



Universidad Nacional Autónoma de
México

Universidad Michoacana de San
Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Grupo modular de variedades que son como planos proyectivos.

T E S I S

que para optar el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Oscar Romero González

Asesor: Dr. Daniel Juan Pineda
Centro de Ciencias Matemáticas

Morelia, Michoacán, México
Noviembre, 2025

Contenido

Resumen	ii
Abstract	iii
Introducción	iv
1 Esferas homotópicas.	1
1.1 Esferas homotópicas.	1
1.2 h -cobordismo.	3
1.3 Esferas homotópicas s -paralelizables.	6
2 Variedades que son como planos proyectivos.	8
2.1 Clasificación de variedades que son como planos proyectivos salvo suma conexa con esferas homotópicas.	8
2.2 Grupos de bordismo.	11
2.2.1 El m -tipo normal de variedades que son como planos proyectivos.	12
3 El grupo modular de variedades que son como planos proyectivos.	16
3.1 Automorfismos de haces.	19
3.2 Difeomorfismos con soporte en un disco.	24
4 Cálculo del grupo modular de variedades que son como planos pro- yectivos y algunas aplicaciones.	33
Bibliografía	37

Resumen

Una variedad suave, cerrada y simplemente conexa se dice que es como un plano proyectivo si tiene homología entera isomorfa a la homología entera de un plano proyectivo, es decir, suma de tres copias de los enteros.

Este tipo de variedades es una generalización a los planos proyectivos sobre los complejos, cuaterniones y octoniones. El objetivo de este trabajo es obtener el cálculo explícito del grupo modular de variedades que son como planos proyectivos en dimensiones 8 y 16. Dicho cálculo se realiza empleando técnicas basadas en esferas exóticas, aprovechando su relación con clases de bordismo y clases de difeomorfismos.

Para desarrollar esta teoría, iniciamos examinando el surgimiento de estructuras diferenciales no estándar en la esfera a partir del trabajo de John Milnor, quien mostró que la esfera estándar en dimensión 7 puede admitir múltiples estructuras suaves. Esto conduce a la construcción de los grupos de esferas homotópicas para todas las dimensiones, los cuales son finitos abelianos y permiten describir la existencia de esferas exóticas. Posteriormente se revisa la clasificación de las variedades que son como planos proyectivos, iniciada por James Eells y Nicolaas H. Kuiper y completada por Linus Kramer y Stephan Stolz mediante clases características, en particular clases de Pontryagin. Estas herramientas permiten comprender cómo la presencia de esferas exóticas puede alterar la estructura diferenciable de dichas variedades.

Finalmente, siguiendo el trabajo de Yang Su y Wei Wang, se obtiene el cálculo explícito del grupo modular en dimensiones 8 y 16, utilizando los grupos de esferas exóticas para describir las clases de isotopía de difeomorfismos. El análisis proporciona además consecuencias para los espacios de métricas de curvatura escalar positiva, en especial en el caso de variedades que son como el plano proyectivo cuaterniónico.

Palabras clave: Esferas exóticas, bordismo spin, bordismo string, teoría de índice, clases características.

Abstract

A smooth, closed, and simply connected manifold is said to be like a projective plane if it has integer homology isomorphic to the integer homology of a projective plane, that is, the sum of three copies of the integers.

This type of manifold is a generalization of the projective planes over the complexes, quaternions, and octonions. The objective of this work is to obtain the explicit computation of the mapping class group of manifolds which are like projective planes in dimensions 8 and 16. This computation is carried out using techniques based on exotic spheres, taking advantage of their relation with bordism classes and diffeomorphism classes.

To develop this theory, we begin by examining the emergence of non-standard differential structures on the sphere from the work of John Milnor, who showed that the standard sphere in dimension 7 can admit multiple smooth structures. This leads to the construction of the groups of homotopy spheres for all dimensions, which are finite abelian and allow us to describe the existence of exotic spheres. Subsequently, we review the classification of manifolds that are like projective planes, initiated by James Eells and Nicolaas H. Kuiper and completed by Linus Kramer and Stephan Stolz through characteristic classes, in particular Pontryagin classes. These tools make it possible to understand how the presence of exotic spheres can alter the differentiable structure of such manifolds.

Finally, following the work of Yang Su and Wei Wang, we obtain the explicit computation of the mapping class group in dimensions 8 and 16, using the groups of exotic spheres to describe the isotopy classes of diffeomorphisms. The analysis also provides consequences for the spaces of metrics of positive scalar curvature, especially in the case of manifolds that are like the quaternionic projective plane.

Keywords: exotic spheres, spin bordism, string bordism, index theory, characteristic classes.

Introducción

Durante mucho tiempo dentro de la topología diferencial se asumía que un homeomorfismo entre variedades determinaba un difeomorfismo entre ellas, en particular, la estructura suave de la esfera estándar S^n se daba por hecho que era única, sin embargo, no fue hasta el año 1956 que esta suposición de la topología diferencial fue refutada por John Milnor, quien probó que la esfera estándar de dimensión 7 tiene más de una estructura diferenciable no trivial [38]. A partir del trabajo de Milnor se abrió una nueva perspectiva de la topología diferencial.

Tiempo después, en 1963 Milnor y Michel Kervaire construyeron los grupos de esferas homotópicas bajo la operación suma conexa de variedades de dimensión n , estos grupos están denotados por Θ_n . Uno de los resultados que prueban Milnor y Kervaire es que Θ_n son grupos abelianos y finitos [28]. Los elementos no triviales de Θ_n , cuando los hay, son llamados *esferas exóticas*; aquellas variedades que son homeomorfas a la esfera estándar S^n , pero no difeomorfas a ésta.

En el capítulo 1 se presentan varias construcciones de grupos tales como:

1. Considerar el conjunto de todas las variedades suaves, cerradas, conexas y orientadas de dimensión n y definimos la operación *suma conexa de variedades de dimensión n* en este conjunto, entonces obtenemos un monoide bajo la operación suma conexa y al grupo de elementos invertibles bajo la operación suma conexa lo denotamos por A^n .
2. Considerar el conjunto de todas las variedades suaves, cerradas, conexas y orientadas de dimensión n y definimos la relación de equivalencia de *h -cobordismo entre variedades de dimensión n* en este conjunto, luego el conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación forman un monoide bajo la operación suma conexa de variedades de dimensión n . Al grupo de clases de equivalencia invertibles bajo la suma conexa lo denotamos por Θ_n , pues ésta es la construcción de Milnor y Kervaire antes mencionada.
3. Si consideramos $\text{Diff}(S^{n-1})$ y $\text{Diff}(D^n)$ el grupo de difeomorfismos de la esfera S^{n-1} y el disco estándar D^n , respectivamente, entonces tenemos un *homomorfismo restricción* $\partial : \text{Diff}(D^n) \rightarrow \text{Diff}(S^{n-1})$ tal que podemos considerar el grupo

$$\Gamma^n := \text{Diff}(S^{n-1}) / \partial \text{Diff}(D^n)$$

el cual es abeliano.

El objetivo de este capítulo es mostrar que para $n \geq 5$ existen isomorfismos de grupos entre A^n , Θ_n y Γ^n , así mismo abarcar algunas propiedades especiales sobre estos grupos [18].

Por otro lado, sea M una variedad simplemente conexa, cerrada y suave, decimos que M es como un plano proyectivo si $H_*(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. En [23] se muestra que si M es una variedad que es como un plano proyectivo, entonces es homotópicamente equivalente a un CW -complejo con estructura celular mínima y la solución del problema del invariante de Hopf 1 [2], garantiza que la dimensión de M debe ser 4, 8 ó 16. En dimensión 4, las variedades que son como planos proyectivos son homeomorfas a $\mathbb{CP}^2$ por la clasificación de Freedman sobre 4-variedades simplemente conexas [17].

Las variedades que son como planos proyectivos combinan simplicidad con riqueza estructural: son espacios que generalizan (homológicamente) planos proyectivos como $\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{HP}^2$ y $\mathbb{OP}^2$, por eso son estructuras con una homología relativamente simple, pero presentan características topológicas no triviales, como torsión en la cohomología, que permiten detectar propiedades de haces vectoriales fibrados y clases características.

Además, clasificar variedades que son como planos proyectivos es importante porque permite comprender de manera precisa sus propiedades topológicas, geométricas y algebraicas. Al conocer exactamente cómo se comportan sus clases de cohomología (clases características) y su estructura de fibrado tangente, podemos abordar problemas de suma importancia dentro de la topología diferencial y topología algebraica como lo es identificar obstrucciones a la orientación, a la paralelizabilidad o a la existencia de ciertos tipos de fibrados sobre ellas. También, la caracterización de variedades que son como planos proyectivos facilita su uso como modelos fundamentales en cobordismo, ya que muchas construcciones y teoremas se prueban primero sobre estos espacios por su simplicidad homológica combinada con propiedades no triviales.

En el capítulo 2 se desarrolla de manera explícita la clasificación de variedades que son como planos proyectivos en dimensión 8 y 16. Esta labor fue iniciada por James Eells y Nicolaas H. Kuiper durante los años 60's. Eells y Kuiper obtienen una clasificación de variedades que son como planos proyectivos salvo suma conexa con una esfera exótica de la correspondiente dimensión [16]. La clasificación hasta difeomorfismo fue concluida por Linus Kramer y Stephan Stolz durante el 2007, Kramer y Stolz dan una caracterización de variedades que son como planos proyectivos mediante clases de Pontryagin [31].

Por otra parte, dada M una n -variedad suave y cerrada, definimos el *grupo modular de M* como el grupo de clases de isotopía de difeomorfismos de M que preservan orientación, lo denotamos por $\mathfrak{M}(M)$. El cálculo de los grupos modulares es de suma importancia en la actualidad dentro de muchas ramas de la matemática, como lo son: Topología de bajas dimensiones, en la cual el grupo modular se interpreta como “grupo de simetrías” de una superficie; en Geometría hiperbólica y Teoría de Teichmüller, aquí el espacio de Teichmüller $\mathcal{T}$ tiene como grupo de automorfismos un grupo modular y éste controla cómo se identifican distintas estructuras geométricas hiperbólicas; en Álgebra y aritmética, para el toro, el grupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$ está relacionado con la teoría de formas modulares y la aritmética de curvas elípticas.

Este trabajo está inspirado en el trabajo de Yang Su y Wei Wang [46], sobre el cálculo de grupos modulares de variedades que son como planos proyectivos de dimensión 8 y

16, utilizando los grupos Θ_n . En el trabajo de Su y Wang se obtiene el cálculo explícito de dichos grupos modulares, para los cuales los capítulos 1 y 2 son necesarios con el fin de tener un entendimiento más claro.

En el capítulo 3 se desarrolla el material requerido para los resultados principales. Una aportación sobre el trabajo de Su y Wang, además de desarrollar de manera autocontenida la teoría, es proponer nuevas alternativas de demostración de algunos resultados sobresalientes y así obtener las conclusiones deseadas, por ejemplo:

Dado G un grupo y P un G -haz principal sobre un espacio X , AdP denota el haz asociado a P con fibra G y la acción de G en sí mismo es adjunta, es decir, $AdP = P \times_G G$ (el cual es un fibrado de grupos sobre X). Las secciones de AdP pueden ser identificadas con funciones $f : P \rightarrow G$ tal que $f(pg) = g^{-1}f(p)g$ [4]. El espacio de secciones ΓAdP forma un grupo bajo la multiplicación puntual y es *el grupo calibrado de P* , denotado por $\mathcal{G}(P)$. Este grupo actúa naturalmente como un grupo de funciones G -equivariantes de P , el cual es la identidad en X . En [4] se muestra que para un G -haz principal $P \rightarrow B$ el espacio clasificante del grupo calibrado $\mathcal{G}(B)$ es homotópicamente equivalente a la componente conexa $Map_P(B, BG)$ del espacio de funciones $Map(B, BG)$, la cual contiene la función clasificante de P .

A partir de esto, durante el desarrollo de éste capítulo, se propone una demostración alternativa para probar, de una manera más accesible, que

$$\pi_1(Map_P(B, BG)) \cong \pi_0(\mathcal{G}(P)).$$

En el capítulo 4, se dan las demostraciones a detalle de los teoremas de Su y Wang sobre el cálculo de grupos modulares de variedades que son como planos proyectivos de dimensión 8 y 16. Así mismo, se discuten algunas consecuencias inmediatas que tiene el cálculo de estos grupos modulares. En particular, usando que $\mathbb{H}\mathbb{P}^2$ admite métricas Riemannianas de curvatura escalar positiva, podemos considerar $\mathcal{R}_{scal}^+$ el conjunto de dichas métricas. Es bien sabido que $\text{Diff}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2)$ actúa en $\mathcal{R}_{scal}^+$ vía pull-back; por lo tanto, el cálculo del grupo modular de variedades que son como planos proyectivos nos permite decir algunas cosas sobre comportamiento de la acción de $\text{Diff}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2)$ en $\mathcal{R}_{scal}^+$ que, dicha acción, naturalmente pasa a una acción de $\mathfrak{M}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2)$ a $\pi_0(\mathcal{R}_{scal}^+)$, el cual tiene cociente $\pi_0(\mathcal{M}_{scal}^+)$, donde $\mathcal{M}_{scal}^+$ es el espacio moduli de métricas Riemannianas en $\mathbb{H}\mathbb{P}^2$.

Capítulo 1

Esferas homotópicas.

1.1 Esferas homotópicas.

En este capítulo nos enfocaremos en dar algunas definiciones y resultados acerca de esferas homotópicas, las cuales fueron definidas y estudiadas por Kervaire y Milnor en 1963, todo esto como una continuación del trabajo de Milnor sobre esferas exóticas en dimensión 7.

Definición 1.1. Una *esfera homotópica* es una n -variedad que es homotópicamente equivalente a la esfera estándar S^n .

Del teorema de Whitehead y del teorema de Hurewicz [23] tenemos el siguiente resultado

Proposición 1.2. Una n -variedad M con $n \geq 2$ es una esfera homotópica si y sólo si $\pi_1(M) = 0$ y $H_i(M; \mathbb{Z}) \cong H_i(S^n; \mathbb{Z})$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Durante el desarrollo de este trabajo D^n denota el disco unitario estándar de dimensión n .

Definición 1.3. Sean M_1 y M_2 dos n -variedades suaves y orientadas. Para $i = 1, 2$ tomamos encajes suaves $h_i : D^n \hookrightarrow M_i$ tal que h_1 preserva orientación y h_2 invierte orientación, considerando $\hat{M}_i = M_i \setminus \text{int}(h_i(D^n))$ definimos la *suma conexa* de M_1 y M_2 , denotada por $M_1 \# M_2$, como la variedad

$$\hat{M}_1 \cup_{\varphi} \hat{M}_2$$

donde $\varphi : \partial \hat{M}_1 \cong S^{n-1} \rightarrow \partial \hat{M}_2 \cong S^{n-1}$ un difeomorfismo que invierte orientación.

Veamos que la definición de suma conexa no depende de la elección de los encajes de D^n .

Definición 1.4. Sean M y N dos variedades y $f, g : M \hookrightarrow N$ son dos encajes. Decimos que f y g son *isotópicas* si existe una homotopía (suave) entre f y g , digamos $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que $H(x, t)$ es un encaje para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $x \in M$.

Definición 1.5. Sean M y N dos variedades y $f, g : M \hookrightarrow N$ son dos encajes. Decimos que f y g son *isotópicas en el ambiente* si existe una isotopía $H : N \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que para todo $x \in N$ se tiene que $H(x, 0) = x$ y $H(f(x), 1) = g(x)$. A la isotopía H se le llama *isotopía ambiente* entre f y g .

Luego tenemos el siguiente teorema debido a Richard Palais, la prueba puede ser consultada en [29].

Teorema 1.6. (Teorema del Disco.)

Sea M una n -variedad y $f, g : D^k \hookrightarrow M$ dos encajes. Si $n = k$ y para f y g se cumple que o ambas preservan orientación o ambas invierten orientación, entonces f es isotópica en el ambiente a g .

Volviendo a la definición de suma conexa, si $\bar{h}_1 : D^n \hookrightarrow M_1$ es otro encaje, entonces por el Teorema del Disco 1.6, existe una isotopía ambiente (suave) $f : M_1 \rightarrow M_1$ tal que $\bar{h}_1 = f \circ h_1$, entonces la variedad $M_1 \# M_2$ que resulta con el encaje h_1 y h_2 será difeomorfa a la variedad que resulte de utilizar $\bar{h}_1$ y h_2 . El mismo argumento aplica para h_2 . Por tanto la suma conexa de variedades de dimensión n no depende de la elección de los encajes de D^n .

La siguiente observación y teorema son mostrados en [18].

Observación 1.7. La suma conexa de dos n -variedades suaves M_1 y M_2 es una n -variedad suave.

Teorema 1.8. El conjunto de n -variedades cerradas orientadas, conexas y suaves es un monoide conmutativo bajo la suma conexa con identidad la esfera estándar S^n .

Del monoide del teorema 1.8 consideramos el conjunto A^n el cual consiste de todos los elementos invertibles en dicho monoide, con esto A^n es grupo .

De aquí en adelante las variedades serán suaves, orientadas, compactas. Luego en [18] se muestra el siguiente resultado.

Lema 1.9. Sean M_1 y M_2 dos n -variedades. Entonces $M_1 \# M_2$ es una esfera homotópica si y sólo si M_1 y M_2 son esferas homotópicas.

Proposición 1.10. Los elementos de A^n son esferas homotópicas.

Demostración. Si $M \in A^n$, entonces existe $-M \in A^n$ tal que $M \# -M \cong S^n$, entonces por el lema 1.9 tenemos que M y $-M$ son esferas homotópicas. $\square$

Para probar que los elementos de A^n son topológicamente esferas, es decir, que son homeomorfos a S^n , utilizamos el teorema generalizado de Schönflies [10].

Teorema 1.11. Supongamos que $f : S^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow S^n$ es un encaje, entonces $S^n \setminus f(S^{n-1} \times \{0\})$ consiste de dos componentes conexas y la cerradura de cada componente es homeomorfa a D^n .

Proposición 1.12. Sean M_1 y M_2 dos n -variedades. Si $M_1 \# M_2 \cong S^n$, entonces $M_1 \cong M_2 \cong S^n$.

Demostración. Para $i = 1, 2$ tomamos $D \hookrightarrow M_i$ un encaje de un disco de dimensión n y construimos $M_1 \# M_2$ usando D . Por hipótesis tenemos un homeomorfismo $f : M_1 \# M_2 \rightarrow S^n$, entonces ∂D está encajada en S^n . Como ∂D está encajada en S^{n-1} falta ver que podemos extender este encaje a un encaje de $S^{n-1} \times [-1, 1]$, para poder utilizar el teorema 1.11.

Notemos que podemos encontrar otro encaje $D^* \hookrightarrow M_1$ tal que $D \subset D^*$ y extendemos el encaje de S^{n-1} usando el encaje de D^* , entonces el teorema 1.11 nos dice que la cerradura de $M_1 \setminus D$ es homeomorfa a D^n , así M_1 es homeomorfa a dos discos pegados por su frontera, es decir, $M_1 \cong S^n$. Mostrar que $M_2 \cong S^n$ es análogo. $\square$

Por tanto A^n consiste de esferas que son homeomorfas a S^n , pero puede contener esferas que no necesariamente son difeomorfas a S^n . A los elementos no triviales de A^n se llaman esferas exóticas. Notemos que A^n no contiene todas las esferas exóticas, solo las que son invertibles bajo la suma conexa.

1.2 h -cobordismo.

En esta sección veremos otra forma de ver el grupo de esferas homotópicas. Iniciamos con el importante teorema de h -cobordismo que demostró Stephen Smale en 1961.

Definición 1.13. Sean M y N dos n -variedades cerradas orientadas. Un *cobordismo orientado* entre M y N es una $(n+1)$ -variedad orientada W tal que $\partial W = M \sqcup N$. El cobordismo lo denotamos por $(W; M, N)$.

Definición 1.14. Un h -cobordismo es un cobordismo orientado $(W; M, N)$ para el cual las inclusiones $M \hookrightarrow W$ y $N \hookrightarrow W$ son equivalencias homotópicas. En este caso decimos que M y N son h -cobordantes.

Para una demostración del teorema de h -cobordismo se puede ver [40].

Teorema 1.15. Sean M y N variedades simplemente conexas, cerradas y suaves. Si $(W; M, N)$ es un h -cobordismo con $\dim(W) \geq 6$, entonces W es el cobordismo trivial, es decir, W es difeomorfo a $M \times I$.

Una de las consecuencias más importantes del trabajo de Smale es la clasificación de variedades diferenciables en dimensiones altas.

Corolario 1.16. Sean M y N variedades simplemente conexas, cerradas y suaves con $\dim(M) = \dim(N) \geq 5$. Si M y N son h -cobordantes, entonces M y N son difeomorfas.

Demostración. Si M y N son h -cobordantes, entonces existe W una n -variedad con $\dim(W) \geq 6$ tal que $\partial W = M \sqcup N$. Por el teorema de h -cobordismo tenemos que W es difeomorfo a $M \times I$ y a $N \times I$, además como un difeomorfismo preserva frontera tenemos que $M \sqcup M$ es difeomorfo a $N \sqcup N$, de aquí que M y N son difeomorfas. $\square$

Otra aplicación muy recurrente del teorema de h -cobordismo es el Teorema de Poincaré generalizado [40].

Teorema 1.17. Sea Σ una esfera homotópica de dimensión $n \geq 6$, entonces Σ es homeomorfa a S^n .

La relación de h -cobordismo entre variedades cerradas suaves y orientadas es una relación de equivalencia [18], entonces podemos considerar el conjunto de todas las clases de equivalencia de h -cobordismo de esferas homotópicas de dimensión n , y a este conjunto lo denotamos por Θ_n . Respecto a este conjunto tenemos los siguientes resultados

Lema 1.18. Sea M una n -variedad simplemente conexa, suave y orientada con $n \geq 6$, entonces:

1. M es h -cobordante a S^n si y sólo si M es la frontera de una variedad suave contráctil.
2. Si M es una esfera homotópica, entonces $M\# -M$ es la frontera de una variedad contráctil.
3. M es una esfera homotópica si y sólo si existe una n -variedad N simplemente conexa, orientada y suave tal que $M\#N$ es frontera de una variedad contráctil.

Demostración. Sólo se muestra 1, pues los incisos siguientes son consecuencia de éste. Para la necesidad tomamos $(W; M, S^n)$ el h -cobordismo entre M y S^n , entonces pegando un $(n+1)$ -disco a W a través de S^n obtenemos W' una nueva variedad para la cual $\partial W' = M$. Por el teorema de h -cobordismo tenemos que W es difeomorfa a $M \times I$, entonces W' es homotópicamente equivalente a un disco D^{n+1} , el cual es contráctil.

Por otro lado, si existe W variedad contráctil con $\partial W = M$, entonces W tiene la misma homología de un punto, por la proposición 7.6 de [18] tenemos que W es difeomorfa a D^n y por tanto $(W \setminus \mathring{D}^n; M, S^n)$ es un h -cobordismo entre M y S^n . $\square$

La demostración de los siguientes resultados se puede ver en [18].

Lema 1.19. Sean M, M_1 y M_2 tres n -variedades suaves con $n \geq 3$ y M_1 h -cobordante a M_2 . Entonces $M_1\#M$ es h -cobordante a $M_2\#M$.

Teorema 1.20. Las clases de h -cobordismo de n -variedades suaves orientadas forman un monoide bajo la suma conexa de variedades donde la identidad es la clase de h -cobordismo de S^n . Más aún, el grupo de elementos invertibles es Θ_n .

Ahora veamos otra forma de ver Θ_n y A^n , así como la relación que existe entre estos grupos.

Definición 1.21. Sea M una n -variedad suave. Definimos $\text{Diff}(M)$ como el conjunto de difeomorfismos de M que preservan orientación.

Lema 1.22. El conjunto $\text{Diff}(M)$ es un grupo bajo la composición.

Demostración. Dadas las propiedades de la composición de funciones, basta probar que $\text{Diff}(M)$ es cerrado bajo la composición. Sean $f, g \in \text{Diff}(M)$ y tomemos un atlas de $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ de M , entonces $\varphi_\alpha \circ g \circ f \circ \varphi_\beta^{-1}$ es suave, similar f^{-1}, g^{-1} son suaves, entonces podemos encontrar una carta φ_γ tal que

$$\varphi_\alpha \circ g \circ \varphi_\gamma^{-1} \circ \varphi_\gamma \circ f \circ \varphi_\beta^{-1}$$

es una composición de funciones suaves, pues f y g lo son. Para f^{-1} y g^{-1} es análogo. $\square$

Ahora consideramos $\text{Diff}_0(M) \subset \text{Diff}(M)$ definido como el conjunto de difeomorfismos que son isotópicos a la identidad. Entonces tenemos lo siguiente:

Observación 1.23. 1. El conjunto $\text{Diff}_0(M)$ es un subgrupo de $\text{Diff}(M)$.

2. Sea $[\text{Diff}(S^{n-1}), \text{Diff}(S^{n-1})]$ el conmutador del grupo $\text{Diff}(S^{n-1})$, entonces

$$[\text{Diff}(S^{n-1}), \text{Diff}(S^{n-1})] \subset \text{Diff}_0(S^{n-1}).$$

Ahora consideremos el homomorfismo restricción

$$\partial : \text{Diff}(D^n) \rightarrow \text{Diff}(S^{n-1}),$$

la imagen de este homomorfismo son los difeomorfismos de S^{n-1} los cuales pueden ser extendidos sobre D^n y se tiene que $\text{Diff}_0(S^{n-1}) \subset \partial\text{Diff}(D^n)$, ver [18]. Entonces de la observación 1.23 y esto último se tiene que $\text{Diff}_0(S^{n-1})$ y $\partial\text{Diff}(D^n)$ son subgrupos normales, pues contienen al conmutador. Sea

$$\Gamma^n := \text{Diff}(S^{n-1}) / \partial\text{Diff}(D^n),$$

entonces se tiene que

Proposición 1.24. El grupo Γ^n de difeomorfismos de S^{n-1} módulo los difeomorfismos que se pueden extender sobre D^n es un grupo abeliano.

Así tenemos las siguientes relaciones, que pueden ser consultadas en [18].

Proposición 1.25. Para $n \geq 5$, la función $f : A^n \rightarrow \Theta_n$ que envía un elemento de A^n a su clase de h -cobordismo en Θ_n es un isomorfismo de grupos abelianos.

A la unión ajena de dos n -discos los cuales son identificados por su frontera por algún difeomorfismo $h : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ le llamamos *esfera torcida* y la denotamos por $\Sigma(h)$.

Proposición 1.26. La función $g : \Gamma^n \rightarrow A^n$ que envía un difeomorfismo $h : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ a $\Sigma(h)$ es un homomorfismo inyectivo de grupos abelianos.

Teorema 1.27. Para $n \geq 6$ se tiene que Γ^n, A^n y Θ_n son grupos abelianos isomorfos.

1.3 Esferas homotópicas s -paralelizables.

Sea M una n -variedad suave y tomemos $\tau = \tau(M)$ el haz tangente de M .

Definición 1.28. Decimos que M es *paralelizable* si τ es el haz trivial y decimos que M es *s -paralelizable* si $\tau \oplus \epsilon^1$ es el haz trivial, donde $\oplus$ es la suma de Whitney y ϵ^1 es el haz trivial. El haz $\tau \oplus \epsilon^1$ es llamado el haz tangente estable de M .

En [28] se muestran los siguientes resultados:

Teorema 1.29. Cualquier esfera homotópica es s -paralelizable.

Lema 1.30. 1. Sea M una n -subvariedad de S^{n+k} con $n < k$. Entonces M es s -paralelizable si y sólo si su haz normal es trivial.

2. Una n -variedad conexa con frontera no vacía es s -paralelizable si y sólo si es paralelizable.

Ahora consideremos el siguiente subgrupo de Θ_n

$$\begin{aligned} bP_{n+1} &= \{M \in \Theta_n : M \text{ es la frontera de una variedad paralelizable}\} \\ &= \{M \in \Theta_n : \exists W \text{ paralelizable con } \partial W = M\} \end{aligned}$$

Sea M una n -variedad s -paralelizable cerrada y tomemos $i : M \hookrightarrow S^{n+k}$ un encaje suave con $k > n + 1$. Por el lema 1.30 tenemos que N el haz normal de M es trivial. Eligiendo φ un campo específico de k -marcos (k vectores linealmente independientes y ortogonales) normales. La construcción Pontryagin-Thom nos da una función

$$P(M, \varphi) : S^{n+k} \rightarrow S^k$$

ver [41] y [48]. La clase de homotopía de $P(M, \varphi)$ es un elemento bien definido en el grupo de homotopía estable $\pi_n^s := \pi_{n+k}^s(S^k)$ y con esto tenemos que si $P(M) := \{P(M, \varphi)\}_\varphi$ es la colección de funciones haciendo variar φ sobre todos los campos de k -marcos ortonormales de M tenemos que $P(M) \subset \pi_n^s$.

Luego en [28] se muestra el siguiente resultado

Lema 1.31. El conjunto $P(S^n) \subset \pi_n^s$ es un subgrupo de π_n^s . Además $P(\Sigma)$ es una clase lateral del subgrupo $P(S^n)$ para cualquier esfera homotópica Σ y existe un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} p' : \Theta_n &\rightarrow \pi_n^s / P(S^n) \\ \Sigma &\mapsto P(\Sigma) \end{aligned}$$

tal que $\ker(p') \cong bP_{n+1}$.

De este resultado tenemos que

$$\Theta_n / bP_{n+1} \cong p'(\Theta_n) \leq \pi_n^s / p(S^n).$$

Luego en [44] J.P. Serre prueba que π_n^s es finito y con esto tenemos uno de los resultados más importantes sobre estos grupos de esferas homotópicas [28].

Teorema 1.32. Θ_n/bP_{n+1} es finito.

Como $P(S^n) \leq \pi_n^s$ puede ser descrito como la imagen de

$$J_n : \pi_n(SO(k)) \rightarrow \pi_{n+k}(S^k)$$

donde J_n es el homomorfismo J de Hopf-Whitehead [26], entonces

$$\pi_n^s/P(S^n) \cong \text{coker}(J_n).$$

Luego para $n \leq 8$, en la siguiente tabla se resume la información que se sabe para los grupos mencionados [28]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
π_n	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{240}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$\pi_n^s/P(S^n)$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$
Θ_n/bP_{n+1}	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$

Por otro lado, usando que Θ_n/bP_{n+1} es finito, se puede probar que Θ_n es finito, basta probar que para $n \neq 3$ bP_{n+1} es finito, en [28] se prueba que $bP_{n+1} = 0$ para n par y es cíclico finito para n impar $n \neq 3$. Además también se prueba que bP_{n+1} tiene orden 1 o 2 para $n \equiv 1 \pmod{4}$, pero el orden crece exponencialmente para $n \equiv 3 \pmod{4}$. Algunos valores para bP_{n+1} son los de la siguiente tabla:

n	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$ bP_{n+1} $	1	1	1	28	2	992	1	8128	2	130,816

Uno de los resultados más importantes del trabajo de Kervaire y Milnor [28] es el siguiente:

Teorema 1.33. Para $n \neq 3$ el grupo Θ_n es finito.

Sus técnicas fallan en el caso $n = 3$, sin embargo, ya resuelta la conjetura de Poincaré, el resultado es cierto para todo n . Algunos ordenes del grupo Θ_n se muestran en la siguiente tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$ \Theta_n $	1	1	1	1	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Capítulo 2

Variedades que son como planos proyectivos.

En este capítulo se enuncian los principales resultados del trabajo de Eells y Kuiper, como lo es el estudio de variedades que son como planos proyectivos y su clasificación [16].

Definición 2.1. Una n -variedad M simplemente conexa, suave y cerrada es *como un plano proyectivo* si

$$H_*(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Este tipo de variedades es homotópicamente equivalente a un CW -complejo de estructura celular mínima y la solución del problema del invariante de Hopf 1 [2] nos asegura que si M es como un plano proyectivo, entonces la dimensión de M debe ser $n = 2m = 4, 8, 16$. Para dimensión 4 se tiene que M es homeomorfa a $\mathbb{CP}^2$ por la clasificación de 4-variedades simplemente conexas de Freedman [17]. El estudio de variedades que son como planos proyectivos en dimensión 8 y 16 lo comenzaron Eells y Kuiper, ellos muestran que en dimensión 8 (respectivamente 16) hay 6 (respectivamente 60) tipos de homotopía de este tipo de variedades. También prueban que $H^*(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^3)$ con $\deg(x) = m$ [16].

Los ejemplos más típicos de estas variedades son los planos proyectivos $\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{HP}^2$, $\mathbb{OP}^2$ sobre los números complejos, cuaternios y octoniones, respectivamente.

2.1 Clasificación de variedades que son como planos proyectivos salvo suma conexa con esferas homotópicas.

En esta sección veremos la clasificación de variedades que son como planos proyectivos realizada por Eells y Kuiper en [16].

Definición 2.2. Sea N una n -variedad suave, decimos que N es *casi-cerrada* si es compacta y su frontera es una esfera homotópica.

Las variedades casi-cerradas pueden ser obtenidas de una n -variedad cerrada N removiendo el interior de un disco $\mathring{D}^n$ de N , con esto ∂N es homeomorfa a S^{n-1} y consideramos

$$N(\alpha) := N \cup_{\alpha} D^n$$

donde $\alpha : \partial D^n \rightarrow \partial N$ es un homeomorfismo. Notemos que $N(\alpha)$ es suave si α es difeomorfismo, más aún, si $\beta : \partial D^n \rightarrow \partial N$ es otro difeomorfismo, entonces $N(\beta)$ es difeomorfa a $N(\alpha) \# \Sigma$ donde $\Sigma = D^n \cup_{\alpha^{-1}\beta} D^n$ es una esfera homotópica. Así $N(\alpha)$ no depende de α .

Teorema 2.3. (Eells-Kuiper)

La clase de difeomorfismo de variedades simplemente conexas casi-cerradas que son como planos proyectivos de dimensión $2m = 8, 16$ está en correspondencia $1 - 1$ con los enteros no negativos. La variedad N_t correspondiente a $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es el haz de discos del haz vectorial $\xi_t \rightarrow S^m$ con clase de Euler $e(\xi_t) = x$ y clase de Pontryagin $p_m(\xi_t) = 2(1 + 2t)x$ para $m = 4$ (respectivamente $p_m(\xi_t) = 6(1 + 2t)x$ para $m = 8$) donde $x \in H^m(S^m)$ es el generador.

Demostración. Tomemos $N_t = D(\xi_t)$ el haz de discos de ξ_t , notemos que N_t es una variedad casi-cerrada que es como un plano proyectivo, pues la condición de que $e(\xi_t) = x$ nos garantiza que $\partial D(\xi_t)$ es una esfera homotópica. Además, si hacemos el pullback de ξ_t via una función $f : S^m \rightarrow S^m$ de grado -1 , entonces $f^*\xi_t$ es un haz isomorfo a ξ_{-t-1} , entonces las variedades N_t y N_{-t-1} son difeomorfas y es suficiente considerar $t \geq 0$.

Por otro lado, si N es una variedad simplemente conexa casi-cerrada que es como un plano proyectivo de dimensión $2m = 8, 16$, consideramos el haz normal ξ de un encaje $S^m \hookrightarrow N$ el cual representa un generador de $H_*(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Entonces ξ es un m -haz vectorial orientado sobre S^m , para el cual su haz de discos puede ser identificado con una vecindad tubular de $S^m \subset N$. Salvo isomorfismo ξ está determinado por su clase de Euler $e(\xi)$ y la clase de Pontryagin $p_m(\xi)$, dado que N es como un plano proyectivo se tiene que

$$H^*(N/\partial N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^3)$$

y esto implica que $e(\xi) = x$. La clasificación de m -haces vectoriales sobre S^m implica que ξ es isomorfo a ξ_t para algún $t \in \mathbb{Z}$. Ahora removiendo el interior del haz de discos $D(\xi) \subset N$ de N obtenemos W un h -cobordismo entre $\partial D(\xi)$ y ∂N , como $\dim(W) \geq 6$, por el teorema de h -cobordismo tenemos que W es difeomorfa a $\partial D(\xi) \times [0, 1]$; en particular,

$$N = D(\xi) \cup_{\partial D(\xi)} W$$

es difeomorfa a $D(\xi) = D(\xi_t)$. □

Una pregunta natural es ¿Para qué valores de $t \in \mathbb{Z}$ se cumple que ∂N_t es difeomorfa a S^{2m-1} ?, la respuesta a esto es una consecuencia del teorema 2.3. Cabe mencionar que en [16] está la prueba de la necesidad, sin embargo, la suficiencia está basada en un resultado de Crispin Thomas St. John Wall en [50].

Proposición 2.4. (Eells-Kuiper, Wall.)

La frontera ∂N_t es difeomorfa a S^{2m-1} si y sólo si $t \equiv 0, 7, 48, 55 \pmod{56}$ para $m = 4$ y $t \equiv 0, 127, 16128, 16255 \pmod{16256}$ para $m = 8$.

Demostración. Para la necesidad, tomemos $\alpha : S^{2m-1} \rightarrow \partial N_t$ un homeomorfismo y consideremos $N_t(\alpha) = N_t \cup_\alpha D^{2m-1}$. El género $\hat{A}$ de $N_t(\alpha)$, $\hat{A}(N_t(\alpha))$, es una cierta combinación lineal racional de los números de Pontryagin $p_m^2(M)[M]$ y $p_{2m}^2(M)[M]$ que es independiente de α y puede ser descrito en términos de t como [30],[16]:

$$\hat{A}(N_t(\alpha)) = \begin{cases} -\frac{t(t-1)}{7 \cdot 8} & m = 4 \\ -\frac{t(t-1)}{127 \cdot 128} & m = 8 \end{cases}$$

El género $\hat{A}$ es definido para cualquier variedad, pero en general no es un número entero. Del Teorema de Índice de Atiyah-Singer, Borel y Hirzebruch mostraron que el género $\hat{A}$ para variedades spin coincide con el índice del operador de Dirac el cual es un entero. Por tanto, para variedades spin el género $\hat{A}$ es un número entero [7].

Ahora, si ∂N_t es difeomorfa a S^{2m-1} , entonces podemos pensar a α como difeomorfismo y así $N_t(\alpha)$ es suave. Dado que $H^i(M; \mathbb{Z}/2) = 0$ para $i = 1, 2$, entonces las obstrucciones para una estructura spin $w_i(M) \in H^i(M; \mathbb{Z}/2)$ se anulan, así $N_t(\alpha)$ puede ser dotada con una estructura spin. Por el comentario anterior tenemos que $\hat{A}(N_t(\alpha)) \in \mathbb{Z}$ y por tanto $\hat{A}(N_t(\alpha))$ cumple las congruencias.

Para la suficiencia, si tenemos que se cumplen las congruencias requeridas, entonces $\hat{A}(N_t(\alpha)) \in \mathbb{Z}$ y por el Teorema 4 de [50] tenemos que la obstrucción para que ∂N_t sea difeomorfa a S^{2m-1} es

$$\frac{\chi(N_t)^2 - \tau(N_t)}{8} \pmod{28} \quad (m = 4), \quad \frac{\chi(N_t)^2 - \tau(N_t)}{8} \pmod{2^6 \cdot 127} \quad (m = 8),$$

donde χ y τ son la característica de Euler y la signatura, respectivamente. Dado que el género $\hat{A}$ en este caso es un número entero, entonces las obstrucciones se anulan, por tanto ∂N_t es difeomorfa a S^{2m-1} . $\square$

Con esto tenemos que las clases de difeomorfismo de M una variedad que es como un plano proyectivo de dimensión $2m \geq 8$ está determinado por la $p_{m/4}$ -ésima clase de Pontryagin de M , y estas son:

$$p_{m/4}(M_t) = \begin{cases} 2(1 + 2t)x & t \equiv 0, 7, 48, 55 \pmod{56} & m = 4 \\ 6(1 + 2t)x & t \equiv 0, 127, 16128, 16255 \pmod{16256} & m = 8 \end{cases}$$

Entonces podemos concluir que el género $\hat{A}$ es un invariante numérico completo de dichas variedades, y se sigue que:

$$\hat{A}(M_t) = \begin{cases} -\frac{t(t-1)}{7 \cdot 8} & t \equiv 0, 7, 48, 55 \pmod{56} & m = 4 \\ -\frac{t(t-1)}{127 \cdot 128} & t \equiv 0, 127, 16128, 16255 \pmod{16256} & m = 8 \end{cases}$$

Como resultado principal en esta sección y como consecuencia de los resultados anteriores tenemos que:

Teorema 2.5. Sea M una $2m$ -variedad que es como un plano proyectivo con $m = 4, 8$. Entonces salvo suma conexa con una esfera homotópica, el tipo de difeomorfismo de M está determinado por el número de Pontryagin $p_m^2(M)[M] \in \mathbb{Z}$. Más aún, un entero k es igual al número $p_m^2(M)[M]$ si y sólo si

$$k = \begin{cases} 2^2(1+2t)^2 & t \equiv 0, 7, 48, 55 \pmod{56} & m = 4 \\ 6^2(1+2t)^2 & t \equiv 0, 127, 16128, 16255 \pmod{16256} & m = 8 \end{cases}$$

2.2 Grupos de bordismo.

Recordemos que

$$BO_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Gr_k(\mathbb{R}^{n+k}) \quad \text{y} \quad BO = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} BO_k.$$

Sea $(N, \partial N)$ una n -variedad compacta y consideremos

$$\iota : (N, \partial N) \hookrightarrow (\mathbb{R}_+^{n+k}, \partial \mathbb{R}_+^{n+k})$$

un encaje suave donde $\mathbb{R}_+^{n+k}$ denota el hiper-semiplano superior de $\mathbb{R}^{n+k}$. La función

$$\nu : N \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^{n+k})$$

que envía un punto $x \in N$ a su espacio normal en $\mathbb{R}^{n+k}$ es llamada la función de Gauss. Tomemos $B \rightarrow BO$ una fibración fija sobre el espacio clasificante BO del grupo ortogonal estable.

Definición 2.6. Una B -estructura en N es una clase de equivalencia de pares $(\iota, \bar{\nu})$ donde $\bar{\nu}$ es la función que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow \bar{\nu} & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\nu} & Gr_k(\mathbb{R}^{n+k}) \subset BO_k \subset BO \end{array}$$

y la relación de equivalencia es generada por deformaciones simultáneas de ι y $\bar{\nu}$, y por la estabilización de $\mathbb{R}^{n+k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$.

Definición 2.7. Una B -variedad es una variedad que tiene una B -estructura y un B -bordismo entre B -variedades $M_1 \xrightarrow{\bar{\nu}_1} B$ y $M_2 \xrightarrow{\bar{\nu}_2} B$ es un bordismo W entre M_1 y M_2 con una B -estructura $\bar{\nu} : W \rightarrow B$ la cual se restringe a $\bar{\nu}_1$ y $\bar{\nu}_2$ en la frontera $\partial W = M_1 \sqcup M_2$.

Definición 2.8. Una B -estructura $\bar{\nu} : M \rightarrow B$ es llamada k -suave normal si $\bar{\nu}$ es una $(k+1)$ -equivalencia, es decir, $\bar{\nu}_* : \pi_i(M) \rightarrow \pi_i(B)$ es isomorfismo para $i \leq k$ y suprayectivo para $i = k+1$.

Si existe una B -estructura k -suave $\bar{\nu} : M \rightarrow BO$ y $\pi_i(B) \rightarrow \pi_i(BO)$ es isomorfismo para $i > k + 1$ e inyectivo para $i = k + 1$, entonces la fibración $B \rightarrow BO$ está determinada por M salvo equivalencia homotópica en las fibras. En este caso nos referimos a $B \rightarrow BO$ como el k -tipo normal de M . En [31] podemos encontrar el siguiente teorema:

Teorema 2.9. Sean M_1 y M_2 dos n -variedades cerradas con $n \geq 5$, $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ y con una B -estructura k -suave normal. Para $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ un B -bordismo W entre M_1 y M_2 es bordante a un s -cobordismo si y sólo si una determinada obstrucción $\theta(W)$ es elemental, donde $\theta(W) \in L_{n+1}(\pi_1(B), w : \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(BO) \cong \mathbb{Z}/2)$ el grupo de cirugía clásico de Wall.

De este teorema tenemos que podemos pensar en el conjunto de clases de equivalencia bajo la relación de B -bordismo como un grupo y lo denotamos con Ω_n^B . Entonces tenemos los siguientes resultados

Corolario 2.10. Sean M_1 y M_2 dos $2m$ -variedades cerradas simplemente conexas con una B -estructura m -suave normal, $m \geq 3$. Si M_1 y M_2 representan el mismo elemento en Ω_{2m}^B , entonces M_1 es difeomorfa a M_2 .

Corolario 2.11. Sea M una $2m$ -variedad simplemente conexa, $m \geq 3$, y $\bar{\nu} : M \rightarrow B$ una B -estructura m -suave normal de M . Si Σ es una esfera homotópica con una B -estructura tal que $[\Sigma] = 0 \in \Omega_{2m}^B$, entonces $M \# \Sigma$ es difeomorfa a M .

Demostración. Es sabido que la suma conexa de dos B -variedades M y N admite una B -estructura tal que en Ω_*^B se tiene que $[M \# N] = [M \sqcup N]$. Construimos el B -bordismo W tomando $M \times I$ y $N \times I$ y pegando una 1-asa en $D^n \times I$, W es una $(n + 1)$ -variedad tal que

$$\partial W = M \sqcup N \sqcup M \# N,$$

de la teoría de obstrucción tenemos que la B -estructura puede ser extendida a la 1-asa, entonces W tiene una B -estructura. Dado que la B -estructura en $M \# \Sigma$ es m -suave normal, entonces del resultado anterior tenemos que $M \# \Sigma$ es difeomorfa a M . $\square$

2.2.1 El m -tipo normal de variedades que son como planos proyectivos.

De la teoría de obstrucción tenemos que si B y B' son k -universales y admiten una estructura k -suave normal de la misma variedad M , entonces las dos fibraciones son equivalencia homotópica por fibras, mas aún, la descomposición de Moore-Postnikov implica que para cada M existe una fibración k -universal B^k sobre BO que admite una estructura k -suave normal de M . Entonces el tipo de homotopía de la fibra de $B^k \rightarrow BO$ es un invariante de M y lo llamamos el k -tipo normal de M , denotado por $B^k(M)$.

Lema 2.12. Sea M una $2m$ -variedad que es como un plano proyectivo con $m = 4, 8$ tal que la variedad casi-cerrada $\dot{M}$ (obtenida removiendo un disco abierto de M) es

difeomorfa a N_t . Además, si $\nu : M \rightarrow BO_k \subset BO$ es la función de Gauss inducida por un encaje $M \subset \mathbb{R}^{2m+k}$, se tiene que

$$\nu_* : \pi_m(M) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_m(BO) \cong \mathbb{Z}$$

es multiplicación por $\pm(2t+1)$.

Demostración. Sea $i : S^m \hookrightarrow D(\xi_t) = N_t \subset M$ la inclusión de la sección cero, notemos que el haz normal de este encaje es ξ_t y el haz normal del encaje $N_t \subset M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ es el pullback $\nu^*\gamma^k$ del haz universal $\gamma \rightarrow BO$ vía la función de Gauss $\nu : M \rightarrow BO_k$. Luego tenemos que el haz

$$TS^m \oplus \xi_t \oplus i^*\nu^*\gamma^k \cong i^*TM \oplus i^*\nu^*\gamma^k \cong i^*(TM \oplus \nu^*\gamma^k)$$

es la restricción del haz tangente de $\mathbb{R}^{n+k}$ a $S^m \subset M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ y por tanto trivial. Identificando haces vectoriales estables sobre S^m con $[S^m \rightarrow BO] \in \pi_m(BO)$ concluimos que $i^*\nu^*\gamma = -\xi_t \in \pi_m(BO)$, comparando las clases de Pontryagin $p_m(\xi_t), p_m(\xi_1) \in H^m(S^m; \mathbb{Z})$ vemos que $\xi_t = (2t+1)\xi_1 \in \pi_m(BO)$, lo que implica que $i^*\nu^*\gamma = -(2t+1)\xi_1 \in \pi_m(BO)$, reinterpretando esta ecuación, esto nos dice que la función

$$\nu_* : \pi_m(M) \rightarrow \pi_m(BO)$$

manda el generador $[i : S^m \rightarrow M]$ a $-(2t+1)\xi_1$, como ξ_1 es el generador de $\pi_m(BO)$, y así obtenemos el lema. $\square$

Notemos que si M es como un plano proyectivo de dimensión $2m$, es $(m-1)$ -conexa, es decir, $\pi_i(M) = 0$ para $i < m$, luego de la teoría de obstrucción tenemos que $\nu : M \rightarrow BO_k \subset BO$ de un encaje $M \subset \mathbb{R}^{2m+k}$, puede ser factorizada mediante la cubierta $(m-1)$ -conexa

$$q : BO\langle m \rangle \rightarrow BO.$$

Observemos que el levantamiento $\bar{\nu} : M \rightarrow BO\langle m \rangle$ no es m -suave normal de M y por el lema 2.12 se cumple que

$$\pi_m(M) \rightarrow \pi_m BO\langle m \rangle \cong \pi_m(BO)$$

no es isomorfismo a menos que $t = 0$. En particular, $BO\langle m \rangle \rightarrow BO$ no es m -tipo normal de M a menos que $t = 0$.

Vamos a producir la fibración $B \rightarrow BO$. Sea $K(\mathbb{Z}, m)$ el espacio de Eilenberg-McLane, caracterizado salvo equivalencia homotópica por $\pi_i(K(\mathbb{Z}, m)) = 0$ para $i \neq m$ y $\pi_m(K(\mathbb{Z}, m)) \cong \mathbb{Z}$. Consideremos $\Omega K(\mathbb{Z}, m)$ y $PK(\mathbb{Z}, m)$ el espacio de lazos y el espacio de caminos de $K(\mathbb{Z}, m)$, respectivamente. Luego de la fibración de caminos

$$\Omega K(\mathbb{Z}, m) \rightarrow PK(\mathbb{Z}, m) \rightarrow K(\mathbb{Z}, m)$$

y considerando su sucesión exacta larga en homotopía junto con el hecho de que $PK(\mathbb{Z}, m)$ es contráctil, tenemos que

$$\Omega K(\mathbb{Z}, m) = K(\mathbb{Z}, m-1).$$

Para $m \equiv (\text{mód } 4)$ denotamos por $B_{d,m} \rightarrow BO\langle m \rangle$ el pullback sobre la fibración de caminos vía

$$\phi : BO\langle m \rangle \rightarrow K(\mathbb{Z}, m)$$

tal que

$$\phi_* : \pi_m(BO\langle m \rangle) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_m(K(\mathbb{Z}, m)) \cong \mathbb{Z}$$

es multiplicación por d . De la sucesión exacta larga en homotopía tenemos que

$$\pi_m(B_{d,m}) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_m(BO\langle m \rangle) \cong \mathbb{Z}$$

es multiplicación por $\pm d$.

Proposición 2.13. Sea M como en el lema 2.12, entonces el m -tipo normal de M es la fibración

$$B_{2t+1,m} \rightarrow BO\langle m \rangle \rightarrow BO.$$

Demostración. Sea $\bar{\nu}' : M \rightarrow BO\langle m \rangle$ el levantamiento de la función de Gauss $M \rightarrow BO$ asociada al encaje $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$. La teoría de obstrucción muestra que $\bar{\nu}'$ puede ser levantada a $\bar{\nu} : M \rightarrow B_{2t+1,m}$ y del lema 2.12 tenemos que

$$\bar{\nu}_* : \pi_i(M) \rightarrow \pi_i(B_{2t+1,m})$$

es isomorfismo para $i = m$. Más aún, es suprayectivo para $i = m + 1$: para $m = 4$ se sigue de que $\pi_5(BO) = 0$ y para $m = 8$ se sigue del hecho de que la fibración de Hopf $\eta : S^9 \rightarrow S^8$ induce suprayección

$$\pi_8(BO) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_9(BO) \cong \mathbb{Z}/2.$$

□

Ahora aplicando el corolario 2.11 a variedades que son como planos proyectivos, podemos concluir que:

Corolario 2.14. Si M es como en 2.12 y Σ es una esfera homotópica de dimensión $2m$ con $[\Sigma] = 0$ en $\Omega_{2m}^{B_{2t+1,m}}$, entonces $M \# \Sigma$ es difeomorfa a M .

A continuación uno de los resultados más importantes sobre la clasificación de variedades que son como planos proyectivos es trabajo de Linus Kramer y Stephan Stolz en 2007, ver [31].

Proposición 2.15. Sea Σ una esfera homotópica de dimensión $2m = 8, 16$, entonces $[\Sigma] = 0$ en $\Omega_{2m}^{B_{2t+1,m}}$ para cualquier t .

Notemos que $B_{2t+1,m} \rightarrow BO\langle m \rangle$ es una función de haces fibrados sobre BO la cual induce un homomorfismo de grupos de bordismo

$$\Omega_*^{B_{2t+1,m}} \rightarrow \Omega_*^{BO\langle m \rangle}$$

Para $m = 4, 8$ se sabe que los grupos $\Omega_{2m}^{BO\langle m \rangle}$ son:

$$\Omega_8^{BO\langle 4 \rangle} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \Omega_{16}^{BO\langle 8 \rangle} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

ver [37][19][20]. Dado que $\Theta_{2m} \cong \mathbb{Z}/2$ para $m = 4, 8$ se sigue que para cualquier esfera homotópica Σ de dimensión $2m$, la suma conexa $\Sigma \# \Sigma$ es difeomorfa a S^{2m} . En particular, Σ representa un elemento de orden a lo mas dos en $\Omega_*^{B_{2t+1}, m}$. La demostración del siguiente resultado se puede encontrar en [31].

Proposición 2.16. El homomorfismo

$$\Omega_*^{B_{2t+1}, m} \rightarrow \Omega_*^{BO\langle m \rangle}$$

es un isomorfismo 2-local, es decir, su kernel y cokernel son grupos de torsión sin elementos de orden 2.

Todos estos resultados de L. Kramer y S. Stolz demuestran una clasificación completa de variedades que son como planos proyectivos [31]:

Teorema 2.17. Sea M una $2m$ -variedad que es como un plano proyectivo, $m \neq 2$. Entonces para cualquier esfera homotópica Σ de dimensión $2m$ la suma conexa $M \# \Sigma$ es difeomorfa a M .

Demostración. Dado que Σ es una esfera homotópica de dimensión $2m$ por la proposición 2.15 tenemos que $[\Sigma] = 0$ en $\Omega_{2m}^{B_{2t+1}, m}$, luego dado que M es como un plano proyectivo se tiene que M es como en 2.12, entonces esto nos lleva a que $M \# \Sigma$ es difeomorfa a M por la proposición 2.14. $\square$

Capítulo 3

El grupo modular de variedades que son como planos proyectivos.

En este capítulo nos enfocaremos en dar las herramientas necesarias para hacer el cálculo explícito del grupo modular de variedades que son como planos proyectivos. Iniciamos recordando algunos de los conceptos principales.

Definición 3.1. Una n -variedad M simplemente conexa, suave y cerrada es *como un plano proyectivo* si $H_*(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Definición 3.2. Sea M una n -variedad suave cerrada, el *grupo modular de M* es el grupo de clases de isotopía de difeomorfismos de M que preservan orientación. Este grupo es denotado por $\mathfrak{M}(M)$.

Además, recordemos que por 1.22 y 1.23 tenemos que $\text{Diff}(M)$ es un grupo y $\text{Diff}_0(M)$ es un subgrupo normal de $\text{Diff}(M)$. También $\mathfrak{M}(M)$ puede ser visto como las componentes conexas del grupo $\text{Diff}(M)$, es decir,

$$\mathfrak{M}(M) = \text{Diff}(M) / \text{Diff}_0(M).$$

Veamos que $\text{Diff}(M)$ tiene una estructura de grupo topológico [5], y por tanto podemos darle una estructura de grupo topológico a $\mathfrak{M}(M)$.

Sea $C^r(M, N)$ el espacio de todas las funciones $f : M \rightarrow N$ de clase C^r con $1 \leq r \leq \infty$. El conjunto de todos los difeomorfismos de clase C^r de M se denota por $\text{Diff}^r(M)$ y la composición en $C^r(M, M)$ induce una estructura de grupo en $\text{Diff}^r(M)$. Con esta estructura, $\text{Diff}^r(M)$ se llama *el grupo de difeomorfismos de clase C^r de M* , además hay inclusiones naturales:

$$\text{Diff}^1(M) \supseteq \text{Diff}^2(M) \supseteq \cdots \supseteq \text{Diff}^r(M) \supseteq \cdots \supseteq \text{Diff}^\infty(M),$$

donde $\text{Diff}^\infty(M) = \text{Diff}(M)$ es el grupo de difeomorfismos de clase C^∞ de M . El *soporte* de una función $h \in C^r(M, M)$ es denotado por $\text{supp}(h)$ y es la cerradura del conjunto $\{x \in M \mid h(x) \neq x\}$. El espacio de funciones con soporte compacto, para algún compacto $K \subset M$, es

$$C_c^r(M, M) := \{h \in C^r(M, M) \mid \text{supp}(h) \subset K\}.$$

Entonces el grupo de difeomorfismos de clase C^r con soporte compacto se define como

$$\text{Diff}_c^r(M) := \text{Diff}^r(M) \cap C_c^r(M, M).$$

y se tiene que $\text{Diff}_c^r(M)$ es un subgrupo normal de $\text{Diff}^r(M)$. Además si M es compacta, ambos grupos coinciden. Sean M, N variedades suaves y $f \in C^r(M, N)$ con $1 \leq r \leq \infty$. Sea (φ, U) una carta local en M , y $K \subset U$ un subconjunto compacto tal que $f(K) \subset V$, donde V es dominio de una carta (ψ, V) en N . Para $\varepsilon \geq 0$, definimos

$$N_r(f, (\varphi, U), (\psi, V), \varepsilon, K)$$

como el conjunto de $g \in C^r(M, N)$ tales que $g(K) \subset V$ y

$$\|D^k f(x) - D^k g(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \varphi(K), \quad 0 \leq k \leq r.$$

Los conjuntos $N_r(f, (\varphi, U), (\psi, V), \varepsilon, K)$ forman una subbase para una topología en $C^r(M, N)$, llamada *topología compacto-abierta* C^r (o también topología débil C^r) [24]. La topología compacto-abierta C^∞ en $C^\infty(M, N)$ es la inducida por las inclusiones

$$C^\infty(M, N) \subset C^r(M, N), \quad r < \infty.$$

Si denotamos por $C_W^r(M, N)$ al espacio $C^r(M, N)$ dotado con la topología débil, entonces el grupo $\text{Diff}^r(M)$ con la topología inducida de $C_W^r(M, M)$ es un grupo topológico, metrizable y con base numerable [24].

Sea $C_K^r(M, N)$ es el conjunto de funciones con soporte en un compacto $K \subset M$, se dota a este conjunto con la topología compacto-abierta y se define

$$C_c^r(M, N) = \varinjlim_{K \subset M \text{ compacto}} C_K^r(M, N),$$

con la topología de límite directo. Entonces el grupo $\text{Diff}_c^r(M)$ de difeomorfismos de clase C^r con soporte compacto se dota con la topología de límite directo inducida de $C_c^r(M, M)$. Por tanto, el grupo $\text{Diff}_c^\infty(M)$ de difeomorfismos C^∞ con soporte compacto también se dota con la topología de límite directo, como

$$\text{Diff}_c^\infty(M) = \varinjlim_{K \subset M \text{ compacto}} \text{Diff}_K^r(M),$$

donde cada $\text{Diff}_K^r(M)$ tiene la topología compacto-abierta. Por tanto, $\text{Diff}(M)$ es un grupo topológico y en consecuencia $\mathfrak{M}(M)$ también lo es con la topología compacto-abierta C^∞ .

Observación 3.3. Si M es como un plano proyectivo en el teorema 2.3 hemos visto que las clases de Pontryagin $p_{m/4}$ son no triviales y además sabemos que

$$H^*(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^3) \quad \text{con} \quad \deg(x) = m$$

lo cual implica que cualquier difeomorfismo de M necesariamente preserva orientación, ver [16].

A partir de aquí M siempre será una variedad que es como un plano proyectivo de dimensión $2m = 8, 16$.

Definición 3.4. El grupo modular de un disco D^n relativo a su frontera es definido y denotado por

$$\mathfrak{M}(D^n, \partial) = \{f : D^n \longrightarrow D^n | f \text{ es difeomorfismo orientado con } f|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}\}.$$

En [13] se muestra que para $n \geq 5$ se cumple que

$$\mathfrak{M}(D^n, \partial) \cong \Theta_{n+1}. \quad (1)$$

Ahora, sea $D^{2m} \hookrightarrow M$ un encaje suave y $f \in \mathfrak{M}(D^{2m}, \partial)$. Dado que $\partial D^{2m} \cong S^{2m-1}$ y $f|_{S^{2m-1}} = id_{S^{2m-1}}$, podemos extender f a un difeomorfismo en M con id_M en el complemento de D^{2m} . Tal extensión del difeomorfismo f es llamado *difeomorfismo con soporte en un disco*, por tanto obtenemos un homomorfismo de grupos

$$\mathfrak{M}(D^{2m}, \partial) \longrightarrow \mathfrak{M}(M).$$

Por otro lado por el teorema de Haefliger ([21], [22]) existe un encaje $S^m \hookrightarrow M$ único salvo homotopía, representando un generador fijo de $H_m(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Sea N una vecindad tubular de S^m , el cual es el haz de discos del haz normal ξ de S^m (el haz vectorial ξ debería tener número de Euler ± 1 , esto solo pasa para $m = 2, 4, 8$ y fue probado por Bott y Milnor en [9]). Por otro lado el teorema de h -cobordismo implica que

$$M \cong N \cup_{S^{2m-1}} D^{2m}.$$

Entonces los grupos modulares de M y N se relacionan por la siguiente sucesión exacta (ver Teorema 3 de [51])

$$\mathfrak{M}(D^{2m}, \partial) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M}(M) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{M}(N) \xrightarrow{\gamma} I(M) \rightarrow 0 \quad (2)$$

donde α está dado por una extensión por la identidad (antes explicado), por el Teorema del disco y el Teorema de extensión de isotopía, cualquier difeomorfismo f de M es isotópico a un difeomorfismo f_1 , el cual está bien definido salvo isotopía y fija a D^{2m} ; $\beta(f)$ es la restricción de f_1 a N ; $I(M) = \{\Sigma \in \Theta_{2m} | M \# \Sigma \cong M\}$ es el grupo de inercia de M (ver [36]), y γ es definido vía la restricción de un difeomorfismo de N a $\partial N = S^{2m-1}$. Por otro lado, por el teorema 2.17 tenemos que

$$I(M) = \Theta_{2m} \cong \mathbb{Z}/2.$$

Del isomorfismo (1) y de la sucesión (2), tomemos el homomorfismo correspondiente a α con este isomorfismo como

$$\phi : \Theta_{2m+1} \rightarrow \mathfrak{M}(M). \quad (3)$$

3.1 Automorfismos de haces.

El propósito de este capítulo es estudiar los morfismos de la sucesión exacta (2). Empezamos dando una demostración alternativa a uno de los resultados mencionados en el trabajo de Su y Wang [46] que es de suma importancia para el cálculo de grupos modulares de variedades que son como planos proyectivos.

Recordemos que $N = D(\xi)$ es el espacio total del haz de discos cerrados del haz normal ξ de S^m . Tomemos $aut(\xi)$ el grupo de clases de isotopía de isomorfismos $\xi \rightarrow \xi$ que preservan orientación, fibras y además son la identidad en el espacio base S^m (no mueve los puntos base).

Si $\varphi : \xi \rightarrow \xi$, entonces $\varphi_x : \xi_x \rightarrow \xi_x$ es un isomorfismo lineal para cada $x \in S^m$ y cada vector $v \in \xi_x$ se mapea a otro vector $\varphi_x(v) \in \xi_x$, esto es suave y preserva la estructura del disco en ξ_x , así tenemos un ϕ induce un difeomorfismo $D(\xi) \rightarrow D(\xi)$, es decir, un elemento en $aut(N)$. Por tanto tenemos un homomorfismo de grupos bien definido

$$aut(\xi) \longrightarrow aut(N).$$

Por otro lado, si P es un G -haz principal sobre un espacio X , AdP denota el haz asociado a P con fibra G y la acción de G en sí mismo es adjunta, entonces $AdP = P \times_G G$ y ya no es un haz fibrado principal, si no un fibrado de grupos sobre X , de los cuales sus secciones pueden ser identificadas con $f : P \rightarrow G$ tal que $f(pg) = g^{-1}f(p)g$, ver [4].

El espacio de secciones ΓAdP forma un grupo bajo la multiplicación puntual y es *el grupo calibrado de P* , denotado por $\mathcal{G}(P)$. Este grupo actúa naturalmente como un grupo de funciones G -equivariantes de P , el cual es la identidad en X . Además si consideramos $Map(M, BG)$ como el espacio de funciones de M a BG y $Map_P(M, BG)$ como la componente conexa de $Map(M, BG)$ la cual contiene la función clasificante de P , entonces tenemos el siguiente resultado, para el cual se propone una demostración alternativa:

Teorema 3.5. Si BG es paracompacto y localmente contráctil, entonces

$$\pi_1(Map_P(B, BG)) \cong \pi_0(\mathcal{G}(P)).$$

Antes de iniciar la demostración de este importante resultado, veamos un lema y un teorema el cual puede ser consultado en [4].

Lema 3.6. $\mathcal{G}(P) = aut(P)$.

Demostración. Si $f : P \rightarrow G$ es una sección de AdP , entonces definimos

$$\begin{aligned} f_* : P &\rightarrow P \\ p &\mapsto pf(p) \end{aligned}$$

y dado que $f(pg) = g^{-1}f(p)g$ tenemos que f_* es G -equivariante.

Por otro lado, si $f_* : P \rightarrow P$ es G -equivariante definimos

$$f : P \rightarrow G$$

tal que $f_*(p) = pf(p)$. Entonces así definido es una sección de AdP . □

En particular, sea $P(\xi)$ el $SO(m)$ -haz principal asociado de ξ , entonces (ver [4])

$$\text{aut}(\xi) = \mathcal{G}(P(\xi)) = \pi_0 \mathcal{G}(P(\xi)).$$

Teorema 3.7. Sea BG el espacio clasificante de G , entonces

$$B\mathcal{G}(P) \simeq \text{Map}_P(M, BG)$$

donde el subíndice P denota la componente de una función $M \rightarrow BG$ la cual induce P .

Veamos la demostración del teorema 3.5

Demostración. Por el teorema 3.7 tenemos que para un G -haz principal $P \rightarrow B$ el espacio clasificante de su grupo calibrado $\mathcal{G}(B)$ es homotópicamente equivalente a la componente conexa $\text{Map}_P(B, BG)$ del espacio de funciones $\text{Map}(B, BG)$, la cual contiene la función clasificante de P .

Denotamos por ΩX el espacio de lazos basados de un espacio topológico X , entonces tenemos las siguientes equivalencias homotópicas

$$\mathcal{G}(B) \simeq \Omega B\mathcal{G}(B) \simeq \Omega \text{Map}_P(B, BG).$$

También recordemos que de la fibración $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ podemos considerar el conjunto de funciones G -equivariantes $P \rightarrow E$, denotado por $\text{Map}_G(P, E)$, entonces $\mathcal{G}(P)$ actúa en $\text{Map}_G(P, E)$ por composición y tenemos la fibración

$$\mathcal{G}(P) \rightarrow \text{Map}_G(P, E) \xrightarrow{\pi} \text{Map}_P(B, BG)$$

para la cual en la sucesión exacta larga de homotopía tenemos

$$\rightarrow \pi_1(\mathcal{G}(P)) \rightarrow \pi_1(\text{Map}_G(P, E)) \rightarrow \pi_1(\text{Map}_P(B, BG)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{G}(P)) \rightarrow \pi_0(\text{Map}_G(P, E)) \rightarrow$$

Ahora como BG es paracompacto y localmente contráctil tenemos que π es una fibración principal localmente trivial [4], lo cual implica que $\text{Map}_G(P, E)$ es contráctil y por tanto tenemos un isomorfismo

$$\pi_1(\text{Map}_P(B, BG)) \cong \pi_0(\Omega \text{Map}_P(B, BG)) \cong \pi_0(\mathcal{G}(P)).$$

□

Por tanto, para $B = S^n$ y G grupo topológico conexo tenemos equivalencias homotópicas

$$\text{Map}_P^*(S^n, BG) \simeq \Omega^n BG \simeq \Omega^{n-1} G$$

donde $\text{Map}_P^*(S^n, BG)$ es el espacio correspondiente de funciones punteadas y usando que $\Omega BG \simeq G$. Entonces existe una sucesión exacta

$$\pi_1(G) \xrightarrow{S_p} \pi_n(G) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{G}(B)) \rightarrow 0$$

donde el homomorfismo $s_p : \pi_1(G) \rightarrow \pi_n(G)$ es descrito como sigue:
Para un grupo topológico G la función

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto [g_1, g_2] \end{aligned}$$

desciende a una función $c : G \wedge G \rightarrow G$ la cual induce una pareja bilineal

$$\langle -, - \rangle : \pi_n(G) \otimes \pi_m(G) \rightarrow \pi_{n+m}(G)$$

llamado el producto de Samelson [8]. Entonces s_p puede ser identificado con un producto de Samelson como sigue:

Lema 3.8. Sea $[f_p] \in \pi_{n-1}(G)$ la clase de homotopía de la función de pegadura del haz principal $P \rightarrow S^n$, entonces s_p es idéntico al siguiente producto de Samelson

$$s_p = -\langle -, [f_p] \rangle : \pi_1(G) \rightarrow \pi_n(G).$$

Demostración. Sea $[g_p] \in \pi_n(BG)$ la clase de homotopía de la función clasificante del haz principal P , en [34] se muestra que el homomorfismo frontera

$$\pi_2(BG) \rightarrow \pi_1(Map_P^*(S^n, BG)) \cong \pi_{n+1}(BG)$$

de la fibración

$$Map_P^*(S^n, BG) \rightarrow Map_P(S^n, BG) \rightarrow BG$$

es equivalente al producto de Whitehead $[-, g_p]$. Tomemos

$$T : \pi_*(BG) \rightarrow \pi_{*-1}(\Omega BG) \cong \pi_{*-1}(G)$$

el isomorfismo natural y $[f_p] = T[g_p]$ la clase de homotopía de la función de pegadura. Por el Teorema 7.10 de [52] y el Teorema 7.1 de [43] tenemos que se cumple la ecuación

$$T[\alpha, \beta] = (-1)^p \langle T\alpha, T\beta \rangle \quad \text{para } \alpha \in \pi_{n+1}(BG) \text{ y } \beta \in \pi_{q+1}(BG).$$

Notemos que s_p es la composición

$$\pi_1(G) \xrightarrow{T^{-1}} \pi_2(BG) \rightarrow \pi_{n+1}(BG) \xrightarrow{T} \pi_n(G),$$

así para cualquier $x \in \pi_1(G)$, se tiene que

$$s_p(x) = -T[T^{-1}x, [g_p]] = -\langle x, T[g_p] \rangle = -\langle x, [f_p] \rangle.$$

□

Con este lema tenemos que el cálculo de $aut(\xi)$ se reduce a calcular, para $m = 4, 8$, el producto de Samelson

$$\langle -, - \rangle : \pi_1(SO(m)) \otimes \pi_{m-1}(SO(m)) \rightarrow \pi_m(SO(m)).$$

Dado un vector fijo $v \in S^{n-1}$ consideramos $SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ la función evaluación respecto a v y tomemos el inducido en homotopía como

$$P_n : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

entonces tenemos el siguiente resultado

Proposición 3.9. Sea $x \in \pi_{m-1}(SO(m))$ tal que $P_m(x) = \pm[id_{m-1}]$, donde $id_{m-1} : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$, entonces el producto de Samelson

$$\langle -, x \rangle : \pi_1(SO(m)) \rightarrow \pi_m(SO(m))$$

es no trivial.

Demostración. Para $p < q$ sean $i, i' : SO(p) \rightarrow SO(q)$ la inclusión inducida por la inclusión de la primera o la última p -ésima coordenada en el espacio euclidiano respectivo. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía

$$\begin{array}{ccccc} SO(2) \wedge SO(m) & \xrightarrow{i \wedge i'} & SO(m+1) \wedge SO(m+1) & \xrightarrow{c} & SO(m+1) \\ \downarrow i \wedge id & & & \nearrow i & \\ SO(m) \wedge SO(m) & \xrightarrow{c} & SO(m) & & \end{array}$$

Sea $\alpha_2 \in \pi_1(SO(2))$ un generador, entonces $i_*(\alpha_2) = \alpha_m$ es el generador de $\pi_1(SO(m))$. Veamos que $(c \circ (i \wedge i'))_*(\alpha_2 \otimes x)$ no es trivial, entonces por la conmutatividad del diagrama anterior $\langle \alpha_m, x \rangle$ no es trivial.

En [8] se muestra que el homomorfismo inducido por $c \circ (i \wedge i')$ en homotopía se ve como

$$(c \circ (i \wedge i'))_* = \Delta \circ \lambda_*^E \circ E \circ (P_2 \wedge P_m)$$

donde

- E es el homomorfismo suspensión;
- $\lambda^E : S^{m+1} \rightarrow S^{m+1}$ es de grado 1;
- $\Delta : \pi_{m+1}(S^{m+1}) \rightarrow \pi_m(SO(m+1))$ es el homomorfismo frontera de la fibración $SO(m+1) \rightarrow SO(m+2) \rightarrow S^{m+1}$.

Dado que $P_1(\alpha_2) = id_1$, $P_m(x) = \pm id_{m-1}$ y el grado de λ^E es 1, tenemos que

$$(\lambda_*^E \circ E \circ (P_1 \wedge P_m))(\alpha_2 \otimes x) = \pm[id_{m+1}].$$

Por otro lado, es sabido que Δ es no trivial para $m = 4, 8$ [27], entonces

$$(c \circ (i \wedge i'))_*(\alpha_2 \otimes x) = \Delta([id_{m+1}])$$

es no trivial. □

Con estos resultados podemos dar el cálculo de $aut(\xi)$.

Lema 3.10. Cuando $m = 4$ tenemos que $aut(\xi) \cong \mathbb{Z}/2$ y para $m = 8$ se tiene que $aut(\xi) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Demostración. Notemos que la sucesión exacta

$$\pi_1(G) \xrightarrow{S_p} \pi_n(G) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{G}(B)) \rightarrow 0$$

se reduce a

$$\pi_1(SO(m)) \xrightarrow{S_p} \pi_n(SO(m)) \longrightarrow \text{aut}(\xi) \rightarrow 0.$$

Utilizando el hecho de que

$$\pi_4(SO(4)) \cong (\mathbb{Z}/2)^2 \quad \text{y} \quad \pi_8(SO(8)) \cong (\mathbb{Z}/2)^3$$

(ver [27]) tenemos que la clase de Euler es $e(\xi) = \pm 1$ (pues ∂N es una esfera), lo cual es equivalente a que la imagen en $\pi_{m-1}(S^{m-1})$ de la función de pegadura de ξ en $\pi_{m-1}(SO(m))$ es $\pm[id]$. Luego por la proposición 3.9 tenemos que s_p no es trivial y sabemos que

$$\pi_1(SO(m)) = \begin{cases} 0 & m = 1 \\ \mathbb{Z} & m = 2 \\ \mathbb{Z}/2 & m \geq 3 \end{cases}$$

entonces para $m = 4$ la sucesión exacta es

$$\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{S_p} (\mathbb{Z}/2)^2 \longrightarrow \text{aut}(\xi) \rightarrow 0.$$

Para $m = 8$ tenemos la sucesión exacta

$$\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{S_p} (\mathbb{Z}/2)^3 \longrightarrow \text{aut}(\xi) \rightarrow 0$$

y así obtenemos el resultado. $\square$

Lema 3.11. El homomorfismo $\text{aut}(\xi) \rightarrow \mathfrak{M}(N)$ es un isomorfismo.

Demostración. Para la suprayectividad tenemos que un difeomorfismo $f : N \rightarrow N$ necesariamente preserva la clase de Pontryagin $p_{m/4}(N)$, entonces f induce la identidad en $H_m(N)$. La sección cero $S^m \subset N$ representa un generador de $H_m(N)$ y por el Teorema de Hurewicz y el Teorema de Haefliger [21], tras una homotopía podemos asumir que $f|_{S^m} = id$.

Sea $g = df$ la diferencial de f en S^m , la cual es un automorfismo de ξ . Por el Teorema de la vecindad regular (unicidad) [24], tras una homotopía podemos asumir que $f = g$ en una pequeña vecindad tubular $V \subset S^m$, luego $f^{-1} \circ g$ es un difeomorfismo de $\overline{N \setminus V}$ el cual, por el Teorema de h -cobordismo, es un difeomorfismo a $\partial V \times [0, 1]$. Notemos que $f^{-1} \circ g = id$ en ∂V , entonces por el Teorema de pseudo-homotopía de Cerf [13], $f^{-1} \circ g$ es isotópica a la identidad relativo a ∂V y esto muestra que f es isotópica a g . Por tanto $\text{aut}(\xi) \rightarrow \mathfrak{M}(M)$ es suprayectiva.

Para $m = 4$ tenemos que $\text{aut}(\xi) \cong \mathbb{Z}/2$ y

$$\gamma : \mathfrak{M}(N) \rightarrow I(M) \cong \Theta_8 \cong \mathbb{Z}/2$$

es suprayectiva, así $\text{aut}(\xi) \rightarrow \mathfrak{M}(N)$ debe ser isomorfismo.

Cuando $m = 8$ definimos $\mathfrak{M}(N) \rightarrow \text{aut}(\xi)$ la función inversa como sigue:

Para $f : N \rightarrow N$ difeomorfismo con $f|_{S^8} = id$ el diferencial df induce un automorfismo $\bar{f} : \xi \rightarrow \xi$. Veamos que la clase de isotopía de $\bar{f}$ depende sólo de la clase de isotopía de f . Sea $Q : N \times [0, 1] \rightarrow N \times [0, 1]$ una isotopía entre f y g con $f|_{S^8} = id = g|_{S^8}$, entonces

$Q|_{S^8 \times [0,1]}$ es homotópica a la identidad relativa a $S^8 \times \{0, 1\}$. Luego el Teorema del encaje de Haefliger vale para $m = 8$, es decir, $Q|_{S^8 \times [0,1]}$ es isotópica a la identidad relativa a $Q|_{S^8 \times \{0,1\}}$ y modificando Q por una isotopía, podemos asumir que $Q|_{S^8 \times [0,1]} = id$. Por tanto la diferencial de Q , dQ , nos da una isotopía entre df y dg . Entonces la composición

$$aut(\xi) \rightarrow \mathfrak{M}(N) \rightarrow aut(\xi)$$

es por definición la identidad y

$$\mathfrak{M}(N) \rightarrow aut(\xi) \rightarrow \mathfrak{M}(N)$$

es la identidad por [51]. □

3.2 Difeomorfismos con soporte en un disco.

Esta sección está dedicada a estudiar el homomorfismo 3

$$\phi : \Theta_{2m+1} \rightarrow \mathfrak{M}(M)$$

que recordemos proviene de la sucesión exacta (2).

Definición 3.12. Sea $D \subset M$ un $2m$ -disco cerrado encajado. Definimos el grupo modular de M relativo a D como

$$\mathfrak{M}(M, rel D) := \{f \in \mathfrak{M}(M) : f|_D = id_M\}.$$

Definición 3.13. Sea M una n -variedad y $f : M \rightarrow M$ un homeomorfismo. El *mapping torus* de M bajo f es el espacio cociente

$$\frac{M \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (f(x), 1)}$$

y se denota por M_f .

Por [51] tenemos que existe una sucesión exacta

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathfrak{M}(M, rel D) \rightarrow \mathfrak{M}(M) \rightarrow 0. \quad (4)$$

En esta sucesión la imagen de $1 \in \mathbb{Z}/2$ en $\mathfrak{M}(M, rel D)$ es un giro de Dehn en la vecindad collar $A \cong S^{2m-1} \times [0, 1]$ de $\partial(M \setminus \overset{\circ}{D})$. Más aún, sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow SO(2m-1)$ una curva suave que manda una vecindad de $\{0, 1\}$ a la matriz identidad y que representa un elemento no trivial en $\pi_1(SO(2m-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Definimos $f(x, t) = (\alpha(t) \cdot x, t)$ un difeomorfismo de A y extendemos f a un difeomorfismo de M con la identidad en el complemento de A , a esto le llamamos *difeomorfismo frontera*.

Sea $D' \subset M$ un $2m$ -disco que es disjunto de D , considerando un difeomorfismo soportado en D' tenemos un homomorfismo $\bar{\phi} : \Theta_{2m+1} \rightarrow \mathfrak{M}(M, rel D)$ que levanta al

homomorfismo $\phi : \Theta_{2m+1} \rightarrow \mathfrak{M}(M)$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{M}(M, \text{rel } D) & \\ \bar{\phi} \nearrow & \downarrow & \\ \Theta_{2m+1} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{M}(M) \end{array}$$

Consideramos X el resultado de la cirugía en el encaje $S^1 \times D \hookrightarrow S^1 \times M$ e $I(X)$ el grupo de inercia de X , entonces tenemos el siguiente resultado

Proposición 3.14. $\ker(\bar{\phi}) = I(X)$.

Demostración. Para $f \in \mathfrak{M}(D^{2m}, \partial)$ por el isomorfismo (1) podemos considerar $\Sigma_f \in \Theta_{2m+1}$ la correspondiente esfera homotópica, entonces el mapping torus M_f es difeomorfo a $(S^1 \times M) \# \Sigma_f$. La cirugía en $S^1 \times D \subset (S^1 \times M) \# \Sigma_f \cong M_f$ produce $X \# \Sigma_f$. Si $\Sigma_f \in \ker(\bar{\phi})$, entonces M_f es difeomorfa a $S^1 \times M$ relativo a $S^1 \times D$, después de la cirugía en $S^1 \times D$ tenemos que $X \# \Sigma_f \cong X$, es decir, $\Sigma_f \in I(X)$.

Por otro lado, sea V la traza de la cirugía en $S^1 \times D \subset S^1 \times M$ y consideramos

$$W := V \cup_{S^1 \times M} D^2 \times M \quad \text{con} \quad \partial W = X.$$

Entonces el generador de $H_2(W; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ está representado por un encaje de S^2 con haz normal trivial. Hacemos una 2-cirugía en este encaje de S^2 y anulamos $H_2(W; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, el resultado de la cirugía lo seguimos denotando por W . En [33] se muestra que

$$X \# \Sigma_f \cong (N \times I) \cup_{f \times id} (N \times I)$$

donde $N = M \setminus \mathring{D}$ y si $X \# \Sigma_f \cong X$, entonces $(W, N \times I)$ es un h -cobordismo relativo a ∂ , esto implica que f es pseudo-isotópica a la identidad relativa a D y por el Teorema de pseudo-isotopía de Cerf tenemos que f es isotópica a id relativa a D [13]. $\square$

Observación 3.15. La proposición 3.14 vale en general para W una n -variedad simplemente conexa orientada y $n \geq 5$, la prueba es la misma. Y está estrechamente relacionado con el siguiente resultado de Levine [36]:

Teorema 3.16. Para una n -variedad W simplemente conexa orientada con $n \geq 5$ se tiene que

$$\ker(\phi : \Theta_{n+1} \cong \mathfrak{M}(D^n, \partial) \rightarrow \mathfrak{M}(W)) = I(S^1 \times W).$$

Combinando estos resultados obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$1 \rightarrow I(X_W) \rightarrow I(S^1 \times W) \rightarrow \ker(\mathfrak{M}(W, \text{rel } D^n) \rightarrow \mathfrak{M}(W)) \rightarrow 1$$

donde X_W es el resultado de la cirugía en el encaje $S^1 \times D^n \subset S^1 \times W$.

Lo siguiente en esta sección es calcular el grupo de inercia $I(X)$ usando teoría de cirugía modificada. Para más detalles sobre teoría de cirugía ver [31] y [32]. Primero recordemos algunos conceptos.

El grupo $Spin(n)$ se define dentro de álgebra de Clifford Cl_n asociada a $\mathbb{R}^n$ con el

producto cuadrático usual (es el subgrupo de elementos del álgebra de Clifford que pueden escribirse como productos de vectores unitarios de $\mathbb{R}^n$, con un número par de factores). Además es sabido que existe un cubriente de grado 2 $\rho : Spin(n) \rightarrow SO(n)$. Consideramos $BSpin(n)$ el espacio clasificante de haces $Spin(n)$ –principales y a partir de la extensión de grupos

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow Spin(n) \rightarrow SO(n) \rightarrow 1$$

obtenemos la sucesión fibrada de espacios clasificantes

$$BSpin(n) \rightarrow BSO(n) \xrightarrow{w_2} K(\mathbb{Z}_2, 2)$$

donde w_2 es la segunda clase de Stiefel-Whitney. Luego consideramos

$$BSpin := \varinjlim_{n \rightarrow \infty} BSpin(n).$$

y obtenemos una fibración

$$BSpin \rightarrow BO \xrightarrow{w_2} K(\mathbb{Z}_2, 2).$$

Ahora dada M una $4k$ –variedad tal que las primeras dos clases de Stiefel-Whitney se anulan, entonces M admite una estructura spin, si además k es par y $p_1/2 = 0$, donde p_1 es la primera clase de Pontryagin, decimos que M admite una estructura *string* (es un refinamiento de la estructura spin) y obtenemos una sucesión fibrada (versión estable)

$$BString \rightarrow BSpin \xrightarrow{p_1/2} K(\mathbb{Z}, 4)$$

donde $BString$ es la fibra homotópica de $p_1/2$. Por tanto obtenemos la siguiente sucesión

$$BString \rightarrow BSpin \rightarrow BSO \rightarrow BO.$$

En resumen, dado un haz vectorial real $E \rightarrow X$ tenemos que:

- 1) E es orientable si $w_1(E) = 0 \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$
- 2) E admite una estructura spin si además de 1) se tiene que $w_2(E) = 0 \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$
- 3) E admite una estructura string si además de 1) y 2) se tiene que $p_1(E)/2 = 0 \in H^4(X; \mathbb{Z})$ donde $p_1(E)/2$ está bien definido cuando E es spin.

Sea $BO\langle m \rangle$ la cubriente $(m-1)$ –conexa de BO . Sabemos que $BO\langle 4 \rangle = BSpin$ y $BO\langle 8 \rangle = BString$, luego dado que X es una $(2m+1)$ –variedad $(m-1)$ –conexa con $H^m(X) \cong H^m(M)$ y $p_{m/4}(X) = p_{m/4}(M)$, existe una única $BO\langle m \rangle$ –estructura en el haz normal estable de X y el m –tipo normal de X es el mismo que el de M . Recordemos que $B_{2t+1,m}$ es la fibra homotópica (única salvo homotopía) de

$$BO\langle m \rangle \rightarrow K(\mathbb{Z}/(2t+1), m),$$

el cual induce un homomorfismo

$$\pi_m(BO\langle m \rangle) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_m(K(\mathbb{Z}/(2t+1), m)) \cong \mathbb{Z}/(2t+1)$$

que es la reducción módulo $2t+1$. Sea

$$p : B_{2t+1,m} \rightarrow BO\langle m \rangle \rightarrow BO$$

la composición de la fibración, entonces por 2.13 tenemos que $(B_{2t+1,m}, p)$ es el m -tipo normal de X y existe un único levantamiento $\bar{\nu} : X \rightarrow B_{2t+1,m}$ con ν una $(m+1)$ -equivalencia.

$$\begin{array}{ccc} & & B_{2t+1,m} \\ & \nearrow \bar{\nu} & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\nu} & BO \end{array}$$

Para simplificar la notación $B := B_{2t+1,m}$ y podemos considerar el grupo de cobordismo relativo (también llamado grupo de cobordismo con funciones a un espacio base (B, p)) denotado por $\Omega_*(B, p)$. Dado que el levantamiento $\bar{\nu} : X \rightarrow B$ da lugar a un elemento $[X, \bar{\nu}] \in \Omega_{2m+1}(B, p)$, en particular, una esfera homotópica Σ también tiene una única B -estructura normal $\bar{\nu}_\Sigma : \Sigma \rightarrow B$ y tenemos un homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \Theta_{2m+1} & \rightarrow & \Omega_{2m+1}(B, p) \\ \Sigma & \mapsto & [\Sigma, \bar{\nu}_\Sigma]. \end{array}$$

Por otro lado, definimos un homomorfismo

$$\Theta : \Omega_{2m+2}(B, p) \rightarrow L_{2m+2}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2$$

donde $L_{2m+2}(\mathbb{Z})$ es el grupo de Wall de obstrucción de cirugía simplemente conexa y es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$ por el invariante de Arf [32]. Veamos como se define el homomorfismo Θ : Para un elemento $[N, g] \in \Omega_{2m+1}(B, p)$ consideramos el problema de cirugía

$$\bar{\nu} + g : X \times I + N \rightarrow B.$$

Como estamos en el caso $\lfloor \frac{2m+1}{2} \rfloor = m$ la obstrucción para realizar la cirugía está en $L_{2m+2}(\mathbb{Z})$ [32]. Entonces $\Theta([N, g])$ es definido como la obstrucción de este problema de cirugía. Por definición Θ es un homomorfismo y Brown en [11] define una generalización del invariante de Kervaire

$$\Psi : \Omega_{2m+2}^{Spin} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

donde Ω_*^{Spin} se identifica con los grupos de homotopía del espectro de Thom $MSpin$ asociado a $BSpin \rightarrow BO$, es decir,

$$\Omega_*^{Spin} \cong \pi_*(MSpin).$$

Cuando $m = 4$ tenemos $\Psi : \Omega_{10}^{Spin} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ y cuando $m = 8$ denotamos por Ψ a la composición

$$\Omega_{18}^{String} \rightarrow \Omega_{18}^{Spin} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

donde Ω_*^{String} se identifica con los grupos de homotopía del espectro de Thom $MString$ asociado a $BString \rightarrow BO$, es decir,

$$\Omega_*^{String} \cong \pi_*(MString).$$

En [12] se muestra que para $\alpha \in \pi_1^s$ elemento no trivial y $\beta \in \Omega_{8k}^{Spin}$ se tiene que

$$\Psi(\alpha^2 \cdot \beta) \equiv \chi(\beta) \pmod{2}$$

donde $\chi(\beta)$ es la característica de Euler. Tomando $\beta = \mathbb{H}\mathbb{P}^2, \mathbb{O}\mathbb{P}^2$ se tiene que $\Psi : \Omega_{10}^{Spin} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ y $\Psi : \Omega_{18}^{String} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ son suprayectivas y la función $B \rightarrow BO\langle m \rangle$ induce un homomorfismo de grupos de bordismo

$$\Omega_{2m+2}(B, p) \rightarrow \Omega_{2m+2}^{BO\langle m \rangle}$$

el cual es "olvidar la función p " y quedarse solo con la estructura del levantamiento a $BO\langle m \rangle$. Entonces para estos homomorfismos tenemos lo siguiente

Lema 3.17. Para $m = 4, 8$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{2m+2}(B, p) & \xrightarrow{\Theta} & \mathbb{Z}/2 \\ \downarrow & \nearrow \Psi & \\ \Omega_{2m+2}^{BO\langle m \rangle} & & \end{array}$$

Demostración. Dado $[N, g] \in \Omega_{2m+2}(B, p)$ necesitamos mostrar que la obstrucción $\Theta(X \times I + N, \bar{\nu} + g)$ es igual al invariante de Brown $\Psi(N)$. Primero, podemos hacer cirugía para que g sea $(m-1)$ -conexa y

$$g_* : \pi_m(N) \rightarrow \pi_m(B)$$

sea un isomorfismo. Sean $S_N^m \subset N$ y $S_X^m \subset X$ dos encajes que representan un generador de $\pi_m(N) \cong H_m(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ y de $\pi_m(X) \cong H_m(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, respectivamente. Tomemos $\{e_i\}$ una base simpléctica de $H_{m+1}(N; \mathbb{Z})$, eligiendo encajes esféricos $S_i^{m+1} \subset N$ para cada e_i .

Cuando $m = 4$, el haz normal de S_i^5 es establemente trivial, pues $\pi_5(BSO) = 0$.

Cuando $m = 8$, tenemos isomorfismos

$$\pi_9(B) \cong \pi_9(BSO) \cong \mathbb{Z}/2$$

y un generador está dado por $S^9 \xrightarrow{\eta} S^8 \xrightarrow{f} B$ donde η es la función de Hopf y f es el generador de $\pi_8(B) \cong \pi_8(BSO) \cong \mathbb{Z}$. Por tanto, existe un encaje esférico homológicamente nulo $S_0^9 \subset N$ con haz normal estable no trivial.

Ahora, si el haz normal estable de $S_i^9 \subset N$ es no trivial, podemos hacer la suma conexa de S_0^9 y S_i^9 , esto no cambia la clase de homología de S_i^9 y el haz normal estable de $S_i^9 \# S_0^9$ es trivial. En [11] Brown define una forma cuadrática

$$\Psi_N : H^{m+1}(N; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{2m+2}(N; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

y muestra que el haz normal de S_i^{m+1} es trivial si y sólo si $\Psi_N(PD(e_i)) = 0$ donde PD es la función de la dualidad de Poincaré.

Sea $W = (X \times I) \# N$, entonces el haz normal estable de $S_X^m \# S_N^m \subset W$ es trivial y así podemos hacer cirugía en $S_X^m \# S_N^m$ para que (W, X) sea m -conexa. Esto no produce una nueva $(m+1)$ clase de homología pues S_N^m es dual a un $(m+2)$ -ciclo en N .

Luego $\{S_i^{m+1}\}$ representa una base simpléctica del kernel de cirugía $H_{m+1}(W, X)$; por tanto, el invariante de Arf de la obstrucción de cirugía, es cual es por definición $\Theta([X \times I + N, \bar{\nu} + g])$, coincide con el invariante de Arf de Ψ_N el cual es $\Psi(N)$. $\square$

Con este resultado tenemos que:

Proposición 3.18. $I(X) = \ker(\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}(B, p))$

Demostración. Notemos que en $\Omega(B, p)$ tenemos la identidad

$$[X, \bar{\nu}] + [\Sigma, \bar{\nu}_\Sigma] = [X \# \Sigma, \bar{\nu}']$$

donde $\bar{\nu}'$ es la única B -estructura normal en $X \# \Sigma$.

Si $X \# \Sigma \cong X$, como la B -estructura normal $\bar{\nu}$ en X es única salvo homotopía, tenemos que

$$[\Sigma, \bar{\nu}_\Sigma] = 0 \in \Omega_{2m+1}(B, p),$$

entonces

$$I(X) \subseteq \ker(\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}(B, p)).$$

Por otro lado, por la proposición 2.16 tenemos que

$$\Omega_{2m+2}(B, p) \rightarrow \Omega_{2m+2}^{BO\langle m \rangle}$$

es un isomorfismo 2-local y como

$$\Psi : \Omega_{2m+2}^{BO\langle m \rangle} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

es suprayectivo, por la conmutatividad del diagrama de 3.17 tenemos que también lo es

$$\Theta : \Omega_{2m+2}(B, p) \rightarrow \mathbb{Z}/2.$$

Para $\Sigma \in \ker(\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}(B, p))$ tenemos que X y $X \# \Sigma$ son B -bordantes, tomemos W el B -bordismo normal entre X y $X \# \Sigma$, podemos hacer cirugía en W para hacer (W, X) un h -cobordismo. Si la obstrucción de cirugía es no trivial, entonces concatenamos con un B -bordismo entre X y X con obstrucción no trivial y obtenemos un B -bordismo entre $X \# \Sigma$ y X con obstrucción trivial, es decir, $\Sigma \in I(X)$. $\square$

Con las proposiciones 3.14 y 3.18 tenemos que

$$\begin{aligned} \ker(\bar{\phi}) &= \ker(\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}(B, p)) \\ &= \ker(\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}^{BO\langle m \rangle}) \end{aligned}$$

donde la ultima igualdad viene del hecho de que el homomorfismo de la proposición 2.16 es un isomorfismo 2-local y además $\Theta_9 \cong (\mathbb{Z}/2)^3$ y $\Theta_{17} \cong (\mathbb{Z}/2)^4$ son 2-grupos

[28].

En [35] se muestra que si tenemos M una variedad spin de dimensión par y consideramos S el fibrado de espinores sobre M , entonces

$$S = S^+ \oplus S^-$$

donde S^+ es el fibrado de espinores positivos y S^- es el fibrado de espinores negativos. En [25] Nigel Hitchin define un invariante para variedades a partir de la descomposición de S , el cual utilizamos en los resultados principales.

Definición 3.19. Sea M una n -variedad (n par) compacta, cerrada dotada con una estructura spin. Sean $D_M: \Gamma(S^+) \rightarrow \Gamma(S^-)$ el operador de Dirac asociado a la estructura spin de M . El α -invariante de M se define como la clase del índice de D_M en la K -teoría real:

$$\alpha(M) := \text{ind}_{KO}(D_M) \in KO^{-n}(\text{pt}),$$

donde $KO^{-n}(\text{pt})$ denota el grupo de K -teoría real reducida en grado $-n$.

Equivalente y de forma natural, el α -invariante induce un homomorfismo de anillos graduados

$$\mathcal{A}: \Omega_*^{Spin} \rightarrow KO^{-*}(\text{pt})$$

que generaliza el concepto del género $\hat{A}$ para variedades de dimensión múltiplo de 4. En [39] y [1] se muestra que tenemos una composición suprayectiva

$$\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}^{Spin} \xrightarrow{\mathcal{A}} KO^{-(2m+1)}(\text{pt}) \cong \mathbb{Z}/2.$$

A una esfera exótica con α -invariante no trivial la llamaremos una esfera de Hitchin. Cuando $m = 4$ tenemos que

$$\Omega_9^{BO\langle 4 \rangle} \cong \Omega_9^{Spin} \quad \text{y} \quad \text{Im}(\Theta_9 \rightarrow \Omega_9^{Spin}) \cong \mathbb{Z}/2, \quad (5)$$

además, el elemento no trivial en $\text{Im}(\Theta_9 \rightarrow \Omega_9^{Spin})$ es detectado por el α -invariante $\mathcal{A}: \Omega_9^{Spin} \rightarrow KO^{-9}(\text{pt})$, es decir, el α -invariante no se anula para ese elemento no trivial [45],[39].

Lema 3.20. Sea M una $2m$ -variedad que es como un plano proyectivo con $m = 4, 8$ y sea τ la estructura spin no trivial de S^1 , entonces $[(S^1, \tau) \times M]$ no está en la imagen de $\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}^{Spin}$.

Demostración. De igual manera que en (5) tenemos que el elemento no trivial de $\text{Im}(\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}^{Spin})$ es detectado por el α -invariante [45]. Además, existe una 8-variedad paralelizable Y con $\hat{A}(Y) = 1$ y signatura $\text{sgn}(Y) = -7 \cdot 2^5$ [39]. Cuando $m = 4$, tenemos que

$$\Omega_8^{Spin} \cong \mathbb{Z}\langle [\mathbb{HP}^2] \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle [Y] \rangle,$$

bajo el morfismo $\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}^{Spin}$ en Ω_8^{Spin} se cumple

$$[M] = a[\mathbb{HP}^2] + b[Y].$$

Por el Teorema 2.3 tenemos que $p_1^2[\mathbb{HP}^2] = 4$ y $p_1^2[M] = 4(1 + 2t)^2$, además, dado que $p_1^2[Y] = 0$, entonces a es impar. Luego en [3] se muestra que

$$\Omega_9^{Spin} \cong \mathbb{Z}\langle[(S^1, \tau) \times \mathbb{HP}^2]\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle[(S^1, \tau) \times Y]\rangle.$$

Por otro lado el elemento no trivial en $Im(\Theta_9 \rightarrow \Omega_9^{Spin})$ es $[(S^1, \tau) \times Y]$ (ver [39]). Con esto tenemos que $[(S^1, \tau) \times M]$ no está en $Im(\Theta_9 \rightarrow \Omega_9^{Spin})$.

Cuando $m = 8$,

$$\Omega_{16}^{Spin} \otimes \mathbb{Z}/2 \cong (\mathbb{Z}/2)^5$$

generado por $\mathbb{HP}^4, \mathbb{HP}^2 \times \mathbb{HP}^2, \mathbb{HP}^2 \times Y, Y \times Y$ y $N \times K$, donde N es una 12-variedad spin, K es la superficie de Kummer que genera $\Omega_4^{Spin} \cong \mathbb{Z}$ (ver [3]). Bajo el morfismo $\Theta_{2m+1} \rightarrow \Omega_{2m+1}^{Spin}$ se cumple que

$$[M] = a[\mathbb{HP}^2 \times \mathbb{HP}^2] + b[\mathbb{HP}^4] + c[\mathbb{HP}^2 \times Y] + d[Y \times Y] + e[N \times K]$$

con $a + b = 1$ pues la signatura de M es 1. Tomando producto con S^1 con la estructura spin no trivial tenemos un isomorfismo

$$- \times [S^1, \tau] : \Omega_{16}^{Spin} \otimes \mathbb{Z}/2 \rightarrow \Omega_{17}^{Spin} \otimes \mathbb{Z}/2.$$

Además, el elemento no trivial en $\Theta_{17} \rightarrow \Omega_{17}^{Spin}$ es $[(S^1, \tau) \times Y \times Y]$ (ver [39]), con esto tenemos que $[(S^1, \tau) \times M]$ no está en $Im(\Theta_{17} \rightarrow \Omega_{17}^{Spin})$. $\square$

Cuando $m = 8$, se sabe que $\Omega_{17}^{BO\langle 8 \rangle} \cong \Omega_{17}^{String}$ y calculamos $ker(\Theta_{17} \rightarrow \Omega_{17}^{String})$ usando la información sobre el dominio y el rango en la literatura. Primero, necesitaremos algunos hechos conocidos sobre grupos de homotopía estable de las esferas π_*^s que se pueden encontrar en [49]. Existen elementos $\nu \in \pi_3^s$ de orden 8 y $\kappa \in \pi_{14}^s$ de orden 2, tal que el producto $\nu\kappa$ genera un $\mathbb{Z}/2$ -sumando directo de π_{17}^s . También existen elementos $\bar{\mu} \in \pi_{17}^s$ de orden 2 que genera otro $\mathbb{Z}/2$ -sumando directo de π_{17}^s y en [28] se muestra que existe una sucesión exacta corta que se escinde

$$0 \rightarrow bP_{18} \rightarrow \Theta_{17} \rightarrow coker(J_{17}) \rightarrow 0$$

donde $J_{17} : \pi_{17}(SO) \rightarrow \pi_{17}^s$ es el homomorfismo J . Denotemos por $[\bar{\mu}]$ y $[\nu\kappa]$ la imagen de $\bar{\mu}$ y $\nu\kappa$ en $coker(J_{17})$, respectivamente.

En [19] y [15] se muestra que $\Omega_{17}^{String} \cong (\mathbb{Z}/2)^3$. También se tiene que $\pi_{17}^s \cong (\mathbb{Z}/2)^4$ con generadores $\eta\eta^*, \eta^2\rho, \nu\kappa$ y $\bar{\mu}$, donde η es un generador de $\pi_1^s \cong \mathbb{Z}/2$, $\eta^* \in \pi_{16}^s$ es un elemento de orden 2 y $\rho \in \pi_{15}^s$ es un elemento de orden 32 [49]. Además se sabe que la imagen del homomorfismo J_{17} está generada por $\eta^2\rho$.

Con estos resultados y por el lema 3.20 tenemos lo siguiente:

Lema 3.21. Tomemos el homomorfismo de Hurewicz

$$h_{17} : \pi_{17}^s \rightarrow \Omega_{17}^{String}$$

entonces se tiene que:

- a) $\ker(h_{17}) \cong \mathbb{Z}/2\langle \eta\eta^* \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\langle \eta^2\rho \rangle$.
- b) $\text{Im}(h_{17}) \cong \mathbb{Z}/2\langle h_{17}(\bar{\mu}) \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\langle h_{17}(\nu\kappa) \rangle$.
- c)

$$\Omega_{17}^{String} \cong \mathbb{Z}/2\langle h_{17}(\bar{\mu}) \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\langle h_{17}(\mu\kappa) \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\langle [(S^1, \tau) \times M] \rangle$$

donde M es cualquier variedad que es como el plano proyectivo $\mathbb{CP}^2$.

Demostración. El homomorfismo de Hurewicz $h_* : \pi_*^s \rightarrow \Omega_*^{String}$ es un homomorfismo de anillos, además, dado que π_{16}^5 es finito y $\Omega_{16}^{String} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ([19]), entonces h_{16} es trivial. Luego

$$h_{17}(\eta\eta^*) = h_{16}(\eta)h_1(\eta^*) = 0 \quad \text{y} \quad h_{17}(\eta^2\rho) = h_{16}(\eta\rho)h_1(\eta) = 0,$$

también se sabe que $\bar{\mu}$ tiene α -invariante no trivial, pues $\bar{\mu} \in \langle \mu, 2\iota, 8\sigma \rangle$ y por [49] el α -invariante de elementos en π_*^s coincide con el invariante de Adams $d_{\mathbb{R}}$ y $d_{\mathbb{R}}(\bar{\mu}) = 1$ [1]. Por tanto $h_{17}(\bar{\mu})$ no es trivial.

También $\nu\kappa$ está representado por $h_2d_0 = h_0e_0$ en la pagina E_2 de la sucesión espectral de Adams para π_*^s , también se sabe que h_0e_0 es mapeado no trivialmente a la pagina E_2 de la sucesión espectral de Adams por $\pi_*(MString)$, donde $MString$ es el espectro de Thom asociado a $BString \rightarrow BO$, y este elemento sobrevive tendiendo a infinito (ver [47], [19], [15], [42]). Por tanto $h_{17}(\nu\kappa)$ no es trivial, pero el α -invariante de $\nu\kappa$ es cero pues $KO^{-3}(pt) = KO^{-6}(pt) = 0$. De esto se sigue que $h_{17}(\nu\kappa)$ y $h_{17}(\bar{\mu})$ son linealmente independientes en Ω_{17}^{String} .

Dado que $\text{Im}(J_{17})$ es generada por $\eta^2\rho$, el cual está en el kernel de h_{17} , el homomorfismo de Hurewicz se reduce al homomorfismo

$$\text{coker}(J_{17}) \rightarrow \Omega_{17}^{String}.$$

Por otro lado, en la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow bP_{18} \rightarrow \Theta_{17} \rightarrow \text{coker}(J_{17}) \rightarrow 0,$$

el homomorfismo $\Theta_{17} \rightarrow \Omega_{17}^{String}$ se reduce a un homomorfismo $\text{coker}(J_{17}) \rightarrow \Omega_{17}^{String}$ el cual coincide con la reducción del homomorfismo de Hurewicz. Luego por el lema 3.20 (para $m = 8$), tenemos que $[(S^1, \tau) \times M]$ genera otra copia de $\mathbb{Z}/2$ en Ω_{17}^{String} . $\square$

Observación 3.22. El lema 3.20 en el caso de $M = \mathbb{HP}^2$ es una consecuencia de la demostración de la proposición 4.11 de [14] y del ejemplo que le sigue. Entonces el lema 3.20 puede ser visto como una generalización a un resultado implícito en [14]. En esa notación, se ha probado que $\sigma_{w_4}(M) \neq 0$ para cualquier 8-variedad M que es como un plano proyectivo.

Con esto tenemos el siguiente resultado

Lema 3.23. La imagen de $\Theta_9 \rightarrow \Omega_9^{Spin}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$ generado por la imagen de cualquier esfera de Hitchin y la imagen de $\Theta_{17} \rightarrow \Omega_{17}^{String}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ generado por $h_{17}(\bar{\mu})$ y $h_{17}(\nu\kappa)$.

Capítulo 4

Cálculo del grupo modular de variedades que son como planos proyectivos y algunas aplicaciones.

En este capítulo se demuestran de manera detallada los teoremas de Su y Wang. Consideremos a M como una $2m$ -variedad que es como un plano proyectivo. Para un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$, una estructura spin no trivial $\mathfrak{s}_0$ en M_f es la estructura spin que restringida a la estructura spin de un encaje de $S^1 \subset M_f$ representa un generador de $\pi_1(M_f) \cong \mathbb{Z}$.

Entonces obtenemos que:

Teorema 4.1. Sea M una 8-variedad que es como el plano proyectivo $\mathbb{H}\mathbb{P}^2$, entonces existe un isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(M) &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2 \\ f &\mapsto \mathcal{A}(M_f, \mathfrak{s}_0) \end{aligned}$$

El elemento no trivial en $\mathfrak{M}(M)$ está representado por cualquier difeomorfismo con soporte en un disco el cual corresponde a una esfera exótica de Hitchin.

Demostración. Cuando $m = 4$, la sucesión exacta (2) es

$$\Theta_9 \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M}(M) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{M}(N) \xrightarrow{\gamma} I(M) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Por el lema 3.10 y 3.11 tenemos que $\mathfrak{M}(N) \cong \text{aut}(\xi) \cong \mathbb{Z}/2$. Por otro lado, dado que $\gamma : \mathfrak{M}(N) \rightarrow I(M)$ está definido vía la restricción de un difeomorfismo de N a $\partial N \cong S^{2m-1}$, entonces γ es inyectiva y como la sucesión es exacta, en realidad, γ es un isomorfismo. Luego, por exactitud $0 = \ker(\gamma) = \text{Im}(\beta)$, es decir, $\beta = 0$ y $\ker(\beta) = \mathfrak{M}(M) = \text{Im}(\alpha)$, por tanto $\alpha : \Theta_9 \rightarrow \mathfrak{M}(M)$ es suprayectiva y por el lema 3.23 la imagen es isomorfa a $\mathbb{Z}/2$ generada por una esfera exótica de Hitchin. Ahora para f un difeomorfismo con soporte en un disco se tiene que M_f es difeomorfo a $(S^1 \times M) \# \Sigma$, con Σ la esfera exótica correspondiente, entonces $(M_f, \mathfrak{s}_0)$ es spin cobordante a Σ y así $\mathcal{A}(M_f, \mathfrak{s}_0) = \hat{A}(\Sigma)$. $\square$

Para el caso $m = 8$ primero vamos a mostrar que para los morfismos $\phi : \Theta_{2m+1} \rightarrow \mathfrak{M}(M)$ y su levantamiento $\bar{\phi} : \Theta_{2m+1} \rightarrow \mathfrak{M}(M, \text{rel } D)$ se tiene que $\ker(\bar{\phi}) = \ker(\phi)$. Recordemos que tenemos una sucesión exacta

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathfrak{M}(M, \text{rel } D) \rightarrow \mathfrak{M}(M) \rightarrow 0,$$

en la cual la imagen de $1 \in \mathbb{Z}/2$ en $\mathfrak{M}(M, \text{rel } D)$ es un giro de Dehn f en una vecindad collar de $\partial(M \setminus \mathring{D})$. Veamos que este difeomorfismo no es isotópico $\text{rel } D$ a un difeomorfismo soportado en un disco. Notemos que esto implicaría que $\ker(\bar{\phi}) = \ker(\phi)$.

Sea X' el resultado de la cirugía en el encaje $S^1 \times D$ en M_f . Si f fuera isotópico $\text{rel } D$ a un difeomorfismo no trivial soportado en un disco, entonces X' debería ser difeomorfo a $X \# \Sigma$ donde X es el resultado de la cirugía en $S^1 \times D \subset S^1 \times M$ y Σ es la correspondiente esfera exótica. Note que X' es de hecho el resultado de una cirugía spin en $S^1 \times D \subset (S^1, \tau) \times M$ y tendríamos que

$$[(S^1, \tau) \times M] = [X'] = [X \# \Sigma] = [\Sigma] \in \Omega_{2m+1}^{\text{Spin}}$$

pero esto queda descartado por el lema 3.20.

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2. Sea M una 16-variedad que es como el plano proyectivo $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, entonces $\mathfrak{M}(M) \cong (\mathbb{Z}/2)^3$. Más aún, existe una extensión central que se escinde

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathfrak{M}(M) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

donde $K \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ es generado por un difeomorfismo soportado en un disco el cual corresponde a una esfera exótica que es mapeada a $[\bar{\mu}]$ y $[\nu\mu]$ en $\text{coker}(J_{17})$, respectivamente.

Demostración. La sucesión exacta (2), para $m = 8$, es:

$$\Theta_{17} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M}(M) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{M}(N) \xrightarrow{\gamma} I(M) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Por el lema 3.10 y 3.11 tenemos que $\mathfrak{M}(N) \cong \text{aut}(\xi) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ y $\gamma : \mathfrak{M}(N) \rightarrow I(M)$ es suprayectiva. Entonces (2) se reduce a

$$0 \rightarrow \Theta_{17}/\ker(\phi) \rightarrow \mathfrak{M}(M) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \quad (3)$$

con

$$\Theta_{17}/\ker(\phi) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

generado por la pre-imagen de $[\bar{\mu}]$ y $[\nu\kappa]$ por el lema 3.23. Esto es una extensión central pues un difeomorfismo soportado en un disco conmuta con cualquier difeomorfismo por el Teorema del disco. $\square$

Para completar la prueba del teorema 4.2 necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.3. Sea M una 16-variedad que es como el plano proyectivo $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, entonces los elementos no triviales de $\mathfrak{M}(M)$ tienen orden 2.

Demostración. La construcción del mapping torus nos da un homomorfismo [33]

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathfrak{M}(M, \text{rel } D) & \rightarrow & \Omega_{17}^{String} \\ f & \mapsto & [M_f] \end{array}$$

y este induce un homomorfismo

$$\bar{\varphi} : \mathfrak{M}(M) \rightarrow \Omega_{17}^{String} / H$$

donde H es el subgrupo de Ω_{17}^{String} generado por $[(S^1, \tau) \times M]$. Luego para cualquier $f \in \mathfrak{M}(M)$, de la sucesión exacta (3), $f \circ f$ es isotópico a un difeomorfismo con soporte en un disco g . Como

$$\Omega_{17}^{String} / H \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$

entonces $\bar{\varphi}(g) = \bar{\varphi}(f \circ f) = 2\bar{\varphi}(f) = 0$.

Por otro lado, $\bar{\varphi}(g) = [\Sigma_g]$, donde Σ_g es la esfera exótica correspondiente a g , entonces $\Sigma_g \in \ker(\Theta_{17} \rightarrow \Omega_{17}^{String} / H)$ y por el lema 3.21 tenemos que

$$\ker(\Theta_{17} \rightarrow \Omega_{17}^{String} / H) \cong \ker(\Theta_{17} \rightarrow \Omega_{17}^{String}).$$

Por tanto, $g = 0 \in \mathfrak{M}(M)$, es decir, f tiene orden 2. $\square$

Ahora usando el hecho de que el plano proyectivo cuaterniónico $\mathbb{H}\mathbb{P}^2$ admite métricas Riemannianas de curvatura escalar positiva, podemos considerar $\mathcal{R}_{scal}^+$ el conjunto de dichas métricas, el cual se sabe que no es conexo por trayectorias [25]. Por otro lado, el grupo $\text{Diff}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2)$ actúa en $\mathcal{R}_{scal}^+$ vía pull-back métrico por un difeomorfismo. El espacio cociente

$$\mathcal{M}_{scal}^+ := \mathcal{R}_{scal}^+ / \text{Diff}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2)$$

es el espacio moduli de métricas Riemannianas en $\mathbb{H}\mathbb{P}^2$ con curvatura escalar positiva. La acción de $\text{Diff}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2)$ desciende a una acción del grupo modular en el conjunto de componentes conexas por trayectorias de $\mathcal{R}_{scal}^+$ con cociente el conjunto de componentes conexas por trayectorias de $\mathcal{M}_{scal}^+$. Luego como corolario del teorema 4.1 tenemos lo siguiente:

Corolario 4.4. a) La función $\pi_0(\mathcal{R}_{scal}^+) \rightarrow \pi_0(\mathcal{M}_{scal}^+)$ es una correspondencia 2 a 1.
b) Para una métrica Riemanniana en $\mathbb{H}\mathbb{P}^2$ con curvatura escalar positiva cualquier isometría es suavemente isotópica a la identidad.

Demostración. a) Fijamos $g \in \mathcal{R}_{scal}^+$, la acción de $\text{Diff}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2)$ en $\mathcal{R}_{scal}^+$ da una función

$$\begin{array}{ccc} \text{Diff}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2) & \rightarrow & \mathcal{R}_{scal}^+ \\ h & \mapsto & h^*g \end{array}$$

la cual induce una función $\mathfrak{M}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2) \rightarrow \pi_0(\mathcal{R}_{scal}^+)$. En [25] se muestra que $\mathfrak{M}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2) \rightarrow KO^{-9}(pt)$ dado por el α -invariante del mapping torus tiene una factorización

$$\mathfrak{M}(\mathbb{H}\mathbb{P}^2) \rightarrow \pi_0(\mathcal{R}_{scal}^+) \rightarrow KO^{-9}(pt).$$

El Teorema 4.1 implica que para un elemento no trivial $h \in \mathfrak{M}(\mathbb{HP}^2)$, se tiene que h^*g y g no están en la misma componente conexa por trayectorias de $\mathcal{R}_{scal}^+$, entonces $\pi_0(\mathcal{R}_{scal}^+) \rightarrow \pi_0(\mathcal{M}_{scal}^+)$ es una correspondencia 2 a 1.

b) Sea f una isometría, f induce una acción isométrica (con la métrica producto)

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{HP}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{HP}^2 \\ (t, x) &\mapsto (t + 1, f(x)). \end{aligned}$$

La variedad de la órbita es el mapping torus M_f , el cual hereda la métrica Riemanniana con curvatura escalar positiva, entonces $\hat{A}(M_f) = 0$.

□

También tenemos lo siguiente:

Observación 4.5. Hay otra consecuencia geométrica y topológica del Teorema 4.1, por ejemplo, si $haut(M)$ es el grupo de clases de homotopía de equivalencias homotópicas de M , entonces el homomorfismo natural

$$\mathfrak{M}(M) \rightarrow haut(M)$$

es trivial, pues cualquier difeomorfismo con soporte en un disco es homotópico a la identidad. Por [6] y [16] tenemos que $haut(M) \cong \mathbb{Z}/2$, por tanto, existe una “equivalencia homotópica exótica” de M que no es homotópica a ningún difeomorfismo. Por otro lado, el Teorema 4.1 también implica que la acción de $haut(M)$ en el conjunto de estructuras suaves de M es libre.

Además como consecuencia del cálculo de $ker(\phi)$, queda determinado el grupo de inercia de algunas variedades que no son simplemente conexas, esto está dado en el siguiente resultado.

Corolario 4.6. Sea M una $2m$ -variedad que es como el plano proyectivo $\mathbb{HP}^2$ o que es como el plano proyectivo $\mathbb{OP}^2$, el grupo de inercia $I(S^1 \times M)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}/2)^2$.

Demostración. En [36] Levine muestra que $I(S^1 \times M)$, como subgrupo de Θ_{2m+1} , es isomorfo a $ker(\phi)$. Luego por la proposición (3.18) tenemos que

$$I(S^1 \times M) \cong ker(\phi) \cong ker(\bar{\phi}) \cong (\mathbb{Z}/2)^2.$$

□

Bibliografía

- [1] Adams, J. F. “On the groups $J(X)$. IV”. English. En: *Topology* 5 (1966), págs. 21-71. ISSN: 0040-9383. DOI: [10.1016/0040-9383\(66\)90004-8](https://doi.org/10.1016/0040-9383(66)90004-8).
- [2] Adams, J. F. “On the non-existence of elements of Hopf invariant one”. English. En: *Ann. Math. (2)* 72 (1960), págs. 20-104. ISSN: 0003-486X. DOI: [10.2307/1970147](https://doi.org/10.2307/1970147). URL: www.jstor.org/pss/1970147.
- [3] Anderson, D. W., Brown, E. H. j. y Peterson, F. P. “Spin cobordism”. English. En: *Bull. Am. Math. Soc.* 72 (1966), págs. 256-260. ISSN: 0002-9904. DOI: [10.1090/S0002-9904-1966-11486-6](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1966-11486-6).
- [4] Atiyah, M. F. y Bott, R. “The Yang-Mills equations over Riemann surfaces”. English. En: *Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A* 308 (1983), págs. 523-615. ISSN: 0080-4614. DOI: [10.1098/rsta.1983.0017](https://doi.org/10.1098/rsta.1983.0017).
- [5] Banyaga, A. *The structure of classical diffeomorphism groups*. English. Vol. 400. Math. Appl., Dordr. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. ISBN: 0-7923-4475-8.
- [6] Baues, H. J. “On the group of homotopy equivalences of a manifold”. English. En: *Trans. Am. Math. Soc.* 348.12 (1996), págs. 4737-4773. ISSN: 0002-9947. DOI: [10.1090/S0002-9947-96-01555-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-96-01555-3).
- [7] Borel, A. e Hirzebruch, F. “Characteristic classes and characteristic numbers”. English. En: *American Journal of Mathematics* 82 (1960), págs. 491-504. DOI: [10.2307/2372561](https://doi.org/10.2307/2372561).
- [8] Bott, R. “A note on the Samelson product in the classical groups”. English. En: *Comment. Math. Helv.* 34 (1960), págs. 249-256. ISSN: 0010-2571. DOI: [10.1007/BF02565939](https://doi.org/10.1007/BF02565939). URL: <https://eudml.org/doc/139195>.
- [9] Bott, R. y Milnor, J. W. “On the parallelizability of the spheres”. English. En: *Bull. Am. Math. Soc.* 64 (1958), págs. 87-89. ISSN: 0002-9904. DOI: [10.1090/S0002-9904-1958-10166-4](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1958-10166-4).
- [10] Bredon, G. E. *Topology and geometry*. English. Vol. 139. Grad. Texts Math. New York: Springer-Verlag, 1993. ISBN: 0-387-97926-3.
- [11] Brown, E. H. j. “Generalizations of the Kervaire invariant”. English. En: *Ann. Math. (2)* 95 (1972), págs. 368-383. ISSN: 0003-486X. DOI: [10.2307/1970804](https://doi.org/10.2307/1970804).

-
- [12] Brown, E. H. j. y Peterson, F. P. “The Kervaire invariant of $(8k + 2)$ -manifolds”. English. En: *Bull. Am. Math. Soc.* 71 (1965), págs. 190-193. ISSN: 0002-9904. DOI: [10.1090/S0002-9904-1965-11278-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1965-11278-2).
 - [13] Cerf, J. “The pseudo-isotopy theorem for simply connected differentiable manifolds”. En: *Manifolds—Amsterdam 1970: Proceedings of the Nuffic Summer School on Manifolds Amsterdam, August 17–29, 1970*. Springer, 2006, págs. 76-82.
 - [14] Crowley, D. y Yang, H. “The existence of contact structures on 9-manifolds”. En: *arXiv preprint arXiv:2011.09809* (2020).
 - [15] Davis, D. M. y Mahowald, M. “A new spectrum related to 7-connected cobordism”. En: *Algebraic Topology: Proceedings of an International Conference held in Arcata, California, July 27–August 2, 1986*. Springer. 2006, págs. 126-134.
 - [16] Eells, J. y Kuiper, N. H. “Manifolds which are like projective planes”. En: *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 14 (1962), págs. 5-46.
 - [17] Freedman, M. H. “The topology of four-dimensional manifolds”. En: *Journal of Differential Geometry* 17.3 (1982), págs. 357-453.
 - [18] Galvin, D. A. *Groups of Homotopy Spheres*. 2020.
 - [19] Giambalvo, V. “On $\langle 8 \rangle$ -cobordism”. En: *Illinois Journal of Mathematics* 15.4 (1971), págs. 533-541.
 - [20] Giambalvo, V. “Correction to my paper, “on $\langle 8 \rangle$ -cobordism””. En: *Illinois Journal of Mathematics* 16.4 (1972), págs. 704-704.
 - [21] Haefliger, A. “Differentiable imbeddings”. English. En: *Bull. Am. Math. Soc.* 67 (1961), págs. 109-112. ISSN: 0002-9904. DOI: [10.1090/S0002-9904-1961-10522-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1961-10522-3).
 - [22] Haefliger, A. “Plongements différentiables de variétés dans variétés”. French. En: *Comment. Math. Helv.* 36 (1961), págs. 47-82. ISSN: 0010-2571. DOI: [10.1007/BF02566892](https://doi.org/10.1007/BF02566892). URL: <https://eudml.org/doc/139228>.
 - [23] Hatcher, A. *Algebraic topology*. English. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-521-79540-0.
 - [24] Hirsch, M. W. *Differential topology*. Vol. 33. Springer Science & Business Media, 2012.
 - [25] Hitchin, N. “Harmonic spinors”. En: *Advances in Mathematics* 14.1 (1974), págs. 1-55.
 - [26] Kervaire, M. A. “An interpretation of G. Whitehead’s generalization of H. Hopf’s invariant”. En: *Annals of Mathematics* 69.2 (1959), págs. 345-365.
 - [27] Kervaire, M. A. “Some nonstable homotopy groups of Lie groups”. En: *Illinois Journal of Mathematics* 4.2 (1960), págs. 161-169.
 - [28] Kervaire, M. A. y Milnor, J. W. “Groups of homotopy spheres: I”. En: *Annals of mathematics* 77.3 (1963), págs. 504-537.
 - [29] Kosiński, A. A., Morgan, J. W. y Perelman, G. Â. *Differential manifolds*. Dover Publications, Incorporated, 2007.

-
- [30] Kramer, L. “Projective planes and their look-alikes”. En: *Journal of Differential Geometry* 64.1 (2003), págs. 1-55.
 - [31] Kramer, L. y Stolz, S. “A diffeomorphism classification of manifolds which are like projective planes”. En: *Journal of Differential Geometry* 77.2 (2007), págs. 177-188.
 - [32] Kreck, M. “Surgery and duality”. En: *Annals of Mathematics* 149.3 (1999), págs. 707-754.
 - [33] Kreck, M. “Isotopy classes of diffeomorphisms of $(k-1)$ -connected almost-parallelizable $2k$ -manifolds”. En: *Algebraic Topology Aarhus 1978: Proceedings of a Symposium held at Aarhus, Denmark, August 7–12, 1978*. Springer. 2006, págs. 643-663.
 - [34] Lang, G. “The evaluation map and EHP sequences”. En: *Pacific Journal of Mathematics* 44.1 (1973), págs. 201-210.
 - [35] Lawson, H. B. j. y Michelsohn, M.-L. *Spin geometry*. English. Vol. 38. Princeton Math. Ser. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1989. ISBN: 0-691-08542-0.
 - [36] Levine, J. “Inertia groups of manifolds and diffeomorphisms of spheres”. En: *American Journal of Mathematics* 92.1 (1970), págs. 243-258.
 - [37] Milnor, J. “Spin structures on manifolds”. En: *Collected Papers of John Milnor: Differential topology* 3 (2007), pág. 293.
 - [38] Milnor, J. “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”. En: *Topological Library: Part 2: Characteristic Classes and Smooth Structures on Manifolds*. World Scientific, 2010, págs. 1-9.
 - [39] Milnor, J. W. “Remarks concerning spin manifolds”. En: *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*. Princeton Univ. Press Princeton, NJ. 1965, págs. 55-62.
 - [40] Milnor, J. W. *Lectures on the h-cobordism theorem. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow*. English. Math. Notes (Princeton). Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.
 - [41] Pontryagin, L. “Smooth manifolds and their applications in homotopy theory”. En: *American Mathematical Society Translations, Ser 2* (1976), págs. 1-114.
 - [42] Ravenel, D. C. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*. American Mathematical Soc., 2003.
 - [43] Samelson, H. “Groups and spaces of loops”. En: *Commentarii Mathematici Helvetici* 28.1 (1954), págs. 278-287.
 - [44] Serre, J.-P. “Homologie singulière des espaces fibrés”. En: *Annals of Mathematics* 54.3 (1951), págs. 425-505.
 - [45] Stong, R. E. *Notes on cobordism theory. Preliminary informal notes of University courses and seminars in mathematics*. English. Math. Notes (Princeton). Princeton University Press, Princeton, NJ, 1968.
 - [46] Su, Y. y Wang, W. “The mapping class group of manifolds which are like projective planes”. En: *International Mathematics Research Notices* 2024.9 (2024), págs. 7640-7653.

-
- [47] Tangora, M. C. *On the cohomology of the Steenrod algebra*. English. Vol. 116. 1970, págs. 18-64. DOI: [10.1007/BF01110185](https://doi.org/10.1007/BF01110185). URL: <https://eudml.org/doc/171367>.
 - [48] Thom, R. “Quelques propriétés globales des variétés différentiables”. En: *Commentarii Mathematici Helvetici* 28.1 (1954), págs. 17-86.
 - [49] Toda, H. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. 49. Princeton University Press, 1962.
 - [50] Wall, C. T. C. “Classification of $(n-1)$ -connected $2n$ -manifolds”. En: *Annals of Mathematics* 75.1 (1962), págs. 163-189.
 - [51] Wall, C. “Classification problems in differential topology—II: Diffeomorphisms of handlebodies”. En: *Topology* 2.3 (1963), págs. 263-272.
 - [52] Whitehead, G. W. *Elements of homotopy theory*. Vol. 61. Springer Science & Business Media, 2012.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	Grupo modular de variedades que son como planos proyectivos.	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Oscar Romero González	oromero@matmor.unam.mx
Director	Daniel Juan Pineda	daniel@matmor.unam.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Elmar Wagner	elmar.wagner@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	sí	Mejora de redacción en algunos párrafos de texto.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	no	
Traducción a otra lengua	no	
Revisión y corrección de estilo	sí	Mejora de la escritura en algunos párrafos de texto.
Análisis de datos	no	
Búsqueda y organización de información	no	
Formateo de las referencias bibliográficas	sí	Busqueda de algunas referencias y su formato.
Generación de contenido multimedia	no	
Otro		

Datos del solicitante	
Nombre y firma	
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán. 29 de Octubre del 2025

Oscar Oscar

Grupo modular de variedades que son como planos proyectivos.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:520523205

Fecha de entrega

30 oct 2025, 9:59 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

30 oct 2025, 10:09 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

Grupo modular de variedades que son como planos proyectivos.pdf

Tamaño del archivo

744.8 KB

45 páginas

16.088 palabras

70.299 caracteres

9% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 8%  Fuentes de Internet
- 6%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

42 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.