemos expresarlo como $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (p, q))$ con $0 \leq p < q$ y p, q primos relativos. Denominamos esta expresión la **forma estándar** de σ .

Antes de continuar, recordemos que para una fracción continua $[a_1, a_2, \dots, a_r]$ se definen las sucesiones:

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 0, & p_0 &= 1, & p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2}, & 1 \leq i \leq r, \\ q_0 &= 0, & q_1 &= 1, & q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2}, & 2 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Proposición 4.2. *Sea $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (p, q))$ en su forma estándar. Consideremos el semigrupo afín $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$ y denotemos por H su base de Hilbert. Si $p/q = [a_1, \dots, a_r]$, entonces*

$$H = \{v_0, \dots, v_r\}, \quad \text{donde } v_i = (p_i, q_i).$$

Demostración. Primero, demostraremos que el conjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ genera a $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$. Por la proposición 3.3, se cumple que

$$p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1} = 1.$$

De esto se deduce que

$$\frac{q_i}{p_i} = \frac{q_{i-1}}{p_{i-1}} + \frac{1}{p_i p_{i-1}},$$

lo que implica que las pendientes de los rayos generados por los vectores v_i son estrictamente crecientes. En particular, el rayo generado por v_0 tiene la menor pendiente, mientras que el rayo generado por v_r tiene la mayor.

Ahora, probemos que v_0 y v_r generan a $\check{\sigma}$. Por la proposición 3.2, se tiene que

$$[a_1, a_2, \dots, a_i] = \frac{p_i}{q_i}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq r.$$

En particular, esto implica que $v_r = (p_r, q_r) = (p, q)$, ya que $p/q = [a_1, \dots, a_r]$. Además, el primer vector es $v_0 = (p_0, q_0) = (1, 0)$. Por lo que en efecto, v_0 y v_r son los generadores de $\check{\sigma}$ en su forma reducida.

Sea $z \in \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$, entonces $z \in \check{\sigma}$, más aún, como las pendientes de los rayos generados por los vectores v_i son estrictamente decrecientes, entonces existe $0 \leq k \leq r - 1$ tal que $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}(v_k, v_{k+1})$. De esta manera $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ genera a $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}$. Como la base de Hilbert es la base mas pequeña que genera al semigrupo, $H \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$.

4.1. Poliedro de Newton en dimensión 2

Ahora afirmamos que v_i es irreducible. Para probar esto, procedamos por contradicción. Supongamos que v_i se puede expresar como combinación entera no negativa de

$$\{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\},$$

para alguna i . Así, tenemos que

$$q_i = \sum_{j \neq i} c_j q_j,$$

donde $c_j \geq 0$ para cada j . Por la observación 3.10 la sucesión de las q_i es estrictamente creciente, por lo tanto $c_j = 0$ para toda $j > i$. Entonces v_i es combinación entera no negativa de $\{v_0, \dots, v_{i-1}\}$ lo cual es una contradicción, pues las pendientes de los rayos son estrictamente crecientes. $\square$

4.1 Poliedro de Newton en dimensión 2

Como vimos en la sección 2.2, el poliedro de Newton juega un papel fundamental en la descripción de la explosión de Nash de variedades tóricas. En [4] se demostró que en dimensión dos este objeto es independiente de la característica del campo, lo que fue clave para probar que la iteración de la explosión de Nash normalizada resuelve las singularidades de una superficie tórica normal en característica prima. Con esto en mente, en esta sección daremos una descripción de este objeto en el caso de característica arbitraria.

Comencemos con una observación que reúne algunos hechos que utilizaremos recurrentemente.

Observación 4.3. Al igual que en la proposición 4.1, para $(x, y), (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, consideremos el producto

$$\langle (x, y); (a, b) \rangle = xb - ya.$$

1. Este producto es bilineal.
2. Para los vectores definidos en la proposición 4.2, si $i < j$, se cumple que

$$\langle v_i; v_j \rangle = p_i q_j - p_j q_i.$$

Además, por la proposición 3.4, este valor corresponde al denominador de la fracción continua $[a_{i+1}, \dots, a_j]$.

3. Dados dos vectores (x, y) y (a, b) , si consideramos las pendientes de los rayos que estos determinan, podemos observar que (a, b) está en sentido antihorario respecto a (x, y) si y sólo si $\langle (x, y); (a, b) \rangle > 0$.

Ahora comencemos con la descripción del poliedro de Newton en característica arbitraria.

4.1. Poliedro de Newton en dimensión 2

Consideremos $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}((1,0), (p,q))$ en su forma estándar. Sea $p/q = [a_1, \dots, a_r]$ su expresión en fracción continua. Por la proposición 4.2 tenemos que la base de Hilbert del semigrupo afín $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$ es $H = \{v_0, \dots, v_r\}$. Así en este caso, el ideal logarítmico jacobiano módulo p es

$$\mathcal{J}_p = \langle t^{v_i+v_j} : \det(v_i, v_j) \not\equiv 0 \pmod{p} \rangle.$$

Por lo tanto, el poliedro de Newton es

$$N_\sigma(\mathcal{J}_p) = \check{\sigma} + \text{Conv}\{v_i + v_j : \det(v_i, v_j) \not\equiv 0 \pmod{p}\}$$

Como se observó en el ejemplo 2.22, en dimensión 2, los vértices de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ no parecen depender de p , y en efecto, esto ocurre siempre. En los siguientes resultados, exploramos este hecho a fondo.

Proposición 4.4. *Sea $p = \text{char}(\mathbb{K})$, no necesariamente positiva. Entonces*

$$N_\sigma(\mathcal{J}_p) = \check{\sigma} + \text{Conv}\{v_i + v_{i+1} : i \in \{0, \dots, r-1\}\}.$$

Demostración. Sea $S = \{v_i + v_{i+1} : i \in \{0, \dots, r-1\}\}$. Por la proposición 3.3, se tiene que $\det(v_i, v_{i+1}) = 1$, por lo tanto $v_i + v_{i+1} \in \{v_i + v_j : \det(v_i, v_j) \not\equiv 0 \pmod{p}\}$ para cada i y para cada p . De esta manera

$$\check{\sigma} + \text{Conv}(S) \subseteq \check{\sigma} + \text{Conv}\{v_i + v_j : \det(v_i, v_j) \not\equiv 0 \pmod{p}\} = N_\sigma(\mathcal{J}_p).$$

Sean $v_i, v_j \in H$ con $0 < i+1 < j \leq r$ tales que $\det(v_i, v_j) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Mostraremos que

$$v_i + v_j \in \check{\sigma} + \text{Conv}\{v_i + v_{i+1}, v_{j-1} + v_j\}.$$

Para ilustrar esto, consideremos la figura 4.1. La región sombreada representa a $\check{\sigma} + \text{Conv}\{v_i + v_{i+1}, v_{j-1} + v_j\}$.

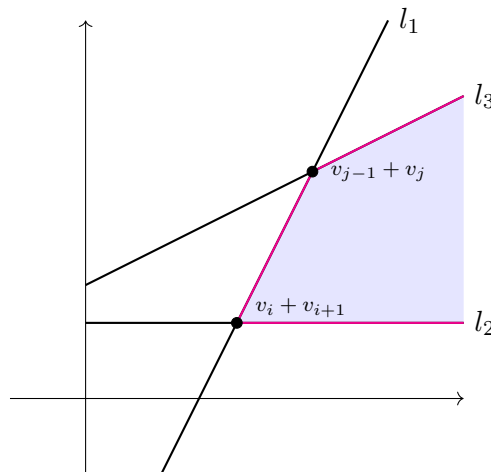


Figura 4.1

Notemos que en esta figura, cada recta l_1, l_2, l_3 divide al plano en dos regiones, la positiva y la negativa respecto a cada una de las rectas. De esta manera, para lograr

4.1. Poliedro de Newton en dimensión 2

mostrar nuestra afirmación, veremos que $v_i + v_j$ se encuentran en la región positiva determinada por cada una de las rectas.

Consideremos, como antes, el producto definido por $\langle (x, y); (x', y') \rangle = xy' - x'y$. Definimos ahora, para cualesquiera dos puntos $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, la aplicación φ como:

$$\varphi(u) = \langle u_1; u \rangle + \langle u; u_2 \rangle - \langle u_1; u_2 \rangle.$$

Notemos que los ceros de φ describen la recta que pasa por u_1 y u_2 . Observemos también que φ determina dos regiones del plano, la parte positiva y la parte negativa respecto a esa recta.

Mostraremos primero que $v_i + v_j$ se encuentra en la región positiva respecto a la recta l_1 . Sean $u_1 = v_i + v_{i+1}$ y $u_2 = v_{j-1} + v_j$. Evaluaremos φ en $v_i + v_j$. Para ello, primero observemos que

$$\begin{aligned} \langle v_i + v_{i+1}; v_i + v_j \rangle &= \langle v_i; v_i \rangle + \langle v_i; v_j \rangle + \langle v_{i+1}; v_i \rangle + \langle v_{i+1}; v_j \rangle \\ &= \langle v_i; v_j \rangle + \langle v_{i+1}; v_i \rangle + \langle v_{i+1}; v_j \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle v_i + v_j; v_{j-1} + v_j \rangle &= \langle v_i; v_{j-1} \rangle + \langle v_i; v_j \rangle + \langle v_j; v_{j-1} \rangle + \langle v_j; v_j \rangle \\ &= \langle v_i; v_{j-1} \rangle + \langle v_i; v_j \rangle + \langle v_j; v_{j-1} \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle v_i + v_{i+1}; v_{j-1} + v_j \rangle = \langle v_i; v_{j-1} \rangle + \langle v_i; v_j \rangle + \langle v_{i+1}; v_{j-1} \rangle + \langle v_{i+1}; v_j \rangle.$$

Por lo tanto, al evaluar $\varphi(v_i + v_j)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(v_i + v_j) &= \langle u_1; v_i + v_j \rangle + \langle v_i + v_j; u_2 \rangle - \langle u_1; u_2 \rangle \\ &= \langle v_i + v_{i+1}; v_i + v_j \rangle + \langle v_i + v_j; v_{j-1} + v_j \rangle - \langle v_i + v_{i+1}; v_{j-1} + v_j \rangle \\ &= \langle v_i; v_j \rangle + \langle v_{i+1}; v_i \rangle + \langle v_j; v_{j-1} \rangle - \langle v_{i+1}; v_{j-1} \rangle \\ &= \langle v_i; v_j \rangle - \langle v_i; v_{i+1} \rangle - \langle v_{i+1}; v_{j-1} \rangle - \langle v_{j-1}; v_j \rangle. \end{aligned}$$

De la proposición 3.3, tenemos que $\langle v_i; v_{i+1} \rangle = \langle v_{j-1}; v_j \rangle = 1$, por lo tanto

$$\varphi(v_i + v_j) = \langle v_i; v_j \rangle - \langle v_{i+1}; v_{j-1} \rangle - 2. \quad (4.5)$$

Por otro lado, por la observación 4.3 tenemos que $\langle v_{i+1}; v_j \rangle$ y $\langle v_{i+1}; v_{j-1} \rangle$ son los denominadores de $[a_{i+2}, \dots, a_j]$ y $[a_{i+2}, \dots, a_{j-1}]$ respectivamente. De esta manera por la proposición 3.9 $\langle v_{i+1}; v_{j-1} \rangle < \langle v_{i+1}; v_j \rangle$.

De la misma forma, $\langle v_i; v_j \rangle$ es el denominador de $[a_{i+1}, \dots, a_j]$ y como se vio en la demostración de la proposición 3.5 $\langle v_{i+1}; v_j \rangle < \langle v_i; v_j \rangle$. Así $\langle v_i; v_j \rangle \geq \langle v_{i+1}; v_{j-1} \rangle + 2$, y considerando (4.5) tenemos que $\varphi(v_i + v_j) \geq 0$, lo cual muestra que $v_i + v_j$ se encuentra en la región positiva respecto a la recta l_1 .

Consideremos ahora la recta l_2 , que es la recta que pasa por $v_i + v_{i+1}$ con dirección v_0 . Para demostrar que $v_i + v_j$ se encuentra en el lado positivo respecto a esta recta, realizamos una traslación y verificamos que $(v_i + v_j) - (v_i + v_{i+1}) = v_j - v_{i+1}$ está en sentido antihorario con respecto a v_0 .

4.1. Poliedro de Newton en dimensión 2

Calculemos entonces $\langle v_0; v_j - v_{i+1} \rangle$. Como antes, por la observación 4.3 tenemos que $\langle v_0; v_j \rangle$ y $\langle v_0; v_{i+1} \rangle$ son los denominadores de $[a_1, \dots, a_j]$ y $[a_1, \dots, a_{i+1}]$ respectivamente. Así por la proposición 3.9, tenemos que $\langle v_0; v_j \rangle > \langle v_0; v_{i+1} \rangle$. Por lo tanto, se sigue que $\langle v_0; v_j - v_{i+1} \rangle > 0$, como queríamos demostrar.

Finalmente, de manera análoga, podemos verificar que $v_i + v_j$ también está del lado positivo definido por la línea que pasa por $v_{j-1} + v_j$ con dirección v_r , es decir l_3 . $\square$

El resultado anterior nos muestra que el poliedro de Newton es independiente de la característica del campo. Además, también sugiere cómo son sus vértices, lo que resulta fundamental para el estudio de las cartas en la explosión de Nash, tal como se observó en el ejemplo 2.22. Sin embargo, el hecho de que podamos describir el poliedro con los puntos de la forma $v_i + v_{i+1}$, no nos garantiza que todos los vértices sean así. Para ello, debemos asegurarnos de que la pendiente del último rayo v_r sea menor que la pendiente de los segmentos que unen los puntos en cuestión. El siguiente resultado nos asegura lo que sospechamos al respecto de los vértices.

Proposición 4.6. *La frontera de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ consta de los segmentos que unen $v_{i-1} + v_i$ y $v_i + v_{i+1}$ para $0 < i < r$, junto con los rayos que salen de $v_0 + v_1$ y $v_{r-1} + v_r$ con dirección v_0 y v_r respectivamente.*

Demostración. Dado que $v_0 = (1, 0)$, basta mostrar que las pendientes de los segmentos mencionados en el enunciado son positivas y decrecientes, y que la pendiente de v_r es menor que la del último segmento.

De la observación 3.7, tenemos que $a_i \geq 2$ para toda $i > 1$, por lo tanto

$$a_{i+2}a_{i+1} - 1 \geq 3.$$

Por otro lado, en virtud de la proposición 3.4, tenemos que $p_{i-1}q_{i+2} - p_{i+2}q_{i-1}$ es el denominador en su forma reducida de $[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}]$. Dada esta fracción continua, definimos $Q_0 = 0$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = a_{i+1}$ y $Q_3 = a_{i+2}a_{i+1} - 1$, como en (3.1). Entonces por la proposición 3.2, Q_3 también es el denominador en de $[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}]$ en su forma reducida. Por lo tanto

$$p_{i-1}q_{i+2} - p_{i+2}q_{i-1} = a_{i+2}a_{i+1} - 1 \geq 3.$$

Así por la proposición 3.3, tenemos

$$p_{i-1}q_{i+2} - p_{i+2}q_{i-1} \geq (p_{i+1}q_{i+2} - p_{i+2}q_{i+1}) + (p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1}) + (p_iq_{i+1} - p_{i+1}q_i).$$

Agrupando términos, obtenemos

$$\frac{q_{i-1} - q_{i+1}}{p_{i-1} - p_{i+1}} \geq \frac{q_{i+2} - q_i}{p_{i+2} - p_i}.$$

Esto muestra la primera parte.

Para la segunda parte, observemos que $p_{r-2}q_r - p_rq_{r-2} > 0$, lo cual implica que la pendiente de v_r es menor que la pendiente del último segmento. $\square$

4.2. Resolución de superficies tóricas

De esta manera, tenemos la certeza de que los vértices de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ están contenidos en el conjunto

$$\{v_i + v_{i+1} : i \in \{0, \dots, r-1\}\}.$$

4.2 Resolución de superficies tóricas

Hasta aquí, los resultados presentados nos proporcionan información útil para describir de manera combinatoria la explosión de Nash normalizada. A continuación, describiremos el proceso.

Comenzamos con un cono en su forma estándar $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (p, q))$.

1. Calculamos la expansión en fracción continua del cociente p/q .
2. Encontramos la base de Hilbert H asociada al semigrupo $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$, mediante las sucesiones $\{p_i\}$ y $\{q_i\}$.
3. Determinamos el poliedro de Newton $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ y hallamos sus vértices, digamos $\{u_1, \dots, u_s\}$.
4. Para cada vértice u_i , consideramos los conos $\check{\sigma}_i$ descritos en la sección 2.2. Este proceso lo denominamos **localización de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ en u_i** .
5. Determinamos si $\check{\sigma}_i$ es suave, si lo es, terminamos. En caso contrario repetimos el proceso con este cono.

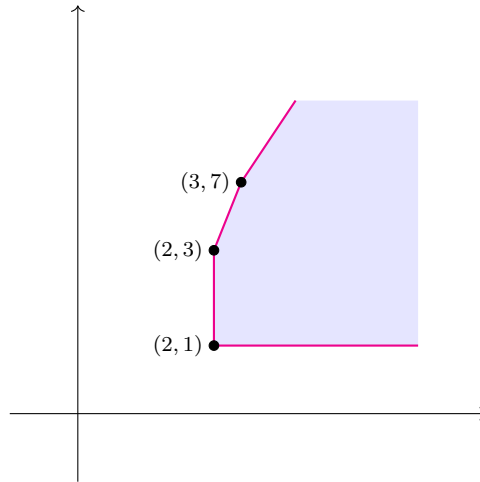
Ejemplo 4.7. Consideremos el cono $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (2, 5))$. Observamos que la fracción continua de $\frac{2}{5}$ se expresa como $[1, 2, 3]$. A partir de esto, las sucesiones de p_i y q_i son las siguientes:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, & p_1 &= 1, & p_2 &= 1, & p_3 &= 2. \\ q_0 &= 0, & q_1 &= 1, & q_2 &= 2, & q_3 &= 5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la base de Hilbert es $H = \{v_0 = (1, 0), v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 2), v_3 = (2, 5)\}$. En este caso, los vértices del poliedro de Newton $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ para cualquier p (incluyendo $p = 0$) son:

$$v_0 + v_1 = (2, 1), \quad v_1 + v_2 = (2, 3), \quad v_2 + v_3 = (3, 7).$$

4.2. Resolución de superficies tóricas



Ahora, estudiaremos la suavidad de cada una de las localizaciones. Para determinar si un cono es suave o no, basta con verificar si el determinante de la matriz formada por sus generadores primitivos es igual a 1.

Para ilustrar esto, consideremos la tabla 4.1. En ella como podemos apreciar, los conos $\check{\sigma}_1$ y $\check{\sigma}_2$ son suaves, mientras que el cono $\check{\sigma}_3$ no lo es.

Localización en (2, 1)	Localización en (2, 3)	Localización en (3, 7)
$\check{\sigma}_1$	$\check{\sigma}_2$	$\check{\sigma}_3$

Tabla 4.1 Localizaciones del poliedro de Newton.

Dado que el cono $\check{\sigma}_3$ no es suave, aplicamos nuevamente el proceso de resolución. Para ello, siguiendo la Proposición 4.1, transformamos $\check{\sigma}_3$ en el cono $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (1, 3))$ mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Repetimos el proceso. Calculamos la base de Hilbert y determinamos los vértices del poliedro de Newton asociado, que en este caso son (2, 1) y (2, 5). Localizando en estos puntos, obtenemos los conos $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (0, 1))$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}((0, -1), (1, 3))$, los cuales resultan ser suaves, completando así el proceso en este caso.

El ejemplo anterior nos ilustró la iteración de la explosión de Nash normalizada. En tal caso, bastaron dos iteraciones para resolver las singularidades.

4.2. Resolución de superficies tóricas

Dada una localización de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$, como en el ejemplo 4.7, podemos transformar dicha localización en $\mathbb{R}_{\geq 0}((1,0), (p', q'))$, con p', q' primos relativos y $p' < q'$. Así, para demostrar que el método resuelve las singularidades de una superficie tórica normal, nuestro objetivo será mostrar que q' es eventualmente 1.

Proposición 4.8. *Sea $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}((1,0), (p,q))$ y sea $H = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ la base de Hilbert de $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$. Entonces a menos que $p = q - 1$, cada cono localizado satisface $q' < q$.*

Demostración. Sea $0 < i < r - 1$ tal que $v_i + v_{i+1}$ es vértice de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$. Localizando en este vértice tenemos el cono

$$\mathbb{R}_{\geq 0}(v_{i-1} - v_{i+1}, v_{i+2} - v_i).$$

Siguiendo el proceso descrito en la demostración de la proposición 4.1, podemos transformar este cono en uno de la forma

$$\mathbb{R}_{\geq 0}((1,0), (e + gf, f)), \quad \text{donde } f = \langle v_{i-1} - v_{i+1}; v_{i+2} - v_i \rangle.$$

Así quitando factores comunes de $e + gf$ y f se obtienen p' y q' . Podemos notar que en particular $q' \leq f$.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \langle v_{i-1} - v_{i+1}; v_{i+2} - v_i \rangle &= \langle v_{i-1}; v_{i+2} \rangle - \langle v_{i-1}; v_i \rangle - \langle v_{i+1}; v_{i+2} \rangle + \langle v_{i+1}; v_i \rangle \\ &= \langle v_{i-1}; v_{i+2} \rangle - \langle v_{i-1}; v_i \rangle - \langle v_{i+1}; v_{i+2} \rangle - \langle v_i; v_{i+1} \rangle. \end{aligned}$$

Por la proposición 3.3, se sigue que

$$\langle v_{i-1} - v_{i+1}; v_{i+2} - v_i \rangle = \langle v_{i-1}; v_{i+2} \rangle - 3.$$

Por la observación 4.3, sabemos que $\langle v_{i-1}; v_{i+2} \rangle$ es el denominador de la fracción continua $[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}]$, éste por el corolario 3.11 es menor que el denominador de $[a_1, a_2, \dots, a_r]$ el cual es q . De esta manera tenemos que $q' \leq f < q$, concluyendo así la prueba para el caso $0 < i < r - 1$.

Ahora para $i = 0$, consideramos el vértice $v_0 + v_1$. Localizando en éste tenemos el cono

$$\mathbb{R}_{\geq 0}(v_0, v_2 - v_0).$$

Siguiendo la estrategia del caso anterior, para este cono, al seguir el proceso descrito en la proposición 4.1, obtenemos $f = \langle v_0; v_2 - v_0 \rangle = \langle v_0; v_2 \rangle$, y este es tal que $q' \leq f$ tal como el caso anterior.

Por la observación 4.3, $f = \langle v_0; v_2 \rangle$ es el denominador de $[a_1, a_2]$. Entonces, por el corolario 3.11, este valor es estrictamente menor que q , a menos que $p/q = [a_1, a_2]$. Analicemos este posible caso. Aquí $q' = f$, ya que en general se cumple que $q' \leq f$. En esta situación, tendríamos $r = 2$. Además dado que $0 \leq p < q$, necesariamente se sigue que $a_1 = 1$, de donde se deduce que

$$\frac{p}{q} = \frac{a_2 - 1}{a_2}.$$

4.2. Resolución de superficies tóricas

Lo cual implica que $p = q - 1$. En este caso tenemos que

$$\frac{p}{q} = \frac{q-1}{q} = [1, q].$$

Esto nos indica que $v_0 = (1, 0)$, $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (q-1, q)$. Así, como $f = \langle v_0; v_2 \rangle$, entonces $f = q$, es decir $q' = q$. Este análisis es el mismo para el caso $i = r - 1$. Así, la única manera de que q' no decrezca es que $p = q - 1$. $\square$

Teorema 4.9. *Cualquier superficie tórica normal se desingulariza por un número finito de explosiones de Nash normalizadas.*

Demostración. Consideremos $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (p, q))$ el cono asociado a la superficie en su forma estándar. Notemos que el cono será suave si y solo si $q = 1$. Por lo tanto, basta mostrar que en el proceso el número q no incrementa y eventualmente decrece.

Si $p \neq q - 1$, la proposición anterior asegura que q decrece bajo la explosión de Nash normalizada. Supongamos que el cono en cuestión es de la forma $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (q-1, q))$. Observemos que $(q-1)/q = [1, q]$, y que $H = \{v_0, v_1, v_2\}$, donde $v_0 = (1, 0)$, $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (q-1, q)$. Así,

$$v_0 + v_1 = (2, 1), \quad v_1 + v_2 = (q, q+1).$$

Localizando en $(q, q+1)$, obtenemos el cono $\mathbb{R}_{\geq 0}((2-q, -q), (q-1, q))$. Ahora analizaremos los casos:

Caso 1.1: Supongamos que q es par. En este caso, el generador $(2-q, -q)$ no es primitivo, por lo que consideramos el generador $(1-q/2, -q/2)$. Siguiendo el proceso descrito en la proposición 4.1, obtenemos el cono $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (q/2-1, q/2))$. Aquí podemos observar que $q/2 < q$.

Caso 1.2: Supongamos que $q = 2n + 1$. En este caso, el cono es

$$\mathbb{R}_{\geq 0}((-2n+1, -2n-1), (2n, 2n+1)).$$

Notemos que ambos generadores son primitivos ya que

$$(-n)(-2n+1) + (n-1)(-2n-1) = 1.$$

Como antes, al expresar el cono en su forma estándar, obtenemos $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (n, q))$, donde $n < q$ y $n \neq q - 1$. Por la proposición anterior, la siguiente iteración hará que q decrezca.

Por último localizando en $(2, 1)$, tenemos el cono $\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (q-2, q))$, que al igual de la localización anterior tenemos dos casos:

Caso 2.1: Supongamos que q es par. En este caso, el cono en cuestión es

$$\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (q/2-1, q/2)).$$

4.3. Resolución en un paso

Caso 2.2: Supongamos que $q = 2n + 1$. Entonces, el cono en cuestión es

$$\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (2n - 1, 2n + 1)),$$

de donde el segundo generador está dado por dos primos relativos, pues son impares consecutivos.

Notemos que en cualquier de los dos casos la localización ya está dada en su forma estándar, y tenemos una mejoría en q . $\square$

4.3 Resolución en un paso

En la sección anterior alcanzamos nuestro primer objetivo. Ahora, con el fin de comprender la última iteración del proceso de Nash normalizado, en esta sección caracterizaremos las superficies tóricas normales que se resuelven en un solo paso.

Para ello, determinaremos los posibles valores de la fracción continua asociada a la superficie tórica normal. La estrategia consiste en considerar los vértices de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ y a partir de estos, analizar las localizaciones del polígono de Newton sobre ellos.

Antes de comenzar la discusión sobre las localizaciones, recapitularemos y aclararemos algunos hechos que usaremos de manera reiterada en esta sección.

Como ya hemos mencionado, en virtud de la proposición 4.1 podemos considerar los conos en su forma estándar, esto es $\check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (p, q))$, con p, q primos relativos y $p < q$. Dados estos valores, procedemos a encontrar la fracción continua asociada, esto es

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_r].$$

De la observación 3.7, tenemos que en esta fracción continua $a_1 = 1$ y $a_i > 1$, para toda $i > 1$.

Por la proposición 4.2, la base de Hilbert de $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$ está dada por $H = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$, donde $v_i = (p_i, q_i)$. Obtenidos estos vectores podemos determinar los vértices de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$. Como vimos en la sección 4.1, dichos vértices tienen la forma $v_{i-1} + v_i$. Entre estos vértices, se distinguen dos tipos:

- Los vértices extremales que corresponden a $v_0 + v_1$ y $v_{r-1} + v_r$.
- Los vértices interiores $v_{i-1} + v_i$, para $1 \leq i \leq r - 1$.

A partir de estos vértices procederemos analizar las localizaciones del polígono de Newton sobre ellos.

Comenzaremos el análisis con los vértices interiores y posteriormente con los vértices extremales.

En la figura 4.2 podemos apreciar una representación de la localización en un vértice interior. Como podremos observar todas las localizaciones de estos vértices nos darán

4.3. Resolución en un paso

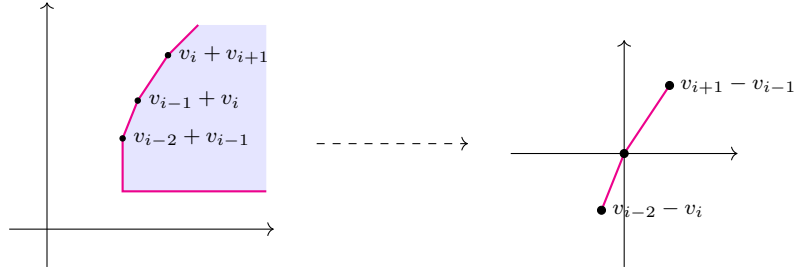


Figura 4.2: Localización de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ en el vértice $v_{i-1} + v_i$.

un cono de la forma

$$\mathbb{R}_{\geq 0}(v_{i-2} - v_i, v_{i+1} - v_{i-1}). \quad (4.10)$$

Descrita esta localización, comencemos con nuestro primer resultado, en el que estableceremos las condiciones necesarias y suficientes de suavidad para los vértices interiores.

Lema 4.11. *Sea $[1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_r]$ la fracción continua asociada a una superficie tórica normal, tal que $v_{i-1} + v_i$ es vértice de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$, para algún $2 \leq i \leq r-1$. Entonces la localización en $v_{i-1} + v_i$ es suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones:*

1. $a_i = 2$ y $a_{i+1} = 3$.
2. $a_i = 2$ y $a_{i+1} = 4$.
3. $a_i = 3$ y $a_{i+1} = 2$.
4. $a_i = 4$ y $a_{i+1} = 2$.

Demostración. Como en (4.10), al localizar $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ en $v_{i-1} + v_i$, obtenemos

$$\check{\sigma}_{v_{i-1}+v_i} = \mathbb{R}_{\geq 0}(v_{i-2} - v_i, v_{i+1} - v_{i-1}).$$

Para estudiar la suavidad de este cono necesitamos considerar generadores primitivos. Por definición, $p_i = a_i p_{i-1} - p_{i-2}$ y $q_i = a_i q_{i-1} - q_{i-2}$, entonces sustituyendo en las entradas de $v_{i-2} - v_i = (p_{i-2} - p_i, q_{i-2} - q_i)$ tenemos:

$$v_{i-2} - v_i = (2p_{i-2} - a_i p_{i-1}, 2q_{i-2} - a_i q_{i-1}). \quad (4.12)$$

De la misma forma, considerando ahora $p_{i+1} = a_{i+1} p_i - p_{i-1}$ y $q_{i+1} = a_{i+1} q_i - q_{i-1}$, y sustituyendo en las entradas de $v_{i+1} - v_{i-1} = (p_{i+1} - p_{i-1}, q_{i+1} - q_{i-1})$ vemos que:

$$v_{i+1} - v_{i-1} = (a_{i+1} p_i - 2p_{i-1}, a_{i+1} q_i - 2q_{i-1}). \quad (4.13)$$

Hagamos notar que los generadores que hemos obtenido en (4.12) y (4.13) no son necesariamente primitivos, pues esto dependerá completamente de los valores que tomen a_i y a_{i+1} . Por lo tanto procederemos por casos respecto a la paridad de a_i y a_{i+1} .

4.3. Resolución en un paso

Caso 1. Supongamos que $a_i = 2m$ y $a_{i+1} = 2n$. En este caso, los vectores $v_{i-2} - v_i$ y $v_{i+1} - v_{i-1}$ no son primitivos pues 2 divide a ambas entradas de los dos vectores. Consideremos los vectores $(p_{i-2} - mp_{i-1}, q_{i-2} - mq_{i-1})$ y $(np_i - p_{i-1}, nq_i - q_{i-1})$, los cuales generan al mismo cono. Afirmamos que estos vectores son primitivos. Para esto, notemos que

$$\begin{aligned} q_{i-1}(p_{i-2} - mp_{i-1}) - p_{i-1}(q_{i-2} - mq_{i-1}) &= p_{i-2}q_{i-1} - mp_{i-1}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2} + mp_{i-1}q_{i-1} \\ &= p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es gracias a la proposición 3.3. Así $(p_{i-2} - mp_{i-1}, q_{i-2} - mq_{i-1})$ es primitivo.

De manera análoga

$$\begin{aligned} -q_i(np_i - p_{i-1}) + p_i(nq_i - q_{i-1}) &= -nq_i p_i + p_{i-1}q_i + np_i q_i - p_i q_{i-1} \\ &= p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

es decir $(np_i - p_{i-1}, nq_i - q_{i-1})$ es primitivo también.

De esta manera, el cono $\check{\sigma}_{v_{i-1}+v_i}$ es suave si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} p_{i-2} - mp_{i-1} & q_{i-2} - mq_{i-1} \\ np_i - p_{i-1} & nq_i - q_{i-1} \end{pmatrix} = 1,$$

si y sólo si

$$(p_{i-2} - mp_{i-1})(nq_i - q_{i-1}) - (q_{i-2} - mq_{i-1})(np_i - p_{i-1}) = 1.$$

Desarrollando la parte izquierda de la ecuación y asociando convenientemente se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= np_{i-2}q_i - p_{i-2}q_{i-1} - mnp_{i-1}q_i + mp_{i-1}q_{i-1} - nq_{i-2}p_i + q_{i-2}p_{i-1} + mnq_{i-1}p_i - mq_{i-1}p_{i-1} \\ &= n(p_{i-2}q_i - p_i q_{i-2}) - nm(p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1}) - (p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2}). \end{aligned}$$

Por la proposición 3.3, $p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} = p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2} = 1$ y por la proposición 3.4, $p_{i-2}q_i - p_i q_{i-2}$ es el denominador en su forma reducida de $[a_{i-1}, a_i]$, el cual es a_i . Así sustituyendo en la última igualdad tenemos que el cono es suave si y sólo si $nm = 2$. Por lo tanto, en este caso, el cono es suave si y sólo si $a_i = 2$ y $a_{i+1} = 4$ o $a_i = 4$ y $a_{i+1} = 2$.

Caso 2. Supongamos que $a_i = 2m$ y $a_{i+1} = 2n + 1$. Como en el caso anterior $v_{i+2} - v_i$ no es primitivo, por lo que consideramos $(p_{i-2} - mp_{i-1}, q_{i-2} - mq_{i-1})$. En contraste, en este caso

$$v_{i+1} - v_{i-1} = ((2n + 1)p_i - 2p_{i-1}, (2n + 1)q_i - 2q_{i-1})$$

es primitivo pues

$$(nq_i - q_{i-1})[(2n + 1)p_i - 2p_{i-1}] - (np_i - p_{i-1})[(2n + 1)q_i - 2q_{i-1}] = p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} = 1.$$

Con esto, el cono es suave si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} p_{i-2} - mp_{i-1} & q_{i-2} - mq_{i-1} \\ a_{i+1}p_i - 2p_{i-1} & a_{i+1}q_i - 2q_{i-1} \end{pmatrix} = 1$$

4.3. Resolución en un paso

si y sólo si

$$a_{i+1}(p_{i-2}q_i - p_iq_{i-2}) - a_{i+1}m(p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1}) - 2(p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2}) = 1$$

De manera análoga al caso 1, por la proposición 3.3 y la proposición 3.4, el cono es suave si y sólo si $a_{i+1}(a_i - m) = 3$, es decir, si y sólo si $a_i = 2$ y $a_{i+1} = 3$.

Caso 3. Supongamos que $a_i = 2m + 1$ y $a_{i+1} = 2n$. De manera análoga a los casos anteriores busquemos generadores primitivos para $\check{\sigma}_{v_{i-1}+v_i}$.

Lo expuesto en los casos anteriores nos permite ver que $(2p_{i-2} - a_i p_{i-1}, 2q_{i-2} - a_i q_{i-1})$ y $(np_i - p_{i-1}, nq_i - q_{i-1})$ son generadores primitivos de dicho cono.

De esta manera, el cono es suave si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} 2p_{i-2} - a_i p_{i-1} & 2q_{i-2} - a_i q_{i-1} \\ np_i - p_{i-1} & nq_i - q_{i-1} \end{pmatrix} = 1,$$

si y sólo si

$$2n(p_{i-2}q_i - q_{i-2}p_i) - a_i n(p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1}) - 2(p_{i-2}q_{i-1} - q_{i-2}p_{i-1}) = 1$$

Así por la proposición 3.3 y la proposición 3.4, el cono es suave si y sólo si $a_i n = 3$, es decir, si y sólo si $a_i = 3$ y $a_{i+1} = 2$.

Caso 4. Por último, considerando $a_i = 2m + 1$ y $a_{i+1} = 2n + 1$. Veremos que este caso, el cono no puede ser suave. Siguiendo la estrategia de los casos anteriores, tenemos el cono es suave si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} 2p_{i-2} - a_i p_{i-1} & 2q_{i-2} - a_i q_{i-1} \\ a_{i+1}p_i - 2p_{i-1} & a_{i+1}q_i - 2q_{i-1} \end{pmatrix} = 1,$$

si y sólo si

$$2a_{i+1}(p_{i-2}q_i - q_{i-2}p_i) - a_i a_{i+1}(p_{i-1}q_i - q_{i-1}p_i) - 4(p_{i-2}q_{i-1} - q_{i-2}p_{i-1}) = 1.$$

Esto diría que $a_i a_{i+1} = 5$, lo cual implicaría que $a_i = 5$ y $a_{i+1} = 1$ o $a_i = 1$ y $a_{i+1} = 5$, pero $a_i > 1$ para toda $i > 1$. Por lo tanto, en este caso no hay suavidad. $\square$

Con el resultado anterior concluimos el estudio de la suavidad para vértices interiores. Ahora estudiaremos la suavidad para los vértices extremales. En el siguiente par de resultados tratamos estos casos.

Lema 4.14. Sea $[1, a_2, a_3, \dots, a_r]$ la fracción continua asociada a una superficie tórica normal. Entonces la localización de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ en el vértice $v_0 + v_1$ es suave si y sólo si $a_2 = 2$.

4.3. Resolución en un paso

Demostración. Por como se define en (3.1) sabemos que

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, & p_1 &= a_1, & p_2 &= a_2 a_1 - 1, \\ q_0 &= 0, & q_1 &= 1, & q_2 &= a_2. \end{aligned}$$

Como $a_1 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, & p_1 &= 1, & p_2 &= a_2 - 1, \\ q_0 &= 0, & q_1 &= 1, & q_2 &= a_2. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que $v_0 + v_1 = (2, 1)$ y $v_1 + v_2 = (a_2, a_2 + 1)$. Por tal motivo la localización en el vértice $v_0 + v_1$ es

$$\mathbb{R}_{\geq 0}((1, 0), (a_2 - 2, a_2)).$$

Como en la demostración del lema 4.11, que el vector $(a_2 - 2, a_2)$ sea primitivo dependerá de la paridad de a_2 .

Caso 1. Supongamos que $a_2 = 2n$. En este caso, el vector en cuestión no es primitivo, por lo que tomamos $(n - 1, n)$. En este caso el cono es suave si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n - 1 & n \end{pmatrix} = 1,$$

es decir, el cono será suave si y sólo si $n = 1$.

Caso 2. Supongamos que $a_2 = 2n + 1$, en tal caso $(a_2 - 2, a_2) = (2n - 1, 2n + 1)$, es decir, es primitivo. De esta manera, el cono es suave si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n - 1 & 2n + 1 \end{pmatrix} = 1,$$

es decir el cono será suave si y sólo si $a_2 = 1$, lo cual no ocurre pues $a_2 > 1$. Así que en este caso, el cono no puede ser suave. $\square$

Lema 4.15. Sea $[1, a_2, \dots, a_r]$ una fracción continua asociada a una superficie tórica. La localización de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ en el vértice $v_{r-1} + v_r$ es suave si y sólo si $a_r = 2$.

Demostración. La prueba de este resultado sigue la misma idea de la demostración del lema 4.11.

Notemos que la localización de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ en el vértice $v_{r-1} + v_r$ está dada por el cono

$$\check{\sigma}_{v_{r-1}+v_r} = \mathbb{R}_{\geq 0}((2p_{r-2} - a_r p_{r-1}, 2q_{r-2} - a_r q_{r-1}), (p_r, q_r)).$$

Vemos también que por la proposición 3.2, el vector $(p_r, q_r) = (p, q)$, que son primos relativos. Entonces (p_r, q_r) es primitivo. Como antes, que el otro generador cumpla la misma propiedad depende de la paridad de a_r .

Caso 1. Supongamos que $a_r = 2n$. Tenemos que el primer generador del cono no es primitivo, por ello de manera análoga a la prueba del lema 4.11 sustituiremos dicho

4.3. Resolución en un paso

generador por el vector $(p_{r-2} - np_{r-1}, q_{r-2} - nq_{r-1})$ el cual cumple esta propiedad. De esta manera el cono es suave si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} p_{r-2} - np_{r-1} & q_{r-2} - nq_{r-1} \\ p_r & q_r \end{pmatrix} = 1,$$

si y sólo si

$$(p_{r-2}q_r - p_rq_{r-2}) - n(p_{r-1}q_r - p_rq_{r-1}) = 1.$$

Así que por lo anterior y las proposiciones 3.3 y 3.4, en este caso la suavidad del cono depende exclusivamente de que $a_r - n = 1$, es decir $a_r = 2$.

Caso 2. Supongamos que $a_r = 2n + 1$. En este caso el primer generador es primitivo. De manera análoga el cono es suave si y sólo si

$$2(p_{r-2}q_r - p_rq_{r-2}) - a_r(p_{r-1}q_r - p_rq_{r-1}) = 1,$$

es decir habría suavidad si y sólo si $a_r = 1$, lo cual no pasa pues $r > 1$. Concluimos que en este caso no es posible la suavidad del cono. $\square$

Con los resultados expuestos hasta aquí hemos logrado determinar los valores de a_i únicamente para aquellos casos en los que $v_{i-1} + v_i$ corresponde a un vértice. No obstante, como podemos observar en el ejemplo 2.22, no todos estos puntos son vértices. El siguiente resultado nos proporciona los valores correspondientes en los casos en los que no obtenemos vértices.

Lema 4.16. *Consideremos la fracción continua $[1, a_2, \dots, a_r]$, asociada a una superficie tórica normal. Entonces para cada $3 \leq i \leq r-1$ se tiene que $v_{i-1} + v_i$ no es vértice de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ si y sólo si $a_i = 2$ y $a_{i+1} = 2$.*

Demostración. Consideremos los puntos $v_{i-2} - v_i$ y $v_{i+1} - v_{i-1}$. Como en (4.12) y (4.13) tenemos que:

$$\begin{aligned} v_{i-2} - v_i &= (2p_{i-2} - a_i p_{i-1}, 2q_{i-2} - a_i q_{i-1}), \\ v_{i+1} - v_{i-1} &= (a_{i+1} p_i - 2p_{i-1}, a_{i+1} q_i - 2q_{i-1}). \end{aligned}$$

Entonces, estos puntos están alineados si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} 2p_{i-2} - a_i p_{i-1} & 2q_{i-2} - a_i q_{i-1} \\ a_{i+1} p_i - 2p_{i-1} & a_{i+1} q_i - 2q_{i-1} \end{pmatrix} = 0,$$

si y sólo si

$$2a_{i+1}(p_{i-2}q_i - q_{i-2}p_i) - a_i a_{i+1}(p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1}) - 4(p_{i-2}q_{i-1} - q_{i-2}p_{i-1}) = 0$$

Así, por la proposición 3.3 y la proposición 3.4, $v_{i-1} - v_i$ no es un vértice de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$ si y sólo si $a_{i+1}a_i = 4$, es decir, si ambos son iguales a 2. $\square$

Ahora estamos listos para dar la caracterización de las superficies tóricas normales que se resuelven por una explosión de Nash normalizada.

4.3. Resolución en un paso

Teorema 4.17. *La explosión de Nash normalizada de una superficie tórica normal es suave si y sólo si su fracción continua asociada es de la forma $[1, 2, a_3, a_4, \dots, a_{r-1}, 2]$, donde $(a_i, a_{i+1}) \in \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$ para cada $3 \leq i \leq r - 2$.*

Demostración. Sea X una superficie tórica normal cuya explosión de Nash normalizada es suave, y sea $[1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ su fracción continua asociada.

Por el lema 4.14, se tiene que $a_2 = 2$, y por el lema 4.15, se cumple que $a_n = 2$. El valor de los restantes a_i se determinan en función de si $v_{i-1} + v_i$ es vértice o no de $N_\sigma(\mathcal{J}_p)$. Si $v_{i-1} - v_i$ no es un vértice, el lema 4.16 dice que $(a_i, a_{i+1}) = (2, 2)$, y si $v_{i-1} - v_i$ es un vértice, el lema 4.11 garantiza que (a_i, a_{i+1}) pertenece al conjunto $\{(2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$. Dado que estos casos cubren todas las posibles situaciones, la fracción continua asociada debe ser de la forma $[1, 2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, 2]$, con $(a_i, a_{i+1}) \in \{(2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$.

Puesto que los lemas enunciados son equivalencias, la otra implicación del teorema se deduce con el mismo análisis.

□

Bibliografía

- [1] Atanas Atanasov, Christopher Lopez, Alexander Perry, Nicholas Proudfoot, and Michael Thaddeus. Resolving toric varieties with Nash blowups. *Exp. Math.*, 20(3):288–303, 2011. [doi:10.1080/10586458.2011.565238](https://doi.org/10.1080/10586458.2011.565238). VII, VIII, 19, 23
- [2] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*, volume 124 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. [doi:10.1090/gsm/124](https://doi.org/10.1090/gsm/124). 2, 19
- [3] Daniel Duarte. Nash modification on toric surfaces. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 108(1):153–171, 2014. [doi:10.1007/s13398-012-0104-4](https://doi.org/10.1007/s13398-012-0104-4). VII
- [4] Daniel Duarte, Jack Jeffries, and Luis Núñez Betancourt. Nash blowups of toric varieties in prime characteristic. *Collect. Math.*, 75(3):629–637, 2024. [doi:10.1007/s13348-023-00402-y](https://doi.org/10.1007/s13348-023-00402-y). VIII, 9, 11, 12, 23, 25
- [5] Daniel Duarte and Luis Núñez Betancourt. Nash blowups in prime characteristic. *Rev. Mat. Iberoam.*, 38(1):257–267, 2022. [doi:10.4171/rmi/1278](https://doi.org/10.4171/rmi/1278). VII
- [6] William Fulton. *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry. [doi:10.1515/9781400882526](https://doi.org/10.1515/9781400882526). 2, 19
- [7] Pedro D. González Pérez and Bernard Teissier. Toric geometry and the Semple-Nash modification. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 108(1):1–48, 2014. [doi:10.1007/s13398-012-0096-0](https://doi.org/10.1007/s13398-012-0096-0). VII, 7, 8, 9, 16
- [8] Gérard Gonzalez-Sprinberg. Éventails en dimension 2 et transformé de nash. 1977. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117927750>. VII, VIII, 11, 12, 23
- [9] Gerard Gonzalez-Sprinberg. On Nash blow-up of orbifolds. In *Singularities—Niigata–Toyama 2007*, volume 56 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 133–149. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009. [doi:10.2969/aspm/05610133](https://doi.org/10.2969/aspm/05610133). VII, 19
- [10] Gerardo Gonzalez-Sprinberg. Résolution de Nash des points doubles rationnels. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 32(2):x, 111–178, 1982. [doi:10.5802/aif.874](https://doi.org/10.5802/aif.874). VII

- [11] Dima Grigoriev and Pierre D. Milman. Nash resolution for binomial varieties as Euclidean division. A priori termination bound, polynomial complexity in essential dimension 2. *Adv. Math.*, 231(6):3389–3428, 2012. doi:[10.1016/j.aim.2012.08.009](https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.08.009). VII
- [12] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2)*, 79:109–203; 79 (1964), 205–326, 1964. doi:[10.2307/1970547](https://doi.org/10.2307/1970547). VII
- [13] Heisuke Hironaka. On Nash blowing-up. In *Arithmetic and geometry, Vol. II*, volume 36 of *Progr. Math.*, pages 103–111. Birkhäuser, Boston, MA, 1983. VII
- [14] W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1994. 1, 2
- [15] A. Nobile. Some properties of the Nash blowing-up. *Pacific J. Math.*, 60(1):297–305, 1975. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102868640>. VII, 9, 10
- [16] T. Oda. *Convex bodies and algebraic geometry*, volume 15 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. 19
- [17] Vaho Rebassoo. *Desingularization Properties of the Nash Blowing-Up Process*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1977. Thesis (Ph.D.)—University of Washington. URL: http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:7726858. VII, 9
- [18] Mark Spivakovsky. Sandwiched singularities and desingularization of surfaces by normalized nash transformations. *Annals of Mathematics*, 131(3):411–491, 1990. URL: <http://www.jstor.org/stable/1971467>. VII
- [19] Bernd Sturmfels. *Gröbner bases and convex polytopes*, volume 8 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. doi:[10.1090/ulect/008](https://doi.org/10.1090/ulect/008). 12

José Amador Cruz Fuentes

Resolución de superficies tóricas con explosiones de Nash normalizada en características prima_pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:454271357

Fecha de entrega

30 abr 2025, 7:39 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

30 abr 2025, 7:44 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

Resolución de superficies tóricas con explosiones de Nash normalizada en características prima..pdf

Tamaño de archivo

746.3 KB

52 Páginas

14.835 Palabras

65.333 Caracteres

12% Overall Similarity

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Top Sources

- 11%  Internet sources
- 8%  Publications
- 0%  Submitted works (Student Papers)

Integrity Flags

1 Integrity Flag for Review



Replaced Characters

251 suspect characters on 28 pages

Letters are swapped with similar characters from another alphabet.

Our system's algorithms look deeply at a document for any inconsistencies that would set it apart from a normal submission. If we notice something strange, we flag it for you to review.

A Flag is not necessarily an indicator of a problem. However, we'd recommend you focus your attention there for further review.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	Reducción de superficies fónicas con explosiones de Nash normalizada en características primas.	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	José Amador Cruz Fuente	acruz@matmor.unam.mx
Director	Andrés Daniel Duarte	adduarte@matmor.unam.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Elmar Wagner	elmar@ifm.umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	Sí	Revisión de ortografía.
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	Sí	Ayuda para crear algunas imágenes.
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán México 29 - Abril - 2025.