



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

---

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

# RADIOS DE CARGA, MASA Y MECÁNICO PARA HADRONES

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Maestro en Ciencias en el Área de Física**

PRESENTA:

**Lic. C. F. M. Jesús Reyes Hernández**

ASESOR:

**Dr. Juan Carlos Arteaga Velázquez**



Morelia, Michoacán. México  
Diciembre 2025

*“No habría yo de tener en absoluto la satisfacción de  
salirme con la mía.”*

*Max Planck*

## Resumen.

Utilizando un método numérico de interpolación y extrapolación basado en fracciones continuas, se extrae, a partir de mediciones experimentales y estimaciones numéricas de la Cromodinámica Cuántica en la red (CDCr), los factores de forma  $F(Q^2)$ ,  $A(Q^2)$  y  $D(Q^2)$  para el protón y pión cargado de los que se derivan los valores de sus radios de carga, masa y mecánico. Los resultados obtenidos son un promedio hecho a partir de un gran número de valores construidos con números pseudoaleatorios. El método de fracciones continuas tiene la ventaja de no imponer ninguna restricción para los factores de forma en  $Q^2 = 0 \text{ GeV}^2$ , lo que permite hacer nuevas estimaciones del término- $D$  para ambos hadrones. Los resultados obtenidos para el término- $D$  están dentro del rango previamente calculado por otros autores.

**Palabras clave:** protón y pión, sección eficaz, 4-corriente, factor de forma, tensor de energía-momento, término- $D$ , splines cúbicos, método de puntos de Schlessinger, validación-cruzada generalizada, radio medio-cuadrado.

## Abstract.

Using a numerical method based on interpolation and extrapolation via continued fractions, the form factors  $F(Q^2)$ ,  $A(Q^2)$  and  $D(Q^2)$  for the proton and charged pion are derived from experimental data and lattice Quantum Chromodynamics (lQCD) estimates to extract the values of their charge, mass and mechanical radii. The results obtained are an average made from a large set of values generated using pseudorandom numbers. The continued fraction method offers the advantage of not imposing any restriction on the form factor at  $Q^2 = 0 \text{ GeV}^2$ , allowing for new estimates of the  $D$ -term for both hadrons. The results obtained for the  $D$ -term are within the previously calculated range from other authors.

**Keywords:** proton and pion, cross section, 4-current, form factor, energy-momentum tensor,  $D$ -term, cubic splines, Schlessinger point method, generalized cross-validation, mean square radius.

---

## Agradecimientos.

Quisiera agradecer al Dr. Alfredo Raya Montaño, así como al Dr. Juan Carlos Arteaga Velázquez, cuyas observaciones generales del presente trabajo, así como sus consejos a la hora de estructurarlo, fueron de gran ayuda para mejorar la presentación. De igual forma, agradezco al Dr. Khépani Raya Montaño su orientación a lo largo del tema de tensores de energía-momento, así como el facilitarme un amplio repertorio de referencias que ayudaron a nutrir significativamente este trabajo. Junto a ellos, agradezco al M. C. Mauricio René Reyes Gutiérrez, cuyo apoyo constante en la ejecución de los cálculos numéricos fue vital para la correcta obtención de los resultados. También agradezco a mis padres, quienes tuvieron la paciencia para apoyarme a lo largo del tiempo extra que duró la realización de este proyecto. Finalmente, agradezco a todos los amigos, conocidos y profesores que, de una u otra forma, me apoyaron y motivaron durante todo este trayecto.

# CONTENIDO

---

|                                                                                    |           |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                                             | <b>1</b>  |
| 1.1. Desarrollo histórico . . . . .                                                | 1         |
| 1.2. Organización y objetivos del presente trabajo . . . . .                       | 8         |
| <b>2. Sección eficaz de dispersión</b>                                             | <b>10</b> |
| 2.1. Relación de proporcionalidad $d\sigma \propto  \mathcal{M}_{fi} ^2$ . . . . . | 10        |
| 2.1.1. Regla de oro de Fermi . . . . .                                             | 10        |
| 2.1.2. Espacio fase invariante de Lorentz . . . . .                                | 13        |
| 2.1.3. Flujo de interacción . . . . .                                              | 17        |
| 2.2. Procesos elásticos del tipo $A + B \longrightarrow A + B$ . . . . .           | 19        |
| 2.2.1. Factor de flujo invariante . . . . .                                        | 19        |
| 2.2.2. Sistema de referencia de laboratorio . . . . .                              | 20        |
| 2.2.3. Límite ultrarelativista . . . . .                                           | 23        |
| <b>3. Interacción electromagnética</b>                                             | <b>25</b> |
| 3.1. Partículas de espín- $\frac{1}{2}$ . . . . .                                  | 25        |
| 3.1.1. Espinores de Dirac . . . . .                                                | 25        |

---

|           |                                                                                                |           |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.1.2.    | Dinámica y propiedades de los espinores . . . . .                                              | 29        |
| 3.1.3.    | Potencial de interacción electromagnética $A_\mu$ . . . . .                                    | 32        |
| 3.1.4.    | La 4-corriente del protón . . . . .                                                            | 34        |
| 3.1.5.    | Amplitud $ \mathcal{M} ^2$ del proceso $e^- + p^+ \longrightarrow e^- + p^+$ . . . . .         | 40        |
| 3.2.      | Partículas de espín-0 . . . . .                                                                | 47        |
| 3.2.1.    | Ecuación y corriente de Klein-Gordon . . . . .                                                 | 47        |
| 3.2.2.    | La 4-corriente del pión . . . . .                                                              | 48        |
| 3.2.3.    | Amplitud $ \mathcal{M} ^2$ del proceso $e^- + \pi^\pm \longrightarrow e^- + \pi^\pm$ . . . . . | 49        |
| 3.3.      | Relación Factor de Forma - Radio Medio Cuadrado . . . . .                                      | 51        |
| 3.3.1.    | Derivación del radio medio-cuadrado . . . . .                                                  | 51        |
| 3.3.2.    | Mediciones experimentales del FFE de los hadrones . . . . .                                    | 54        |
| <b>4.</b> | <b>El Tensor de Energía-Momento</b>                                                            | <b>56</b> |
| 4.1.      | Derivación del tensor de energía-momento . . . . .                                             | 56        |
| 4.1.1.    | Base teórica del TEM . . . . .                                                                 | 56        |
| 4.1.2.    | TEM para partículas de espín- $\frac{1}{2}$ . . . . .                                          | 58        |
| 4.1.3.    | TEM para partículas de espín-0 . . . . .                                                       | 61        |
| 4.2.      | Los factores de forma gravitacionales . . . . .                                                | 63        |
| 4.2.1.    | Significado físico de los FFG . . . . .                                                        | 63        |
| 4.2.2.    | TEM estático y tensor de tensión . . . . .                                                     | 65        |
| 4.2.3.    | Relación Término- $D$ - Fuerza Normal . . . . .                                                | 70        |
| 4.2.4.    | Radios de masa y mecánico . . . . .                                                            | 72        |

---

|                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5. Métodos numéricos</b>                                       | <b>77</b>  |
| 5.1. Splines suavizados . . . . .                                 | 77         |
| 5.1.1. Splines cúbicos . . . . .                                  | 77         |
| 5.1.2. Interpolación por rigidez . . . . .                        | 80         |
| 5.1.3. Suavización de splines . . . . .                           | 83         |
| 5.2. Validación-cruzada . . . . .                                 | 85         |
| 5.2.1. Elección del parámetro $\lambda$ . . . . .                 | 85         |
| 5.2.2. Optimización del método VC . . . . .                       | 85         |
| 5.2.3. Validación-cruzada generalizada . . . . .                  | 87         |
| 5.3. Modelo de fracciones continuas . . . . .                     | 88         |
| 5.3.1. Método de puntos de Schlessinger . . . . .                 | 89         |
| 5.3.2. Números pseudoaleatorios . . . . .                         | 91         |
| 5.3.3. Restricciones al MPS . . . . .                             | 92         |
| 5.4. Cálculo de los radios . . . . .                              | 95         |
| 5.4.1. Obtención del promedio final . . . . .                     | 96         |
| 5.4.2. Implementación del método numérico . . . . .               | 97         |
| <b>6. Resultados</b>                                              | <b>100</b> |
| 6.1. Resultados numéricos . . . . .                               | 100        |
| 6.1.1. Promedios finales . . . . .                                | 100        |
| 6.1.2. Resultados para los factores de forma del protón . . . . . | 102        |
| 6.1.3. Resultados para los factores de forma del pión . . . . .   | 106        |

---

|                                                                      |            |
|----------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.1.4. Radios de masa y mecánico del protón . . . . .                | 110        |
| 6.1.5. Comparación con otros trabajos . . . . .                      | 112        |
| <b>7. Conclusiones</b>                                               | <b>118</b> |
| <b>8. Apéndice</b>                                                   | <b>120</b> |
| 8.1. Función delta de Dirac . . . . .                                | 120        |
| 8.2. Matrices- $\gamma$ . . . . .                                    | 121        |
| 8.3. Traza de las matrices- $\gamma$ . . . . .                       | 124        |
| 8.4. Tablas de los resultados . . . . .                              | 126        |
| 8.5. Gráficas de los resultados . . . . .                            | 131        |
| 8.5.1. Gráficas de los factores de forma del protón y pión . . . . . | 131        |
| 8.5.2. Caso especial de la integral del FFD del protón . . . . .     | 161        |
| <b>Referencias</b>                                                   | <b>167</b> |

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

### SECCIÓN 1.1

#### Desarrollo histórico

La mecánica cuántica ha sido, desde sus orígenes a comienzos de siglo XX, un constante trabajo colectivo. A diferencia de la relatividad general, cuyo arquitecto principal fue Albert Einstein, la mecánica cuántica siempre se ha visto nutrida de numerosas aportaciones por una amplia constelación de físicos. Desde Max Planck, quien en un inicio pensaba que sus cuantos de energía no eran más que un truco matemático, hasta las contemporáneas colaboraciones internacionales, en las que participan cientos de investigadores, la cuántica ha tenido una amplia cantidad de frentes de batalla. Uno de esos frentes ha sido el estudio de la estructura interna de los átomos y, posteriormente, sus constituyentes subatómicos.

Para hablar de los primeros esfuerzos dedicados a comprender la arquitectura del átomo, cuyos orígenes se remontan al modelo de Dalton [1], de inicios del siglo XIX, quien imaginaba a los átomos como esferas sólidas indestructibles y eléctricamente neutras, y el posterior refinamiento de estas ideas con el modelo de J. J. Thomson de 1904 [2], donde la carga positiva está contenida en un núcleo masivo y la carga negativa está repartida en una determinada cantidad de partículas más pequeñas incrustadas en este núcleo, debemos remontarnos al experimento de Ernest Rutherford de 1911 [3].

En este experimento, donde se bombardea una lámina de oro con partículas- $\alpha$ , ahora identificadas como núcleos de helio (ver Fig. 1.1), se mostró que el modelo atómico de Thomson no era correcto. En lugar de tener un voluminoso núcleo con las cargas negativas incrustadas, el átomo parecía ser en su mayoría espacio vacío. El razonamiento fue el siguiente: si el modelo de Thomson era correcto, la carga eléctrica del núcleo, al estar repartida en un amplio volumen, no tendría la suficiente intensidad para desviar significativamente a las partículas- $\alpha$ , sin embargo, experimentalmente se encontró lo contrario. Se estimaba que 1 de  $10^{3500}$  partículas serían desviadas, algo muy por debajo de las 1 en 20 mil medidas. Este comportamiento es explicado por el campo eléctrico generado por una carga positiva concentrada en un volumen muy pequeño. La medición experimental vino acompañada de una estimación analítica para la sección eficaz de dispersión: una función que describe la probabilidad de dispersión de una partícula proyectil por un blanco dispersor. De este cálculo proviene la famosa ley de  $\sin^{-4}(\theta/2)$  para la sección eficaz, donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión. La sección eficaz de dispersión de Rutherford es [3]

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{\alpha_{\text{em}}^2 Z_1^2 Z_2^2}{16E_K^2 \sin^4(\theta/2)}, \quad (1.1)$$

donde  $\alpha_{\text{em}}$  es la constante de estructura fina de Sommerfeld [4],  $E_K$  es la energía cinética de la partícula proyectil y los  $Z_i$  son el factor de proporcionalidad que tienen las partículas- $\alpha$  y el núcleo respecto a la carga del electrón, respectivamente. Este resultado sobre la sección eficaz fue el primer paso hacia la comprensión de la estructura subatómica de la materia.

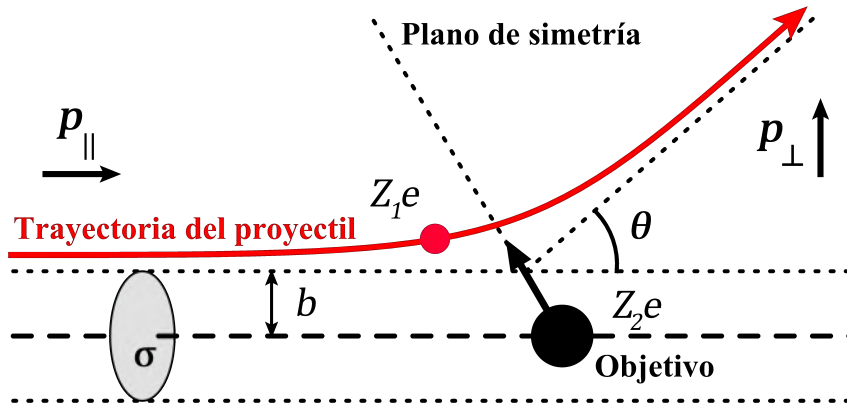


Figura 1.1: Diagrama esquemático del experimento de Rutherford.

El nuevo modelo atómico de Rutherford planteaba que los electrones ( $e^-$ ) cargados negativamente orbitan alrededor del núcleo atómico cargado positivamente. A esta partícula cargada positivamente Rutherford la llamó *protón* ( $p^+$ ) [5]. Sin embargo, el modelo no explicaba cómo estas órbitas son estables. Si se hace una analogía con las órbitas del sistema solar y se considera la naturaleza atractiva entre las cargas, los electrones deberían precipitarse hacia el núcleo. Fue Niels Bohr quien en 1913 explicó que

no todas las órbitas son permitidas en el átomo [6]. Estas órbitas están restringidas por niveles de energía concretos. Un año después, en 1914, estos niveles de energía fueron encontrados experimentalmente [7]. El modelo de Bohr pintaba al átomo hidrógeno como un protón solitario que es orbitado por un único electrón. Extendiendo este modelo a elementos más pesados, la intuición sugería que el núcleo de helio debía ser el doble de pesado que el núcleo de hidrógeno. Esto no es así, el núcleo de helio es cuatro veces más pesado. Esta incógnita finalmente fue resuelta en 1932 por James Chadwick con el descubrimiento del *neutrón* ( $n$ ) [8].

La introducción del neutrón a la ecuación hizo más evidente un crucial cuestionamiento: ¿Qué mecanismo mantiene unidos a los protones, que por su carga igual deben repelerse, así como a los neutrones que aparentemente no tienen razón para formar parte de la estructura nuclear? La respuesta natural a este cuestionamiento es sencillamente una interacción más intensa que la repulsión eléctrica entre los protones. Debe existir una *fuerza fuerte* que los mantenga unidos, tanto a los protones como neutrones, hoy llamados *nucleones* ( $N$ ). Dada la falta de registros previos de semejante interacción, su rango de acción debía ser corto, muy corto. Un rango del orden nuclear. El primer esfuerzo teórico por modelar esta fuerza fue hecho por Hideki Yukawa en 1934 [9]. Según Yukawa, debe existir un campo de corto alcance que atrae a los nucleones en forma similar a como actúa el campo eléctrico o el gravitacional. Este campo, evidentemente, debe ser cuantizado y en consecuencia surge la pregunta ¿Cómo debe ser la partícula mediadora de este campo? Así como el *fotón* ( $\gamma$ ) es la partícula mediadora de la interacción electromagnética, debe haber un intercambio de partículas entre los protones y neutrones. Por el corto alcance de la interacción este mediador debía ser masivo. Yukawa estimó que su masa debía ser unas 300 veces la masa del electrón (una sexta parte de la del protón). Esto originó una escala de masas con la que separar a las partículas conocidas en tres grupos: los *mesones* (partículas de media masa), *leptones* (partículas de baja masa) y *bariones* (partículas de alta masa). El mesón de Yukawa, responsable de la estabilidad del núcleo atómico y bautizado como *pión* ( $\pi^\pm, \pi^0$ ), no fue descubierto experimentalmente hasta 1947 junto con otra partícula, el llamado hermano pesado del electrón: el *muón* ( $\mu^-$ ), esto en un experimento liderado por Cecil Powell [10], que analizaba rayos cósmicos que inciden en la atmósfera terrestre.

Todo este nuevo conocimiento perfilaba un núcleo atómico mucho más complejo de lo que se creía a inicios del siglo XX. La complejidad se extendió a sus mismos constituyentes. Tal como los experimentos de colisiones elásticas entre partículas cargadas fueron mostrando, la idea de mesones y bariones como partículas puntuales entraba en proceso de disolución conforme crecía la discrepancia entre la predicción teórica con las mediciones experimentales, a la par que la potencia de los colisionadores iba en aumento. Quien profundizó más en estos estudios de partículas no-puntuales fue Robert Hofstadter a lo largo de numerosos experimentos en el Centro del Acelerador Lineal de Stanford (SLAC) durante la década de 1950. En un estudio sobre los procesos de dispersión elástica electrón-protón, hecho en 1956 [11], confrontaron la llamada *fórmula*

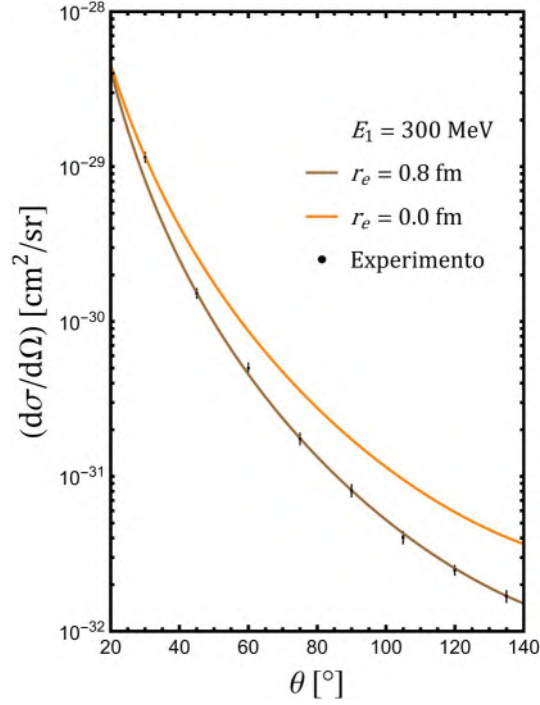


Figura 1.2: Mediciones experimentales de la sección eficaz relativas al ángulo  $\theta$  con una energía incidente de 300 MeV [11]. Las curvas fueron graficadas con las ecs. (1.2-1.4).

de *Rosenbluth* [12] para la sección eficaz electrón-protón con mediciones experimentales. Dicha fórmula, dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{e^4}{4E_1^2} \left(\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}\right) \frac{1}{1 + (2E_1/M) \sin^2(\theta/2)} \times \left\{ F_1^2 + \frac{q^2}{2M^2} [2(F_1(q^2) + \mu F_2(q^2))^2 \tan^2(\theta/2) + \mu^2 F_2^2(q^2)] \right\}, \quad (1.2)$$

donde

$$q = \frac{2E_1 \sin^2(\theta/2)}{[1 + (2E_1/M) \sin^2(\theta/2)]^{1/2}}, \quad (1.3)$$

incorporó al cálculo los espines del electrón y protón, el retroceso del protón al impacto, así como una nueva cantidad conocida como *factores de forma* ( $F_1$  y  $F_2$ ). Estos factores de forma cuantifican la distribución de la carga eléctrica y momento dipolar magnético en un volumen finito, siendo este volumen finito el espacio que ocupa la partícula no-puntual. Así, en esta fórmula se considera que el protón no necesariamente es una partícula puntual. Al no tener perfil analítico definido, se pueden usar diferentes modelos para los factores de forma. El utilizado por Hofstadter fue el llamada *modelo dipolar*, dado por

$$F_E(q^2) = \frac{1}{(1 + q^2\beta^2)^2}, \quad (1.4)$$

donde  $\beta \equiv r_e$ , siendo  $r_e$  el radio de carga del protón. Para los resultados mostrados en la Fig. 1.2 se supuso que  $F_1 = F_2$ , así como que los radios de carga y momento magnético son iguales:  $r_e = r_m = 0.8$  fm. Con estas aproximaciones y suposiciones, que simplifican el modelo, se encuentra que la ec. (1.4) reproduce bastante bien los valores para el factor de forma eléctrico del protón, como se puede ver en la Fig. 1.3, donde se compara el modelo dipolar con mediciones experimentales hechas en la década de 1970. Experimentos similares para el resto de partículas con una vida media lo suficientemente larga extendieron el concepto de no-puntualidad del protón de manera tajante.

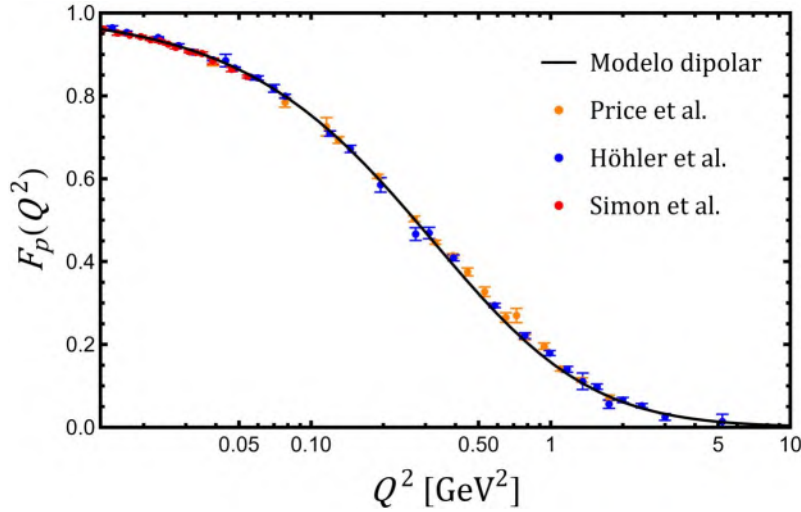


Figura 1.3: Modelo dipolar de la ec. (1.4) contrastado con mediciones experimentales del factor de forma eléctrico del protón tomadas en 1971 por Price *et al.* [13], 1976 por Höhler *et al.* [14] y en 1979 por Simon *et al.* [15].

Estos trabajos terminaron por cristalizar la idea de que los mesones y bariones son partículas no-puntuales. Al conjunto de partículas subatómicas no-puntuales se le dió el nombre de *hadrones*. Por otro lado, los leptones mantuvieron su carácter puntual. La idea que empezó a predominar fue que los hadrones están constituidos de partículas ciertamente puntuales que, dependiendo de la forma en que se configuren, dan origen a las estructuras hadrónicas. Estas suposiciones se vieron reforzadas con el desarrollo de los experimentos con *colisiones inelásticas profundas* [16]. Los primeros en proponer, de manera independiente, un modelo teórico sólido para esta interrogante fueron Murray Gell-Mann en 1961 [17] con su llamado *Eightfold Way* y George Zweig en 1964 [18]. El modelo de Gell-Mann, cuya terminología acabó por imponerse, introdujo inicialmente tres partículas puntuales a las que llamó *quarks* ( $q$ ). Los nombres dados a estos quarks fueron *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ) y *strange* ( $s$ ). Cada quark, en una primera aproximación teórica de masas iguales, se distingue por sus números cuánticos. Estos números cuánticos, siguiendo el orden de la Tabla 1.1, son: el espín, el número bariónico ( $B$ ), la carga eléctrica ( $Q$ ), el isoespín ( $I_3$ ), la extrañeza ( $S$ ) y la hipercarga ( $Y$ ).

| Quark | Espín | $B$   | $Q$    | $I_3$  | $S$  | $Y$    |
|-------|-------|-------|--------|--------|------|--------|
| $u$   | $1/2$ | $1/3$ | $2/3$  | $1/2$  | $0$  | $1/3$  |
| $d$   | $1/2$ | $1/3$ | $-1/3$ | $-1/2$ | $0$  | $1/3$  |
| $s$   | $1/2$ | $1/3$ | $-1/3$ | $0$    | $-1$ | $-2/3$ |

Tabla 1.1: Números cuánticos de los quarks originales del modelo de Gell-Mann [17].

Los quarks del modelo están acompañados de sus respectivos *antiquarks* ( $\bar{q}$ ) de carga eléctrica y extrañeza opuestas. A partir de estas bases, se encuentra que los bariones se pueden construir como triadas ( $qqq$ ) que combinan quarks y antiquarks, mientras que los mesones están formados por parejas quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ), como se puede ver en la Fig. 1.4. Ya no es sólo que los hadrones sean partículas no-puntuales, si no que son partículas compuestas. Conociendo esto, los factores de forma tienen una interpretación más clara: son la cuantificación de la distribución de las cantidades emergentes de estos arreglos de quarks y antiquarks en el espacio. A la par que el modelo de quarks era explorado, el concepto de factor de forma era aplicado a nuevas cantidades asociadas a los hadrones. Durante la década de 1960, I. Y. Kobzarev y L. B. Okun, así como Heinz Pagels desarrollaron los cálculos para el llamado *tensor de energía-momento* [19, 20] que permitió asociar factores de forma a la masa y el espín del pión y los nucleones, además de incluir un nuevo término cuya interpretación inicial era ambigua. A diferencia del factor de forma eléctrico y magnético, la posibilidad de medir experimentalmente estos nuevos factores de forma de masa y espín no estaba clara. Pese a ello, dejaron un precedente de que, a través de las suposiciones adecuadas, es posible asociar una función que cuantifique la distribución de las cantidades que caracterizan a los hadrones en el espacio.

Al ahora llamado *modelo de quarks* le tomó poco más de una década consolidarse, no sólo como la mejor forma de explicar las características de los hadrones, si no por definir un nuevo grupo de partículas fundamentales: los mismos quarks. Esto se debió a dos falencias que arrastraba desde su nacimiento y que con el tiempo salieron a flote: la aparente violación del principio de exclusión de Pauli y la falta de evidencia experimental de un quark aislado. Si bien el modelo predijo partículas que se observaron experimentalmente en los años posteriores (el caso del barión  $\Omega^-$  [21] es el más representativo), la falta de una observación directa de los quarks y su aparente violación del principio de exclusión, como es el caso de  $\Delta^{++}$  (que está hecho de tres quarks up), hicieron que el modelo se viera como una herramienta matemática con sus claras limitaciones. Fue a través de la implementación, en apariencia *ad hoc*, del concepto de *color* que estas falencias empezaron a tener solución. El color era un nuevo número cuántico cuya única similitud con el concepto clásico es una analogía a los diagramas de color en los que la suma de los tres colores básicos, o dos colores opuestos, da origen al blanco. La introducción del color vino por parte de O. W. Greenberg [22], pero la terminología moderna (en directa analogía al color) la estableció D. B. Lichtenberg [23].

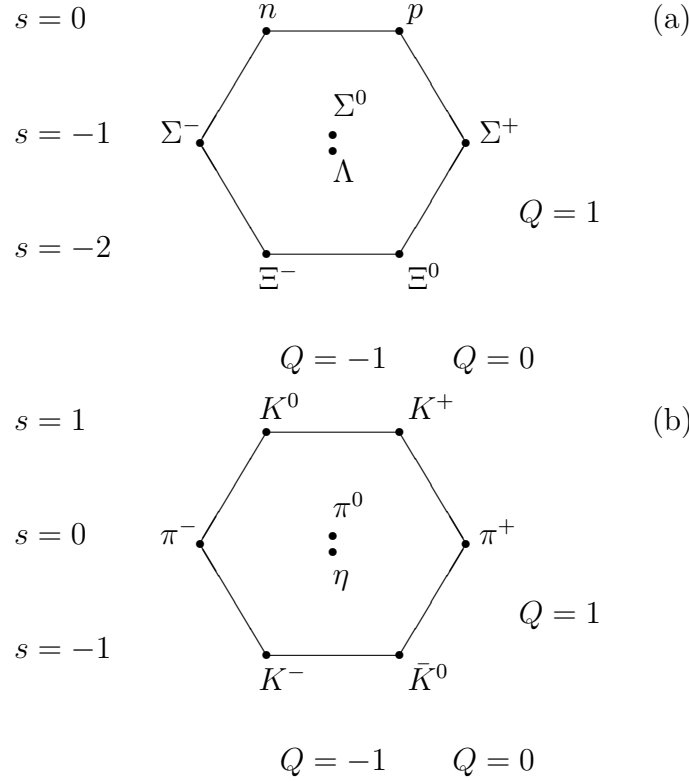


Figura 1.4: (a) Octete de bariones más ligeros ordenados de forma hexagonal con dos partículas al centro; (b) Octete de mesones pseudo-escalares más ligeros [24].

Ellos postularon que existen tres colores cuánticos: *rojo*, *azul* y *verde*, igualmente con sus respectivos *anticolores*. Este número introduce un nuevo grado de libertad a los quarks que zanja el problema del principio de exclusión de Pauli. Aplicando esta teoría del color a los bariones y mesones, resulta que son partículas *blancas* o *incolores*. La respuesta a por qué no se han encontrado quarks aislados es que la naturaleza prohíbe la existencia de partículas con color aisladas. Estas siempre deben ir en arreglos cuyo color sea el blanco. Como se mencionó, esta solución se sentía muy forzada para la mayoría de los físicos, quienes seguían hablando de los quarks con reservas y casi siempre como abstractos matemáticos.

A partir de este punto, pasamos a la etapa histórica donde se concreta la formulación de la *cromodinámica cuántica* (CDC) o *quantum chromodynamics* (QCD) [25]. Fueron las posteriores modificaciones al modelo de quarks, sumadas a la introducción de nuevos conceptos, como el *confinamiento* [26], y las predicciones ampliadas del modelo las que hicieron a los quarks entrar en la llamada *tabla periódica de la física*, mejor conocida como el *modelo estándar* de la física de partículas [27]. La construcción de este modelo fue un largo proceso de continuo refinamiento, desde finales de los años 1970 [24] hasta inicios de la década del 2010 con el descubrimiento del *bosón de Higgs*

[28]. Aún en la actualidad, se siguen haciendo ajustes a partir de las más recientes mediciones experimentales.

Con el establecimiento de la CDC, vino un entendimiento más claro de la fenomenología que gobierna a los quarks y la interacción fuerte. El tratamiento de esta fuerza es muy diferente a lo acostumbrado históricamente por los físicos, pues crece en intensidad con la distancia en vez de decrecer. Esto ha llevado a que el tratamiento de la CDC se haga mayormente a través de aproximaciones por teorías perturbativas a escalas muy concretas de energía [25]. Por otro lado, el creciente poder de cómputo de las últimas décadas ha permitido un nuevo tratamiento de la interacción fuerte mediante las técnicas numéricas de la *cromodinámica cuántica en la red* (CDCr) o *lattice quantum chromodynamics* (IQCD) [29] incluso en regiones no perturbativas. El concepto fundamental de la CDCr es sencillo: se discretiza el espacio-tiempo en una malla con celdas de longitud  $a$ , suficientemente pequeñas, similar al concepto de la integral de Riemann. De este modo, las ecuaciones y fenómenos de la CDC se vuelven tratables numéricamente para cualquier escala de energía. La precisión de estas soluciones depende enteramente de qué tan pequeñas sean las celdas. Para el caso límite de  $a \rightarrow 0$ , se recupera la CDC-continua. Usando esta herramienta numérica, es posible modelar la dinámica de los llamados *quarks de valencia* al interior de los hadrones y tener una idea aproximada de cómo se comportan en la naturaleza. Esto ha permitido explorar regiones del espacio fase que aún son desconocidas experimentalmente para los hadrones, como lo es el caso de los factores de forma de masa y espín.

El panorama de la física fundamental en vísperas del segundo cuarto del siglo XXI es prometedor. Con la suma de los nuevos y más energéticos aceleradores de partículas capaces de experimentos más refinados, una herramienta teórica y matemática robusta y variada, así como modelos computacionales satisfactoriamente próximos a la realidad, se espera que *nueva física* aparezca en el horizonte próximo. De entre toda esta nueva física, está el comprender mejor la arquitectura de los hadrones y cómo emergen sus características de la dinámica entre quarks.

## SECCIÓN 1.2

### Organización y objetivos del presente trabajo

Como se expuso en la sección anterior, la física actual considera a los hadrones arreglos de pares o triadas de quarks y/o antiquarks. A la par de esto, hay a nuestra disposición un abanico de mediciones experimentales y estimaciones numéricas de las cantidades que caracterizan a los hadrones. En el presente proyecto, nos enfocamos en los factores

de forma del protón y pión cargado. El objetivo es calcular, a partir de mediciones experimentales y estimaciones numéricas de lQCD, los radios de carga, masa y mecánico de los hadrones mencionados para  $Q^2 = 0 \text{ GeV}^2$ . Los métodos numéricos empleados para lograr este propósito toman como punto de partida el trabajo realizado por Z. F. Cui, C. D. Roberts *et al.*, para los radios de carga del protón y pión [30, 31].

La organización del proyecto se da a continuación. En el Capítulo 2, desarrollamos los cálculos para la sección eficaz de los procesos de dispersión elástica entre dos partículas cargadas: electrón-protón y electrón-pión. Dado que estos cálculos son la puerta de entrada a las interacciones entre partículas, y la posterior introducción de los factores de forma, resulta pertinente su desglose analítico. En el Capítulo 3, nos centramos en la interacción electromagnética para el caso de las partículas de espín- $\frac{1}{2}$  (electrón y protón) y espín-0 (pion), vemos cómo se construyen los factores de forma eléctrico y magnético para el protón y pión, luego construimos sus amplitudes de transición invariantes de Lorentz junto a sus secciones eficaces. Por último, vemos la construcción del radio medio-cuadrado a partir del factor de forma. En el Capítulo 4, definimos y construimos los tensores de energía-momento para el protón y pión, identificamos a cada uno de los factores de forma que surgen a partir de este tensor y vemos cómo se derivan sus respectivos radios. En el Capítulo 5, se da una explicación detallada y profunda de los métodos numéricos empleados para la derivación de las cantidades de interés de los hadrones. En el Capítulo 6, exponemos los resultados obtenidos y los comparamos con estimaciones previas. En el Capítulo 7, se dan las conclusiones respecto a los resultados obtenidos para las cantidades de interés de los hadrones, así como en lo referente al método numérico. Finalmente, en el Capítulo 8, se enlistan las identidades y definiciones matemáticas usadas a lo largo del proyecto, así como información adicional respecto a los resultados.

---

# Capítulo 2

## Sección eficaz de dispersión

---

Nuestra principal herramienta para el estudio de las colisiones entre partículas en el laboratorio es la *sección eficaz* de dispersión. Para nuestro propósito, nos limitamos al caso de colisiones elásticas y con espectros de energía discretos.

### SECCIÓN 2.1

#### Relación de proporcionalidad $d\sigma \propto |\mathcal{M}_{fi}|^2$

Empezamos por la construcción de la amplitud de transición covariante para los procesos de dispersión entre partículas. Esto se hace mediante la regla de oro de Fermi, el espacio fase invariante de Lorentz y el flujo invariante.

#### 2.1.1 Regla de oro de Fermi

En nuestra notación usamos las unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ), así como la convención para los 4-vectores  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$  y  $x_\mu = (t, -\mathbf{x})$ . Tomamos la ecuación de Schrödinger

para un potencial perturbativo  $\hat{V}(x)$  a primer orden [32],

$$[\hat{H}_0 + \hat{V}(x)]\Psi(x) = i \frac{\partial \Psi(x)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

con

$$\Psi(x) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-itE_n}, \quad (2.2)$$

donde  $\hat{H}_0 \phi_n(\mathbf{x}) = E_n \phi_n(\mathbf{x})$ , siendo  $\hat{H}_0$  el operador Hamiltoniano independiente del tiempo. También, simplificamos la notación  $E_n^{(0)} \equiv E_n$ , pues nos limitamos al menor orden perturbativo. Por otro lado, se debe satisfacer la relación de ortogonalidad  $\langle \phi_n(\mathbf{x}) | \phi_m(\mathbf{x}) \rangle = \delta_{nm}$ . Del lado izquierdo de la ec. (2.1) tenemos

$$\begin{aligned} [\hat{H}_0 + \hat{V}(x)]\Psi(x) &= [\hat{H}_0 + \hat{V}(x)] \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-itE_n} = \sum_n [\hat{H}_0 + \hat{V}(x)] a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-itE_n} \\ &= \sum_n [E_n + \hat{V}(x)] a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-itE_n}, \end{aligned}$$

mientras que del lado derecho

$$i \frac{\partial \Psi(x)}{\partial t} = i \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-itE_n} \right] = i \sum_n \left[ \frac{da_n(t)}{dt} - ia_n(t) E_n \right] \phi_n(\mathbf{x}) e^{-itE_n}.$$

Del desarrollo de ambos lados de la ec. (2.1) resulta evidente que

$$i \sum_n \frac{da_n(t)}{dt} \phi_n(\mathbf{x}) e^{-itE_n} = \sum_n a_n(t) \hat{V}(x) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-itE_n}. \quad (2.3)$$

Multiplicando desde el lado izquierdo por  $\phi_f^*(\mathbf{x})$ , donde  $f$  denota al estado final del sistema luego de la interacción, e integrando sobre todo el espacio  $\mathcal{V}$  tenemos

$$i \sum_n \frac{da_n(t)}{dt} e^{-itE_n} \left( \int_{\mathcal{V}} \delta_{fn} d^3x \right) = \sum_n a_n(t) \left( \int_{\mathcal{V}} \phi_f^*(\mathbf{x}) \hat{V}(x) \phi_n(\mathbf{x}) d^3x \right) e^{-itE_n}.$$

Pero esta ecuación se puede reescribir como

$$\frac{da_f(t)}{dt} = -\frac{i}{\mathcal{V}} \sum_n a_n(t) \int_{\mathcal{V}} \phi_f^*(x) \hat{V}(x) \phi_n(x) d^3x, \quad (2.4)$$

con  $\varphi_j(x) = \phi_j(\mathbf{x}) e^{-itE_j}$ .

Sabemos que la interacción ocurre durante un tiempo  $T$  arbitrario y suficientemente largo. De modo que, podemos imponer las siguientes restricciones a las amplitudes,

$$a_i(-T/2) = 1, \quad a_i(+T/2) = 0, \quad a_f(-T/2) = 0 \quad \text{y} \quad 0 < a_f(+T/2) \ll 1,$$

donde  $a_i(t)$  caracteriza al estado inicial no-perturbado y  $a_f(t)$  a cualquiera de los posibles estados finales tras la perturbación. Aquí utilizamos  $t_i = -T/2$  y  $t_f = +T/2$ . Tomando únicamente el estado inicial e integrando sobre todo el tiempo de interacción,

$$a_f(+T/2) = -\frac{i}{\mathcal{V}} \int_{-T/2}^{+T/2} a_i(t) \left[ \int_{\mathcal{V}} \varphi_f^*(x) \hat{V}(x) \varphi_i(x) d^3x \right] dt.$$

Suponiendo que la amplitud  $a_i(t)$  es aproximadamente constante a lo largo del proceso, esto es  $a_i(t) \approx 1 \forall t \in [-T/2, +T/2]$ , podemos definirla como la *amplitud de transición covariante* [32],

$$iM_{fi} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\Omega} \varphi_f^*(x) \hat{V}(x) \varphi_i(x) d^4x, \quad (2.5)$$

donde  $\Omega = \mathcal{V} \cup [-T/2, +T/2]$ .

Definimos la probabilidad de transición por unidad de tiempo como [32]

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|M_{fi}|^2}{T}, \quad (2.6)$$

donde hacemos que el tamaño arbitrario de  $T$  tienda a infinito y  $|M_{fi}|^2 = (iM_{fi})^* (iM_{fi})$  lo interpretamos como la probabilidad de que una partícula dispersada pase de un estado inicial  $\varphi_i(x)$  a un estado final  $\varphi_f(x)$ . Como nuestro fenómeno de interés es la interacción con potenciales centrales electromagnéticos, podemos decir que  $\hat{V}(x) \rightarrow \hat{V}(\mathbf{x})$ , debido a que el potencial electromagnético de las partículas subatómicas no depende del tiempo y únicamente varía con la distancia [32]. Así,

$$iM_{fi} = \frac{V_{fi}}{\mathcal{V}} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{it(E_f - E_i)} dt \quad \text{con} \quad V_{fi} = \int_{\mathcal{V}} \phi_f^*(\mathbf{x}) \hat{V}(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) d^3x. \quad (2.7)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} W &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|M_{fi}|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|V_{fi}|^2}{T\mathcal{V}^2} \left[ \int_{-T/2}^{+T/2} e^{it(E_f - E_i)} dt \right]^* \left[ \int_{-T/2}^{+T/2} e^{it(E_f - E_i)} dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|V_{fi}|^2}{T\mathcal{V}^2} \left( \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-it(E_f - E_i)} dt \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(E_f - E_i)} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|V_{fi}|^2}{T\mathcal{V}^2} \left( \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-it(0)} dt \right) 2\pi\delta(E_f - E_i) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|V_{fi}|^2}{T\mathcal{V}^2} \left( \int_{-T/2}^{+T/2} dt \right) 2\pi\delta(E_f - E_i) = 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{\mathcal{V}^2} \delta(E_f - E_i), \end{aligned}$$

donde usamos la definición de la función delta de Dirac (ver ec. (8.1)). Notamos que, a partir de esta definición, establecemos que  $[2\pi\delta(E_f - E_i)]^2 = 2\pi T\delta(E_f - E_i)$ . La

probabilidad de transición por unidad de tiempo está dada por

$$W = 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{\mathcal{V}^2} \delta(E_f - E_i). \quad (2.8)$$

Para asociar un significado físico a la ec. (2.8), debemos realizar una integración sobre todos los estados finales posibles. En el contexto de la física de partículas, cuando se presenta esta situación, suponemos que un estado inicial (de energía  $E_i$ ) tiene asociado un conjunto de estados finales posibles (de energía  $E_f$ ). Cuantificamos estos estados finales mediante una función de densidad  $\rho(E_f)$ , de momento arbitraria. Definimos la probabilidad de transición de un estado inicial a un estado final como

$$W_{fi} = \int W \rho(E_f) dE_f = 2\pi \int \frac{|V_{fi}|^2}{\mathcal{V}^2} \rho(E_f) \delta(E_f - E_i) dE_f = 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{\mathcal{V}^2} \rho(E_i),$$

donde usamos la ec (8.4). Notamos que la densidad de estados finales depende completamente de la energía del estado inicial. Esta identidad,

$$W_{fi} = 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{\mathcal{V}^2} \rho(E_i), \quad (2.9)$$

se conoce como la *regla de oro de Fermi* [33]. Podemos entenderla como la cantidad de estados finales posibles, producto de una perturbación, asociados a un estado inicial.

### 2.1.2 Espacio fase invariante de Lorentz

En la física de altas energías, los objetos se desplazan con velocidades proporcionales a fracciones de la velocidad de la luz. Debido a esto, es necesario construir nuestras ecuaciones de modo que sean invariantes de Lorentz. Nuestro punto de partida es considerar el *espacio de momentos* de nuestras funciones de onda y llegar al espacio fase invariante de Lorentz.

El espacio de momentos encierra todos los momentos posibles de un sistema. En nuestro caso, el sistema consiste en partículas que interactúan con un potencial perturbativo y cuyos estados inicial y final están mediados por la regla de oro de Fermi. Como vimos, para la teoría de perturbaciones a primer orden, el potencial de transición  $V_{fi}$  se escribe como [32]

$$V_{fi} = \langle \psi_f(x) | \hat{V}(x) | \psi_i(x) \rangle = \int_{\mathcal{V}} \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^3x.$$

Las funciones de onda de los estados inicial y final se toman como ondas planas,

$$\psi(x) = A e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})},$$

donde  $A$  es una constante de normalización. El volumen de integración  $\mathcal{V}$  lo podemos definir como un cubo de lados  $L$ . Usando la forma no-relativista de la densidad de probabilidad,  $\rho = \psi^* \psi$ , escribimos

$$\int_{\mathcal{V}} \psi^*(x) \psi(x) d^3x = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \psi^*(t, \mathbf{x}) \psi(t, \mathbf{x}) dx dy dz = 1,$$

lo cual implica que  $A = L^{-3/2}$ . Definir el volumen de integración como una caja implica que las funciones de onda deben satisfacer condiciones de frontera periódicas,

$$\psi(t, x, y, z) = \psi(t, x + a_x, y, z),$$

donde  $a_x$  es un desplazamiento que deja invariante a la función. Lo mismo ocurre para  $y$  y  $z$ . El 3-momento también debe satisfacer estas condiciones,  $e^{-ip_x x} = e^{-ip_x(x+a_x)}$ , lo que implica su cuantización, dada por

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{L},$$

donde  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  son los enteros que representan los valores permitidos para el momento. Todo esto se construye del hecho de que la función de onda debe anularse en las paredes de la caja. Esto restringe los momentos permitidos del sistema a un conjunto discreto. Entonces, el elemento diferencial del espacio de momentos está dado por

$$d^3p = dp_x dp_y dp_z = dn_x dn_y dn_z \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 = d^3n \frac{(2\pi)^3}{\mathcal{V}}. \quad (2.10)$$

Definimos el *espacio de estados*  $n$  con elemento diferencial  $d^3n$ , que restringe el rango de momentos  $\mathbf{p}$ . Dado que el volumen  $\mathcal{V}$  es arbitrario, por simplicidad de la notación asumimos que  $\mathcal{V} = 1$ . Así, reescribimos la ec. (2.10) como

$$d^3n = \frac{d^3p}{(2\pi)^3}.$$

Esta relación nos permite definir la densidad de estados finales  $\rho(E_i)$  como

$$\rho(E_i) = \left| \frac{d^3n}{dE_f} \right|_{E_i}. \quad (2.11)$$

Denotamos el 3-momento del estado inicial como  $\mathbf{p}^i$ , mientras que el 3-momento del estado final es  $\mathbf{p}^f$ . Si suponemos que el estado final está formado por  $N$  constituyentes,  $\mathbf{p}^f$  es una sumatoria de momentos finales, donde es fácil ver que hay  $N - 1$  momentos independientes, pues el  $N$ -ésimo momento es una combinación lineal del resto de momentos. Entonces, podemos escribir el elemento diferencial de estados como

$$d^3n = \prod_{j=1}^{N-1} d^3n_j = \prod_{j=1}^{N-1} \frac{d^3p_j^f}{(2\pi)^3}.$$

Esta expresión se puede generalizar para los  $N$  constituyentes si involucramos el elemento de volumen del espacio de momentos para el  $N$ -ésimo constituyente y utilizamos la función delta de Dirac para garantizar la conservación del momento. Así,

$$d^3n = [\delta^3(\mathbf{p}^i - \mathbf{p}^f) d^3p_N] \prod_{j=1}^{N-1} \frac{d^3p_j^f}{(2\pi)^3}.$$

Reescribimos esta identidad como

$$d^3n = (2\pi)^3 \delta^3\left(\mathbf{p}^i - \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j^f\right) \prod_{j=1}^N \frac{d^3p_j^f}{(2\pi)^3}.$$

Consideramos que  $\mathbf{p}^i$  es igualmente resultado de una combinación lineal de  $M$  sub-momentos. Entonces, el elemento del espacio de estados está dado por

$$d^3n = (2\pi)^3 \delta^3\left(\sum_{k=1}^M \mathbf{p}_k^i - \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j^f\right) \prod_{j=1}^N \frac{d^3p_j^f}{(2\pi)^3}. \quad (2.12)$$

Ahora, usamos la definición de densidad de probabilidad relativista,

$$\int_V \Psi^*(x) \Psi(x) d^3x = 2E \quad \text{con} \quad \Psi(x) = \sqrt{2E} \psi(x)$$

y suponemos que la función de onda  $\Psi(x)$ , que define al estado del sistema, es un producto de las funciones de onda de los elementos constituyentes, de modo que

$$\Psi(x) = \prod_{l=1}^{l_0} \Psi_l(x) = \prod_{l=1}^{l_0} \sqrt{2E_l} \psi_l(x),$$

donde  $l_0$  es el número de elementos, partículas, del sistema. Así, tomando un potencial  $\hat{V}(x)$  y usando  $\Psi(x)$ , construimos el potencial invariante de Lorentz, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi} &= \langle \Psi^f(x) | \hat{V}(x) | \Psi^i(x) \rangle = \left\langle \prod_{j=1}^N \sqrt{2E_j^f} \psi_j^f(x) \left| \hat{V}(x) \right| \prod_{k=1}^M \sqrt{2E_k^i} \psi_k^i(x) \right\rangle \\ &= \left( \prod_{j=1}^N 2E_j^f \prod_{k=1}^M 2E_k^i \right)^{1/2} \left\langle \prod_{j=1}^N \psi_j^f(x) \left| \hat{V}(x) \right| \prod_{k=1}^M \psi_k^i(x) \right\rangle \\ &= \left( \prod_{j=1}^N 2E_j^f \prod_{k=1}^M 2E_k^i \right)^{1/2} \langle \psi^f(x) | \hat{V}(x) | \psi^i(x) \rangle = \left( \prod_{j=1}^N 2E_j^f \prod_{k=1}^M 2E_k^i \right)^{1/2} V_{fi}. \end{aligned}$$

El potencial invariante de Lorentz y el no-invariante de Lorentz están relacionados por

$$\mathcal{M}_{fi} = \left( \prod_{j=1}^N 2E_j^f \prod_{k=1}^M 2E_k^i \right)^{1/2} V_{fi}. \quad (2.13)$$

A esta cantidad se le conoce como *amplitud de transición invariante de Lorentz* [34].

Retomando la densidad de estados finales y haciendo el cambio de los subíndices a superíndices,

$$\rho(E^i) = \left| \frac{d^3n}{dE^f} \right|_{E^i} = \int \left( \frac{d^3n}{dE^f} \right) \delta(E^i - E^f) dE^f = \int \delta(E^i - E^f) d^3n,$$

podemos reescribir  $\rho(E^i)$  como

$$\rho(E^i) = \int \delta \left( \sum_{k=1}^M E_k^i - \sum_{j=1}^N E_j^f \right) d^3n. \quad (2.14)$$

Usando la regla de oro de Fermi, ec. (2.9), junto con las ecs. (2.12-2.14) tenemos que

$$\begin{aligned} W_{fi} &= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i) = 2\pi \int |V_{fi}|^2 \delta \left( \sum_{k=1}^M E_k^i - \sum_{j=1}^N E_j^f \right) d^3n \\ &= (2\pi)^4 \int |V_{fi}|^2 \delta \left( \sum_{k=1}^M E_k^i - \sum_{j=1}^N E_j^f \right) \delta^3 \left( \sum_{k=1}^M \mathbf{p}_k^i - \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j^f \right) \prod_{j=1}^N \frac{d^3p_j^f}{(2\pi)^3}, \end{aligned}$$

multiplicando y dividiendo por el mismo productorio de energías,

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \left( \prod_{k=1}^M 2E_k^i \right)^{-1} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta^4 \left( \sum_{k=1}^M p_k^i - \sum_{j=1}^N p_j^f \right) \prod_{j=1}^N \frac{d^3p_j^f}{2E_j^f (2\pi)^3}, \quad (2.15)$$

donde usamos la notación  $p = (E, \mathbf{p})$ .

Hemos construido una forma general de la regla de oro de Fermi. Ahora, veamos que el elemento diferencial obtenido es un invariante de Lorentz. Para demostrarlo, consideramos la relación de energía-momento de Einstein ( $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ ), donde  $\mathbf{p}^2 \equiv |\mathbf{p}|^2$ , junto con una transformación de Lorentz sobre el eje  $x$  de desplazamiento. Dados dos sistemas de referencia  $S$  en reposo y  $S'$  desplazándose con una velocidad  $v$  constante sobre el eje  $x$ , cuyos elementos diferenciales del 3-momento se relacionan por

$$d^3p' = dp'_x dp'_y dp'_z = \left( \frac{dp'_x}{dp_x} \right) dp_x dp_y dp_z = \left( \frac{dp'_x}{dp_x} \right) d^3p$$

y cuya transformación se escribe como

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(E - \beta p_x) \\ \gamma(p_x - \beta E) \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix},$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dp'_x}{dp_x} &= \frac{d}{dp_x} [\gamma(p_x - \beta E)] = \gamma \left( 1 - \beta \frac{dE}{dp_x} \right) = \gamma \left[ 1 - \beta \frac{d}{dp_x} (\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \right] \\ &= \gamma [1 - \beta(\mathbf{p}^2 + m^2)^{-1/2} p_x] = \gamma \left( 1 - \beta \frac{p_x}{E} \right) = \frac{\gamma}{E} (E - \beta p_x) = \frac{E'}{E}. \end{aligned}$$

Con esta relación, resulta trivial ver que

$$\frac{d^3 p'}{E'} = \frac{d^3 p}{E}.$$

Por otro lado, es definición que la 4-función delta de Dirac es un escalar de Lorentz,

$$\int \delta^4(p) d^4 p = 1, \quad (2.16)$$

para cualquier sistema de referencia.

Definimos el *espacio fase invariante de Lorentz* o *Lorentz-invariant phase-space* (Lips) [34] como

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum_{k=1}^M p_k^i - \sum_{j=1}^N p_j^f \right) \prod_{j=1}^N \frac{d^3 p_j^f}{2E_j^f (2\pi)^3}, \quad (2.17)$$

donde  $M$  es el número de partículas en el estado inicial y  $N$  el número de partículas en el estado final.

### 2.1.3 Flujo de interacción

El flujo se define como el número de partículas que cruzan una unidad de área por unidad de tiempo [35]. Consideramos el caso de un haz de partículas “ $a$ ”, con un flujo  $\vartheta_a$ , que atraviesa una región del espacio que contiene  $n_b$  partículas “ $b$ ” por unidad de

volumen. La tasa de interacción por partícula objetivo,  $W_b$ , es proporcional al flujo incidente,

$$W_b = \sigma \vartheta_a,$$

donde  $\sigma$  denota a la sección eficaz total de interacción, que tiene unidades de área. Si las partículas “a” inciden con velocidad  $\mathbf{v}_a$  en una región definida por un área  $A > \sigma$  que contiene partículas “b” moviéndose de manera colineal y en sentido opuesto con una velocidad  $\mathbf{v}_b$ , entonces la velocidad relativa es  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$ , como se puede ver en la Fig. 2.1. En un tiempo  $\delta t$ , las partículas “a” deben atravesar un volumen  $\delta\mathcal{V}$  con  $n_b$  partículas “b”, dado por

$$\delta\mathcal{V} = n_b v A \delta t,$$

donde  $|\mathbf{v}| = v = v_a + v_b$ .

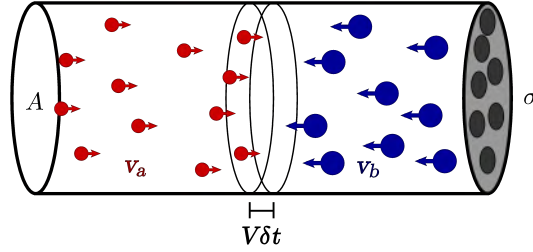


Figura 2.1: Volumen que encierra la interacción entre las partículas “a” (pequeñas y rojas) y “b” (grandes y azules). Las tapas del cilindro son el área  $A$ , mientras que las regiones más oscuras de la tapa derecha corresponden a la sección eficaz  $\sigma$  que ofrece cada blanco dispersor a las partículas incidentes.

Definimos la probabilidad de interacción,  $\delta P$ , como

$$\delta P = \frac{\sigma}{A} \delta\mathcal{V} = n_b v \sigma \delta t.$$

Esta expresión se puede leer como la probabilidad de que las partículas incidentes interactúen con las partículas blanco en  $\delta\mathcal{V}$ . De esta ecuación, podemos construir la tasa de interacción para una partícula incidente,

$$W_a = \frac{\delta P}{\delta t} = n_b v \sigma.$$

Para un haz de partículas incidentes “a”, con  $n_a$  partículas en un volumen  $\mathcal{V}$ , la tasa de interacción es

$$W_{\vartheta} = W_a n_a \mathcal{V} = n_b v \sigma n_a \mathcal{V} = (n_a v) (n_b \mathcal{V}) \sigma = \vartheta_a N_b \sigma,$$

donde  $\vartheta_a = n_a v$  es el flujo de partículas “a” y  $N_b = n_b \mathcal{V}$  es el número total de partículas “b”. Si consideramos el elemento diferencial de la sección eficaz, este tendrá asociado un diferencial de la tasa de interacción, que podemos relacionar con la regla de oro de

Fermi, la cual dejamos expresada como una integral. Así, tomando  $dW_a = dW_{fi}$  [35], escribimos

$$d\sigma = \frac{dW_{fi}}{v_a + v_b}, \quad (2.18)$$

donde normalizamos de forma tal que  $N_b = n_a = 1$ . Sustituyendo las ecs. (2.15, 2.17) en la ec. (2.18), tenemos

$$d\sigma = \frac{1}{v_a + v_b} \left( \prod_{k=1}^M 2E_k^i \right)^{-1} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\text{Lips}. \quad (2.19)$$

La convención para el módulo cuadrado de la amplitud de transición invariante de Lorentz es  $|\mathcal{M}_{fi}|^2 = (-i\mathcal{M}_{fi})^*(-i\mathcal{M}_{fi})$ .

## SECCIÓN 2.2

### Procesos elásticos del tipo $A + B \longrightarrow A + B$

Suponiendo que los 4-momentos inicial y final de nuestra interacción están dados por dos partículas, que llamamos  $A$  de masa  $m_a$  y  $B$  de masa  $m_b$ , la forma desarrollada de la ec. (2.19) para la cual  $N = M = 2$  es [32, 35]

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{2E_1 2E_2 (v_1 + v_2)} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{2E_3 (2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4 (2\pi)^3}, \quad (2.20)$$

donde los subíndices 1 y 3 están asociados a la partícula  $A$  en sus estados inicial y final, respectivamente, mientras que los subíndices 2 y 4 están asociados a la partícula  $B$  en sus estados inicial y final. Omitimos el subíndice  $fi$  de la amplitud de transición invariante de Lorentz.

#### 2.2.1 Factor de flujo invariante

Queremos que la sección eficaz sea un invariante de Lorentz. En consecuencia, debe estar dada por un producto de invariantes de Lorentz. Pero, la 3-velocidad no lo es. Para solucionar esto, definimos al factor de flujo como [32, 35]

$$F_{\vartheta} = 4E_1 E_2 (v_1 + v_2), \quad (2.21)$$

y buscamos expresarlo como un invariante de Lorentz. Definimos los 4-momentos  $p_1^\mu = (E_1, \mathbf{p}_1)$  y  $p_{2\mu} = (E_2, -\mathbf{p}_2)$ , donde  $E = \gamma m$  y  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ , con  $\gamma$  el factor de contracción

de Lorentz. Por otro lado, al suponer que las partículas se desplazan de manera colineal, pero en dirección opuesta, decimos que  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = -|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|$ . Ahora [35],

$$\begin{aligned}
 (p_1 \cdot p_2)^2 - m_a^2 m_b^2 &= (E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)^2 - m_a^2 m_b^2 \\
 &= E_1^2 E_2^2 - 2E_1 E_2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)^2 - m_a^2 m_b^2 \\
 &= E_1^2 E_2^2 - 2E_1 E_2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + (-|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|)^2 + E_1^2 m_b^2 - E_1^2 m_b^2 - m_a^2 m_b^2 \\
 &= E_1^2 (E_2^2 - m_b^2) - 2E_1 E_2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 + (E_1^2 - m_a^2) m_b^2 \\
 &= E_1^2 \mathbf{p}_2^2 - 2E_1 E_2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_1^2 m_b^2 \\
 &= E_1^2 \mathbf{p}_2^2 - 2E_1 E_2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + (\mathbf{p}_2^2 + m_b^2) \mathbf{p}_1^2 \\
 &= E_1^2 \mathbf{p}_2^2 - 2E_1 E_2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + E_2^2 \mathbf{p}_1^2 = (E_2 \mathbf{p}_1 - E_1 \mathbf{p}_2)^2 \\
 &= E_1^2 E_2^2 \left( \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right)^2 = E_1^2 E_2^2 \left( \frac{\gamma_a m_a \mathbf{v}_1}{\gamma_a m_a} - \frac{\gamma_b m_b \mathbf{v}_2}{\gamma_b m_b} \right)^2 \\
 &= E_1^2 E_2^2 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2.
 \end{aligned}$$

Así,

$$[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_a^2 m_b^2]^{1/2} = E_1 E_2 \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2} = E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = E_1 E_2 (v_1 + v_2) = \frac{F_\vartheta}{4}.$$

Encontramos que el factor de flujo, en su forma invariante de Lorentz [35], es

$$F_\vartheta = 4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_a^2 m_b^2}. \quad (2.22)$$

Sustituyendo esta identidad en la ec. (2.20), tenemos [32, 35]

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_a^2 m_b^2}} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{2E_3 (2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4 (2\pi)^3}. \quad (2.23)$$

### 2.2.2 Sistema de referencia de laboratorio

Antes de proseguir con la derivación de la sección eficaz, debemos definir nuestro sistema de referencia, con el propósito de desarrollar de manera más profunda los cálculos. Elegimos el *sistema de referencia de laboratorio* (lab), donde existe una partícula incidente  $A$  que se desplaza con un 3-momento dado y una partícula objetivo  $B$  que se encuentra en reposo (ver Fig. 2.2). Así, los 4-momentos de nuestro proceso están dados por [34]

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1), \quad p_2 = (m_b, \mathbf{0}), \quad p_3 = (E_3, \mathbf{p}_3) \quad \text{y} \quad p_4 = (E_4, \mathbf{p}_4),$$

los cuales cumplen que  $p_1^2 = p_3^2 = m_a^2$  y  $p_2^2 = p_4^2 = m_b^2$ .

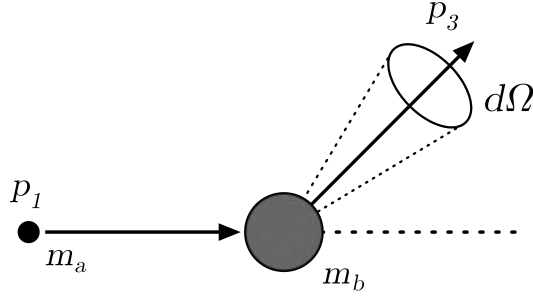


Figura 2.2: Dispersión de la partícula  $A$  por parte de la partícula  $B$  en un ángulo sólido  $d\Omega$  para el sistema de laboratorio.

Usamos la relación  $p_4^2 = m_b^2$  para construir una función  $f(x)$  con  $x = E_4$ . Así:  $f(E_4) = p_4^2 - m_b^2$ . Entonces, definimos

$$f(E_4) = E_4^2 - \mathbf{p}_4^2 - m_b^2. \quad (2.24)$$

Por otro lado, se debe cumplir que  $E_4 > 0$ . Con esta información, construimos la integral

$$\int_0^\infty \delta(f(E_4)) dE_4 = \int_0^\infty \delta(E_4^2 - \mathbf{p}_4^2 - m_b^2) dE_4,$$

y usando la ec. (8.5), donde  $x_0$  son las raíces de  $f(x)$ , podemos escribir

$$\int_0^\infty \delta(f(E_4)) dE_4 = \int_0^\infty \left| \frac{1}{2E_4} \right| \delta \left( E_4 - \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_b^2} \right) dE_4 = \frac{1}{2E_4}.$$

Extendemos más este resultado usando una función escalón apropiada. Definimos [35]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(E_4) \delta(p_4^2 - m_b^2) dE_4 = \frac{1}{2E_4}, \quad (2.25)$$

donde

$$\Theta(E_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } E_4 > 0, \\ 0 & \text{si } E_4 \leq 0. \end{cases}$$

Por otro lado, al usar el sistema de laboratorio, podemos simplificar la ec. (2.22) como

$$F_\vartheta = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_a^2 m_b^2} = 4\sqrt{(E_1 m_b)^2 - m_a^2 m_b^2} = 4m_b \sqrt{E_1^2 - m_a^2},$$

y en consecuencia

$$F_\vartheta = 4m_b |\mathbf{p}_1|. \quad (2.26)$$

Sustituyendo las ecs. (2.25, 2.26) en la ec. (2.23), tenemos

$$d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathcal{M}|^2 \Theta(E_4) \delta(p_4^2 - m_b^2)}{4m_b |\mathbf{p}_1| 2E_3 (2\pi)^2} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^3 p_3 d^3 p_4 dE_4$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathcal{M}|^2 \Theta(E_4) \delta(p_4^2 - m_b^2)}{32\pi^2 m_b |\mathbf{p}_1| E_3} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^3 p_3 d^4 p_4 \\
 &= \int \frac{|\mathcal{M}|^2 \Theta(E_4)}{32\pi^2 m_b |\mathbf{p}_1| E_3} \delta(p_4^2 - m_b^2) |\mathbf{p}_3|^2 dp_3 d\Omega,
 \end{aligned}$$

donde usamos la ec. (2.16) y  $d^3 p_3 = |\mathbf{p}_3|^2 dp_3 d\Omega$ . Ahora, notemos que

$$E_3^2 = |\mathbf{p}_3|^2 + m_a^2 \quad \Rightarrow \quad 2E_3 dE_3 = 2|\mathbf{p}_3| dp_3 \quad \Rightarrow \quad dE_3 = \frac{|\mathbf{p}_3|}{E_3} dp_3.$$

Finalmente, escribimos

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \int \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 m_b} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} \Theta(E_4) \delta(p_4^2 - m_b^2) dE_3. \quad (2.27)$$

De la función  $\Theta(E_4)$ , junto con la relación de energía-momento, podemos definir el dominio de integración. Sabemos que  $E_4 > 0$ , pero por la conservación de la energía también  $E_4 = E_1 + m_b - E_3$ . Luego, de la relación de energía-momento, resulta evidente que  $E_3 \geq m_a$ . Así, es claro que

$$E_1 + m_b > E_3 \geq m_a.$$

Antes de proseguir, es conveniente escribir el argumento de la función delta en términos de  $E_3$ . Usando la conservación del 4-momento,

$$\begin{aligned}
 p_4^2 - m_b^2 &= (p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_b^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_3) - m_b^2 \\
 &= 2m_a^2 + m_b^2 + 2(E_1 m_b - p_1 \cdot p_3 - E_3 m_b) - m_b^2 \\
 &= 2(m_a^2 + E_1 m_b - E_3 m_b - E_1 E_3 + |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3| \cos \theta),
 \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3| \cos \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre los 3-momentos.

Así, para la ec. (2.27),

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \int_{m_a}^{E_1 + m_b} \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_b} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} \delta(m_a^2 + E_1 m_b - E_3(E_1 + m_b) + |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3| \cos \theta) dE_3,$$

donde usamos la ec. (8.3) para extraer el factor común 2 del argumento de la función delta. Ahora, definiendo la función  $f(E_3)$  como

$$f(E_3) = m_a^2 + E_1 m_b - E_3(E_1 + m_b) + |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3| \cos \theta,$$

podemos usar la ec. (8.5). Notemos que

$$\frac{d|\mathbf{p}_3|}{dE_3} = \frac{d}{dE_3} \left( \sqrt{E_3^2 - m_a^2} \right) = \frac{E_3}{\sqrt{E_3^2 - m_a^2}} = \frac{E_3}{|\mathbf{p}_3|}.$$

Así,

$$\frac{df(E_3)}{dE_3} = -E_1 - m_b + \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_3|} E_3 \cos \theta,$$

de modo que

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \int_{m_a}^{E_1+m_b} \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_b} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} \left| \left( -E_1 - m_b + \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_3|} E_3 \cos \theta \right) \right|^{-1} \delta(E_3 - \mathcal{E}_3) dE_3,$$

donde  $\mathcal{E}_3$  denota la raíz de  $f(E_3)$ . Por los límites para  $E_3$ , resulta claro que  $|f'(E_3)|^{-1} = -\{f'(E_3)\}^{-1}$ . Finalmente,

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_b} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} \left( E_1 + m_b - \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_3|} E_3 \cos \theta \right)^{-1}, \quad (2.28)$$

es la sección eficaz de dispersión elástica para el sistema de referencia de laboratorio [35].

### 2.2.3 Límite ultrarelativista

En el caso del límite ultrarelativista [35],

$$\frac{E_1}{m_a} \gg 1, \quad \frac{E_3}{m_a} \gg 1,$$

la energía y el módulo del 3-momento de la partícula proyectil se vuelven aproximadamente iguales, mientras que la masa es despreciable,

$$E_1 \approx |\mathbf{p}_1|, \quad E_3 \approx |\mathbf{p}_3| \quad \text{y} \quad m_a \approx 0.$$

Así, para la función  $f(E_3)$ ,

$$\begin{aligned} m_a^2 + E_1 m_b - E_3(E_1 + m_b) + |\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3| \cos \theta &= E_1 m_b - E_3(E_1 + m_b) + E_1 E_3 \cos \theta \\ &= -E_1 E_3 (1 - \cos \theta) + m_b(E_1 - E_3) = -2E_1 E_3 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + m_b(E_1 - E_3) = 0 \\ \Rightarrow m_b E_1 &= m_b E_3 + 2E_1 E_3 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = m_b E_3 \left[ 1 + \frac{2E_1}{m_b} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

encontramos que el cociente de las energías satisface

$$\frac{E_3}{E_1} = \left[ 1 + \frac{2E_1}{m_b} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1}. \quad (2.29)$$

Este resultado es conocido como el *término de retroceso de la partícula objetivo* [35]. Nos dice cuanta energía cinética de la partícula  $A$  es transmitida a la partícula  $B$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} E_1 + m_b - \frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_3|} E_3 \cos \theta &= m_b + E_1 - E_1 \cos \theta = m_b + 2E_1 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ &= m_b \left[ 1 + \frac{2E_1}{m_b} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] = m_b \frac{E_1}{E_3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la ec. (2.28), tenemos

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 m_b^2} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^2. \quad (2.30)$$

Esta es la sección eficaz elástica para el sistema de laboratorio en el límite ultrarelativista [35].

---

# Capítulo 3

## Interacción electromagnética

---

En este Capítulo, desarrollamos en profundidad las interacciones electromagnéticas entre partículas de espín- $\frac{1}{2}$  y de espín-0, así como la construcción de los factores de forma eléctrico y magnético, tomando como punto de partida las Ref. [32, 34, 35, 36, 39].

### SECCIÓN 3.1

#### Partículas de espín- $\frac{1}{2}$

##### 3.1.1 Espinores de Dirac

Sabemos que la ecuación de Schrödinger es

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad (3.1)$$

con  $\Psi = Ae^{-ip\cdot x}$ . Usando la definición de  $\Psi$  en la ec. (3.1), es claro que  $\hat{H}\Psi = E\Psi$ . Proponemos un Hamiltoniano cuyo cuadrado debe respetar la relación de energía-momento,

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m, \quad (3.2)$$

donde las cantidades  $\alpha$  y  $\beta$  se asumen independientes de la posición y momento. Ahora,

$$\begin{aligned} E^2 &= \hat{H}^2 = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)^2 = (\alpha_i^a p_i^a + \beta^a m)(\alpha_j^b p_j^b + \beta^b m) \\ &= p_i^a p_j^b \alpha_i^a \alpha_j^b + \alpha_i^a p_i^a \beta^b m + \beta^a m \alpha_j^b p_j^b + \beta^a \beta^b m^2 \\ &= \frac{1}{2} p_i^a p_j^b \{\alpha_i^a, \alpha_j^b\} + p_i^a m \{\alpha_i^a, \beta\} + \beta^2 m^2. \end{aligned}$$

Estos objetos deben cumplir las relaciones de anticonmutación [36],

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \text{y} \quad \beta^2 = 1 \quad (3.3)$$

para satisfacer la relación de energía-momento. Estos resultados nos dicen que las cuatro cantidades  $\alpha_i$  y  $\beta$  deben anticonmutar en parejas y sus cuadrados deben ser igual a la unidad. Dado que anticonmutan, no pueden ser cantidades escalares. En realidad, se pueden representar como matrices.

Para conocer las dimensiones de estas matrices, tomamos la segunda identidad de la ec. (3.3) y suponiendo que  $\alpha_i$  es no-singular (que su inversa existe), podemos escribir

$$\alpha_i \beta \alpha_i^{-1} = -\beta,$$

para cualquier  $i$ . Dado que  $\beta^2 = 1$ , todos los elementos de su diagonal deben ser  $\pm 1$ . Usando la propiedad cíclica de la traza,  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$ , notamos que

$$-\text{Tr}\beta = \text{Tr}(\alpha_i \beta \alpha_i^{-1}) = \text{Tr}(\alpha_i^{-1} \alpha_i \beta) = \text{Tr}\beta,$$

y esto implica que  $\text{Tr}\beta = 0$ . La suma de todos los elementos de la diagonal de  $\beta$  debe ser cero. Dado que los elementos de dicha diagonal solo pueden ser  $\pm 1$ , la dimensión de las matrices debe ser par.

Si suponemos que las matrices son  $2 \times 2$ , el cuarteto de matrices linealmente independientes que podemos tomar es  $\mathbb{I}$  y  $\sigma$ , donde la primera es la matriz identidad y la segunda son las matrices de Pauli [37]. Sabemos que las matrices de Pauli anticonmutan entre sí, pero la matriz identidad conmuta con todas las matrices, además de que su traza es distinta de cero. Por tanto, no podemos construir un sistema de matrices  $2 \times 2$  que satisfaga la ec. (3.3). Para el caso de matrices  $4 \times 4$ , podremos construir un cuarteto que satisfaga las condiciones requeridas.

Encontramos que la ec. (3.2) nos define un Hamiltoniano formado por matrices  $4 \times 4$ . Esto implica dos condiciones importante: primero, el cuarteto de matrices debe ser Hermítico, dado que  $\hat{H}$  es Hermítico y segundo, nuestra función de onda debe ser un vector columna de cuatro entradas. Entonces, tenemos

$$E\Psi = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi, \quad (3.4)$$

donde

$$\Psi = A\omega e^{-ip \cdot x}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

con

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, el cuarteto de matrices debe satisfacer

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i \quad \text{y} \quad \beta^\dagger = \beta, \quad (3.5)$$

junto con la ec. (3.3). Podemos definir a  $\beta$  y  $\alpha$  como

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ , siendo estas las matrices de Pauli, cuya forma explícita es

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Desarrollando la ec. (3.4), en términos de  $\omega$ ,

$$\begin{aligned} E\omega = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)\omega &\Rightarrow E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} + \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} E\varphi \\ E\chi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m & \sigma \cdot \mathbf{p} \\ \sigma \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\varphi + \sigma \cdot \mathbf{p}\chi \\ \sigma \cdot \mathbf{p}\varphi - m\chi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones para  $\varphi$  y  $\chi$ . Elegimos la identidad inferior, pues con ella construimos los espinores para las partículas. La elección de la identidad superior nos lleva a definir las antipartículas [32]. En el presente desglose analítico, nos limitamos al desarrollo del álgebra espinorial de las partículas (electrones), pero el desarrollo de las antipartículas (positrones) es análogo.

Definimos

$$\chi = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi,$$

y en consecuencia  $\omega$  se reescribe como

$$\omega(p, s) = \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_s \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

donde  $s = 1, 2$ . Decimos que

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son las orientaciones del espín de la partícula.

Podemos normalizar en el marco relativista nuestra función de onda. Haciendo el cambio de notación  $\ast \rightarrow \dagger$ , escribimos

$$\int_{\mathcal{V}} \Psi^\dagger \Psi d^3x = 2E.$$

Antes de continuar, es pertinente definir dos tipos de productos entre vectores. Dados

$$\phi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi^\dagger = (a \quad b),$$

sus productos son

$$\phi^\dagger \phi = a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad \phi \phi^\dagger = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ba & b^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, suponiendo funciones con espín diferente,

$$\begin{aligned} \Psi_s^\dagger \Psi_{s'} &= [A\omega(p, s)e^{-ip \cdot x}]^\dagger [A\omega(p, s')e^{-ip \cdot x}] = A^2 \omega^\dagger(p, s) \omega(p, s') \\ &= A^2 \left( \varphi_s^\dagger, \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_s^\dagger \right) \begin{pmatrix} \varphi_{s'} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_{s'} \end{pmatrix} = A^2 \left[ 1 + \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \right)^2 \right] \varphi_s^\dagger \varphi_{s'}, \end{aligned}$$

donde

$$\varphi_s^\dagger \varphi_{s'} = \delta_{ss'}, \tag{3.9}$$

y usando la ec. (3.7) tenemos

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 &= (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z)^2 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 & 0 \\ 0 & p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{p}|^2 & 0 \\ 0 & |\mathbf{p}|^2 \end{pmatrix} = |\mathbf{p}|^2 \mathbb{I}. \end{aligned}$$

De manera general, podemos escribir

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 = \mathbb{I}, \tag{3.10}$$

donde  $\hat{\mathbf{r}}$  es un vector unitario. Retomando el cálculo de la amplitud,

$$\begin{aligned} \Psi_s^\dagger \Psi_{s'} &= A^2 \left[ 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(E + m)^2} \right] \delta_{ss'} = A^2 \left[ \frac{(E + m)^2 + E^2 - m^2}{(E + m)^2} \right] \delta_{ss'} \\ &= A^2 \left[ \frac{2E(E + m)}{(E + m)^2} \right] \delta_{ss'}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Psi_s^\dagger \Psi_{s'} = A^2 \left( \frac{2E}{E+m} \right) \delta_{ss'}.$$

donde resulta evidente que  $A = \sqrt{E+m}$ . Así, definimos al espinor como [34]

$$u(p, s) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \varphi_s \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

de modo que  $\Psi = u(p, s)e^{-ip \cdot x}$ . En el caso de las antipartículas, su espinor es [34]

$$v(p, s) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix},$$

donde  $\chi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\chi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

### 3.1.2 Dinámica y propiedades de los espinores

Usando la ec. (3.4), derivamos la ecuación de Dirac. Partimos de

$$\begin{aligned} E\Psi &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi \Rightarrow \beta E\Psi = (\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta^2 m)\Psi \\ &\Rightarrow (\beta E - \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - m)\Psi = 0, \end{aligned}$$

donde definimos a las matrices- $\gamma$ ,

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

A partir de estas matrices, podemos definir a la 4-matriz- $\gamma$ ,

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}). \quad (3.13)$$

Por otro lado, tomando las definiciones del 4-momento y 4-derivada,  $p_\mu = (E, -\mathbf{p})$  y  $\partial_\mu = (\partial_t, \boldsymbol{\nabla})$ , y usando la relación entre sus componentes, definimos

$$p_\mu = i\partial_\mu. \quad (3.14)$$

Así, continuando con la derivación,

$$\begin{aligned} (\beta E - \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - m)\Psi &= 0 \Rightarrow (\gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m)\Psi = 0 \\ \Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi &= 0 \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0. \end{aligned}$$

Hemos obtenido la *ecuación de Dirac* [38],

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi = 0, \quad (3.15)$$

con *notación slash de Feynman*:  $\cancel{\partial} = \gamma^\mu a_\mu = a_\mu \gamma^\mu$ . Ahora, calculemos la ecuación adjunta de Dirac,

$$\begin{aligned} [(i\cancel{\partial} - m)\Psi]^\dagger &= 0 \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi)^\dagger = 0 \\ \Rightarrow \quad -i\Psi^\dagger \partial_\mu^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - \Psi^\dagger m &= 0 \quad \Rightarrow \quad -i\Psi^\dagger \partial_\mu^\dagger (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) \gamma^0 - \Psi^\dagger \gamma^0 m = 0 \\ \Rightarrow \quad -\Psi^\dagger \gamma^0 (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) &= 0 \quad \Rightarrow \quad -\bar{\Psi} (i\cancel{\partial} + m) = 0. \end{aligned}$$

Encontramos que la *ecuación adjunta de Dirac* es

$$\bar{\Psi} (i\cancel{\partial} + m) = 0, \quad (3.16)$$

donde usamos la ec. (3.15) y definimos

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0. \quad (3.17)$$

De las ecs. (3.15, 3.16) definimos los operadores

$$\hat{\Lambda}_-(p) = \cancel{p} - m = i\gamma^\mu \partial_\mu - m, \quad (3.18)$$

$$\hat{\Lambda}_+(p) = \cancel{p} + m = i\partial_\mu \gamma^\mu + m, \quad (3.19)$$

donde  $p$  es el momento de la partícula y la posición de  $\gamma^\mu$  indica la dirección donde no actúa la derivada.

Sumando la ec. (3.15), multiplicada por la izquierda con  $\bar{\Psi}$ , y la ec. (3.16), multiplicada por la derecha con  $\Psi$ , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\Psi} \hat{\Lambda}_-(p) \Psi + \bar{\Psi} \hat{\Lambda}_+(p) \Psi = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi + \bar{\Psi} (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) \Psi \\ &= i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + i\bar{\Psi} \partial_\mu \gamma^\mu \Psi = i\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = i\partial_\mu (\bar{u}(p, s) \gamma^\mu u(p, s)). \end{aligned}$$

Encontramos la condición de conservación de la 4-corriente. Para darle significado físico, en el caso de partículas cargadas, se asocia con la conservación de la corriente eléctrica [32]. Así, para  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , tenemos

$$j^\mu = -e\bar{u}(p, s) \gamma^\mu u(p, s). \quad (3.20)$$

En el caso donde los espinores describen estados diferentes de una partícula, como antes y después de una interacción, la conservación de la corriente se puede escribir como

$$q_\mu j^\mu = 0, \quad (3.21)$$

donde  $q_\mu$  se llama *momento transferido*.

Ahora, consideremos el producto de espinores  $u(p, s)\bar{u}(p, s')$ , con diferente espín,

$$\begin{aligned}
 u(p, s)\bar{u}(p, s') &= u(p, s)u^\dagger(p, s')\gamma^0 = (E + m) \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{s'}^\dagger, & \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_{s'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \\
 &= (E + m) \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{s'}^\dagger, & -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_{s'}^\dagger \end{pmatrix} \\
 &= (E + m) \begin{pmatrix} \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger & -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger & -\left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right)^2 \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} E + m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{E + m} \end{pmatrix} \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger,
 \end{aligned}$$

donde

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{E + m} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{E + m} = \frac{E^2 - m^2}{E + m} = E - m.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
 u(p, s)\bar{u}(p, s') &= \begin{pmatrix} E + m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E + m \end{pmatrix} \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger \\
 &= \left[ \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} + \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} m \right] \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger \\
 &= (\gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \mathbb{I} m) \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger = (\gamma^\mu p_\mu + m) \varphi_s \varphi_{s'}^\dagger.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, tomando  $s = s'$  y haciendo una suma sobre los espines,

$$\sum_{s=1}^2 \varphi_s \varphi_s^\dagger = \varphi_1 \varphi_1^\dagger + \varphi_2 \varphi_2^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}.$$

Podemos concluir que

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s)\bar{u}(p, s) = \hat{\Lambda}_+(p), \quad (3.22)$$

la cual se conoce como *relación de completos de los espinores* [34].

Ahora, considerando el producto escalar de espinores  $\bar{u}(p, s')u(p, s)$ , tenemos

$$\bar{u}(p, s')u(p, s) = (E + m) \begin{pmatrix} \varphi_{s'}^\dagger, & -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_{s'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi_s \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (E + m) \left[ \varphi_{s'}^\dagger \varphi_s - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{(E + m)^2} \varphi_{s'}^\dagger \varphi_s \right] \\
 &= (E + m) \left[ 1 - \frac{|\mathbf{p}|^2}{(E + m)^2} \right] \varphi_{s'}^\dagger \varphi_s \\
 &= \left( \frac{2Em + 2m^2}{E + m} \right) \delta_{s's} = 2m \delta_{s's}.
 \end{aligned}$$

Concluimos que si  $s = s'$ , entonces

$$\bar{u}(p, s)u(p, s) = 2m. \quad (3.23)$$

### 3.1.3 Potencial de interacción electromagnética $A_\mu$

Para el caso de la ecuación de Dirac, el 4-potencial electromagnético  $A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A})$ , es aquel potencial que preserva la invarianza de norma, del tipo  $U(1)$ , y se le denomina de *acoplamiento mínimo* [39]. La forma de introducirlo es mediante la *derivada covariante*, dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (3.24)$$

Haciendo la sustitución  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$  en la ec. (3.15), tenemos

$$\begin{aligned}
 (i\not{D} - m)\Psi = 0 &\Rightarrow (i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 \Rightarrow [i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\Psi = 0 \\
 &\Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0 \Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0 \\
 &\Rightarrow (\gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0 \\
 &\Rightarrow E\Psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi - e\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \Psi.
 \end{aligned}$$

Recuperamos la ec. (3.4), con un término adicional de interacción. El resultado obtenido lo podemos escribir como

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi + \hat{V}(x)\Psi,$$

con

$$\hat{V}(x) = -e\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu(x), \quad (3.25)$$

donde suponemos que el potencial de interacción electromagnética depende de la posición. Todos los elementos del potencial son invariantes de Lorentz. Sabemos que las funciones de onda de la ecuación de Dirac también son invariantes de Lorentz, entonces podemos calcular la ec. (2.5), donde consideramos  $\mathcal{V} = 1$ , para la interacción de una partícula cargada de espín- $\frac{1}{2}$  con un potencial electromagnético.

Sea un electrón ( $e^-$ ) de masa  $m$ , que interactúa con  $\hat{V}(x)$ . El electrón tiene un estado inicial y final, dados por las funciones de onda  $\Psi_i^{s'}(x) = u(p_i, s')e^{-ip_i \cdot x}$  y  $\Psi_f^s(x) = u(p_f, s)e^{-ip_f \cdot x}$ , respectivamente. Entonces, para la amplitud de transición covariante,

$$iM_{fi} = \langle \Psi_f^s(x) | \hat{V}(x) | \Psi_i^{s'}(x) \rangle = \int u^\dagger(p_f, s) e^{ip_f \cdot x} [-e\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu(x)] u(p_i, s') e^{-ip_i \cdot x} d^4x$$

$$\begin{aligned}
 &= -e \int u^\dagger(p_f, s) \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu(x) u(p_i, s') e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} d^4x \\
 &= -e \bar{u}(p_f, s) \gamma^\mu u(p_i, s') \int A_\mu(x) e^{-iq \cdot x} d^4x = j^\mu(e^-) A_\mu(q),
 \end{aligned}$$

donde aparece la 4-corriente del electrón y una transformada de Fourier del potencial de interacción,

$$A_\mu(q) = \int A_\mu(x) e^{-iq \cdot x} d^4x,$$

con  $q = p_i - p_f$ .

Recordemos que las ecuaciones de Maxwell poseen una simetría local, esto significa que pueden asociarse con diferentes normas. Para trabajar, elegimos la *norma de Lorentz* [35], dada por

$$\partial^\mu A_\mu = 0.$$

Sabemos que, en su forma covariante, el 4-potencial  $A_\mu(x)$  y una genérica 4-corriente  $j_\mu^{\text{em}}(x)$  se relacionan por

$$\square A_\mu(x) = j_\mu^{\text{em}}(x), \quad (3.26)$$

donde  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$  es el operador d'Alembertiano. La 4-corriente de una genérica partícula de espín- $\frac{1}{2}$ , con estados inicial y final, se escribe como

$$j_\mu^{\text{em}}(x) = \pm e \bar{\Phi}_f^s(x) \Gamma_\mu \Phi_i^{s'}(x) = \pm e \bar{u}(p_f, s) \Gamma_\mu u(p_i, s') e^{-iq \cdot x},$$

donde  $\Gamma_\mu$  es un genérico vector de Lorentz. En el caso del electrón,  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ . Es claro que, respecto a  $x$ , ocurre que  $j_\mu^{\text{em}}(x) \propto e^{-iq \cdot x}$ . Por otro lado, suponiendo que existe el inverso del operador d'Alembertiano,  $\square^{-1}$ , este debe satisfacer

$$\square^{-1} \square = \mathbb{I}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 e^{-iq \cdot x} &= \mathbb{I} e^{-iq \cdot x} = \square^{-1} \square e^{-iq \cdot x} = \square^{-1} (\square e^{-iq \cdot x}) \\
 &= \square^{-1} [(-iq_\mu)(-iq^\mu) e^{-iq \cdot x}] = \square^{-1} (-q^2 e^{-iq \cdot x}),
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\square^{-1} e^{-iq \cdot x} = -\frac{1}{q^2} e^{-iq \cdot x} \quad \text{y} \quad \square e^{-iq \cdot x} = -q^2 e^{-iq \cdot x}.$$

De esta manera, usando la ec. (3.26), definimos

$$A_\mu(x) = -\frac{1}{q^2} j_\mu^{\text{em}}(x). \quad (3.27)$$

Sustituyendo esta identidad en  $M_{fi}$ , tenemos

$$iM_{fi} = j^\mu(e^-) A_\mu(q) = j^\mu(e^-) \int \left( -\frac{1}{q^2} \right) j_\mu^{\text{em}}(x) e^{-iq \cdot x} d^4x.$$

Ahora, debemos definir una forma concreta de  $j_\mu^{\text{em}}(x)$  para una partícula no-puntual de espín- $\frac{1}{2}$ .

### 3.1.4 La 4-corriente del protón

Consideremos un protón ( $p^+$ ) de masa  $M_p$ , responsable de generar  $\hat{V}(x)$ . Las funciones de onda para los estados inicial y final de protón son  $\Phi_i^{r'}(x) = u(p'_i, r')e^{-ip'_i \cdot x}$  y  $\Phi_f^r(x) = u(p'_f, r)e^{-ip'_f \cdot x}$ , respectivamente. La corriente  $j_\mu^{\text{em}}(x)$ , generada por el protón, es

$$j_\mu^{\text{em}}(x) = +e[\bar{u}(p'_f, r)e^{ip'_f \cdot x}]\Gamma_\mu[u(p'_i, r')e^{-ip'_i \cdot x}],$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} iM_{fi} &= j^\mu(e^-) \int \left(-\frac{1}{q^2}\right) [ +e\bar{u}(p'_f, r)e^{ip'_f \cdot x}\Gamma_\mu u(p'_i, r')e^{-ip'_i \cdot x} ] e^{-iq \cdot x} d^4x \\ &= j^\mu(e^-) \left(-\frac{1}{q^2}\right) [ +e\bar{u}(p'_f, r)\Gamma_\mu u(p'_i, r') ] \int e^{-i(q+q') \cdot x} d^4x, \end{aligned}$$

donde  $q' = p'_i - p'_f$ . Ahora, reetiquetamos los 4-momentos:  $p_i \rightarrow p_1$ ,  $p'_i \rightarrow p_2$ ,  $p_f \rightarrow p_3$  y  $p'_f \rightarrow p_4$ . Así,

$$\begin{aligned} iM_{fi} &= j^\mu(e^-) \left(-\frac{1}{q^2}\right) j_\mu(p^+) \int e^{-i(p_1 - p_3 + p_2 - p_4) \cdot x} d^4x \\ &= j^\mu(e^-) \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) j^\nu(p^+) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \end{aligned}$$

donde usamos las ecs. (8.2, 8.12), que permiten escribir  $\Gamma_\mu = g_{\mu\nu}\Gamma^\nu$ . Finalmente, llegamos a

$$iM_{fi} = [-e\bar{u}(p_3, s)\gamma^\mu u(p_1, s')] \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) [ +e\bar{u}(p_4, r)\Gamma^\nu u(p_2, r') ] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

La conservación del 4-momento, mediante la función delta, es un resultado esperado. El resto de términos encierran toda la física que ocurre durante la dispersión. Todos estos objetos son invariantes de Lorentz y los identificamos en conjunto como la *amplitud de transición invariante de Lorentz*,

$$-i\mathcal{M} = [-ie\bar{u}(p_3, s)\gamma^\mu u(p_1, s')] \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) [ +ie\bar{u}(p_4, r)\Gamma^\nu u(p_2, r') ]. \quad (3.28)$$

Para construir el perfil adecuado de  $\Gamma^\nu$ , es conveniente explorar las propiedades de la 4-corriente del electrón. Desarrollamos el procedimiento conocido como *descomposición de Gordon* [40]. Consideremos un genérico electrón con espinores  $u_i^{s'} = u(p_i, s')$  y  $u_f^s = u(p_f, s)$ , tales que

$$\hat{\Lambda}_-(p_i)u_i^{s'} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{u}_f^s \hat{\Lambda}_-(p_f) = 0.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_-(p_i)u_i^{s'} = 0 &\Rightarrow \gamma^\mu \hat{\Lambda}_-(p_i)u_i^{s'} = \gamma^\mu (\gamma^\nu p_{i\nu} - m)u_i^{s'} = \gamma^\mu \gamma^\nu p_{i\nu} u_i^{s'} - m\gamma^\mu u_i^{s'} = 0 \\ &\Rightarrow m\gamma^\mu u_i^{s'} = (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})p_{i\nu} u_i^{s'} = (p_i^\mu - i\sigma^{\mu\nu} p_{i\nu})u_i^{s'},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{u}_f^s \hat{\Lambda}_-(p_f) = 0 &\Rightarrow \bar{u}_f^s \hat{\Lambda}_-(p_f)\gamma^\mu = \bar{u}_f^s (p_{f\nu}\gamma^\nu - m)\gamma^\mu = \bar{u}_f^s p_{f\nu}\gamma^\nu\gamma^\mu - \bar{u}_f^s \gamma^\mu m = 0 \\ &\Rightarrow \bar{u}_f^s \gamma^\mu m = \bar{u}_f^s p_{f\nu}(g^{\nu\mu} - i\sigma^{\nu\mu}) = \bar{u}_f^s (p_f^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_{f\nu}),\end{aligned}$$

donde usamos la ec. (8.18). Entonces, podemos escribir

$$\gamma^\mu u_i^{s'} = \frac{1}{m}(p_i^\mu - i\sigma^{\mu\nu} p_{i\nu})u_i^{s'} \quad \text{y} \quad \bar{u}_f^s \gamma^\mu = \frac{1}{m}\bar{u}_f^s (p_f^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_{f\nu}).$$

Tomando la 4-corriente del electrón que aparece en la ec. (3.28),

$$\begin{aligned}j^\mu(e^-) &= -e\bar{u}(p_3, s)\gamma^\mu u(p_1, s') = -\frac{e}{2} \{ [\bar{u}(p_3, s)\gamma^\mu] u(p_1, s') + \bar{u}(p_3, s) [\gamma^\mu u(p_1, s')] \} \\ &= -\frac{e}{2m} [\bar{u}(p_3, s) (p_3^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_{3\nu}) u(p_1, s') + \bar{u}(p_3, s) (p_1^\mu - i\sigma^{\mu\nu} p_{1\nu}) u(p_1, s')] \\ &= -\frac{e}{2m} \bar{u}(p_3, s) [p_3^\mu + i\sigma^{\mu\nu} p_{3\nu} + p_1^\mu - i\sigma^{\mu\nu} p_{1\nu}] u(p_1, s') \\ &= -\frac{e}{2m} \bar{u}(p_3, s) [(p_1 + p_3)^\mu - i\sigma^{\mu\nu} (p_1 - p_3)_\nu] u(p_1, s').\end{aligned}$$

Concluimos que la descomposición de Gordon está dada por

$$j^\mu(e^-) = -\frac{e}{2m} \bar{u}(p_3, s) (P^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu) u(p_1, s'), \quad (3.29)$$

donde  $P^\mu = p_1^\mu + p_3^\mu$  y  $q_\nu = p_{1\nu} - p_{3\nu}$ . El aspecto más destacable de la ec. (3.29) es la separación explícita de las contribuciones a la 4-corriente de los momentos y los espines. Nos proporciona un panorama completo de todos los posibles tensores de la 4-corriente de una genérica partícula de espín- $\frac{1}{2}$ . Finalmente, siempre que tengamos una  $\gamma^\mu$  entre dos espinores, inicial y final, podremos hacer el intercambio

$$\gamma^\mu \iff \frac{1}{2m} (P^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu). \quad (3.30)$$

Sabemos que el protón es una partícula no-puntual. Los hadrones están formados por quarks y gluones confinados a una región finita del espacio. Esta región nos define un volumen donde las nubes de probabilidad de las diferentes cantidades asociadas a un hadrón, como su carga eléctrica, momento magnético, espín, masa, entre otras, existen. Para estudiar la distribución de estas cantidades, introducimos en la 4-corriente funciones escalares que llamamos *factores de forma* (FF). Procedemos a la construcción del FF eléctrico y magnético del protón. Para un protón con

$$j^\nu(p^+) = +e\bar{u}(p_4, r)\Gamma^\nu u(p_2, r'),$$

proponemos

$$\Gamma^\nu = \mathcal{F}_1(q^2)\gamma^\nu + \mathcal{F}_2(q^2)p_2^\nu + \mathcal{F}_3(q^2)p_4^\nu + \mathcal{F}_4(q^2)i\sigma^{\nu\alpha}p_{2\alpha} + \mathcal{F}_5(q^2)i\sigma^{\nu\alpha}p_{4\alpha},$$

donde  $\mathcal{F}_i(q^2)$  son funciones escalares a determinar. Estas funciones dependen de  $q^2$ , ya que el momento transferido es la cantidad que experimentalmente controlamos. Además, recordando la relación de de Broglie ( $\lambda = h/p$ ) [41], el momento nos define una longitud de onda que actúa como la resolución o calidad de imagen. El valor de  $q^2$  determina con cuanto detalle podemos *ver* al hadrón. Ahora, recordando la ec. (3.21),

$$\begin{aligned} q_\nu j^\nu(p^+) &= +e\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{F}_2 q_\nu p_2^\nu + \mathcal{F}_3 q_\nu p_4^\nu + \mathcal{F}_4 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{2\alpha} + \mathcal{F}_5 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{4\alpha}] u(p_2, r') \\ &= +e\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{F}_2(q \cdot p_2) + \mathcal{F}_3(q \cdot p_4) + \mathcal{F}_4 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{2\alpha} + \mathcal{F}_5 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{4\alpha}] u(p_2, r'), \end{aligned}$$

donde, por definición, sabemos que el término de  $\mathcal{F}_1$  se anula. El resto de términos se deben combinar de tal manera que se conserve la corriente. Para hacer esto, trabajamos con las parejas de perfil semejate. Para la primer pareja,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(q \cdot p_2) + \mathcal{F}_3(q \cdot p_4) &= \mathcal{F}_2(p_2 \cdot p_4 - M_p^2) + \mathcal{F}_3(M_p^2 - p_2 \cdot p_4) \\ &= (p_2 \cdot p_4 - M_p^2)(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_3) = 0, \end{aligned}$$

y por tanto  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3$ . Ahora, para la segunda pareja,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{2\alpha} + \mathcal{F}_5 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{4\alpha} &= \mathcal{F}_4 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{2\alpha} - \mathcal{F}_5 i\sigma^{\alpha\nu} q_\nu p_{4\alpha} \\ &= i\sigma^{\nu\alpha} (\mathcal{F}_4 q_\nu p_{2\alpha} - \mathcal{F}_5 p_{4\nu} q_\alpha) \\ &= i\sigma^{\nu\alpha} [\mathcal{F}_4 (p_{4\nu} p_{2\alpha} - p_{2\nu} p_{4\alpha}) - \mathcal{F}_5 (p_{4\nu} p_{4\alpha} - p_{4\nu} p_{2\alpha})], \end{aligned}$$

donde usamos la antisimetría de  $\sigma^{\mu\nu}$  y renombramos sus índices. Notemos que, para momentos iguales,

$$i\sigma^{\nu\alpha} p_\nu p_\alpha = (g^{\nu\alpha} - \gamma^\nu \gamma^\alpha) p_\nu p_\alpha = p^2 - \not{p}\not{p} \Rightarrow M_p^2 - M_p M_p = 0,$$

pues  $\not{p}u(p) \equiv \bar{u}(p)\not{p} = M_p$ . Solo sobreviven los términos cruzados. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{2\alpha} + \mathcal{F}_5 i\sigma^{\nu\alpha} q_\nu p_{4\alpha} &= i\sigma^{\nu\alpha} (\mathcal{F}_4 p_{4\mu} p_{2\alpha} + \mathcal{F}_5 p_{4\mu} p_{2\alpha}) \\ &= i\sigma^{\nu\alpha} p_{4\mu} p_{2\alpha} (\mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5) = 0, \end{aligned}$$

y por tanto  $\mathcal{F}_5 = -\mathcal{F}_4$ . Entonces, para  $\Gamma^\nu$ ,

$$\Gamma^\nu = \mathcal{F}_1\gamma^\nu + \mathcal{F}_2(p_2 + p_4)^\nu - \mathcal{F}_4 i\sigma^{\nu\alpha} (p_4 - p_2)_\alpha = \mathcal{F}_1\gamma^\nu + \mathcal{F}_2 P'^\nu - \mathcal{F}_4 i\sigma^{\nu\alpha} q_\alpha,$$

donde  $P'^\mu = p_2^\mu + p_4^\mu$  y  $q_\alpha \equiv p_{4\alpha} - p_{2\alpha}$ . Finalmente,

$$j^\nu(p^+) = +e\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{F}_1(q^2)\gamma^\nu + \mathcal{F}_2(q^2)P'^\nu - \mathcal{F}_4(q^2)i\sigma^{\nu\alpha}q_\alpha] u(p_2, r'). \quad (3.31)$$

Por la descomposición de Gordon, resulta claro que los tres términos son linealmente dependientes. Uno de ellos se puede escribir en función de los otros dos. Usando la ec. (3.30),

$$j^\nu(p^+) = +e\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{F}_1\gamma^\nu + \mathcal{F}_2 P'^\nu - \mathcal{F}_4 i\sigma^{\nu\alpha} q_\alpha] u(p_2, r')$$

$$\begin{aligned}
 &= +e\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{F}_1\gamma^\nu + \mathcal{F}_2(2M_p\gamma^\nu + i\sigma^{\nu\alpha}q_\alpha) - \mathcal{F}_4i\sigma^{\nu\alpha}q_\alpha] u(p_2, r') \\
 &= +e\bar{u}(p_4, r) [(\mathcal{F}_1 + 2M_p\mathcal{F}_2)\gamma^\nu + (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_4)i\sigma^{\nu\alpha}q_\alpha] u(p_2, r').
 \end{aligned}$$

El perfil típico que se le da a la 4-corriente del protón es

$$j^\nu(p^+) = +e\bar{u}(p_4, r) \left[ \mathcal{F}_a(q^2)\gamma^\nu + \frac{1}{2M_p}\mathcal{F}_b(q^2)i\sigma^{\nu\alpha}q_\alpha \right] u(p_2, r'), \quad (3.32)$$

donde  $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_1 + 2M_p\mathcal{F}_2$  y  $\mathcal{F}_b = 2M_p(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_4)$ .

El siguiente paso es preguntarse cuál es el significado físico de estas funciones  $\mathcal{F}_a(q^2)$  y  $\mathcal{F}_b(q^2)$ . Para este propósito, acercamos el problema al contexto de la mecánica clásica. El desarrollo de la amplitud de transición covariante nos condujo a un producto de una corriente con un potencial. Esto se puede interpretar como una partícula cargada desplazada por la acción de un potencial electromagnético. En otras palabras, es un trabajo electromagnético [35]. Teniendo esta conexión, podemos estudiar el fenómeno por casos.

Consideremos  $A_0(x)$  un genérico potencial eléctrico no-relativista y estático. Calculamos el trabajo en su volumen de acción, que nuevamente asumimos es  $\mathcal{V} = 1$ . Así, para un protón bajo la acción de un campo eléctrico,

$$W_e = \int j_{p^+}^0(x) A_0(x) d^3x = +e \int \bar{u}(p_4, r) \Gamma^0 u(p_2, r') A_0(x) e^{-i(p_2 - p_4) \cdot x} d^3x,$$

donde  $\Gamma^\nu$  es reescrito como

$$\Gamma^\nu = \mathcal{F}_a\gamma^\nu + \frac{1}{2M_p}\mathcal{F}_b i\sigma^{\nu\alpha}q_\alpha = \mathcal{F}_a\gamma^\nu + \mathcal{F}_b \left( \frac{1}{2M_p}P^\nu - \gamma^\nu \right) = (\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_b)\gamma^\nu + \frac{1}{2M_p}\mathcal{F}_b P^\nu.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 W_e &= +e \int \bar{u}(p_4, r) \left[ (\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_b)\gamma^0 + \frac{1}{2M_p}\mathcal{F}_b(p_2 + p_4)^0 \right] u(p_2, r') A_0(x) e^{iq \cdot x} d^3x \\
 &= +e \int \left[ (\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_b)u^\dagger(p_4, r)u(p_2, r') + \frac{1}{2M_p}\mathcal{F}_b(M_p + E_4)\bar{u}(p_4, r)u(p_2, r') \right] A_0(x) e^{iq \cdot x} d^3x.
 \end{aligned}$$

Dado que estamos en el límite no-relativista, imponemos la normalización no-relativista a los espinores:  $\bar{u}(p, s)u(p, s') \approx \bar{u}(p, s)\gamma^0 u(p, s') = u^\dagger(p, s)u(p, s') = 1$ . Así,

$$\begin{aligned}
 W_e &\approx +e \int \left[ (\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_b) + \frac{1}{2M_p}\mathcal{F}_b(M_p + E_4) \right] A_0(x) e^{iq \cdot x} d^3x \\
 &= +e \int \left[ \mathcal{F}_a + \frac{1}{2M_p}\mathcal{F}_b(E_4 - M_p) \right] A_0(x) e^{iq \cdot x} d^3x \\
 &= +e \int \left[ \mathcal{F}_a - \frac{q^2}{4M_p^2}\mathcal{F}_b \right] A_0(x) e^{iq \cdot x} d^3x,
 \end{aligned}$$

donde usamos

$$q^2 = p_2^2 + p_4^2 - 2p_2 \cdot p_4 = 2M_p^2 - 2M_p E_4 = 2M_p(M_p - E_4) \Rightarrow \frac{q^2}{2M_p} = M_p - E_4.$$

Suponiendo que el potencial eléctrico es aproximadamente constante o de lenta variación,  $A_0(x) \approx A_0$ , y tomando el límite  $q \rightarrow 0$ , escribimos

$$\lim_{q \rightarrow 0} W_e \approx \lim_{q \rightarrow 0} +e \int \left[ \mathcal{F}_a - \frac{q^2}{4M_p^2} \mathcal{F}_b \right] A_0 e^{iq \cdot x} d^3x = +e \mathcal{F}_a(0) A_0 \int d^3x = +e A_0 \mathcal{F}_a(0).$$

Por la definición del trabajo eléctrico clásico para una partícula puntual,  $W_e = \pm q \Delta \Phi$ , como lo es el protón en este contexto, concluimos que

$$\mathcal{F}_a(0) = 1.$$

Consideremos  $A_j(x)$  un genérico potencial vectorial magnético. En este caso, escribimos  $\Gamma^\nu$  como

$$\begin{aligned} \Gamma^\nu &= \mathcal{F}_a \gamma^\nu + \frac{1}{2M_p} \mathcal{F}_b i\sigma^{\nu\alpha} q_\alpha = \mathcal{F}_a \frac{1}{2M_p} (P^\nu - i\sigma^{\nu\alpha} q_\alpha) + \frac{1}{2M_p} \mathcal{F}_b i\sigma^{\nu\alpha} q_\alpha \\ &= \frac{1}{2M_p} \mathcal{F}_a P^\nu + \frac{1}{2M_p} (\mathcal{F}_b - \mathcal{F}_a) i\sigma^{\nu\alpha} q_\alpha. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} W_m &= \int j_{p^+}^j(x) A_j(x) d^3x \\ &= +\frac{e}{2M_p} \int \bar{u}(p_4, r) \left[ \mathcal{F}_a P'^j + (\mathcal{F}_b - \mathcal{F}_a) i\sigma^{jk} q_k \right] u(p_2, r') A_j(x) e^{iq \cdot x} d^3x, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \sigma^{jk} &= \frac{i}{2} [\gamma^j, \gamma^k] = \frac{i}{2} (\gamma^j \gamma^k - \gamma^k \gamma^j) \\ &= \frac{i}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[ \begin{pmatrix} -\sigma^j \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^j \sigma^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^k \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^k \sigma^j \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^j \sigma^k - \sigma^k \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \sigma^k - \sigma^k \sigma^j \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\sigma^j, \sigma^k] \\ &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 2i\varepsilon^{jkl} \sigma_l = \varepsilon^{jkl} \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix} = \varepsilon^{jkl} \Sigma_l, \end{aligned}$$

donde usamos la relación de conmutación de las matrices de Pauli,  $[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\varepsilon^{jkl} \sigma_l$ , y definimos a la matriz  $\Sigma_l$  como

$$\Sigma_l = \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix}.$$

Usando la antisimetría del símbolo de Levi-Civita,  $\varepsilon^{jkl} = -\varepsilon^{jlk} = \varepsilon^{ljk} = -\varepsilon^{lkj}$ , recordando que  $\mathbf{P}' = \mathbf{p}_4$ , pues  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ , y  $\mathbf{q} = -i\nabla$ , escribimos

$$\begin{aligned}
 W_m &= +\frac{e}{2M_p} \int \bar{u}(p_4, r) \left[ \mathcal{F}_a P'^j A_j(x) + (\mathcal{F}_b - \mathcal{F}_a) i\varepsilon^{jkl} A_j(x) q_k \Sigma_l \right] u(p_2, r') e^{iq \cdot x} d^3x \\
 &= +\frac{e}{2M_p} \int \bar{u}(p_4, r) \left[ \mathcal{F}_a p_4^j A_j(x) - (\mathcal{F}_b - \mathcal{F}_a) i\varepsilon^{lkj} \Sigma_l (-i\nabla_k) A_j(x) \right] u(p_2, r') e^{iq \cdot x} d^3x \\
 &= +\frac{e}{2M_p} \int \bar{u}(p_4, r) \left[ \mathcal{F}_a \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{A}(x) - (\mathcal{F}_b - \mathcal{F}_a) \boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(x)) \right] u(p_2, r') e^{iq \cdot x} d^3x \\
 &= +\frac{e}{2M_p} \int \bar{u}(p_4, r) \left[ \mathcal{F}_a \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{A}(x) - (\mathcal{F}_b - \mathcal{F}_a) \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}(x) \right] u(p_2, r') e^{iq \cdot x} d^3x.
 \end{aligned}$$

Identificamos el primer término del trabajo magnético como el desplazamiento de la carga por la influencia del potencial vectorial, mientras que el segundo término nos muestra la alineación del espín con el campo magnético. Suponiendo que el campo magnético es aproximadamente constante,  $\mathbf{B}(x) \approx \mathbf{B}$ , y tomando el límite donde no hay momento transferido, tenemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{q \rightarrow 0} W_m &\approx +\frac{e}{2M_p} \int \bar{u}(p_4, r) \left[ \mathcal{F}_a(0) \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{A}(x) - (\mathcal{F}_b(0) - \mathcal{F}_a(0)) \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} \right] u(p_2, r') d^3x \\
 &= +\frac{e}{2M_p} \bar{u}(p_4, r) u(p_2, r') \int \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{A}(x) d^3x \\
 &\quad + \frac{e}{2M_p} (1 - \mathcal{F}_b(0)) [\bar{u}(p_4, r) \boldsymbol{\Sigma} u(p_2, r')] \cdot \mathbf{B} \int d^3x \\
 &= +\frac{e}{2M_p} \bar{u}(p_4, r) u(p_2, r') \int \mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{A}(x) d^3x + \frac{e}{2M_p} (1 - \mathcal{F}_b(0)) 2 \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{B},
 \end{aligned}$$

donde usamos la relación del espín  $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ . En el segundo término identificamos al *factor-g* del protón [42], dado por  $g = 2(1 - \mathcal{F}_b(0))$ . Esta cantidad está relacionada con el *momento magnético anómalo* del protón,  $\mu_p$ . Representamos al valor  $\mathcal{F}_b(0)$  como

$$\mathcal{F}_b(0) = -\kappa_p.$$

De los cálculos para  $W_e$  y  $W_m$  identificamos dos combinaciones lineales de los FF  $\mathcal{F}_a(q^2)$  y  $\mathcal{F}_b(q^2)$  que están relacionadas con las distribuciones de carga eléctrica y momento magnético del protón. Definimos a estas combinaciones como el *factor de forma eléctrico* (FFE)

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M_p^2} \kappa_p F_2(q^2), \quad (3.33)$$

y el *factor de forma magnético* (FFM)

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + \kappa_p F_2(q^2), \quad (3.34)$$

donde  $F_1(q^2) = \mathcal{F}_a(q^2)$ ,  $\kappa_p F_2(q^2) = -\mathcal{F}_b(q^2)$  y  $F_1(0) = F_2(0) = 1$ .

Hemos encontrado que la 4-corriente del electrón se escribe como

$$j^\mu(e^-) = -e\bar{u}(p_3, s)\gamma^\mu u(p_1, s'), \quad (3.35)$$

mientras que la 4-corriente del protón está dada por

$$j^\nu(p^+) = +e\bar{u}(p_4, r) \left[ F_1(q^2)\gamma^\nu - \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2(q^2)i\sigma^{\nu\alpha}q_\alpha \right] u(p_2, r'). \quad (3.36)$$

### 3.1.5 Amplitud $|\mathcal{M}|^2$ del proceso $e^- + p^+ \longrightarrow e^- + p^+$

Procedemos al cálculo del módulo cuadrado de la amplitud de transición invariante de Lorentz. Escribimos la ec. (3.36) en una forma que nos simplifica la notación. Usando la ec. (3.30),

$$j^\nu(p^+) = +e\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{A}\gamma^\nu - \mathcal{B}P^{\nu}] u(p_2, r'),$$

donde  $\mathcal{A} = F_1 + \kappa_p F_2 = G_M$  y  $\mathcal{B} = \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2$ . Dada la amplitud de transición, que visualmente se representa como la Fig. 3.1,

$$-i\mathcal{M} = [-ie\bar{u}(p_3, s)\gamma^\mu u(p_1, s')] \left( -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) \{ +ie\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{A}\gamma^\nu - \mathcal{B}P^{\nu}] u(p_2, r') \}, \quad (3.37)$$

derivamos su adjunta. Esta está dada por

$$(-i\mathcal{M})^\dagger = \left\{ [ij^\mu(e^-)] \left( -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) [ij^\nu(p^+)] \right\}^\dagger = [ij^\nu(p^+)]^\dagger \left( -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right)^\dagger [ij^\mu(e^-)]^\dagger,$$

donde

$$\begin{aligned} [ij^\mu(e^-)]^\dagger &= [-ie\bar{u}(p_3, s)\gamma^\mu u(p_1, s')]^\dagger = +ieu^\dagger(p_1, s')(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger u(p_3, s) \\ &= +ieu^\dagger(p_1, s')\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0 u(p_3, s) = +ie\bar{u}(p_1, s')\gamma^\mu u(p_3, s). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\left( -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right)^\dagger = +i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} [ij^\nu(p^+)]^\dagger &= \{ +ie\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{A}\gamma^\nu - \mathcal{B}P^{\nu}] u(p_2, r') \}^\dagger \\ &= -ieu^\dagger(p_2, r') [\mathcal{A}(\gamma^\nu)^\dagger - \mathcal{B}(P^{\nu})^\dagger] (\gamma^0)^\dagger u(p_4, r) \\ &= -ieu^\dagger(p_2, r') [\mathcal{A}\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0 - \mathcal{B}P^{\nu}\gamma^0\gamma^0] \gamma^0 u(p_4, r) \\ &= -ieu^\dagger(p_2, r')\gamma^0 [\mathcal{A}\gamma^\nu - \mathcal{B}P^{\nu}] \gamma^0\gamma^0 u(p_4, r) \end{aligned}$$

$$= -ie\bar{u}(p_2, r') [\mathcal{A}\gamma^\nu - \mathcal{B}P'^\nu] u(p_4, r),$$

donde usamos  $(p^\mu)^\dagger = p^\mu$ , pues  $E^\dagger = E$  y  $\mathbf{p}^\dagger = \mathbf{p}$ . Concluimos que la adjunta de la amplitud de transición invariante de Lorentz es

$$(-i\mathcal{M})^\dagger = \left\{ -ie\bar{u}(p_2, r') [\mathcal{A}\gamma^\nu - \mathcal{B}P'^\nu] u(p_4, r) \right\} \left( +i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) [ +ie\bar{u}(p_1, s') \gamma^\mu u(p_3, s) ]. \quad (3.38)$$

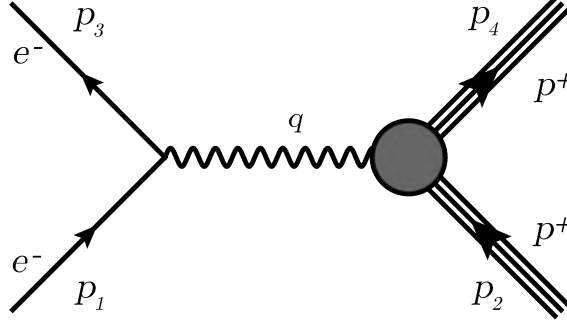


Figura 3.1: Diagrama de Feynman para el proceso de dispersión elástica electrón-protón.

Expresando las ecs. (3.37, 3.38) de manera compacta,

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= +\frac{i}{q^2} [-e\bar{u}(p_3, s)\gamma^\nu u(p_1, s')] \{ +e\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{A}\gamma_\nu - \mathcal{B}P'_\nu] u(p_2, r') \}, \\ (-i\mathcal{M})^\dagger &= -\frac{i}{q^2} \{ -e\bar{u}(p_2, r') [\mathcal{A}\gamma_\mu - \mathcal{B}P'_\mu] u(p_4, r) \} [ +e\bar{u}(p_1, s') \gamma^\mu u(p_3, s) ], \end{aligned}$$

calculamos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= (-i\mathcal{M})^\dagger (-i\mathcal{M}) \\ &= \left( -\frac{i}{q^2} \{ -e\bar{u}(p_2, r') [\mathcal{A}\gamma_\mu - \mathcal{B}P'_\mu] u(p_4, r) \} [ +e\bar{u}(p_1, s') \gamma^\mu u(p_3, s) ] \right) \\ &\quad \times \left( +\frac{i}{q^2} [-e\bar{u}(p_3, s)\gamma^\nu u(p_1, s')] \{ +e\bar{u}(p_4, r) [\mathcal{A}\gamma_\nu - \mathcal{B}P'_\nu] u(p_2, r') \} \right) \\ &= (-i)^2 \frac{(-e)^2(+e)^2}{(+q^2)(-q^2)} ([\bar{u}(p_1, s')\gamma^\mu u(p_3, s)] [\bar{u}(p_3, s)\gamma^\nu u(p_1, s')]) \\ &\quad \times (\{ \bar{u}(p_2, r') [\mathcal{A}\gamma_\mu - \mathcal{B}P'_\mu] u(p_4, r) \} \{ \bar{u}(p_4, r) [\mathcal{A}\gamma_\nu - \mathcal{B}P'_\nu] u(p_2, r') \}) \\ &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 L_{e^-}^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^{p+}, \end{aligned}$$

donde  $L_{e^-}^{\mu\nu}$  es el *tensor leptónico* y  $H_{\mu\nu}^{p+}$  el *tensor hadrónico* [35]. Ahora, haciendo el cálculo para  $L_{e^-}^{\mu\nu}$ , considerándolo un producto matricial, tenemos

$$L_{e^-}^{\mu\nu} = [\bar{u}_a(p_1, s') \gamma_{ab}^\mu u_b(p_3, s)] [\bar{u}_c(p_3, s) \gamma_{cd}^\nu u_d(p_1, s')]$$

$$= [u_d(p_1, s') \bar{u}_a(p_1, s')] [u_b(p_3, s) \bar{u}_c(p_3, s)] \gamma_{ab}^\mu \gamma_{cd}^\nu.$$

Continuando con una suma sobre los espines del electrón, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{s, s'} L_{e^-}^{\mu\nu} &= \left[ \sum_{s'=1}^2 u_d(p_1, s') \bar{u}_a(p_1, s') \right] \left[ \sum_{s=1}^2 u_b(p_3, s) \bar{u}_c(p_3, s) \right] \gamma_{ab}^\mu \gamma_{cd}^\nu \\ &= (\not{p}_1 + m)_{da} (\not{p}_3 + m)_{bc} \gamma_{ab}^\mu \gamma_{cd}^\nu = (\not{p}_1 + m)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p}_3 + m)_{bc} \gamma_{cd}^\nu \\ &= [(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m) \gamma^\nu]_{dd}, \end{aligned}$$

en donde usamos la ec. (3.22). Notamos que el resultado es la traza de un producto matricial. Entonces,

$$\sum_{s, s'} L_{e^-}^{\mu\nu} = \text{Tr}[(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m) \gamma^\nu].$$

Desarrollando la traza del tensor leptónico,

$$\begin{aligned} \sum_{s, s'} L_{e^-}^{\mu\nu} &= \text{Tr}[(\not{p}_1 + m) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m) \gamma^\nu] = \text{Tr}[(\not{p}_1 \gamma^\mu + m \gamma^\mu) (\not{p}_3 \gamma^\nu + m \gamma^\nu)] \\ &= \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu + m \gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu + \not{p}_1 \gamma^\mu m \gamma^\nu + m \gamma^\mu m \gamma^\nu) \\ &= \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu) + m \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu) + m \text{Tr}(\not{p}_1 \gamma^\mu \gamma^\nu) + m^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= p_{1\alpha} p_{3\beta} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) + m p_{3\beta} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) + m p_{1\alpha} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu) + m^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 4[p_{1\alpha} p_{3\beta} (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) + m^2 g^{\mu\nu}] \\ &= 4[p_1^\mu p_3^\nu - (p_1 \cdot p_3) g^{\mu\nu} + p_1^\nu p_3^\mu + m^2 g^{\mu\nu}] = 4 \left( p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right), \end{aligned}$$

donde usamos las ecs. (8.24-8.26). Encontramos que el tensor leptónico con suma de espines en los estados inicial y final es

$$\sum_{s, s'=1}^2 L_{e^-}^{\mu\nu} = 4 \left( p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right). \quad (3.39)$$

Para el tensor hadrónico,

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{p+} &= \{ \bar{u}_a(p_2, r') [\mathcal{A} \gamma_\mu - \mathcal{B} P'_\mu]_{ab} u_b(p_4, r) \} \{ \bar{u}_c(p_4, r) [\mathcal{A} \gamma_\nu - \mathcal{B} P'_\nu]_{cd} u_d(p_2, r') \} \\ &= [u_d(p_2, r') \bar{u}_a(p_2, r')] [u_b(p_4, r) \bar{u}_c(p_4, r)] [\mathcal{A} \gamma_\mu - \mathcal{B} P'_\mu]_{ab} [\mathcal{A} \gamma_\nu - \mathcal{B} P'_\nu]_{cd}. \end{aligned}$$

Haciendo la suma sobre los espines,

$$\begin{aligned} \sum_{r, r'} H_{\mu\nu}^{p+} &= \left[ \sum_{r'=1}^2 u_d(p_2, r') \bar{u}_a(p_2, r') \right] \left[ \sum_{r=1}^2 u_b(p_4, r) \bar{u}_c(p_4, r) \right] [\mathcal{A} \gamma_\mu - \mathcal{B} P'_\mu]_{ab} [\mathcal{A} \gamma_\nu - \mathcal{B} P'_\nu]_{cd} \\ &= (\not{p}_2 + M_p)_{da} (\not{p}_4 + M_p)_{bc} [\mathcal{A} \gamma_\mu - \mathcal{B} P'_\mu]_{ab} [\mathcal{A} \gamma_\nu - \mathcal{B} P'_\nu]_{cd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\not{p}_2 + M_p)_{da} [\mathcal{A}\gamma_\mu - \mathcal{B}P'_\mu]_{ab} (\not{p}_4 + M_p)_{bc} [\mathcal{A}\gamma_\nu - \mathcal{B}P'_\nu]_{cd} \\
 &= [(\not{p}_2 + M_p) (\mathcal{A}\gamma_\mu - \mathcal{B}P'_\mu) (\not{p}_4 + M_p) (\mathcal{A}\gamma_\nu - \mathcal{B}P'_\nu)]_{dd},
 \end{aligned}$$

de modo que el tensor hadrónico con suma de espines es

$$\sum_{r,r'} H_{\mu\nu}^{p+} = \text{Tr} [(\not{p}_2 + M_p) (\mathcal{A}\gamma_\mu - \mathcal{B}P'_\mu) (\not{p}_4 + M_p) (\mathcal{A}\gamma_\nu - \mathcal{B}P'_\nu)].$$

Desarrollando la traza,

$$\begin{aligned}
 \sum_{r,r'} H_{\mu\nu}^{p+} &= \text{Tr} [(\not{p}_2 + M_p) (\mathcal{A}\gamma_\mu - \mathcal{B}P'_\mu) (\not{p}_4 + M_p) (\mathcal{A}\gamma_\nu - \mathcal{B}P'_\nu)] \\
 &= \text{Tr} [(\not{p}_2 \mathcal{A}\gamma_\mu + M_p \mathcal{A}\gamma_\mu - \not{p}_2 \mathcal{B}P'_\mu - M_p \mathcal{B}P'_\mu) (\not{p}_4 \mathcal{A}\gamma_\nu + M_p \mathcal{A}\gamma_\nu - \not{p}_4 \mathcal{B}P'_\nu - M_p \mathcal{B}P'_\nu)] \\
 &= \text{Tr} [\not{p}_2 \mathcal{A}\gamma_\mu \not{p}_4 \mathcal{A}\gamma_\nu + M_p \mathcal{A}\gamma_\mu \not{p}_4 \mathcal{A}\gamma_\nu - \not{p}_2 \mathcal{B}P'_\mu \not{p}_4 \mathcal{A}\gamma_\nu - M_p \mathcal{B}P'_\mu \not{p}_4 \mathcal{A}\gamma_\nu \\
 &\quad + \not{p}_2 \mathcal{A}\gamma_\mu M_p \mathcal{A}\gamma_\nu + M_p \mathcal{A}\gamma_\mu M_p \mathcal{A}\gamma_\nu - \not{p}_2 \mathcal{B}P'_\mu M_p \mathcal{A}\gamma_\nu - M_p \mathcal{B}P'_\mu M_p \mathcal{A}\gamma_\nu \\
 &\quad - \not{p}_2 \mathcal{A}\gamma_\mu \not{p}_4 \mathcal{B}P'_\nu - M_p \mathcal{A}\gamma_\mu \not{p}_4 \mathcal{B}P'_\nu + \not{p}_2 \mathcal{B}P'_\mu \not{p}_4 \mathcal{B}P'_\nu + M_p \mathcal{B}P'_\mu \not{p}_4 \mathcal{B}P'_\nu \\
 &\quad - \not{p}_2 \mathcal{A}\gamma_\mu M_p \mathcal{B}P'_\nu - M_p \mathcal{A}\gamma_\mu M_p \mathcal{B}P'_\nu + \not{p}_2 \mathcal{B}P'_\mu M_p \mathcal{B}P'_\nu + M_p \mathcal{B}P'_\mu M_p \mathcal{B}P'_\nu) \\
 &= \text{Tr} [\mathcal{A}^2 (\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu + M_p \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu + M_p \not{p}_2 \gamma_\mu \gamma_\nu + M_p^2 \gamma_\mu \gamma_\nu) \\
 &\quad - \mathcal{B}\mathcal{A} (\not{p}_2 P'_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu + M_p P'_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu + M_p \not{p}_2 P'_\mu \gamma_\nu + M_p^2 P'_\mu \gamma_\nu) \\
 &\quad - \mathcal{A}\mathcal{B} (\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 P'_\nu + M_p \gamma_\mu \not{p}_4 P'_\nu + M_p \not{p}_2 \gamma_\mu P'_\nu + M_p^2 \gamma_\mu P'_\nu) \\
 &\quad + \mathcal{B}^2 (\not{p}_2 P'_\mu \not{p}_4 P'_\nu + M_p P'_\mu \not{p}_4 P'_\nu + M_p \not{p}_2 P'_\mu P'_\nu + M_p^2 P'_\mu P'_\nu)] \\
 &= \text{Tr} [\mathcal{A}^2 (\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu + M_p^2 \gamma_\mu \gamma_\nu) + \mathcal{B}^2 (\not{p}_2 P'_\mu \not{p}_4 P'_\nu + M_p^2 P'_\mu P'_\nu) \\
 &\quad - \mathcal{A}\mathcal{B} M_p (P'_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu + \not{p}_2 P'_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \not{p}_4 P'_\nu + \not{p}_2 \gamma_\mu P'_\nu)] \\
 &= \mathcal{A}^2 [p_2^\alpha p_4^\beta \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu) + M_p^2 \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu)] + \mathcal{B}^2 P'_\mu P'_\nu [p_2^\alpha p_4^\beta \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta) + M_p^2 \text{Tr}(\mathbb{I})] \\
 &\quad - \mathcal{A}\mathcal{B} M_p [P'_\mu p_4^\beta \text{Tr}(\gamma_\beta \gamma_\nu) + p_2^\alpha P'_\mu \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\nu) + p_4^\beta \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\beta) P'_\nu + p_2^\alpha \text{Tr}(\gamma_\alpha \gamma_\mu) P'_\nu] \\
 &= 4 \{ \mathcal{A}^2 [p_2^\alpha p_4^\beta (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}) + M_p^2 g_{\mu\nu}] + \mathcal{B}^2 P'_\mu P'_\nu [p_2^\alpha p_4^\beta g_{\alpha\beta} + M_p^2] \\
 &\quad - \mathcal{A}\mathcal{B} M_p [P'_\mu p_4^\beta g_{\beta\nu} + p_2^\alpha P'_\mu g_{\alpha\nu} + p_4^\beta g_{\mu\beta} P'_\nu + p_2^\alpha g_{\alpha\mu} P'_\nu] \} \\
 &= 4 \{ \mathcal{A}^2 [p_{2\mu} p_{4\nu} - (p_2 \cdot p_4) g_{\mu\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} + M_p^2 g_{\mu\nu}] + \mathcal{B}^2 P'_\mu P'_\nu [(p_2 \cdot p_4) + M_p^2] \\
 &\quad - \mathcal{A}\mathcal{B} M_p [P'_\mu p_{4\nu} + P'_\mu p_{2\nu} + p_{4\mu} P'_\nu + p_{2\mu} P'_\nu] \} \\
 &= 4 \left\{ \mathcal{A}^2 \left[ p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right] + \mathcal{B}^2 P'_\mu P'_\nu \left[ 2M_p^2 - \frac{q^2}{2} \right] - 2\mathcal{A}\mathcal{B} M_p P'_\mu P'_\nu \right\} \\
 &= 4 \left\{ \mathcal{A}^2 \left[ p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right] - P'_\mu P'_\nu \left[ 2\mathcal{A}\mathcal{B} M_p - \mathcal{B}^2 \left( 2M_p^2 - \frac{q^2}{2} \right) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

donde usamos las ecs. (8.23-8.26). Dado que  $p_4$  no es un 4-momento que nos interese mantener en el tensor hadrónico, usamos la relación  $q = p_4 - p_2$  y la ec. (3.21) para escribir

$$P'_\mu P'_\nu = (p_{2\mu} + p_{4\mu})(p_{2\nu} + p_{4\nu}) = (p_{2\mu} + q_\mu + p_{2\mu})(p_{2\nu} + q_\nu + p_{2\nu})$$

$$\equiv (2p_{2\mu})(2p_{2\nu}) = 4p_{2\mu}p_{2\nu}.$$

Finalmente, el tensor hadrónico con suma de espines en los estados inicial y final es

$$\sum_{r,r'=1}^2 H_{\mu\nu}^{p+} = 4 \left[ \mathcal{A}^2 \left( 2p_{2\mu}p_{2\nu} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) - 4p_{2\mu}p_{2\nu}\mathcal{C} \right], \quad (3.40)$$

donde

$$\mathcal{C} = 2\mathcal{A}\mathcal{B}M_p - \mathcal{B}^2 \left( 2M_p^2 - \frac{q^2}{2} \right).$$

De las ecs. (3.39, 3.40) podemos calcular el módulo cuadrado de  $\mathcal{M}$ , promediando sobre los espines de los estados iniciales y sumando sobre los estados de los espines finales. Para incluir este promedio en la sección eficaz, modificamos la ec. (2.30),

$$\left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \right)_{\text{lab}} = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{64\pi^2 M_p^2} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^2, \quad (3.41)$$

donde

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{N_s} \sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}|^2, \quad (3.42)$$

con  $N_s$  el número total de espines involucrados. Para el caso electrón-protón  $N_s = 4$ , pues ambas partículas tienen espín y debemos considerar sus estados inicial y final. Ahora,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \sum_{s,s'} L_{e^-}^{\mu\nu} \right) \left( \frac{1}{2} \sum_{r,r'} H_{\mu\nu}^{p+} \right) \\ &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left[ 2 \left( p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right) \right] \left\{ 2 \left[ \mathcal{A}^2 \left( 2p_{2\mu}p_{2\nu} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) - 4p_{2\mu}p_{2\nu}\mathcal{C} \right] \right\} \\ &= 4 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left( p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right) \left[ \mathcal{A}^2 \left( 2p_{2\mu}p_{2\nu} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right) - 4p_{2\mu}p_{2\nu}\mathcal{C} \right] \\ &= 4 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left\{ \mathcal{A}^2 \left[ 2(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + \frac{q^2}{2}(p_1 \cdot p_3) + 2(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + \frac{q^2}{2}(p_1 \cdot p_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q^2 p_2^2 + \left( \frac{q^2}{2} \right)^2 4 \right] - 4\mathcal{C} \left[ (p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + \frac{q^2}{2} p_2^2 \right] \right\} \\ &= 4 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left\{ \mathcal{A}^2 \left[ 4(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + q^2(p_1 \cdot p_3) + q^2 M_p^2 + q^4 \right] \right. \\ &\quad \left. - 4\mathcal{C} \left[ 2(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + \frac{q^2}{2} M_p^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Recordando que estamos en el sistema de laboratorio y en el marco del límite ultra-relativista:  $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$ ,  $p_2 = (M_p, \mathbf{0})$ ,  $p_3 = (E_3, \mathbf{p}_3)$  y  $p_1^2 = p_3^2 \approx 0$ , es fácil ver que  $(p_1 \cdot p_2) = E_1 M_p$ ,  $(p_2 \cdot p_3) = E_3 M_p$  y  $q^2 = -2(p_1 \cdot p_3)$ . Además,

$$(p_1 \cdot p_3) = E_1 E_3 - |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_3| \cos \theta \approx E_1 E_3 (1 - \cos \theta) = 2E_1 E_3 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 4 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left\{ \mathcal{A}^2 \left[ 4(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + q^2 M_p^2 + \frac{q^4}{2} \right] - 4\mathcal{C} \left[ 2(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + \frac{q^2}{2} M_p^2 \right] \right\} \\ &= 4 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left\{ \mathcal{A}^2 \left[ 4E_1 E_3 M_p^2 - 4E_1 E_3 M_p^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + 8E_1^2 E_3^2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 4\mathcal{C} \left[ 2E_1 E_3 M_p^2 - 2E_1 E_3 M_p^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \\ &= 4 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left\{ 4E_1 E_3 M_p^2 \mathcal{A}^2 \left[ 1 - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + 2 \frac{E_1 E_3}{M_p^2} \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 8E_1 E_3 M_p^2 \mathcal{C} \left[ 1 - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \\ &= 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 M_p^2 \left\{ \mathcal{A}^2 \left[ \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{q^2}{2M_p^2} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] - 2\mathcal{C} \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Desarrollando  $\mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= 2\mathcal{A}\mathcal{B}M_p - \mathcal{B}^2 \left( 2M_p^2 - \frac{q^2}{2} \right) = 2(F_1 + \kappa_p F_2) \left( \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2 \right) M_p - \left( \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2 \right)^2 \left( 2M_p^2 - \frac{q^2}{2} \right) \\ &= k_p F_1 F_2 + k_p^2 F_2^2 - \frac{k_p^2 F_2^2}{2} + \frac{q^2}{2} \left( \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2 \right)^2 = k_p F_1 F_2 + \frac{k_p^2 F_2^2}{2} + \frac{q^2}{2} \left( \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2k_p F_1 F_2 + k_p^2 F_2^2 + q^2 \left( \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2 \right)^2 + F_1^2 - F_1^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (F_1^2 + 2k_p F_1 F_2 + k_p^2 F_2^2) - \left[ F_1^2 - q^2 \left( \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2 \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (F_1 + \kappa_p F_2)^2 - \left[ F_1^2 - q^2 \left( \frac{\kappa_p}{2M_p} F_2 \right)^2 \right] \right\} = \frac{1}{2} [\mathcal{A}^2 - (F_1^2 - q^2 \mathcal{B}^2)]. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 M_p^2 \left\{ \mathcal{A}^2 \left[ \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{q^2}{2M_p^2} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - [\mathcal{A}^2 - (F_1^2 - q^2 \mathcal{B}^2)] \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 M_p^2 \left[ (F_1^2 - q^2 \mathcal{B}^2) \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \mathcal{A}^2 \frac{q^2}{2M_p^2} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Encontramos que

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 M_p^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ (F_1^2 - q^2 \mathcal{B}^2) - \frac{q^2}{2M_p^2} \mathcal{A}^2 \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

y definimos la cantidad

$$\tau = -\frac{q^2}{4M_p^2}.$$

Notemos que podemos expresar el primer término dentro de los corchetes como la siguiente combinación lineal del cuadrado de los FFE y FFM,

$$\begin{aligned} G_E^2 + \tau G_M^2 &= (F_1 - \tau \kappa_p F_2)^2 + \tau (F_1 + \kappa_p F_2)^2 \\ &= F_1^2 - 2\tau \kappa_p F_1 F_2 + \tau^2 \kappa_p^2 F_2^2 + \tau (F_1^2 + 2\kappa_p F_1 F_2 + \kappa_p^2 F_2^2) \\ &= F_1^2 + \tau^2 \kappa_p^2 F_2^2 + \tau F_1^2 + \tau \kappa_p^2 F_2^2 = (1 + \tau) F_1^2 + (1 + \tau) \tau \kappa_p^2 F_2^2 \\ &= (1 + \tau) (F_1^2 + \tau \kappa_p^2 F_2^2) = (1 + \tau) (F_1^2 - q^2 \mathcal{B}^2), \end{aligned}$$

por tanto,

$$F_1^2 - q^2 \mathcal{B}^2 = \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau}.$$

Expresamos la amplitud de transición invariante de Lorentz en función de los FF como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 M_p^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right].$$

Sustituyendo esta ecuación en la ec. (3.41),

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \right)_{e^- p^+} &= \frac{1}{64\pi^2 M_p^2} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^2 \left\{ 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 M_p^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) [\dots] \right\} \\ &= \frac{e^4 E_1 E_3 \cos^2(\theta/2)}{4\pi^2 [-4E_1 E_3 \sin^2(\theta/2)]^2} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^2 [\dots] \\ &= \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{\cos^2(\theta/2)}{4E_1 E_3 \sin^4(\theta/2)} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^2 [\dots] \\ &= \frac{\alpha_{\text{em}}^2 \cos^2(\theta/2)}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E_3}{E_1} [\dots], \end{aligned}$$

donde  $[\dots]$  denota el término de los FF. La sección eficaz para el proceso de dispersión elástica electrón-protón es

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \right)_{e^- p^+} &= \frac{\alpha_{\text{em}}^2 \cos^2(\theta/2)}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \left[ 1 + \frac{2E_1}{M_p} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[ \frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(q^2) \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde  $\alpha_{\text{em}}$  es la constante de estructura fina de Sommerfeld para la interacción electromagnética [4].

### SECCIÓN 3.2

## Partículas de espín-0

### 3.2.1 Ecuación y corriente de Klein-Gordon

Para entender el comportamiento de las partículas de espín-0 o pseudoescalares, que son todas aquellas partículas de espín nulo, paridad impar y de una única componente [34], desarrollamos los cálculos para la ecuación de Klein-Gordon y su 4-corriente. Partimos de la ec. (3.1), donde el Hamiltoniano satisface la relación de energía-momento. Para  $\hat{H}\Psi = E\Psi$  donde  $\Psi = Ae^{-ip \cdot x}$ , escribimos

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = E\Psi &\Rightarrow \left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \Psi = E^2\Psi \Rightarrow -\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = (\mathbf{p}^2 + m^2)\Psi \\ &\Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (-i\nabla)^2 + m^2\right]\Psi = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right]\Psi = 0, \end{aligned}$$

y recordando la definición del operador d'Alembertiano,  $\square = \partial^\mu\partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ , podemos escribir

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (3.44)$$

donde  $\phi = Ne^{-ip \cdot x}$ , que es la *ecuación de Klein-Gordon* [43, 44]. En esta ecuación también se puede usar el complejo conjugado de la función de onda:  $(\square + m^2)\phi^* = 0$ . Ahora, restando la ec. (3.44) multiplicada del lado izquierdo por  $\phi^*$  con ella misma, invirtiendo la posición de las funciones de onda, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \phi^*[(\square + m^2)\phi] - \phi[(\square + m^2)\phi^*] = \phi^*\square\phi + m^2\phi^*\phi - \phi\square\phi^* - m^2\phi\phi^* \\ &= (\phi^*\square\phi - \phi\square\phi^*) + m^2(\phi^*\phi - \phi\phi^*), \end{aligned}$$

pero notemos que  $\phi^*\phi = \phi\phi^* = |N|^2$ . Así,

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi^*\square\phi - \phi\square\phi^*) = \phi^*\partial^\mu\partial_\mu\phi - \phi\partial^\mu\partial_\mu\phi^* + \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* \\ &= \partial_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*). \end{aligned}$$

De las derivadas parciales obtenemos  $\partial^\mu\phi = -ip^\mu\phi$  y  $\partial^\mu\phi^* = +ip^\mu\phi^*$ . Para garantizar que el resultado es un número real, añadimos una unidad imaginaria. Finalmente, tenemos  $\partial_\mu j^\mu = 0$  con

$$j^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*), \quad (3.45)$$

siendo esta la 4-corriente de Klein-Gordon. Si desarrollamos esta expresión, tenemos

$$\begin{aligned} j^\mu &= i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) = i[\phi^* (-ip^\mu \phi) - \phi (+ip^\mu \phi^*)] = i(-ip^\mu)(\phi^* \phi + \phi \phi^*) \\ &= 2|N|^2 p^\mu = (2E|N|^2, 2\mathbf{p}|N|^2), \end{aligned}$$

donde  $j^0 = 2E|N|^2 \equiv \rho$ . Por la densidad de probabilidad relativista,  $\int \phi^* \phi d^3x = 2E$ , para la cual  $\phi^* \phi \equiv \rho$ , tenemos  $N = N^* = 1$ . Concluimos que

$$\phi = e^{-ip \cdot x}, \quad \phi^* = e^{+ip \cdot x} \quad \text{y} \quad j^\mu = 2p^\mu.$$

La última identidad es para el caso donde las funciones de onda están dadas por el mismo 4-momento.

### 3.2.2 La 4-corriente del pión

Para nuestro cálculo del proceso de dispersión elástica electrón-pión, consideramos un genérico pión cargado  $\pi^\pm$ , pues únicamente difieren en el signo de su carga. El resto de sus valores son iguales. Para darle significado físico a la 4-corriente, le añadimos la carga eléctrica. Como no tenemos referente previo de la 4-corriente para una partícula no-puntual de espín-0, es conveniente partir del caso de un pión puntual.

Dado un pión cargado puntual, de masa  $m_\pi$ , cuya función de onda en el estado inicial es  $\phi_i = e^{-ip_i \cdot x}$  y su función de onda en el estado final es  $\phi_f = e^{-ip_f \cdot x}$ , ocurre

$$\begin{aligned} j_{\pi^\pm}^\nu(x) &= \pm ie(\phi_f^* \partial^\nu \phi_i - \phi_i \partial^\nu \phi_f^*) = \pm ie[\phi_f^* (-ip_i^\nu \phi_i) - \phi_i (+ip_f^\nu \phi_f^*)] \\ &= \mp e i^2 (p_i^\nu + p_f^\nu) e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} = \pm e P^\nu e^{iq' \cdot x}, \end{aligned}$$

de modo que

$$j_{\pi^\pm}^\nu(x) = \pm e P^\nu e^{iq' \cdot x} \quad (3.46)$$

es la 4-corriente de un pión cargado puntual. En este caso,  $\Gamma^\nu = P^\nu$ . De los cálculos para la 4-corriente del protón, sabemos que solo existen dos combinaciones lineales posibles para los momentos:  $P^\nu = p_i^\nu + p_f^\nu$  y  $q'^\nu = p_f^\nu - p_i^\nu$ . Entonces, proponemos

$$j^\nu(\pi^\pm) = \pm e [\mathcal{F}_1(q^2) P^\nu + \mathcal{F}_2(q^2) q'^\nu],$$

como la 4-corriente del pión cargado no-puntual. Por la conservación de la 4-corriente, se debe cumplir que  $q'_\nu j^\nu(\pi^\pm) = 0$ . Así,

$$q'_\nu j^\nu(\pi^\pm) = \pm e [\mathcal{F}_1(q^2)(q' \cdot P') + \mathcal{F}_2(q^2) q'^2],$$

donde  $(q' \cdot P') = 0$  y  $q'^2 = 2m_\pi^2 - 2(p_i \cdot p_f)$ . Por tanto, debe ocurrir que

$$\mathcal{F}_2(q^2) = 0.$$

Así,

$$j_{\pi^\pm}^\nu(x) = \pm e \mathcal{F}_1(q^2) P'^\nu e^{iq' \cdot x}.$$

Para deducir el significado físico de  $\mathcal{F}_1(q^2)$ , recordemos que el FFM está asociado a la interacción  $\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{B}$  y dado que el pión es de espín-0, no hay interacción magnética. Decimos que  $G_M(q^2) = 0$ . Esto implica que el pión cargado cuenta únicamente con FFE, el cual está dado por

$$G_E(q^2) = \mathcal{F}_1(q^2).$$

Así, la 4-corriente del pión cargado no-puntual es

$$j^\nu(\pi^\pm) = \pm e G_E(q^2) P'^\nu. \quad (3.47)$$

### 3.2.3 Amplitud $|\mathcal{M}|^2$ del proceso $e^- + \pi^\pm \longrightarrow e^- + \pi^\pm$

Conociendo la 4-corriente del pión cargado no-puntual, podemos calcular la amplitud  $\mathcal{M}$ , representada en la Fig. 3.2, y la sección eficaz del proceso. Antes, hacemos el cambio de notación para los 4-momentos del pión:  $p_i^\nu = p_2^\nu$  y  $p_f^\nu = p_4^\nu$ . Ahora,

$$-i\mathcal{M} = [-ie\bar{u}(p_3, s)\gamma^\mu u(p_1, s')] \left( -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) [\pm ie G_E P'^\nu], \quad (3.48)$$

con  $P'^\nu = p_2^\nu + p_4^\nu$ . Por otro lado,

$$(-i\mathcal{M})^\dagger = [\mp ie G_E P'^\nu] \left( +i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) [+ie\bar{u}(p_1, s')\gamma^\mu u(p_3, s)]. \quad (3.49)$$

Simplificando estas ecuaciones, obtenemos

$$-i\mathcal{M} = +\frac{i}{q^2} [-e\bar{u}(p_3, s)\gamma^\nu u(p_1, s')] [\pm e G_E P'_\nu],$$

y

$$(-i\mathcal{M})^\dagger = -\frac{i}{q^2} [\mp e G_E P'_\mu] [+e\bar{u}(p_1, s')\gamma^\mu u(p_3, s)].$$

Ahora,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= (-i\mathcal{M})^\dagger (-i\mathcal{M}) \\ &= - \left[ \frac{i(-e)^2}{q^2} \right]^2 [G_E P'_\mu] [\bar{u}(p_1, s')\gamma^\mu u(p_3, s)] [\bar{u}(p_3, s)\gamma^\nu u(p_1, s')] [G_E P'_\nu] \\ &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \{ [\bar{u}(p_1, s')\gamma^\mu u(p_3, s)] [\bar{u}(p_3, s)\gamma^\nu u(p_1, s')] \} \{ [G_E P'_\mu] [G_E P'_\nu] \} \end{aligned}$$

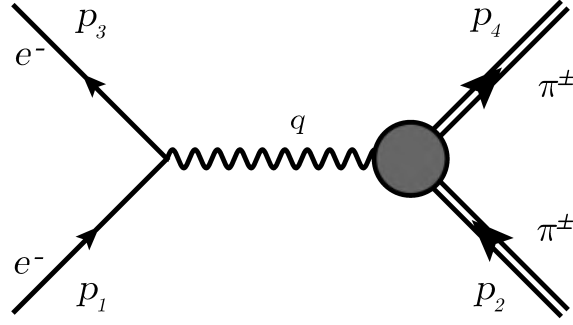


Figura 3.2: Diagrama de Feynman para el proceso de dispersión elástica electrón-pión.

$$= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 L_{e^-}^{\mu\nu} H_{\mu\nu}^{\pi^\pm}.$$

Ya conocemos el resultado del tensor leptónico (ver ec. (3.39)). Para el tensor hadrónico del pión, basta con recordar que, como no nos interesa trabajar con  $p_4$ , hacemos el cambio  $P'_\mu P'_\nu = 4p_{2\mu}p_{2\nu}$ . Así,

$$H_{\mu\nu}^{\pi^\pm} = [G_E P'_\mu][G_E P'_\nu] = G_E^2 P'_\mu P'_\nu = 4p_{2\mu}p_{2\nu}G_E^2,$$

de modo que

$$H_{\mu\nu}^{\pi^\pm} = 4p_{2\mu}p_{2\nu}G_E^2(q^2). \quad (3.50)$$

Combinando las ecs. (3.39, 3.50) tenemos que, para la ec. (3.42) donde  $N_s = 2$ , pues solo el electrón tiene espín, ocurre

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \sum_{s,s'} L_{e^-}^{\mu\nu} \right) (H_{\mu\nu}^{\pi^\pm}) \\ &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left[ 2 \left( p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right) \right] [4p_{2\mu}p_{2\nu}G_E^2] \\ &= 8 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left( p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right) p_{2\mu}p_{2\nu}G_E^2 \\ &= 8 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left[ (p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + \frac{q^2}{2} p_2^2 \right] G_E^2 \\ &= 8 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left[ 2(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + \frac{q^2}{2} m_\pi^2 \right] G_E^2 \\ &= 8 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \left[ 2E_1 E_3 m_\pi^2 - 2E_1 E_3 m_\pi^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] G_E^2 \\ &= 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 m_\pi^2 \left[ 1 - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] G_E^2. \end{aligned}$$

Encontramos que

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 m_\pi^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) G_E^2(q^2),$$

y al sustituir en la ec. (3.41), obtenemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \right)_{e^-\pi^\pm} &= \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{64\pi^2 m_\pi^2} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_\pi^2} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^2 \left[ 16 \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 E_1 E_3 m_\pi^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) G_E^2 \right] \\ &= \frac{e^4 E_1 E_3 \cos^2(\theta/2)}{4\pi^2 [-4E_1 E_3 \sin^2(\theta/2)]^2} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^2 G_E^2 \\ &= \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{\cos^2(\theta/2)}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \left( \frac{E_3}{E_1} \right) G_E^2. \end{aligned}$$

Finalmente, la sección eficaz para el proceso de dispersión elástica electrón-pión es

$$\left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} \right)_{e^-\pi^\pm} = \frac{\alpha_{\text{em}}^2 \cos^2(\theta/2)}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \left[ 1 + \frac{2E_1}{m_\pi} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]^{-1} G_E^2(q^2). \quad (3.51)$$

### SECCIÓN 3.3

## Relación Factor de Forma - Radio Medio Cuadrado

Mediante las ecs. (3.43, 3.51) vemos cómo es la dependencia de la sección eficaz respecto a los FF. Para comprender de mejor manera cómo se relacionan los FF con las cantidades físicas asociadas a un hadrón, usamos conceptos de la electrodinámica clásica. A través de ellos vemos que los FF son una cuantificación de la distribución espacial de una cantidad de las partículas no-puntuales, en este caso la carga eléctrica.

### 3.3.1 Derivación del radio medio-cuadrado

Partimos de la forma general de un potencial eléctrico (ver Fig. 3.3), la cual está dada por

$$V(r) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'.$$

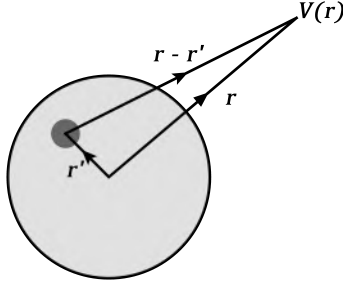


Figura 3.3: Potencial eléctrico generado por una partícula no-puntual.

Para ser el potencial de una partícula puntual debe ocurrir que  $\rho(\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}')$ . Este es un resultado conocido y básico de la electrodinámica clásica [45]. Al trabajar con distribuciones de carga, es posible expresarlas de manera proporcional a un potencial puntual. Para hacer esto, consideremos una distribución genérica de carga  $\rho(\mathbf{r}')$ , la cual produce un potencial  $\hat{\mathcal{U}}(r)$ . Suponiendo que este potencial satisface las condiciones de la amplitud de transición covariante,

$$\begin{aligned} i\hat{T}_{fi} &= \int \psi_f^\dagger(r) \hat{\mathcal{U}}(r) \psi_i(r) d^4r \\ &= \frac{e}{4\pi} \int u_f^\dagger(p_f, s) u_i(p_i, s') \left[ \int \left( \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3r' \right] e^{iq_0 t} d^3r dt, \end{aligned}$$

donde hicimos el cambio de notación  $x \rightarrow r$ . Con el cambio de variable  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  y  $dR = dr$ , tenemos

$$\begin{aligned} i\hat{T}_{fi} &= \frac{e}{4\pi} \int u_f^\dagger(p_f, s) u_i(p_i, s') \left[ \int \left( \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{R}|} \right) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3r' \right] e^{iq_0 t} d^3R dt \\ &= \frac{e}{4\pi} \int u_f^\dagger(p_f, s) u_i(p_i, s') \left[ \int \left( \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{R}|} \right) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3r' \right] e^{iq_0 t} d^3R dt \\ &= \frac{e}{4\pi} \int u_f^\dagger(p_f, s) u_i(p_i, s') \left[ \int \left( \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{R}|} \right) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} d^3r' \right] e^{iq_0 t} d^3R dt \\ &= \left[ \frac{e}{4\pi} \int u_f^\dagger(p_f, s) \left( \frac{e^{iq \cdot R}}{|\mathbf{R}|} \right) u_i(p_i, s') d^4R \right] \left[ \int \rho(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} d^3r' \right] \\ &= \left[ \int \psi_f^\dagger(R) \hat{V}(R) \psi_i(R) d^4R \right] \left[ \int \rho(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} d^3r' \right]. \end{aligned}$$

Separamos la amplitud  $\hat{T}_{fi}$  en dos términos multiplicados. El primero es la amplitud de transición covariante para una partícula puntual y el segundo es una transformada de Fourier para la densidad de carga. Definimos a los FF como una transformada de Fourier [32],

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3r, \quad (3.52)$$

en este caso, de una densidad de carga eléctrica. Omitimos la tilde de  $\mathbf{r}$  por simplificar la notación. Por otro lado, usamos  $\mathbf{q}^2$  como una medida del momento transferido. Esta es una la cantidad medible experimentalmente.

A través de esta expresión resulta más clara la analogía de la longitud de onda de de Broglie como resolución de imagen al momento de observar las partículas objetivo en procesos de dispersión elástica. La ec. (3.52) nos permite relacionar los FF con el valor esperado del *radio medio-cuadrado* (RMC) [32] como veremos más abajo. Para ello, partimos de

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{r}|\cos\theta} |\mathbf{r}|^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \rho(\mathbf{r}) e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{r}|\cos\theta} |\mathbf{r}|^2 dr d(\cos\theta) = 2\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) |\mathbf{r}|^2 \left[ \frac{e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{r}|\cos\theta}}{-i|\mathbf{q}||\mathbf{r}|} \right] \Big|_{-1}^{+1} dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) \frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{q}|} \left( \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{r}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{r}|}}{2i} \right) dr = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|} \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) |\mathbf{r}| \sin(|\mathbf{q}||\mathbf{r}|) dr. \end{aligned}$$

Encontramos que la ec. (3.52) puede ser reescrita como

$$F(\mathbf{q}^2) = \frac{4\pi}{\mathbf{q}} \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \sin(\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

donde dejamos implícito que tratamos con módulos de vectores. Como último paso, consideramos la densidad de carga eléctrica como una densidad de probabilidad  $\rho(\mathbf{r}) = \psi^*\psi$  y hacemos un desarrollo en serie de Taylor para el seno. Así,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= \frac{4\pi}{\mathbf{q}} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \sin(\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{\mathbf{q}} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\mathbf{q}\mathbf{r})^{2n+1} \right] d\mathbf{r} \\ &= \frac{4\pi}{\mathbf{q}} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \left[ \frac{(\mathbf{q}\mathbf{r})^1}{1!} - \frac{(\mathbf{q}\mathbf{r})^3}{3!} + \frac{(\mathbf{q}\mathbf{r})^5}{5!} - \frac{(\mathbf{q}\mathbf{r})^7}{7!} + \dots \right] d\mathbf{r} \\ &= \int \rho(\mathbf{r}) (4\pi \mathbf{r}^2 d\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{q}^2}{6} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}^2 (4\pi \mathbf{r}^2 d\mathbf{r}) + \mathcal{O}(\mathbf{q}^4) \\ &= \int \psi^*\psi d^3\mathbf{r} - \frac{\mathbf{q}^2}{6} \int \psi^* \mathbf{r}^2 \psi d^3\mathbf{r} + \mathcal{O}(\mathbf{q}^4) = 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{6} \langle \mathbf{r}^2 \rangle + \mathcal{O}(\mathbf{q}^4). \end{aligned}$$

Llegamos a que

$$F(\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{6} \langle \mathbf{r}^2 \rangle + \mathcal{O}(\mathbf{q}^4).$$

Nos quedamos únicamente con el primer término del desarrollo en serie de Taylor debido a que, al derivar la función respecto de  $\mathbf{q}^2$  y hacer que  $\mathbf{q}^2 = \mathbf{0}$ , se recupera  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ . Despejando el RMC, concluimos que

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = -6 \left[ \frac{dF(\mathbf{q}^2)}{d\mathbf{q}^2} \right] \Big|_{\mathbf{q}^2=0}. \quad (3.53)$$

Esta es la relación FF-RMC para el caso de la carga eléctrica. Dado que teóricamente  $F(0) = 1$ , podemos extender la ec. (3.53) de tal manera que

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle_{\text{eléc}} = -6 \left[ \frac{d \ln F(\mathbf{Q}^2)}{d\mathbf{Q}^2} \right] \Big|_{\mathbf{Q}^2=0}, \quad (3.54)$$

y así, normalizar respecto a las fluctuaciones alrededor del valor de la función en cero. Ahora, hacemos el cambio de notación  $\mathbf{q}^2 \rightarrow \mathbf{Q}^2$ , donde  $\mathbf{Q}^2$  representa a la componente cinématica, o espacial, del momento transferido. Recordemos que la ec. (3.52) tiene como argumento de la exponencial un producto punto de las componentes espaciales de la 4-posición y el 4-momento. Además, para momentos transferidos poco energéticos se cumple  $q^2 \approx -\mathbf{Q}^2$  [32].

### 3.3.2 Mediciones experimentales del FFE de los hadrones

Como se mencionó en la Introducción, el estudio experimental del FFE del protón se remonta a los años 50 del siglo XX [11]. Actualmente, contamos con mediciones experimentales más precisas y cercanas al valor de  $\mathbf{Q}^2 = 0 \text{ GeV}^2$  que las hechas entre los años 1970-1980 [13, 14, 15], siendo las dos mediciones más robustas hechas en 2010 en el Mainz Microtron (MAMI) de la Universidad Johannes Gutenberg de Maguncia [46] y en 2020 en la Instalación del Acelerador Nacional Thomas Jefferson (JLab) [47], ambas para el proceso de dispersión elástica electrón-protón en el sistema de referencia de laboratorio. El experimento hecho en JLab obtuvo dos conjuntos de mediciones: el primero con una energía inicial para el haz de  $E_1 = 1101 \text{ MeV}$  con un total de 33 puntos, mientras que el segundo fue hecho una energía inicial para el haz de  $E_1 = 2143 \text{ MeV}$  con un total de 38 puntos.

| Hadrón           | Función           | No. de puntos | $\mathbf{Q}_{\text{mín}}^2 [\text{GeV}^2]$ | $\mathbf{Q}_{\text{máx}}^2 [\text{GeV}^2]$ |
|------------------|-------------------|---------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Protón ( $p^+$ ) | $F_{p-1.1}(Q^2)$  | 33            | 0.000215                                   | 0.015468                                   |
| Pión ( $\pi^-$ ) | $F_{\pi-84}(Q^2)$ | 30            | 0.015                                      | 0.119                                      |

Tabla 3.1: Número de puntos y rango de momento transferido para los experimentos de dispersión elástica electrón-protón [47] y electrón-pión [48].

Los datos experimentales tomados a  $E_1 = 1.1 \text{ GeV}$  (ver Fig. 3.4) cuentan con el dominio de momento transferido más próximo a cero disponible:  $0.000215 \leq \mathbf{Q}^2/[\text{GeV}^2] \leq 0.015468$ . Usamos este conjunto de datos experimentales para nuestra estimación numérica del radio de carga del protón. Una acotación importante es que estas mediciones experimentales cuentan con dos fuentes de incertidumbre: el error estadístico, asociado a la naturaleza estocástica del proceso y posible de reducir aumentando el número de eventos medidos, y el error sistemático, asociado a los instrumentos de medida y algunos controlables mediante un correcto diseño del arreglo experimental. Para nuestros cálculos, nos limitamos a tomar el error estadístico.

En el caso del pión cargado, las mediciones experimentales para el FFE más robustas y ampliamente citadas fueron hechas en 1984 y 1986 por la colaboración NA7 del CERN [48, 49]. Ambas mediciones fueron realizadas con una energía inicial para el haz de  $E_1 = 300$  GeV, en el sistema de referencia de laboratorio y utilizando el  $\pi^-$  para el haz. La primera medición experimental cuenta con 30 puntos, mientras que la segunda medición cuenta con 45 puntos. Ambas mediciones se realizaron desde el mismo valor inicial para el momento transferido ( $Q_{\min}^2$ ), pero las mediciones hechas en 1986 cuentan con una incertidumbre mayor. Para nuestros cálculos numéricos, usamos las mediciones de 1984 (ver Fig. 3.5). Etiquetamos los conjuntos de datos experimentales que hemos seleccionado previamente para el FFE del protón y pión como “ $p$ -1.1” y “ $\pi$ -84”, respectivamente (ver Tabla 3.1).

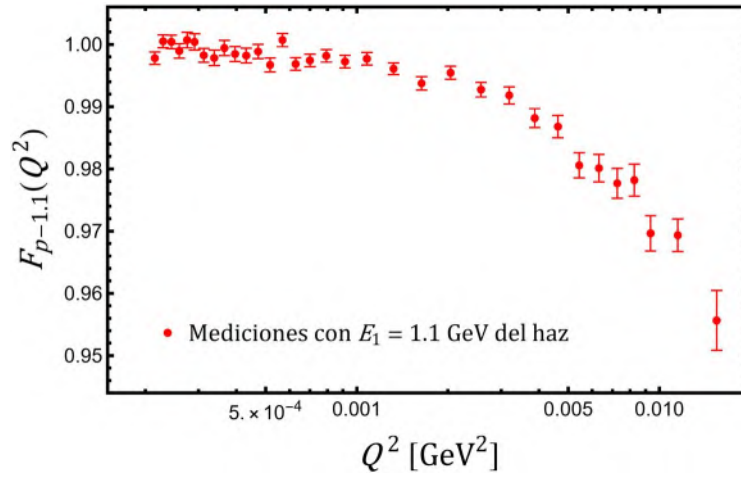


Figura 3.4: Mediciones experimentales del FFE del protón hechas mediante la dispersión elástica electrón-protón, con una energía para el haz de  $E_1 = 1.1$  GeV [47].

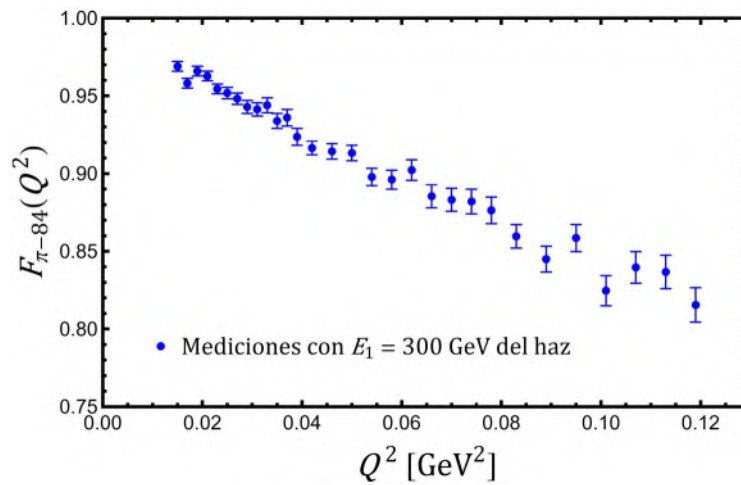


Figura 3.5: Mediciones experimentales del FFE del pión hechas mediante la dispersión elástica electrón-pión, con una energía para el haz de  $E_1 = 300$  GeV [48].

---

# Capítulo 4

## El Tensor de Energía-Momento

---

En este Capítulo procedemos a desarrollar el concepto de tensor de energía-momento para los hadrones, encontrar el significado físico de los FF que lo constituyen y derivar sus radios asociados.

### SECCIÓN 4.1

#### Derivación del tensor de energía-momento

El *tensor de energía-momento* (TEM) permite asociar FF a cantidades como el espín o la masa [20]. La construcción de este objeto matemático se puede realizar de varias maneras. En este trabajo se utiliza la derivación propuesta en 1966 por H. Pagels [20]. Antes de pasar a la construcción del TEM, se explican las ideas que le dan base y se discute su interpretación física, tanto a nivel global como de sus constituyentes.

#### 4.1.1 Base teórica del TEM

El concepto de *masa* aparece de dos maneras fundamentales en la física. Primero, con un perfil dinámico, el cual se entiende como la medida en que un sistema físico responde

a la influencia de fuerzas externas y aparece apropiadamente en las ecuaciones del movimiento de Newton. La segunda forma en que la masa aparece es como la medida de la intensidad de una fuente de campo gravitacional. Para cualquier sistema físico, estas dos formas de considerar a la masa deben ser equivalentes [20]. Como vimos en el Capítulo 3, la electrodinámica cuántica nos dice que la 4-corriente de una partícula actúa como una fuente de campo electromagnético (ver ec. (3.26)). La 4-corriente  $j_{p,\pi}^\mu(x)$ , además de proporcionar información sobre la carga, proporciona información sobre el campo potencial  $A_{p,\pi}^\mu(x)$  asociado al hadrón. De manera similar, podemos suponer que la estructura mecánica de una partícula está dada por alguna 4-corriente asociada a un campo gravitacional [20]. Esta corriente está dada por el TEM. La definición formal del TEM, para cualquier sistema con un campo cuantizado, nos la da el *Teorema de Noether* [50] a partir del Lagrangiano,

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (4.1)$$

donde resulta evidente que se trata de un tensor de rango-2, cuyos índices  $\{\mu, \nu\} = 0, 1, 2, 3$ . Además, el TEM debe respetar la conservación de la corriente,

$$\partial^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0. \quad (4.2)$$

A diferencia del caso electromagnético, aprender sobre la estructura dinámica interna de los hadrones es especialmente difícil, dado lo débil que es la interacción gravitacional a escala cuántica. Idealmente, así como usamos fotones mediadores para conocer la distribución de carga eléctrica y momento magnético en los hadrones, se deberían usar *gravitones* para el estudio del TEM y sus FF, que a partir de ahora englobaremos con el término *Factores de Forma Gravitacionales* (FFG). Pero el gravitón es, hasta el momento, una partícula hipotética, sin muchas posibilidades de ser detectada. Sin embargo, en años recientes ha sido posible acceder a algunas mediciones vinculadas con el TEM mediante la *dispersión de Compton virtual profunda* (DCVP)  $eN \rightarrow e'N'\gamma$  [51, 52, 53, 54]. Estos análisis suelen apoyarse en el modelo teórico conocido como *distribuciones generalizadas de partones* (DGP) [54, 55, 56]. La predilección por este modelo viene de su versatilidad al momento de trabajar con reacciones de exclusión dura: interacciones a corta distancia entre números pequeños de quarks y gluones en procesos de dispersión [56, 57], entre las que destaca la DCVP. Más allá de estos primeros acercamientos experimentales, el TEM ha sido estudiado mediante simulaciones numéricas de lQCD [58, 59]. Se destaca de estas simulaciones, enfocadas en el protón y pión, la capacidad de obtener valores estimados para los FFG en función del momento transferido, como si fueran mediciones experimentales. Además, se han modelado los FFG a través de los llamados *métodos de funciones de Schwinger en el continuo* (MsSC) [60, 61], particularmente para el pión, kaón y protón. También, se han tenido acercamientos mediante las amplitudes de distribución generalizada extraídas del proceso  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$  [62].

Si bien la ec. (4.1) nos proporciona una fórmula directa para derivar el TEM,

necesitamos usar el Lagrangiano de la cromodinámica cuántica no-perturbativa para calcularlo. Tomamos un camino más sencillo para derivar el TEM a partir de los resultados obtenidos en el Capítulo 3, en función de  $\gamma^\mu$ ,  $q^\mu$  y  $P^\mu$ .

### 4.1.2 TEM para partículas de espín- $\frac{1}{2}$

Tomamos como punto de partida la forma general de la 4-corriente electromagnética para una partícula de espín- $\frac{1}{2}$  no puntual, cuyo estado inicial es  $u(p_i, s')$ , con momento inicial  $p_i$ , y cuyo estado final es  $u(p_f, s)$ , con momento final  $p_f$ ,

$$j_{1/2}^\mu(x) = \pm e \bar{u}(p_f, s) [\mathcal{F}_a(q^2)\gamma^\mu + \mathcal{F}_b(q^2)P^\mu - \mathcal{F}_c(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu] u(p_i, s') e^{-iq \cdot x},$$

donde  $P^\mu = p_i^\mu + p_f^\mu$  y  $q^\mu = p_i^\mu - p_f^\mu$ . Por la ec. (3.29), sabemos que los tres términos son linealmente dependientes. Podemos dejar alguno expresado de manera implícita en función de los otros dos. Por simplicidad, dejamos a los términos del tipo  $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$  implícitos. Además de estos tres términos, debemos incluir a  $q^\mu$ , pues ahora es pertinente tener en consideración todos los tensores de rango-1 dado que construimos un nuevo objeto. Todas las combinaciones posibles de tensores de rango-1 para el TEM se muestran en la Tabla 4.1. Notemos que el producto de matrices- $\gamma$  se puede separar en una parte simétrica y antisimétrica, usando la ec. (8.18). Esto nos deja con diez términos posibles. Antes de proceder con el cálculo, recordemos las siguientes identidades [34, 35]:  $\not{p}_i u(p_i, s') = m u(p_i, s')$ ,  $\bar{u}(p_f, s) \not{p}_f = \bar{u}(p_f, s) m$ ,  $\bar{u}(p_f, s) \not{q} u(p_i, s') = \bar{u}(p_f, s) (\not{p}_i - \not{p}_f) u(p_i, s') = \bar{u}(p_f, s) (m - m) u(p_i, s') = 0$ ,  $(q^2/2) \neq 0$  y  $(q \cdot P) = 0$ .

|              | $\gamma^\nu$            | $P^\nu$            | $q^\nu$            |
|--------------|-------------------------|--------------------|--------------------|
| $\gamma^\mu$ | $\gamma^\mu \gamma^\nu$ | $\gamma^\mu P^\nu$ | $\gamma^\mu q^\nu$ |
| $P^\mu$      | $P^\mu \gamma^\nu$      | $P^\mu P^\nu$      | $P^\mu q^\nu$      |
| $q^\mu$      | $q^\mu \gamma^\nu$      | $q^\mu P^\nu$      | $q^\mu q^\nu$      |

Tabla 4.1: Combinaciones posibles de tensores de rango-1 para el TEM.

Definimos el TEM para partículas de espín- $\frac{1}{2}$  como [20]

$$T_{1/2}^{\mu\nu}(x) = \bar{u}(p_f, s) \Gamma^{\mu\nu} u(p_i, s') e^{-iq \cdot x}, \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu} = & \mathcal{G}_1(q^2)\gamma^\mu P^\nu + \mathcal{G}_2(q^2)P^\mu \gamma^\nu + \mathcal{G}_3(q^2)\gamma^\mu q^\nu + \mathcal{G}_4(q^2)q^\mu \gamma^\nu \\ & + \mathcal{G}_5(q^2)P^\mu q^\nu + \mathcal{G}_6(q^2)q^\mu P^\nu + \mathcal{G}_7(q^2)g^{\mu\nu} + \mathcal{G}_8(q^2)i\sigma^{\mu\nu} \\ & + \mathcal{G}_9(q^2)P^\mu P^\nu + \mathcal{G}_{10}(q^2)q^\mu q^\nu, \end{aligned}$$

con las  $\mathcal{G}_i(q^2)$  funciones escalares, dependientes del momento transferido, a determinar. Como indica la ec. (4.2), el TEM se debe conservar [20]. Así, la ec. (4.3) debe cumplir

$$q_\mu T_{1/2}^{\mu\nu}(x) = q_\nu T_{1/2}^{\mu\nu}(x) = 0.$$

Proponemos el siguiente método de trabajo: agrupamos los términos de perfil semejante y simplificamos la notación:  $u(p_i, s') = u$  y  $\bar{u}(p_f, s) = \bar{u}$ . Denotamos las parejas haciendo referencia al número de las funciones  $\mathcal{G}_i(q^2)$ .

- Para 1 y 2:

$$\begin{aligned} q_\mu [\bar{u}(\mathcal{G}_1 \gamma^\mu P^\nu + \mathcal{G}_2 P^\mu \gamma^\nu)u] &= \bar{u}[\mathcal{G}_1 \not{P}^\nu + \mathcal{G}_2 (q \cdot P) \gamma^\nu]u = \bar{u}(\mathcal{G}_1 \not{P}^\nu)u \\ &= \mathcal{G}_1 (\bar{u} \not{P} u) P^\nu = 0. \end{aligned}$$

Es claro que lo mismo ocurre para  $q_\nu$ , pues la única diferencia entre los términos son los superíndices intercambiados. Al ser los índices la única diferencia, podemos decir que

$$\mathcal{G}_1(q^2) = \mathcal{G}_2(q^2) \neq 0.$$

- Para 3 y 4:

$$\begin{aligned} q_\mu [\bar{u}(\mathcal{G}_3 \gamma^\mu q^\nu + \mathcal{G}_4 q^\mu \gamma^\nu)u] &= \bar{u}(\mathcal{G}_3 \not{q}^\nu + \mathcal{G}_4 q^2 \gamma^\nu)u = \mathcal{G}_3 (\bar{u} \not{q} u) q^\nu + \mathcal{G}_4 q^2 (\bar{u} \gamma^\nu u) \\ &= \mathcal{G}_4 q^2 (\bar{u} \gamma^\nu u). \end{aligned}$$

Como el término restante no se anula, debe ocurrir que  $\mathcal{G}_4 = 0$ . Utilizar  $q_\nu$  nos lleva a que  $\mathcal{G}_3 = 0$ . Así, decimos que

$$\mathcal{G}_3(q^2) = \mathcal{G}_4(q^2) = 0.$$

- Para 5 y 6:

$$\begin{aligned} q_\mu [\bar{u}(\mathcal{G}_5 P^\mu q^\nu + \mathcal{G}_6 q^\mu P^\nu)u] &= \bar{u}[\mathcal{G}_5 (q \cdot P) q^\nu + \mathcal{G}_6 q^2 P^\nu]u = \bar{u} \mathcal{G}_6 q^2 P^\nu u \\ &= \mathcal{G}_6 q^2 P^\nu \bar{u} u = \mathcal{G}_6 q^2 P^\nu 2m \delta_{ss'}. \end{aligned}$$

Recordando que  $\delta_{ss'}$  denota la orientación de los espines. De manera general, ocurre que  $\mathcal{G}_6 = 0$ . Al usar  $q_\nu$  llegaremos a  $\mathcal{G}_5 = 0$ . Así,

$$\mathcal{G}_5(q^2) = \mathcal{G}_6(q^2) = 0.$$

- Para 7 y 10:

$$\begin{aligned} q_\mu [\bar{u}(\mathcal{G}_7 g^{\mu\nu} + \mathcal{G}_{10} q^\mu q^\nu)u] &= \bar{u}(\mathcal{G}_7 q^\nu + \mathcal{G}_{10} q^2 q^\nu)u = \bar{u}(\mathcal{G}_7 + \mathcal{G}_{10} q^2) q^\nu u \\ &= (\mathcal{G}_7 + \mathcal{G}_{10} q^2) q^\nu 2m \delta_{ss'} = 0. \end{aligned}$$

Es evidente que usar  $q_\nu$  dará el mismo resultado. Así,

$$\mathcal{G}_7(q^2) = -\mathcal{G}_{10}(q^2) q^2 \quad \text{con} \quad \mathcal{G}_{10}(q^2) \neq 0.$$

- Para 8 y 9:

$$q_\mu [\bar{u}(\mathcal{G}_8 i\sigma^{\mu\nu})u] = \bar{u}(\mathcal{G}_8 i\sigma^{\mu\nu} q_\mu)u = -\bar{u}(\mathcal{G}_8 i\sigma^{\nu\mu} q_\mu)u = -\mathcal{G}_8 [\bar{u}(i\sigma^{\nu\mu} q_\mu)u].$$

Sabemos que el término entre corchetes es distinto de cero, pues forma parte de la descomposición de Gordon. Usar  $q_\nu$  nos conduce al mismo resultado. Entonces,

$$\mathcal{G}_8(q^2) = 0.$$

Ahora,

$$q_\mu [\bar{u}(\mathcal{G}_9 P^\mu P^\nu)u] = \bar{u}[\mathcal{G}_9(q \cdot P)p^\nu]u = 0.$$

Obtendremos el mismo resultando usando  $q_\nu$ . Así,

$$\mathcal{G}_9(q^2) \neq 0.$$

Hemos encontrado que

$$\Gamma^{\mu\nu} = \mathcal{G}_a(q^2)(\gamma^\mu P^\nu + P^\mu \gamma^\nu) + \mathcal{G}_b(q^2)(q^\mu q^\nu - q^{\mu\nu} q^2) + \mathcal{G}_c(q^2)P^\mu P^\nu.$$

Usando la descomposición de Gordon en el primer término, podemos realizar la siguiente separación,

$$\begin{aligned} \bar{u}(\gamma^\mu P^\nu + P^\mu \gamma^\nu)u &= \frac{1}{2m} \bar{u}[(P^\mu - i\sigma^{\mu\alpha} q_\alpha)P^\nu + P^\mu(P^\nu - i\sigma^{\nu\alpha} q_\alpha)]u \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}(P^\mu P^\nu - i\sigma^{\mu\alpha} q_\alpha P^\nu + P^\mu P^\nu - iP^\mu \sigma^{\nu\alpha} q_\alpha)u \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}[2P^\mu P^\nu - i(P^\mu \sigma^{\nu\alpha} + \sigma^{\mu\alpha} P^\nu)q_\alpha]u. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Gamma^{\mu\nu} = \left( \mathcal{G}_c + \frac{1}{m} \mathcal{G}_a \right) P^\mu P^\nu - \frac{i}{2m} \mathcal{G}_a (P^\mu \sigma^{\nu\alpha} + \sigma^{\mu\alpha} P^\nu) q_\alpha + \mathcal{G}_b (q^\mu q^\nu - q^{\mu\nu} q^2).$$

Concluimos que el TEM para partículas de espín- $\frac{1}{2}$  está dado por [59]

$$T_{1/2}^{\mu\nu}(x) = \bar{u}(p_f, s) \left[ A(q^2) \frac{P^\mu P^\nu}{m} + J(q^2) \frac{iP^{\{\mu} \sigma^{\nu\}\alpha} q_\alpha}{2m} + D(q^2) \frac{q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2}{4m} \right] u(p_i, s') e^{-iq \cdot x}, \quad (4.4)$$

donde  $P^{\{\mu} \sigma^{\nu\}\alpha} = P^\mu \sigma^{\nu\alpha} + \sigma^{\mu\alpha} P^\nu$  y los FF son

$$A(q^2) = \mathcal{G}_a(q^2) + m\mathcal{G}_c(q^2), \quad J(q^2) = -\mathcal{G}_a(q^2) \quad \text{y} \quad D(q^2) = 4m\mathcal{G}_b(q^2).$$

Los factores de división vienen tanto de la descomposición de Gordon,  $1/2m$ , como del término  $q^2/2$  que típicamente aparece en los cálculos.

### 4.1.3 TEM para partículas de espín-0

Recordando que la 4-corriente para las partículas de espín-0 es

$$j_0^\mu(x) = \pm e [\mathcal{F}_a(q^2)P^\mu] e^{-iq \cdot x},$$

donde  $P^\mu$  y  $q^\mu$  tienen el mismo significado que en el caso anterior. El cálculo del TEM para partículas de espín-0 es significativamente más sencillo que el hecho para la ec. (4.4). Solo debemos considerar los productos de  $P^\mu$  y  $q^\mu$  que aparecen en la Tabla 4.1, junto con la métrica  $g^{\mu\nu}$ .

El TEM para partículas de espín-0 lo definimos como [20]

$$T_0^{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\mu\nu} e^{-iq \cdot x}, \quad (4.5)$$

donde

$$\Gamma^{\mu\nu} = \mathcal{G}_1(q^2)P^\mu q^\nu + \mathcal{G}_2(q^2)q^\mu P^\nu + \mathcal{G}_3(q^2)P^\mu P^\nu + \mathcal{G}_4(q^2)q^\mu q^\nu + \mathcal{G}_5(q^2)g^{\mu\nu}.$$

Sabemos que  $T_0^{\mu\nu}(x)$  debe satisfacer

$$q_\mu T_0^{\mu\nu}(x) = q_\nu T_0^{\mu\nu}(x) = 0.$$

Reutilizamos el método de trabajo previo: usamos las etiquetas de las funciones  $\mathcal{G}_i(q^2)$  para indicar los términos con que estamos trabajando.

- Para 1 y 2:

$$q_\mu [\mathcal{G}_1 P^\mu q^\nu + \mathcal{G}_2 q^\mu P^\nu] = \mathcal{G}_1 (q \cdot P) q^\nu + \mathcal{G}_2 q^2 P^\nu = \mathcal{G}_2 q^2 P^\nu.$$

Esto implica que  $\mathcal{G}_2(q^2) = 0$ . Usando  $q_\nu$ , obtenemos el mismo resultado para  $\mathcal{G}_1(q^2)$ . Concluimos que

$$\mathcal{G}_1(q^2) = \mathcal{G}_2(q^2) = 0.$$

- Para 3:

$$q_\mu [\mathcal{G}_3 P^\mu P^\nu] = \mathcal{G}_3 (q \cdot P) P^\nu = 0.$$

Se obtiene el mismo resultado al usar  $q_\nu$ . Concluimos que

$$\mathcal{G}_3(q^2) \neq 0.$$

- Para 4 y 5:

$$q_\mu [\mathcal{G}_4 q^\mu q^\nu + \mathcal{G}_5 g^{\mu\nu}] = \mathcal{G}_4 q^2 q^\nu + \mathcal{G}_5 q^\nu = (\mathcal{G}_4 q^2 + \mathcal{G}_5) q^\nu = 0.$$

Es claro que lo mismo pasa con  $q_\nu$ . Podemos concluir que

$$\mathcal{G}_5(q^2) = -q^2 \mathcal{G}_4(q^2) \quad \text{con} \quad \mathcal{G}_4(q^2) \neq 0.$$

Hemos encontrado que [20]

$$\Gamma^{\mu\nu} = \mathcal{G}_a(q^2) P^\mu P^\nu + \mathcal{G}_b(q^2) (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2),$$

y por tanto, decimos que el TEM para partículas de espín-0 está dado por [58]

$$T_0^{\mu\nu}(x) = \left[ 2P^\mu P^\nu A(q^2) + \frac{1}{2} (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) D(q^2) \right] e^{-iq \cdot x}, \quad (4.6)$$

donde los FF son

$$\mathcal{G}_a(q^2) = 2A(q^2) \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_b(q^2) = \frac{1}{2} D(q^2).$$

Antes de pasar al análisis de los FFG, es necesario hacer un comentario referente a las ecs. (4.4, 4.6). La construcción más sofisticada del TEM parte de considerar las contribuciones de los quarks  $q$  y gluones  $g$  para el TEM total [56, 63]. Esto significa que cada elemento ( $a = q, g$ ) que conforma al hadrón tiene su propio TEM. El TEM total está dado por

$$T^{\mu\nu} = \sum_q T_q^{\mu\nu} + T_g^{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

donde, para el caso de hadrones de espín- $\frac{1}{2}$ , el TEM para cada especie de partón es

$$T_a^{\mu\nu}(x) = \bar{u} \left[ A_a(q^2) \frac{P^\mu P^\nu}{m} + J_a(q^2) \frac{iP^{\{\mu} \sigma^{\nu\}\alpha} q_\alpha}{2m} + D_a(q^2) \frac{q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2}{4m} + m \bar{c}_a(q^2) g^{\mu\nu} \right] u e^{-iq \cdot x},$$

mientras que, para el caso de hadrones de espín-0,

$$T_a^{\mu\nu}(x) = \left[ 2P^\mu P^\nu A_a(q^2) + \frac{1}{2} (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) D_a(q^2) + 2m^2 \bar{c}_a(q^2) g^{\mu\nu} \right] e^{-iq \cdot x}.$$

Es claro que en ambos TEM aparece un nuevo FF,  $\bar{c}_a(q^2)$  [63]. Esta nueva función cuantifica la no-conservación de las partes separadas del TEM de los quarks y gluones, que está relacionada con la llamada *anomalía de traza* en la CDC [64] y con cuestiones matemáticas, como la dependencia con el esquema de renormalización y la escala [65]. En otras palabras, sólo la suma de todas las contribuciones al TEM, ec. (4.7), es una cantidad conservada [64]. Así, tenemos la restricción

$$\sum_a \bar{c}_a(q^2) = 0. \quad (4.8)$$

Al estudiar el TEM total de los hadrones, sin apelar a su construcción como una combinación lineal de los TEM para quarks y gluones, encontramos que los términos proporcionales a  $\bar{c}_a(q^2)$  se anulan. Esto sucede en congruencia con la extracción experimental de los FFG, donde únicamente se tiene acceso al FF total. Las contribuciones individuales de cada tipo de partón son dependientes de la escala (autointeracciones) y esquema de renormalización, y por tanto no son directamente medibles [64].

## SECCIÓN 4.2

## Los factores de forma gravitacionales

Procedemos a encontrar el significado físico de los FFG de las ecs. (4.4, 4.6), así como sus restricciones y derivar los RMC.

### 4.2.1 Significado físico de los FFG

Es necesario señalar que los términos tensoriales a los que están asociados los FFG nos dan una idea del significado de cada uno, pues es claro que tanto  $A(q^2)$  como  $D(q^2)$ , que aparecen en ambos TEM, multiplican a estructuras tensoriales similares que están bien diferenciadas.

Comenzamos por el estudio de  $A(q^2)$  o FFA, particularmente para la ec. (4.4). Consideremos el caso donde  $p_i^\mu = p_f^\mu = p^\mu$ , esto implica que  $P^\mu = 2p^\mu$  y  $q^\mu = 0$ , que a su vez nos lleva a  $q^2 = 0$  y la ec. (4.4) toma la forma [20]

$$\begin{aligned} T_{1/2}^{\mu\nu}(x; p) &= \bar{u}(p, s) \left[ A(0) \frac{4p^\mu p^\nu}{m} + J(0) \frac{ip^{\{\mu} \sigma^{\nu\}\alpha}(0)}{m} + D(0) \frac{(0)(0) - g^{\mu\nu}(0)}{4m} \right] u(p, s') e^{-iq \cdot x} \\ &= \bar{u}(p, s) \left[ A(0) \frac{4p^\mu p^\nu}{m} \right] u(p, s') e^{-iq \cdot x}. \end{aligned}$$

Suponemos que  $p^\mu = \frac{1}{2}k^\mu$ , donde la partícula está en reposo,  $k^\mu = (m, \mathbf{0})$ . Que el 3-momento transferido sea nulo,  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , se puede interpretar como una conservación del momento inicial-final, la cual se deja implícita en el argumento  $q \cdot x = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}$  de la exponencial. Ahora, podemos hacer la equivalencia  $T_{1/2}^{\mu\nu}(x; \mathbf{p} = \mathbf{0}) \equiv T_{1/2}^{00}(x; \mathbf{0})$ , pues sólo la componente-00 del TEM, que denota a la energía, es relevante. Así [20],

$$T_{1/2}^{00}(x; \mathbf{0}) = \bar{u}(p, s) [A(0)m] u(p, s') e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}.$$

Con este resultado, llevamos a cabo la siguiente integral,

$$\begin{aligned} \int T_{1/2}^{00}(x; \mathbf{0}) d^3x &= \int \bar{u}(p, s) [A(0)m] u(p, s') e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d^3x \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \bar{u}(p, s) [A(0)m] u(p, s'). \end{aligned}$$

Recordando la expresión para el *braket* del Hamiltoniano de una partícula en reposo,  $\langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle = \langle \Omega | m | \Omega \rangle$ , donde  $|\Omega\rangle$  es la función de onda de la partícula, tomamos el caso donde  $|\Omega\rangle \propto u(p, s')$  y de este modo

$$\langle \Omega | m | \Omega \rangle = \langle \Omega | \hat{H} | \Omega \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \bar{u}(p, s) [A(0)m] u(p, s'),$$

que nos conduce a la restricción [56]

$$A(0) = 1. \quad (4.9)$$

El procedimiento es análogo en el caso del TEM de partículas de espín-0. Además de la restricción para el FFA, encontramos que el Hamiltoniano de una partícula en reposo se puede escribir como [56]

$$\hat{H} = \int T_s^{00}(x) d^3x, \quad (4.10)$$

donde el subíndice  $s$  indica que aplica para partículas de espín- $\frac{1}{2}$  y espín-0 por igual.

La relación del FFA con la masa de la partícula también puede ser inferida analizando el producto tensorial  $P^\mu P^\nu$ . Estos tensores cuantifican el momento total de la partícula. Al considerar los estados inicial y final iguales, y dejar la partícula inalterada, si el estado conservado es el reposo, entonces la cantidad conservada es la masa. Más aún, al no haber momento transferido, recuperamos la perspectiva de una partícula puntual. El tratamiento de la masa es, en el aspecto cualitativo, análogo al de la carga eléctrica.

Para el caso de  $J(q^2)$  o FFJ, resulta esclarecedor que no aparezca en la ec. (4.6). Si vemos el término que multiplica en la ec. (4.4), notamos que es la parte del TEM que contiene la dinámica del espín. Siguiendo la lógica ya empleada con la carga eléctrica y la masa, el FFJ cuantifica cómo se distribuye el espín de la partícula [56]. Dado que tratamos con una partícula de espín- $\frac{1}{2}$ , para el límite  $q^2 = 0$ , debe ocurrir que

$$J(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

El razonamiento empleado para la restricción de FFJ es meramente cualitativo y no profundiza en los detalles cuantitativos de su derivación. Esto debido a que, así como nos enfocamos en el FFE del protón y pión, nos limitamos al estudio de los FFG que comparten las ecs. (4.4, 4.6). Un análisis profundo de la construcción del FFJ y sus restricciones se puede realizar mediante el uso del modelo de partones [66].

Finalmente, en el estudio de  $D(q^2)$  o FFD, es crucial notar que el término al que multiplica en ambas ecs. (4.4, 4.6) depende enteramente del 4-momento transferido. A diferencia de los FF ya mencionados, el valor del FFD para  $q^2 = 0$  no está restringido de manera global por ningún supuesto teórico. Este valor es referenciado como el *término-D*, dado por  $D = D(0)$  [67]. Todos los hadrones, independientemente de su espín, poseen un término- $D$  que debe ser estimado experimentalmente. Esta medición puede ser hecha mediante la DCVP [52, 53, 56]. El término- $D$  no está relacionado con alguna propiedad *externa* de las partículas, como la masa o el espín, lo está con las llamadas *fuerzas internas*. El término- $D$  usualmente es llamado “*la última propiedad global desconocida*” [63]. Para profundizar más en el significado físico y restricciones del término- $D$ , debemos desarrollar una serie de cálculos a partir del TEM [63].

## 4.2.2 TEM estático y tensor de tensión

Para continuar apropiadamente con los cálculos, consideramos el marco de referencia de Breit [56, 63], en el cual no hay energía transferida,  $q^0 = 0$ , los momentos inicial y final se redefinen como  $p_i = (P - \frac{1}{2}q)$ ,  $p_f = (P + \frac{1}{2}q)$ , donde  $P = (E, \mathbf{0})$  y  $q = (0, \mathbf{q})$ . La redefinición de los 4-momentos nos conduce a

$$m^2 = p_{i,f}^2 = \left(P \mp \frac{1}{2}q\right)^2 = P^2 \mp (q \cdot P) + \frac{q^2}{4} = E^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{4},$$

de modo que

$$E^2 = m^2 + \frac{\mathbf{q}^2}{4}. \quad (4.12)$$

Además,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f, s)u(p_i, s') &= (E + m) \left( \varphi_s^\dagger, -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f}{E + m} \varphi_s^\dagger \right) \begin{pmatrix} \varphi_{s'} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{E + m} \varphi_{s'} \end{pmatrix} \\ &= (E + m) \left[ \varphi_s^\dagger \varphi_{s'} - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i)}{(E + m)^2} \varphi_s^\dagger \varphi_{s'} \right] \\ &= (E + m) \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})^2}{(E + m)^2} \right] \varphi_s^\dagger \varphi_{s'} = \frac{1}{(E + m)} \left[ (E + m)^2 + \frac{\mathbf{q}^2}{4} \right] \delta_{ss'} \\ &= \frac{1}{(E + m)} \left[ E^2 + 2mE + m^2 + \frac{\mathbf{q}^2}{4} \right] \delta_{ss'} \\ &= \frac{1}{(E + m)} [E^2 + 2mE + E^2] \delta_{ss'} = \frac{2E}{(E + m)} (E + m) \delta_{ss'}, \end{aligned}$$

y por tanto, para el marco de referencia de Breit,

$$\bar{u}(p_f, s)u(p_i, s') = 2E \delta_{ss'}. \quad (4.13)$$

Teniendo bien definido el marco de Breit, introducimos el *TEM estático* [63],

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{r}, s) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} T_s^{\mu\nu}(0), \quad (4.14)$$

cuyas componentes se pueden interpretar como la distribución espacial, promediada en el tiempo, de los quarks y gluones.

Ahora, obtendremos las componentes de la ec. (4.4), en el marco de Breit, a introducir en la ec. (4.14). Comencemos por la componente-00. Primero, para el término del FFA tenemos

$$\frac{P^0 P^0}{m} = \frac{E^2}{m} = m \frac{E^2}{m^2} = m \left( 1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \right),$$

y al contraer los espinores, llegamos a

$$\bar{u} \left[ \frac{P^0 P^0}{m} \right] u = 2mE \left( 1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \right) \delta_{ss'}. \quad (4.15)$$

Ahora, para el término del FFJ,

$$\frac{i}{2m} P^{\{0} \sigma^{0\} \alpha} q_\alpha = \frac{i}{2m} (P^0 \sigma^{0\alpha} + \sigma^{0\alpha} P^0) q_\alpha = \frac{iE}{m} \sigma^{0\alpha} q_\alpha,$$

donde  $\alpha = 1, 2, 3$  y por tanto

$$\begin{aligned} \sigma^{0\alpha} &= \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \gamma^0) = \frac{i}{2} \left[ \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\alpha \\ -\sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\alpha \\ -\sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\alpha \\ \sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^\alpha \\ -\sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix} \right] = i\sigma^\alpha \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{i}{2m} P^{\{0} \sigma^{0\} \alpha} q_\alpha = -\frac{E}{m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos qué pasa con la matriz resultante al contraerla con los espinores,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f, s) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} u(p_i, s') &= (E + m) \left( \varphi_s^\dagger, -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f}{E + m} \varphi_s^\dagger \right) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{s'} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{E + m} \varphi_{s'} \end{pmatrix} \\ &= (E + m) \left( \varphi_s^\dagger, -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f}{E + m} \varphi_s^\dagger \right) \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{E + m} \varphi_{s'} \\ \varphi_{s'} \end{pmatrix} \\ &= (E + m) \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{E + m} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f}{E + m} \right) \varphi_s^\dagger \varphi_{s'} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \delta_{ss'} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) \delta_{ss'}. \end{aligned}$$

La acción de contraer con los espinores nos conduce a

$$\bar{u} \left[ \frac{i}{2m} P^{\{0} \sigma^{0\} \alpha} q_\alpha \right] u = -\frac{E}{m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) \delta_{ss'} = -\frac{E}{m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})^2 \delta_{ss'} = -\frac{E}{m} \mathbf{q}^2 \delta_{ss'}.$$

Para el FFJ, concluimos que

$$\bar{u} \left[ \frac{i}{2m} P^{\{0} \sigma^{0\} \alpha} q_\alpha \right] u = -\frac{E}{m} \mathbf{q}^2 \delta_{ss'}. \quad (4.16)$$

Finalmente, para el término del FFD ocurre que

$$\frac{q^0 q^0 - g^{00} q^2}{4m} = \frac{(0)(0) - (+1)(-\mathbf{q}^2)}{4m} = \frac{\mathbf{q}^2}{4m}.$$

Al contraer los espinores llegamos a

$$\bar{u} \left[ \frac{q^0 q^0 - g^{00} q^2}{4m} \right] u = 2E \frac{\mathbf{q}^2}{4m} \delta_{ss'}. \quad (4.17)$$

La combinación de las ecs. (4.15, 4.16, 4.17) nos lleva a

$$\begin{aligned} T_{1/2}^{00}(0) &= \bar{u}(p_f, s) \left[ A(q^2) \frac{P^0 P^0}{m} + J(q^2) \frac{iP^{\{0}\sigma^0\}\alpha} q_\alpha + D(q^2) \frac{q^0 q^0 - g^{00} q^2}{4m} \right] u(p_i, s') \\ &= A(q^2) 2mE \left( 1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \right) \delta_{ss'} - J(q^2) \frac{E}{m} \mathbf{q}^2 \delta_{ss'} + D(q^2) 2E \frac{\mathbf{q}^2}{4m} \delta_{ss'} \\ &= 2mE \left[ A(q^2) \left( 1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \right) - J(q^2) \frac{\mathbf{q}^2}{2m^2} + D(q^2) \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \right] \delta_{ss'}, \end{aligned}$$

y concluimos que, para la componente-00 [63],

$$T_{1/2}^{00}(0) = 2mE \left\{ A(t) - \frac{t}{4m^2} [A(t) - 2J(t) + D(t)] \right\} \delta_{ss'}, \quad (4.18)$$

donde hicimos el cambio de variable  $t = q^2 = -\mathbf{q}^2$ .

El cálculo para la componente- $jk$ , donde  $\{j, k\} = 1, 2, 3$ , es más sencillo,

$$\begin{aligned} T_{1/2}^{jk}(0) &= \bar{u}(p_f, s) \left[ A(q^2) \frac{P^j P^k}{m} + J(q^2) \frac{iP^{\{j}\sigma^k\}\alpha} q_\alpha + D(q^2) \frac{q^j q^k - g^{jk} q^2}{4m} \right] u(p_i, s') \\ &= \bar{u}(p_f, s) \left[ A(q^2) \frac{(0)^j (0)^k}{m} + J(q^2) \frac{i(0)^{\{j}\sigma^k\}\alpha} q_\alpha + D(q^2) \frac{q^j q^k - (-\delta^{jk}) q^2}{4m} \right] u(p_i, s') \\ &= \bar{u}(p_f, s) \left[ D(q^2) \frac{q^j q^k + \delta^{jk} (-\mathbf{q}^2)}{4m} \right] u(p_i, s'). \end{aligned}$$

La componente- $jk$  con contracción de los espinores se expresa como [63]

$$T_{1/2}^{jk}(0) = 2mE \left[ D(t) \frac{q^j q^k - \delta^{jk} \mathbf{q}^2}{4m^2} \right] \delta_{ss'}. \quad (4.19)$$

Finalmente, para la componente- $0k$  el cálculo es un poco más elaborado,

$$\begin{aligned} T_{1/2}^{0k}(0) &= \bar{u}(p_f, s) \left[ A(q^2) \frac{P^0 P^k}{m} + J(q^2) \frac{iP^{\{0}\sigma^k\}\alpha} q_\alpha + D(q^2) \frac{q^0 q^k - g^{0k} q^2}{4m} \right] u(p_i, s') \\ &= \bar{u}(p_f, s) \left[ A(q^2) \frac{E(0)^k}{m} + J(q^2) \frac{iP^{\{0}\sigma^k\}\alpha} q_\alpha + D(q^2) \frac{(0)q^k - (0)q^2}{4m} \right] u(p_i, s') \\ &= \bar{u}(p_f, s) \left[ J(q^2) \frac{i}{2m} (P^0 \sigma^{k\alpha} + \sigma^{0\alpha} P^k) q_\alpha \right] u(p_i, s') \end{aligned}$$

$$= \bar{u}(p_f, s) \left[ J(q^2) \frac{iE}{2m} \sigma^{k\alpha} q_\alpha \right] u(p_i, s') = \bar{u}(p_f, s) \left[ J(q^2) \frac{iE}{2m} \varepsilon^{k\alpha l} \Sigma_l q_\alpha \right] u(p_i, s'),$$

donde usamos la identidad  $\sigma^{jk} = \varepsilon^{jkl} \Sigma_l$ . Ahora, contrayendo los espinores con  $\Sigma_l$ , tenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f, s) \Sigma_l u(p_i, s') &= (E + m) \left( \varphi_s^\dagger, -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f}{E + m} \varphi_s^\dagger \right) \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{s'} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{E + m} \varphi_{s'} \end{pmatrix} \\ &= (E + m) \left( \varphi_s^\dagger, -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f}{E + m} \varphi_s^\dagger \right) \begin{pmatrix} \sigma_l \varphi_{s'} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i}{E + m} \sigma_l \varphi_{s'} \end{pmatrix} \\ &= (E + m) \left[ \varphi_s^\dagger \sigma_l \varphi_{s'} - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_i)}{(E + m)^2} \varphi_s^\dagger \sigma_l \varphi_{s'} \right] \\ &= (E + m) \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})^2}{(E + m)^2} \right] \varphi_s^\dagger \sigma_l \varphi_{s'} = 2E(\boldsymbol{\sigma}_{ss'})_l, \end{aligned}$$

con  $(\boldsymbol{\sigma}_{ss'})_l = \varphi_s^\dagger \sigma_l \varphi_{s'}$ . Finalmente,

$$T_{1/2}^{0k}(0) = J(q^2) \frac{iE}{2m} \varepsilon^{k\alpha l} 2E(\boldsymbol{\sigma}_{ss'})_l q_\alpha = J(q^2) \frac{iE^2}{m} \varepsilon^{k\alpha l} q_\alpha (\boldsymbol{\sigma}_{ss'})_l,$$

de modo que la componente-0k se escribe como [63]

$$T_{1/2}^{0k}(0) = 2mE \left[ J(t) \frac{E(i\mathbf{q} \times \boldsymbol{\sigma}_{ss'})^k}{2m^2} \right]. \quad (4.20)$$

Notemos que esta componente se anula si la polarización de la partícula es paralela a  $\mathbf{q}$ . Hemos calculado las componentes de la ec. (4.4), en el marco de Breit, a introducir en la ec. (4.14).

Ahora, hacemos lo mismo para la ec. (4.6). Notemos que en el caso de partículas de espín-0, la componente-0k es nula. Comencemos con la componente-00,

$$\begin{aligned} T_0^{00}(0) &= \left[ 2P^0 P^0 A(q^2) + \frac{1}{2}(q^0 q^0 - g^{00} q^2) D(q^2) \right] \\ &= 2E^2 A(q^2) + \frac{1}{2}[(0)(0) - (+1)(-q^2)] D(q^2) \\ &= 2m^2 \left[ \frac{E^2}{m^2} A(q^2) + \frac{q^2}{4m^2} D(q^2) \right] = 2m^2 \left[ \left( 1 + \frac{q^2}{4m^2} \right) A(q^2) + \frac{q^2}{4m^2} D(q^2) \right], \end{aligned}$$

de modo que [63]

$$T_0^{00}(0) = 2m^2 \left\{ A(t) - \frac{t}{4m^2} [A(t) + D(t)] \right\}. \quad (4.21)$$

Ahora, para la componente- $jk$  tenemos

$$\begin{aligned} T_0^{jk}(0) &= \left[ 2P^j P^k A(q^2) + \frac{1}{2}(q^j q^k - g^{jk} q^2) D(q^2) \right] \\ &= 2(0)^j (0)^k A(q^2) + \frac{1}{2}[q^j q^k - (-\delta^{jk})(-\mathbf{q}^2)] D(q^2), \end{aligned}$$

y así [63],

$$T_0^{jk}(0) = \frac{1}{2} [q^j q^k - \delta^{jk} \mathbf{q}^2] D(t). \quad (4.22)$$

Hemos encontrado que, en el marco de Breit, las componentes del TEM para partículas de espín- $\frac{1}{2}$  son las ecs. (4.18, 4.19, 4.20), mientras que para partículas de espín-0 son las ecs. (4.21, 4.22). Ahora, desarrollamos el TEM estático. Tenemos que, para la ec. (4.18) [63],

$$\begin{aligned} T^{00}(\mathbf{r}, \tfrac{1}{2}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} T_{1/2}^{00}(0) \\ &= m \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} \left\{ A(t) - \frac{t}{4m^2} [A(t) - 2J(t) + D(t)] \right\} \\ &= m \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} \left\{ A(t) - \frac{1}{4m^2} [tA(t) - 2tJ(t) + tD(t)] \right\} \\ &= m \left\{ \widehat{A}_{\text{TF}}(r) - \frac{1}{4m^2} \left[ (\widehat{tA})_{\text{TF}}(r) - 2(\widehat{tJ})_{\text{TF}}(r) + (\widehat{tD})_{\text{TF}}(r) \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde denotamos la transformada de Fourier como

$$\widehat{f}_{\text{TF}}(r) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} f(q^2), \quad (4.23)$$

donde el gorro y el subíndice “TF” son nuestra notación para esta transformación, y definimos

$$\epsilon(r) = m \left\{ \widehat{A}_{\text{TF}}(r) - \frac{1}{4m^2} \left[ (\widehat{tA})_{\text{TF}}(r) - 2(\widehat{tJ})_{\text{TF}}(r) + (\widehat{tD})_{\text{TF}}(r) \right] \right\} \quad (4.24)$$

como el término de densidad de energía, en coordenadas esféricas, que está en función de  $r = |\mathbf{r}|$ , donde  $r$  es la distancia medida desde el centro de la partícula [61, 63]. La cantidad  $\epsilon(r)$  es independiente de la polarización y para el límite  $t \rightarrow 0$ , cumple [63]

$$\int \epsilon(r) d^3 r = m, \quad (4.25)$$

debido a la restricción dada en la ec. (4.10), ya que tomamos el caso de la partícula en reposo. El cálculo usando la ec. (4.21) es análogo, únicamente difiriendo en la ausencia del FFJ y en la realización de un intercambio  $2E \longleftrightarrow 2m$  para recuperar la normalización [63]. Hemos definido apropiadamente el significado físico de la ec. (4.25).

La componente- $jk$  del TEM estático, ecs. (4.19, 4.22), que depende únicamente del FFD, se define como *tensor de tensión* [56]. El tensor de tensión puede ser descompuesto en una parte sin traza asociada a la *fuerza tangencial*  $s(r)$  y una parte totalmente dependiente de la traza asociada la *presión*  $p(r)$  [56]. De manera general, el tensor de tensión para partículas de espín-0 o espín- $\frac{1}{2}$  puede ser descompuesto como [56]

$$T^{jk}(r) = \left( \frac{r^j r^k}{r^2} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \right) s(r) + \delta^{jk} p(r). \quad (4.26)$$

Las funciones  $s(r)$  y  $p(r)$  están relacionadas entre sí por la conservación del TEM total. La función  $p(r)$  puede ser interpretada como la distribución radial de la “presión” al interior del hadrón, mientras que la función  $s(r)$  está relacionada con la tensión superficial y fuerza tangencial que experimentan los quarks y gluones al interior de la partícula [56, 63].

En el caso de partículas de espín- $\frac{1}{2}$ , las funciones  $s(r)$  y  $p(r)$  se calculan a partir del FFD como [63]

$$s(r) = -\frac{1}{4m} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d\hat{D}_{\text{TF}}(r)}{dr}, \quad p(r) = \frac{1}{6m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\hat{D}_{\text{TF}}(r)}{dr},$$

mientras que en el caso de partículas de espín-0, se pueden escribir como [63]

$$s(r) = \frac{3}{4} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} P_2(\cos \theta) [tD(t)],$$

$$p(r) = \frac{1}{3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} P_0(\cos \theta) [tD(t)].$$

Las expresiones utilizadas para las componentes-00 y  $-jk$  del TEM estático con espín-0 y espín- $\frac{1}{2}$  difieren en el rescalamiento de los FFG por un factor  $m/E$ . Dicha modificación corresponde a las correcciones relativistas del TEM estático [63].

### 4.2.3 Relación Término- $D$ - Fuerza Normal

Si se considera a los hadrones como un medio continuo, el tensor de tensión  $T^{jk}(r)$  caracteriza a las fuerzas experimentadas por los quarks y gluones en un volumen infinitesimal a una distancia  $r$  del centro del hadrón. Esto nos permite escribir el término- $D$  en función del tensor de tensión [56, 63],

$$D = -\frac{2}{5} m \int d^3 r T^{jk}(r) \left( r_j r_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk} \right)$$

$$= -\frac{2}{5} m \int d^3 r \left[ \left( \frac{r^j r^k}{r^2} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \right) s(r) + \delta^{jk} p(r) \right] \left( r_j r_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2}{5}m \int d^3r \left[ \left( \frac{r^j r^k}{r^2} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \right) \left( r_j r_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk} \right) s(r) + \delta^{jk} \left( r_j r_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk} \right) p(r) \right] \\
 &= -\frac{2}{5}m \int d^3r \left[ r^2 \frac{2}{3} s(r) \right],
 \end{aligned}$$

donde usamos  $\delta^{jk} \delta_{jk} = 3$ , de modo que

$$D = -\frac{4}{15}m \int r^2 s(r) d^3r. \quad (4.27)$$

La conservación del TEM,  $q_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , implica para el TEM estático que  $\nabla_j T^{jk}(r) = 0$ , lo cual nos conduce a

$$\begin{aligned}
 \nabla_j T^{jk}(r) &= \nabla_j \left[ \left( \frac{r^j r^k}{r^2} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \right) s(r) + \delta^{jk} p(r) \right] \\
 &= \frac{2r^k}{r^2} s(r) + \left( \frac{r^j r^k}{r^2} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \right) s'_j(r) + \delta^{jk} p'_j(r) \\
 &= \left[ \frac{2r}{r^2} s(r) + \left( \frac{rr}{r^2} - \frac{1}{3} \right) s'(r) + p'(r) \right] \frac{r^k}{r} \\
 &= \left[ \frac{2}{r} s(r) + \frac{2}{3} s'(r) + p'(r) \right] \frac{r^k}{r} = 0,
 \end{aligned}$$

donde vemos que las funciones  $s(r)$  y  $p(r)$  se relacionan por la ecuación diferencial

$$\frac{2}{3} s'(r) + \frac{2}{r} s(r) + p'(r) = 0.$$

Esto significa que la fuerza tangencial y la presión no son funciones independientes y están conectadas por la conservación del TEM. Esta conexión entre las funciones nos permite encontrar una equivalencia entre  $s(r)$  y  $p(r)$  dada por [63]

$$p(r) \equiv -\frac{4}{15} s(r). \quad (4.28)$$

La componente normal de la fuerza total experimentada por el hadrón en un elemento diferencial de superficie  $dS_j$  de la partícula tiene la forma [63]

$$\begin{aligned}
 F^k(r) &= T^{jk}(r) dS_j = \left[ \left( \frac{r^j r^k}{r^2} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \right) s(r) + \delta^{jk} p(r) \right] \left( dS \frac{r_j}{r} \right) \\
 &= \left[ \left( r^k - \frac{1}{3} r^k \right) s(r) + r^k p(r) \right] \frac{dS}{r} = \left[ \frac{2}{3} s(r) + p(r) \right] dS^k,
 \end{aligned}$$

donde definimos la distribución de la *fuerza normal* [63]

$$F^\parallel(r) = \frac{2}{3} s(r) + p(r). \quad (4.29)$$

Para la estabilidad del hadrón, la fuerza correspondiente debe estar dirigida hacia el exterior. Por lo tanto, el criterio local para la estabilidad mecánica de la partícula puede formularse con la desigualdad  $F^{\parallel}(r) > 0$ , la cual implica que el término- $D$  para cualquier hadrón estable debe ser negativo [68],

$$D < 0, \quad (4.30)$$

pues por la ec. (4.27) es resultado de menos la integral de una cantidad positiva definida.

#### 4.2.4 Radios de masa y mecánico

La densidad de energía en los hadrones debe satisfacer igualmente una desigualdad del tipo  $\epsilon(r) > 0$ , la cual nos permite introducir el RMC de masa definido como [61]

$$\langle r^2 \rangle_{\text{masa}} = \frac{\int r^2 \epsilon(r) d^3r}{\int \epsilon(r) d^3r}, \quad (4.31)$$

y, de manera análoga, podemos definir el RMC mecánico mediante la fuerza tangencial  $F^{\parallel}(r)$  como [61]

$$\langle r^2 \rangle_{\text{mecá}} = \frac{\int r^2 F^{\parallel}(r) d^3r}{\int F^{\parallel}(r) d^3r}, \quad (4.32)$$

siendo estas ecuaciones válidas para cualquier hadrón.

Para el protón, sus radios de masa y mecánico son

$$\langle r_p^2 \rangle_{\text{masa}} = \frac{1}{A(0)} \left\{ -6 \left[ \frac{dA(t)}{dt} \right] \Big|_{t=0} - \frac{3D}{2M_p^2} \right\} \quad (4.33)$$

y

$$\langle r_p^2 \rangle_{\text{mecá}} = \frac{6D}{\int_0^\infty D(t) dt}, \quad (4.34)$$

respectivamente [61, 63]. Ambas expresiones son más complejas que la ec. (3.54). Podemos conjeturar que la energía de tensión superficial debe ser menor que la energía total del sistema,  $\int d^3r s(r) \leq m$  [63]. Esto tiene dos implicaciones importantes. Primero, la integral  $\int_0^\infty D(t) dt$  debe converger, lo cual sugiere que el FFD se aplana para valores  $|t|$  suficientemente grandes, más rápido que  $1/t$ . Segundo, el radio mecánico tiene un límite inferior dado por  $\langle r_p^2 \rangle_{\text{mecá}} \geq -9D/(4m^2)$  [63].

La aparición de una integral en la ec. (4.34) nos obliga a elegir un modelo analítico para el FFD. El modelo más ampliamente utilizado es el modelo  $n$ -polar [59]

$$D_n(t) = \frac{\alpha}{(1 - t/\Lambda^2)^n}, \quad (4.35)$$

donde  $\alpha$  y  $\Lambda^2$  son parámetros libres. La elección típica es  $n = 2$ , lo que nos da un *modelo dipolar*, que recordemos se usó para los primeros estudios del FFE [11]. Es fácil notar que  $\alpha \equiv D$ . Así, la integral se vuelve sencilla,

$$\int_0^\infty D_2(t) dt = -\alpha \Lambda^2. \quad (4.36)$$

Para el pión, sus radios de masa y mecánico tienen un perfil análogo al que toma la ec. (3.54) [69],

$$\langle r_\pi^2 \rangle_{\text{masa}} = -6 \left[ \frac{\partial \ln A(t)}{\partial t} \right] \Big|_{t=0} \quad \text{y} \quad \langle r_\pi^2 \rangle_{\text{mecá}} = -6 \left[ \frac{\partial \ln D(t)}{\partial t} \right] \Big|_{t=0}. \quad (4.37)$$

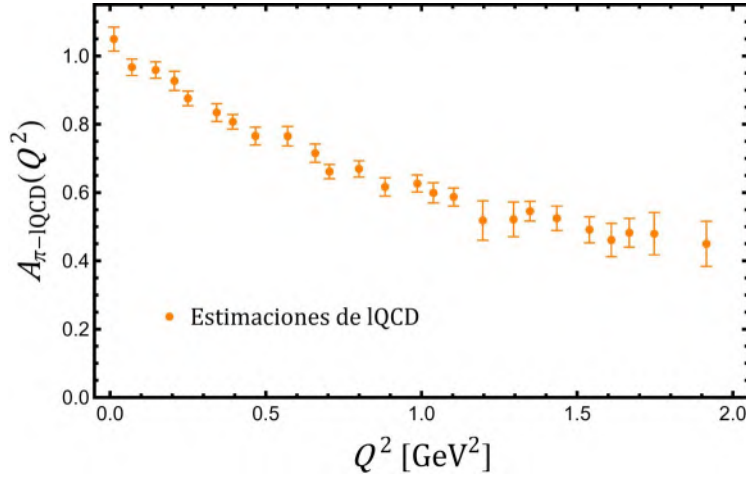


Figura 4.1: Estimaciones numéricas de lQCD para el FFA del pión [58].

Ahora, es necesario hablar de los esfuerzos teóricos y experimentales, hechos hasta el momento, para encontrar los valores del término- $D$  para los hadrones. Comencemos por el caso del pión. Los bosones de Goldstone, base de un modelo idealizado del pión, presentan, bajo el rompimiento espontáneo de la simetría quiral, el valor límite  $D^{\text{BG}} = -1$  [70, 71, 72, 73]. El mismo resultado se obtiene para mesones pseudoescalares en el límite quiral [67, 73, 74],

$$\lim_{m_{\text{PS}}^2 \rightarrow 0} D^{\text{PS}} = -1.$$

Por otro lado, los FFG han sido examinados en la *teoría*  $\Phi^4$  en un régimen de acoplamiento pequeño y se ha encontrado que, para correcciones a un-lazo,  $D_{\text{un-lazo}}^\Phi = -1/3$  [75]. Este valor se puede considerar como el caso límite para mesones pseudoescalares infinitamente masivos [69]. La unión de estos dos resultados teóricos nos define un dominio para el valor del término- $D$  de los pseudoescalares,

$$D^\pi \in \left( -1, -\frac{1}{3} \right). \quad (4.38)$$

En lo referente a mediciones experimentales, recientemente se ha podido extraer, por primera vez, información del TEM para el pión a través de datos del proyecto BELLE mediante el proceso  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$  [62, 77]. Estos resultados, que sólo tuvieron acceso a la contribución del TEM de los quarks [63], encontraron que

$$A^Q(0) \approx 0.70 \quad \text{y} \quad D^Q(0) \approx -0.75.$$

Dichos resultados están en aparente concordancia con la condición de normalización para el FFA total y confirman la negatividad del término- $D$ , que es necesaria para garantizar que se trata de un sistema estable. No obstante, existen aspectos de estos resultados que merecen un análisis más detenido. Por un lado, la propia extracción experimental presenta sutilezas asociadas al supuesto de factorización y a posibles contribuciones de orden superior [76]. Sumado a esto, como se ha señalado, sólo el FFG total es invariante bajo cambios de escala; del análisis experimental no resulta evidente cómo se ha aislado la contribución de los quarks de valencia, ni cuál es la escala a la que dicha contribución estaría definida.

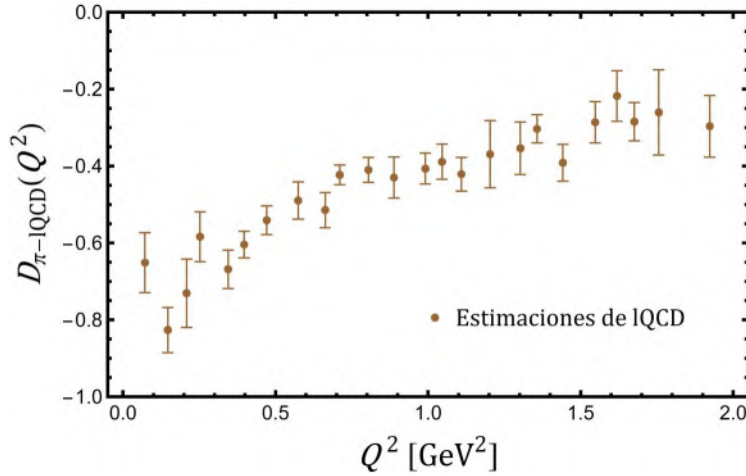


Figura 4.2: Estimaciones numéricas de IQCD para el FFD del pión [58].

En el caso del protón, el estudio del término- $D$  se ha apoyado principalmente en el uso de modelos en lugar de casos límite. Los primeros estudios fueron hechos con el *modelo de bolsa del MIT* [78], el *modelo de solitón de quark quiral* (MSQ $\chi$ ) [79], así como el *modelo Skyrme* [80, 81]. La contribución de los quarks al término- $D$  también ha sido estudiada desde diferentes perspectivas. Para tener un panorama completo de estos estudios, se puede revisar la Sección XVII-C de la Ref. [63]. El uso del modelo de bolsa con quarks sin masa ha arrojado valores pequeños,  $D^p \approx -1.1$  [82], mientras que el uso de modelos quirales ha arrojado una amplia constelación de valores, que van desde  $-2$  hasta  $-4$  [83, 84]. Otros estudios que usan MSQ $\chi$ , con los FFG en función de la masa del pión, han arrojado valores que van desde  $-1$  hasta  $-3$  [85, 86]. Por su lado,

el modelo Skyrme ha obtenido valores entre  $-4$  y  $-6$  [80, 81]. Los resultados cubren un rango de valores que podemos expresar como

$$-6 \lesssim D^p \lesssim -1. \quad (4.39)$$

En cuanto a mediciones experimentales del término- $D$  y FFD para el protón, estas se han limitado a contemplar únicamente la contribución de los quarks, dando como resultado un valor  $D^Q(0) \approx -2.30$  [52, 54]. Mientras que el JLab ha conseguido hacer un análisis experimental de  $D^Q(t)$  [52].

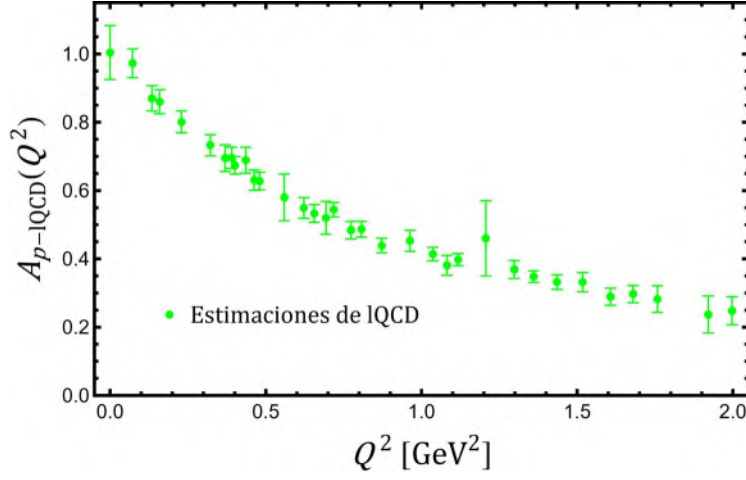


Figura 4.3: Estimaciones numéricas de lQCD para el FFA del protón [59].

Los FFG del protón y pión han sido recientemente estimados para un rango de momento transferido  $0 \leq Q^2/[GeV^2] \leq 2$ , mediante simulaciones numéricas de lQCD [58, 59]. Los primeros resultados publicados fueron hechos para el pión en el año 2023. Es necesario remarcar que estas estimaciones numéricas fueron hechas suponiendo un pión más masivo que el real,  $m_\pi \approx 170$  MeV. Este valor es ligeramente superior al medido experimentalmente,  $m_\pi \approx 140$  MeV. Esto es importante dada la relación que tiene el RMC con la masa [32],

$$\langle r^2 \rangle \sim \frac{1}{m^2}. \quad (4.40)$$

Los valores para los radios de los FFG del pión obtenidos con lQCD serán menores que los obtenidos en hipóteticas mediciones experimentales. Sin embargo, estos valores se pueden corregir mediante un reescalamiento. Proponemos el siguiente método: una vez obtenido  $\langle r_\pi^2 \rangle_{x-lQCD}$ , con  $x = \{\text{masa, mecá}\}$ , basta con tomar la ec. (4.37) y hacer un cambio de variable,  $x = t/m_{\pi-lQCD}^2$ . Así,  $\langle r_\pi^2 \rangle_{x-lQCD} \times m_{\pi-lQCD}^2 = -6 \{ \partial_x [\ln G_x(x)] \}_{|x=0}$ . Esta igualdad también se cumple para un radio obtenido de datos experimentales,  $\langle r_\pi^2 \rangle_{x-exp}$ . De este modo, el reescalamiento de los valores para el RMC se vuelve sencillo,

$$\langle r_\pi^2 \rangle_{x-exp} = \left( \frac{m_{\pi-lQCD}}{m_{\pi-exp}} \right)^2 \times \langle r_\pi^2 \rangle_{x-lQCD}. \quad (4.41)$$

Finalmente, para las estimaciones de los FFG del pión es importante señalar que sus barras de error, de tipo sistemático, son asimétricas. Para los análisis de esta tesis, se promediaron las barras de error para tener una barra de error simétrica. Por otro lado, las estimaciones numéricas para los FFG del protón fueron hechas en 2024 [59] y en este caso la masa supuesta para el cálculo en lQCD y la masa real coinciden,  $M_p \approx 1$  GeV. Además, sus incertidumbres son simétricas.

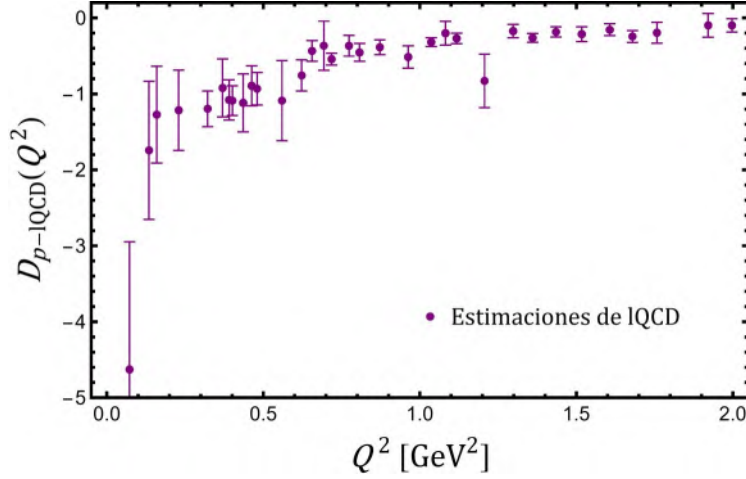


Figura 4.4: Estimaciones numéricas de lQCD para el FFD del protón [59].

Un aspecto destacable de las estimaciones numéricas del FFD del protón y pión es que la falta de una restricción apropiada para el término- $D$  se traduce en una notable incertidumbre cerca de  $\mathbf{Q}^2 = 0$  GeV<sup>2</sup>. Mientras que las estimaciones del FFA, como se ve en la Fig. 4.1 y Fig. 4.3, muestran una tendencia hacia ciertos valores alrededor de  $A(0) = 1$ , las estimaciones del FFD, como se puede ver en la Fig. 4.2 y Fig. 4.4, cerca del momento transferido nulo presentan una incertidumbre significativa. Las etiquetas con que denotamos a estos conjuntos de datos son  $p$ -lQCD y  $\pi$ -lQCD (ver Tabla 4.2).

| Hadrón             | Función                    | No. de puntos | $\mathbf{Q}_{\text{mín}}^2$ [GeV <sup>2</sup> ] | $\mathbf{Q}_{\text{máx}}^2$ [GeV <sup>2</sup> ] |
|--------------------|----------------------------|---------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Protón ( $p$ )     | $A_{p\text{-lQCD}}(Q^2)$   | 34            | 0.0000                                          | 1.9973                                          |
|                    | $D_{p\text{-lQCD}}(Q^2)$   | 33            | 0.0724                                          | 1.9973                                          |
| Pión ( $\pi^\pm$ ) | $A_{\pi\text{-lQCD}}(Q^2)$ | 25            | 0.01232                                         | 1.91502                                         |
|                    | $D_{\pi\text{-lQCD}}(Q^2)$ | 24            | 0.07201                                         | 1.92325                                         |

Tabla 4.2: Número de puntos y rango de momento transferido para los FFG [58, 59].

---

# Capítulo 5

## Métodos numéricos

---

Para el tratamiento de las mediciones experimentales y estimaciones numéricas, así como la obtención de las cantidades que son de nuestro interés, se utilizan las herramientas matemáticas a continuación desarrolladas.

### SECCIÓN 5.1

#### Splines suavizados

##### 5.1.1 Splines cúbicos

En este Capítulo, los valores para el momento transferido se entienden como una colección de números reales  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que definen un intervalo  $I = [a, b]$  para el cual  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . Decimos que la función  $g$ , definida en  $I$ , es un *spline cúbico* [87] si satisface las siguientes condiciones.

- Primero, en cada uno de los subintervalos  $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ,  $g$  es un polinomio cúbico.

- Segundo, este polinomio debe ajustarse en cada uno de los puntos  $x_i$ , o *nudos*, de tal manera que  $g$ ,  $g'$  y  $g''$  sean continuas en todo  $[a, b]$ .

Dado nuestro intervalo  $I = [a, b]$ , con  $n - 1$  subintervalos  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ , asociamos a cada subintervalo un polinomio cúbico  $g_i$  dado por [87]

$$g_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \quad (5.1)$$

Dada una colección de puntos  $\mathcal{D} = \{\mathcal{P}_i = (x_i, y_i), \text{ con } i = 1, 2, \dots, n\}$ , las condiciones de continuidad de  $g_i$ , en función de  $\mathcal{D}$ , se escriben como [87, 88]

$$g_i(x_i) = y_i, \quad g_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad g'_j(x_{j+1}) = g'_{j+1}(x_{j+1}), \quad g''_j(x_{j+1}) = g''_{j+1}(x_{j+1}), \quad (5.2)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  y  $j = 1, 2, \dots, n - 2$ . Dado que tenemos  $n - 1$  subintervalos, la ec. (5.1) nos define un sistema de polinomios con  $4(n - 1)$  incógnitas. Por otro lado, la ec. (5.2) nos proporciona  $4n - 6$  restricciones. Las dos últimas restricciones están dadas por las *condiciones de frontera naturales* [87, 88]:

$$g''_1(x_1) = 0 \quad \text{y} \quad g''_{n-1}(x_n) = 0. \quad (5.3)$$

Con igual número de ecuaciones e incógnitas, podemos construir nuestra solución. Tomando la condición  $g_i(x_{i+1}) = g_{i+1}(x_{i+1})$  para los nudos,

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = a_{i+1} \quad \implies \quad b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2,$$

donde  $h_i = x_{i+1} - x_i$ . Por otro lado, para  $g'_i(x_{i+1}) = g'_{i+1}(x_{i+1})$  y  $g''_i(x_{i+1}) = g''_{i+1}(x_{i+1})$  tenemos

$$\begin{aligned} b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= b_{i+1} \quad \implies \quad b_{i+1} - b_i = 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \\ 2c_i + 6d_i h_i &= 2c_{i+1} \quad \implies \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \end{aligned}$$

y para las condiciones de frontera naturales,

$$\begin{aligned} 2c_1 &= 0 \quad \implies \quad c_1 = 0, \\ 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} &= 0 \quad \implies \quad d_{n-1} = -\frac{c_{n-1}}{3h_{n-1}}. \end{aligned}$$

Usando estas identidades vemos que

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2 = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - c_i h_i - \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \right) h_i^2 \\ &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3} (c_{i+1} + 2c_i). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 b_{i+1} - b_i &= \left[ \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}(c_{i+2} + 2c_{i+1}) \right] - \left[ \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i) \right] \\
 &= \frac{1}{h_{i+1}h_i} [h_i(a_{i+2} - a_{i+1}) - h_{i+1}(a_{i+1} - a_i)] \\
 &\quad - \frac{1}{3} [h_{i+1}(c_{i+2} + 2c_{i+1}) - h_i(c_{i+1} + 2c_i)] \\
 &= \frac{1}{h_{i+1}h_i} [h_i a_{i+2} - (h_{i+1} + h_i)a_{i+1} + h_{i+1}a_i] \\
 &\quad - \frac{1}{3} [h_{i+1}c_{i+2} + (2h_{i+1} - h_i)c_{i+1} - 2h_i c_i].
 \end{aligned}$$

Entonces [88],

$$\begin{aligned}
 b_{i+1} - b_i &= \left[ \frac{a_{i+2}}{h_{i+1}} - \left( \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_i} \right) a_{i+1} + \frac{a_i}{h_i} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{3} [h_{i+1}c_{i+2} + (2h_{i+1} - h_i)c_{i+1} - 2h_i c_i].
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

La otra expresión de  $b_{i+1} - b_i$  nos conduce a

$$b_{i+1} - b_i = 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = 2c_i h_i + 3 \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \right) h_i^2 = 2c_i h_i + c_{i+1} h_i - c_i h_i,$$

y así [88],

$$b_{i+1} - b_i = h_i(c_{i+1} + c_i). \tag{5.5}$$

De la combinación de las ecs. (5.4, 5.5), tenemos

$$\begin{aligned}
 &\left[ \frac{a_{i+2}}{h_{i+1}} - \left( \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_i} \right) a_{i+1} + \frac{a_i}{h_i} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{3} [h_{i+1}c_{i+2} + (2h_{i+1} - h_i)c_{i+1} - 2h_i c_i] = h_i(c_{i+1} + c_i) \\
 \Rightarrow &\left[ \frac{a_{i+2}}{h_{i+1}} - \left( \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_i} \right) a_{i+1} + \frac{a_i}{h_i} \right] \\
 &= \frac{1}{3} [h_{i+1}c_{i+2} + (2h_{i+1} - h_i)c_{i+1} - 2h_i c_i] + h_i(c_{i+1} + c_i) \\
 &= \frac{1}{3} [h_{i+1}c_{i+2} + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_i c_i].
 \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de índice  $i \rightarrow i - 1$  [88],

$$\left[ \frac{a_{i-1}}{h_{i-1}} - \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) a_i + \frac{a_{i+1}}{h_i} \right] = \frac{1}{3} [h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1}], \tag{5.6}$$

para  $i = 2, 3, \dots, n-2$ . Notemos que podemos hacer el cambio de notación  $a_i \rightarrow g_i(x_i)$ , esto debido a que  $g_i(x_i) = a_i$ . Más aún, podemos expresar la ec. (5.6) como un producto de matrices con vectores. Consideremos el par de vectores

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_2) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_{n-1}) \\ g_{n-1}(x_n) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix},$$

de dimensión  $n \times 1$  y  $(n-2) \times 1$ , respectivamente. Este par de vectores debe multiplicarse por las matrices apropiadas. Dado que el total de elementos  $h_i$  es  $n-1$  y que en ambos lados de la ec. (5.6) tenemos el valor  $h_{i-1}$ , el número de columnas de las matrices es  $n-2$ . Por otro lado, el número de filas está dado por las dimensiones del respectivo vector.

Llamamos  $\mathbf{R}$  a la matriz  $(n-2) \times (n-2)$ , cuadrada y tridiagonal que multiplica a  $\mathbf{c}$ , cuyas entradas distintas de cero son [87, 88]

$$r_{j+1,j} = h_{i-1}, \quad r_{j,j} = 2(h_{i-1} + h_i), \quad r_{j,j+1} = h_i,$$

donde  $j = 2, 3, \dots, n-2$ .

Sea  $\mathbf{Q}^T$  una matriz  $(n-2) \times n$ , tridiagonal que multiplica a  $\mathbf{g}$ , cuyas entradas distintas de cero son [87, 88]

$$q_{j-1,j} = \frac{1}{h_{i-1}}, \quad q_{j,j} = -\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right), \quad q_{j+1,j} = \frac{1}{h_i},$$

donde  $j = 2, 3, \dots, n-2$ . Usamos  $\mathbf{Q}^T$  pues suponemos que  $\mathbf{Q}$  tiene tantas filas como  $\mathbf{g}$ .

Concluimos que la ec. (5.6) se puede escribir como [87, 88]

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{g} = \frac{1}{3} \mathbf{R} \mathbf{c}, \tag{5.7}$$

que representa un spline cúbico con condiciones de frontera naturales. Notemos que sólo se necesitan dos de las cuatro incógnitas de cada polinomio [88].

### 5.1.2 Interpolación por rigidez

Dada una colección de puntos  $\mathcal{D}$ , queremos encontrar una curva suave, representada por  $g$ , construida a partir de la interpolación de los elementos de  $\mathcal{D}$ . Uno de los acercamientos

matemáticamente más sencillos que podemos desarrollar para esto es la *interpolación por rigidez* [87]. Si tenemos una curva  $g$  en un dominio  $I = [a, b]$ , existen varias maneras de cuantificar su *rigidez*. Una opción intuitiva de medir la rigidez de una función  $g$  de clase  $\mathbb{C}^2$  es calcular la integral del cuadrado de su segunda derivada [87].

La razón de esta elección es que, en el contexto de la interpolación, es natural que la estimación de la rigidez no sea afectada por la adición de una constante o un término lineal, de modo que si tenemos dos funciones que difieren sólo por estas cantidades su rigidez será idéntica. En el caso de los términos lineales, su derivada nos da un valor constante carente de concavidad, por lo que la función  $g$  debe ser al menos de clase  $\mathbb{C}^2$ . Uno podría considerar el máximo de  $|g''|$ , pero la integral de la segunda derivada al cuadrado proporciona una medición global positiva definida, dado que la función  $g$  es real.

Debemos demostrar que los splines cúbicos con condiciones de frontera naturales son una elección óptima para una gran cantidad de funciones suaves. Sea  $\mathbb{S}[a, b]$  el espacio de funciones  $g$  diferenciables en  $[a, b]$ , que tienen una primera derivada absolutamente continua y con  $g''$  una función integrable de la forma  $\int_a^t g''(x)dx = g'(t) - g'(a) \forall t \in [a, b]$ . Esta condición se satisface automáticamente si  $g$  es continua y diferenciable a trozos en  $[a, b]$ . En consecuencia,  $\mathbb{S}[a, b]$  contiene a todas las funciones  $g$  de clase  $\mathbb{C}^2$  [87]. Llamamos  $\mathbb{S}_2[a, b]$  a este espacio de funciones  $g$  doblemente diferenciables a trozo.

**Teorema 1** *Suponiendo que  $n \geq 2$ ,  $g$  es un spline cúbico con condiciones de frontera naturales que interpola los puntos  $\mathcal{P}_i = (x_i, y_i)$  con  $i = 1, \dots, n$  que satisfacen  $a = x_1 < \dots < x_n = b$ . Sea  $\hat{g}$  una función en  $\mathbb{S}[a, b]$  para la cual  $\hat{g}(x_i) = y_i$ . Entonces  $\int \hat{g}''^2 dx \geq \int g''^2 dx$ , con igualdad solo si  $\hat{g}$  y  $g$  son idénticas [87].*

*Demostración.* Sea  $h$  una función en  $\mathbb{S}[a, b]$  dada por  $h = \hat{g} - g$ . Ambas  $\hat{g}$  y  $g$  interpolan los valores  $y_i$ . En consecuencia  $h = 0$  en todos los puntos  $x_i$ . Para hacer la integral del producto  $g''(x)h''(x)$  usamos integración por partes:  $V = g''(x)$ ,  $dV = g'''(x)dx$ ,  $U = h'(x)$  y  $dU = h''(x)dx$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_a^b g''(x)h''(x)dx &= [g''(x)h'(x)] \Big|_a^b - \int_a^b g'''(x)h'(x)dx = - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i'''(x)h_i'(x)dx \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} 6d_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} h_i'(x)dx = - \sum_{i=1}^{n-1} 6d_i [h_i(x)] \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = - \sum_{i=1}^{n-1} 6d_i [h_i(x_{i+1}) - h_i(x_i)] = 0, \end{aligned}$$

donde usamos las condiciones de frontera naturales y que  $h = 0$  en los nudos. Ahora, vemos que

$$\int_a^b \hat{g}''^2 dx = \int_a^b (g'' + h'')^2 dx = \int_a^b g''^2 dx + 2 \int_a^b g''h'' dx + \int_a^b h''^2 dx$$

$$= \int_a^b g''^2 dx + \int_a^b h''^2 dx \geq \int_a^b g''^2 dx.$$

Encontramos que  $\int \hat{g}''^2 dx \geq \int g''^2 dx$ . La igualdad se da si  $\int h''^2 dx$  es cero.  $\square$

Así como encontramos una expresión matricial para los splines cúbicos, dada por la ec. (5.7), podemos encontrar una forma matricial para  $\int g''^2 dx$ . Escribimos

$$\begin{aligned} \int_a^b [g''(x)]^2 dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g_i''(x)]^2 dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [2c_i + 6d_i(x - x_i)]^2 dx \\ &= 4 \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [c_i + 3d_i(x - x_i)]^2 dx = 4 \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{h_i} [c_i + 3d_i\beta]^2 d\beta \\ &= 4 \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{h_i} [c_i^2 + 6c_id_i\beta + 9d_i^2\beta^2] d\beta = 4 \sum_{i=1}^{n-1} [c_i^2\beta + 3c_id_i\beta^2 + 3d_i^2\beta^3] \Big|_0^{h_i} \\ &= 4 \sum_{i=1}^{n-1} [c_i^2 h_i + 3c_id_i h_i^2 + 3d_i^2 h_i^3] = 4 \sum_{i=1}^{n-1} h_i [c_i^2 + 3c_id_i h_i + 3d_i^2 h_i^2] \\ &= 4 \sum_{i=1}^{n-1} h_i \left[ c_i^2 + 3c_i \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \right) h_i + 3 \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \right)^2 h_i^2 \right] \\ &= 4 \sum_{i=1}^{n-1} h_i \left[ c_i^2 + c_i(c_{i+1} - c_i) + \frac{1}{3}(c_{i+1}^2 - 2c_{i+1}c_i + c_i^2) \right], \end{aligned}$$

de modo que [87, 88]

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{n-1} h_i (c_i^2 + c_i c_{i+1} + c_{i+1}^2).$$

Desarrollando la sumatoria, recordando  $c_1 = c_n = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b [g''(x)]^2 dx &= \frac{4}{3} [h_1 c_2^2 + h_2 (c_2^2 + c_2 c_3 + c_3^2) + h_3 (c_3^2 + c_3 c_4 + c_4^2) + \\ &\quad \cdots + h_{n-2} (c_{n-2}^2 + c_{n-2} c_{n-1} + c_{n-1}^2) + h_{n-1} c_{n-1}^2] \\ &= \frac{2}{3} [2(h_1 + h_2) c_2^2 + 2h_2 c_2 c_3 + 2(h_2 + h_3) c_3^2 + 2h_3 c_3 c_4 + \\ &\quad \cdots + 2(h_{n-3} + h_{n-2}) c_{n-2}^2 + 2h_{n-2} c_{n-2} c_{n-1} + 2(h_{n-2} + h_{n-1}) c_{n-1}^2] \\ &= \frac{2}{3} \{ c_2 [2(h_1 + h_2) c_2 + h_2 c_3] + c_3 [h_2 c_2 + 2(h_2 + h_3) c_3 + h_3 c_4] \\ &\quad \cdots + c_{n-2} [h_{n-3} c_{n-3} + 2(h_{n-3} + h_{n-2}) c_{n-2} + h_{n-2} c_{n-1}] \\ &\quad + c_{n-1} [h_{n-2} c_{n-2} + 2(h_{n-2} + h_{n-1}) c_{n-1}] \} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{i=2}^{n-1} c_i [h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1}].$$

Conseguimos una expresión proporcional a  $\mathbf{Rc}$  multiplicada por valores  $2c_i/3$ . Hemos encontrado que la integral se expresa de forma matricial como [87, 88]

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \frac{2}{3} \mathbf{c}^T \mathbf{Rc}. \quad (5.8)$$

### 5.1.3 Suavización de splines

Supongamos que tenemos una colección de datos  $\mathcal{D} = \{\mathcal{P}_i = (x_i, f_i \pm \delta f_i), \text{ con } i = 1, \dots, n\}$  donde cada punto cuenta con una incertidumbre asociada. Dada la función  $g$  en  $\mathbb{S}[a, b]$ , construimos [88]

$$S(g, \lambda) = \lambda \sum_{i=1}^n \left[ \frac{f_i - g(x_i)}{\delta f_i} \right]^2 + (1 - \lambda) \int_a^b [g''(x)]^2 dx, \quad (5.9)$$

con  $\lambda \in [0, 1]$  un parámetro de suavizado. El propósito de la ec. (5.9) es cuantificar la suavización del spline cúbico mediante el contraste de los términos que la componen. El primer término es una suma de mínimos cuadrados cuyo propósito es medir la fidelidad del spline con los puntos de  $\mathcal{D}$ , mientras que el segundo término cuantifica la rigidez que presenta el spline al momento de ajustarse a los datos. Ambos términos están mediados por el parámetro de suavizado.

Supongamos que  $g$  es una función genérica de clase  $\mathbb{C}^2$  y  $\hat{g}$  un spline cúbico con condiciones de frontera naturales. Por definición,  $g(x_i) = \hat{g}(x_i)$ . Esto nos conduce a  $\sum [(f_i - \hat{g}(x_i))\delta f_i^{-1}]^2 = \sum [(f_i - g(x_i))\delta f_i^{-1}]^2$ . Sumado a esto, por las propiedades de optimización de la interpolación de splines cúbicos,  $\int \hat{g}''^2 dx < \int g''^2 dx$ . Así, para  $\lambda > 0$  concluimos que  $S(\hat{g}) < S(g)$ . A menos que  $g$  ya sea un spline cúbico con condiciones de frontera naturales, podremos encontrar un spline que minimiza la ec. (5.9).

Ahora, debemos encontrar, de entre todos los splines cúbicos, aquel que minimiza la ec. (5.9) y así dejar a  $\lambda$  como único parámetro libre. Para ello, primero expresamos a la función  $S(g, \lambda)$  de forma matricial [87]. Dados el vector y matriz

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \delta f_1^{-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \delta f_2^{-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta f_{n-1}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta f_n^{-2} \end{pmatrix},$$

podemos escribir la ec. (5.9) como

$$S(\mathbf{g}, \lambda) = \lambda(\mathbf{f} - \mathbf{g})^T \mathbf{W}(\mathbf{f} - \mathbf{g}) + \frac{2}{3}(1 - \lambda)\mathbf{c}^T \mathbf{R}\mathbf{c}. \quad (5.10)$$

Para encontrar el  $\hat{\mathbf{g}}$  que minimiza a  $S(\mathbf{g}, \lambda)$  basta con

$$\left( \frac{\partial S(\mathbf{g}, \lambda)}{\partial \mathbf{g}} \right) \Big|_{\mathbf{g}=\hat{\mathbf{g}}} = \mathbf{0}.$$

Es necesario escribir  $\mathbf{c}$  en función de  $\mathbf{g}$  para esto. Usando la ec. (5.7) es claro que  $3\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{g} = \mathbf{c}$ , debido a que  $\mathbf{R}$  es invertible. Así,

$$\begin{aligned} S(\mathbf{g}, \lambda) &= \lambda(\mathbf{f}^T \mathbf{W} \mathbf{f} - 2\mathbf{g}^T \mathbf{W} \mathbf{f} + \mathbf{g}^T \mathbf{W} \mathbf{g}) + 6(1 - \lambda)\mathbf{g}^T \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{g} \\ &= \mathbf{g}^T [\lambda \mathbf{W} + 6(1 - \lambda) \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T] \mathbf{g} + \lambda \mathbf{f}^T \mathbf{W} \mathbf{f} - 2\lambda \mathbf{g}^T \mathbf{W} \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial S(\mathbf{g}, \lambda)}{\partial \mathbf{g}} \right) \Big|_{\mathbf{g}=\hat{\mathbf{g}}} &= 2[\lambda \mathbf{W} + 6(1 - \lambda) \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T] \hat{\mathbf{g}} - 2\lambda \mathbf{W} \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \left[ \mathbf{W} + 6 \left( \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \right] \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{W} \mathbf{f} \\ &\Rightarrow \left[ \mathbb{I} + 6 \left( \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \right] \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{f} \\ &\Rightarrow \hat{\mathbf{g}} + 2 \left( \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{c} = \mathbf{f}. \end{aligned}$$

El  $\hat{\mathbf{g}}$  que minimiza la ec. (5.10) es

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{f} - 2\alpha_\lambda \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{c}, \quad (5.11)$$

donde  $\alpha_\lambda = (1 - \lambda)/\lambda$ .

La ec. (5.11) nos dice que  $\hat{\mathbf{g}}$  está en función de  $\mathbf{c}$ . Necesitamos una ecuación para determinar los valores de  $\mathbf{c}$ . Tomando la ec. (5.11) y multiplicando por la izquierda con  $\mathbf{Q}^T$ , tenemos

$$\mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{f} - 2\alpha_\lambda \mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \mathbf{R} \mathbf{c} = \mathbf{Q}^T \mathbf{f} - 2\alpha_\lambda \mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{c},$$

y así,

$$\left[ \frac{1}{3} \mathbf{R} + 2\alpha_\lambda \mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} \right] \mathbf{c} = \mathbf{Q}^T \mathbf{f}.$$

Esta ecuación tiene la forma de un problema elemental de álgebra lineal. Por tanto, tiene solución mediante numerosos algoritmos. Podemos decir que

$$\mathbf{B}(\lambda) \mathbf{c} = \mathbf{z} \quad \text{con} \quad \mathbf{B}(\lambda) = \frac{1}{3} \mathbf{R} + 2\alpha_\lambda \mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q} \quad \text{y} \quad \mathbf{z} = \mathbf{Q}^T \mathbf{f}. \quad (5.12)$$

## SECCIÓN 5.2

## Validación-cruzada

El propósito del método de *validación-cruzada* (VC) [89] es tener la mejor predicción posible para nuevos puntos. La curva  $\hat{g}$  tiene la propiedad de que, para valores de  $f$  en  $x$ ,  $\hat{g}(x)$  es la mejor predicción de  $f$ . Una buena elección de  $\hat{g}(x)$  es aquella que minimiza la ec. (5.9). Cuando el método VC es aplicado a un conjunto  $\mathcal{D}$ , este es capaz de construir buenas predicciones a partir de los datos existentes.

5.2.1 Elección del parámetro  $\lambda$ 

Dado el punto  $\mathcal{P}_k = (x_k, f_k \pm \delta f_k)$ , lo consideramos omitido del conjunto  $\mathcal{D}$  con que construimos la curva  $\hat{g}$ . Definimos a  $\hat{g}^{(-k)}(x; \lambda)$ , dependiente de  $\lambda$ , como la curva construida por los datos restantes, que minimiza a

$$S(\lambda) = \lambda \sum_{i \neq k} \left( \frac{f_i - \hat{g}(x_i)}{\delta f_i} \right)^2 + (1 - \lambda) \int_a^b [\hat{g}''(x)]^2 dx.$$

Juzgamos la capacidad de  $\hat{g}^{(-k)}(x; \lambda)$  para extrapolar un nuevo dato  $\mathcal{P}$  en base a qué tan bien describe a  $\mathcal{P}_k$ . La elección de  $\mathcal{P}_k$  es arbitraria. Cuantificamos la eficacia del método VC, dependiente de  $\lambda$ , mediante la función [87]

$$\text{VC}(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_i - \hat{g}^{(-k)}(x_i; \lambda)}{\delta f_i} \right)^2. \quad (5.13)$$

El objetivo es elegir el valor  $\lambda$  que minimiza a  $\text{VC}(\lambda)$ . La evaluación de esta función depende en gran medida de cómo construimos a  $\hat{g}^{(-k)}(x; \lambda)$ .

## 5.2.2 Optimización del método VC

Debemos construir una expresión donde el spline cúbico  $\hat{g}$  tenga una dependencia lineal de los datos  $f_i$  a través una relación del tipo

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{f}, \quad (5.14)$$

donde  $\mathbf{A}(\lambda)$  es una matriz que mapea los valores  $f_i$  en sus valores predictivos  $\hat{g}(x_i)$ . Para obtener la forma explícita de  $\mathbf{A}(\lambda)$ , usamos las ecs. (5.11, 5.12). Notemos que

$\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}(\lambda)\mathbf{Q}^T\mathbf{f}$ , pues  $\mathbf{B}(\lambda)$  es invertible. Entonces

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{g}} &= \mathbf{f} - 2\alpha_\lambda \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{c} = \mathbf{f} - 2\alpha_\lambda \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{-1}(\lambda)\mathbf{Q}^T\mathbf{f} \\ &= [\mathbb{I} - 2\alpha_\lambda \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{B}^{-1}(\lambda)\mathbf{Q}^T] \mathbf{f} = \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{f}.\end{aligned}$$

Así, la forma explícita de la matriz de mapeo es [87]

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbb{I} - 2\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q} \left[\frac{1}{3}\mathbf{R} + 2\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \mathbf{Q}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Q}\right]^{-1} \mathbf{Q}^T. \quad (5.15)$$

Teniendo la forma explícita de la matriz de mapeo, procedemos con un paso clave en el desarrollo de una forma económica para el cálculo de  $\text{VC}(\lambda)$ .

**Teorema 2** *La función de VC satisface*

$$\text{VC}(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta f_i^2} \left( \frac{f_i - \hat{g}(x_i)}{1 - A_{ii}(\lambda)} \right)^2, \quad (5.16)$$

donde  $\hat{g}$  es el spline suavizado calculado a partir del conjunto de datos  $\mathcal{D} = \{(x_i, f_i \pm \delta f_i)\}$ , con  $i = 1, 2, \dots, n\}$  con parámetro de suavizado  $\lambda$  [87].

*Demostración.* Basta con desarrollar un lema que involucra expresar  $f_i - \hat{g}^{(-k)}(x_i)$  en términos de  $f_i - \hat{g}(x_i)$  y la  $i$ -ésima entrada de la diagonal de la matriz de mapeo.

**Lema 1** *Para valores  $\lambda$  y  $k$  dados,  $\mathbf{g}^{(-k)}$  denota un vector con componentes  $g_i^{(-k)} = \hat{g}^{(-k)}(x_i, \lambda)$ , y definimos un vector  $\mathbf{f}^*$  tal que [87]*

$$f_i^* = f_i \quad \text{para } i \neq k \quad \text{y} \quad f_k^* = \hat{g}^{(-k)}(x_k).$$

Entonces

$$\mathbf{g}^{(-k)} = \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{f}^*.$$

*Demostración.* Para una genérica función  $g$ ,

$$\begin{aligned}S(\lambda) &= \lambda \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_i^* - g(x_i)}{\delta f_i^*} \right)^2 + (1-\lambda) \int_a^b [g''(x)]^2 dx \\ &\geq \lambda \sum_{i \neq k} \left( \frac{f_i^* - g(x_i)}{\delta f_i^*} \right)^2 + (1-\lambda) \int_a^b [g''(x)]^2 dx \\ &\geq \lambda \sum_{i \neq k} \left( \frac{f_i^* - \hat{g}^{(-k)}(x_i)}{\delta f_i^*} \right)^2 + (1-\lambda) \int_a^b [\hat{g}^{(-k)''}(x)]^2 dx.\end{aligned}$$

Llegamos a que  $\hat{g}^{(-k)}$  es aquel que minimiza  $S(\lambda)$ . En consecuencia, podemos decir que satisface una relación del tipo  $\mathbf{g}^{(-k)} = \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{f}^*$ .  $\square$

A partir de este resultado, podemos obtener una nueva expresión para  $f_k - \hat{g}^{(-k)}(x_k)$ . Primero, definimos [87]

$$\hat{g}^{(-k)}(x_k) = [\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{f}]_k = \sum_{j=1}^n A_{kj}(\lambda)f_j = \sum_{j=1}^n A_{kj}f_j^*.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f_k - \hat{g}^{(-k)}(x_k) &= f_k - \sum_{j=1}^n A_{kj}f_j^* = f_k - \sum_{j \neq k} A_{kj}f_j^* - A_{kk}f_k^* \\ &= f_k - \sum_{j \neq k} A_{kj}f_j^* - A_{kk}\hat{g}^{(-k)}(x_k) + A_{kk}f_k - A_{kk}f_k \\ &= f_k - \left[ \sum_{j \neq k} A_{kj}f_j + A_{kk}f_k \right] + [A_{kk}f_k - A_{kk}\hat{g}^{(-k)}(x_k)] \\ &= f_k - \sum_{j=1}^n A_{kj}f_j + A_{kk} [f_k - \hat{g}^{(-k)}(x_k)]. \end{aligned}$$

De esta relación, sigue

$$\begin{aligned} [f_k - \hat{g}^{(-k)}(x_k)] - A_{kk} [f_k - \hat{g}^{(-k)}(x_k)] &= f_k - \hat{g}(x_k) \\ \Rightarrow [1 - A_{kk}] [f_k - \hat{g}^{(-k)}(x_k)] &= f_k - \hat{g}(x_k) \\ \Rightarrow f_k - \hat{g}^{(-k)}(x_k) &= \frac{f_k - \hat{g}(x_k)}{1 - A_{kk}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ec. (5.13), tenemos [87]

$$\text{VC}(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta f_i^2} \left( \frac{f_i - \hat{g}(x_i)}{1 - A_{ii}(\lambda)} \right)^2,$$

que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

### 5.2.3 Validación-cruzada generalizada

La *validación-cruzada generalizada* (VCG) es una modificación de la VC, popular para la elección del parámetro de suavizado  $\lambda$  [87, 89]. La ec. (5.16) nos muestra que para estimar puntos  $\mathcal{P}$  omitidos en nuestro conjunto  $\mathcal{D}$ , basta con dividir la diferencia del residuo de mínimos cuadrados por el factor  $1 - A_{ii}(\lambda)$  al cuadrado [87, 89].

La idea básica de la VCG es reemplazar este factor por su valor promedio,  $1 - n^{-1}\text{Tr}\mathbf{A}(\lambda)$ . La función  $\text{VCG}(\lambda)$  se construye de manera análoga al caso de la VC

ordinaria, por la suma de los mínimos cuadrados, de modo que [87, 89]

$$\text{VCG}(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta f_i^2} \left( \frac{f_i - \hat{g}(x_i)}{1 - n^{-1} \text{Tr} \mathbf{A}(\lambda)} \right)^2. \quad (5.17)$$

Justo como la VC ordinaria, la VCG selecciona el parámetro de suavizado  $\lambda$  a través de su evaluación, de la ec. (5.17), en un dominio preestablecido. En nuestro caso, evaluamos  $\text{VCG}(\lambda)$  sobre  $\lambda \in [0, 1]$ . Si se da el caso en que todos los términos  $A_{ii}$  son iguales, encontramos que la VCG y la VC son idénticas sobre  $\lambda$ .

### SECCIÓN 5.3

## Modelo de fracciones continuas

Los cálculos desarrollados en las secciones anteriores tienen como objetivo estimar nuevos valores  $\mathcal{P}$  que presenten menos fluctuaciones, con el fin de obtener una función de ajuste, usualmente llamada *fit* o modelo, dada por una expresión analítica. Estas funciones analíticas, o modelos, cuentan con una serie de constantes que se calculan a partir de los datos estimados y suavizados. Un ejemplo de estimaciones calculadas a partir del método VCG se puede observar en la Fig. 5.1. Resulta evidente que los valores suavizados reproducen el perfil de una función suave de manera más clara.

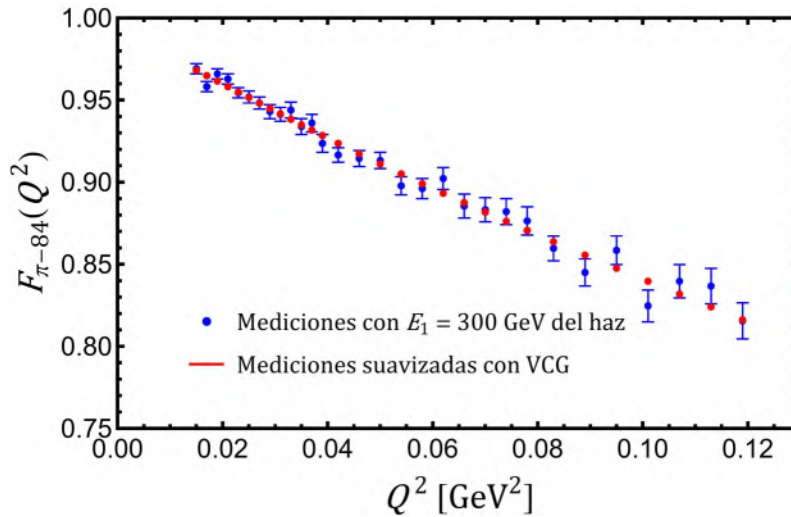


Figura 5.1: Comparación entre las mediciones experimentales del FFE del pión [48] y los valores suavizados por el método VCG.

### 5.3.1 Método de puntos de Schlessinger

El tratamiento numérico del conjunto  $\mathcal{D}$  debe tener como resultado un modelo analítico que se debe caracterizar por ser monótono, decreciente y continuo, pues estas son las características de los FF.

Consideremos una función analítica  $f(x)$  que representa a algún FF. Solo contamos con un número finito de puntos  $\mathcal{D}$  mediante los cuales buscamos reproducir al FF. La manera típica de proceder en estos problemas es usando una representación polinomial. Sin embargo, este camino tiene la desventaja de propagar fácilmente los errores de estimación de un punto a toda la función. El *método de fracciones racionales* (MFR) [90] presenta una serie de ventajas respecto a las técnicas estándar. Las restricciones globales impuestas a la aproximación de  $f(x)$  dadas por el MFR inhiben la propagación y crecimiento de los errores en el modelo. Una técnica de análisis numérico bien conocida es el método de aproximación de Padé [91], el cual requiere los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de  $f(x)$ . La variante del MFR que utilizamos presenta similitudes con el método de Padé, con la diferencia de que empleamos el conjunto de puntos  $\mathcal{D}$  en vez de los coeficientes de la serie de Taylor para la construcción del modelo.

Esta ruta de trabajo para las fracciones racionales se conoce como *método de puntos de Schlessinger* (MPS), propuesto por L. Schlessinger [90]. Suponemos que todos los  $f(x_i)$  pueden ser expresados como un cociente de polinomios,

$$f(x_i) = \frac{P_N(x_i)}{Q_M(x_i)}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n,$$

donde

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N p_k x^k \quad \text{y} \quad Q_M(x) = 1 + \sum_{k=1}^M q_k x^k.$$

Notamos que, de las expresiones para  $P_N(x)$  y  $Q_M(x)$ , tenemos  $N + M + 1$  incógnitas. En consecuencia,  $n = N + M + 1$ , para que este sistema tenga solución. Entonces, podemos expresar las fracciones racionales como un cociente de la forma

$$R_{N,M}(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)},$$

siendo esta una representación genérica. Una elección particular para representar este cociente es [90]

$$\mathcal{C}_n(x) = \frac{f(x_1)}{1 + \frac{\frac{a_1(x-x_1)}{1 + \frac{a_2(x-x_2)}{\vdots}}}{1 + \frac{a_{n-2}(x-x_{n-2})}{1 + \frac{a_{n-1}(x-x_{n-1})}{\vdots}}}}. \quad (5.18)$$

Es sencillo ver que  $\mathcal{C}_n(x_1) = f(x_1)$  y que los coeficientes  $a_1, \dots, a_{n-1}$  pueden ser contruidos de tal forma que  $\mathcal{C}_n(x_i) = f(x_i)$ . Para el cálculo de los  $a_i$ , procedemos a escribir la ec. (5.18) como

$$\mathcal{C}_n(x) = \frac{f(x_1)}{1 + \mathcal{Z}_1(x)} \quad \text{con} \quad \mathcal{Z}_1(x) = \frac{a_1(x - x_1)}{1 + \frac{a_2(x - x_2)}{1 + \frac{a_{n-2}(x - x_{n-2})}{1 + a_{n-1}(x - x_{n-1})}}}$$

donde es claro que  $\mathcal{Z}_1(x_1) = 0$ . De manera general, decimos que [90]

$$\mathcal{Z}_i(x) = \frac{a_i(x - x_i)}{1 + \frac{a_{i+1}(x - x_{i+1})}{1 + \frac{a_{n-2}(x - x_{n-2})}{1 + a_{n-1}(x - x_{n-1})}}}$$

tal que  $\mathcal{Z}_i(x_i) = 0$ . Para  $\mathcal{Z}_2(x_2) = 0$  tenemos

$$\mathcal{C}_n(x) = f(x_2) = \frac{f(x_1)}{1 + a_1(x_2 - x_1)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \left[ \frac{f(x_1)}{f(x_2)} - 1 \right].$$

Hemos encontrado una expresión de  $a_1$  en términos de los elementos de  $\mathcal{D}$ . Conociendo  $a_1$ , podemos calcular  $a_2$ . Considerando  $\mathcal{Z}_3(x_3) = 0$ ,

$$\mathcal{C}_n(x_3) = f(x_3) = \frac{f(x_1)}{1 + \frac{a_1(x_3 - x_1)}{1 + a_2(x_3 - x_2)}} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{(x_3 - x_2)} \left[ \frac{a_1(x_3 - x_1)}{[f(x_1)/f(x_3)] - 1} - 1 \right].$$

Siguiendo este procedimiento recursivo podemos calcular las constantes  $a_i$  del MPS. La forma general de este algoritmo es [90]

$$a_i = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)} \left[ \frac{a_{i-1}(x_{i+1} - x_{i-1})}{\frac{a_{i-2}(x_{i+1} - x_{i-2})}{1 + \frac{a_{n-2}(x_{i+1} - x_{n-2})}{1 + a_{n-1}(x_{i+1} - x_{n-1})}} - 1 \right], \quad (5.19)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Las ecs. (5.18, 5.19) nos caracterizan completamente un modelo del MPS. Este modelo tiene la ventaja de poder extender su dominio de evaluación más allá del dado por los datos. Para nosotros, la derivación de, por ejemplo, el radio de carga eléctrica se vuelve posible. Sin embargo, la aplicación cruda del MPS no garantiza un modelo con las características deseadas. Para entender esto, es necesario hablar brevemente de los números pseudoaleatorios.

### 5.3.2 Números pseudoaleatorios

Todo el algoritmo desarrollado hasta el momento se enfoca en suavizar los valores centrales  $f_i$  de cada  $\mathcal{P}_i = (x_i, f_i \pm \delta f_i)$ . Podemos usar las incertidumbres  $\delta f_i$  de cada medición para generar una nueva estimación  $\hat{f}_i$ . Para este propósito, los números pseudoaleatorios son de gran ayuda.

Los *números pseudoaleatorios* son una herramienta ampliamente usada en los métodos numéricos, empleados para obtener múltiples valores posibles de alguna cantidad aleatoria. En el caso del presente trabajo donde se usan datos que poseen una incertidumbre, los números pseudoaleatorios proporcionan nuevas estimaciones de los datos, a partir de los originales, que permiten calcular nuevas estimaciones estocásticas. Existen múltiples bibliotecas que ofrecen herramientas computacionales para la generación de números pseudoaleatorios. Para este trabajo, utilizamos la biblioteca **Boost (C++ Libraries)** [92], que ofrece múltiples funciones de distribución y semillas de generación de números pseudoaleatorios.

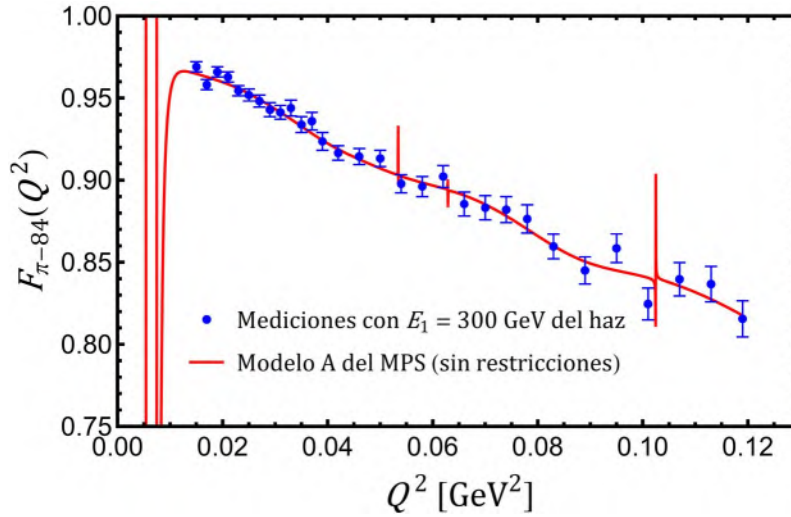


Figura 5.2: Comparación entre las mediciones experimentales del FFE del pión [48] y un modelo del MPS con datos estocásticos sin restricciones.

Para generar nuevas estimaciones  $\hat{f}_i$  de los datos utilizamos la distribución normal de probabilidad  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  definida en la biblioteca **Boost**, donde  $\mu = f_i$  y  $\sigma = \delta f_i$ . Esta distribución se encarga de devolver un valor pseudoaleatorio  $\hat{f}_i$ . Esto se hace para todos los elementos de  $\mathcal{D}$ . Sin embargo, esta colección de datos pseudoaleatorios  $\hat{\mathcal{D}}$ , así como el conjunto valores centrales  $\mathcal{D}$ , pueden generar un modelo del MPS que no sea continuo ni monótono decreciente, como se puede ver en la Fig. 5.2 donde un modelo del MPS construido con datos estocásticos generó una función con polos en  $\mathcal{I} = [0, x_n]$ . Para solucionar esto, es necesario imponer restricciones al modelo del MPS.

### 5.3.3 Restricciones al MPS

Para garantizar que el modelo del MPS cumpla con la condiciones requeridas, es pertinente tener una manera de controlar la derivada de los splines cúbicos. Para realizar esto, escribimos las funciones  $g(x)$  en una forma conveniente. Tomamos la ec. (5.1) y la reescribimos como

$$g_i(x) = a_i + b_i h(x) + c_i h^2(x) + d_i h^3(x), \quad (5.20)$$

donde  $h(x) = x - x_i$ . Sabemos que los splines cúbicos pueden ser representados únicamente con los  $a_i$  y  $c_i$ . Recordando las identidades,

$$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2 \quad \text{y} \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i},$$

al ser aplicadas a la ec. (5.20), nos dan

$$\begin{aligned} g_i(x) &= a_i + \left[ \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2 \right] h(x) + c_i h^2(x) + d_i h^3(x) \\ &= a_i + \left[ \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} \right] h(x) + c_i [h^2(x) - h_i h(x)] + d_i [h^3(x) - h_i^2 h(x)] \\ &= \frac{1}{h_i} [a_i h_i + a_{i+1} h(x) - a_i h(x)] + c_i h(x) [h(x) - h_i] + d_i h(x) [h^2(x) - h_i^2] \\ &= \frac{a_{i+1} h(x) + a_i [h_i - h(x)]}{h_i} - \{c_i h(x) [h_i - h(x)] + d_i h(x) [h_i^2 - h^2(x)]\} \\ &= \frac{a_{i+1} h(x) + a_i [h_i - h(x)]}{h_i} - \mathcal{G}(x), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x) &= c_i h(x) [h_i - h(x)] + d_i h(x) [h_i^2 - h^2(x)] \\ &= c_i h(x) [h_i - h(x)] + \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \right) h(x) [h_i - h(x)] [h_i + h(x)] \\ &= h(x) [h_i - h(x)] \left\{ c_i + \left( \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \right) [h_i + h(x)] \right\} \\ &= \frac{1}{3h_i} h(x) [h_i - h(x)] \{3c_i h_i + c_{i+1} [h_i + h(x)] - c_i [h_i + h(x)]\} \\ &= \frac{1}{3} h(x) [h_i - h(x)] \left\{ c_{i+1} \left[ 1 + \frac{h(x)}{h_i} \right] + c_i \left[ 1 + \frac{h_i - h(x)}{h_i} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Así, la ec. (5.20) se escribe en términos de los  $a_i$  y  $c_i$  como [87]

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \frac{a_{i+1} h(x) + a_i [h_i - h(x)]}{h_i} \\ &\quad - \frac{1}{3} h(x) [h_i - h(x)] \left\{ c_{i+1} \left[ 1 + \frac{h(x)}{h_i} \right] + c_i \left[ 1 + \frac{h_i - h(x)}{h_i} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ahora, podemos obtener una expresión para  $g'(x)$  en términos de valores conocidos. Notemos que el comportamiento de  $h(x)$  para cualquier subintervalo  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  es el mismo:  $h(x_i) = 0$  y  $h(x_{i+1}) = h_i$ . Dadas las características de los FF, le exigimos a la derivada del spline cúbico que  $g'(x) \leq 0$ . Es conveniente poner esta derivada en términos de  $h(x)$ , por lo que hacemos la relación  $dh(x) = d(x - x_i) = dx$ . Para poder escribir la derivada de forma matricial, debemos elegir un valor  $x$  para evaluar. Elegimos  $x = x_{i+1}$ , por lo que

$$\begin{aligned} g'_i(x) &= \frac{dg_i(x)}{dx} = \frac{dg_i(x)}{dh(x)} = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{1}{3} \left( [h_i - h(x)] \left\{ c_{i+1} \left[ 1 + \frac{h(x)}{h_i} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_i \left[ 1 + \frac{h_i - h(x)}{h_i} \right] \right\} - h(x) \left\{ c_{i+1} \left[ 1 + \frac{h(x)}{h_i} \right] + c_i \left[ 1 + \frac{h_i - h(x)}{h_i} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + h(x)[h_i - h(x)] \left[ \frac{c_{i+1}}{h_i} - \frac{c_i}{h_i} \right] \right) \\ &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{1}{3} \left( [h_i - 2h(x)] \left\{ c_{i+1} \left[ 1 + \frac{h(x)}{h_i} \right] + c_i \left[ 1 + \frac{h_i - h(x)}{h_i} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h(x)}{h_i} [h_i - h(x)] [c_{i+1} - c_i] \right). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} g'_i(x_{i+1}) &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{1}{3} \left( [h_i - 2h_i] \left\{ c_{i+1} \left[ 1 + \frac{h_i}{h_i} \right] + c_i \left[ 1 + \frac{h_i - h_i}{h_i} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_i}{h_i} [h_i - h_i] [c_{i+1} - c_i] \right) = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} + \frac{h_i}{3} [2c_{i+1} + c_i]. \end{aligned}$$

Encontramos que la restricción  $g'(x_{i+1}) \leq 0$  se representa como

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} + \frac{h_i}{3} [2c_{i+1} + c_i] \leq 0.$$

Esta desigualdad se limita a cuantificar la derivada en un punto. Para tener el comportamiento global debemos expresar la derivada como un producto de matrices y vectores.

Sea  $\mathbf{M}$  una matriz bidiagonal de dimensiones  $(n-1) \times n$  cuyas entradas distintas de cero son

$$m_{i,i} = -\frac{1}{h_i}, \quad m_{i,i+1} = \frac{1}{h_i},$$

con  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Sea  $\mathbf{D}$  una matriz bidiagonal de dimensiones  $(n-1) \times (n-2)$  cuyas entradas distintas de cero son

$$d_{i,i} = 2h_i, \quad d_{i-1,i} = h_i,$$

con  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Así, la condición para la derivada global del spline cúbico se escribe como

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{D}\mathbf{c} \leq \mathbf{0}. \quad (5.22)$$

Esta expresión tiene la ventaja de no ser una comparación directa entre los puntos  $\mathcal{P}$  suavizados. En caso de que alguna de las filas del producto sea mayor a cero, y antes de descartar el modelo, procedemos de la siguiente manera: para el intervalo  $I_i$  con derivada mayor a cero, construimos una función  $k_i(x)$  dada por

$$k_i(x) = \alpha + \beta(x - x_i) + \gamma(x - x_i)^2,$$

que usa a  $g(x_i)$  y  $g(x_{i+2})$  para construir un  $\bar{g}(x_{i+1})$  que satisfaga la restricción. A esta función le exigimos que

$$k_i(x_i) = g(x_i), \quad k_i(x_{i+2}) = g(x_{i+2}) \quad \text{y} \quad \left( \frac{dk_i(x)}{dx} \right) \Big|_{x_i} = 0.$$

De la primera y tercera condición se concluye que  $\alpha = g(x_i)$  y  $\beta = 0$ . Por otro lado, la segunda condición nos dice que

$$k_i(x_{i+2}) = g(x_{i+2}) = g(x_i) + \gamma(x_{i+2} - x_i)^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{g(x_{i+2}) - g(x_i)}{(x_{i+2} - x_i)^2}.$$

Así,

$$k_i(x) = g(x_i) + [g(x_{i+2}) - g(x_i)] \left( \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i} \right)^2.$$

Entonces, como  $k_i(x_{i+1}) \equiv \bar{g}(x_{i+1})$ , tenemos que

$$\bar{g}(x_{i+1}) = g(x_i) + [g(x_{i+2}) - g(x_i)] \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_i} \right)^2. \quad (5.23)$$

Para el caso de  $I_{n-1}$ , donde no hay un  $g(x_{n+1})$  para comparar, reformulamos la ec. (5.23) como

$$\bar{g}(x_n) = g(x_{n-2}) + [g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})] \left( \frac{x_n - x_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \right)^2. \quad (5.24)$$

Sin embargo, aún con los datos suavizados de la manera deseada, sigue existiendo la posibilidad de que el modelo del MPS presente polos. Perfectamente puede existir una función  $\mathcal{C}_n(x)$  con  $x \in \mathcal{I}$  que tenga uno o más polos. Una forma segura de verificar el modelo es haciendo una evaluación y comparación directa de  $\mathcal{C}_n(x)$  en un número  $m \gg n$  de puntos, lo suficientemente grande para aproximarse a una evaluación en todo  $\mathcal{I}$ . Entonces, para toda función  $\mathcal{C}_n(x)$  debemos verificar que

$$\mathcal{C}_n(x_j) > \mathcal{C}_n(x_{j+1}), \quad (5.25)$$

con  $j = 1, 2, \dots, m$  y  $1 \gg |x_{j+1} - x_j| > 0$ .

La implementación de estas restricciones nos permite separar aquellos conjuntos de datos pseudoaleatorios  $\hat{\mathcal{D}}$  que producen un modelo del MPS monótono y continuo de aquellos que no cumplen nuestras restricciones, como se puede ver en la Fig. 5.3 que compara un modelo “A” sin restricciones, usado en la Fig. 5.2, con un modelo “B” con restricciones.

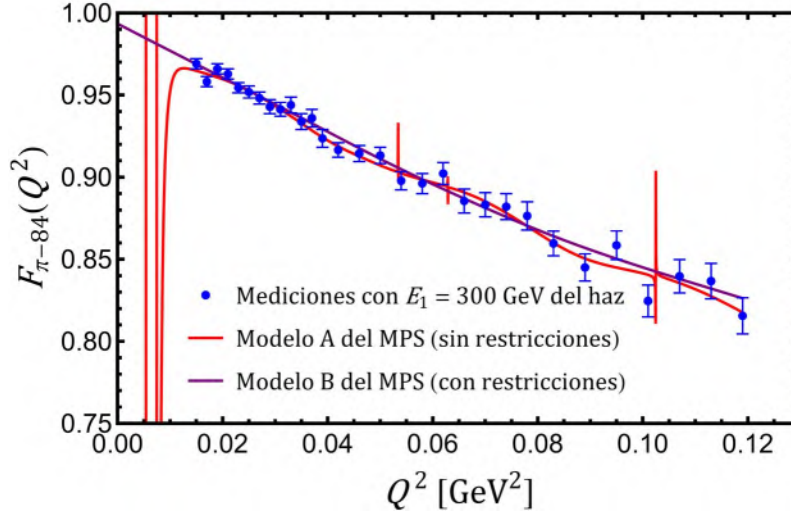


Figura 5.3: Comparación entre las mediciones experimentales del FFE del pión [48] con un modelo A del MPS sin restricciones y un modelo B del MPS con restricciones.

Con todos los conceptos anteriores desarrollados, podemos construir un modelo del MPS que reproduce algún FF. Considerando que  $\mathcal{C}_n(x) \equiv \{F(Q^2), A(Q^2), D(Q^2)\}_{p,\pi}$  podemos obtener los valores de los FF en cero, así como los radios de carga, masa y mecánico de los hadrones a partir de las ecs. (3.54, 4.33, 4.34, 4.37). También, resulta útil para calcular la ec. (4.36).

#### SECCIÓN 5.4

### Cálculo de los radios

El algoritmo que hemos desarrollado permite construir un modelo del MPS que, apoyado por determinadas restricciones, genera una propuesta de FF que es monótona, decreciente y continua. Además de este resultado confiable, el algoritmo presenta una característica que podemos explotar de manera notable. El uso de números pseudoalea-

torios nos permite considerar la incertidumbre de los datos y transmitirla al valor final a través de la construcción de numerosos conjuntos de valores pseudoaleatorios, de los cuales obtenemos su respectivo radio, o cantidad de interés, y en consecuencia podemos tener un valor promedio con su incertidumbre.

### 5.4.1 Obtención del promedio final

Sea  $\mathcal{D} = \{\mathcal{P}_i = (x_i, f_i \pm \delta f_i), \text{ con } i = 1, 2, \dots, n\}$  nuestro conjunto de datos. Construimos un total de  $k_0 - 5$  grupos denotados por  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$ , donde  $k_0 = n/2$ . En caso de que  $k_0$  sea fraccionario, tomamos el entero mayor inmediato. Cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  cuenta con  $\ell_0$  elementos, siendo los elementos conjuntos  $\mathcal{D}_\ell^k$  formados por combinaciones de los  $\mathcal{P}_i$  del conjunto  $\mathcal{D}$ . El superíndice  $k$  denota la cantidad de puntos que forman a  $\mathcal{D}_\ell^k$ , mientras el subíndice  $\ell$  denota el número del conjunto  $\mathcal{D}_\ell^k$ . En cada grupo no debe haber dos conjuntos iguales. Los índices corren de la siguiente forma:  $k = 6, 7, \dots, k_0$  y  $\ell = 1, 2, \dots, \ell_0$ . Estos grupos se visualizan como

$$\{\mathcal{D}_\ell^6\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D}_1^6 \\ \mathcal{D}_2^6 \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{\ell_0-1}^6 \\ \mathcal{D}_{\ell_0}^6 \end{array} \right\}, \quad \{\mathcal{D}_\ell^7\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D}_1^7 \\ \mathcal{D}_2^7 \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{\ell_0-1}^7 \\ \mathcal{D}_{\ell_0}^7 \end{array} \right\}, \dots, \quad \{\mathcal{D}_\ell^{k_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D}_1^{k_0} \\ \mathcal{D}_2^{k_0} \\ \vdots \\ \mathcal{D}_{\ell_0-1}^{k_0} \\ \mathcal{D}_{\ell_0}^{k_0} \end{array} \right\},$$

donde explícitamente  $\mathcal{D}_\ell^k = (\mathcal{P}_{a_1}, \mathcal{P}_{a_2}, \dots, \mathcal{P}_{a_{k-1}}, \mathcal{P}_{a_k})$ , con los  $\mathcal{P}_{a_j}$  elegidos mediante números pseudoaleatorios por una distribución uniforme de probabilidad que va de 1 hasta  $n$  y ordenados de tal forma que  $x_j < x_{j+1}$ . Ahora, tomamos cualquier  $\mathcal{D}_\ell^k$  y generamos un total de  $m_0$  conjuntos de valores pseudoaleatorios que denotamos por  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$ . Ilustramos este grupo como

$$\left\{ \hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathcal{D}}_\ell^k(1) \\ \hat{\mathcal{D}}_\ell^k(2) \\ \vdots \\ \hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m_0 - 1) \\ \hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m_0) \end{array} \right\}, \quad \text{con} \quad \hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m) = (\hat{\mathcal{P}}_{a_1}^m, \hat{\mathcal{P}}_{a_2}^m, \dots, \hat{\mathcal{P}}_{a_{k-1}}^m, \hat{\mathcal{P}}_{a_k}^m),$$

donde  $\hat{\mathcal{P}}_{a_j}^m = (x_j, \hat{f}_j^m)$ . A partir de cada  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$  calculamos un radio, ecs. (3.54, 4.33, 4.34, 4.37), o cantidad de interés, por lo que nuestro resultado final es un promedio de un total de  $s_0 = (k_0 - 5) \times \ell_0 \times m_0$  valores.

Denotamos al radio, o cantidad de interés, asociado a  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$  como  $r_\ell^k(m)$ . Una vez se hayan obtenido todos los  $r_\ell^k(m)$  de cada  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$ , calculamos el radio  $r_\ell^k$  de  $\{\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)\}$ ,

con su respectiva incertidumbre  $(\sigma_r)_\ell^k$ , mediante

$$r_\ell^k = \frac{1}{m_0} \sum_{m=1}^{m_0} r_\ell^k(m), \quad (\sigma_r)_\ell^k = \left\{ \frac{1}{m_0 - 1} \sum_{m=1}^{m_0} [r_\ell^k - r_\ell^k(m)]^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.26)$$

Después, el radio  $r^k$  e incertidumbre  $(\sigma_r)^k$  de cada  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  lo calculamos como

$$r^k = \frac{1}{\ell_0} \sum_{\ell=1}^{\ell_0} r_\ell^k, \quad (\sigma_r)^k = \left\{ \frac{1}{\ell_0^2} \sum_{\ell=1}^{\ell_0} [(\sigma_r)_\ell^k]^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.27)$$

Finalmente, el radio  $r$  e incertidumbre  $\sigma_r$  se calculan por

$$r = \frac{1}{k_0 - 5} \sum_{k=6}^{k_0} r^k, \quad \sigma_r = \left\{ \frac{1}{(k_0 - 5)^2} \sum_{k=6}^{k_0} [(\sigma_r)^k]^2 + \frac{1}{k_0 - 6} \sum_{k=6}^{k_0} [r - r^k]^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.28)$$

En este caso,  $\sigma_r$  está formada por dos términos, debido a que los promedios de los  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  fueron obtenidos de conjuntos con diferente cantidad de puntos, lo que implica una segunda fuente de incertidumbre. Entonces, el valor final del radio, o la cantidad de interés, está dado por

$$\langle \mathbf{r} \rangle = r \pm \sigma_r. \quad (5.29)$$

## 5.4.2 Implementación del método numérico

En esta implementación se utilizó la biblioteca **Eigen/Dense** [93] para **C++**, enfocada en álgebra lineal. Por otro lado, se discretizaron los dominios de evaluación para la función VCG y el modelo del MPS como a continuación se describe.

- Dado  $\lambda \in [0, 1]$  para la función VCG, lo discretizamos como  $\lambda_i \in (0, 1)$ , donde  $\lambda_i = \lambda_0 \times i$ , siendo  $\lambda_0 = 10^{-4}$  con  $i = 1, 2, \dots, 10^4 - 1$ .
- Para el modelo del MPS que se evalúa en  $\mathcal{I} = [0, x_n]$ , discretizamos  $x$  como  $x_j \in [0, x_n)$ , donde  $x_j = x_\delta \times j$ , siendo  $x_\delta = x_n/10^5$  con  $j = 0, 1, 2, \dots, 10^5 - 1$ .

De manera general, el algoritmo utilizado se puede sintetizar de la siguiente forma:

1. Dado un conjunto  $\mathcal{D}$ , construimos los respectivos  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$ , junto con los  $\{\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)\}$  generados a partir de números pseudoaleatorios.
2. Seleccionamos un  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$  para calcular su respectivo  $r_\ell^k(m)$ .

3. Introducimos los datos de  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$  en la ec. (5.12) para obtener  $\mathbf{c}$ . Utilizamos el método de descomposición de Cholesky debido a que es especialmente ágil para sistemas con matrices diagonales. El resultado se introduce en la ec. (5.11) para obtener  $\hat{\mathbf{g}}$ .
4. Evaluamos la ec. (5.17), donde  $f_i \rightarrow \hat{f}_i$ , para todos los  $\lambda_i \in (0, 1)$  y encontramos el  $\lambda_{\text{opt}}$  que minimiza la función VCG.
5. Verificamos que el spline cúbico generado satisfaga la ec. (5.22), y en caso de que no lo haga, usamos las ecs. (5.23, 5.24).
6. Obtenido el  $\hat{\mathbf{g}}$  dado por  $\lambda_{\text{opt}}$ , lo introducimos en las ecs. (5.18, 5.19) para el modelo del MPS.
7. Evaluamos  $\mathcal{C}_n(x)$  en todo  $\mathcal{I}$ , verificando que el modelo sea monótono, decreciente y continuo. De persistir los polos, el  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$  es descartado y se crea uno nuevo.
8. Mediante  $\mathcal{C}_n(x)$  calculamos nuestra cantidad de interés.
9. Repetimos el procedimiento para todos los conjuntos de datos pseudoaleatorios.
10. Utilizamos las ecs. (5.26-5.28) para obtener la ec. (5.29).

Con este algoritmo, las cantidades de interés que podemos obtener de forma directa, mediante el método de VCG y MPS, son:  $F_{p,\pi}(0)$ ,  $A_{p,\pi}(0)$ ,  $D_{p,\pi}(0)$ ,  $A'_p(0)$ ,  $\langle r_{p,\pi} \rangle_{\text{eléc}}$ ,  $\langle r_\pi \rangle_{\text{masa}}$  y  $\langle r_\pi \rangle_{\text{mecá}}$ . Para el cálculo de  $\langle r_p \rangle_{\text{masa}}$  y  $\langle r_p \rangle_{\text{mecá}}$  usamos los promedios  $r^k$  correspondientes en las ecs. (4.33, 4.34). Teniendo claro cuáles son las cantidades que vamos a calcular, podemos definir el valor de  $\ell_0$  y  $m_0$ , los cuales son

$$\ell_0 = 500 \quad \text{y} \quad m_0 = 100.$$

Por su parte, el valor de  $k_0$  depende de la cantidad de puntos de cada  $\mathcal{D}$ . Para el cálculo de cualquier derivada que sea requerida, utilizamos el método de *diferencias centrales*,

$$\mathcal{C}'_n(x_0) \approx \frac{\mathcal{C}_n(x_0 + h_0) - \mathcal{C}_n(x_0 - h_0)}{2h_0},$$

donde  $h_0 = 10^{-6}$ . El número total de valores a promediar para cada una de las cantidades de nuestro interés se presenta en la Tabla 5.1.

Por último, es necesario hacer el tratamiento de la ec. (4.34) de manera separada al resto de estimaciones. Hacemos el cálculo de la integral mediante dos métodos diferentes, cada uno con sus ventajas y limitaciones. Sin embargo, ambos comparten los mismos datos pseudoaleatorios.

Para el primer método, tomamos el modelo dipolar (MD), ec. (4.35), del cual tenemos el valor analítico de su integral, ec. (4.36). Con la extrapolación del término- $D$

| Hadrón         | FF           | No. de puntos | $k_0$ | $s_0$   |
|----------------|--------------|---------------|-------|---------|
| Protón ( $p$ ) | $F_p(Q^2)$   | 33            | 17    | 600,000 |
|                | $A_p(Q^2)$   | 34            | 17    | 600,000 |
|                | $D_p(Q^2)$   | 33            | 17    | 600,000 |
| Pión ( $\pi$ ) | $F_\pi(Q^2)$ | 30            | 15    | 500,000 |
|                | $A_\pi(Q^2)$ | 25            | 13    | 400,000 |
|                | $D_\pi(Q^2)$ | 24            | 12    | 350,000 |

Tabla 5.1: Listado de los FF del protón y pión con los números  $k_0$  y  $s_0$ .

fijamos la constante  $\alpha$ , dejando únicamente a  $\Lambda^2$  como parámetro libre. Suponemos que  $\Lambda^2 \in (0, 2)$ , pues en los trabajos previos que utilizan este modelo [59, 63] el valor de  $\Lambda^2$  siempre es inferior a dos. Además, las primeras pruebas del cálculo numérico se hicieron con dominios mayores, de cero a cinco, y los valores que tomó el parámetro nunca eran mayores a dos. Así, dada la función de mínimos cuadrados

$$\text{MC}(\Lambda^2) = \sum_{i=1}^n [D_2(t_i; \Lambda^2) - \hat{g}(t_i)]^2, \quad (5.30)$$

elegimos el  $\Lambda_{\text{opt}}^2$  que la minimice. La ventaja de este método radica en tener una integral de cero a infinito, pero que no involucra los valores  $\hat{g}(t_i)$ . Dado  $\Lambda_0^2 = 10^{-5}$ , tenemos  $\Lambda_i^2 \in (0, 2)$ , donde  $\Lambda_i^2 = \Lambda_0^2 \times i$  y con  $i = 1, 2, \dots, 2 \times 10^5 - 1$ .

Para el segundo método, tomamos  $\mathcal{C}_n(x)$  del modelo MPS y expresamos su integral en la forma de una suma de Riemann en el dominio  $\mathcal{I}$ , donde el elemento diferencial  $\Delta x_0 = x_n/10^5$ . Así,

$$\int_0^{x_n} D(t) dt = \Delta x_0 \sum_{j=0}^{10^5} \mathcal{C}_n(x_j), \quad (5.31)$$

donde  $x_j = x_0 \times j$ . La ventaja de este método es que trabajamos explícitamente con los valores  $\hat{g}(t_i)$ , a costa de no hacer la integral de cero a infinito, pues nuestro algoritmo sólo nos garantiza que  $\mathcal{C}_n(x)$  es monótona, decreciente y continua en  $\mathcal{I}$ .

Debido a que el segundo método depende explícitamente del dominio  $\mathcal{I}$ , este caso especial debe tener un número  $\ell$  menor al resto de cantidades. Imponemos una condición adicional: para el cálculo de las ecs. (4.36, 5.31) tomamos únicamente aquellos  $\mathcal{D}_\ell^k$  que contengan al  $\mathbf{Q}_{\text{máx}}^2$ , esto con el propósito de tener el valor más exacto posible para la ec. (5.31). Adicional a esta restricción, calculamos otro caso especial de la siguiente forma: tomamos todo el conjunto  $\mathcal{D}$  para  $D_p(Q^2)$  y le aplicamos el algoritmo desarrollado previamente, en concreto del punto 3 al 9. Hacemos 500 conjuntos de valores pseudoaleatorios y una vez se tienen los  $\hat{\mathbf{g}}$  respectivos, construimos sus ecs. (4.36, 5.31).

---

# Capítulo 6

## Resultados

---

La discusión sobre los resultados del método numérico se divide de la siguiente forma: primero, exponemos los promedios finales de los valores de los FF para un momento transferido nulo, posteriormente los radios de carga, masa y mecánico, así como las cantidades auxiliares o reescaladas. Esto se hace primero para el protón y, posteriormente, para el pión. Después, profundizamos en los resultados de las cantidades de interés para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$ , así como el comportamiento del parámetro de suavizado  $\lambda_{\text{opt}}$  y la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$ , para cada FF. Finalmente, comparamos los resultados de este trabajo con aquellos obtenidos previamente en la literatura.

### SECCIÓN 6.1

#### Resultados numéricos

##### 6.1.1 Promedios finales

Para el caso del protón, los valores de sus FF en  $q^2 = 0 \text{ GeV}^2$  estan dados por

$$F_p(0) = 1.00003 \pm 0.00003, \quad (6.1)$$

$$A_p(0) = 0.959 \pm 0.014, \quad (6.2)$$

$$D_p(0) = -1.332 \pm 0.042. \quad (6.3)$$

Añadimos el valor de

$$A'_p(0) = -0.0286 \pm 0.0034 \text{ fm}^2, \quad (6.4)$$

mientras que las estimaciones de los radios de carga, masa y mecánico son

$$\langle r_p \rangle_{\text{eléc}} = 0.827 \pm 0.003 \text{ fm}, \quad (6.5)$$

$$\langle r_p \rangle_{\text{masa}} = 0.520 \pm 0.017 \text{ fm}, \quad (6.6)$$

$$\langle r_p \rangle_{\text{mecá}}^{\text{MPS}} = 0.562 \pm 0.010 \text{ fm}, \quad (6.7)$$

$$\langle r_p \rangle_{\text{mecá}}^{\text{MD}} = 0.427 \pm 0.011 \text{ fm}, \quad (6.8)$$

respectivamente. Por otro lado, los valores finales de las integrales son

$$\mathcal{I}_{\text{MPS}} = 0.991 \pm 0.029 \text{ GeV}^2,$$

$$\mathcal{I}_{\text{MD}} = 1.725 \pm 0.041 \text{ GeV}^2.$$

Ahora, para el caso del pión, encontramos que los valores de sus FF en  $q^2 = 0$   $\text{GeV}^2$  son

$$F_\pi(0) = 0.994 \pm 0.002, \quad (6.9)$$

$$A_\pi(0) = 1.014 \pm 0.009, \quad (6.10)$$

$$D_\pi(0) = -0.755 \pm 0.020, \quad (6.11)$$

mientras que las estimaciones de los radios de carga, masa y mecánico están dadas por

$$\langle r_\pi \rangle_{\text{eléc}} = 0.634 \pm 0.016 \text{ fm}, \quad (6.12)$$

$$\langle r_\pi \rangle_{\text{masa}} = 0.347 \pm 0.012 \text{ fm}, \quad (6.13)$$

$$\langle r_\pi \rangle_{\text{mecá}} = 0.357 \pm 0.021 \text{ fm}, \quad (6.14)$$

respectivamente. Por otro lado, los valores reescalados para los radios de masa y mecánico son

$$\langle r_\pi \rangle_{\text{masa}}^{m_\pi \approx 140 \text{ MeV}} = 0.421 \pm 0.015 \text{ fm}, \quad (6.15)$$

$$\langle r_\pi \rangle_{\text{mecá}}^{m_\pi \approx 140 \text{ MeV}} = 0.433 \pm 0.025 \text{ fm}. \quad (6.16)$$

También, podemos obtener las relaciones de proporcionalidad entre los radios de las partículas. Tomamos como parámetro de comparación a los radios de carga eléctrica, por ser los más estudiados y derivados con datos experimentales. Para el caso del protón, el cociente carga-masa es

$$\left( \frac{r_p^{\text{masa}}}{r_p^{\text{eléc}}} \right) = 0.629 \pm 0.023,$$

mientras que los cocientes carga-mecánico son

$$\left( \frac{r_p^{\text{mecá-MPS}}}{r_p^{\text{eléc}}} \right) = 0.680 \pm 0.014, \quad \left( \frac{r_p^{\text{mecá-MD}}}{r_p^{\text{eléc}}} \right) = 0.517 \pm 0.015,$$

para ambas estimaciones del radio mecánico. En el caso del MPS obtenemos que la jerarquía de radios es

$$r_p^{\text{masa}} < r_p^{\text{mecá-MPS}} < r_p^{\text{eléc}}, \quad (6.17)$$

mientras que para el caso MD obtenemos

$$r_p^{\text{mecá-MD}} < r_p^{\text{masa}} < r_p^{\text{eléc}}. \quad (6.18)$$

Para ambos casos, la distribución de la masa y el volumen mecánico son más compactos que la distribución de la carga eléctrica. Pero, dependiendo del método de integración, la posición del radio mecánico en la jerarquía cambia. Por otro lado, en el caso del pión, donde tomamos los radios reescalados, encontramos que los cocientes de proporcionalidad son

$$\left( \frac{r_\pi^{\text{masa}}}{r_\pi^{\text{eléc}}} \right) = 0.664 \pm 0.027,$$

en el caso carga-masa, el cual cae dentro de los límites físicos [94], que están dados por el dominio  $(r_\pi^{\text{masa}}/r_\pi^{\text{eléc}}) \in [\frac{1}{2}, 1]$ , y

$$\left( \frac{r_\pi^{\text{mecá}}}{r_\pi^{\text{eléc}}} \right) = 0.683 \pm 0.058,$$

en el caso carga-mecánico. Para el pión encontramos que la jerarquía de los radios es

$$r_\pi^{\text{masa}} \lesssim r_\pi^{\text{mecá}} < r_\pi^{\text{eléc}}, \quad (6.19)$$

la cual coincide con el caso de la ec. (6.17).

Pasamos a presentar detalladamente los resultados para los FF del protón, seguidos de los resultados para los FF del pión. En ambos casos, el orden en que se presentan los FF es:  $F(Q^2)$ ,  $A(Q^2)$  y  $D(Q^2)$ .

### 6.1.2 Resultados para los factores de forma del protón

**FFE.** Los valores obtenidos para este FF están restringidos a rangos bastante estrechos. Mientras que  $F_p(0)$  coincide completamente con el valor teórico, comparar  $F(0) = 1$  con la ec. (6.1), el radio de carga se encuentra en un rango de  $r_p^{\text{eléc}} \in (0.81, 0.84)$  fm, como se puede ver en la Fig. 6.1 y la Tabla 8.1, lo cual indica que, independientemente del número  $k$  de puntos, el modelo del MPS con VCG tiende a arrojar valores similares en este caso.

Antes de pasar a la discusión sobre el comportamiento de parámetro  $\lambda_{\text{opt}}$ , así como de la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  para este FF, y el resto de casos, debemos recordar qué significan los valores extremos del parámetro de suavizado. Partiendo de la ec. (5.9) es

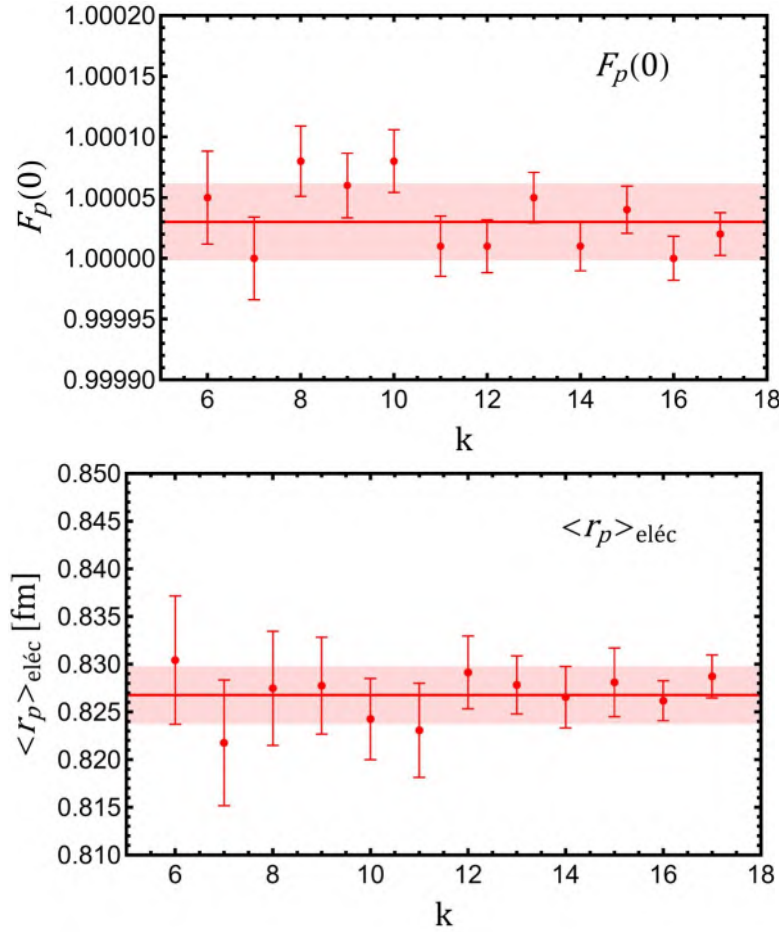


Figura 6.1: Arriba: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.1), para  $F_p(0)$ . Abajo: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.5), para  $\langle r_p \rangle_{\text{eléc}}$ .

evidente que  $\lambda_{\text{opt}} \approx 0$  significa que el conjunto de datos pseudoaleatorios ajustados  $\hat{\mathbf{g}}$  fue sometido a una suavización total, mientras que si  $\lambda_{\text{opt}} \approx 1$  entonces  $\hat{\mathbf{g}}$  no requirió ninguna suavización. Valores intermedios, como es lógico, indican que una suavización parcial fue necesaria para hacer que  $\hat{\mathbf{g}}$  satisfaga las restricciones impuestas.

Para el FFE del protón, el parámetro de suavizado  $\lambda_{\text{opt}}$  tiende fuertemente a tomar los valores extremos del dominio. Se presentan dos picos muy pronunciados en los extremos del rango de valores. Pero, conforme el valor  $k$  aumenta, el número de veces que  $\lambda_{\text{opt}}$  toma valores en la vecindad de uno decrece, mientras que el número de veces que toma valores proximos a cero permanece constante. Los valores que el extremo derecho pierde se distribuyen en un rango que va de 0.8 hasta 1.0. Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.1. Por otro lado, los valores que toma la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  se concentran principalmente en un rango que va de cero a cinco, y conforme aumenta el

valor  $k$  este dominio se acentúa más. Decimos que

$$\text{VCG}_p^{\text{FFE}}(\lambda_{\text{opt}}) \in (0, 5). \quad (6.20)$$

Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.2.

**FFA.** Para este FF obtenemos los valores de  $A_p(0)$  y  $A'_p(0)$ . El comportamiento de ambas cantidades es menos uniforme que el de los resultados para el FFE, como se puede ver en la Fig. 6.2 y la Tabla 8.2. Se destaca especialmente que el valor obtenido para  $A_p(0)$  es inferior a la predicción teórica, ver ec. (4.9), por aproximadamente cuatro centésimas en promedio.

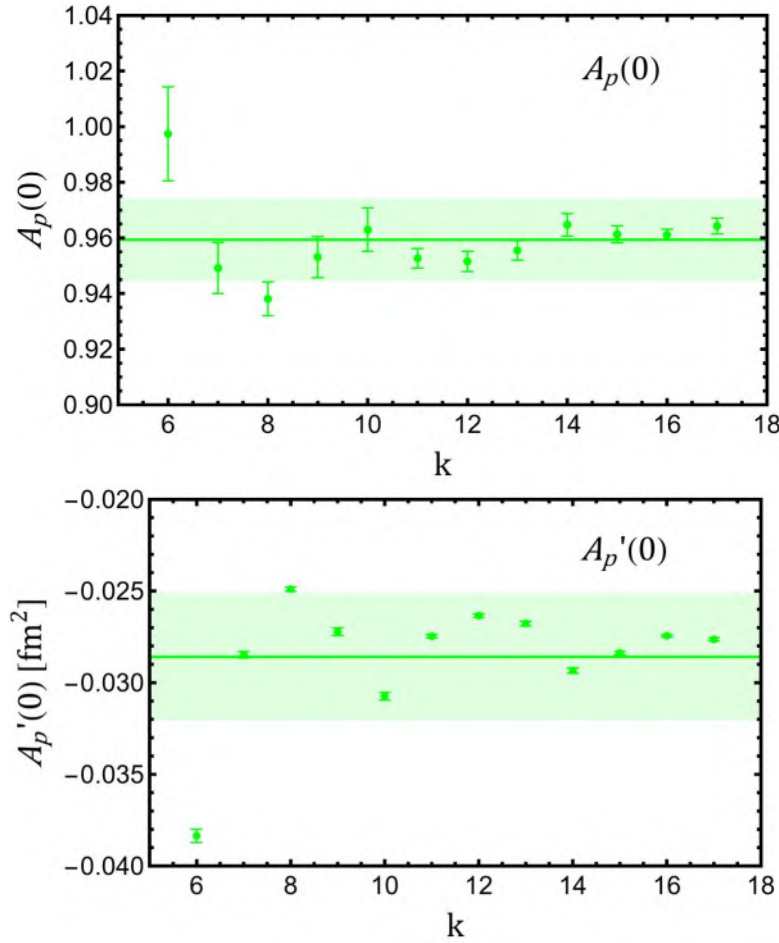


Figura 6.2: Arriba: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.2), para  $A_p(0)$ . Abajo: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.4), para  $A'_p(0)$ .

Para el FFA del protón, el parámetro de suavizado  $\lambda_{\text{opt}}$  comienza tomando valores en todo el dominio, con picos pronunciados en los extremos y teniendo una predilección por la vecindad de cero. A medida que  $k$  crece, los picos en los extremos del dominio se reducen, especialmente en la vecindad de uno. Para  $k_0$ , el parámetro de suavizado

no toma valores en la vecindad de uno, tiende a tomar valores en torno a  $\lambda_{\text{opt}} \sim 0.05$ . Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.6. Por otro lado, los valores que toma la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  inicialmente se concentran en un rango de cero a diez, pero a medida que  $k$  crece, el dominio se concentra en

$$\text{VCG}_p^{\text{FFA}}(\lambda_{\text{opt}}) \in (0, 4). \quad (6.21)$$

Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.7.

**FFD.** Para este FF derivamos el término- $D$ , que presenta un dominio de valores  $-D_p \in (1.25, 1.40)$ , como se puede ver en la Fig. 6.3 y la Tabla 8.3. Destacamos que  $-D_p(0)$  tiene un valor mínimo en  $k = 9$  y para valores mayores de  $k$  presenta una tendencia creciente.

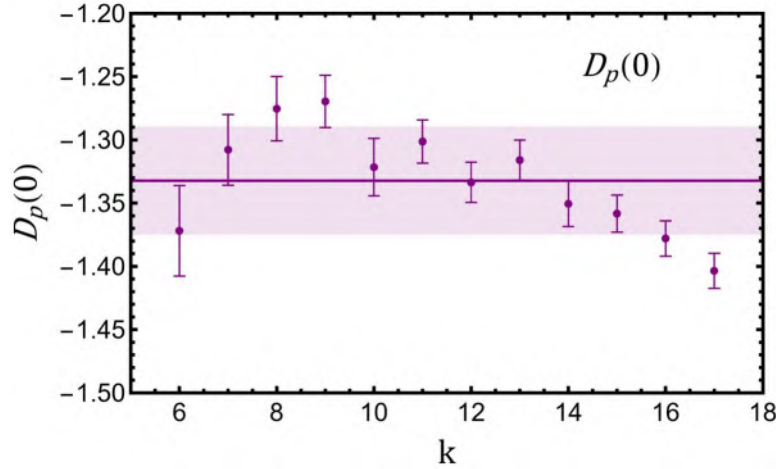


Figura 6.3: Valores obtenidos y promedio final, ec. (6.3) para el término- $D$  del protón.

Para el FFD del protón, el parámetro de suavizado  $\lambda_{\text{opt}}$  comienza tomando valores sobre todo el dominio de manera uniforme, a excepción de los extremos donde se presenta un pico pronunciado cerca de cero y un pico menos sobresaliente cerca de uno. A medida que  $k$  aumenta, el parámetro de suavizado toma menos valores de la vecindad de uno, a la par que el pico en esta sección del dominio decrece rápidamente, mientras que el pico en la vecindad de cero decrece lentamente. Además, los valores que toma  $\lambda_{\text{opt}}$  se concentran ligeramente en la primera mitad del dominio. Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.11. Por otro lado, los valores que toma la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  inicialmente se restringen a un dominio de cero a siete. A medida que  $k$  aumenta, este dominio se reduce hasta

$$\text{VCG}_p^{\text{FFD}}(\lambda_{\text{opt}}) \in (0, 4). \quad (6.22)$$

Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.12.

### 6.1.3 Resultados para los factores de forma del pión

**FFE.** El comportamiento de  $F_\pi(0)$  está bien delimitado a una vecindad ligeramente por debajo del valor teórico,  $F(0) = 1$ , mientras que el valor del radio de carga,  $\langle r_\pi \rangle_{\text{eléc}}$ , está restringido a un rango de  $r_\pi^{\text{eléc}} \in (0.61, 0.68)$  fm, aproximadamente. Estos comportamientos se pueden ver en la Fig. 6.4 y la Tabla 8.4.

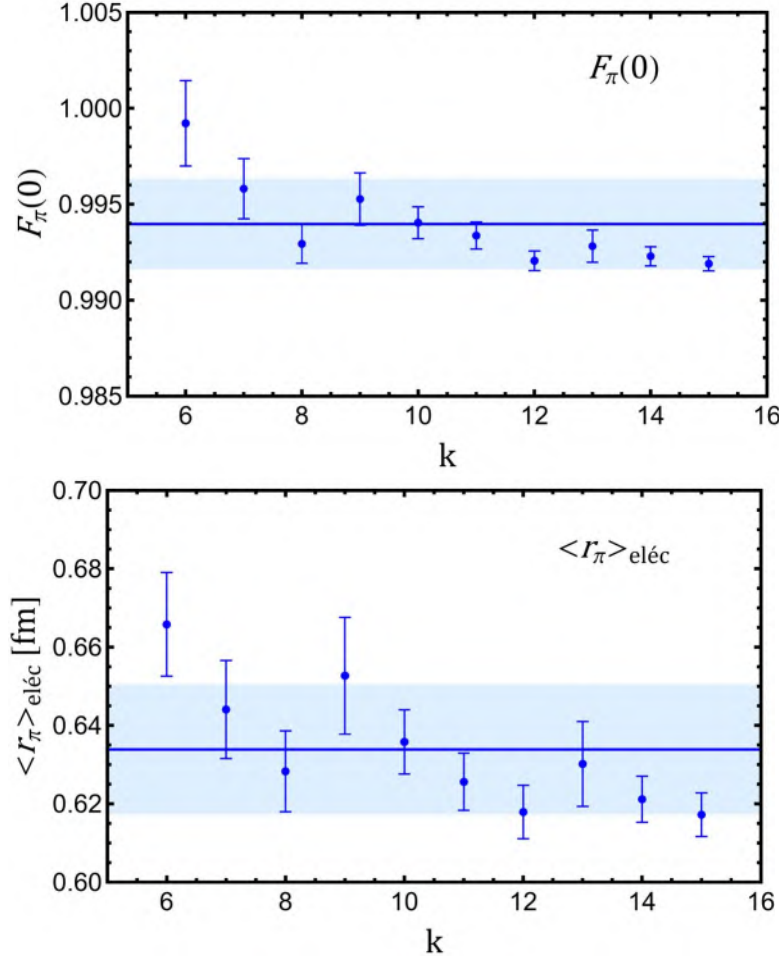


Figura 6.4: Arriba: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.9), para  $F_\pi(0)$ . Abajo: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.12), para  $\langle r_\pi \rangle_{\text{eléc}}$ .

Para el FFE del pión, el parámetro de suavizado  $\lambda_{\text{opt}}$  comienza tomando valores en todo el interior del dominio, con una tendencia notoria a tomar valores de la segunda mitad. De igual forma, presenta dos picos en los extremos. A medida que  $k$  aumenta, la predilección por la segunda mitad del dominio decrece hasta ser ligeramente superior a la de la primera mitad. A la par, el pico en la vecindad de uno decrece, mientras que el pico en la vecindad de cero permanece constante. Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.15. Por otro lado, los valores que toma la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  inicialmente

viven en un rango de cero a seis y a medida que  $k$  crece este rango se reduce ligeramente hasta

$$\text{VCG}_\pi^{\text{FFE}}(\lambda_{\text{opt}}) \in (0, 5). \quad (6.23)$$

Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.16.

**FFA.** El comportamiento del valor  $A_\pi(0)$  está ligeramente por encima de la predicción teórica, ver ec. (4.9), oscilando en una vecindad de  $A_\pi(0) \sim 1.01$ . Por otro lado, el radio de masa,  $\langle r_\pi \rangle_{\text{masa}}$ , presenta valores que se encuentran en un rango de  $r_\pi^{\text{masa}} \in (0.33, 0.38)$  fm, como se puede ver en la Fig. 6.5 y la Tabla 8.5.

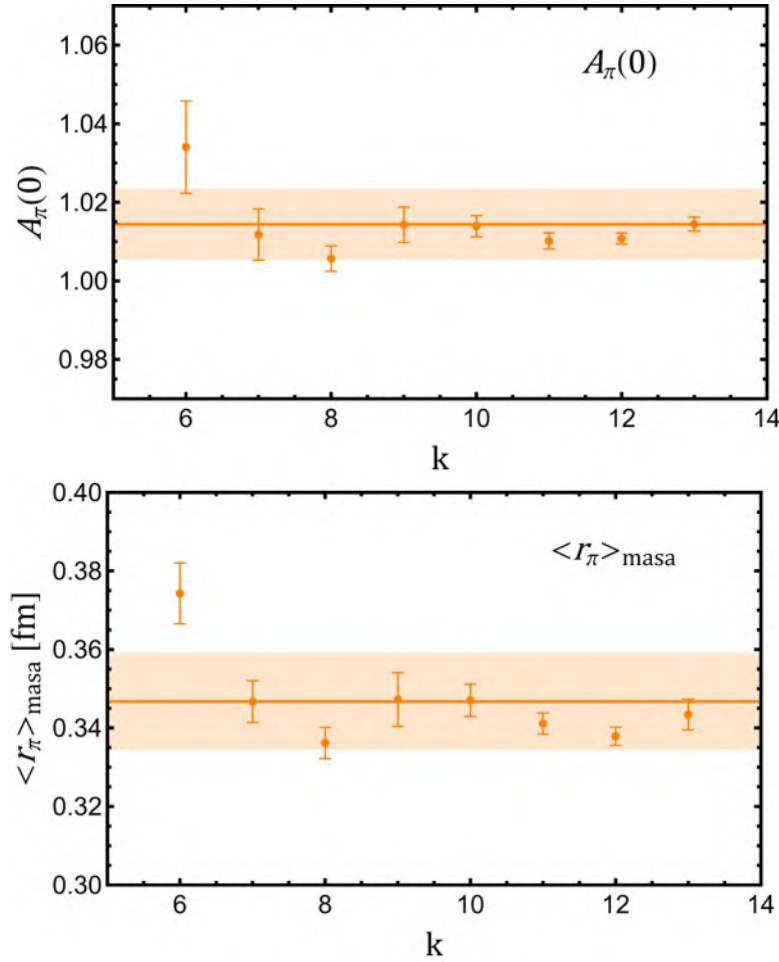


Figura 6.5: Arriba: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.10), para  $A_\pi(0)$ . Abajo: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.13), para  $\langle r_\pi \rangle_{\text{masa}}$ .

Para el FFA del pión, el parámetro de suavizado  $\lambda_{\text{opt}}$  comienza tomando valores sobre todo el dominio, con una marca preferencia por valores en la vecindad de cero. También, presenta picos en los extremos del dominio. A medida que  $k$  aumenta, el parámetro  $\lambda_{\text{opt}}$  deja de tomar valores en la vecindad de uno, y el pico en esta región

decrece hasta casi desaparecer. Mientras, los valores se concentran fuertemente en la primera mitad del dominio, y el pico de esta región se desplaza a  $\lambda_{\text{opt}} \sim 0.05$ . Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.20. Por otro lado, los valores de la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  inicialmente están distribuidos en un rango amplio, que va de cero hasta catorce, pero a medida que el número  $k$  aumenta, el dominio se cierra rápidamente hasta terminar en

$$\text{VCG}_{\pi}^{\text{FFA}}(\lambda_{\text{opt}}) \in (0, 4). \quad (6.24)$$

Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.21.

**FFD.** Las predicciones del término- $D$  que obtuvimos se encuentra lejos del valor esperado para bosones de Goldstone en el límite quiral,  $D^{\text{BG}} = -1$ , pues  $-D_{\pi}(0) \in (0.73, 0.80)$ . Mientras, el valor del radio mecánico oscila en un rango de  $r_{\pi}^{\text{mecá}} \in (0.34, 0.40)$  fm, como se puede ver en la Fig. 6.6 y la Tabla 8.6.

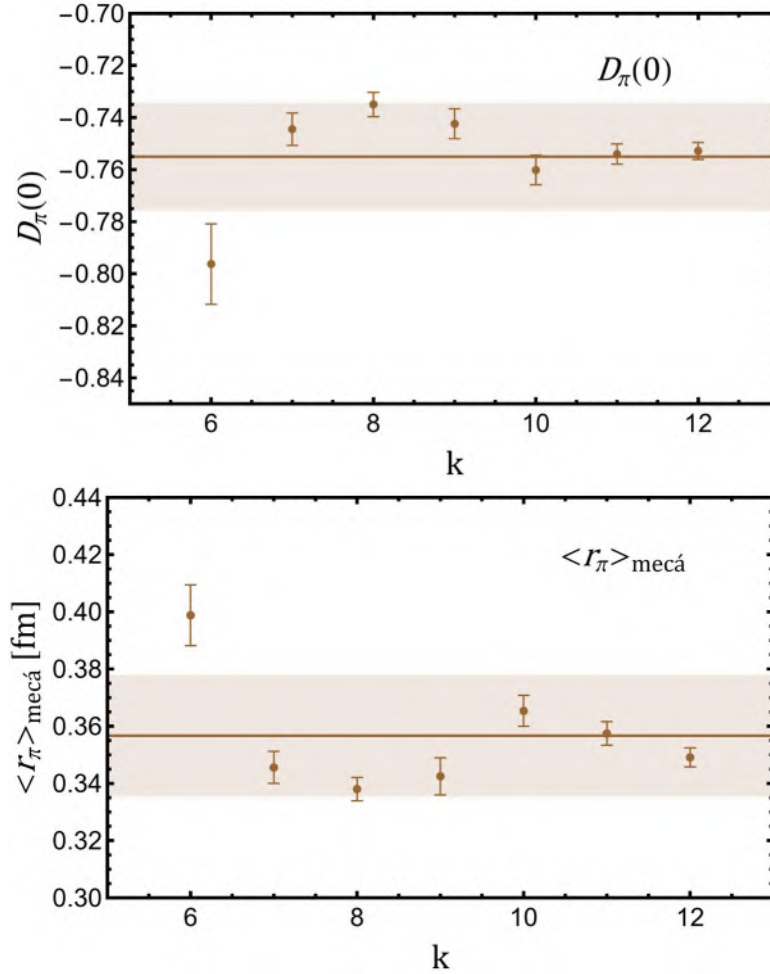


Figura 6.6: Arriba: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.11), para el término- $D$  del pión. Abajo: valores obtenidos y promedio final, ec. (6.14), para  $\langle r_{\pi} \rangle_{\text{mecá}}$ .

Para el FFD del pión, el parámetro de suavizado  $\lambda_{\text{opt}}$  comienza tomando valores sobre todo el dominio, con una predilección marcada por la primera mitad. Como en el resto de casos, también cuenta con dos picos marcados en los extremos, siendo más pronunciado el de la vencidad de cero. A medida que  $k$  aumenta, la cantidad de veces que  $\lambda_{\text{opt}}$  toma valores cercanos a uno decrece hasta ser nula en un rango de 0.8 hasta 1.0. De manera contraria, el parámetro toma cada vez más valores en la primera mitad del dominio, sin que el pico en cero disminuya. Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.25. Por otro lado, los valores de la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  inicialmente se distribuyen en un rango que va de cero hasta ocho y a medida que  $k$  crece, el dominio se cierra significativamente hasta ser

$$\text{VCG}_{\pi}^{\text{FFD}}(\lambda_{\text{opt}}) \in (0, 5). \quad (6.25)$$

Este comportamiento se puede ver en la Fig. 8.26.

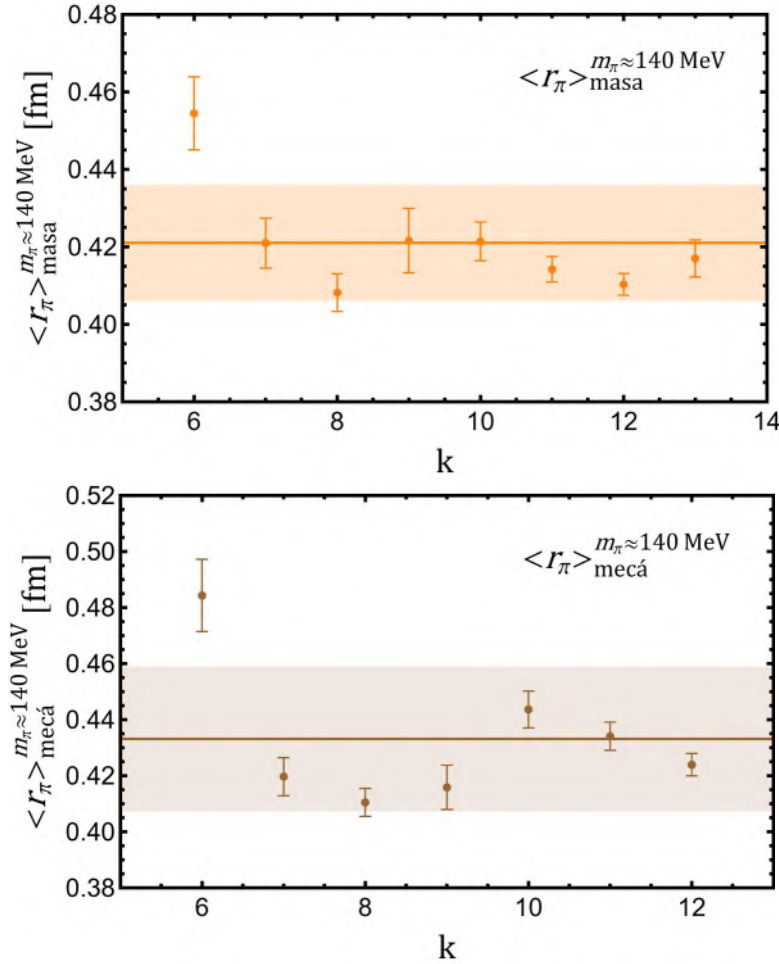


Figura 6.7: Arriba: valores reescalados y promedio final, ec. (6.15), de  $\langle r_{\pi} \rangle_{\text{masa}}$ . Abajo: valores reescalados y promedio final, ec. (6.16), de  $\langle r_{\pi} \rangle_{\text{mecá}}$ .

Como se mencionó en el Capítulo 4, las estimaciones numéricas de IQCD para los FFG del pión fueron hecha suponiendo un pión más masivo que el real. Esto modifica las dimensiones de los radios de masa y mecánico, como ilustra la ec. (4.40). Usando la ec. (4.41) podemos hacer un reescalamiento. Encontramos que, en promedio, el reescalamiento aumenta las dimensiones de los radios alrededor de 0.08 fm, como se puede ver al comparar los resultados de la Tabla 8.5 y Tabla 8.6 con la Tabla 8.7, así como en la Fig. 6.7.

#### 6.1.4 Radios de masa y mecánico del protón

En el caso del radio de masa del protón,  $\langle r_p \rangle_{\text{masa}}$ , nos resulta útil que tanto el FFA como el FFD tengan el mismo  $k_0 = 17$ . Así, podemos construir para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  su respectivo radio de masa. Utilizando los valores expuestos en la Tabla 8.2 y Tabla 8.3 en la ec. (4.33) vemos que el radio de masa toma valores en un dominio de  $r_p^{\text{masa}} \in (0.50, 0.57)$  fm, como se puede ver en la Fig. 6.8 y Tabla 8.8.

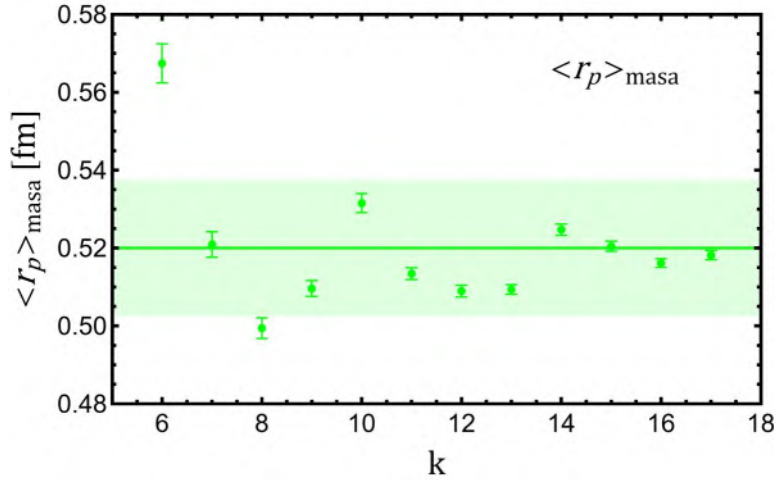


Figura 6.8: Valores obtenidos y promedio final, ec. (6.6), para el radio de masa,  $\langle r_p \rangle_{\text{masa}}$ .

Para el cálculo del radio mecánico del protón,  $\langle r_p \rangle_{\text{mecá}}$ , utilizamos aquellos conjuntos  $\mathcal{D}_\ell^k$  que contienen a  $\mathbf{Q}_{\text{máx}}^2$ . Estos datos fueron introducidos en el modelo MD y el modelo del MPS, con el fin de obtener dos valores posibles para el radio mecánico. En el caso del modelo MD, ecs. (4.36, 5.30), los resultados para el término- $D$  y  $\Lambda_{\text{opt}}^2$  se muestran en la Tabla 8.9. Los valores del término- $D$  son ligeramente menores que los expuestos en la Tabla 8.3. Por otro lado, es notorio un comportamiento decreciente de  $\Lambda_{\text{opt}}^2$  a medida que  $k$  aumenta. Los valores que toma la integral, ec. (4.36), para este modelo viven en una vecindad alrededor de 1.7 GeV<sup>2</sup>. Mientras, para el modelo del MPS, ec. (5.31), la integral se puede realizar de forma directa. En este caso, los valores de dicha integral oscilan alrededor de 1.0 GeV<sup>2</sup>. Para ambos métodos de cálculo,

los valores de la integral mediante MD ( $\mathcal{I}_{\text{MD}}$ ) y mediante MPS ( $\mathcal{I}_{\text{MPS}}$ ) son invariantes respecto de  $k$ , como se puede ver en la Fig. 8.37 y la Tabla 8.10. Queda claro que la contribución a la integral del FFD evaluado sobre  $\mathbf{Q}^2 > 2 \text{ GeV}^2$  es significativa, por lo que no es despreciable

A partir de estas dos familias de valores para la integral del FFD, podemos obtener dos familias de estimaciones para el radio mecánico del protón. Usando los resultados de la Tabla 8.3 y la Tabla 8.10 en la ec. (4.34) obtenemos las estimaciones presentadas en la Fig. 6.9 y la Tabla 8.11. Los valores del radio mecánico derivados de  $\mathcal{I}_{\text{MPS}}$  se encuentran dentro de una vecindad de  $r_{p-\text{MPS}}^{\text{mecá}} \sim 0.56 \text{ fm}$ , mientras que los resultados del radio mecánico derivados de  $\mathcal{I}_{\text{MD}}$  toman valores alrededor de  $r_{p-\text{MD}}^{\text{mecá}} \sim 0.43 \text{ fm}$ . La diferencia entre ambas familias de estimaciones para el radio mecánico es del orden de  $0.13 \text{ fm}$ . Esta diferencia significativa, producto del dominio parcial de integración de  $\mathcal{I}_{\text{MPS}}$ , sugiere que la estimación más precisa es la proporcionada por el método MD.

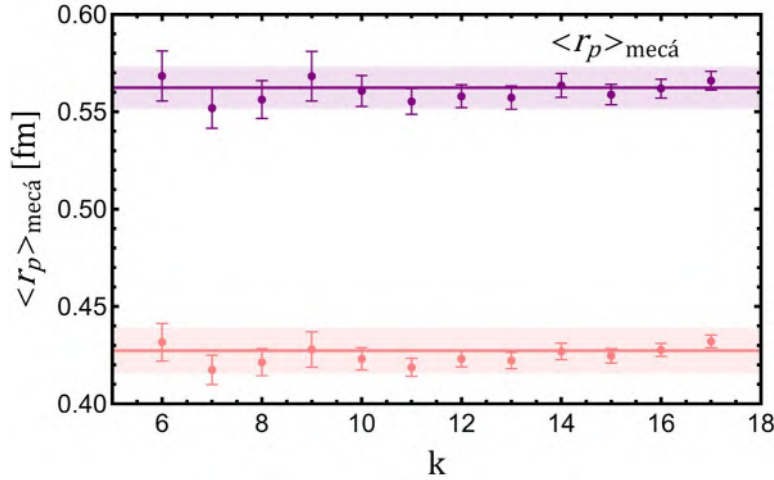


Figura 6.9: Valores obtenidos y promedios finales para el radio mecánico,  $\langle r_p \rangle_{\text{mecá}}$ . Morado: estimaciones del MPS, ec. (6.7). Rosa: estimaciones del MD, ec. (6.8).

Finalmente, los resultados para el caso donde se usó todo el conjunto  $\mathcal{D}$  se muestran en la Tabla 6.1. Estos resultados siguen la tendencia marcada por aquellos expuestos desde la Tabla 8.3, Tabla 8.9, hasta la Tabla 8.11. Resaltamos que el valor del término- $D$  mantiene la tendencia a crecer conforme el valor de  $k$  aumenta. Concretamente, aumentó en terminos absolutos casi  $0.2$  unidades respecto al valor de  $k = 17$  de la Tabla 8.3. Por su parte, el parámetro  $\Lambda_{\text{opt}}^2$  mantiene su tendencia decreciente. También, vemos que los valores para las integrales siguen dentro de los rangos ya establecidos de  $1.0 \text{ GeV}^2$  para el modelo del MPS y  $1.7 \text{ GeV}^2$  para el modelo MD. Sumado a esto, las estimaciones para el radio mecánico son ligeramente superiores a las mostradas en la Tabla 8.11. Esto se explica por el valor del término- $D$  obtenido. Podemos decir que el caso especial de  $k = 33$  puntos nos permite tener una idea bastante clara del valor límite de todas las cantidades involucradas en la derivación del radio mecánico del protón.

|                                              |                                                     |                                             |                                                    |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $D_p(0)$                                     | $\delta D_p(0)$                                     | $\Lambda_{\text{opt}}^2 [\text{GeV}^2]$     | $\delta \Lambda_{\text{opt}}^2 [\text{GeV}^2]$     |
| -1.582                                       | 0.242                                               | 1.136                                       | 0.167                                              |
| $\mathcal{I}_{\text{MPS}} [\text{GeV}^2]$    | $\delta \mathcal{I}_{\text{MPS}} [\text{GeV}^2]$    | $\mathcal{I}_{\text{MD}} [\text{GeV}^2]$    | $\delta \mathcal{I}_{\text{MD}} [\text{GeV}^2]$    |
| 1.082                                        | 0.082                                               | 1.760                                       | 0.098                                              |
| $r_{p\text{-MPS}}^{\text{mecá}} [\text{fm}]$ | $\delta r_{p\text{-MPS}}^{\text{mecá}} [\text{fm}]$ | $r_{p\text{-MD}}^{\text{mecá}} [\text{fm}]$ | $\delta r_{p\text{-MD}}^{\text{mecá}} [\text{fm}]$ |
| 0.584                                        | 0.067                                               | 0.458                                       | 0.048                                              |

Tabla 6.1: Valores medios e incertidumbres de  $D_p(0)$  y  $\Lambda_{\text{opt}}^2$ , así como las integrales  $\mathcal{I}_{\text{MPS}}$  y  $\mathcal{I}_{\text{MD}}$ , y los radios mecánicos  $r_{p\text{-MPS}}^{\text{mecá}}$  y  $r_{p\text{-MD}}^{\text{mecá}}$  para el caso especial de  $k = 33$  con  $m = 500$ .

### 6.1.5 Comparación con otros trabajos

Para el caso del protón, las comparaciones se hacen en las Figs. 6.10-6.13. En el caso del radio de carga eléctrica, ver Fig. 6.10, nuestro resultado, ec. (6.5), se encuentra dentro del rango de valores esperados. Este rango de valores se divide en dos grupos principales: uno marcado por experimentos que involucran al *hidrógeno muónico* y cuyos valores para el radio de carga suelen rondar los 0.83 fm [30], mientras que el otro grupo engloba experimentos de dispersión elástica electrón-protón, y similares, cuyos resultados para el radio de carga rondan los 0.88 fm [30]. Esta discrepancia de valores se conoce como el *rompecabezas del radio del protón* [95, 96]. Nuestro resultado está dentro del rango del primer grupo, con una discrepancia del 0.4 %. Para una comparación clara de ambos grupos de resultados se puede revisar la Fig. 1 de la Ref. [30]. En el caso del radio de masa, ver Fig. 6.11, nuestro resultado, ec. (6.6), es considerablemente más pequeño que el resto de las estimaciones, teniendo una separación de aproximadamente 0.1 fm del valor más cercano. Esto significa que nuestra predicción para la distribución de la masa del protón es más compacta que el resto. Una comparación más amplia del radio de masa del protón se puede revisar en la Fig. 6 (b) de la Ref. [99]. En el caso del término- $D$ , ver Fig. 6.12, nuestros resultados, ec. (6.3) y Tabla 6.1, son, en valor absoluto, menores que la mayoría de las estimaciones. Esto en gran medida es atribuible a la escasez y comportamiento de los datos de lQCD en el dominio de momento transferido a muy bajas energías, también llamadas virtualidades. Sin embargo, existen estimaciones previas que coinciden con nuestra predicción. Para una comparación más extensa de predicciones para el término- $D$  se puede revisar la Fig. 5 de la Ref. [99]. Finalmente, en el caso del radio mecánico, ver Fig. 6.13, nuestros resultados, ecs. (6.7, 6.8) y Tabla 6.1, son menores que la totalidad de predicciones con que se comparan, pero en el caso de los radios obtenidos por el MPS la diferencia es bastante menor. Tomando como punto de referencia la predicción de Burkert *et al.* [100], de 0.634 fm, los radios obtenidos mediante MPS son un 11 % menores, mientras que los radios obtenidos por MD son un 33 % más pequeños.

Para el caso del pión, las comparaciones se hacen en las Figs. 6.14-6.17. En el caso del radio de carga eléctrica, ver Fig. 6.14, nuestro resultado, ec. (6.12), se ajusta bastante bien a la mayoría de estimaciones previas, con la excepción de dos resultados donde se asumió que  $m_\pi \approx 170$  MeV. A diferencia del protón, en el caso del pión no hay una discrepancia significativa entre las predicciones. Para una comparación con estimaciones más antiguas se puede revisar la Fig. 3 de la Ref. [31]. En el caso del radio de masa, ver Fig. 6.15, nuestros resultados, ecs. (6.13, 6.15), se encuentran en una región intermedia de las predicciones previas. Tomando como punto de referencia las predicciones de Kumano *et al.* [62] y Broniowski *et al.* [103], de 0.39 fm y las más cercanas a nuestros resultados, encontramos que el valor no-reescalado es un 11 % más pequeño, mientras que el valor reescalado es un 8 % mayor. En el caso del término- $D$ , ver Fig. 6.16, nuestro resultado, ec. (6.11), es, en valor absoluto, menor que las estimaciones previas, que están más proximas, en mayor o menor medida, al caso ideal de los bosones de Goldstone. Únicamente la predicción por expansión- $z$  de Hackett *et al.* [58] toma valores en el dominio de nuestra estimación. Nuestro resultado para el término- $D$ , comparado con el dominio de valores posibles definido previamente, ec. (4.38), refleja un mesón pseudoescalar de masa finita. Al igual que con el protón, este resultado es consecuencia del comportamiento de los datos en  $Q^2 \approx 0$  GeV<sup>2</sup>, siendo nuestra predicción más parecida a las estimaciones del término- $D$  del kaón [63]. Finalmente, en el caso del radio mecánico, ver Fig. 6.17, nuestros resultados, ecs. (6.14, 6.16), son menores que la mayoría de las estimaciones previas. Tomando como referencia el valor de Xing *et al.* [101], de 0.39 fm, nuestro resultado no-reescalado es un 8 % más pequeño, mientras que nuestro resultado reescalado es un 11 % más grande. Además, es destacable que no hay un patrón claro para el valor del radio mecánico del protón y pión.

Antes de pasar a la exposición de las Figs. 6.10-6.17, es necesario señalar que todas las incertidumbres presentadas son del tipo estadístico. Sumado a esto, las bandas que cruzan verticalmente las gráficas representan nuestros resultados finales para cada radio o término- $D$  de las respectivas partículas.

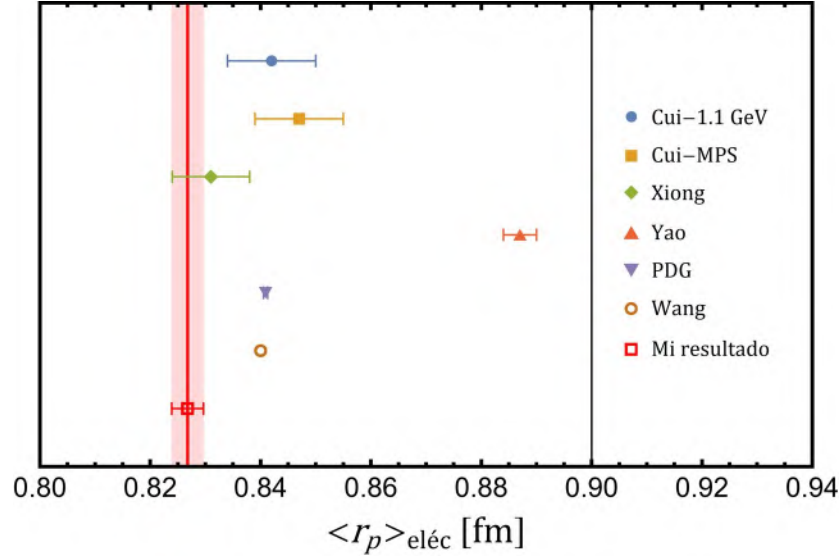


Figura 6.10: Comparación de diferentes valores para el radio de carga eléctrica del protón, que incluye (de arriba a abajo): valor obtenido únicamente de las mediciones experimentales a 1.1 GeV (ver Ref. [47]) y promedio final de Cui *et al.* [30], Xiong *et al.* [47], Yao *et al.* [61], Particle Data Group [104], Wang *et al.* [97] y el resultado de este trabajo.

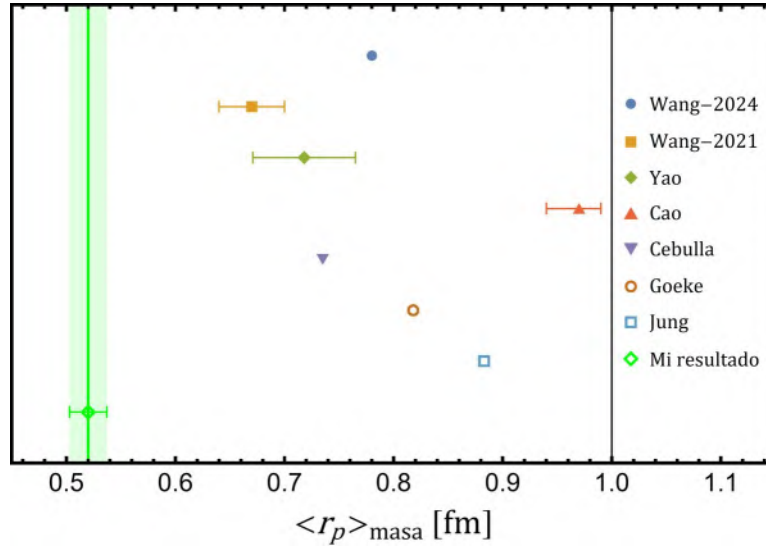


Figura 6.11: Comparación de diferentes valores para el radio de masa del protón, que incluye (de arriba a abajo): Wang *et al.* (2024) [97], Wang *et al.* (2021) [98], Yao *et al.* [61], Cao *et al.* [99], Cebulla *et al.* [80], Goeke *et al.* [83], Jung *et al.* [81] y el resultado de este trabajo.

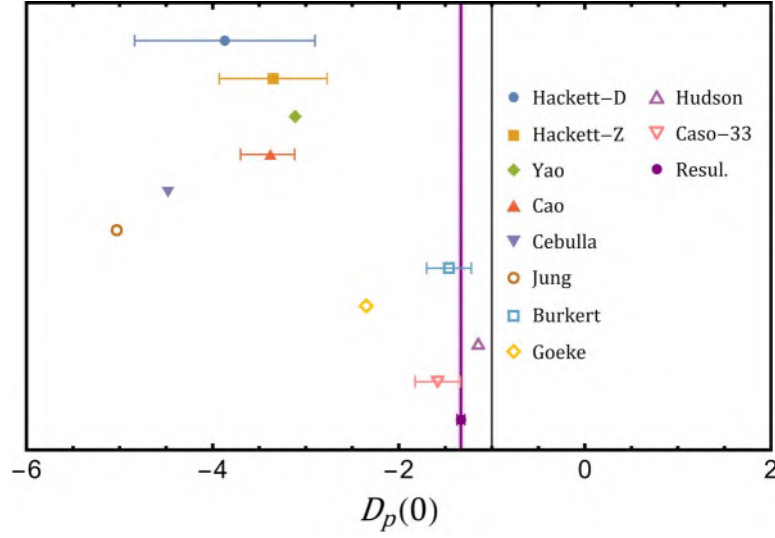


Figura 6.12: Comparación de diferentes valores para el término- $D$  del protón, que incluye (de arriba a abajo): modelo dipolar y expansión- $z$  de Hackett *et al.* [59], Yao *et al.* [61], Cao *et al.* [99], Cebulla *et al.* [80], Jung *et al.* [81], Burkert *et al.* [100], Goeke *et al.* [83], Hudson *et al.* [82], el caso especial de  $k = 33$  puntos y el resultado final de este trabajo.

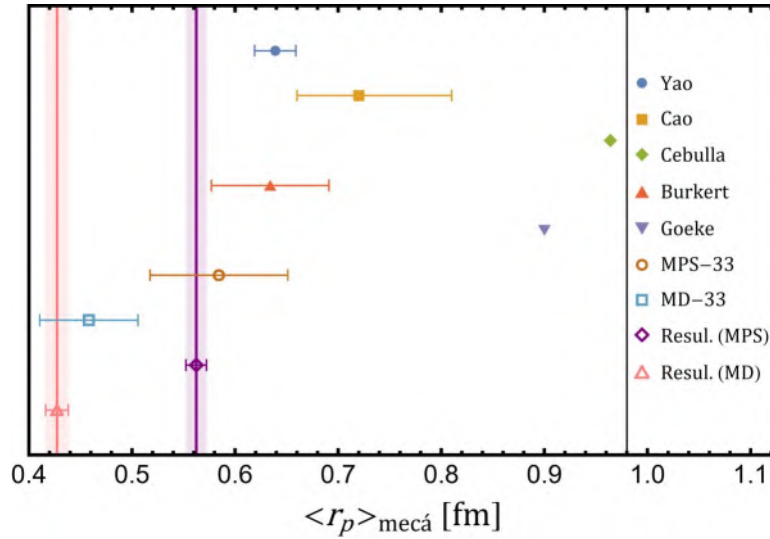


Figura 6.13: Comparación de diferentes valores para el radio mecánico del protón, que incluye (de arriba a abajo): Yao *et al.* [61], Cao *et al.* [99], Cebulla *et al.* [80], Burkert *et al.* [100], Goeke *et al.* [83], el caso especial de  $k = 33$  puntos para el modelo del MPS y MD, y resultados finales para el modelo del MPS y MD.

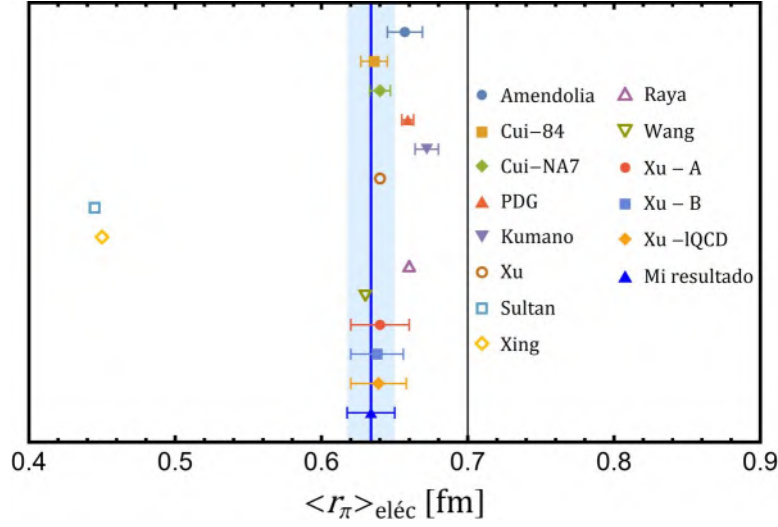


Figura 6.14: Comparación de diferentes valores para el radio de carga eléctrica del pión, que incluye (de arriba a abajo): Amendolia *et al.* [48], valor obtenido únicamente de las mediciones experimentales de 1984 (ver Ref. [48]) y promedio final de Cui *et al.* [31], Particle Data Group [104], Kumano *et al.* [62], Xu *et al.* [60], Sultan *et al.* [69], Xing *et al.* [101], Raya *et al.* [102], Wang *et al.* [97], valores del caso A, B y lQCD de Xu *et al.* [94], y el resultado de este trabajo.

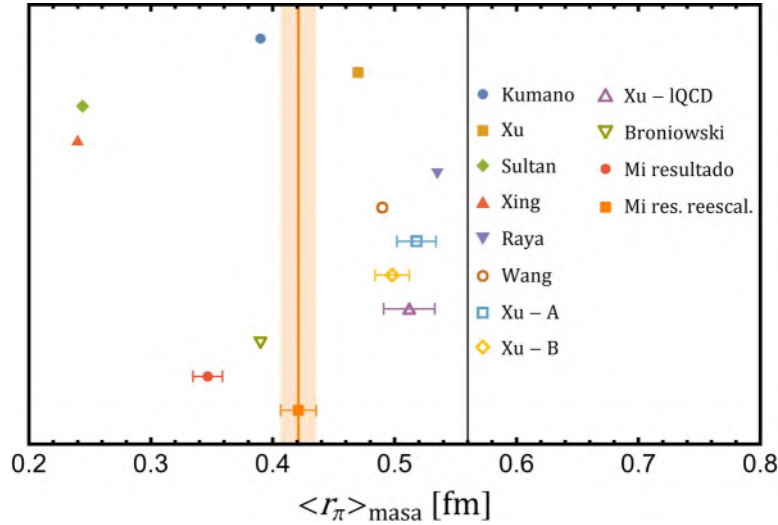


Figura 6.15: Comparación de diferentes valores para el radio de masa del pión, que incluye (de arriba a abajo): Kumano *et al.* [62], Xu *et al.* [60], Sultan *et al.* [69], Xing *et al.* [101], Raya *et al.* [102], Wang *et al.* [97], valores del caso A, B y lQCD de Xu *et al.* [94], Broniowski *et al.* [103], el resultado de este trabajo y su reescalamiento.

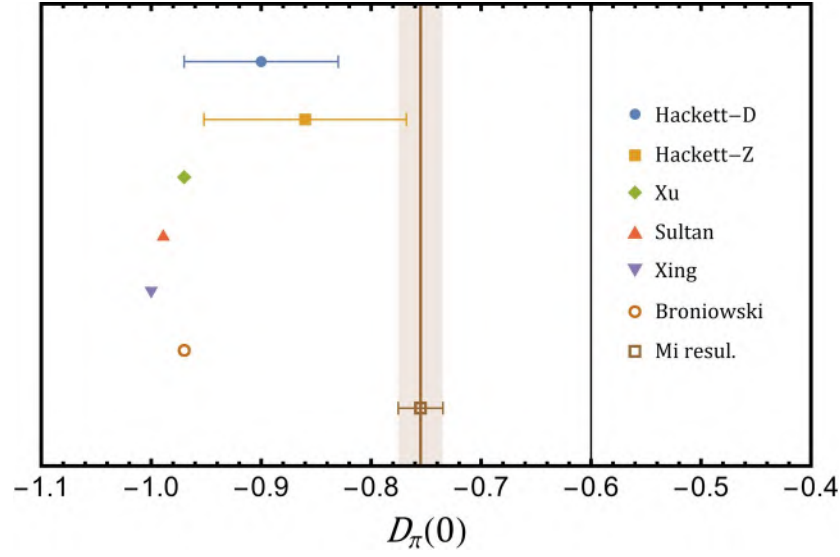


Figura 6.16: Comparación de diferentes valores para el término- $D$  del pión, que incluye (de arriba a abajo): modelo dipolar y expansión- $z$  de Hackett *et al.* [58], Xu *et al.* [60], Sultan *et al.* [69], Xing *et al.* [101], Broniowski *et al.* [103] y el resultado de este trabajo.

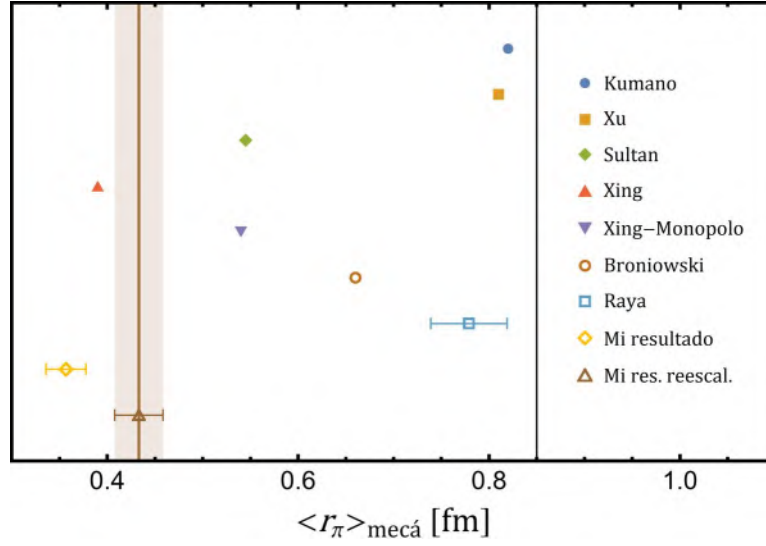


Figura 6.17: Comparación de diferentes valores para el radio mecánico del pión, que incluye (de arriba a abajo): Kumano *et al.* [62], Xu *et al.* [60], Sultan *et al.* [69], aproximación mediante ecuación de Bethe-Salpeter y modelo monopolar de Xing *et al.* [101], Broniowski *et al.* [103], Raya *et al.* [102], el resultado de este trabajo y su reescalamiento.

---

# Capítulo 7

## Conclusiones

---

Mediante el uso del Método de Puntos de Schlessinger con splines cúbicos suavizados a través de la función de Validación-Cruzada Generalizada hemos obtenido estimaciones para los radios de carga eléctrica, masa y mecánico del protón y pión, así como sus respectivos términos- $D$ . Las predicciones para los radios de carga eléctrica están dentro de las dimensiones esperadas. Particularmente, el radio de carga del protón se inclina más hacia el bando del *hidrógeno muónico*, mientras que el radio de carga del pión coincide con una gran cantidad de predicciones. Por otro lado, en ambos casos encontramos que la distribución de masa y el volumen mecánico son más compactos que la distribución de carga. Nuestros resultados sugieren que la masa de los hadrones ocupa un menor volumen que aquel ocupado por su carga. Se puede decir que la esfera de influencia de la carga eléctrica ocupa un mayor espacio que la masa a la que está asociada.

Al observar nuestras predicciones para el término- $D$  del protón y pión es claro que son, en valor absoluto, más pequeñas que la inmensa mayoría de las estimaciones previas. Una posible explicación para estos resultados reducidos es la forma en cómo nuestro método numérico trata el comportamiento errático de los datos del FFD cerca de  $\mathbf{Q}^2 = 0 \text{ GeV}^2$ . El núcleo del MPS con VCG radica en la utilización del parámetro  $\lambda$  para construir un  $\hat{\mathbf{g}}$  que satisfaga nuestras restricciones. Si revisamos la comparación del modelo del MPS con los datos del FFD del protón en la Fig. 8.14 notamos que la interpolación de la función VCG suprime la influencia del  $\mathcal{P}_1$ , así como lo hace para un punto cerca de  $\mathbf{Q}^2 = 1.2 \text{ GeV}^2$ . Ambos datos son tratados como anomalías por el método numérico. Un fenómeno similar ocurre para el pión. Si revisamos la Fig. 8.29, el modelo del MPS describe curvas que viven en la región intermedia del dominio delimitado por

---

la incertidumbre de los datos, lo que conduce a un valor absoluto de  $D_\pi(0)$  menor a uno. Que tengamos valores reducidos para el término- $D$  influye directamente en las dimensiones del radio mecánico, dado que el radio mecánico está en función de la fuerza normal  $F^\parallel(r)$ , y el término- $D$  se puede escribir en función de una de sus componentes: la fuerza tangencial  $s(r)$ . Sin embargo, la naturaleza precisa de esta relación aún no se puede discernir correctamente. En lo referente a nuestros resultados, los radios mecánicos para el protón y pión son de un orden de magnitud similar, o menor, que los radios de masa. Estos resultados sugieren que el volumen mecánico, aquel en el que los quarks y gluones viven producto del confinamiento, tiene dimensiones similares, o inferiores, que el espacio ocupado por la masa de los hadrones.

En el caso del comportamiento del método numérico, encontramos que para un número de puntos  $k = 6$  el parámetro de suavizado  $\lambda_{\text{opt}}$  tiende a tomar los valores extremos de su dominio, independientemente de la incertidumbre de los datos introducidos. Pero, a medida que  $k$  aumenta, el número de combinaciones pseudoaleatorias que no requieren suavización ( $\lambda_{\text{opt}} \approx 1$ ) para satisfacer las restricciones impuestas se reduce significativamente, llegando a ser nula en algunos casos. La región predilecta por  $\lambda_{\text{opt}}$  para  $k = k_0$  cambia dependiendo de cada conjunto de datos, pero tiende a valores que se concentran en la primera mitad del dominio. Por otro lado, el comportamiento de la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  es prácticamente idéntico en todos los casos. La función, para  $k = 6$ , tiende a estar restringida a dominios más o menos definidos, los cuales, al aumentar el valor de  $k$ , se acentúan significativamente, dejando a los valores fuera de estos dominios como una anomalía o una minoría marginal. Podemos decir que la función  $\text{VCG}$ , en general, está restringida al dominio  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}}) \in (0, 5)$ .

---

# Capítulo 8

## Apéndice

---

En este Capítulo, dedicado al material complementario, enlistamos las propiedades de la función delta de Dirac, las identidades de las matrices- $\gamma$ , así como de las trazas de sus productos, basados en las Refs. [24, 32, 35, 36]. Además, presentamos los resultados obtenidos por el método numérico para todos los FF de manera tabulada y gráfica.

### SECCIÓN 8.1

#### Función delta de Dirac

La definición de la función delta de Dirac está dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(k-k_0)} dx = 2\pi\delta(k - k_0). \quad (8.1)$$

A continuación se enlistan las propiedades de la función delta utilizadas.

1. La función delta es una función par o simétrica,

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (8.2)$$

2. Argumento de la función delta multiplicado por un escalar,

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}. \quad (8.3)$$

3. Producto de la función delta con una función  $f(x)$  arbitraria,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a). \quad (8.4)$$

4. Función delta cuyo argumento es una función  $f(x)$  arbitraria,

$$\delta(f(x)) = \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}^{-1} \delta(x-x_0). \quad (8.5)$$

## SECCIÓN 8.2

### Matrices- $\gamma$

Como se mencionó en el Capítulo 3, el cuarteto de matrices  $\beta$  y  $\alpha$  satisface la ec. (3.3) de anticonmutación y la ec. (3.5) de Hermiticidad. A partir de esto, podemos construir toda el álgebra de las matrices- $\gamma$ , dadas por las ecs. (3.12, 3.13).

1.

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{I} \quad (8.6)$$

Demostración:

$$(\gamma^0)^2 = \gamma^0 \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} = \mathbb{I} \quad \square$$

2.

$$(\gamma)^2 = -\mathbf{1}\mathbb{I}. \quad (8.7)$$

Demostración:

$$(\gamma)^2 = \gamma^i \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} = -\sigma^i \sigma^j \mathbb{I}$$

$$= -\frac{1}{2}\{\sigma^i, \sigma^j\}\mathbb{I} = -\delta^{ij}\mathbb{I} \quad \square$$

3.

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2\mathbb{I}. \quad (8.8)$$

Demostración:

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = (\gamma^0)^2 + (\gamma^0)^2 = \mathbb{I} + \mathbb{I} = 2\mathbb{I} \quad \square$$

4.

$$\{\gamma, \gamma\} = -2\mathbb{I}. \quad (8.9)$$

Demostración:

$$\{\gamma, \gamma\} = (\gamma)^2 + (\gamma)^2 = -\mathbf{1}\mathbb{I} - \mathbf{1}\mathbb{I} = -2\mathbb{I} \quad \square$$

5.

$$\{\gamma^0, \gamma\} = 0. \quad (8.10)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \{\gamma^0, \gamma\} &= \gamma^0\gamma + \gamma\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \square \end{aligned}$$

6.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}. \quad (8.11)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \begin{pmatrix} \{\gamma^0, \gamma^0\} & \{\gamma^0, \gamma\} \\ \{\gamma, \gamma^0\} & \{\gamma, \gamma\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbb{I} & 0 \\ 0 & -2\delta^{ij}\mathbb{I} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{I} \\ &= 2g^{\mu\nu}\mathbb{I} \quad \square \end{aligned}$$

Definimos al tensor métrico de Minkowski como

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Notemos que este tensor es simétrico ante el intercambio de índices,

$$2g^{\mu\nu} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\nu\mu},$$

de modo que,

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}. \quad (8.13)$$

Por otro lado,

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = (1)(1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

donde solo aportan los elementos de la diagonal. Entonces

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4. \quad (8.14)$$

7.

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (8.15)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^\dagger &= (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})^\dagger = (\beta, \beta \boldsymbol{\alpha})^\dagger = (\beta^\dagger, \boldsymbol{\alpha}^\dagger \beta^\dagger) = (\beta, \boldsymbol{\alpha} \beta) = (\beta^2 \beta, \beta^2 \boldsymbol{\alpha} \beta) \\ &= \beta(\beta, \beta \boldsymbol{\alpha})\beta = \gamma^0(\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})\gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad \square \end{aligned}$$

Definimos al tensor  $\sigma^{\mu\nu}$  como

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (8.16)$$

Notamos que este tensor es antisimétrico,

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = -\frac{i}{2}(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) = -\sigma^{\nu\mu},$$

de modo que

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}. \quad (8.17)$$

8.

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}. \quad (8.18)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2}[(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)] \\ &= \frac{1}{2}[2g^{\mu\nu} - 2i\sigma^{\mu\nu}] = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \quad \square \end{aligned}$$

9.

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}. \quad (8.19)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= \gamma^\mu g_{\mu\nu} \gamma^\nu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}) \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + g_{\nu\mu} \gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + g_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (2g^{\mu\nu} \mathbb{I}) = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \mathbb{I} = 4\mathbb{I} \quad \square \end{aligned}$$

10.

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu. \quad (8.20)$$

Demostración:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma_\mu = 2g^{\mu\nu} \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu = 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu \quad \square$$

11.

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}. \quad (8.21)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma_\mu = 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu = 2\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\nu (-2\gamma^\rho) \\ &= 2(\gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu) = 2(2g^{\nu\rho}) = 4g^{\nu\rho} \quad \square \end{aligned}$$

12.

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \quad (8.22)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = 2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - \gamma^\nu (4g^{\rho\sigma}) = 2(\gamma^\rho \gamma^\sigma - 2g^{\rho\sigma}) \gamma^\nu \\ &= 2(-\gamma^\sigma \gamma^\rho) \gamma^\nu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \quad \square \end{aligned}$$

### SECCIÓN 8.3

## Traza de las matrices- $\gamma$

Para muchos de los cálculos en la física de altas energías, resulta muy útil conocer las propiedades de la traza de las matrices- $\gamma$ , pues son términos recurrentes a lo largo

de la teoría. A continuación se exponen las identidades utilizadas en este trabajo. Los cálculos están apoyados en la propiedad ciclica de la traza:  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$ .

1.

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0. \quad (8.23)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu) &= \text{Tr}(\gamma^\mu \mathbb{I}) = \text{Tr} \left( \gamma^\mu \frac{\gamma_\nu \gamma^\nu}{4} \right) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\nu) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu) \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr}(-2\gamma^\mu) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu) \Rightarrow \text{Tr}(\gamma^\mu) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

2.

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (8.24)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \frac{1}{2} [\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)] = \frac{1}{2} [\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu)] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(2g^{\mu\nu} \mathbb{I}) = \text{Tr}(\mathbb{I}) g^{\mu\nu} = 4g^{\mu\nu} \quad \square \end{aligned}$$

3.

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = 0. \quad (8.25)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \mathbb{I}) = \text{Tr} \left( \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \frac{\gamma_\sigma \gamma^\sigma}{4} \right) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\sigma \gamma^\sigma) \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\sigma) = \frac{1}{4} \text{Tr}(-2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr}[\gamma^\mu (2g^{\rho\nu} - \gamma^\nu \gamma^\rho)] = -g^{\rho\nu} \text{Tr}(\gamma^\mu) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) \Rightarrow \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

4.

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (8.26)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= \text{Tr}[(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 2g^{\mu\nu} \text{Tr}(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma) \\ &= 2g^{\mu\nu} (4g^{\rho\sigma}) - \text{Tr}[\gamma^\nu (2g^{\mu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\mu) \gamma^\sigma] \\ &= 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 2g^{\mu\rho} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\sigma) + \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 2g^{\mu\rho}(4g^{\nu\sigma}) + \text{Tr}[\gamma^\nu\gamma^\rho(2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma\gamma^\mu)] \\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 2g^{\mu\sigma}\text{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho) - \text{Tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) \\
&= 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) \\
&\Rightarrow \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \quad \square
\end{aligned}$$

## SECCIÓN 8.4

### Tablas de los resultados

Presentamos los principales resultados numéricos para los distintos FF, así como de los métodos de integración para el FFD del protón.

| $k$ | $F_p(0)$ | $\delta F_p(0)$ | $r_p^{\text{eléc}}$ [fm] | $\delta r_p^{\text{eléc}}$ [fm] |
|-----|----------|-----------------|--------------------------|---------------------------------|
| 6   | 1.00005  | 0.00004         | 0.830                    | 0.007                           |
| 7   | 1.00000  | 0.00003         | 0.822                    | 0.007                           |
| 8   | 1.00008  | 0.00003         | 0.827                    | 0.006                           |
| 9   | 1.00006  | 0.00003         | 0.828                    | 0.005                           |
| 10  | 1.00008  | 0.00003         | 0.824                    | 0.004                           |
| 11  | 1.00001  | 0.00002         | 0.823                    | 0.005                           |
| 12  | 1.00001  | 0.00002         | 0.829                    | 0.004                           |
| 13  | 1.00005  | 0.00002         | 0.828                    | 0.003                           |
| 14  | 1.00001  | 0.00002         | 0.827                    | 0.003                           |
| 15  | 1.00004  | 0.00002         | 0.828                    | 0.004                           |
| 16  | 1.00000  | 0.00002         | 0.826                    | 0.002                           |
| 17  | 1.00002  | 0.00002         | 0.829                    | 0.002                           |

Tabla 8.1: Valores medios e incertidumbres de  $F_p(0)$  y  $r_p^{\text{eléc}}$  para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del FFE del protón.

| $k$ | $A_p(0)$ | $\delta A_p(0)$ | $A'_p(0)$ [fm <sup>2</sup> ] | $\delta A'_p(0)$ [fm <sup>2</sup> ] |
|-----|----------|-----------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 6   | 0.997    | 0.017           | -0.03836                     | 0.00036                             |
| 7   | 0.949    | 0.009           | -0.02847                     | 0.00018                             |
| 8   | 0.938    | 0.006           | -0.02490                     | 0.00012                             |
| 9   | 0.953    | 0.007           | -0.02722                     | 0.00021                             |
| 10  | 0.963    | 0.008           | -0.03074                     | 0.00021                             |
| 11  | 0.953    | 0.003           | -0.02747                     | 0.00009                             |
| 12  | 0.952    | 0.004           | -0.02634                     | 0.00009                             |
| 13  | 0.956    | 0.004           | -0.02677                     | 0.00013                             |
| 14  | 0.965    | 0.004           | -0.02934                     | 0.00014                             |
| 15  | 0.961    | 0.003           | -0.02838                     | 0.00009                             |
| 16  | 0.961    | 0.002           | -0.02744                     | 0.00006                             |
| 17  | 0.964    | 0.003           | -0.02763                     | 0.00008                             |

Tabla 8.2: Valores medios e incertidumbres de  $A_p(0)$  y  $A'_p(0)$  para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del FFA del protón.

| $k$ | $D_p(0)$ | $\delta D_p(0)$ | $k$ | $D_p(0)$ | $\delta D_p(0)$ |
|-----|----------|-----------------|-----|----------|-----------------|
| 6   | -1.372   | 0.036           | 12  | -1.334   | 0.016           |
| 7   | -1.308   | 0.028           | 13  | -1.316   | 0.016           |
| 8   | -1.275   | 0.025           | 14  | -1.350   | 0.018           |
| 9   | -1.270   | 0.021           | 15  | -1.358   | 0.015           |
| 10  | -1.322   | 0.023           | 16  | -1.378   | 0.014           |
| 11  | -1.301   | 0.017           | 17  | -1.404   | 0.014           |

Tabla 8.3: Valor medio e incertidumbre del término- $D$  para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del FFD del protón.

| $k$ | $F_\pi(0)$ | $\delta F_\pi(0)$ | $r_\pi^{\text{eléc}}$ [fm] | $\delta r_\pi^{\text{eléc}}$ [fm] |
|-----|------------|-------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 6   | 0.9992     | 0.0022            | 0.666                      | 0.013                             |
| 7   | 0.9958     | 0.0016            | 0.644                      | 0.012                             |
| 8   | 0.9929     | 0.0010            | 0.628                      | 0.010                             |
| 9   | 0.9953     | 0.0014            | 0.653                      | 0.015                             |
| 10  | 0.9940     | 0.0008            | 0.636                      | 0.008                             |
| 11  | 0.9934     | 0.0007            | 0.626                      | 0.007                             |
| 12  | 0.9921     | 0.0005            | 0.618                      | 0.007                             |
| 13  | 0.9928     | 0.0008            | 0.630                      | 0.011                             |
| 14  | 0.9923     | 0.0005            | 0.621                      | 0.006                             |
| 15  | 0.9919     | 0.0004            | 0.617                      | 0.006                             |

Tabla 8.4: Valores medios e incertidumbres de  $F_\pi(0)$  y  $r_\pi^{\text{eléc}}$  para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del FFE del pión.

| $k$ | $A_\pi(0)$ | $\delta A_\pi(0)$ | $r_\pi^{\text{masa}}$ [fm] | $\delta r_\pi^{\text{masa}}$ [fm] |
|-----|------------|-------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 6   | 1.034      | 0.012             | 0.374                      | 0.008                             |
| 7   | 1.012      | 0.006             | 0.347                      | 0.005                             |
| 8   | 1.006      | 0.003             | 0.336                      | 0.004                             |
| 9   | 1.014      | 0.004             | 0.347                      | 0.007                             |
| 10  | 1.014      | 0.003             | 0.347                      | 0.004                             |
| 11  | 1.010      | 0.002             | 0.341                      | 0.003                             |
| 12  | 1.011      | 0.001             | 0.338                      | 0.002                             |
| 13  | 1.014      | 0.002             | 0.343                      | 0.004                             |

Tabla 8.5: Valores medios e incertidumbres de  $A_\pi(0)$  y  $r_\pi^{\text{masa}}$  para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del FFA del pión.

| $k$ | $D_\pi(0)$ | $\delta D_\pi(0)$ | $r_\pi^{\text{mecá}}$ [fm] | $\delta r_\pi^{\text{mecá}}$ [fm] |
|-----|------------|-------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 6   | -0.796     | 0.015             | 0.399                      | 0.011                             |
| 7   | -0.744     | 0.006             | 0.346                      | 0.006                             |
| 8   | -0.735     | 0.005             | 0.338                      | 0.004                             |
| 9   | -0.742     | 0.006             | 0.342                      | 0.006                             |
| 10  | -0.760     | 0.006             | 0.365                      | 0.005                             |
| 11  | -0.754     | 0.004             | 0.357                      | 0.004                             |
| 12  | -0.753     | 0.003             | 0.349                      | 0.003                             |

Tabla 8.6: Valores medios e incertidumbres del término- $D$  y  $r_\pi^{\text{mecá}}$  para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del FFD del pión.

| $k$ | $r_{\pi-140}^{\text{masa}}$ MeV [fm] | $\delta r_{\pi-140}^{\text{masa}}$ MeV [fm] | $k$ | $r_{\pi-140}^{\text{mecá}}$ MeV [fm] | $\delta r_{\pi-140}^{\text{mecá}}$ MeV [fm] |
|-----|--------------------------------------|---------------------------------------------|-----|--------------------------------------|---------------------------------------------|
| 6   | 0.454                                | 0.009                                       | 6   | 0.484                                | 0.013                                       |
| 7   | 0.421                                | 0.006                                       | 7   | 0.420                                | 0.007                                       |
| 8   | 0.408                                | 0.005                                       | 8   | 0.410                                | 0.005                                       |
| 9   | 0.422                                | 0.008                                       | 9   | 0.416                                | 0.008                                       |
| 10  | 0.421                                | 0.005                                       | 10  | 0.444                                | 0.007                                       |
| 11  | 0.414                                | 0.003                                       | 11  | 0.434                                | 0.005                                       |
| 12  | 0.410                                | 0.003                                       | 12  | 0.424                                | 0.004                                       |
| 13  | 0.417                                | 0.005                                       |     |                                      |                                             |

Tabla 8.7: Valores del radio de masa y mecánico para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del pión reescalados a su masa real.

| $k$ | $r_p^{\text{masa}}$ [fm] | $\delta r_p^{\text{masa}}$ [fm] | $k$ | $r_p^{\text{masa}}$ [fm] | $\delta r_p^{\text{masa}}$ [fm] |
|-----|--------------------------|---------------------------------|-----|--------------------------|---------------------------------|
| 6   | 0.567                    | 0.005                           | 12  | 0.509                    | 0.002                           |
| 7   | 0.521                    | 0.003                           | 13  | 0.509                    | 0.001                           |
| 8   | 0.499                    | 0.003                           | 14  | 0.525                    | 0.001                           |
| 9   | 0.510                    | 0.002                           | 15  | 0.520                    | 0.001                           |
| 10  | 0.532                    | 0.002                           | 16  | 0.516                    | 0.001                           |
| 11  | 0.513                    | 0.002                           | 17  | 0.518                    | 0.001                           |

Tabla 8.8: Valor medio e incertidumbre del radio de masa del protón,  $r_p^{\text{masa}}$ , para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$ .

| $k$ | $\ell$ | $D_p(0)$ | $\delta D_p(0)$ | $\Lambda_{\text{opt}}^2$ [GeV <sup>2</sup> ] | $\delta \Lambda_{\text{opt}}^2$ [GeV <sup>2</sup> ] |
|-----|--------|----------|-----------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 6   | 89     | -1.223   | 0.076           | 1.616                                        | 0.038                                               |
| 7   | 113    | -1.197   | 0.052           | 1.618                                        | 0.034                                               |
| 8   | 120    | -1.184   | 0.048           | 1.587                                        | 0.033                                               |
| 9   | 30     | -1.053   | 0.072           | 1.672                                        | 0.060                                               |
| 10  | 155    | -1.232   | 0.040           | 1.543                                        | 0.026                                               |
| 11  | 162    | -1.228   | 0.030           | 1.522                                        | 0.025                                               |
| 12  | 197    | -1.286   | 0.025           | 1.450                                        | 0.022                                               |
| 13  | 187    | -1.277   | 0.026           | 1.449                                        | 0.023                                               |
| 14  | 213    | -1.310   | 0.027           | 1.420                                        | 0.022                                               |
| 15  | 213    | -1.346   | 0.023           | 1.388                                        | 0.021                                               |
| 16  | 234    | -1.362   | 0.020           | 1.364                                        | 0.019                                               |
| 17  | 239    | -1.382   | 0.020           | 1.340                                        | 0.018                                               |

Tabla 8.9: Valores medios e incertidumbres de  $D_p(0)$  y  $\Lambda_{\text{opt}}^2$  del modelo dipolar para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del FFD del protón.

| $k$ | $\ell$ | $\mathcal{I}_{\text{MPS}} [\text{GeV}^2]$ | $\delta\mathcal{I}_{\text{MPS}} [\text{GeV}^2]$ | $\mathcal{I}_{\text{MD}} [\text{GeV}^2]$ | $\delta\mathcal{I}_{\text{MD}} [\text{GeV}^2]$ |
|-----|--------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 6   | 89     | 0.992                                     | 0.019                                           | 1.720                                    | 0.032                                          |
| 7   | 113    | 1.003                                     | 0.016                                           | 1.753                                    | 0.026                                          |
| 8   | 120    | 0.963                                     | 0.014                                           | 1.678                                    | 0.022                                          |
| 9   | 30     | 0.918                                     | 0.026                                           | 1.620                                    | 0.043                                          |
| 10  | 155    | 0.982                                     | 0.011                                           | 1.725                                    | 0.017                                          |
| 11  | 162    | 0.986                                     | 0.010                                           | 1.734                                    | 0.016                                          |
| 12  | 197    | 1.001                                     | 0.009                                           | 1.740                                    | 0.013                                          |
| 13  | 187    | 0.990                                     | 0.009                                           | 1.725                                    | 0.013                                          |
| 14  | 213    | 0.994                                     | 0.008                                           | 1.731                                    | 0.011                                          |
| 15  | 213    | 1.016                                     | 0.008                                           | 1.760                                    | 0.011                                          |
| 16  | 234    | 1.020                                     | 0.007                                           | 1.760                                    | 0.010                                          |
| 17  | 239    | 1.024                                     | 0.007                                           | 1.757                                    | 0.009                                          |

Tabla 8.10: Valores medios e incertidumbres de las integrales  $\mathcal{I}_{\text{MPS}}$  y  $\mathcal{I}_{\text{MD}}$  para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  del FFD del protón.

| $k$ | $r_{p\text{-MPS}}^{\text{mecá}} [\text{fm}]$ | $\delta r_{p\text{-MPS}}^{\text{mecá}} [\text{fm}]$ | $r_{p\text{-MD}}^{\text{mecá}} [\text{fm}]$ | $\delta r_{p\text{-MD}}^{\text{mecá}} [\text{fm}]$ |
|-----|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 6   | 0.568                                        | 0.013                                               | 0.432                                       | 0.010                                              |
| 7   | 0.552                                        | 0.010                                               | 0.417                                       | 0.008                                              |
| 8   | 0.556                                        | 0.010                                               | 0.421                                       | 0.007                                              |
| 9   | 0.568                                        | 0.013                                               | 0.428                                       | 0.009                                              |
| 10  | 0.561                                        | 0.008                                               | 0.423                                       | 0.006                                              |
| 11  | 0.555                                        | 0.007                                               | 0.419                                       | 0.005                                              |
| 12  | 0.558                                        | 0.006                                               | 0.423                                       | 0.004                                              |
| 13  | 0.557                                        | 0.006                                               | 0.422                                       | 0.004                                              |
| 14  | 0.564                                        | 0.006                                               | 0.427                                       | 0.004                                              |
| 15  | 0.559                                        | 0.005                                               | 0.425                                       | 0.004                                              |
| 16  | 0.562                                        | 0.005                                               | 0.428                                       | 0.003                                              |
| 17  | 0.566                                        | 0.005                                               | 0.432                                       | 0.003                                              |

Tabla 8.11: Valores medios e incertidumbres de los radios mecánicos del protón,  $r_{p\text{-MPS}}^{\text{mecá}}$  y  $r_{p\text{-MD}}^{\text{mecá}}$ , para cada grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$ .

**SECCIÓN 8.5****Gráficas de los resultados**

El algoritmo desarrollado en el Capítulo 5 define una serie de cantidades que se relacionan con la derivación de los resultados finales para los distintos FF. Todos los cálculos para los datos experimentales o estimaciones de IQCD comparten las siguientes cantidades:  $\lambda_{\text{opt}}$ ,  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$ ,  $\mathcal{C}_n(0)$  y  $\mathcal{C}_n(x)$  con  $x \in \mathcal{I}$ . El resto de valores depende de la relación FF-RMC para cada caso. En todas las gráficas presentadas se encuentra el valor  $k$  que nos dice a qué grupo  $\{\mathcal{D}_\ell^k\}$  pertenece cada gráfica.

Para la mayoría de los resultados, a excepción de  $\mathcal{C}_n(x)$  que se contrasta con  $\mathcal{D}$ , se utilizaron histogramas en su presentación, para los cuales el eje- $y$  indica el número de veces que la cantidad tomó determinado valor. El caso concreto de  $\lambda_{\text{opt}}$  nos permite ver cuánta suavización fue requerida en los  $\hat{\mathbf{g}}$  de los  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$ , con el fin de obtener modelos apropiados. Por otro lado, los valores la función  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  se encuentran encerrados, en su mayoría, en un dominio bastante claro, lo que nos da una referencia de rango de valores confiable para futuras estimaciones con el mismo método o similares. Tanto para  $\lambda_{\text{opt}}$  como  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$  se presentan un total de 50 mil valores por histograma. En el caso de los histogramas para  $\mathcal{C}_n(0)$ , así como del radio o la derivada  $\mathcal{C}'_n(0)$ , se gráficán los valores promedio de cada  $\{\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)\}$ , de modo que presentamos 500 valores por histograma. Finalmente, para la comparación entre  $\mathcal{C}_n(x)$  con  $\mathcal{D}$  se seleccionaron aquellos  $\mathcal{D}_\ell^k$  que contienen a  $\mathcal{P}_n$  y de entre todos los  $\hat{\mathcal{D}}_\ell^k(m)$  se eligieron aquellos cuyo  $\mathcal{C}_n(0)$  y  $\mathcal{C}_n(x_n)$  tengan los valores máximo y mínimo. Tomamos 4 de los 100 modelos generados, con el fin de tener un rango representativo del dominio de valores para las funciones  $\mathcal{C}_n(x)$ .

Presentamos primero los resultados para los FF del protón, seguidos por los resultados para los FF del pión. En el caso de ambos hadrones, el orden de presentación de los FF es: carga, masa y mecánico. Mientras, el orden de presentación de los resultados es:  $\lambda_{\text{opt}}$ ,  $\text{VCG}(\lambda_{\text{opt}})$ ,  $\mathcal{C}_n(0)$ , radio o  $\mathcal{C}'_n(0)$  según sea el caso y  $\mathcal{C}_n(x)$  con  $x \in \mathcal{I}$ . Finalmente, presentamos las gráficas para el caso especial de la integral del FFD del protón.

**8.5.1 Gráficas de los factores de forma del protón y pión**

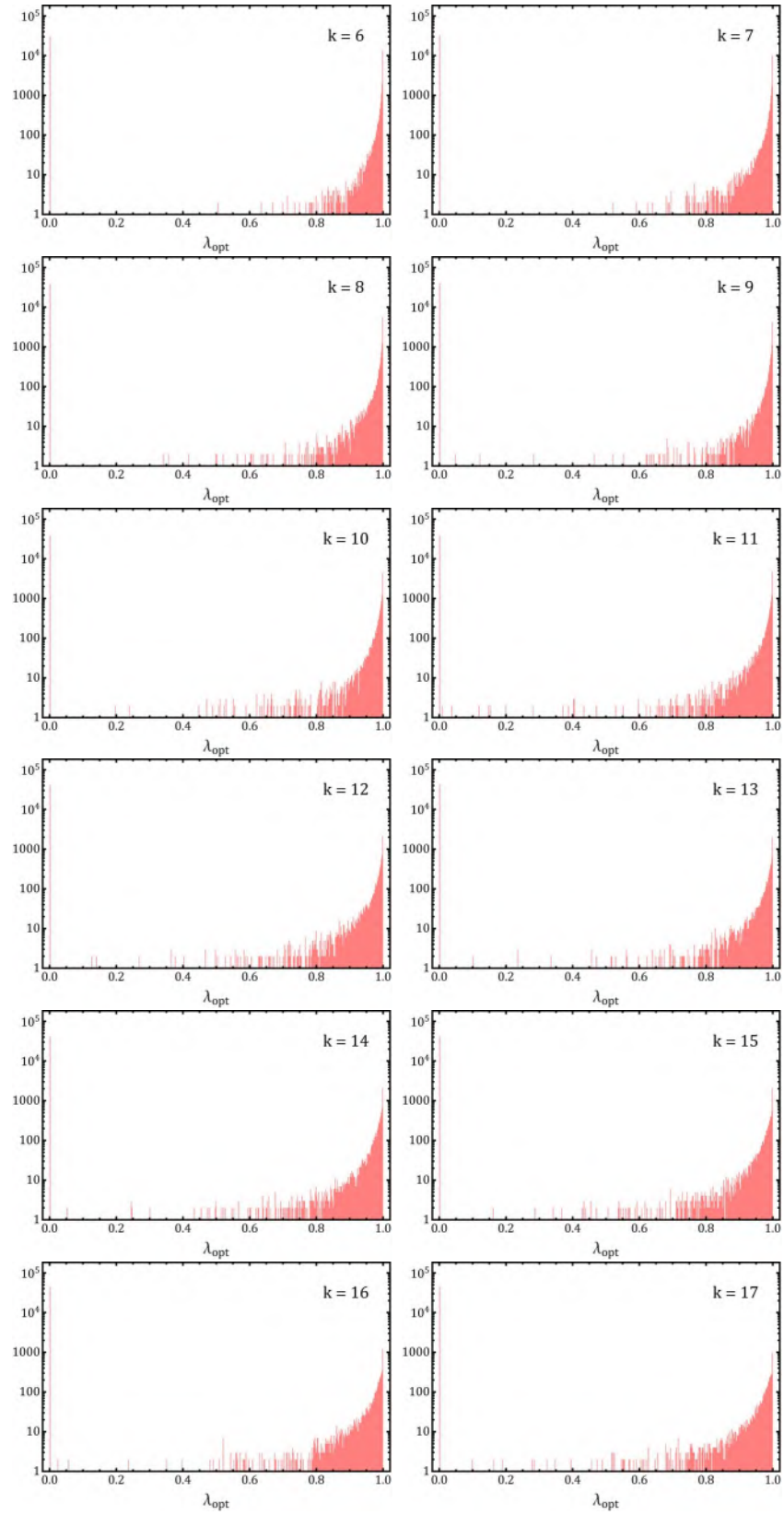


Figura 8.1: Comportamiento del  $\lambda_{\text{opt}}$  para el FFE del protón.

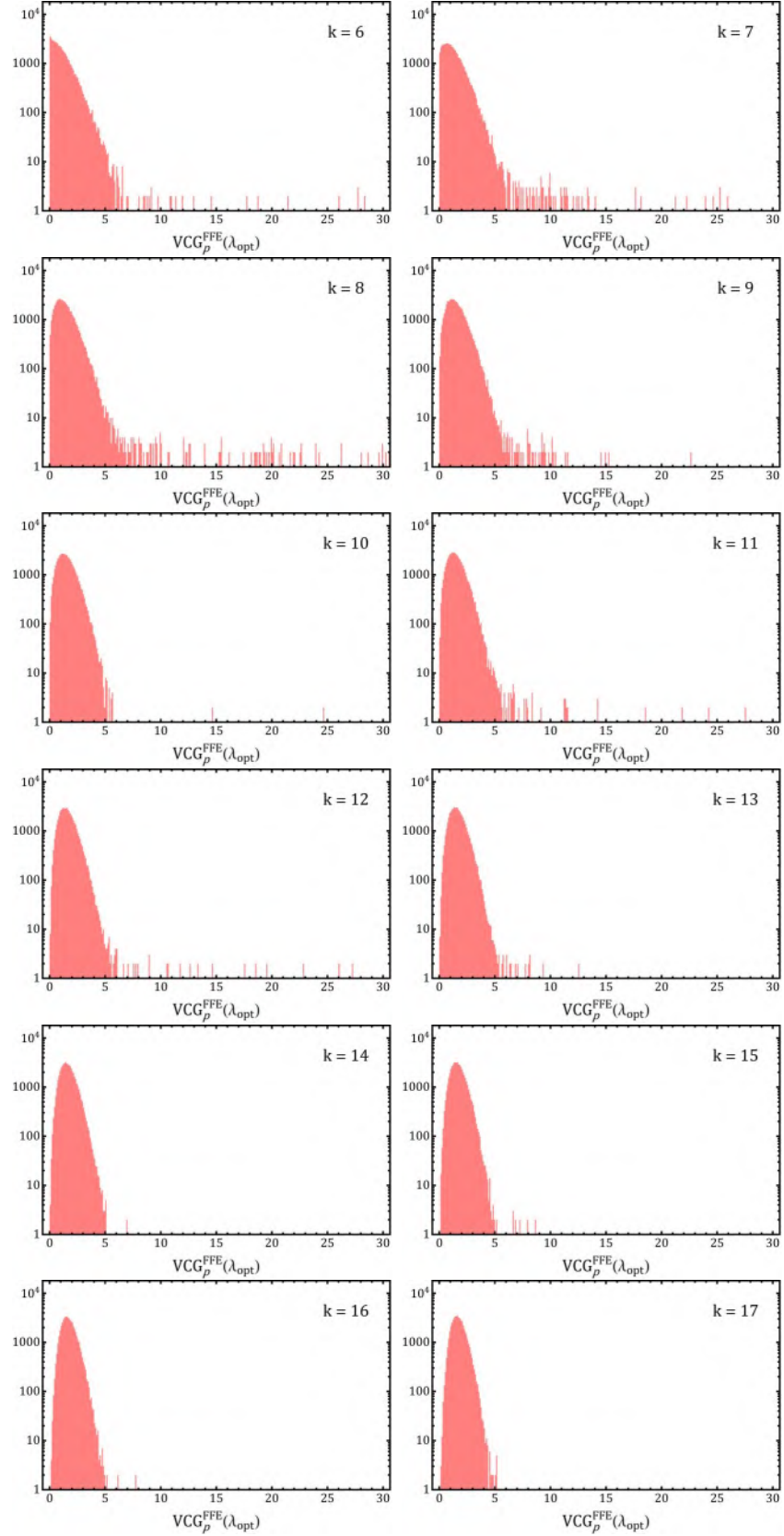


Figura 8.2: Comportamiento de la función  $VCG_p^{FFE}(\lambda_{opt})$  para el FFE del protón.

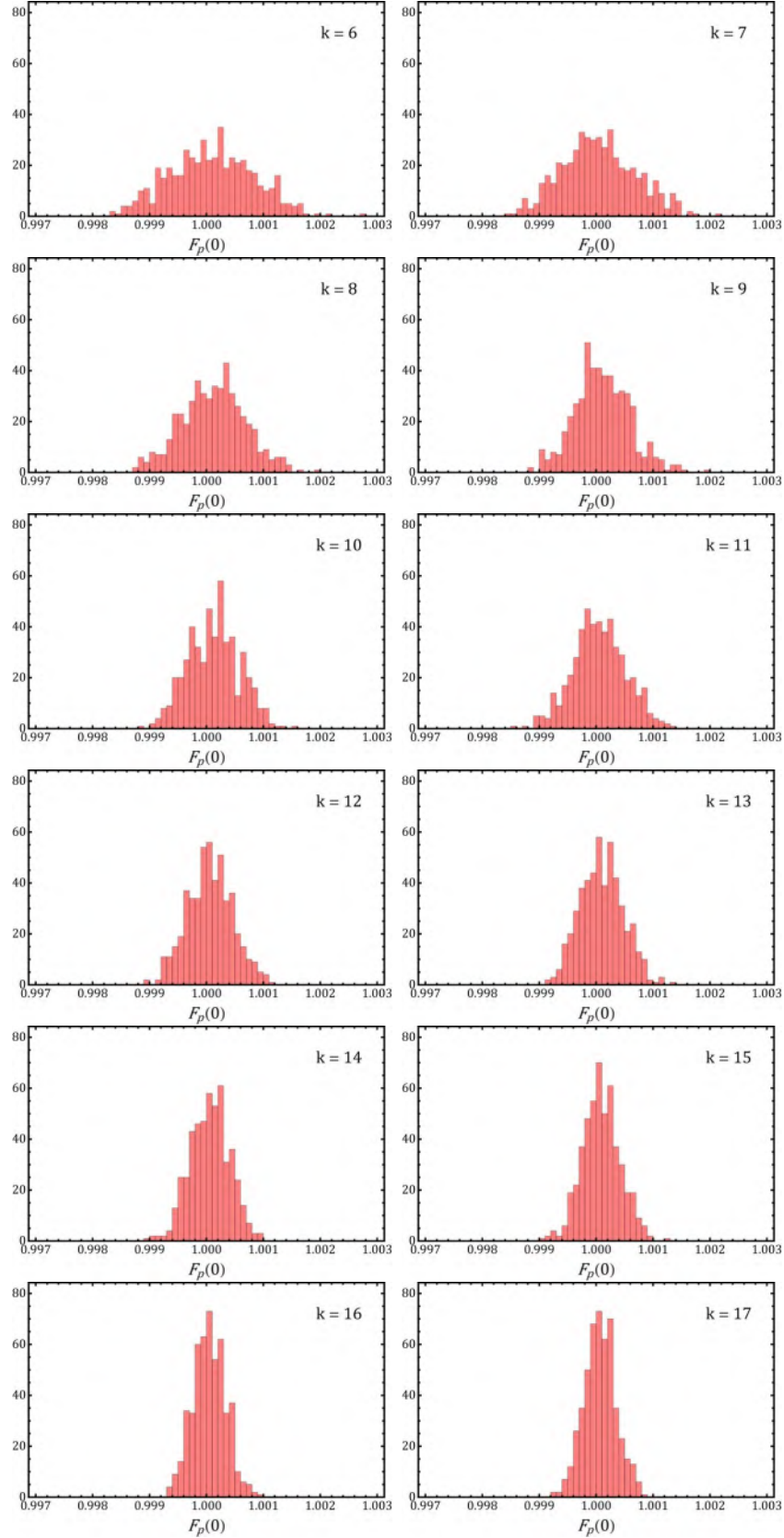


Figura 8.3: Comportamiento del valor  $F_p(0)$  del FFE del protón.

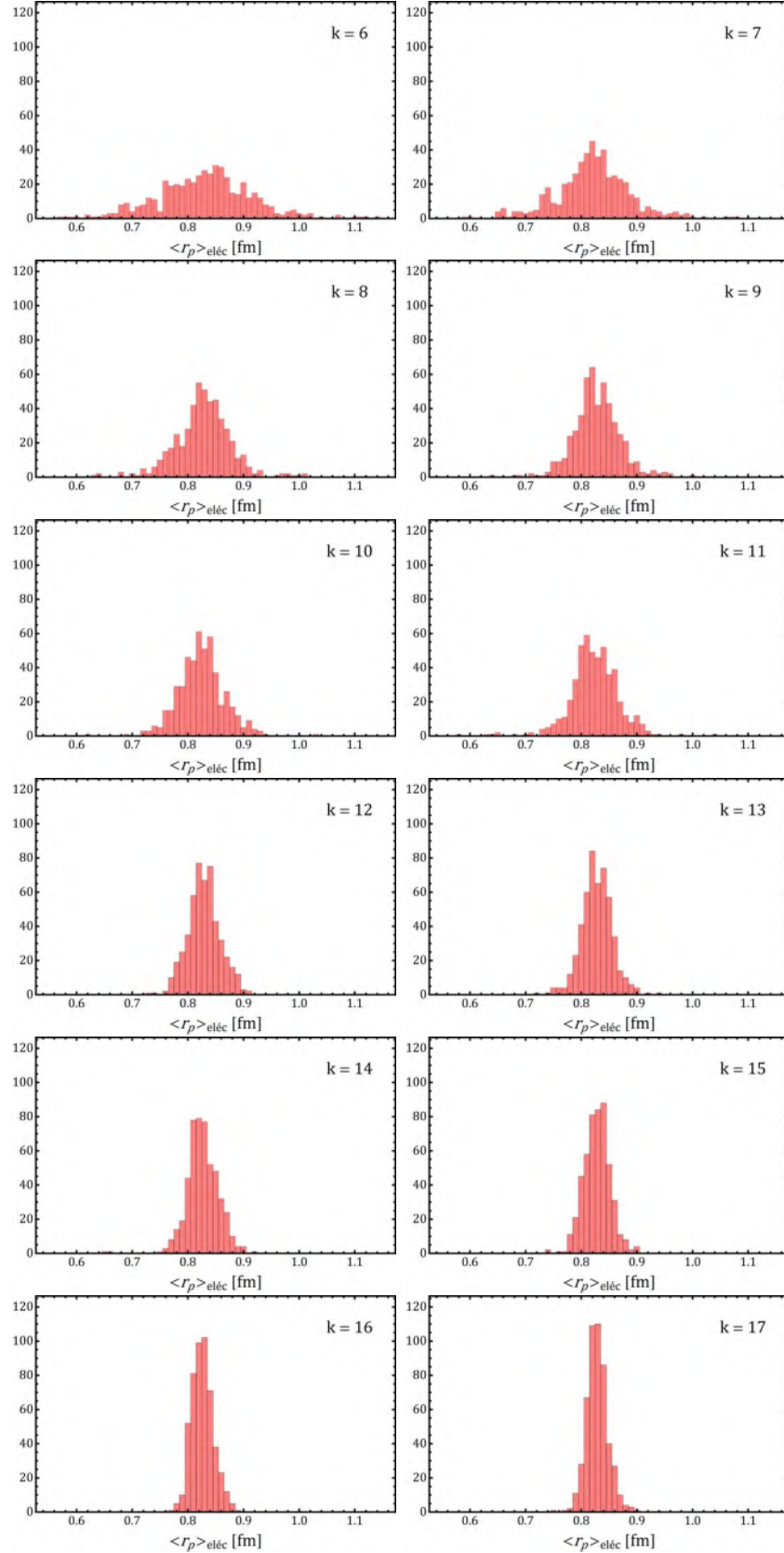


Figura 8.4: Comportamiento del radio de carga del protón,  $\langle r_p \rangle_{\text{eléc}}$ .

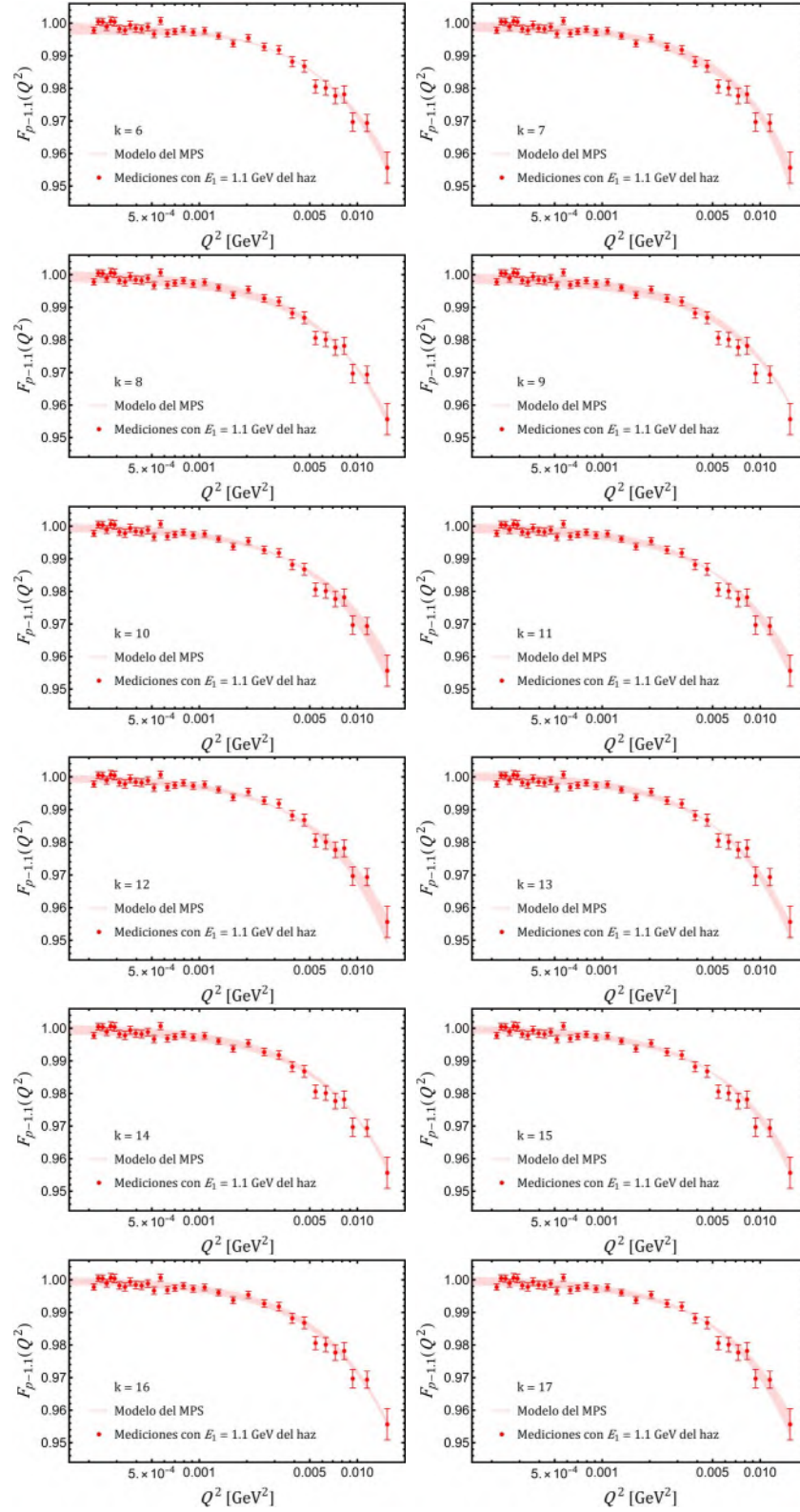


Figura 8.5: Comparación entre los datos experimentales y el modelo del MPS para el FFE del protón.

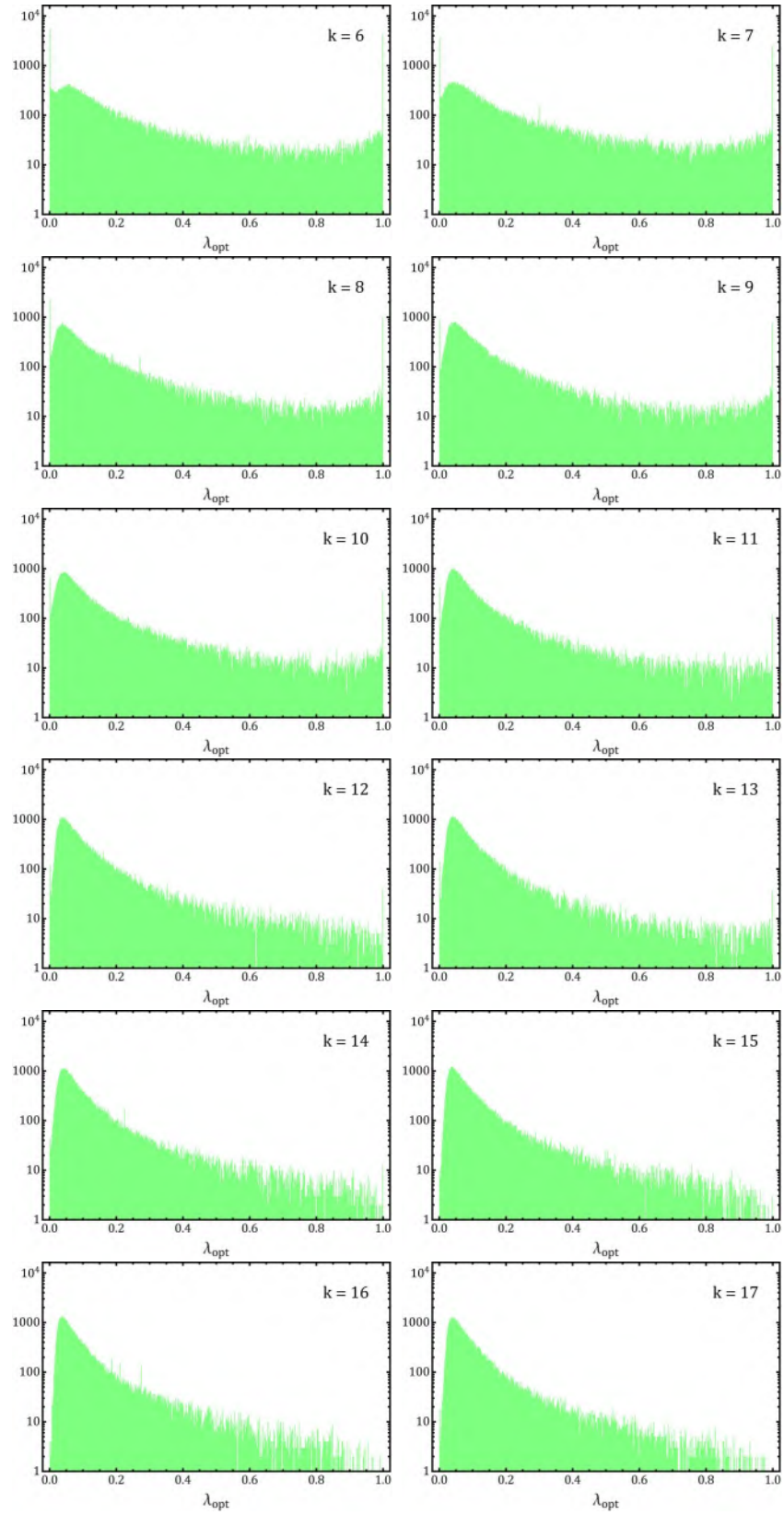


Figura 8.6: Comportamiento del  $\lambda_{\text{opt}}$  para el FFA del protón.

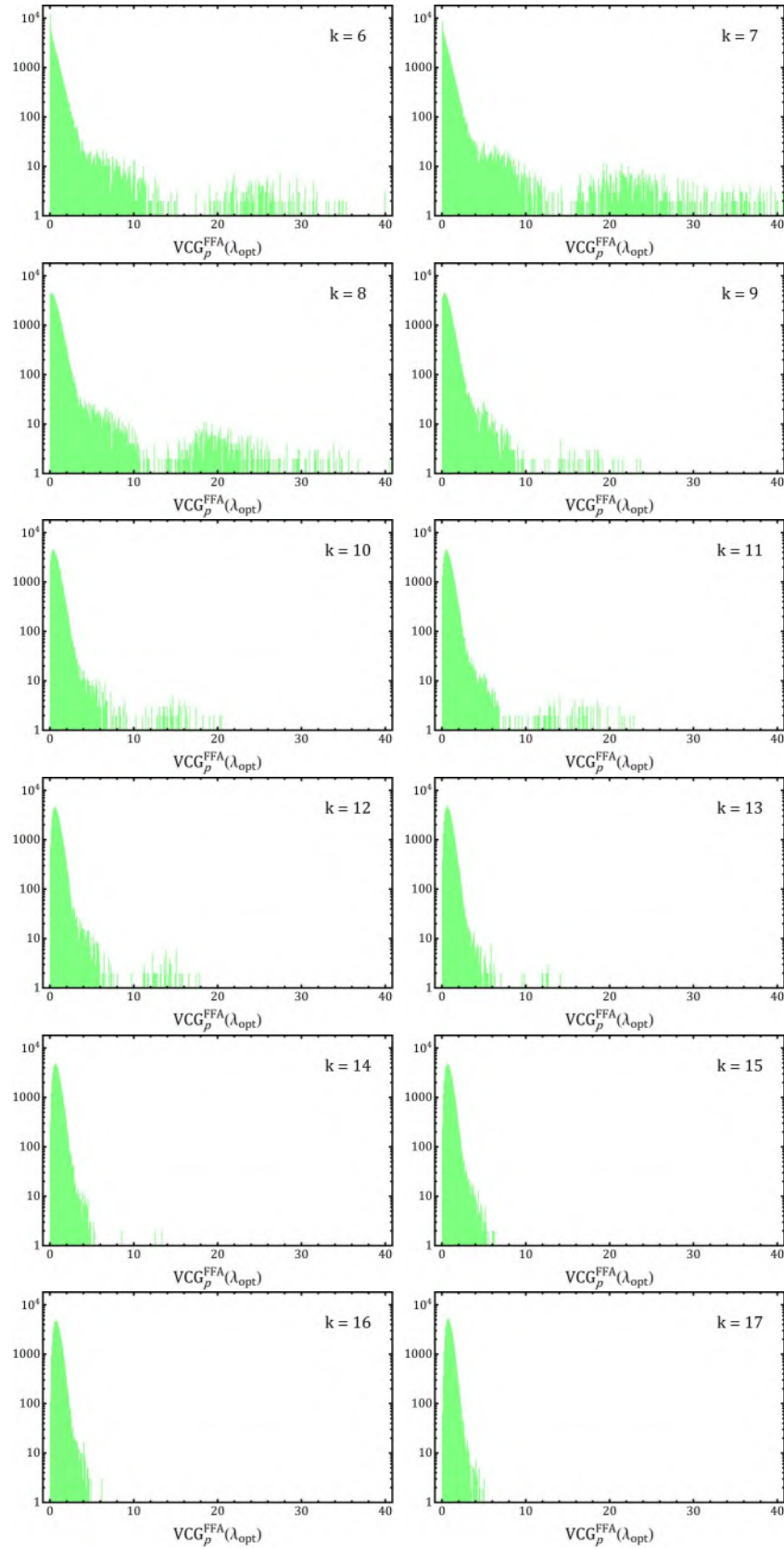


Figura 8.7: Comportamiento de la función  $VCG_p^{FFA}(\lambda_{opt})$  para el FFA del protón.

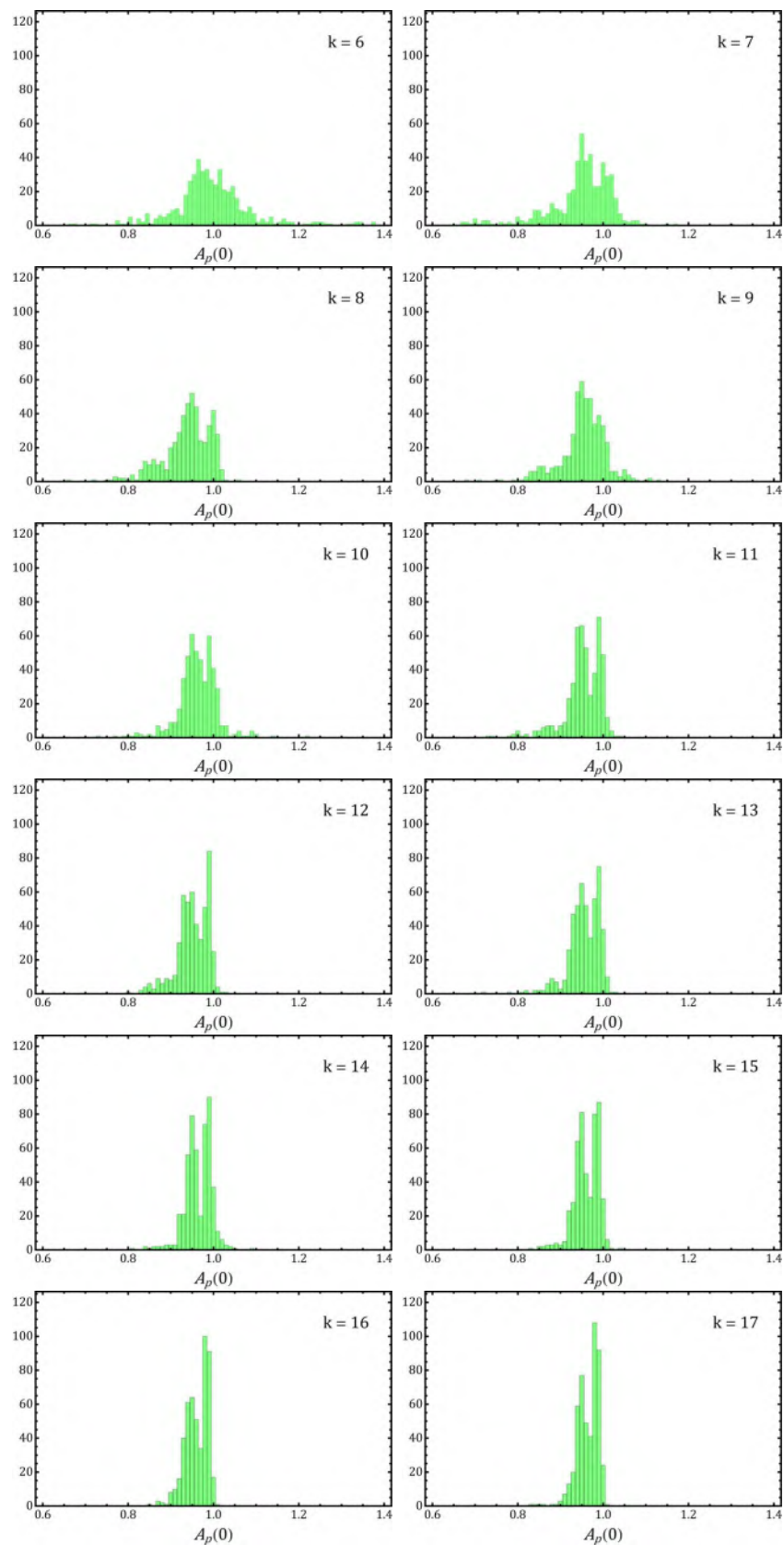


Figura 8.8: Comportamiento del valor  $A_p(0)$  del FFA del protón.

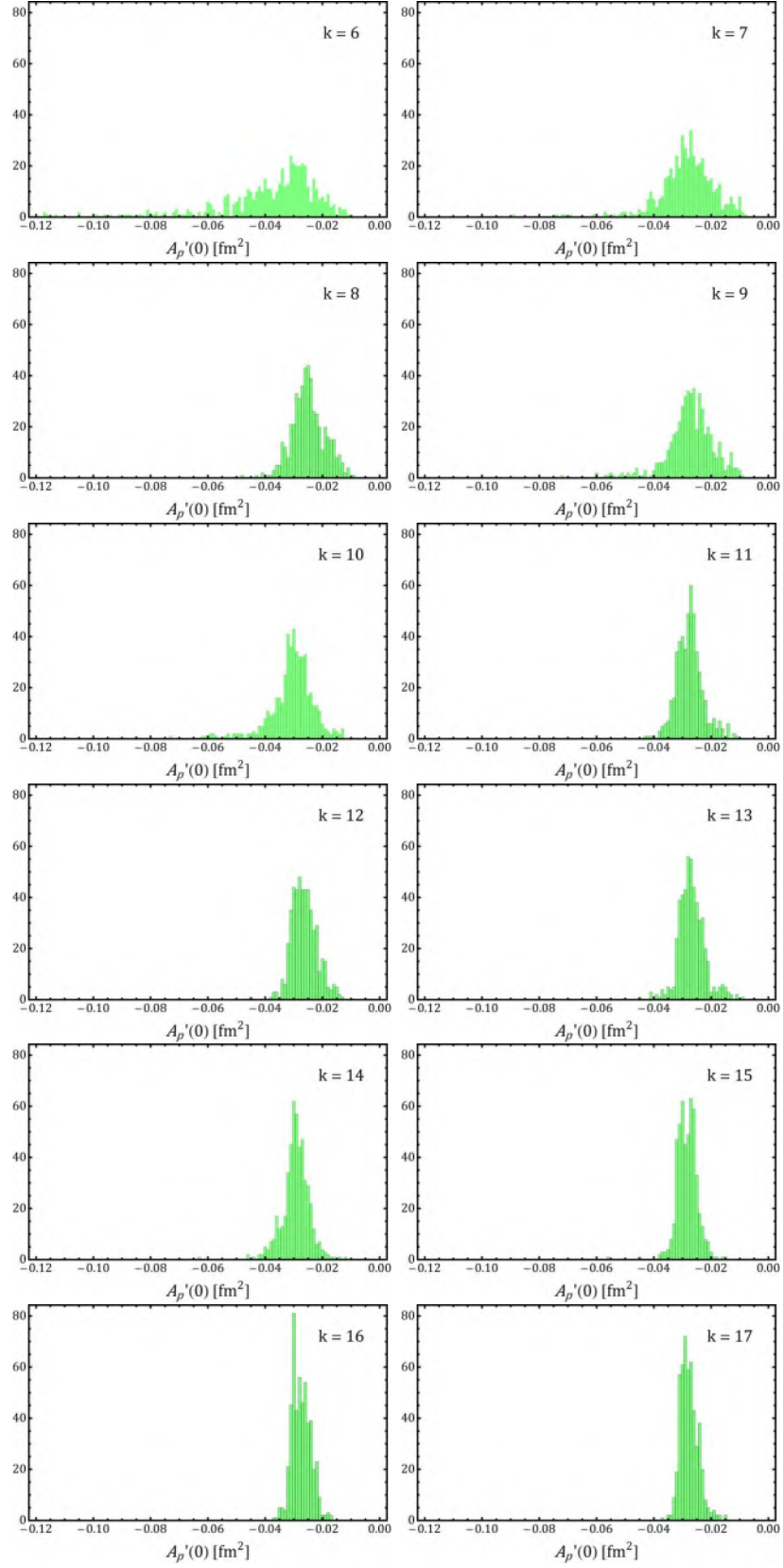


Figura 8.9: Comportamiento del valor  $A_p'(0)$  del FFA del protón.

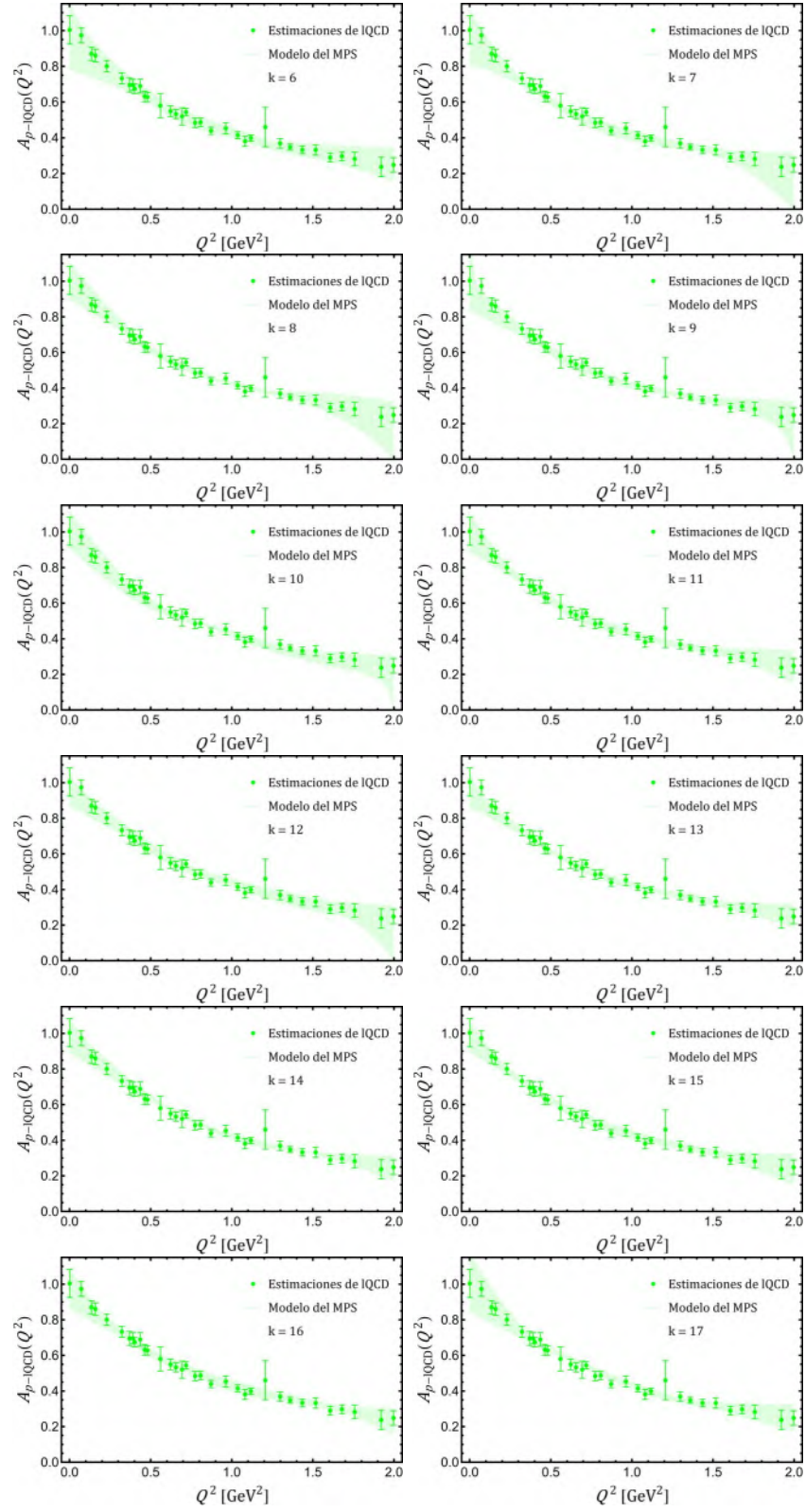


Figura 8.10: Comparación entre las estimaciones numéricas y el modelo del MPS para el FFA del protón.

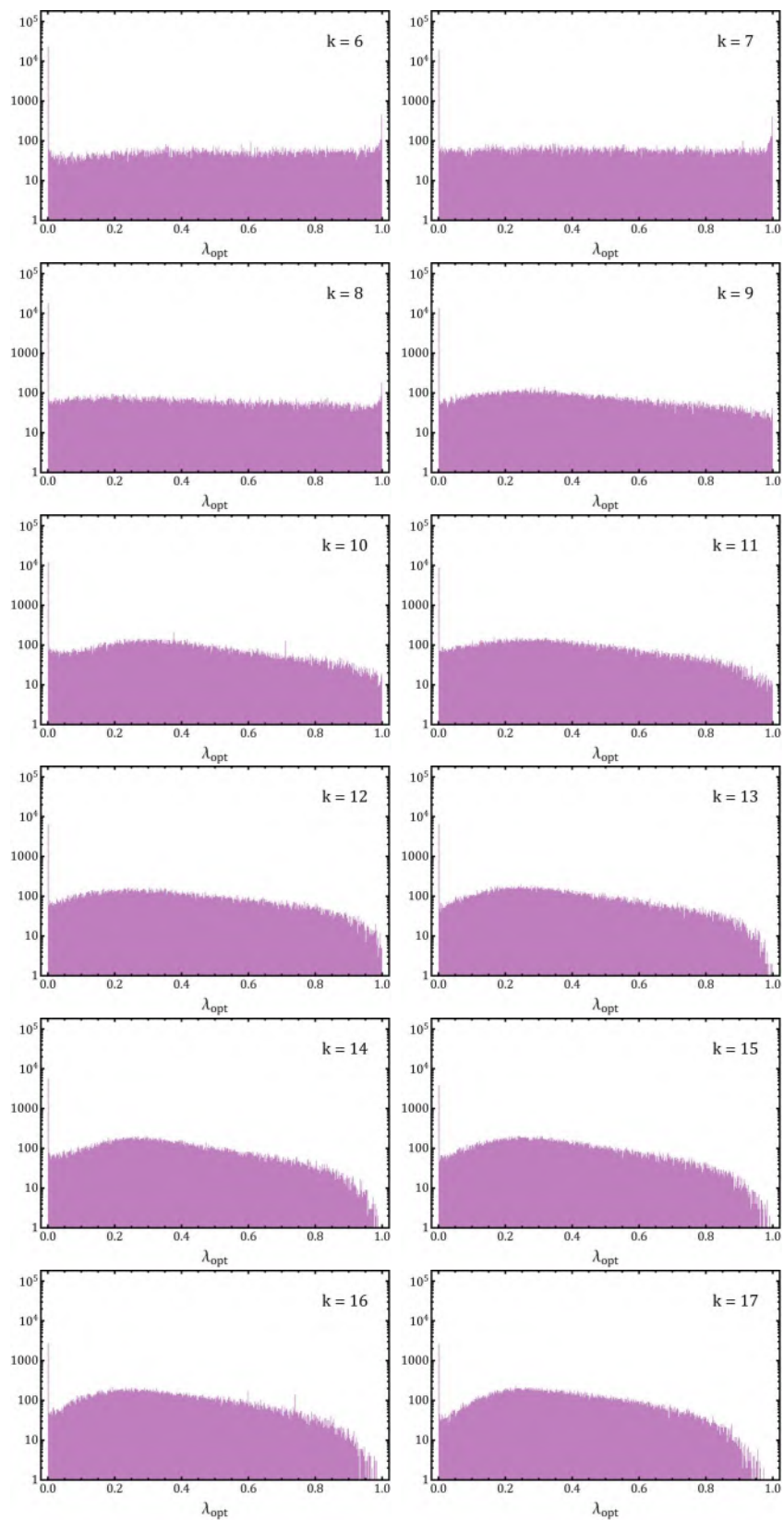


Figura 8.11: Comportamiento del  $\lambda_{\text{opt}}$  para el FFD del protón.

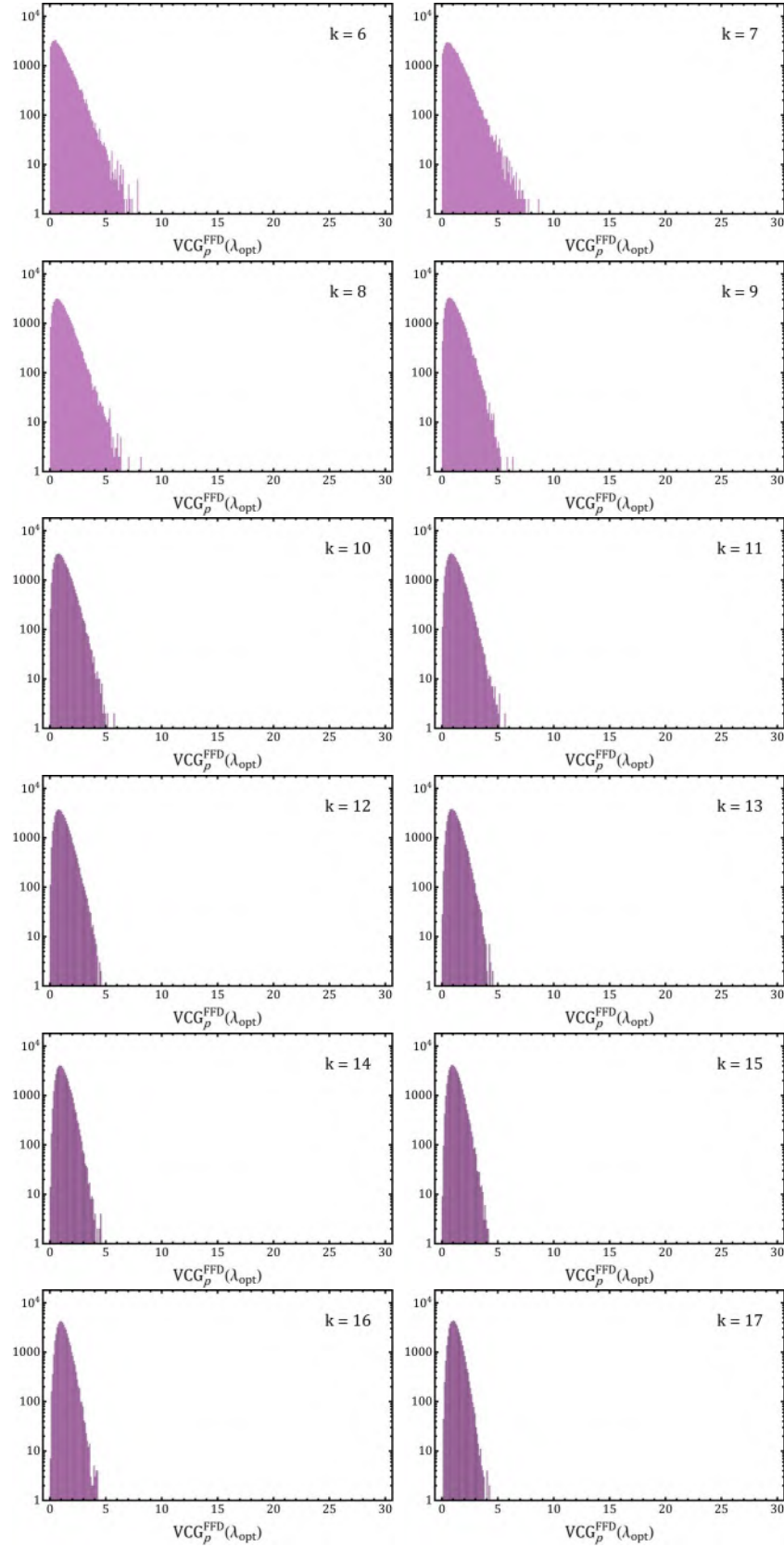


Figura 8.12: Comportamiento de la función  $VCG_p^{FFD}(\lambda_{opt})$  para el FFD del protón.

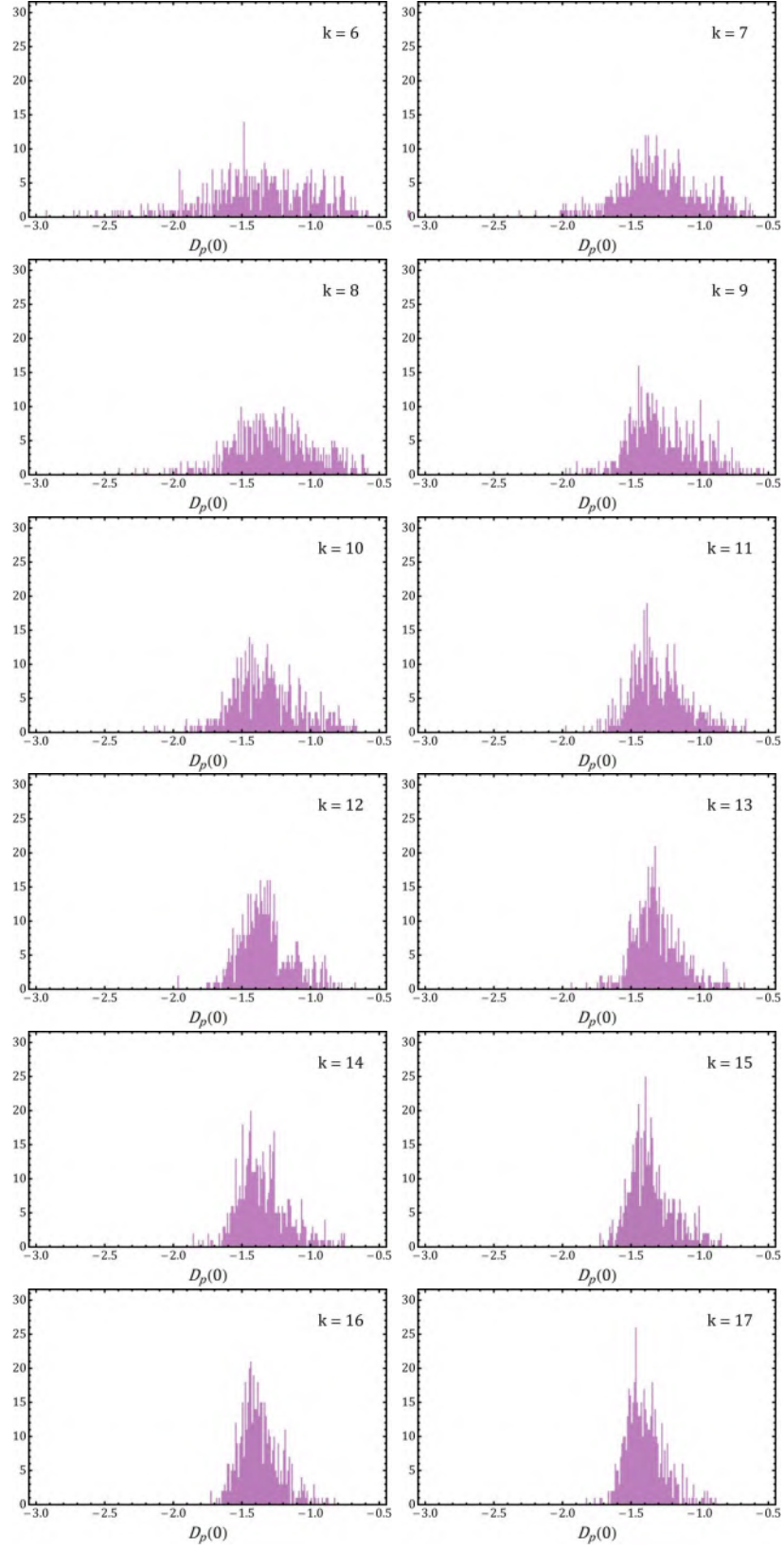


Figura 8.13: Comportamiento del valor  $D_p(0)$  del FFD del protón.

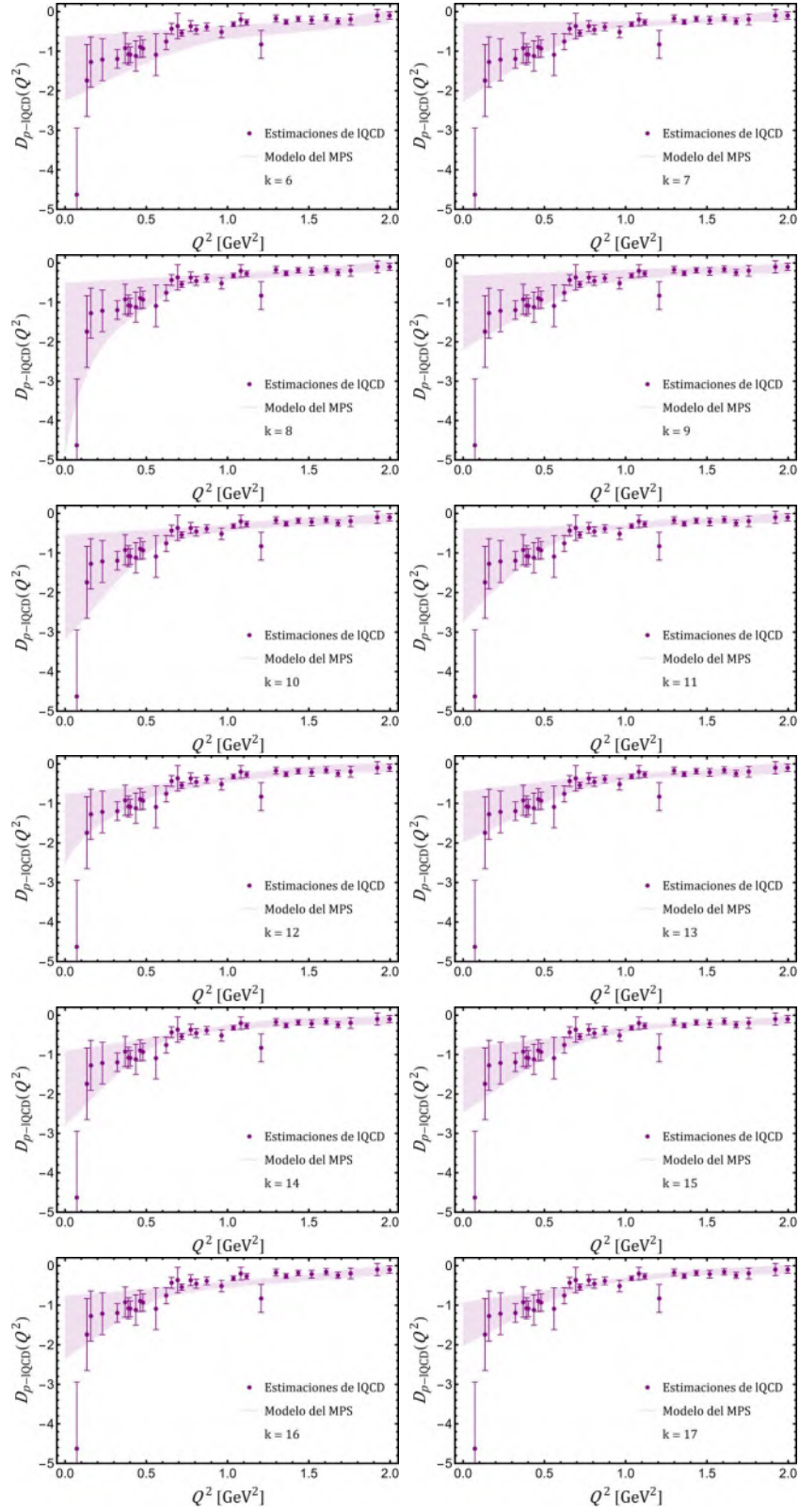


Figura 8.14: Comparación entre las estimaciones numéricas y el modelo del MPS para el FFD del protón.

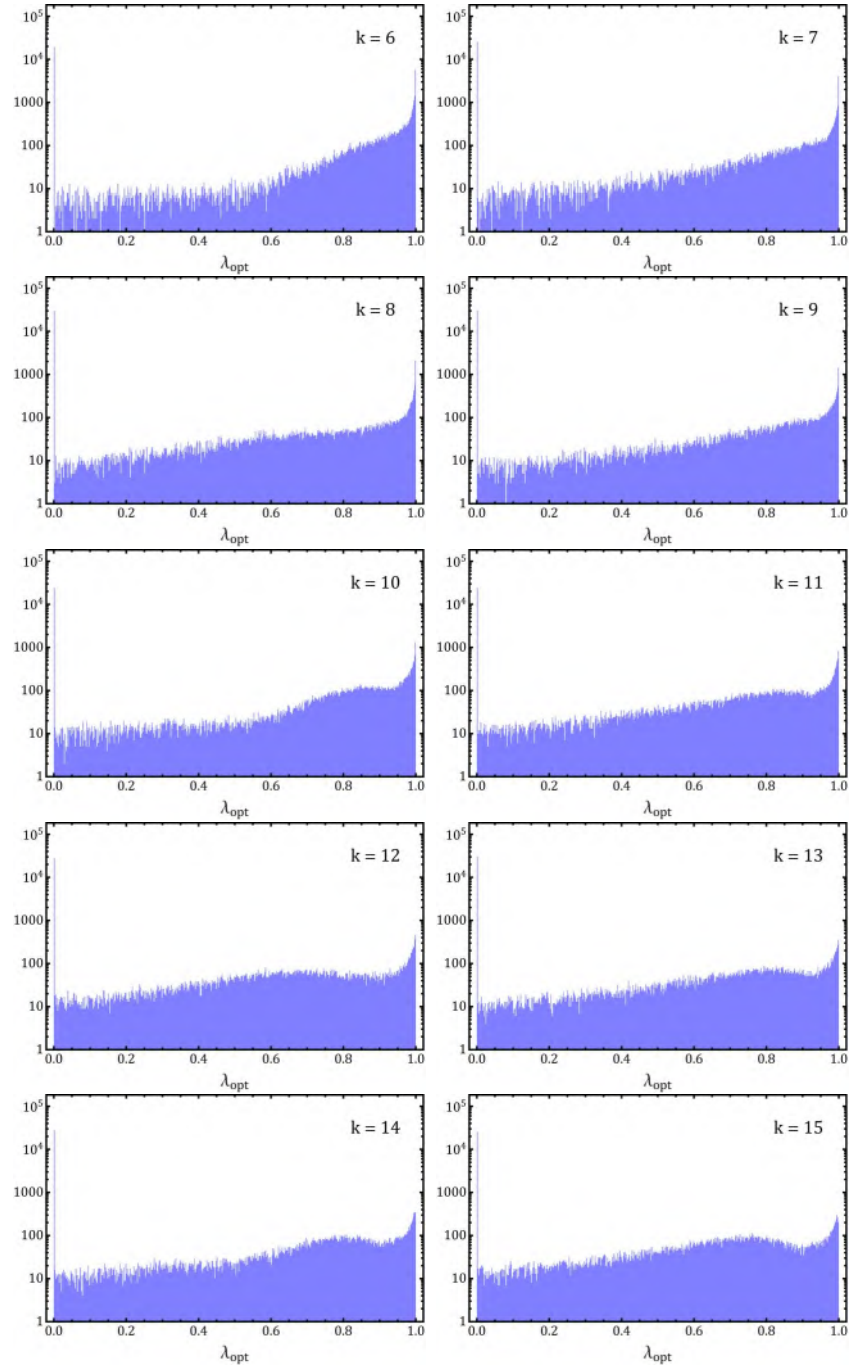


Figura 8.15: Comportamiento del  $\lambda_{\text{opt}}$  para el FFE del pión.

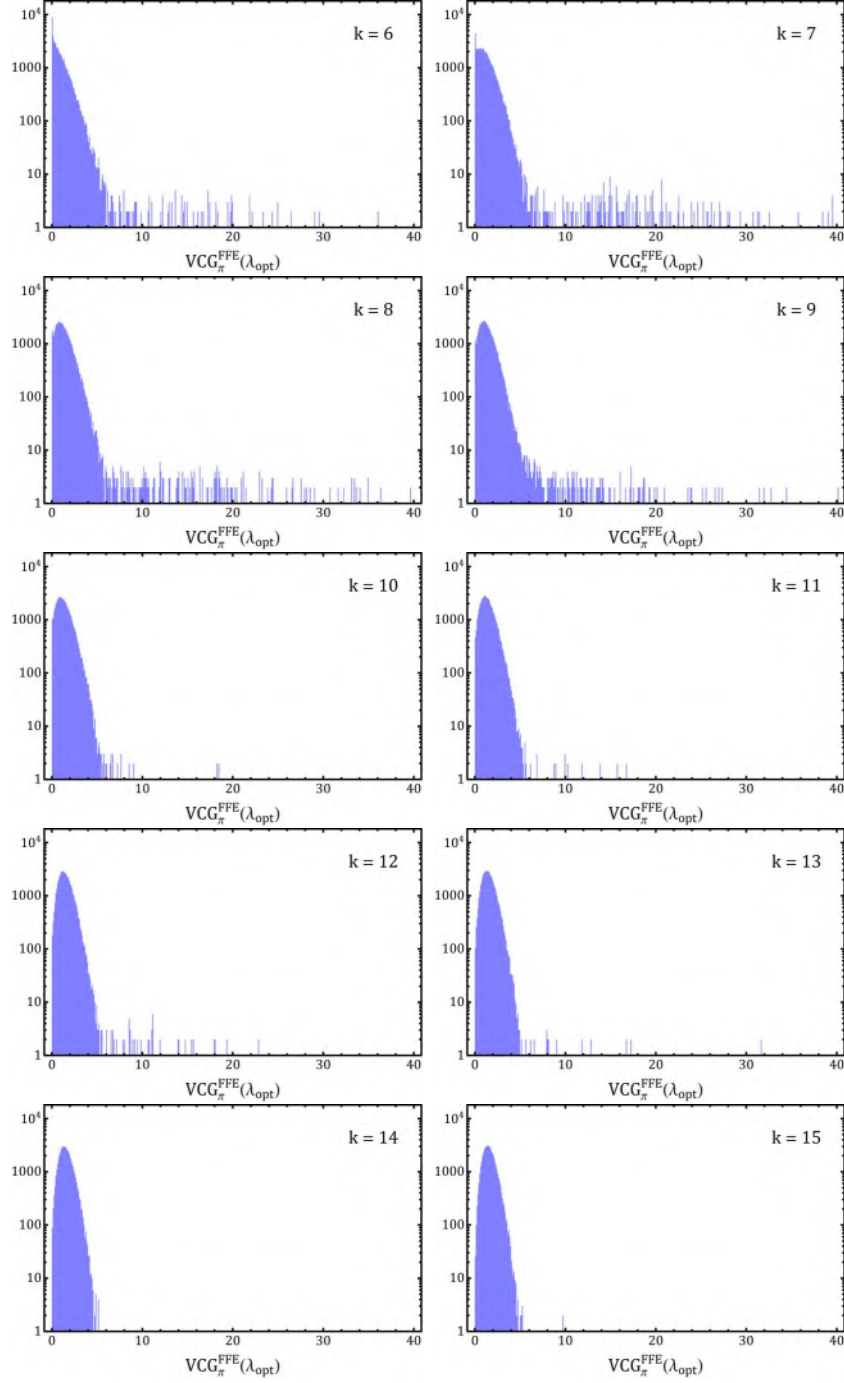


Figura 8.16: Comportamiento de la función  $VCG_{\pi}^{FFE}(\lambda_{opt})$  para el FFE del pión.

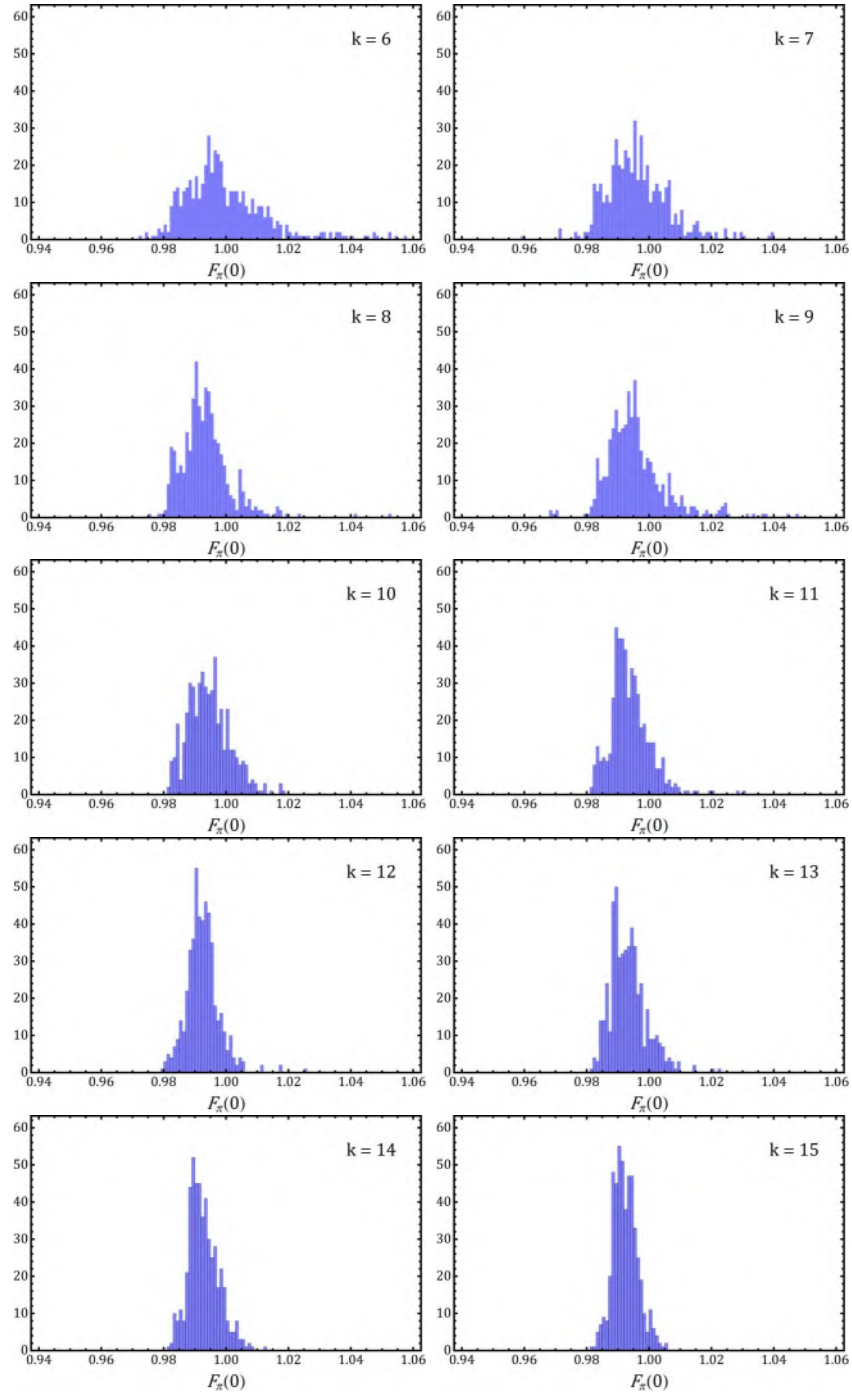


Figura 8.17: Comportamiento del valor  $F_\pi(0)$  del FFE del pión.

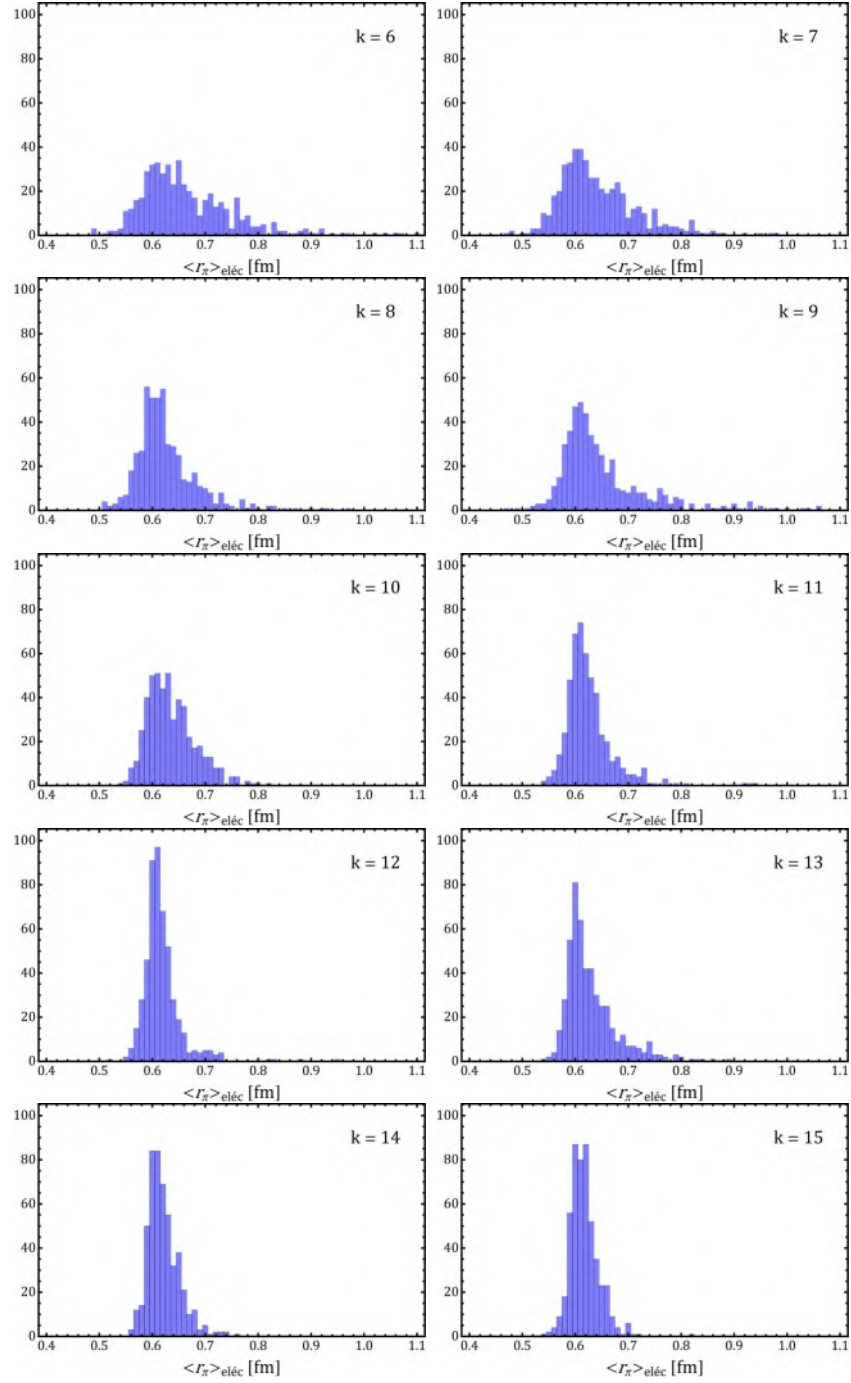


Figura 8.18: Comportamiento del radio de carga del pión,  $\langle r_\pi \rangle_{\text{eléc}}$ .

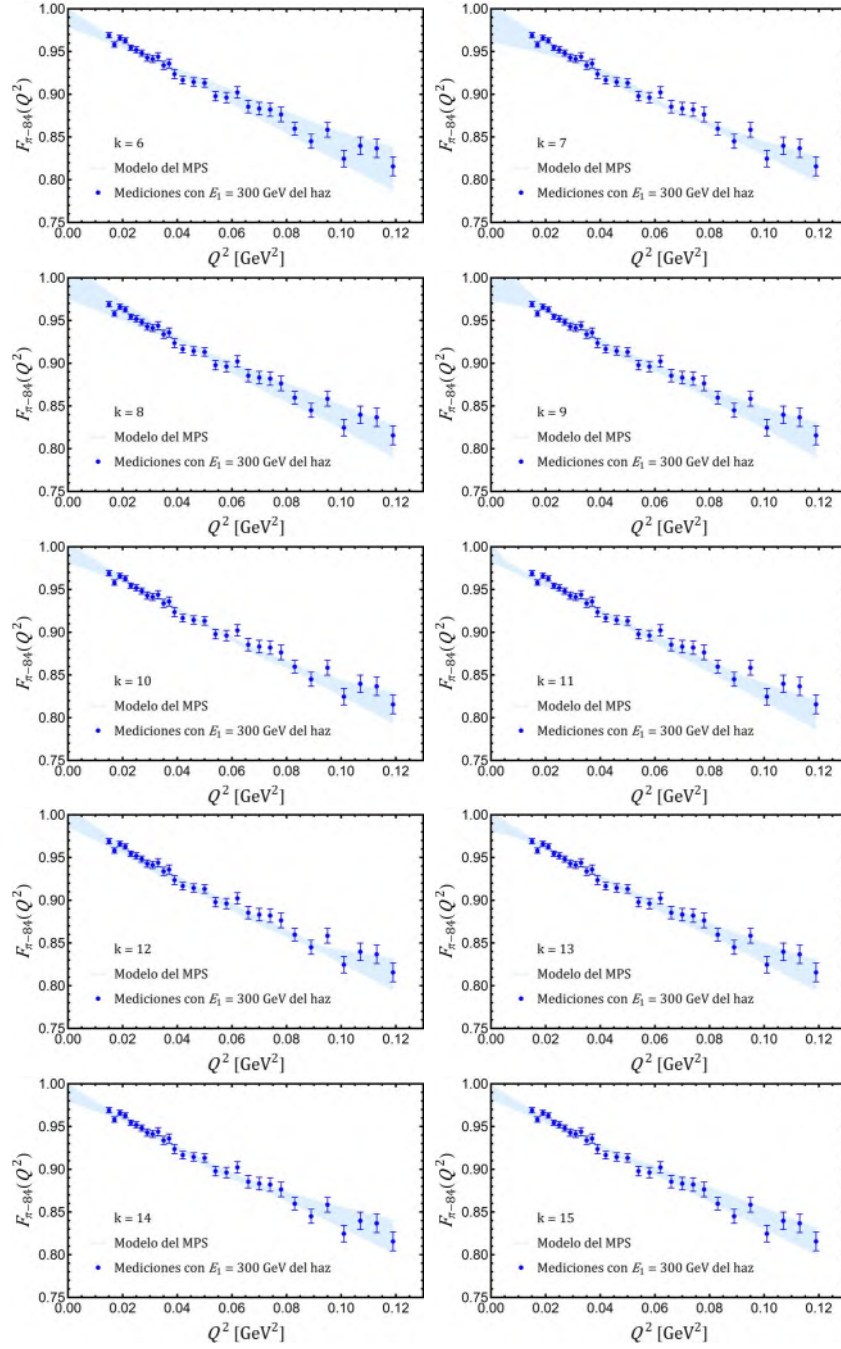


Figura 8.19: Comparación entre los datos experimentales y el modelo del MPS para el FFE del pión

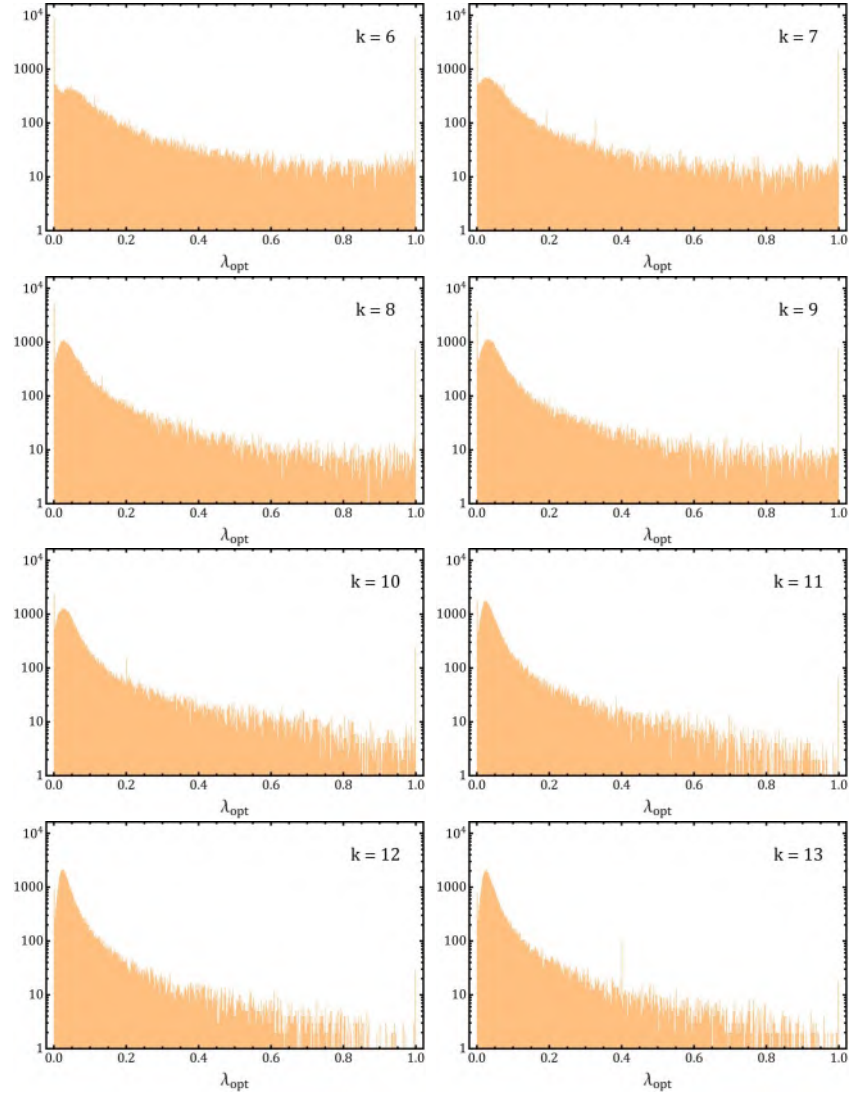


Figura 8.20: Comportamiento del  $\lambda_{\text{opt}}$  para el FFA del pión.

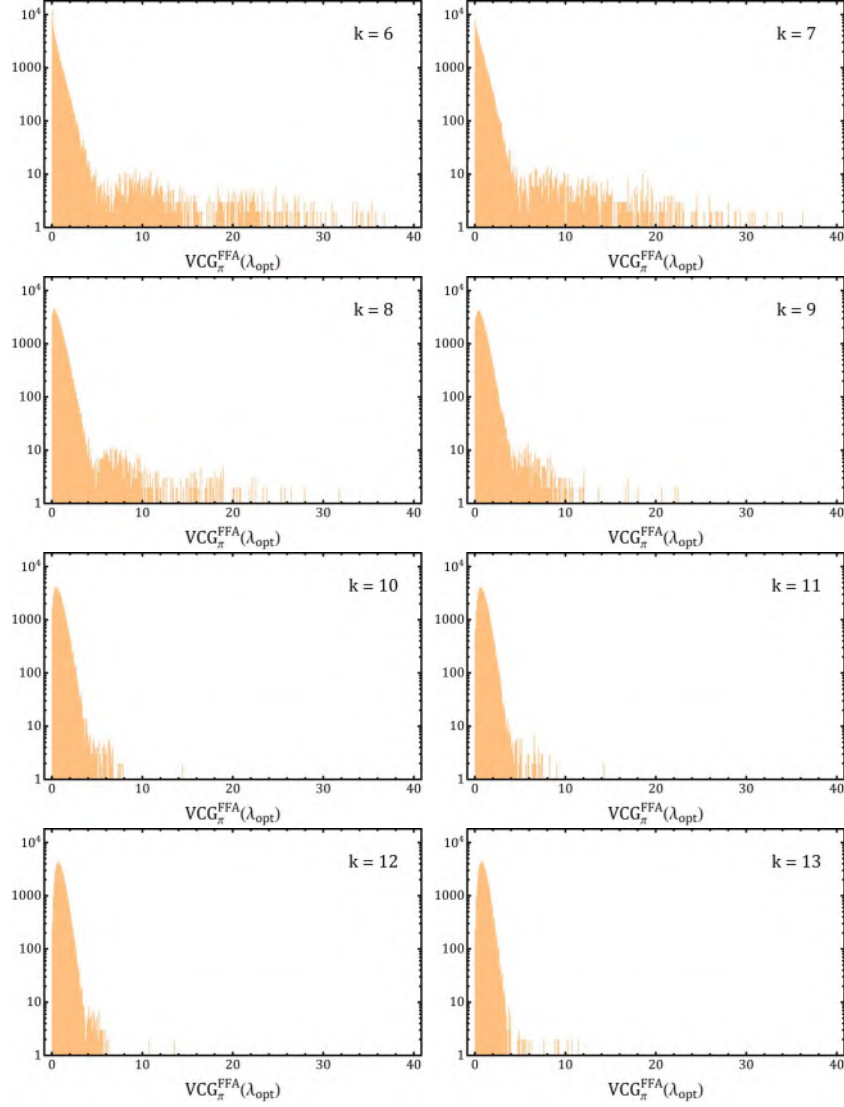


Figura 8.21: Comportamiento de la función  $VCG_{\pi}^{FFA}(\lambda_{opt})$  para el FFA del pión.

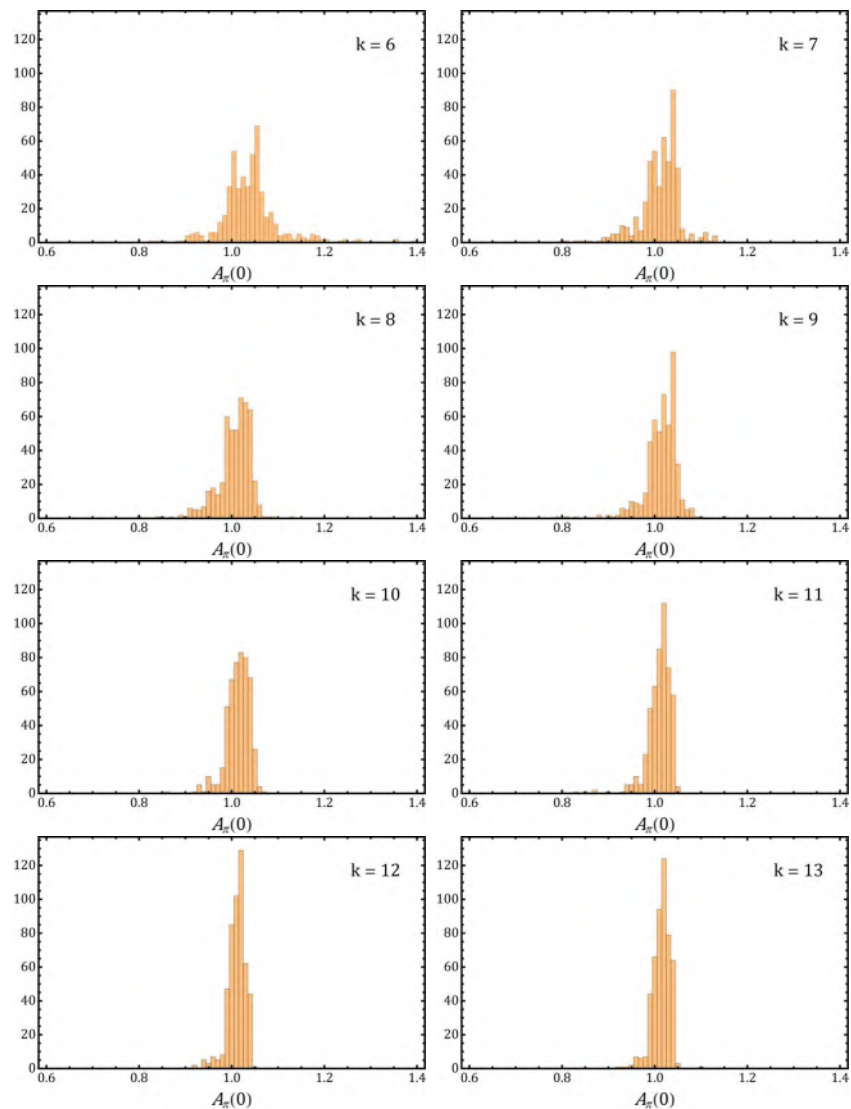


Figura 8.22: Comportamiento del valor  $A_\pi(0)$  del FFA del pión.

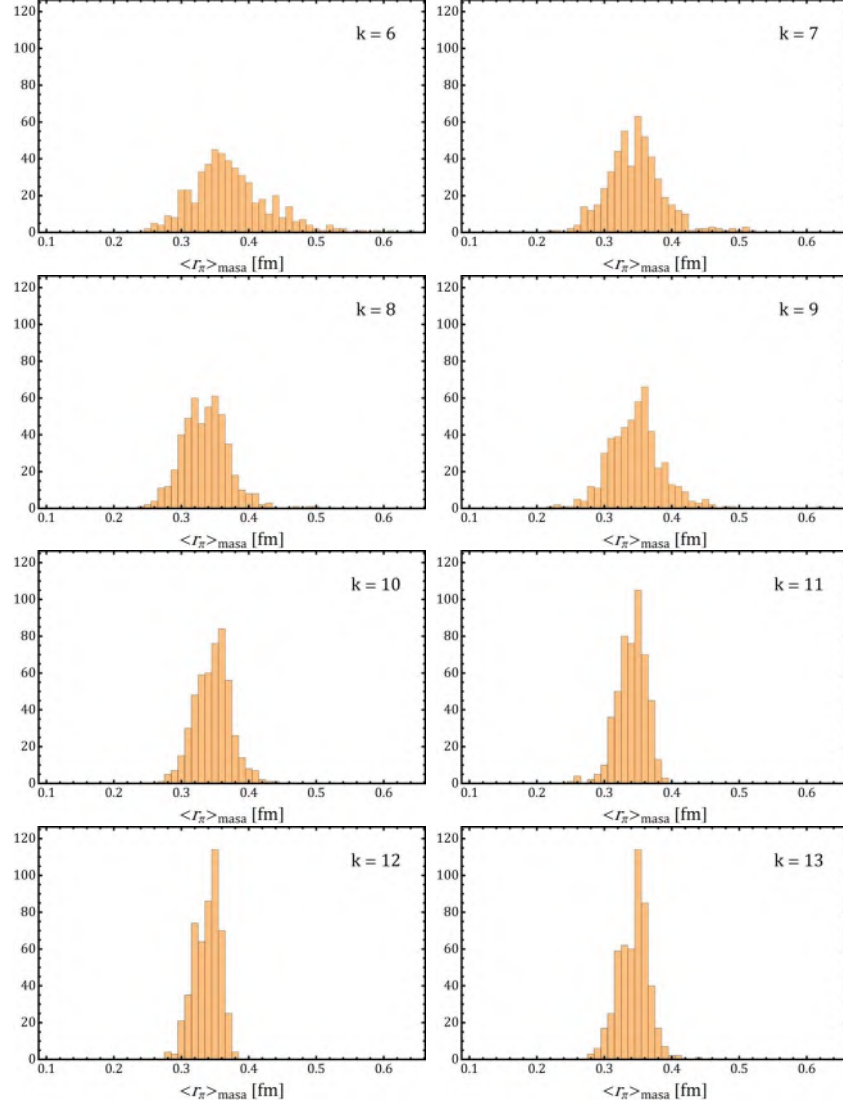


Figura 8.23: Comportamiento del radio de masa del pión,  $\langle r_\pi \rangle_{\text{masa}}$ .

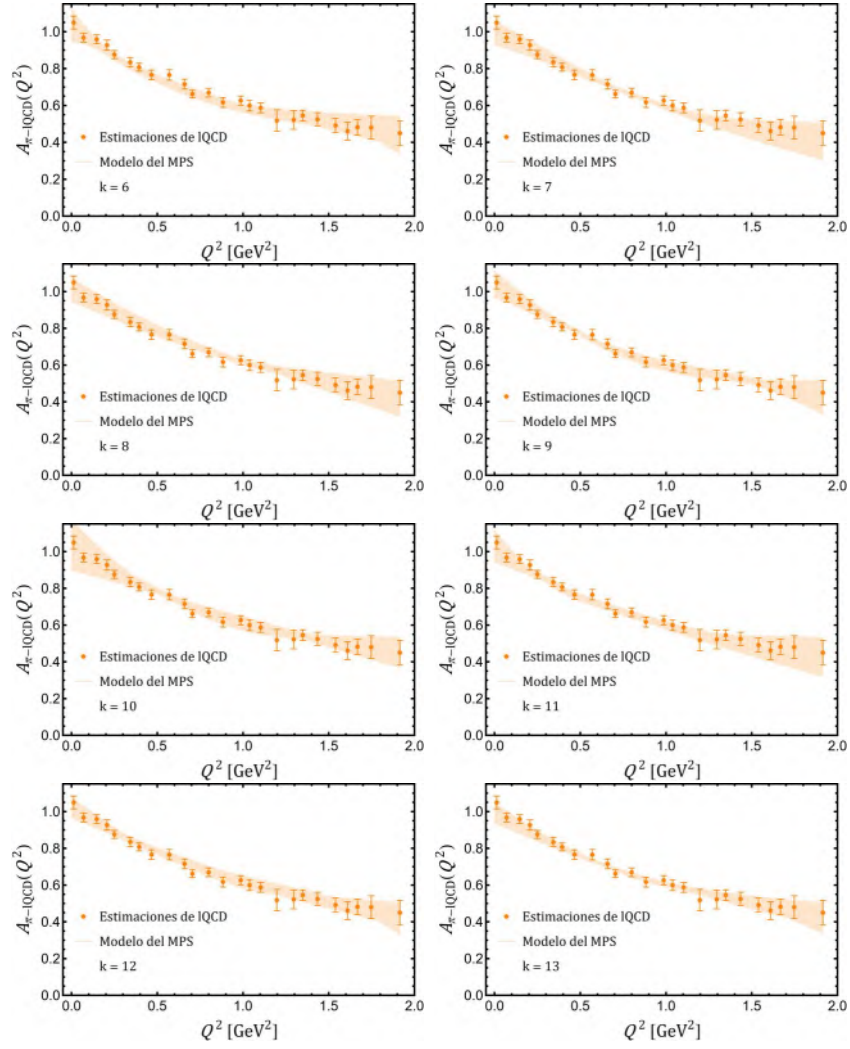


Figura 8.24: Comparación entre las estimaciones numéricas y el modelo del MPS para el FFA del pión.

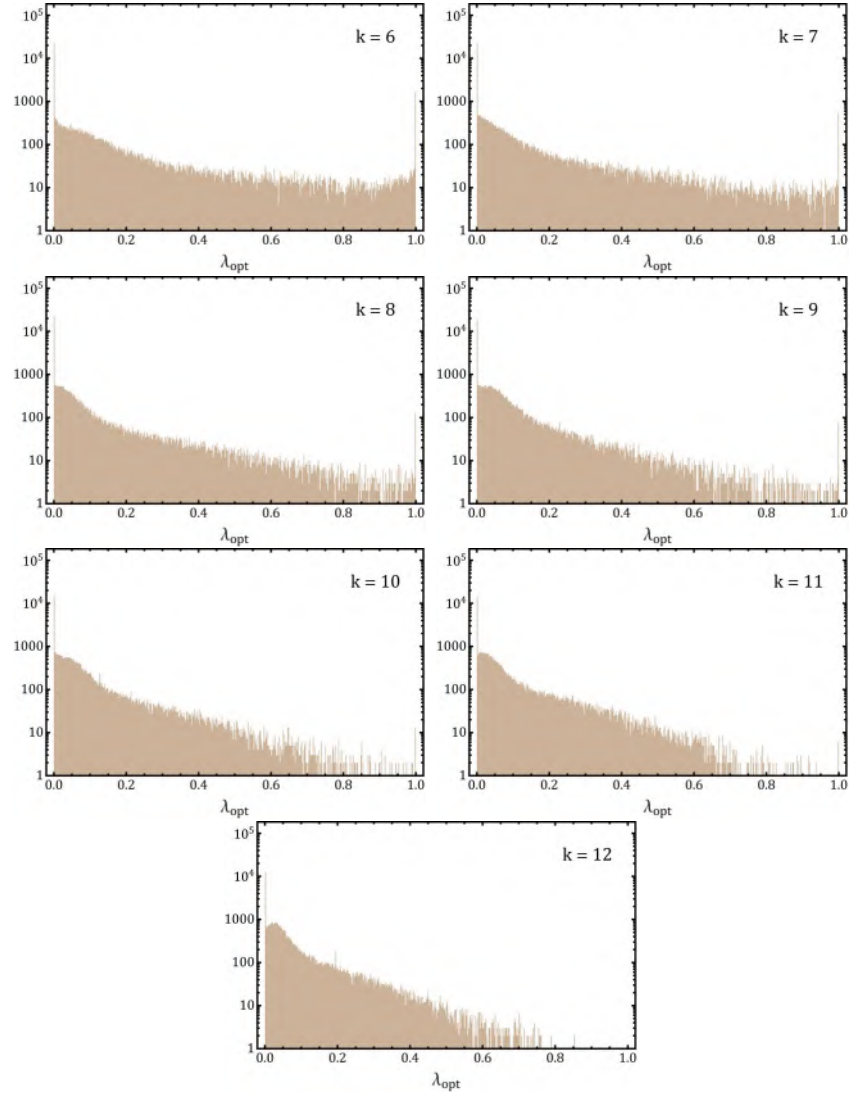


Figura 8.25: Comportamiento del  $\lambda_{\text{opt}}$  para el FFD del pión.

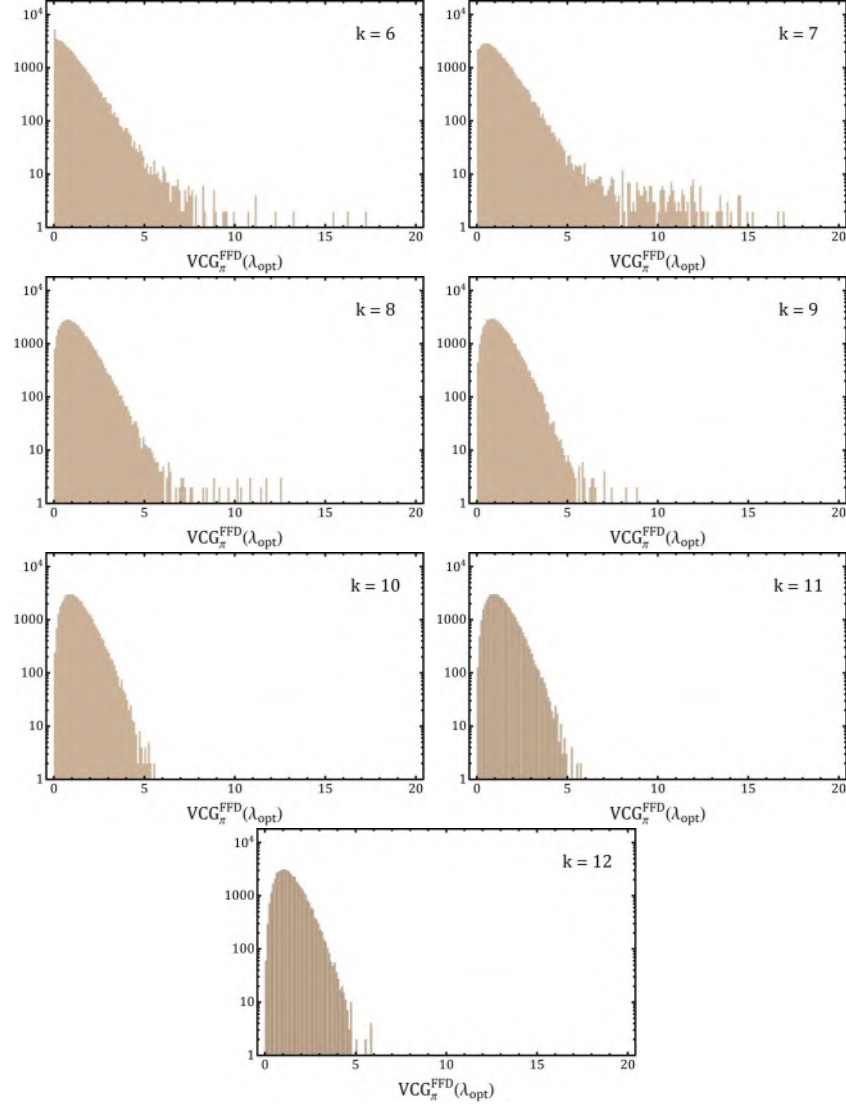


Figura 8.26: Comportamiento de la función  $VCG_{\pi}^{FFD}(\lambda_{opt})$  para el FFD del pión.

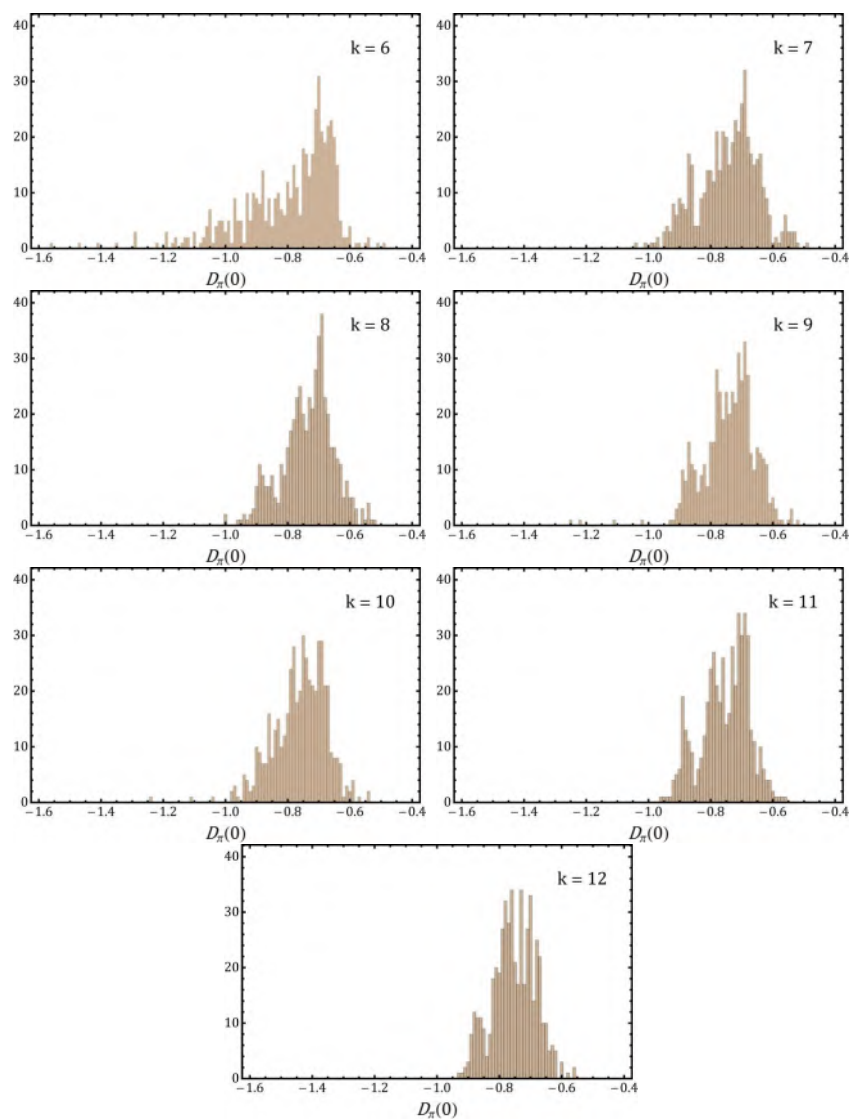


Figura 8.27: Comportamiento del valor  $D_\pi(0)$  para el FFD del pión.

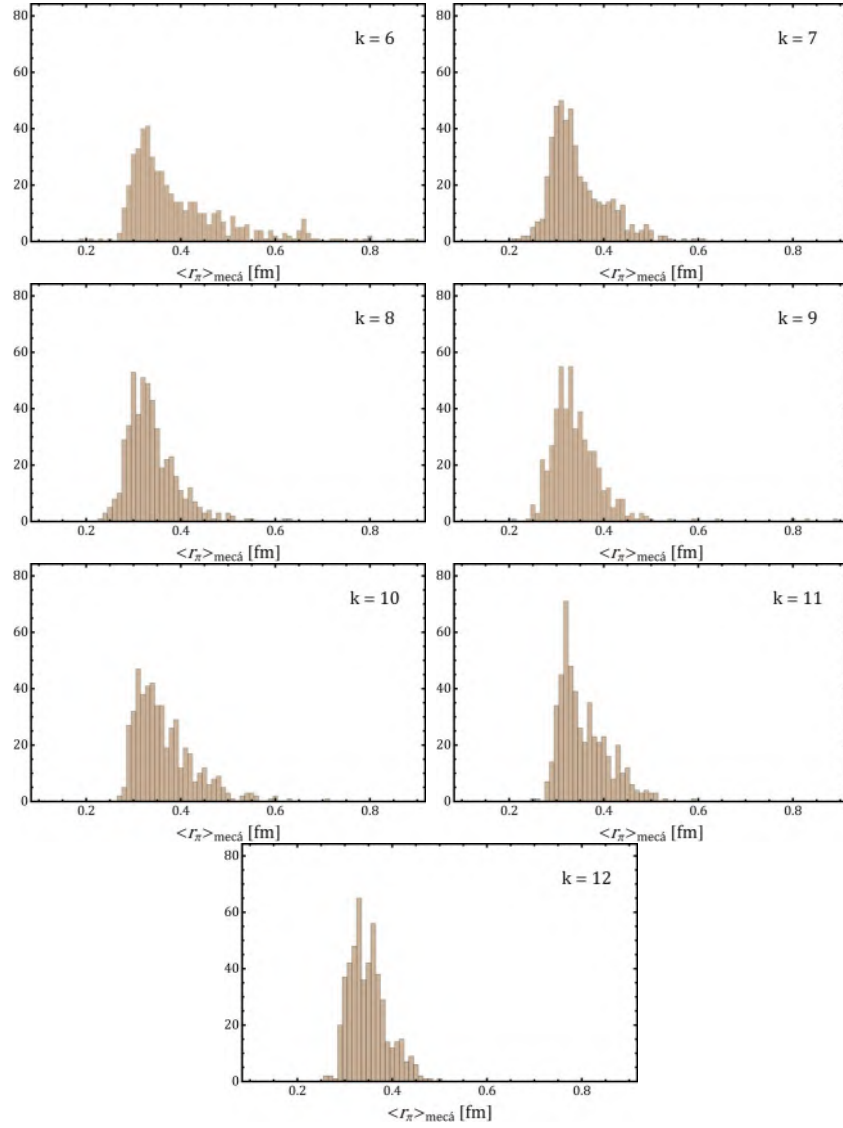


Figura 8.28: Comportamiento del radio mecánico del pión,  $\langle r_\pi \rangle_{\text{mecá}}$ .

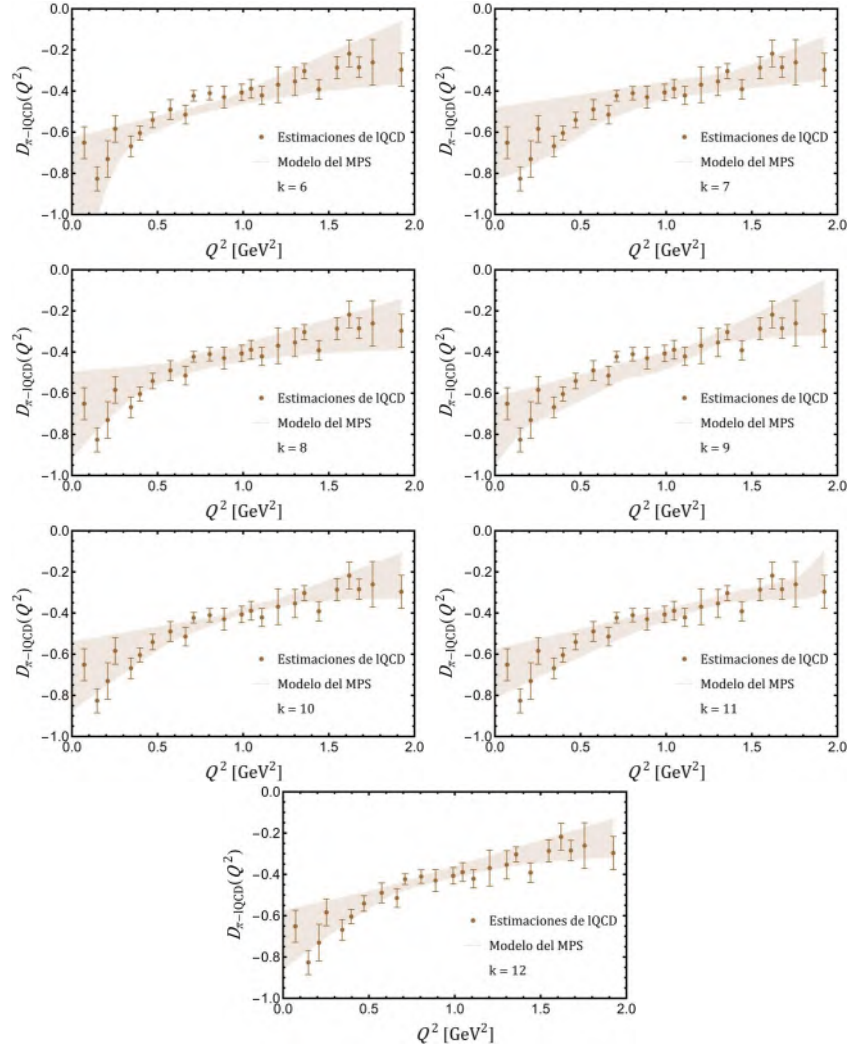


Figura 8.29: Comparación entre las estimaciones numéricas y el modelo del MPS para el FFD del pión.

### 8.5.2 Caso especial de la integral del FFD del protón

Para este caso de la integral, primero presentamos los resultados del caso especial  $k = 33$ . Posteriormente, presentamos los valores de  $D_p(0)$ ,  $\Lambda_{\text{opt}}^2$ ,  $\text{MC}(\Lambda_{\text{opt}}^2)$  y  $\int D(t)dt$  de los  $\{D_\ell^k\}$  que satisfacen la restricción.

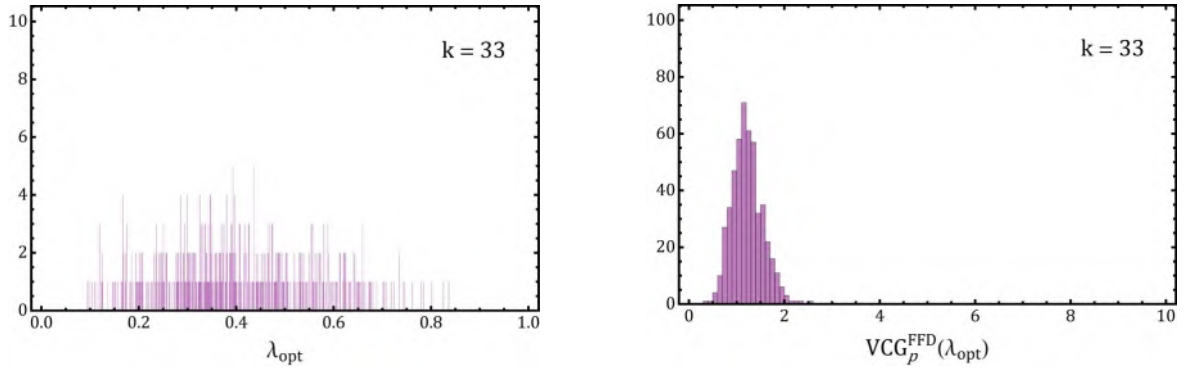


Figura 8.30: Izquierda: Comportamiento del  $\lambda_{\text{opt}}$  para el FFD. Derecha: Comportamiento de la función  $\text{VCG}_p^{\text{FFD}}(\lambda_{\text{opt}})$  para el FFD.

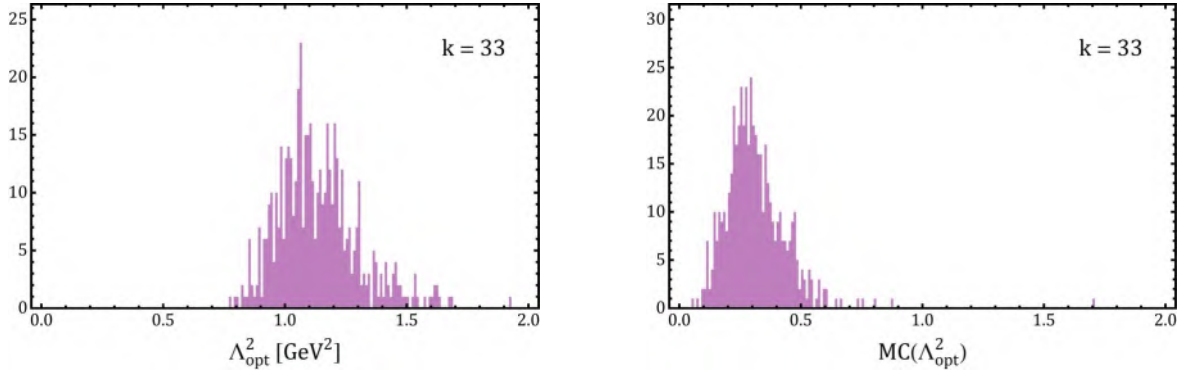


Figura 8.31: Izquierda: Comportamiento del  $\Lambda_{\text{opt}}^2$  para el modelo dipolar del FFD. Derecha: Comportamiento de la función  $\text{MC}(\Lambda_{\text{opt}}^2)$  para modelo dipolar.

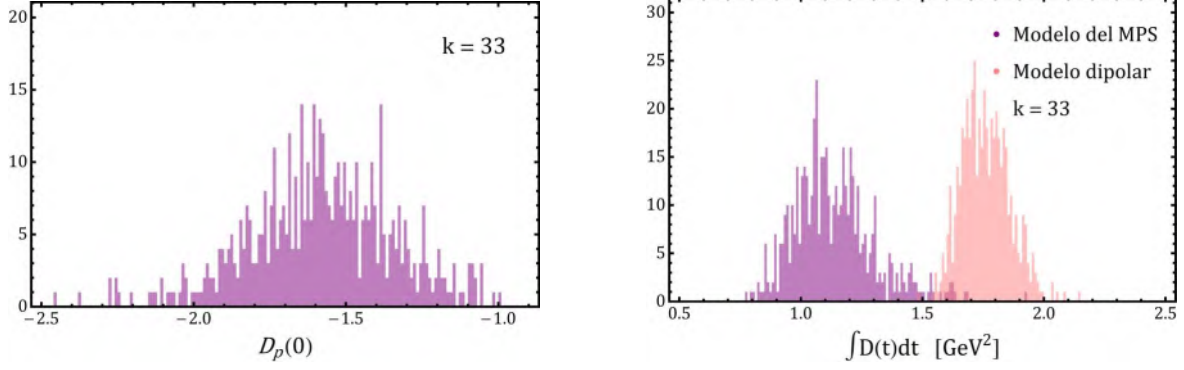


Figura 8.32: Izquierda: Comportamiento de  $D_p(0)$  del FFD. Derecha: Comportamiento del valor de la integral por el modelo del MPS y el modelo dipolar.

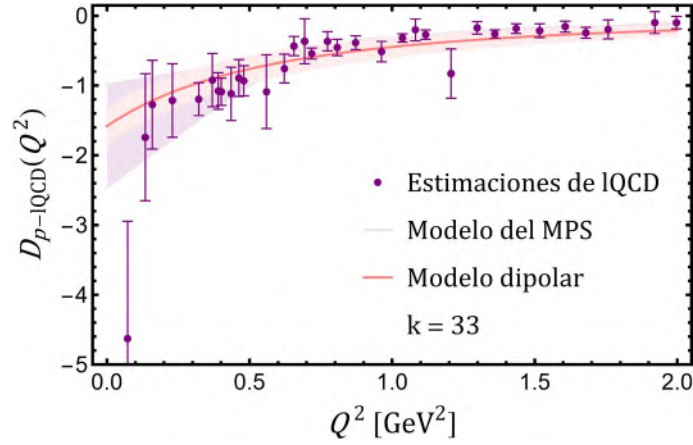


Figura 8.33: Comparación entre las estimaciones numéricas de lQCD, el modelo del MPS y el modelo dipolar para el FFD.

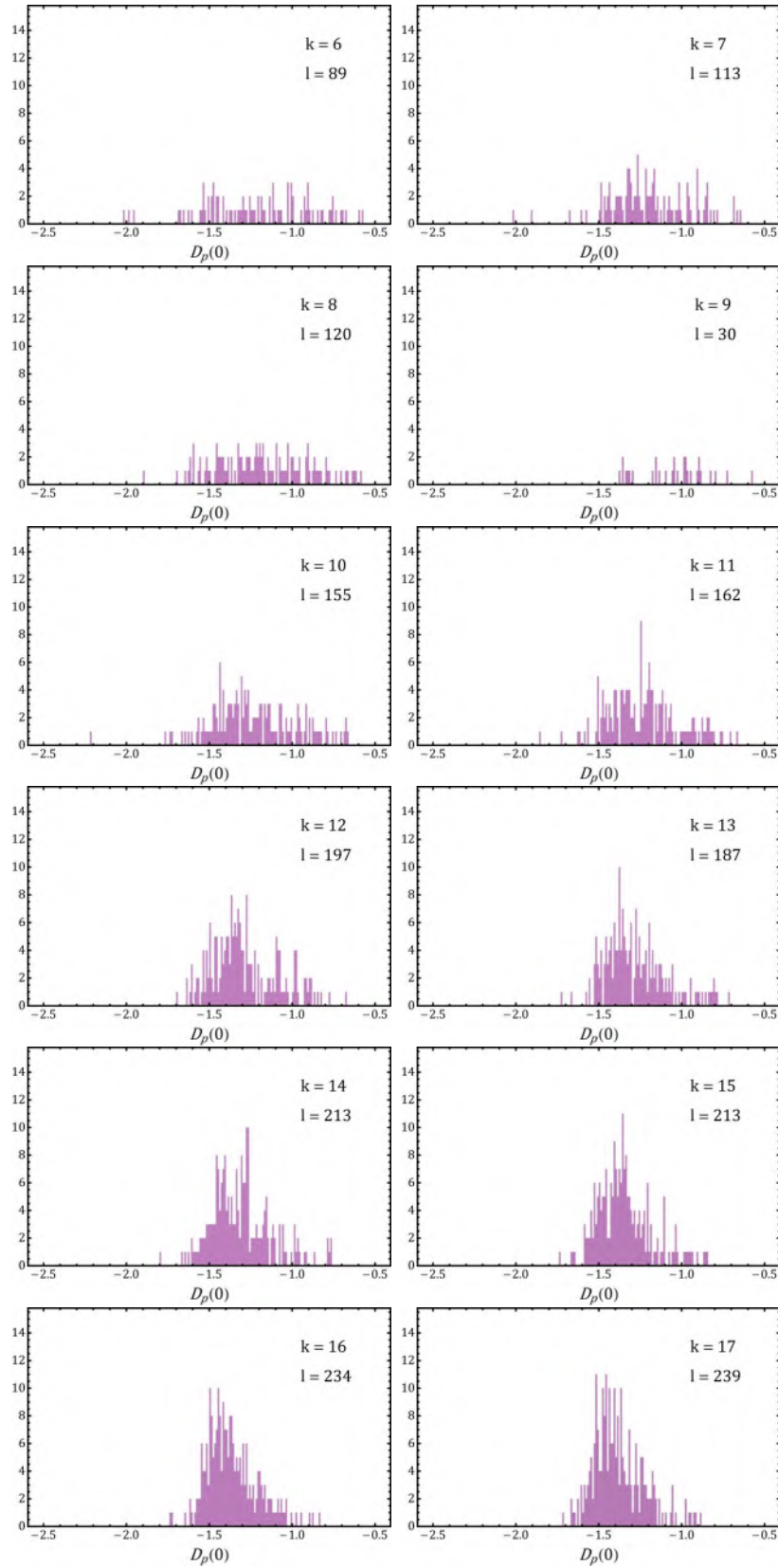


Figura 8.34: Comportamiento del término- $D$  de los  $\mathcal{D}_\ell^k$  que satisfacen la restricción.

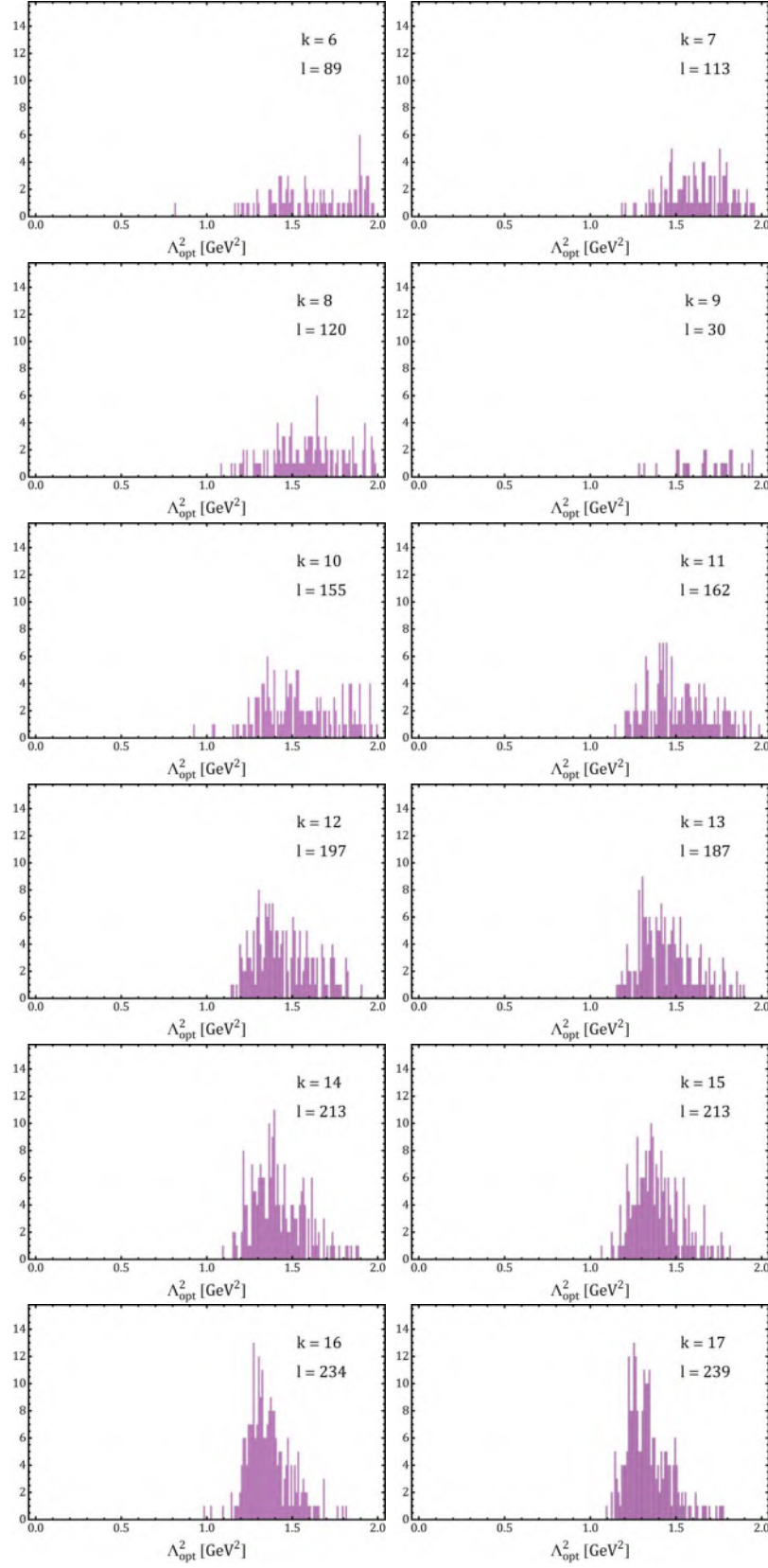


Figura 8.35: Comportamiento del  $\Lambda_{\text{opt}}^2$  de los  $\mathcal{D}_\ell^k$  que satisfacen la restricción.

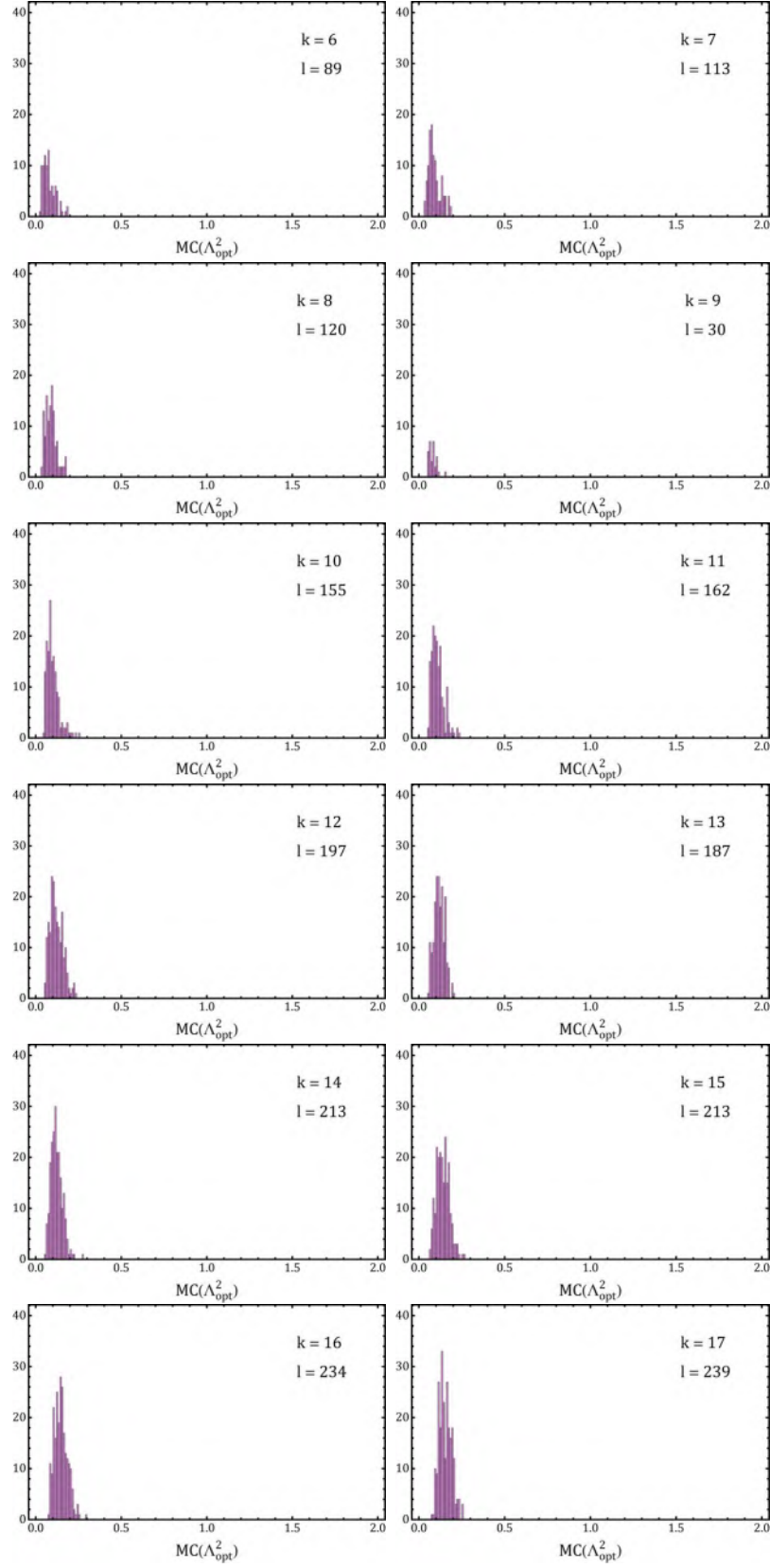


Figura 8.36: Comportamiento de la función  $MC(\Lambda_{opt}^2)$  de los  $\mathcal{D}_\ell^k$  que satisfacen la restricción.

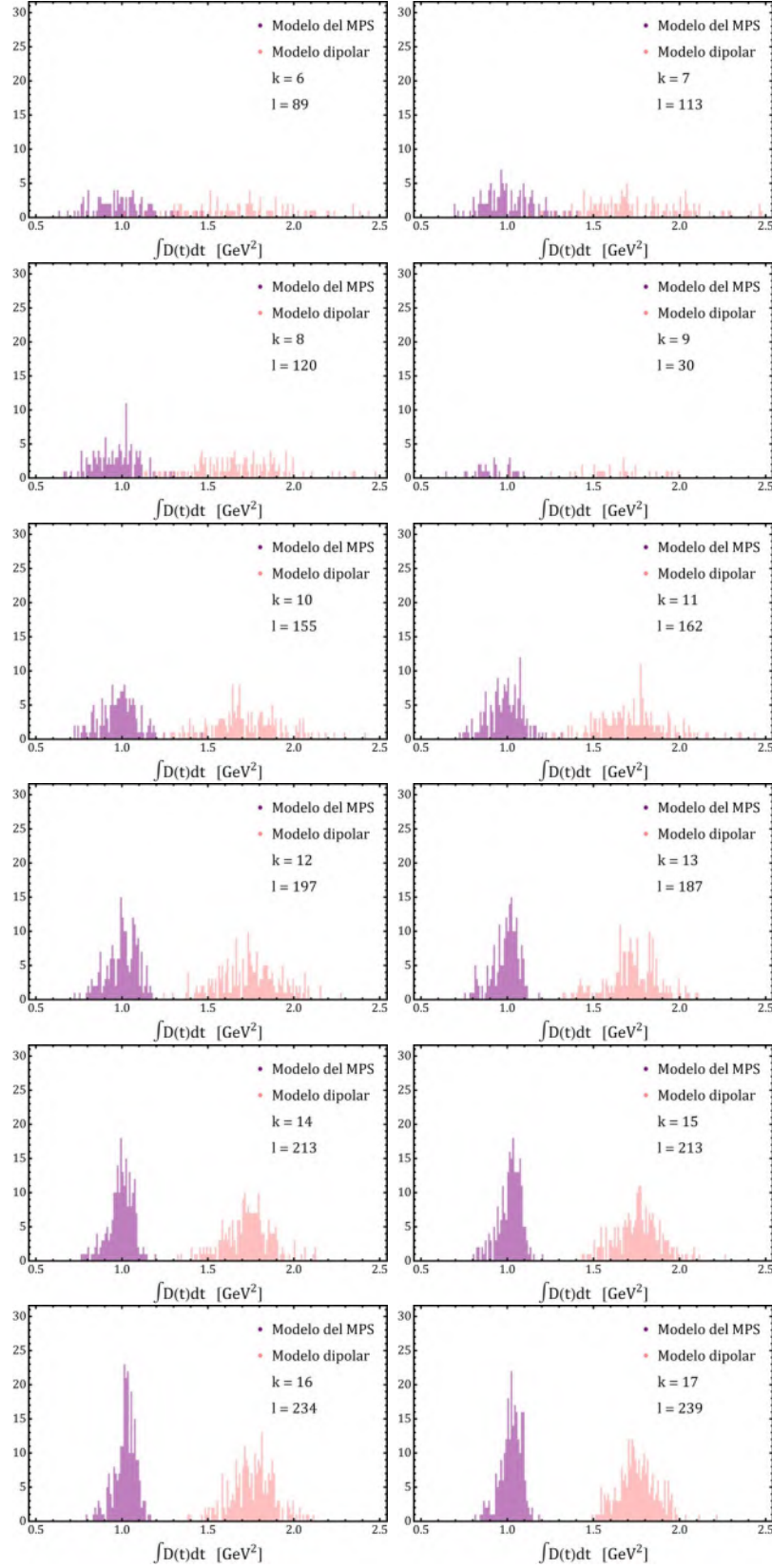


Figura 8.37: Comportamiento de la integral para el modelo del MPS y el modelo dipolar de los  $\mathcal{D}_\ell^k$  que satisfacen la restricción.

## Referencias

---

- [1] J. Dalton, “A New System of Chemical Philosophy,” Vol. 1, Part 1, R. Bickerstaff, Manchester (1808)
- [2] J. J. Thomson, “On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure,” *Phil. Mag. Ser. 6* **7**, no.39, 237-265 (1904) doi:10.1080/14786440409463107
- [3] E. Rutherford, “The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom,” *Phil. Mag. Ser. 6* **21** (1911), 669-688 doi:10.1080/14786440508637080
- [4] A. Sommerfeld, “Zur Quantentheorie der Spektrallinien,” *Ann. Phys.* 17 **356**, 1-94 (1916) <https://doi.org/10.1002/andp.19163561702>
- [5] P. S. E. R. F.R.S., “LIV. Collision of  $\alpha$  particles with light atoms. IV. An anomalous effect in nitrogen,” *Phil. Mag. Ser. 6* **37** (1919) no.222, 581-587 doi:10.1080/14786440608635919
- [6] Bohr, N. The Spectra of Helium and Hydrogen. *Nature* **92**, 231–232 (1913). <https://doi.org/10.1038/092231d0>
- [7] J. Franck and G. Hertz, “Über Zusammenstöße zwischen Elektronen und Molekülen des Quecksilberdampfes und die Ionisierungsspannung desselben,” *Verh. Deutschen Phys. Ges.* **16**, 457–467 (1914).
- [8] Chadwick James. 1932 The existence of a neutron. *Proc. R. Soc. Lond. A* **136**: 692-708. <https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0112>
- [9] Hideki Yukawa, On the Interaction of Elementary Particles. I, Progress of Theoretical Physics Supplement, Volume 1, January 1955, Pages 1–10, <https://doi.org/10.1143/PTPS.1.1>

- 
- [10] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini and C. F. Powell, “PROCESSES INVOLVING CHARGED MESONS,” *Nature* **159** (1947), 694-697 doi:10.1038/159694a0
  - [11] E. E. Chambers and R. Hofstadter, “Structure of the Proton,” *Phys. Rev.* **103** (1956), 1454-1463 doi:10.1103/PhysRev.103.1454
  - [12] M. N. Rosenbluth, “High Energy Elastic Scattering of Electrons on Protons,” *Phys. Rev.* **79** (1950), 615-619 doi:10.1103/PhysRev.79.615
  - [13] L. E. Price, J. R. Dunning, M. Goitein, K. Hanson, T. Kirk and R. Wilson, “Backward-angle electron-proton elastic scattering and proton electromagnetic form-factors,” *Phys. Rev. D* **4** (1971), 45-53 doi:10.1103/PhysRevD.4.45
  - [14] G. Höhler, E. Pietarinen, I. Sabba Stefanescu, F. Borkowski, G. G. Simon, V. H. Walther and R. D. Wendling, “Analysis of Electromagnetic Nucleon Form-Factors,” *Nucl. Phys. B* **114** (1976), 505-534 doi:10.1016/0550-3213(76)90449-1
  - [15] G. G. Simon, C. Schmitt, F. Borkowski and V. H. Walther, “Absolute electron Proton Cross-Sections at Low Momentum Transfer Measured with a High Pressure Gas Target System,” *Nucl. Phys. A* **333** (1980), 381-391 doi:10.1016/0375-9474(80)90104-9
  - [16] R. E. Taylor, “Inelastic electron - proton scattering in the deep continuum region,” *Conf. Proc. C* **690914** (1969), 251-260 SLAC-PUB-0677.
  - [17] M. Gell-Mann, “The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry,” doi:10.2172/4008239
  - [18] G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1,” doi:10.17181/CERN-TH-401
  - [19] I. Y. Kobzarev and L. B. Okun, “GRAVITATIONAL INTERACTION OF FERMIIONS,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **43**, 1904-1909 (1962)
  - [20] H. Pagels, “Energy-Momentum Structure Form Factors of Particles,” *Phys. Rev.* **144** (1966), 1250-1260 doi:10.1103/PhysRev.144.1250
  - [21] V. E. Barnes, P. L. Connolly, D. J. Crennell, B. B. Culwick, W. C. Delaney, W. B. Fowler, P. E. Hagerty, E. L. Hart, N. Horwitz and P. V. C. Hough, *et al.* “Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three,” *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964), 204-206 doi:10.1103/PhysRevLett.12.204
  - [22] O. W. Greenberg, “Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 598-602 doi:10.1103/PhysRevLett.13.598

- 
- [23] D. B. Lichtenberg, (1970), “Unitary Symmetry and Elementary Particles,” Academic Press, New York.
  - [24] D. Griffiths, “Introduction to elementary particles,” 2nd ed., WILEY-VCH (2008)
  - [25] F. Gross, E. Klempt, S. J. Brodsky, A. J. Buras, V. D. Burkert, G. Heinrich, K. Jakobs, C. A. Meyer, K. Orginos and M. Strickland, *et al.* “50 Years of Quantum Chromodynamics,” *Eur. Phys. J. C* **83** (2023), 1125 doi:10.1140/epjc/s10052-023-11949-2 [arXiv:2212.11107 [hep-ph]].
  - [26] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1343-1346 doi:10.1103/PhysRevLett.30.1343
  - [27] S. F. Novaes, “Standard model: An Introduction,” [arXiv:hep-ph/0001283 [hep-ph]].
  - [28] G. Aad *et al.* [ATLAS], “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett. B* **716** (2012), 1-29 doi:10.1016/j.physletb.2012.08.020 [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
  - [29] R. Gupta, “Introduction to lattice QCD: Course,” [arXiv:hep-lat/9807028 [hep-lat]].
  - [30] Z. F. Cui, D. Binosi, C. D. Roberts and S. M. Schmidt, “Fresh Extraction of the Proton Charge Radius from Electron Scattering,” *Phys. Rev. Lett.* **127**, no.9, 092001 (2021) doi:10.1103/PhysRevLett.127.092001 [arXiv:2102.01180 [hep-ph]].
  - [31] Z. F. Cui, D. Binosi, C. D. Roberts and S. M. Schmidt, “Pion charge radius from pion+electron elastic scattering data,” *Phys. Lett. B* **822**, 136631 (2021) doi:10.1016/j.physletb.2021.136631 [arXiv:2108.04948 [hep-ph]].
  - [32] F. Halzen and A. D. Martin, “QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS,” John Wiley & Sons, New York (1984)
  - [33] E. Fermi, “Nuclear Physics,” University of Chicago Press, Chicago (1950)
  - [34] W. Greinger, S. Schramm and E. Stein, “Quantum Chromodynamics,” 3rd ed., Springer Berlin, Heidelberg (2007) <https://doi.org/10.1007/978-3-540-48535-3>
  - [35] W. Greiner and J. Reinhardt, “Quantum Electrodynamics,” 4rd ed., Springer Berlin, Heidelberg (2009) <https://doi.org/10.1007/978-3-540-87561-1>
  - [36] A. Das, “Lectures on Quantum Mechanics,” Department of Physics and Astronomy, University of Rochester
  - [37] W. Pauli, “Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons,” *Zeitschrift für Physik* **43** (1927) no.9-10, 601-623 doi:10.1007/bf01397326

- 
- [38] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **117**, 610-624 (1928) doi:10.1098/rspa.1928.0023
  - [39] W. Greiner, “Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations,” 3rd ed., Springer Berlin, Heidelberg (2000) <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04275-5>
  - [40] W. Gordon, “Der Strom der Diracschen Elektronentheorie,” *Z. Physik* **50**, 630-632 (1928) <https://doi.org/10.1007/BF01327881>
  - [41] L. V. P. R. de Broglie, “Recherches sur la théorie des quanta,” *Annals Phys.* **2** (1925), 22-128
  - [42] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, “Particles and Nuclei: An Introduction to the Physical Concepts,” 3rd ed., Springer Berlin, Heidelberg (2002) <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46321-5>
  - [43] O. Klein, “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English),” *Z. Phys.* **37**, 895-906 (1926) doi:10.1007/BF01397481
  - [44] W. Gordon, “Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie,” *Z. Phys.* **40**, no.1, 117-133 (1926) doi:10.1007/BF01390840
  - [45] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics,” 2nd Ed., John Wiley & Sons (1975)
  - [46] J. C. Bernauer, “Measurement of the elastic electron-proton cross section and separation of the electric and magnetic form factor in the  $Q^2$  range from 0.004 to 1 (GeV/c) $^2$ ,” Mainz U., Inst. Kernphys. (2010)
  - [47] W. Xiong, “A High Precision Measurement of the Proton Charge Radius at JLab,” JLAB-PHY-20-3266.
  - [48] S. R. Amendolia, B. Badelek, G. Batignani, G. A. Beck, F. Bedeschi, E. H. Bellamy, E. Bertolucci, D. Bettoni, H. Bilokon and G. Bologna, *et al.* “A Measurement of the Pion Charge Radius,” *Phys. Lett. B* **146**, 116-120 (1984) doi:10.1016/0370-2693(84)90655-5
  - [49] S. R. Amendolia *et al.* [NA7], “A Measurement of the Space - Like Pion Electromagnetic Form-Factor,” *Nucl. Phys. B* **277**, 168 (1986) doi:10.1016/0550-3213(86)90437-2
  - [50] W. Greiner and J. Reinhardt, “Field Quantization,” 1st ed., Springer Berlin, Heidelberg (2013) <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61485-9>
  - [51] A. V. Belitsky, D. Mueller and A. Kirchner, “Theory of deeply virtual Compton scattering on the nucleon,” *Nucl. Phys. B* **629**, 323-392 (2002) doi:10.1016/S0550-3213(02)00144-X [arXiv:hep-ph/0112108 [hep-ph]].

- 
- [52] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri and F. X. Girod, “The pressure distribution inside the proton,” *Nature* **557**, no.7705, 396-399 (2018) doi:10.1038/s41586-018-0060-z
  - [53] K. Kumerički, “Measurability of pressure inside the proton,” *Nature* **570**, no.7759, E1-E2 (2019) doi:10.1038/s41586-019-1211-6
  - [54] H. Dutriex, C. Lorcé, H. Moutarde, P. Sznajder, A. Trawiński and J. Wagner, “Phenomenological assessment of proton mechanical properties from deeply virtual Compton scattering,” *Eur. Phys. J. C* **81**, no.4, 300 (2021) doi:10.1140/epjc/s10052-021-09069-w [arXiv:2101.03855 [hep-ph]].
  - [55] A. V. Radyushkin, “Generalized parton distributions,” doi:10.1142/9789812810458\_0027 [arXiv:hep-ph/0101225 [hep-ph]].
  - [56] M. V. Polyakov, “Generalized parton distributions and strong forces inside nucleons and nuclei,” *Phys. Lett. B* **555**, 57-62 (2003) doi:10.1016/S0370-2693(03)00036-4 [arXiv:hep-ph/0210165 [hep-ph]].
  - [57] S. Wallon, “Hard exclusive processes,” *Acta Phys. Polon. Supp.* **6** (2013), 587-598 doi:10.5506/APhysPolBSupp.6.587 [arXiv:1302.2888 [hep-ph]].
  - [58] D. C. Hackett, P. R. Oare, D. A. Pefkou and P. E. Shanahan, “Gravitational form factors of the pion from lattice QCD,” *Phys. Rev. D* **108**, no.11, 114504 (2023) doi:10.1103/PhysRevD.108.114504 [arXiv:2307.11707 [hep-lat]].
  - [59] D. C. Hackett, D. A. Pefkou and P. E. Shanahan, “Gravitational Form Factors of the Proton from Lattice QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **132**, no.25, 251904 (2024) doi:10.1103/PhysRevLett.132.251904 [arXiv:2310.08484 [hep-lat]].
  - [60] Y. Z. Xu, M. Ding, K. Raya, C. D. Roberts, J. Rodríguez-Quintero and S. M. Schmidt, “Pion and kaon electromagnetic and gravitational form factors,” *Eur. Phys. J. C* **84**, no.2, 191 (2024) doi:10.1140/epjc/s10052-024-12518-x [arXiv:2311.14832 [hep-ph]].
  - [61] Z. Q. Yao, Y. Z. Xu, D. Binosi, Z. F. Cui, M. Ding, K. Raya, C. D. Roberts, J. Rodríguez-Quintero and S. M. Schmidt, “Nucleon gravitational form factors,” *Eur. Phys. J. A* **61**, no.5, 92 (2025) doi:10.1140/epja/s10050-025-01557-x [arXiv:2409.15547 [hep-ph]].
  - [62] S. Kumano, Q. T. Song and O. V. Teryaev, “Hadron tomography by generalized distribution amplitudes in pion-pair production process  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$  and gravitational form factors for pion,” *Phys. Rev. D* **97**, no.1, 014020 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.97.014020 [arXiv:1711.08088 [hep-ph]].
  - [63] M. V. Polyakov and P. Schweitzer, “Forces inside hadrons: pressure, surface tension, mechanical radius, and all that,” *Int. J. Mod. Phys. A* **33**, no.26, 1830025 (2018) doi:10.1142/S0217751X18300259 [arXiv:1805.06596 [hep-ph]].

- 
- [64] C. Lorcé, A. Metz, B. Pasquini and S. Rodini, “Energy-momentum tensor in QCD: nucleon mass decomposition and mechanical equilibrium,” JHEP **11**, 121 (2021) doi:10.1007/JHEP11(2021)121 [arXiv:2109.11785 [hep-ph]].
  - [65] X. D. Ji, “Breakup of hadron masses and energy - momentum tensor of QCD,” Phys. Rev. D **52**, 271-281 (1995) doi:10.1103/PhysRevD.52.271 [arXiv:hep-ph/9502213 [hep-ph]].
  - [66] X. D. Ji, “Gauge-Invariant Decomposition of Nucleon Spin,” Phys. Rev. Lett. **78**, 610-613 (1997) doi:10.1103/PhysRevLett.78.610 [arXiv:hep-ph/9603249 [hep-ph]].
  - [67] M. V. Polyakov and C. Weiss, “Skewed and double distributions in pion and nucleon,” Phys. Rev. D **60**, 114017 (1999) doi:10.1103/PhysRevD.60.114017 [arXiv:hep-ph/9902451 [hep-ph]].
  - [68] I. A. Perevalova, M. V. Polyakov and P. Schweitzer, “On LHCb pentaquarks as a baryon- $\psi(2S)$  bound state: prediction of isospin- $\frac{3}{2}$  pentaquarks with hidden charm,” Phys. Rev. D **94**, no.5, 054024 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.94.054024 [arXiv:1607.07008 [hep-ph]].
  - [69] M. A. Sultan, Z. Xing, K. Raya, A. Bashir and L. Chang, “Gravitational form factors of pseudoscalar mesons in a contact interaction,” Phys. Rev. D **110**, no.5, 054034 (2024) doi:10.1103/PhysRevD.110.054034 [arXiv:2407.10437 [hep-ph]].
  - [70] M. B. Voloshin and V. I. Zakharov, “Measuring QCD Anomalies in Hadronic Transitions Between Onium States,” Phys. Rev. Lett. **45**, 688 (1980) doi:10.1103/PhysRevLett.45.688
  - [71] M. B. Voloshin and A. D. Dolgov, “ON GRAVITATIONAL INTERACTION OF THE GOLDSTONE BOSONS,” Sov. J. Nucl. Phys. **35**, 120-121 (1982)
  - [72] H. Leutwyler and M. A. Shifman, “GOLDSTONE BOSONS GENERATE PECULIAR CONFORMAL ANOMALIES,” Phys. Lett. B **221**, 384-388 (1989) doi:10.1016/0370-2693(89)91730-9
  - [73] M. V. Polyakov, “Hard exclusive electroproduction of two pions and their resonances,” Nucl. Phys. B **555**, 231 (1999) doi:10.1016/S0550-3213(99)00314-4 [arXiv:hep-ph/9809483 [hep-ph]].
  - [74] V. A. Novikov and M. A. Shifman, “Comment on the  $\psi$ -prime  $\rightarrow J/\psi \pi \pi$  Decay,” Z. Phys. C **8**, 43 (1981) doi:10.1007/BF01429829
  - [75] B. Maynard, “Energy-momentum tensor in  $\Phi^4$  theory at one loop,” Phys. Rev. D **111**, no.7, 076001 (2025) doi:10.1103/PhysRevD.111.076001 [arXiv:2406.08857 [hep-ph]].

- 
- [76] C. Lorcé, B. Pire and Q. T. Song, “Kinematical higher-twist corrections in  $\gamma^*\gamma \rightarrow M\bar{M}$ ,” Phys. Rev. D **106**, no.9, 094030 (2022) doi:10.1103/PhysRevD.106.094030 [arXiv:2209.11140 [hep-ph]].
  - [77] M. Masuda *et al.* [Belle], “Study of  $\pi^0$  pair production in single-tag two-photon collisions,” Phys. Rev. D **93**, no.3, 032003 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.032003 [arXiv:1508.06757 [hep-ex]].
  - [78] X. D. Ji, W. Melnitchouk and X. Song, “A Study of off forward parton distributions,” Phys. Rev. D **56**, 5511-5523 (1997) doi:10.1103/PhysRevD.56.5511 [arXiv:hep-ph/9702379 [hep-ph]].
  - [79] V. Y. Petrov, P. V. Pobylitsa, M. V. Polyakov, I. Bornig, K. Goeke and C. Weiss, “Off - forward quark distributions of the nucleon in the large N(c) limit,” Phys. Rev. D **57**, 4325-4333 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.57.4325 [arXiv:hep-ph/9710270 [hep-ph]].
  - [80] C. Cebulla, K. Goeke, J. Ossmann and P. Schweitzer, “The Nucleon form-factors of the energy momentum tensor in the Skyrme model,” Nucl. Phys. A **794**, 87-114 (2007) doi:10.1016/j.nuclphysa.2007.08.004 [arXiv:hep-ph/0703025 [hep-ph]].
  - [81] J. H. Jung, U. Yakhshiev and H. C. Kim, “Energy-momentum tensor form factors of the nucleon within a  $\pi$ - $\rho$ - $\omega$  soliton model,” J. Phys. G **41**, 055107 (2014) doi:10.1088/0954-3899/41/5/055107 [arXiv:1310.8064 [hep-ph]].
  - [82] J. Hudson and P. Schweitzer, “Dynamic origins of fermionic D-terms,” Phys. Rev. D **97**, no.5, 056003 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.97.056003 [arXiv:1712.05317 [hep-ph]].
  - [83] K. Goeke, J. Grabis, J. Ossmann, M. V. Polyakov, P. Schweitzer, A. Silva and D. Urbano, “Nucleon form-factors of the energy momentum tensor in the chiral quark-soliton model,” Phys. Rev. D **75**, 094021 (2007) doi:10.1103/PhysRevD.75.094021 [arXiv:hep-ph/0702030 [hep-ph]].
  - [84] P. Schweitzer, S. Boffi and M. Radici, “Polynomiality of unpolarized off forward distribution functions and the D term in the chiral quark soliton model,” Phys. Rev. D **66**, 114004 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.66.114004 [arXiv:hep-ph/0207230 [hep-ph]].
  - [85] K. Goeke, J. Grabis, J. Ossmann, P. Schweitzer, A. Silva and D. Urbano, “The pion mass dependence of the nucleon form-factors of the energy momentum tensor in the chiral quark-soliton model,” Phys. Rev. C **75**, 055207 (2007) doi:10.1103/PhysRevC.75.055207 [arXiv:hep-ph/0702031 [hep-ph]].
  - [86] M. Wakamatsu, “On the D-term of the nucleon generalized parton distributions,” Phys. Lett. B **648**, 181-185 (2007) doi:10.1016/j.physletb.2007.03.013 [arXiv:hep-ph/0701057 [hep-ph]].

- 
- [87] Green, P.J., & Silverman, B.W. (1993). Nonparametric Regression and Generalized Linear Models: A roughness penalty approach (1st ed.), Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/b15710>
  - [88] C. d. Boor, A Practical Guide to Splines, Springer Verlag, New York (1978).
  - [89] Craven, P., Wahba, G. Smoothing noisy data with spline functions. *Numer. Math.* **31**, 377–403 (1978). <https://doi.org/10.1007/BF01404567>
  - [90] L. Schlessinger, Use of Analyticity in the Calculation of Nonrelativistic Scattering Amplitudes, *Phys. Rev.* **167**, 5, 1411-1423 (1968). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.167.1411>
  - [91] W. Baker, in *Advances in Theoretical Physics*, V, edited by K. Brueckner (Academic Press Inc., New York, 1965), Vol. I, pp. 1-58.
  - [92] <https://www.boost.org/>
  - [93] <https://eigen.tuxfamily.org/>
  - [94] Y. Z. Xu, K. Raya, Z. F. Cui, C. D. Roberts and J. Rodríguez-Quintero, “Empirical Determination of the Pion Mass Distribution,” *Chin. Phys. Lett.* **40**, no.4, 041201 (2023) doi:10.1088/0256-307X/40/4/041201 [arXiv:2302.07361 [hep-ph]].
  - [95] R. Pohl, R. Gilman, G. A. Miller and K. Pachucki, “Muonic hydrogen and the proton radius puzzle,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **63**, 175-204 (2013) doi:10.1146/annurev-nucl-102212-170627 [arXiv:1301.0905 [physics.atom-ph]].
  - [96] C. E. Carlson, “The Proton Radius Puzzle,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **82**, 59-77 (2015) doi:10.1016/j.ppnp.2015.01.002 [arXiv:1502.05314 [hep-ph]].
  - [97] X. Wang, Z. Xing, L. Chang, M. Ding, K. Raya and C. D. Roberts, “Sketching pion and proton mass distributions,” *Phys. Lett. B* **862**, 139280 (2025) doi:10.1016/j.physletb.2025.139280 [arXiv:2410.13068 [hep-ph]].
  - [98] R. Wang, W. Kou, Y. P. Xie and X. Chen, “Extraction of the proton mass radius from the vector meson photoproductions near thresholds,” *Phys. Rev. D* **103**, no.9, L091501 (2021) doi:10.1103/PhysRevD.103.L091501 [arXiv:2102.01610 [hep-ph]].
  - [99] X. H. Cao, F. K. Guo, Q. Z. Li and D. L. Yao, “Dispersive Determination of Nucleon Gravitational Form Factors,” [arXiv:2411.13398 [hep-ph]].
  - [100] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri and F. X. Girod, “The mechanical radius of the proton,” [arXiv:2310.11568 [hep-ph]].
  - [101] Z. Xing, M. Ding and L. Chang, “Glimpse into the pion gravitational form factor,” *Phys. Rev. D* **107**, no.3, L031502 (2023) doi:10.1103/PhysRevD.107.L031502 [arXiv:2211.06635 [hep-ph]].

- 
- [102] K. Raya, Z. F. Cui, L. Chang, J. M. Morgado, C. D. Roberts and J. Rodriguez-Quintero, “Revealing pion and kaon structure via generalised parton distributions \*,” *Chin. Phys. C* **46**, no.1, 013105 (2022) doi:10.1088/1674-1137/ac3071 [arXiv:2109.11686 [hep-ph]].
- [103] W. Broniowski and E. Ruiz Arriola, “Gravitational form factors of the pion and meson dominance,” *Phys. Lett. B* **859**, 139138 (2024) doi:10.1016/j.physletb.2024.139138 [arXiv:2405.07815 [hep-ph]].
- [104] S. Navas *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” *Phys. Rev. D* **110**, no.3, 030001 (2024) doi:10.1103/PhysRevD.110.030001

# Jesús Reyes Hernández

## Radios de carga, masa y mecánico para hadrones.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

### Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:536299147

Fecha de entrega

4 dic 2025, 7:40 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

4 dic 2025, 7:52 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

Radios de carga, masa y mecánico para hadrones.pdf

Tamaño del archivo

25.8 MB

183 páginas

41.895 palabras

187.759 caracteres

# 5% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

## Filtrado desde el informe

- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 10 palabras)

## Fuentes principales

- 5%  Fuentes de Internet
- 4%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

## Marcas de integridad

### N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**  
1311 caracteres sospechosos en N.º de páginas  
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

| Datos del manuscrito que se presenta a revisión |                                                |                              |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------|
| <b>Programa educativo</b>                       | Maestría en Ciencias en el Área de Física      |                              |
| <b>Título del trabajo</b>                       | Radios de carga, masa y mecánico para hadrones |                              |
|                                                 | <b>Nombre</b>                                  | <b>Correo electrónico</b>    |
| <b>Autor/es</b>                                 | Jesús Reyes Hernández                          | 1415744e@umich.mx            |
| <b>Director</b>                                 | Juan Carlos Arteaga Velázquez                  | juan.arteaga@umich.mx        |
| <b>Codirector</b>                               |                                                |                              |
| <b>Coordinador del programa</b>                 | Umberto Cotti Gollini                          | mae.ciencias.fisica@umich.mx |

| Uso de Inteligencia Artificial  |             |             |
|---------------------------------|-------------|-------------|
| Rubro                           | Uso (sí/no) | Descripción |
| Asistencia en la redacción      | No          |             |
| Traducción al español           | No          |             |
| Traducción a otra lengua        | No          |             |
| Revisión y corrección de estilo | No          |             |

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



| Uso de Inteligencia Artificial             |             |                                                                          |
|--------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Rubro                                      | Uso (sí/no) | Descripción                                                              |
| Análisis de datos                          | No          |                                                                          |
| Búsqueda y organización de información     | Si          | Búsqueda de artículos antiguos, así como su DOI y formato de referencia. |
| Formateo de las referencias bibliográficas | No          |                                                                          |
| Generación de contenido multimedia         | No          |                                                                          |
| Otro                                       | No          |                                                                          |

| Datos del solicitante |                                                                                                             |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nombre y firma        | Jesús Reyes Hernández  |
| Lugar y fecha         | Morelia Michoacán, a 03 de diciembre de 2025                                                                |