



UNIVERSIDAD MICHUACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
POSGRADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ ”

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL ÁLABE DE UNA
TURBINA FRANCIS 99, PARAMETRIZADO USANDO
POLINOMIOS DE BERNSTEIN

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

PRESENTA:

M.I. en el área de Estructuras
HERIBERTO ARIAS ROJAS



DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO JAVIER DOMÍNGUEZ MOTA

MORELIA, MICHUACÁN, MÉXICO

SEPTIEMBRE DE 2025

RESUMEN

Uno de los problemas fundamentales en los procesos de manufactura de piezas para turbomáquinas radica en la asignación de un sistema de coordenadas apropiado, es decir, en la implementación de un mallado adecuado. Dentro de los métodos de generación de mallas, se incluyen aquellos que emplean funciones relacionadas con la dinámica de las líneas de corriente del fluido, así como otros más prácticos, que se basan en la parametrización a partir de las coordenadas naturales sobre la superficie del elemento. Existen diversas metodologías para generar con éxito la geometría del álabe de una turbina, mediante la creación de un conjunto discreto de secciones que van desde la corona hasta la banda. Es esencial aplicar una metodología de parametrización adecuada para generar secciones de formas complejas en tres dimensiones.

Los polinomios de Bernstein a trozos pueden emplearse para crear parametrizaciones de álabes de turbinas con geometrías complejas, utilizando como base algunos datos (coordenadas) de la sección transversal del perfil original y aproximándolos mediante dichos polinomios. Al implementar los coeficientes del polinomio interpolante, se generan secciones transversales adicionales utilizando técnicas Lagrangianas. Los perfiles generados se disponen en dirección transversal al álabe mediante interpolación transfinita, lo que permite obtener una representación suave y continua del álabe de referencia. Esta metodología es versátil y precisa, y puede aplicarse en la parametrización de diversas geometrías manteniendo una alta exactitud. Además, podría utilizarse para diseñar nuevas formas de álabes. No obstante, aunque es posible redefinir nuevas geometrías para los álabes utilizando polinomios de Bernstein, es fundamental determinar si estas parametrizaciones pueden reemplazar las geometrías actuales. Para evaluar la viabilidad de estos nuevos diseños, se requieren análisis adicionales. Como primer paso, se desarrolló un modelo computacional del experimento denominado hydrofoil test, realizado por el centro hidroeléctrico de Noruega. Este experimento fue utilizado para llevar a cabo un análisis estructural de esfuerzo-deformación de la parametrización del álabe de una turbina Francis 99.

El presente trabajo expone la implementación de polinomios de Bernstein en la parametrización de la geometría del álabe de una turbina Francis 99, a través de un enfoque basado en un problema de mínimos cuadrados adecuado. Como segundo paso, la geometría es evaluada mecánicamente, comenzando con un análisis de dinámica de fluidos computacional utilizando el método de los elementos finitos para determinar la distribución de presiones sobre la superficie del álabe. Posteriormente, con esta distribución de presiones, se lleva a cabo un análisis estructural, tanto lineal como no lineal, con el fin de obtener las distribuciones de esfuerzos y deformaciones. Además de este análisis por etapas, se desarrolló un estudio de interacción fluido-estructura, en el cual las condiciones del modelo hydrofoil test fueron reemplazadas por condiciones de operación estándar, y algunas propiedades mecánicas del material fueron actualizadas mediante resultados experimentales. Ambos análisis presentan resultados coherentes e interesantes.

Palabras clave: Polinomios de Bernstein; Turbina Francis; Análisis de dinámica de fluidos computacional; análisis Estructural; Parametrización; Método de los elementos finitos.

ABSTRACT

One of the fundamental problems in the manufacturing processes of turbomachinery components lies in the assignment of an appropriate coordinate system, that is, in the implementation of a suitable meshing. Among the mesh generation methods, there are those that employ functions related to the dynamics of fluid streamlines, as well as more practical methods based on parametrization using natural coordinates on the surface of the element. There are various methodologies for successfully generating the geometry of a turbine blade, through the creation of a discrete set of sections ranging from the crown to the hub. It is essential to apply an appropriate parametrization methodology to generate sections with complex three-dimensional shapes.

Piecewise Bernstein polynomials can be used to create parametrizations of turbine blades with twisted geometries, using as a basis some data (coordinates) from the original profile's cross-section and approximating them using these polynomials. By implementing the coefficients of the interpolating polynomial, additional cross-sectional profiles are generated using Lagrangian techniques. The generated profiles are arranged transversely to the blade using transfinite interpolation, allowing for a smooth and continuous representation of the reference blade. This methodology is versatile and precise, and can be applied in the parametrization of various geometries while maintaining high accuracy. Furthermore, it could be used to design new blade shapes. However, although it is possible to redefine new geometries for the blades using Bernstein polynomials, it is essential to determine whether these parametrizations can replace the current geometries. To assess the feasibility of these new designs, additional analyses are required. As a first step, a computational model of the experiment called the hydrofoil test, conducted by the Norwegian hydropower center, was developed. This experiment was used to perform a structural stress-strain analysis of the parametrization of the blade of a Francis 99 turbine.

This work presents the implementation of Bernstein polynomials in the parametrization of the geometry of a Francis 99 turbine blade, through an approach based on an appropriate least squares problem. As a second step, the geometry is mechanically evaluated, starting with a computational fluid dynamics analysis using the finite element method to determine the pressure distribution over the blade surface. Subsequently, with this pressure distribution, both linear and nonlinear structural analyses are carried out to obtain the stress and strain distributions. In addition to this step-by-step analysis, a fluid-structure interaction study was developed, in which the conditions of the hydrofoil test model were replaced by standard operating conditions, and some mechanical properties of the material were updated using experimental results. Both analyses provide consistent and interesting results.

Keywords: Bernstein polynomials, Francis blade, Computational fluid dynamic analysis, Structural analysis, Parametrization, Finite element method.

Agradecimientos

Este trabajo no pudo haber sido realizado sin el apoyo recibido por todos, por lo cual les dedico este sincero agradecimiento.

- A mi querida esposa: Gracias por apoyarme incondicionalmente, por tolerar mis desvelos y jornadas de trabajo sin fin, por acompañarme en cada paso que doy y darme la fuerza que necesito.
- A mis padres: Gracias por darme todo lo que siempre necesité para poder llegar aquí, han sido el pilar más fuerte de mi vida.
- A mi asesor: Has sido un gran guía, un ejemplo a seguir. He aprendido mucho de usted y espero me permita seguir haciendolo, muchas gracias por todo.
- Al equipo de postdoctores: Gracias por todo su apoyo, más que compañeros han sido grandes amigos.
- A mis profesores: Gracias por compartir sus conocimientos y ayudarme a realizar y mejorar esta investigación.
- Al equipo de Quasi-doctores: Gracias por su apoyo, y aunque ya no formaré parte de ese equipo, siempre podrán contar conmigo.
- A SIIIA MATH: Agradezco que una empresa tan importante me brindara el apoyo necesario para concluir mi investigación.
- A CONACYT, CONAHCYT y SECIHTI: Gracias por su apoyo economico, sin ustedes este trabajo no hubiera sido posible.
- A CIMNE: Muchas gracias por brindarnos las licencias de los softwares necesarios para realizar los análisis correspondientes.
- A Dios: Gracias por rodearme de tan maravillosas personas y permitirme encontrar mi camino.

Contenido

Resumen	I
Abstract	II
Agradecimientos	III
Contenido	IV
Lista de figuras	V
Lista de tablas	VIII
Nomenclatura	IX
I. Introducción	1
I.1. Estructura de la tesis	3
II. Descripción de la Turbina	5
II.1. Desarrollo histórico de las turbinas	5
II.2. Turbina Francis 99	9
III. Parametrización del álabe de una turbina Francis 99	15
III.1. Metodología	15
III.1.1. Extracción de datos	16
III.1.2. Reconstrucción de la geometría del álabe	17
III.1.2.1. Interpolación transfinita	21
III.1.3. Evaluación del error	25
IV. Método de los Elementos Finitos	27
IV.1. Antecedentes históricos	27
IV.2. Método variacional	30
IV.2.1. Rayleigh-Ritz	31
IV.3. FEM 1D	32
IV.4. FEM 2D	38
IV.5. FEM 3D	43
IV.6. Cuadratura	46

IV.7. Problema de elasticidad	47
IV.7.1. Ejemplos de aplicación	51
V. Análisis no lineal	57
V.1. Introducción al análisis no lineal	57
V.1.1. No linealidad geométrica	58
V.1.2. No linealidad cinemática	60
V.1.3. No linealidad de la fuerza	60
V.1.4. No linealidad del material	61
V.2. Plasticidad	61
V.2.1. Criterios de fluencia	63
V.2.1.1. Criterio de fluencia de Von Mises	63
V.2.1.2. Criterio de fluencia de Tresca	64
V.2.2. Modelos de endurecimiento	65
V.2.2.1. Modelo de endurecimiento isotrópico	66
V.2.2.2. Modelo de endurecimiento cinemático	67
V.2.2.3. Modelo de endurecimiento combinado	67
V.2.3. Flujo plástico	68
V.3. FEM no lineal	71
V.3.1. Método de Newton-Raphson	72
VI. Análisis estructural del álabe de una turbina Francis 99	76
VI.1. Definición del modelo numérico	76
VI.1.1. Materiales	76
VI.1.2. Caso de prueba	77
VI.1.3. Modelo FSI	82
VI.2. Resultados del análisis	82
VI.2.1. Resultados del análisis CFD, caso de prueba	82
VI.2.2. Resultados del análisis estructural, caso de prueba	88
VI.2.3. Resultados del análisis FSI	100
VII. Conclusiones	108
A. Prueba de tensión	110
Referencias	113

Lista de figuras

1.	Rueda hidráulica del siglo XVIII (tomado de Lewis et al. [68]).	6
2.	Turbina Pelton de doble cuchara (tomado de Cengel y Cimbala [21]).	7
3.	Desarrollo histórico de perfiles de álabes (tomado de Lewis et al. [68]).	9
4.	Vista transversal de la turbina Francis (adaptado de NVKS [1]).	11
5.	Modelo numérico de la turbina Francis 99.	11
6.	Turbina Tokke (tomado de NVKS [1]).	12
7.	Etapas del proceso de parametrización.	16
8.	Definición de los planos de corte.	17
9.	Polinomio de Bernstein de cuarto orden.	18
10.	Sección transversal del álabe definida con 8 polinomios de Bernstein.	20
11.	Sección transversal del álabe definida con 6 polinomios de Bernstein y $N = 10$	20
12.	Sección transversal del álabe definida con 6 polinomios de Bernstein y $N = 100$	21
13.	Superficies de frontera para TFI (tomado de Thompson et al. [102]).	22
14.	Nomenclatura del dominio lógico (tomado de Knupp y Steinberg [98]).	22
15.	Construcción de los planos de corte.	24
16.	Ajuste numérico de la superficie del álabe.	25
17.	Modelo del ala estudiada por Clough y Turner (adaptado de Clough et al. [26]).	27
18.	Idealización del método de los elementos finitos propuesta por Clough (adaptado de Clough et al. [26]).	28
19.	Primer malla implementada para el análisis gravitacional de una presa (adaptado de Clough et al. [26]).	29
20.	Ejemplo de placa con agujero elíptico (adaptado de Clough et al. [26]).	30
21.	Elemento barra 1D.	34
22.	Función de forma de grado 1.	35
23.	Funciones de forma de grado 2 con $h = 1$	36
24.	Elemento finito triangular.	39
25.	Elemento finito cuadrilátero.	41
26.	Representación gráfica de un problema de mínimos cuadrados.	42
27.	Elemento finito tetrahedro de 4 nodos.	44
28.	Diagrama de cuerpo libre de una partícula en 2D.	48
29.	Columna de concreto.	51
30.	Problema de elasticidad en el plano.	54

31.	Diagrama de flujo de un sistema lineal.	58
32.	Viga en voladizo con grandes deformaciones (adaptado de Kim [62]).	59
33.	Modelo con no linealidad cinemática (adaptado de Kim [62]).	60
34.	Modelo de viga con grandes deformaciones y carga de presión (adaptado de Kim [62]).	61
35.	Tipos de no linealidad en el material (adaptado de Kim [62]).	62
36.	Criterios de fluencia.	65
37.	Tipos de comportamiento plástico.	66
38.	Modelos de endurecimiento.	68
39.	Método de Newton-Raphson (Tomado de Kim [62]).	74
40.	Método de Newton-Raphson modificado (Adaptado de Kim [62]).	74
41.	Diagrama de flujo del método de Newton-Raphson [62].	75
42.	Experimento, Hydrofoil Test Case.	78
43.	Modelos para el análisis CFD.	80
44.	Condiciones de frontera del modelo CFD.	81
45.	Trayectorias del flujo y distribución de presiones máximas (Pa).	84
46.	Campo de velocidades del flujo (m/s), modelo 1.	85
47.	Campo de velocidades del flujo (m/s), modelo 2.	86
48.	Distribución de presiones (Pa), modelo 1.	87
49.	Distribución de presiones (Pa), modelo 2.	88
50.	Malla del modelo estructural.	89
51.	Tensor de esfuerzos de Cauchy (Pa), modelo 1.	91
52.	Estado de esfuerzos principales de Cauchy (Pa), modelo 1.	92
53.	Tensor de esfuerzos de Cauchy (Pa), modelo 2.	93
54.	Estado de esfuerzos principales de Cauchy (Pa), modelo 2.	94
55.	Tensor de deformaciones de Green-Lagrange, modelo 1.	95
56.	Tensor de deformaciones de Green-Lagrange, modelo 2.	96
57.	Estado de deformaciones principales de Green-Lagrange, modelo 1.	97
58.	Estado de deformaciones principales de Green-Lagrange, modelo 2.	98
59.	Estado de esfuerzos de Von Mises y deformaciones máximas, modelo 1.	99
60.	Estado de esfuerzos de Von Mises y deformaciones máximas, modelo 2.	99
61.	Campo de velocidades del flujo (m/s).	100
62.	Patron de trayectorias del flujo, modelo FSI.	101
63.	Distribución de presiones (Pa), modelo FSI.	102
64.	Tensor de esfuerzos de Cauchy (Pa), modelo FSI.	103
65.	Estado de esfuerzos principales de Cauchy (Pa), modelo FSI.	104
66.	Tensor de deformaciones de Green-Lagrange, modelo FSI.	105
67.	Estado de deformaciones principales de Green-Lagrange, modelo FSI.	106
68.	Estado de esfuerzos de Von Mises y desplazamientos máximos, modelo FSI.	107
69.	Esquema de probeta para prueba de tracción.	110
70.	Prueba de tracción.	111
71.	Resultados de la prueba de tracción.	112

Lista de tablas

II.1. Características de operación de la turbina Tokke [1].	12
II.2. Velocidad del flujo.	14
IV.1. Cuadratura de Gauss, puntos de evaluación y pesos (intervalo de -1 a 1). . .	47
IV.2. Correspondencia entre los coeficientes de la matriz de rigideces global y local.	55
VI.1. Propiedades mecánicas del material.	77
VI.2. Actualización de propiedades mecánicas del material, obtenidas con la prueba de tracción.	77
VI.3. Presiones máximas en el borde de ataque.	83

Nomenclatura

A	Área del elemento finito.
A_1	Área de entrada de un canal hidráulico.
$C_i^{(k)}$	Puntos de control.
D	Diámetro del rodete.
D_i	Distancia euclidiana entre dos puntos.
E	Módulo de elasticidad.
H	Módulo plástico.
H_b	Altura bruta.
H_p	Altura de presión absorbida.
H_u	Altura total absorbida.
J	Funcional.
J_2	Segunda invariante del desviador de esfuerzos.
K_T	Rigidez tangente.
N	Número de puntos.
n	Velocidad angular, en revoluciones por minuto (rpm).
$P^{(k)}(t)$	Polinomio de Bernstein.
Q	Caudal total de entrada, en m ³ /s.
Q_D	Caudal del dominio computacional, en m ³ /s.
$R(x, u)$	Función residual.
S	Desviador de esfuerzos.
S_i, S_{ii}, S_{iii}	Representación general de esfuerzos y deformaciones principales.

S_x	Representación general de la componente x del tensor.
S_{xy}	Representación general de la componente xy del tensor.
S_y	Representación general de la componente y del tensor.
S_{yz}	Representación general de la componente yz del tensor.
S_z	Representación general de la componente z del tensor.
S_{zx}	Representación general de la componente zx del tensor.
SME	Error medio cuadrático.
t	Longitud de arco normalizada.
u	Desplazamiento.
V	Volumen del elemento.
V_r	Componente radial de la velocidad, en m/s.
V_R	Velocidad resultante, en m/s.
V_u	Componente tangencial de la velocidad, en m/s.
x_i	Coordenada x de un punto en el espacio.
y_i	Coordenada y de un punto en el espacio.
z_i	Coordenada z de un punto en el espacio.
α	Ubicación del centroide de la superficie de fluencia.
δ	Operador variacional.
$\dot{\varepsilon}^p$	Función de flujo plástico.
ε^e	Componente elástica de la deformación.
ε^p	Componente plástica de la deformación.
ε_m	Deformación promedio.
ε_T	Grado de reacción.
ε_x	Componente x del tensor de deformaciones.
ε_y	Componente y del tensor de deformaciones.
ε_z	Componente z del tensor de deformaciones.
ϵ_d	Desviador del tensor de deformaciones.

γ	Flujo plástico.
γ_{xy}	Componente en plano $x - y$ del tensor de deformaciones.
γ_{yz}	Componente en plano $y - z$ del tensor de deformaciones.
γ_{zx}	Componente en plano $z - x$ del tensor de deformaciones.
λ, μ	Constantes de Lamé.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Esfuerzos principales.
σ_e	Esfuerzo equivalente.
σ_m	Esfuerzo promedio.
σ_{vm}	Esfuerzo de Von Mises.
σ_x	Componente x del tensor de esfuerzos.
σ_{xy}	Componente en plano $x - y$ del tensor de esfuerzos.
σ_y	Componente y del tensor de esfuerzos.
σ_{yz}	Componente en plano $y - z$ del tensor de esfuerzos.
σ_z	Componente z del tensor de esfuerzos.
σ_{zx}	Componente en plano $z - x$ del tensor de esfuerzos.
τ_{max}	Esfuerzo cortante máximo.
τ_y	Esfuerzo cortante de fluencia.
ν	Operador variacional.
ξ, η, ζ	Variables de parametrización.
1	Tensor identidad.
[B]	Matriz de transformación.
[D]	Matriz elástica.
[K]	Matriz de rigideces.
{f}	Vector de fuerzas internas.
C	Tensor elástico de cuarto orden.
{N}	Tensor unitario normal del desviador de esfuerzos.
{Q}	Vector de condiciones de frontera.

$\{\mathbf{u}\}$	Vector de desplazamientos.
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$	Tensor de deformaciones.
$\{\boldsymbol{\sigma}\}$	Tensor de esfuerzos.
$\mathbf{I}$	Tensor unitario simétrico de cuarto orden.
$B(\omega_i, u_h)$	Forma bilineal del problema variacional.
$l(\omega_i$	Forma lineal del problema variacional.
$\omega_i(x)$	Función de peso.
$\psi_i(x)$	Función de forma.
η^{tr}	Esfuerzo de prueba.
$\cos(\alpha, \beta, \gamma)$	Cosenos directores.

Capítulo I

Introducción

Uno de los objetivos más importantes en el diseño de turbomáquinas es optimizar la geometría de los álabes de la turbina con la finalidad de obtener su máximo desempeño [22, 54]. La optimización requiere de una descripción o diseño adecuado para plantear una función objetivo. En la teoría de variable compleja existen técnicas que nos permiten diseñar secciones de álabes con formas relativamente complicadas empleando mapeos conformes [2, 44, 102]. Estos últimos tienen un costo computacional elevado debido al gran número de parámetros que se necesitan determinar para controlar numéricamente la creación de una geometría útil. Por lo que en la práctica es necesario recurrir a metodologías más prácticas como la parametrización empleando polinomios para reducir el número de coeficientes a determinar. Las metodologías de parametrización de álabes se pueden clasificar en dos principales grupos: las que usan parches sobre superficies y aquellas que utilizan aproximación por secciones [41, 2, 45]. La metodología de aproximación por secciones se utilizan para describir geometrías complejas que presentan variaciones significativas entre cada sección. Uno de los inconvenientes de este enfoque es que mientras mayor sea el número de secciones utilizadas, mayor será el número de parámetros por definir [22, 3]. En ambas metodologías, la clave para una implementación eficiente radica en utilizar un número reducido de parámetros para representar geometrías complejas, de manera que se disminuya el costo computacional. Esto ha impulsado el desarrollo y la aplicación de numerosas técnicas en busca de parametrizaciones óptimas [2, 22, 34, 41, 45].

Los álabes de las turbinas Francis, por su parte, presentan formas complejas que no pueden ser geométricamente reconstruidas con facilidad a partir de una función única [34]. Algunas de las investigaciones recientes incluyen el uso de métodos de optimización para mejorar el diseño de álabes de compresores y turbinas, así como del desarrollo de perfiles aerodinámicos [3, 4, 6, 46, 55, 81, 100]. Una opción versátil e intuitiva para realizar la representación numérica de la sección transversal de los álabes es el uso de Polinomios de Bernstein [86]. Estos pueden emplearse para hacer ajustes precisos dentro de un intervalo cerrado de las curvas continuas que representan líneas de corriente. Propuestos originalmente por Bernstein en 1912, su uso fue limitado debido a las restricciones de la capacidad de cómputo de la época [43, 97]. Actualmente, su versatilidad ha permitido aplicarlos en áreas como el control de sistemas dinámicos, análisis de elementos finitos, cálculo, modelado y optimización de geometrías complejas, etc. [37, 86, 43, 108, 56, 8].

Ahora bien, una vez diseñada la geometría óptima de la turbina, su máximo rendimiento sólo se mantendrá durante un periodo determinado de tiempo. El desgaste natural hará que el desempeño de la turbina disminuya, y será necesario aplicar medidas correctivas, como reemplazar los álabes dañados o reconstruirlos combinando técnicas de manufactura con algún método de parametrización y un estudio de factibilidad. Dado el alto costo de fabricación de estas piezas y de los materiales, reconstruir el álabe se convierte en una opción más viable, al menos desde el punto de vista económico [86, 34]. Una vez generado el modelo numérico utilizando alguna de las técnicas de parametrización mencionadas anteriormente, es crucial validar la viabilidad mecánica del álabe mediante un análisis estructural. Este análisis permitirá determinar el estado de esfuerzo y deformación bajo diferentes condiciones de servicio [50, 15, 61, 24, 16, 82]. Uno de los métodos más comunes para el análisis de esfuerzos es el Método de los Elementos Finitos (FEM, por sus siglas en inglés), debido a su versatilidad para discretizar formas con dominios complejos [66, 69, 110].

Se han desarrollado investigaciones previas como la de Suha *et al.* [5] en donde se realizó un análisis estructural estático del álabe de una turbina considerando diferentes aleaciones de *Inconel*® y Titanio como base. Los resultados muestran que existe una dependencia entre los esfuerzos y la densidad del material, presentando menores esfuerzos en las aleaciones de aluminio. Por otro lado, Kauss *et al.* [57] realizó un análisis estructural similar en el que incluyó cargas térmicas para obtener el estado de esfuerzo-deformación de álabes de turbinas con diferentes aleaciones, considerando el efecto de la temperatura dividiendo el tensor de deformaciones en una componente mecánica y otra térmica. Como resultado se detectó una clara dependencia de las propiedades físicas del material y la relación esfuerzo-deformación, y se determinó que existe una mayor dependencia de los resultados de esfuerzos y deformaciones en la componente térmica del análisis. Otro aspecto significativo en el que se enfocan las investigaciones de álabes es el estudio de la fatiga para estimar su vida útil, con numerosos trabajos realizados en esta área [70, 94, 112]. Claudio *et al.* [25] utilizó el FEM para estimar la vida útil de una turbina de gas y comparó sus resultados con datos experimentales obtenidos de componentes reales, obteniendo hallazgos interesantes. Otras investigaciones en el ámbito de las turbinas se han centrado en el análisis de la dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés) para determinar la distribución de presiones en álabes o en la turbina bajo diversas condiciones de flujo, y para evaluar las fuerzas actuantes y las distribuciones de esfuerzo y deformación en el elemento [59, 23, 87].

Considerando la posibilidad de daño mecánico, otra alternativa interesante para el análisis estructural es utilizar el Método de los Elementos Finitos Extendido (XFEM, por sus siglas en inglés). XFEM incluye el modelado de generación de grietas utilizando funciones discontinuas para representar el campo asintótico de desplazamientos de grietas en dos dimensiones. El XFEM considera la presencia de defectos y heterogeneidades durante la generación de la malla utilizando un remallado en todos los nodos cuya función de forma intersecta con el interior de la grieta [99]. Un inconveniente del XFEM es su alto costo computacional lo que limita su uso. Otra investigación de notable interés es la realizada por Lukas *et al.* [93], en la que se aplicó una metodología integrada para el análisis de álabes de turbinas. En este estudio, se combinó la aerodinámica con simulaciones estructurales múltiples en un modelo

numérico, el cual fue generado a partir de una base de datos obtenida mediante el escaneo de un álabe real. Lukas *et al.* emplearon XFEM para demostrar la influencia de las grietas en el comportamiento del borde de ataque (LE, por sus siglas en inglés) y para predecir el impacto de las variaciones geométricas debido al desgaste.

En resumen, se han llevado a cabo numerosas investigaciones empleando diversos enfoques para evaluar la integridad estructural de los álabes [63, 30, 48, 19, 20, 64]. El objetivo de la presente investigación es analizar el desempeño estructural del álabe de una turbina Francis 99, cuya geometría fue generada mediante una parametrización usando interpolación con polinomios de Bernstein de cuarto orden a trozos para generar la sección transversal del álabe, e interpolación transfinita (TFI, por sus siglas en inglés) para generar sus superficies [86]. Se implementó el Método de los Elementos Finitos para analizar el estado de esfuerzos y deformaciones en tres simulaciones numéricas. De estas, dos están diseñadas para replicar numéricamente el experimento llevado a cabo por el Centro Hidroeléctrico de Noruega (NVKS, por sus siglas en inglés), referido como *hidrofoil test* [31, 104, 84, 103, 92]. Este experimento se utilizó como base para simular el análisis de dinámica de fluidos computacional y determinar la distribución de cargas de presión sobre las superficies del álabe para posteriormente realizar el análisis estructural de manera independiente. Adicionalmente, el modelo inicial se modificó para simular un caso de prueba considerando la interacción fluido-estructura, en el cual se actualizaron algunas propiedades mecánicas del material, obtenidas mediante pruebas experimentales, y además, se actualizaron los datos de velocidad del flujo para considerar condiciones de operación estándar de la turbina. De acuerdo con el desempeño obtenido en los análisis dinámico y estructural, los resultados sugieren que la nueva geometría parametrizada podría ser usada como CAD para el diseño del álabe, y eventualmente en el proceso de reconstrucción de la turbina. Sin embargo, es evidente la necesidad de realizar análisis estructurales más detallados para el diseño de la turbina completa.

I.1. Estructura de la tesis

El presente trabajo de investigación está organizado en siete capítulos, los cuales se detallan a continuación. En el Capítulo I se ofrece la introducción, en la que se define el objetivo de la investigación y se revisan los estudios previos realizados en el área de investigación. El Capítulo II está dedicado a la descripción de la turbina objeto de estudio. Inicialmente, se aborda el desarrollo histórico de las turbinas desde los primeros dispositivos considerados como turbinas hasta su evolución a turbinas actuales, seguido de una descripción específica de las características del caso de estudio, que corresponde a la turbina Francis 99. En el Capítulo III se detalla el método de parametrización por secciones utilizado para generar la nueva geometría del álabe, y se describen los procesos de extracción de datos, reconstrucción de la geometría y evaluación del error, que conforman el método. El Capítulo IV presenta los antecedentes del desarrollo del Método de los Elementos Finitos, se describe el método variacional, y se proporciona un planteamiento general del método en 1D, 2D y 3D. Además, se aborda el enfoque del FEM aplicado al problema de elasticidad. En el Capítulo V se introduce el concepto de análisis no lineal, se exploran los tipos más comunes de no linealidad presentes en los problemas de elasticidad, se describe la teoría de la plasticidad con

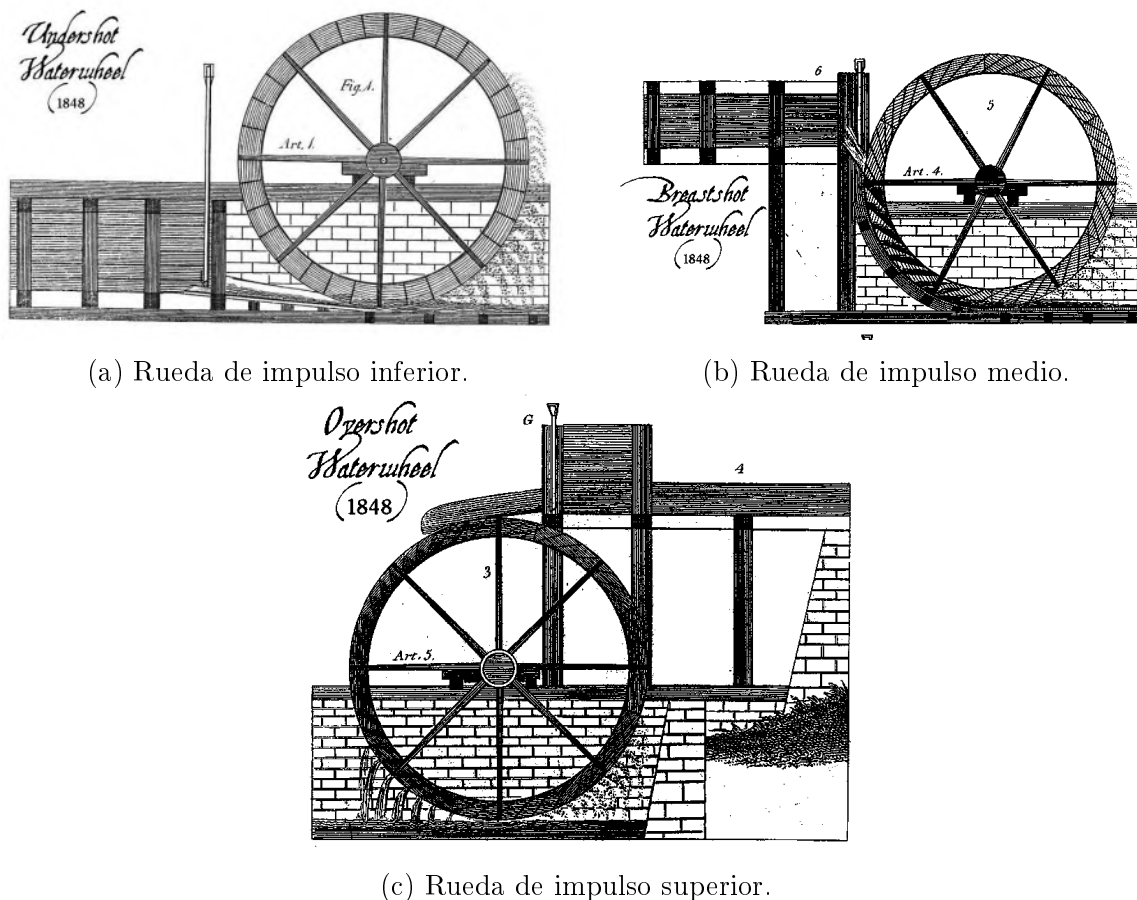
los criterios de fluencia de Von Mises y Tresca, con modelos de endurecimiento isotrópico, cinemático y combinado. Al final del capítulo se describe el método de los elementos finitos no lineal y su solución utilizando el método de Newton-Raphson. En el capítulo VI se describen las características de los modelos numéricos y los resultados obtenidos de los análisis CFD y estructural. En la primer sección se caracterizan los materiales, condiciones iniciales y modelos numéricos desarrollados, y en la segunda parte del capítulo se presentan y analizan los resultados del modelo CFD, y posteriormente, los resultados del análisis estructural y del modelo de interacción fluido-estructura. Por último, el capítulo VII presenta las conclusiones del proyecto de investigación. Adicionalmente se agregó el anexo A, en donde se incluye las características y resultados obtenidos en la prueba de tracción realizada a probetas de aleación de aluminio 5456 con la cual se determinaron las propiedades mecánicas del material utilizadas en el modelo FSI.

Capítulo II

Descripción de la Turbina

II.1. Desarrollo histórico de las turbinas

Se podría decir que las turbinas son una evolución de la rueda hidráulica, la cual fue implementada principalmente para accionar maquinaria y no directamente para generar energía eléctrica. De acuerdo con registros antiguos, los griegos fueron los primeros en desarrollar de manera exitosa el primer modelo de rueda hidráulica, la cual era una pieza de arte, por lo que su eficiencia era muy baja. Aun así, fue muy utilizada para accionar molinos de producción de harina. Posteriormente fue adoptada también por los romanos, y alrededor del año 500 d.C. ya se utilizaba en todo el territorio conocido por los europeos de la época [68]. En el siglo XVIII la rueda hidráulica era ampliamente utilizada para molinos textiles, aserraderos, molinos de papel y molinos de harina. A mediados del siglo, Bélidor, ingeniero hidráulico y militar, diseñó una de las primeras ruedas hidráulicas para la generación de energía, pero ésta sólo tenía una eficiencia de 15 % a 20 %. Durante ese mismo periodo el ingeniero inglés John Smeaton y el ingeniero francés J. V. Poncelet realizaron mejoras a la rueda hidráulica incrementando su eficiencia a un rango de 60 % a 70 % [9]. John Smeaton también desarrolló la primer metodología científica para evaluar la eficiencia de la rueda hidráulica. En aquella época, se tenían básicamente tres tipos de rueda hidráulica: rueda hidráulica de impulso inferior (Figura 1a), de impulso medio (Figura 1b), y de impulso superior (Figura 1c), y como su nombre lo indica, la diferencia entre ellas era la manera de impulsarlas. Con su metodología, Smeaton determinó que la rueda de impulso inferior sólo tenía 22 % de eficiencia, mientras que la de impulso medio 50 %, y la de impulso superior alcanzaba 63 % [68].



(a) Rueda de impulso inferior.

(b) Rueda de impulso medio.

(c) Rueda de impulso superior.

Figura 1: Rueda hidráulica del siglo XVIII (tomado de Lewis et al. [68]).

Gran parte del desarrollo de las turbinas ocurrió en Francia durante el siglo XIX gracias a las aportaciones a la teoría del funcionamiento de la turbina llevadas a cabo por Leonhard Euler (1707 – 1783), los conceptos en aplicaciones prácticas introducidos por Mannoury de Ectot (1777-1822) y los análisis teóricos realizados por Burdin (1790-1893), quien a su vez introdujo la terminología *turbina*. Todos estos conceptos contribuyeron bastante en el entendimiento de los principios de operación de la turbina y en como mejorar su eficiencia [9]. En ese periodo de tiempo la fuente de generación de energía predilecta era el carbón, y ante la escases de fuentes naturales del mismo en Francia, se vieron en la necesidad de implementar lo que ellos llamaron carbón blanco (agua) [9]. En 1824 el ingeniero francés Jean-Victor Poncelet modificó la rueda hidráulica de impulso inferior agregando palas con curvatura mejorando la cantidad de momento extraída del fluido, además, ajustó la velocidad de la rueda reduciendo la velocidad de salida del flujo, con lo que incrementó la eficiencia a alrededor de 60 % [89]. Durante el siglo XIX la rueda hidráulica empezó a ser reemplazada por turbinas hidráulicas, las cuales eran más pequeñas y eficientes. Aunque en 1866 la rueda hidráulica de flujo tangencial inventada por Samuel Knight trabajaba con una eficiencia similar a la de aquellas turbinas [68]. En 1878, Lester A. Pelton modificó la rueda hidráulica de Knight agregando una cuchara doble de perfil cilíndrico para mejorar su eficiencia [21]. A finales del siglo, William Doble se hizo cargo de la compañía de Pelton y propuso modificar la forma de

la cuchara a elíptica mejorando la transferencia de momento. Gracias a las contribuciones de Pelton en el desarrollo y promoción de la rueda hidráulica de impulso tangencial su nombre fue atribuido al modelo (Figura 2).



Figura 2: Turbina Pelton de doble cuchara (tomado de Cengel y Cimbala [21]).

El ingeniero francés Claude Burdin fue el primero en usar la palabra turbina, derivada del Latin de las palabras vortice y girando [17]. La principal diferencia entre las turbinas y las ruedas hidráulicas es quizás, que las turbinas pueden alcanzar la misma potencia teniendo dimensiones menores, y esto se debe a que el rotor gana un impulso adicional debido al torque producido por una componente de torsión de la fuerza generada por el agua [68]. En 1826, el ingeniero francés Benoit Fourneyron diseñó una turbina de flujo exterior con álabes guía curvos y eficiencia cercana a 80 %. Los álabes guía se usaban para impartir rotación al flujo y lo distribuían en el perímetro de la turbina. En 1838, el ingeniero estadounidense Samuel B. Howd recibió la patente de la denominada turbina de flujo interno, del concepto de flujo interno, y del proceso de admisión de agua a través de álabes guías fijos distribuidos en toda la circunferencia. Esta patente retrasó el proceso de desarrollo de la turbina de flujo interno, el cual reinició en 1844. En 1844, el diseño de Fourneyron fue mejorado por el ingeniero estadounidense Uriah A. Boyden, que basó su trabajo en reducir las pérdidas ocasionadas por los cambios abruptos de área. Entre los años de 1844 y 1847 James B. Francis, jefe de ingenieros para la *Locks and Canals Company* llevó a cabo una serie de pruebas en la turbina de Boyden y desarrolló un método estándar para la evaluación del desempeño de las turbinas hidráulicas; además, Francis también propuso una metodología de diseño de turbinas basado en las trayectorias de las partículas de agua. Francis y Boyden fueron los primeros en aplicar esta metodología de diseño [68]. En 1847 Francis diseñó y construyó un modelo a escala de una turbina de flujo interno, adaptando el diseño de Howd y Poncelet, con eficiencia de 71 %. Dos años después, su primer diseño de turbina a escala real fue instalado en la fábrica de algodón *Boot*. Su diseño incluía álabes con curvatura y álabes guía fijos. Otro de los aspectos más destacados era la precisión con la que Francis calculaba la eficiencia de la turbina

utilizando su propia metodología, en una de sus predicciones pudo determinar una eficiencia de 79.31 % para una turbina con eficiencia real de 79.37 % [68]. Todas estas contribuciones permitieron a Benoit Fourneyron (1802-1867) desarrollar una turbina rápida con eficiencia de alrededor de 80 %. A pesar del éxito de la turbina de Fourneyron, ésta tenía la limitante de que su eficiencia máxima sólo se alcanzaba bajo un rango muy limitado de condiciones de operación. El problema fue investigado primero por Hoyd and Boyden (1804-1879) y posteriormente por James B. Francis, obteniendo como resultado la base de lo que actualmente conocemos como turbinas Francis.

Se podría decir que la primer turbina efectiva de reacción fue desarrollada por Francis y su grupo de trabajo alrededor de 1850. Aunque en la actualidad se han desarrollado turbinas Francis de diversas geometrías, todas mantienen como características principales el flujo de entrada radial, un conjunto de álabes guías que controlan el ángulo de entrada del flujo y un rotor de flujo mixto (radial y axial) [36]. En 1862, James Leffel y su compañía diseñaron una turbina con doble rotor. El rotor superior tenía una configuración de álabes similar a la de la turbina estadounidense de aquella época, y los álabes del rotor inferior dispuestos para generar una descarga axial. Además, se tenían álabes guía ajustables para la entrada del fluido, y no incluía difusor ni caja espiral. Este dispositivo alcanzaba una eficiencia máxima de 74 %, lo que para la época era bastante adecuado [68]. En 1858, Asa M. Swain experimentó con un modelo de una turbina con álabes de 6 pulgadas, de gran curvatura, que se extendían desde el borde interior. Con esta nueva configuración geométrica se pretendía mejorar la transferencia de momento del fluido. En 1870 Swain incrementó la curvatura de los álabes para mejorar la potencia de salida y la capacidad de flujo. Algunos años después, en 1874, Francis obtuvo una eficiencia de 84 % al probar un modelo de 72 pulgadas de la turbina de Swain. El diseño de álabe de Swain fue el antecesor de los álabes de turbinas Francis modernas. En 1873, la compañía *T. H. Ridison* realizó cambios en el álabe de Swain extendiendo su borde superior para que la descarga en la turbina fuera completamente axial. La turbina tenía álabes guía fijos y no usaba caja espiral. La turbina de Ridison alcanzaba una eficiencia máxima de 90.5 % al agregar un difusor. Otro de los grandes avances fue el desarrollo de la turbina Hércules por John B. McCormick en 1876. Esta turbina tenía una eficiencia máxima de 89.2 %. Durante este periodo se desarrollaron un gran número de diseños como la turbina Victor, Hunt, Whitney, Upham, Angell, Barber, Blackstone, por mencionar algunas. La figura 3 muestra el desarrollo histórico de los perfiles de álabes de turbinas, desde la primer turbina Francis en 1848, hasta su evolución a perfiles de álabes Francis actuales diseñados por primera vez en 1920.

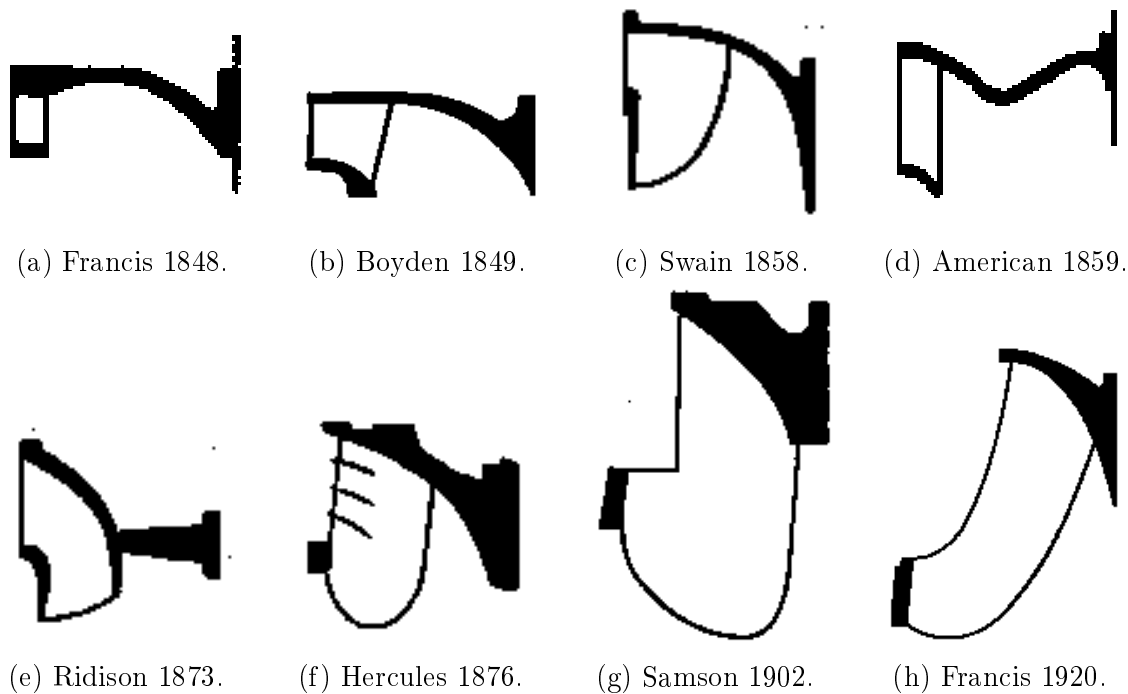


Figura 3: Desarrollo histórico de perfiles de álabes (tomado de Lewis et al. [68]).

A fines de siglo, entre 1880 y 1900, algunas metodologías de análisis hidráulico fueron restituidas en el diseño de turbinas, lo que ocasionó que tanto diseñadores como manufacturadores trabajaran en una misma dirección. Esto llevó al desarrollo de la turbina Samson, diseñada por McCormick en 1902, que alcanzaba una eficiencia máxima de 90 %. 20 años después, las primeras turbinas modernas aparecieron, y con ellas se logró obtener turbinas de alta velocidad y flujo mixto sin pérdida de eficiencia. Sin todas estas grandes aportaciones hubiera sido imposible que actualmente contáramos con turbinas de eficiencia de 95 % [21].

II.2. Turbina Francis 99

Conceptualmente, una máquina es un transformador de energía, ya sea que consuma energía de una clase y la restituya por una de otro tipo, o que simplemente la transforme. Tenemos máquinas eléctricas, máquinas de herramientas, máquinas de fluidos, etc. Las máquinas de fluidos son las que absorben energía del fluido o se la proporcionan, éstas se clasifican en máquinas hidráulicas y máquinas térmicas. Ambas trabajan con fluidos pero en las máquinas hidráulicas el fluido mantiene una densidad prácticamente constante y en las máquinas térmicas no. Dentro de la clasificación de las máquinas hidráulicas se encuentran aquellas que son generadoras como bombas y ventiladores, y otras que son motoras como las turbinas. En el siguiente esquema se muestra la clasificación de las máquinas hidráulicas [76],

$$\text{Máquina hidráulica} \left\{ \begin{array}{l} \text{Turbomáquina} \left\{ \begin{array}{l} \text{Generadoras} \left\{ \begin{array}{l} \text{Bombas} \\ \text{Ventiladores} \end{array} \right. \\ \text{Motoras} \{ \text{Turbinas hidráulicas} \end{array} \right. \\ \text{Máquina de desplazamiento positivo} \left\{ \begin{array}{l} \text{Generadoras} \\ \text{Motoras.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Las turbinas hidráulicas son turbomáquinas motoras que absorben energía de un fluido y la convierten en energía mecánica. Estas se pueden clasificar en función de su grado de reacción ε_T , como turbinas de acción y reacción [76],

$$\varepsilon_T = \frac{H_p}{H_u}, \quad (1)$$

donde H_p es la altura de presión absorbida por el rodete y H_u es la altura total absorbida por el rodete. Si $\varepsilon_T = 0$, la turbina es de acción, y éstas tienen la característica de que el fluido no sufre cambios de presión importantes al pasar a través del rodete. Además, funcionan con admisión de fluido parcial, el rodete trabaja a presión constante, no se cuenta con tubo de aspiración, y la salida del rodete coincide con la salida de la turbina. Por su parte, si $\varepsilon_T \neq 0$, la turbina se clasifica como de reacción, y en éstas el rodete está inundado, la admisión del fluido es total, y se generan presiones superiores a la atmosférica en la entrada al rodete, se tiene un tubo de aspiración y la salida de la turbina en el nivel de aguas abajo (Figura 4). Una clasificación más detallada se muestra en el siguiente diagrama:

$$\text{Turbinas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Acción} \{ \text{Sólo se construyen prácticamente de flujo tangencial (Pelton)} \\ \text{Reacción} \left\{ \begin{array}{l} \text{De flujo diagonal} \left\{ \begin{array}{l} \text{Álabes fijos (Francis)} \\ \text{Álabes orientables (Déraiz, Francis)} \end{array} \right. \\ \text{De flujo axial} \left\{ \begin{array}{l} \text{Álabes fijos (de hélice)} \\ \text{Álabes orientables (Kaplan, de hélice).} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

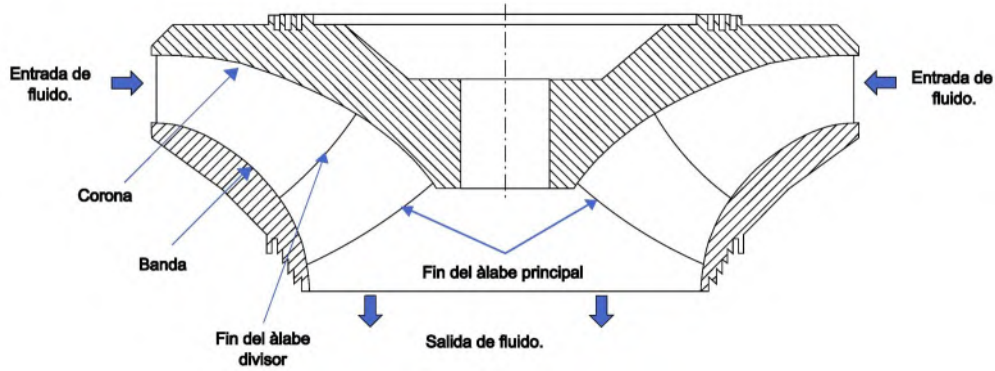


Figura 4: Vista transversal de la turbina Francis (adaptado de NVKS [1]).

Las turbinas Francis son turbinas de reacción que trabajan con flujo radio-axial, además, son las más utilizadas y se usan para producir más del 60 % de la producción mundial de energía hidroeléctrica [7]. Las turbinas Francis se pueden clasificar en función de su salto o altura neta, que se calcula como el salto natural o altura bruta H_b , que representa el desnivel que existe desde la fuente o punto inicial de caída de agua y su desembocadura al nivel donde está instalada la turbina, menos las pérdidas de energía potencial geodésica generadas por el rozamiento producido durante la trayectoria del agua al viajar desde la fuente hasta su desembocadura. De acuerdo con esto, las turbinas Francis se clasifican en: Francis lenta, la cual se utiliza para saltos de gran altura (200 m o más); Francis normal, para saltos de altura media (20–200 m); Francis rápidas y extra rápidas, apropiadas para saltos de pequeña altura (< 20 m) [76]. Nuestro caso de estudio se basa en el análisis estructural de la geometría parametrizada del álabe de una turbina hidráulica Francis 99 (Figura 5a). La parametrización se realizó sobre el modelo a escala (1:5.1) de la turbina de la central hidroeléctrica Tokke de Noruega (Figura 6) [1]. El rotor está compuesto por 15 álabes principales (Figura 5b) y 15 divisores, y tiene un diámetro de 0.63 m. El rotor puede alcanzar una velocidad de 335.4 revoluciones por minuto y una eficiencia hidráulica de 92.61 %.

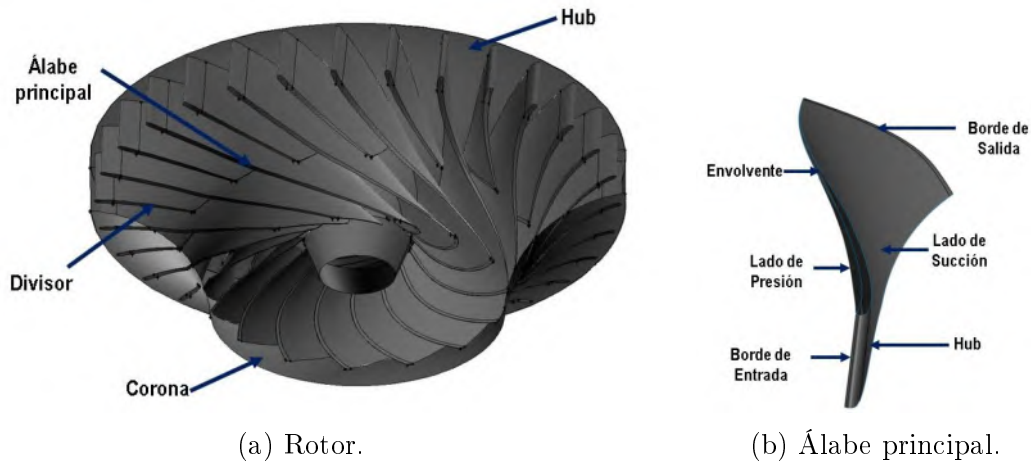


Figura 5: Modelo numérico de la turbina Francis 99.



Figura 6: Turbina Tokke (tomado de NVKS [1]).

En los experimentos realizados por el centro de hidropotencias de Noruega se consideraron 3 condiciones de operación: carga parcial (Part Load, PL); punto de eficiencia máxima (Best Efficiency Point, BEP); sobrecarga (High Load, HL), los cuales serán usados como referencia para la presente investigación. La tabla II.1 muestra algunos de los datos más relevantes del experimento: las presiones de entrada, velocidad del rotor, eficiencia hidráulica y otras características de operación medidas para los casos PL, BEP y HL.

Tabla II.1: Características de operación de la turbina Tokke [1].

Parámetro	PL	BEP	HL	Observaciones
Presión a la entrada de la turbina (kPa)	219.93	216.54	210.01	Medida justo antes de la entrada de la carcasa.
Presión diferencial a través de la turbina (kPa)	120.39	114.98	114.03	Diferencia entre presión de entrada y salida.
Densidad del agua (kg/m^3)	999.23	999.19	999.20	
Salto hidráulico (m)	12.29	11.91	11.24	
Descarga (m^3/s)	0.071	0.203	0.221	
Par de entrada del generador (N m)	137.52	619.56	597.99	
Par de fricción (N m)	6.54	8.85	7.63	
Velocidad del rodete (rpm)	406.2	335.4	369.6	
Eficiencia hidráulica (%)	71.69	92.61	90.66	
Ángulo de abertura de los álabes guía	3.91	9.84	12.44	Es la posición máxima de abertura.

Con base en los resultados presentados en la Tabla II.1 podemos determinar la velocidad del flujo a la entrada del rodete, la cual es un parámetro indispensable para definir el modelo numérico para el análisis CFD. Esta velocidad se calculó considerando las siguientes suposiciones:

- El caudal total se reparte por igual entre los 15 álabes principales que forman el rodete (a esta porción del rodete la llamaremos canal hidráulico y corresponde al dominio computacional del problema en estudio).
- Los álabes guía tienen un ángulo de apertura de 9.84° o 12.44° según la condición de operación (ver Tabla II.1).
- Cuando el fluido sale de los álabes guía entra en contacto inmediato con los álabes del rodete.
- La velocidad del fluido se determina a partir de sus componentes radial V_r y tangencial V_u al área de entrada del rodete.
- El área de entrada del fluido se obtiene a partir de la altura de entrada del rodete (0.06 m) y su perímetro (1.979 m).

el área de entrada del flujo para cada canal hidráulico se obtiene dividiendo el área total entre el número de canales hidráulicos,

$$A_1 = \frac{1.979 \text{ m}}{15} \times 0.06 \text{ m} \cong 0.00792 \text{ m}^2.$$

La resultante de la velocidad del flujo y sus componentes radial y tangencial se determinan a partir de las siguientes ecuaciones,

$$Q_D = V_r A_1, \quad (2)$$

$$V_u = \pi n D, \quad (3)$$

$$V_R = \sqrt{V_r^2 + V_u^2}, \quad (4)$$

donde, Q_D es el caudal del dominio computacional (un canal hidráulico), n es la velocidad angular, y D el diámetro del rodete. La tabla II.2 presenta la velocidad resultante del flujo (V_R) y los parámetros para determinarla, donde Q representa el caudal total de entrada a la turbina (ver Tabla II.1). Los cálculos se realizaron para las dos condiciones de operación de mayor relevancia (BEP y HL), tomando en cuenta que BEP nos da la condición de operación óptima y HL representa la condición de carga máxima.

Tabla II.2: Velocidad del flujo.

Condición	Q (m^3/s)	n (rpm)	Q_D (m^3/s)	V_r (m/s)	V_u (m/s)	V_R (m/s)
BEP	0.203	335.4	0.01353	1.708	11.064	11.195
HL	0.221	369.6	0.01473	1.860	12.192	12.333

Capítulo III

Parametrización del álabe de una turbina Francis 99

III.1. Metodología

La parametrización es un proceso que nos permite definir parámetros que nos ayudan a describir una ecuación que sirve para controlar y/o ajustar un modelo, como lo son los procesos de generación de mallas. Los métodos de generación de malla se desarrollaron debido a la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales parciales que definen problemas de dinámica de fluidos en geometrías complejas, con el objetivo de transformar una región física complicada en una más simple. En un gran número de casos transformando la geometría física en un cuadrado o cubo unitarios, denominados regiones o dominios lógicos, de acuerdo con el número de dimensiones del problema original, en donde las fronteras de la región lógica corresponden a las fronteras de la región física. En nuestro caso de estudio, el objetivo es obtener una representación discreta, digital del álabe principal de una turbina Francis 99. El proceso de parametrización utilizado en esta investigación es una metodología de ajuste por secciones que emplea polinomios de Bernstein de cuarto orden. La metodología consta de tres etapas: extracción de datos, reconstrucción de la geometría del álabe y evaluación numérica. La Figura 7 ilustra el esquema del proceso de parametrización y los subprocesos que involucra cada etapa. Esta metodología fue previamente desarrollada por nuestro equipo de trabajo en la investigación presentada por Pérez et al. [86]. A continuación se ofrece una descripción más detallada de cada etapa del proceso de parametrización en las secciones posteriores del capítulo.

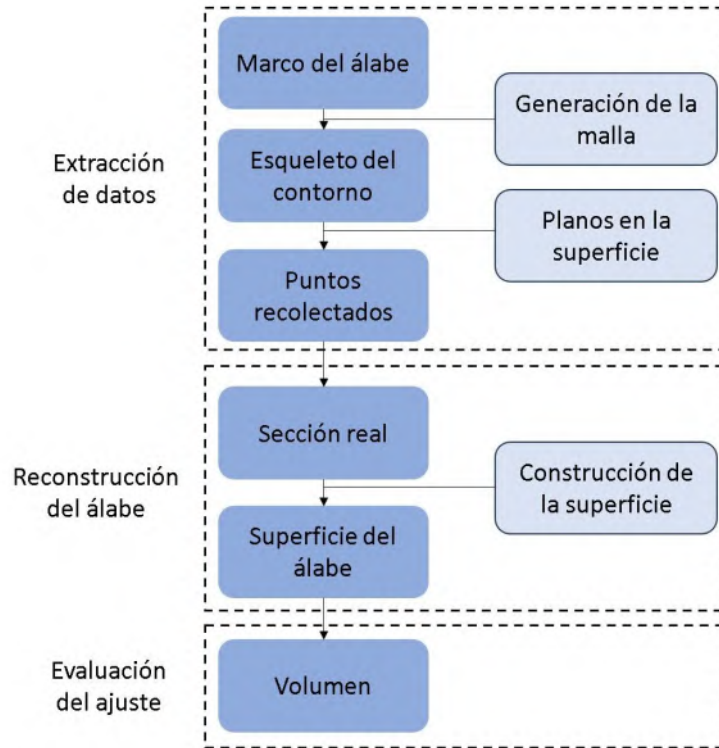


Figura 7: Etapas del proceso de parametrización.

III.1.1. Extracción de datos

Es importante señalar que el proceso de extracción de datos implica obtener las coordenadas x_i, y_i, z_i de N puntos a partir del escaneo del álabe de una turbina Francis 99 real. El proceso incluye dividir el álabe en secciones y obtener las coordenadas de un número definido de puntos distribuidos en el contorno de cada sección. Una vez obtenidos los puntos, se realiza la etapa de limpieza de datos, en donde se elimina el ruido, descartando los puntos que no correspondan con la superficie escaneada y haciendo las correcciones necesarias si así se requiere. Nuestro caso de estudio corresponde a la turbina Tokke de la central hidroeléctrica de Noruega, descrita en el capítulo II. Los datos del escaneo utilizados en esta investigación fueron proporcionados por el centro de hidropotencias de Noruega [1], los cuales llevaron a cabo el escaneo del álabe y realizaron algunas investigaciones concernientes principalmente al comportamiento hidrodinámico del álabe y la turbina [58, 65, 53, 85, 101]. Para escanear la geometría del álabe, éste se divide en 10 secciones, que definen los planos de corte en los que se realiza el escaneo (Figura 8a). Cada plano se describe mediante el escaneo de 256 puntos localizados sobre la superficie del álabe. En particular, para este caso de estudio se registraron 128 puntos en la cara de succión y 128 puntos en la cara de presión (Figura 8b). El proceso de extracción de datos es fundamental; una distribución óptima de puntos sobre la superficie del álabe escaneada resulta en una representación más precisa del elemento, por ende, en una parametrización más exacta. Por el contrario, un escaneo deficiente puede introducir errores que afectan la calidad de la parametrización.

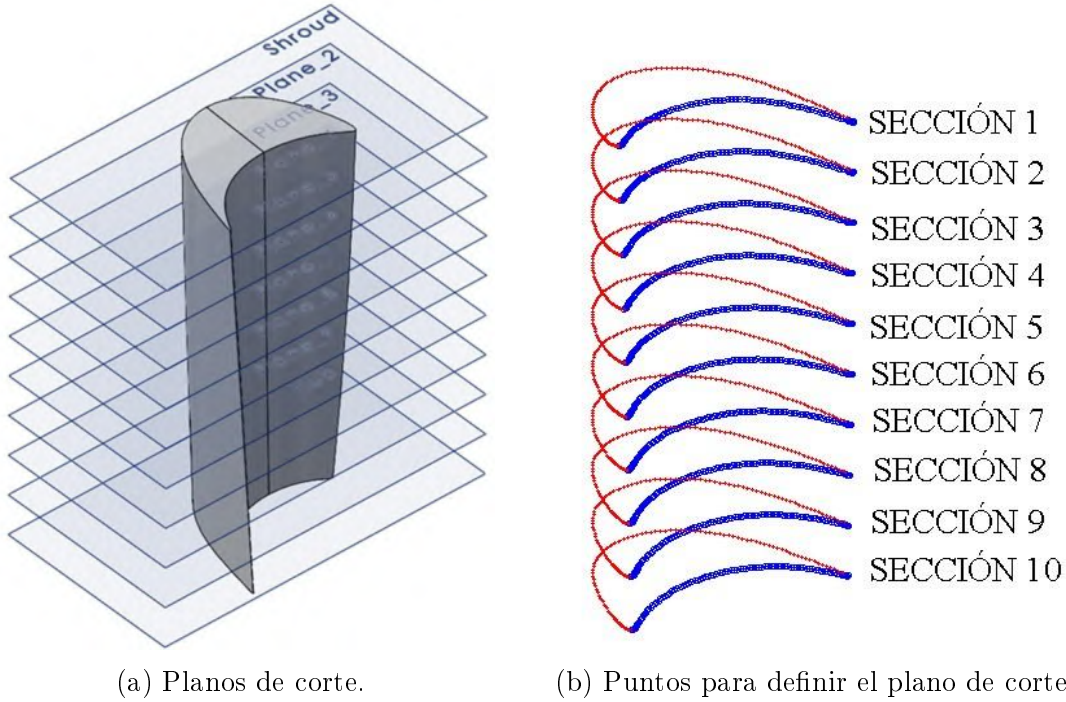


Figura 8: Definición de los planos de corte.

III.1.2. Reconstrucción de la geometría del álabe

En la etapa de reconstrucción, se realiza un ajuste polinomial a trozos de las caras de presión y succión de la sección transversal del álabe para cada uno de los planos previamente definidos. Para ello, se lleva a cabo un proceso de interpolación utilizando un polinomio $P(t)$ definido por 8 curvas de Bernstein $P^{(k)}(t)$ de cuarto orden que serán representados por la ecuación (5). La elección del número de curvas implementadas para definir el contorno de la sección transversal está directamente relacionada con la precisión deseada. Cada cara de la sección transversal puede ser definida con cuatro polinomios o menos, pero reducir el número de polinomios disminuye la precisión del ajuste. Por otro lado, aumentar el número de curvas de ajuste disminuiría el error, aunque incrementa el costo computacional. Por lo tanto, es conveniente establecer una tolerancia para el error y encontrar un balance entre precisión y costo computacional.

Las ocho curvas de Bernstein están definidas por

$$P^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{n=4} C_i^{(k)} B_i^4(t), \quad k = 1, \dots, 8, \quad (5)$$

donde t representa la longitud de arco normalizada de cada una de las 8 piezas de la sección de la cara correspondiente (presión o succión), $0 \leq t \leq 1$, $C_i^{(k)}$ son 5 puntos de control que definen la forma del ajuste en cada polinomio, y k representa la curva correspondiente a cada una de las piezas de la parametrización en cada plano. Como sabemos, los polinomios $B_i^4(t)$ pueden escribirse como

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (6)$$

donde, $\binom{n}{i}$ es el número de combinaciones de n elementos en i . La representación gráfica de la ecuación (6) se presenta en la figura 9.

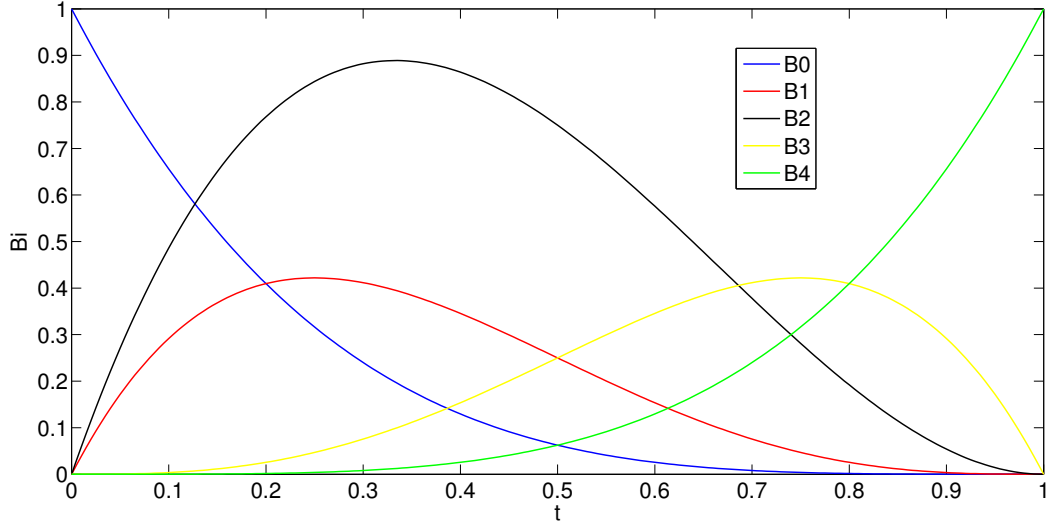


Figura 9: Polinomio de Bernstein de cuarto orden.

Algunas de las propiedades más importantes de los polinomios de Bernstein son [60]:

- Simetría $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$.
- Positividad $B_i^n(t) \geq 0$.
- Normalización $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ para $0 \leq t \leq 1$.

Estas cualidades los convierten en herramientas útiles para el diseño asistido por computadora.

En cuanto al proceso de parametrización, inicialmente, se propone un problema de mínimos cuadrados para obtener el mejor ajuste de $P(t)$ de manera simultánea en todas las coordenadas x_i, y_i, z_i , considerando restricciones de continuidad para los diferentes $P^{(k)}$ dado que el trazo del álabe es una curva cerrada y continua. A partir de esto, se determinan los puntos de control $C_i^{(k)}$; $k = 1, \dots, 8$; $i = 0, \dots, 4$. Cada cara se define utilizando cuatro polinomios (Figura 10), generando así un total de 20 puntos de control, en donde se debe garantizar que se cumpla la condición de continuidad que se expresa como

$$P^{(k)}(\tau_k) = P^{(k+1)}(\tau_k).$$

La ubicación de estos puntos de control τ_k se selecciona de manera que el error medio cuadrático entre $P^k(t)$ y los puntos escaneados sea un mínimo [86]. Cada polinomio se ajusta para una longitud de arco parametrizada $t = 1$, y al evaluar para los diferentes valores de t se determina la matriz $[M]$. Desarrollando la ecuación 5 para un polinomio de Bernstein de cuarto orden ($n = 4$) y expresando de forma matricial obtenemos,

$$P(t) = (C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4) \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

o de forma simplificada,

$$\{P\} = \{C\}[M], \quad (8)$$

donde $\{P\}$ representa el valor de las coordenadas x_i, y_i, z_i obtenidas a partir del escaneo del álabe real, y $[M]$ se determina evaluando la longitud de arco normalizada t correspondiente a sus respectivas coordenadas x_i, y_i, z_i . Con esta información podemos determinar los puntos de control C_i , para cada uno de los ejes de referencia, a partir de,

$$\{C\} = [M]^{-1} \{P\}. \quad (9)$$

Este proceso se repite para cada eje coordenado de tal forma que las constantes son determinadas por eje de referencia. Cada cara se define utilizando cuatro polinomios (Figura 10), lo que genera un total de 20 coeficientes para cada eje coordenado. Se establece que $C_4^{(k)} = C_0^{(k+1)}$ para garantizar la continuidad entre polinomios adyacentes.

Una vez definidos los coeficientes, se puede generar una representación de la sección transversal del álabe utilizando un número bastante arbitrario de puntos. Un aspecto fundamental de esta investigación fue mejorar la flexibilidad de la metodología de parametrización para controlar de una manera más adecuada la precisión del ajuste y el costo computacional. Originalmente, la metodología se diseñó para definir cada cara con 4 polinomios de Bernstein y 128 puntos (el número de puntos tiene que coincidir con la cantidad de coordenadas utilizadas como parámetros de entrada) [86]. Dado que para reproducir la geometría del álabe completo se utilizan 10 planos de corte, esto requiere que se generen 80 polinomios y 2,560 puntos de referencia para reconstruir la geometría del álabe. Las modificaciones realizadas al proceso de parametrización permiten definir cada plano de corte con sólo 6 polinomios (3 por cada cara), lo que reduce la cantidad total de polinomios necesarios para el ajuste a 60. Además, se ha modificado la rutina para permitir la selección de un número arbitrario de puntos de salida, N para cada cara. Es importante destacar que la precisión del ajuste está directamente relacionada con el valor de N ; a mayor número de puntos, menor será el error. Esto se puede observar claramente en las Figuras 11 y 12, donde se muestran los resultados del ajuste para $N = 10$ y $N = 100$ (La línea punteada representa el ajuste y la línea continua la geometría real). Después de generar una sección transversal, el proceso se repite para producir cada uno de los planos (Figura 8). Posteriormente, se construye la superficie del álabe usando interpolación transfinita [86].

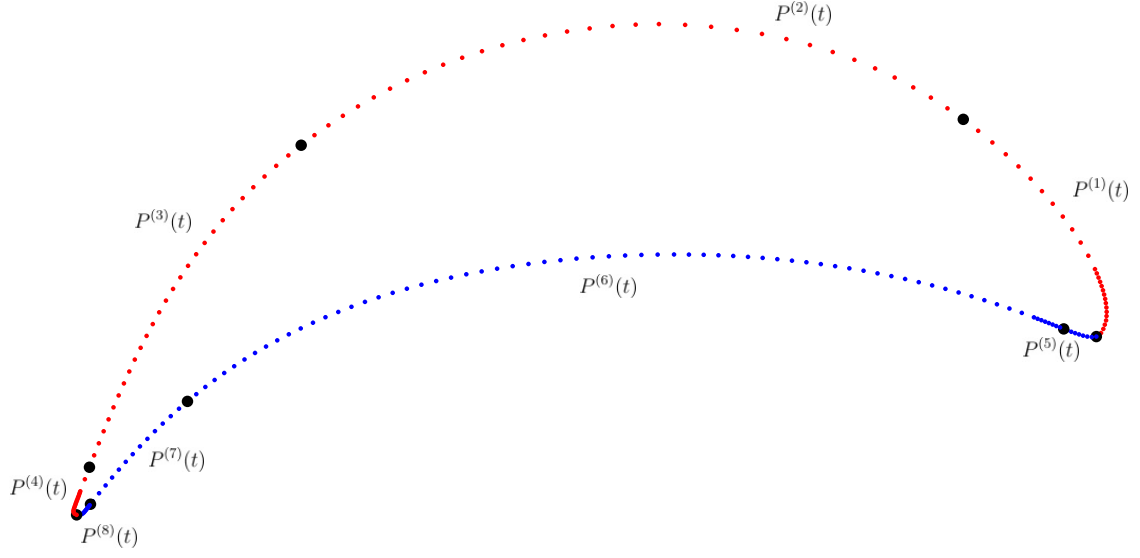


Figura 10: Sección transversal del álabé definida con 8 polinomios de Bernstein.

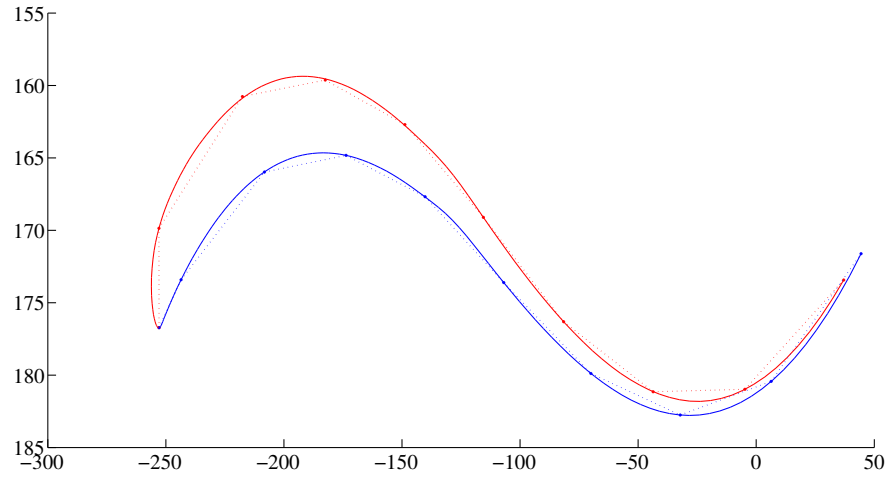


Figura 11: Sección transversal del álabé definida con 6 polinomios de Bernstein y $N = 10$.

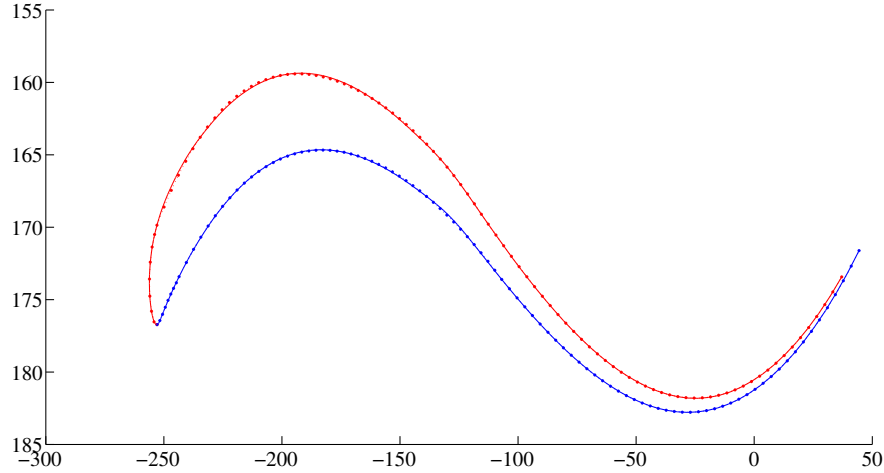


Figura 12: Sección transversal del álabo definida con 6 polinomios de Bernstein y $N = 100$.

III.1.2.1. Interpolación transfinita

Los métodos algebraicos basados en la aplicación de fórmulas de interpolación son los más eficientes para la generación de mallas. Estos métodos tienen dos principales fortalezas, la primera es que podemos tener un control directo sobre la localización de los puntos en la malla, y la segunda es la velocidad de cálculo de la malla en comparación con los métodos de ecuaciones diferenciales parciales [98, 102]. El método de interpolación transfinita (TFI, por sus siglas en inglés) es uno de los métodos algebraicos más implementados para generar mallas, y nos permite crearlas interpolando entre condiciones de frontera previamente definidas [102]. William Gordon fue el primero en describir este método [47], y en la década de 1980, Lars Eriksson presentó una aplicación para la generación de mallas en problemas de dinámica de fluidos computacional [40, 39]. El problema consiste en representar una región física simplemente conectada en un mapa representado por la región cúbica unitaria $X = X(\xi, \eta, \zeta)$ [98]. La región física se define mediante sus condiciones de frontera:

$$X_W(s, t), \quad X_E(s, t), \quad 0 \leq s, t \leq 1, \quad (10)$$

$$X_N(r, t), \quad X_S(r, t), \quad 0 \leq r, t \leq 1, \quad (11)$$

$$X_T(r, s), \quad X_B(r, s), \quad 0 \leq r, s \leq 1, \quad (12)$$

donde los subíndices W, E, N, S, T, B, representan las ubicaciones respectivas oeste, este, norte, sur, superior e inferior del dominio lógico. En total se tienen 12 bordes definidos por

$$X_{SW}(t), \quad X_{SE}(t), \quad X_{NW}(t), \quad X_{NE}(t), \quad (13)$$

$$X_{BW}(s), \quad X_{TW}(s), \quad X_{BE}(s), \quad X_{TE}(s), \quad (14)$$

$$X_{BS}(r), \quad X_{TS}(r), \quad X_{BN}(r), \quad X_{TN}(r), \quad (15)$$

y sus 8 correspondientes coordenadas que representan sus esquinas,

$$X_{WSB}, \quad X_{WST}, \quad X_{WNB}, \quad X_{WNT}, \quad (16)$$

$$X_{ESB}, \quad X_{EST}, \quad X_{ENB}, \quad X_{ENT}, \quad (17)$$

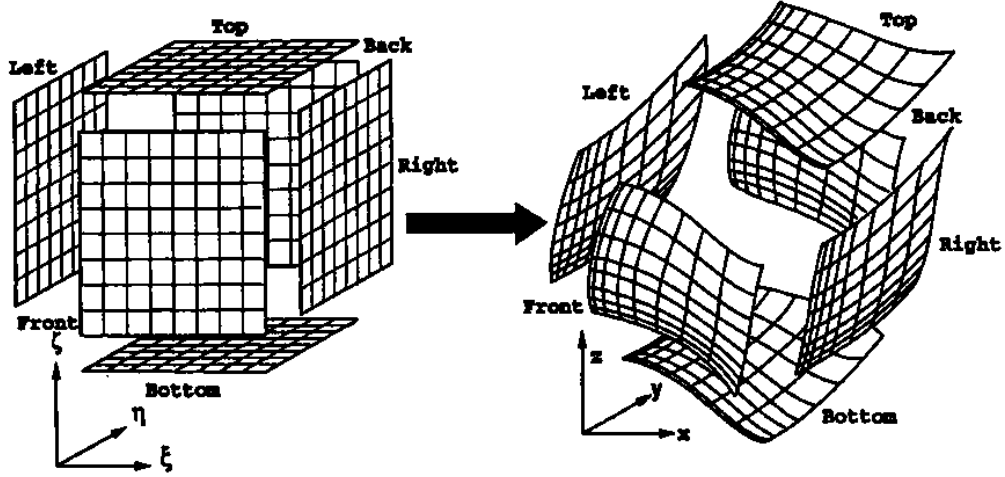


Figura 13: Superficies de frontera para TFI (tomado de Thompson et al. [102]).

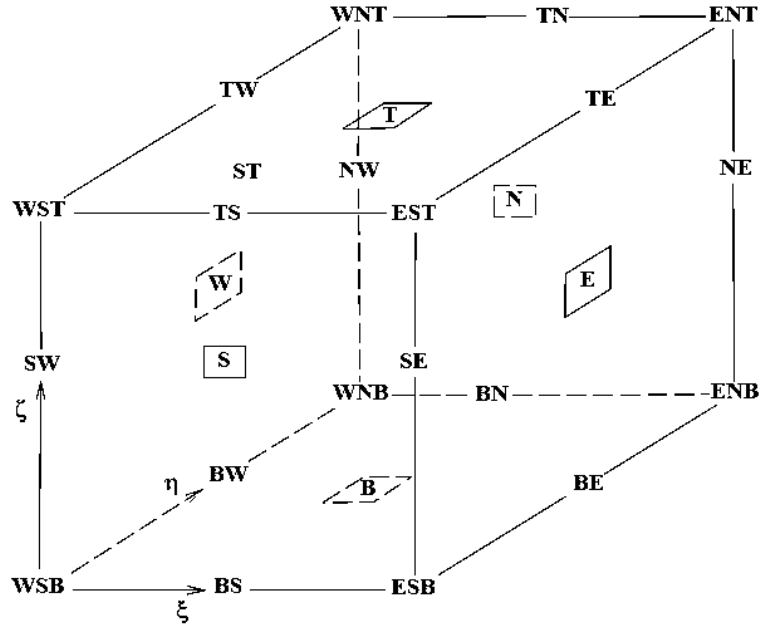


Figura 14: Nomenclatura del dominio lógico (tomado de Knupp y Steinberg [98]).

con condiciones de frontera para las superficies,

$$\begin{aligned}
X(0, s, t) &= X_W(s, t), \\
X(1, s, t) &= X_E(s, t), \\
X(r, 0, t) &= X_S(r, t), \\
X(r, 1, t) &= X_N(r, t), \\
X(r, s, 0) &= X_B(r, s), \\
X(r, s, 1) &= X_T(r, s)
\end{aligned} \tag{18}$$

para los bordes,

$$\begin{aligned}
X(0, 0, t) &= X_{SW}(t), \\
X(0, 1, t) &= X_{NW}(t), \\
X(1, 0, t) &= X_{SE}(t), \\
X(1, 1, t) &= X_{NE}(t), \\
X(0, s, 0) &= X_{BW}(s), \\
X(0, s, 1) &= X_{TW}(s), \\
X(1, s, 0) &= X_{BE}(s), \\
X(1, s, 1) &= X_{TE}(s), \\
X(r, 0, 0) &= X_{BS}(r), \\
X(r, 0, 1) &= X_{TS}(r), \\
X(r, 1, 0) &= X_{BN}(r), \\
X(r, 1, 1) &= X_{TN}(r)
\end{aligned} \tag{19}$$

y para las coordenadas de las aristas,

$$\begin{aligned}
X(0, 0, 0) &= X_{WSB}, \\
X(1, 0, 0) &= X_{ESB}, \\
X(0, 1, 0) &= X_{WNB}, \\
X(0, 0, 1) &= X_{WST}, \\
X(1, 1, 1) &= X_{ENT}, \\
X(0, 1, 1) &= X_{WNT}, \\
X(1, 0, 1) &= X_{EST}, \\
X(1, 1, 0) &= X_{ENB}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Finalmente, la TFI se puede expresar como una suma Boleana de interpolaciones invariantes en cada una de las direcciones del dominio computacional como

$$X(\xi, \eta, \zeta) = X_1 + X_2 + X_3 - X_{12} - X_{13} - X_{23} + X_{123}, \tag{21}$$

donde,

$$X_1 = (1 - \xi)X_W(\eta, \zeta) + \xi X_E(\eta, \zeta), \tag{22}$$

$$X_2 = (1 - \eta)X_S(\xi, \zeta) + \eta X_N(\xi, \zeta), \tag{23}$$

$$X_3 = (1 - \zeta)X_B(\xi, \eta) + \zeta X_T(\xi, \eta), \tag{24}$$

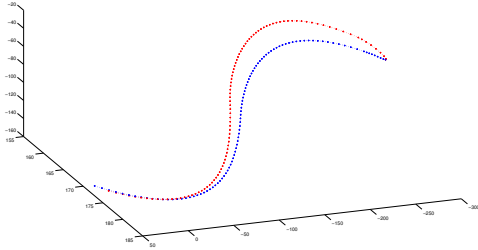
$$X_{12} = (1 - \xi)(1 - \eta)X_{SW}(\zeta) + (1 - \xi)\eta X_{NW}(\zeta) + \xi(1 - \eta)X_{SE}(\zeta) + \xi\eta X_{NE}(\zeta), \quad (25)$$

$$X_{13} = (1 - \xi)(1 - \zeta)X_{BW}(\eta) + (1 - \xi)\zeta X_{TW}(\eta) + \xi(1 - \zeta)X_{BE}(\eta) + \xi\zeta X_{TE}(\eta), \quad (26)$$

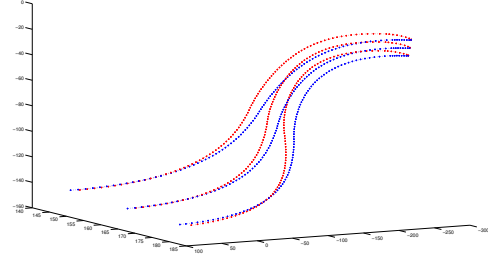
$$X_{23} = (1 - \eta)(1 - \zeta)X_{BS}(\xi) + (1 - \eta)\zeta X_{TS}(\xi) + \eta(1 - \zeta)X_{BN}(\xi) + \eta\zeta X_{TN}(\xi), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} X_{123} = & (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)X_{WSB} + (1 - \xi)(1 - \eta)\zeta X_{WST} + (1 - \xi)\eta(1 - \zeta)X_{WNB} \\ & + (1 - \xi)\eta\zeta X_{WNT} + \xi(1 - \eta)(1 - \zeta)X_{ESB} + \xi(1 - \eta)\zeta X_{EST} + \xi\eta(1 - \zeta)X_{ENB} \\ & + \xi\eta\zeta X_{ENT}. \end{aligned} \quad (28)$$

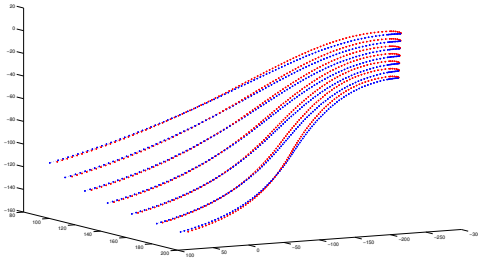
Es importante entender que en algunos de los casos un simple elemento en el dominio lógico no es suficiente para representar el dominio físico cuando éste se trata de una geometría compleja, lo que hace necesario dividir el dominio físico en subdominios e interpolar cada subdominio. Para nuestro caso de estudio el álabo es dividido en 10 planos (subdominios), los cuales se van generando uno a uno a través de la parametrización hasta producir la nube de puntos que incluye las 10 secciones (Figura 15). Una vez generados los 10 planos se utiliza TFI para producir la superficie del álabo (Figura 16).



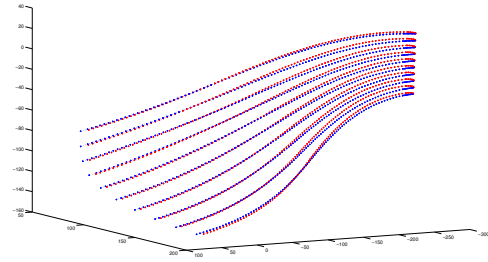
(a) Generación del primer plano de corte.



(b) Generación del tercer plano de corte.



(c) Generación del séptimo plano de corte.



(d) Generación del décimo plano de corte.

Figura 15: Construcción de los planos de corte.

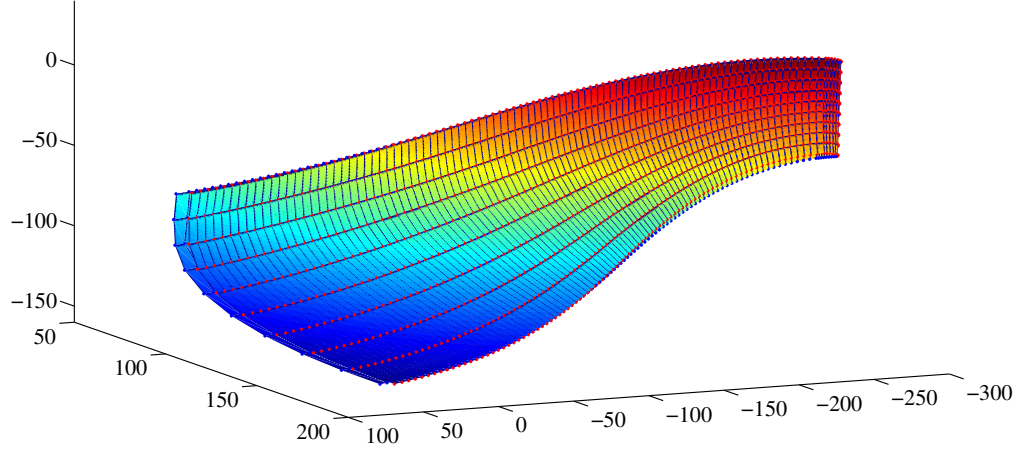


Figura 16: Ajuste numérico de la superficie del álabe.

III.1.3. Evaluación del error

La etapa final del proceso de parametrización consiste en la evaluación del error. En esta fase, se determina la precisión del ajuste de las coordenadas generadas en comparación con los datos reales obtenidos del escaneo del álabe. La precisión del modelo se determina evaluando el error medio cuadrático, definido como

$$SME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n D_i^2}{n}} \quad (29)$$

donde D_i es la distancia euclidiana entre cualquier punto sobre la curva de parametrización del álabe (x_0, y_0, z_0) al punto más cercano del conjunto de coordenadas del escaneo (x_1, y_1, z_1) definida como,

$$D_i = |[(x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{n}|, \quad (30)$$

donde $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a la superficie parametrizada del álabe,

$$\mathbf{n} = \frac{A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}} + C\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (31)$$

Sustituyendo y desarrollando la ecuación (30),

$$D_i = |\cos(\alpha)x_1 + \cos(\beta)y_1 + \cos(\gamma)z_1 + d|, \quad (32)$$

para

$$d = \cos(\alpha)x_0 + \cos(\beta)y_0 + \cos(\gamma)z_0, \quad (33)$$

donde $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ y $\cos(\gamma)$ son los cosenos directores y representan las componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, respectivamente, del vector unitario normal [34, 73, 67].

Al evaluar la ecuación (29) utilizando como referencia $N = 128$, que corresponde a los puntos obtenidos en el escaneo del álabe, se obtuvo un error medio cuadrático de $1.5496 \times 10^{-3} \%$ para la cara de presión y $9.685 \times 10^{-5} \%$ para la cara de succión [86]. Ambos valores dentro de la tolerancia sugerida por Dube et al. [37], quienes son referentes en este campo de investigación. Estos resultados confirman la precisión del método y validan el modelo geométrico [32].

Capítulo IV

Método de los Elementos Finitos

IV.1. Antecedentes históricos

En la década de 1950, el análisis estructural se limitaba esencialmente a elementos conectados con dos nodos. El modelado de elementos tipo placa o membrana sólo era posible usando geometrías rectangulares. Los primeros en estudiar cómo ampliar esta metodología fueron Clough y Turner mientras trabajaban para la empresa Boeing, donde se les solicitó calcular los coeficientes de flexibilidad por torsión y flexión de un modelo de ala (Figura 17).

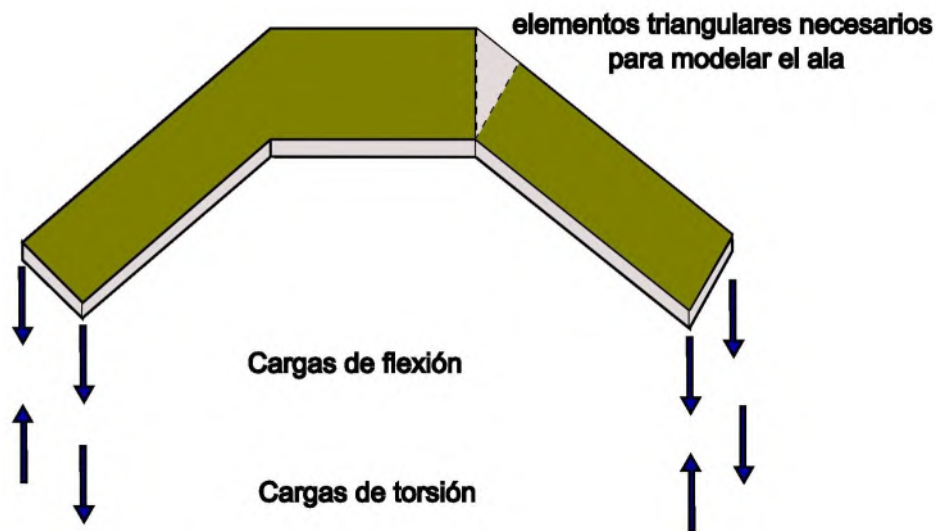
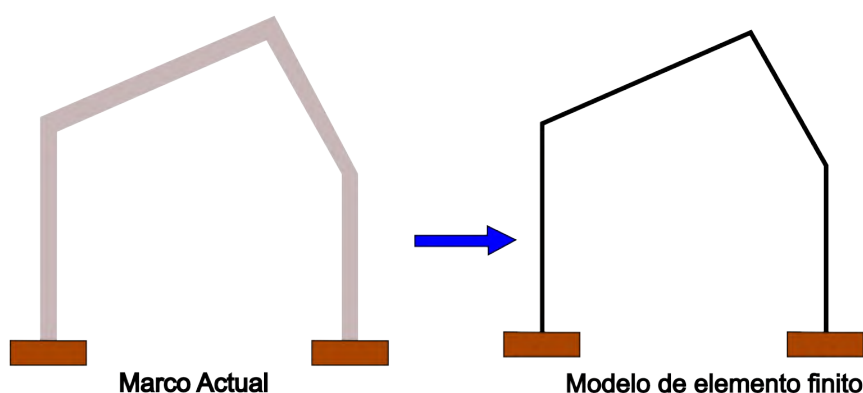


Figura 17: Modelo del ala estudiada por Clough y Turner (adaptado de Clough et al. [26]).

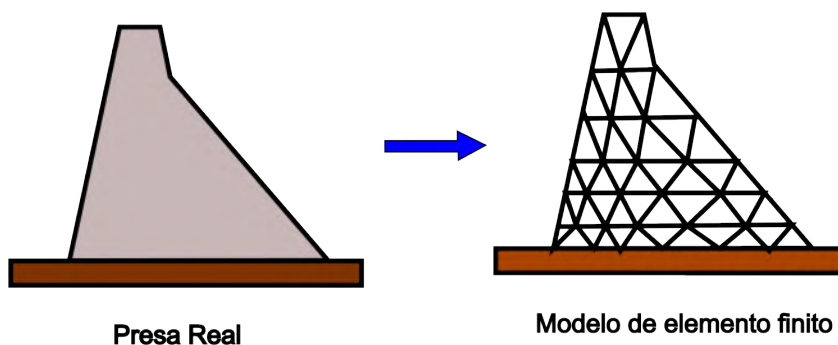
Al realizar el análisis estructural del ala utilizando elementos unidimensionales, se dieron cuenta que los resultados no coincidían con los obtenidos de pruebas experimentales, lo que los llevó a desarrollar 2 nuevos elementos estructurales: uno con forma de membrana triangular y otro rectangular. El propósito del desarrollo de estos nuevos elementos era modelar

de manera más precisa la rigidez dinámica y los desplazamientos de la estructura; y en ningún momento se consideró que esto representara un nuevo método de análisis estructural [26].

Entre 1956 y 1957, durante una estancia en Noruega, Clough llegó a la conclusión que los elementos bidimensionales conectados por más de dos nodos podrían ser utilizados como una nueva metodología para resolver problemas de mecánica del medio continuo. Además, demostró que para el elemento triangular desarrollado por Turner, se satisfacen la relación esfuerzo-deformación, la compatibilidad de los desplazamientos y el equilibrio de fuerzas en una estructura con un número finito de nodos. Clough denominó a esta nueva metodología *el método de los elementos finitos*, la cual podía aplicarse para modelar tanto estructuras tipo marco, como estructuras continuas conectadas por nodos (Figura 18).



(a) Modelo FEM para estructuras formadas por barras.



(b) Modelo FEM para estructuras formadas por superficies.

Figura 18: Idealización del método de los elementos finitos propuesta por Clough (adaptado de Clough et al. [26]).

Esto ocurriría en el marco de una década de muchos avances en ingeniería estructural. En la década de 1960 se llevaron a cabo varios proyectos de investigación en la universidad de Berkeley. Estos incluían el estudio del refuerzo en edificios y sótanos para resistir explosiones nucleares, un programa de investigación en ingeniería sísmica que contaba con la mesa vibratoria más grande del mundo, una investigación en comportamiento de puentes, el

programa espacial tripulado, un proyecto para la extracción de petróleo en aguas profundas y la construcción del oleoducto en Alaska, así como la construcción de reactores nucleares y torres de enfriamiento. Además de los análisis y pruebas de laboratorio tradicionales, el FEM fue fundamental para realizar estas investigaciones. A finales de la década, Clough inició un programa de investigación en análisis estructural en Berkely, introduciendo un nuevo curso titulado *análisis matricial de estructuras*, que incluía temas como análisis de elemento finito de placas, cascarones y esfuerzo plano, entre otros. Un enfoque prometedor, sin embargo, el método presentaba limitantes, ya que todas las matrices tenían que ser calculadas manualmente. La Figura 19 muestra la primer malla utilizada para resolver el problema de una presa bidimensional bajo cargas gravitacionales. Se observa que, debido a las limitaciones en la resolución de los sistemas de ecuaciones, se utilizó una malla con pocos elementos y de dimensiones considerablemente grandes.

A principio de los años 60, Adini, uno de los estudiantes de Clough, trabajó resolviendo problemas de flexión de placas y estructuras tipo cascaron utilizando matrices de rigidez a flexión para elementos rectangulares. Mientras tanto, Clough y Wilson desarrollaron un programa automatizado para resolver problemas mediante FEM, usando el método de Gauss-Seidel para resolver sistemas de ecuaciones. Este programa permitió a los ingenieros estructurales abordar problemas prácticos de esfuerzo plano en estructuras con diversas geometrías y materiales, sin la necesidad de profundizar en el trasfondo matemático de la mecánica del medio continuo. El primer caso de aplicación real de este programa fue el análisis de la presa *Norfolk*. Este proyecto no sólo mejoró los métodos numéricos utilizados para analizar el problema en sí, sino que también extendió el uso del FEM a la solución de problemas no lineales.

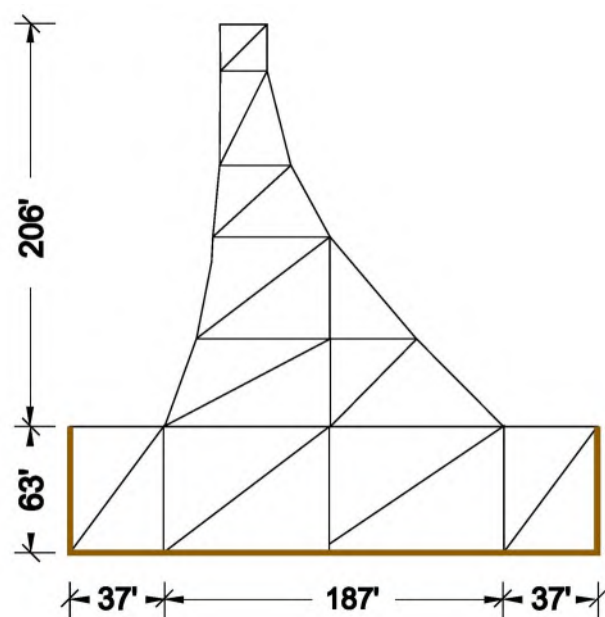


Figura 19: Primer malla implementada para el análisis gravitacional de una presa (adaptado de Clough et al. [26]).

A pesar de que el método ganaba popularidad, la comunidad de investigadores en mecánica del medio continuo se mostraba escéptica respecto a su validez. Karl Pister, investigador en Berkeley, retó a Clough a usar FEM para resolver uno de los problemas clásicos en análisis de esfuerzo plano. El problema seleccionado fue una placa con un agujero elíptico en el centro, sometida a cargas laterales de tensión (Figura 20). Los resultados demostraron la capacidad del método; y aunque no eliminaron la renuencia de la mayoría de los investigadores en mecánica del medio continuo, llevaron a Pister a reconocer que el FEM era una formulación especial del método de Ritz. Entre 1965 y 1970, la universidad de Berkeley, conocida como la cuna del método de los elementos finitos, recibió un número significativo de estudiantes de posgrado de diferentes áreas de investigación y diferentes nacionalidades interesados en trabajar en las aplicaciones prácticas del método. En 1969, Wilson inició el desarrollo del programa denominado *Structural Analysis Program* (SAP) para el análisis estático y dinámico de estructuras. Esta primera versión fue la base para el programa que hoy conocemos como SAP2000, ampliamente utilizado en el análisis estructural. En los años siguientes, el FEM y sus aplicaciones continuaron creciendo gracias a las investigaciones de destacados profesores como Clough, Wilson, O. C. Zienkiewicz, Anil K. Chopra y Jurgen Bathe, entre otros. Todo este contexto histórico se detalla de manera más precisa en el trabajo de revisión técnica-histórica presentado por Clough y Wilson [26].

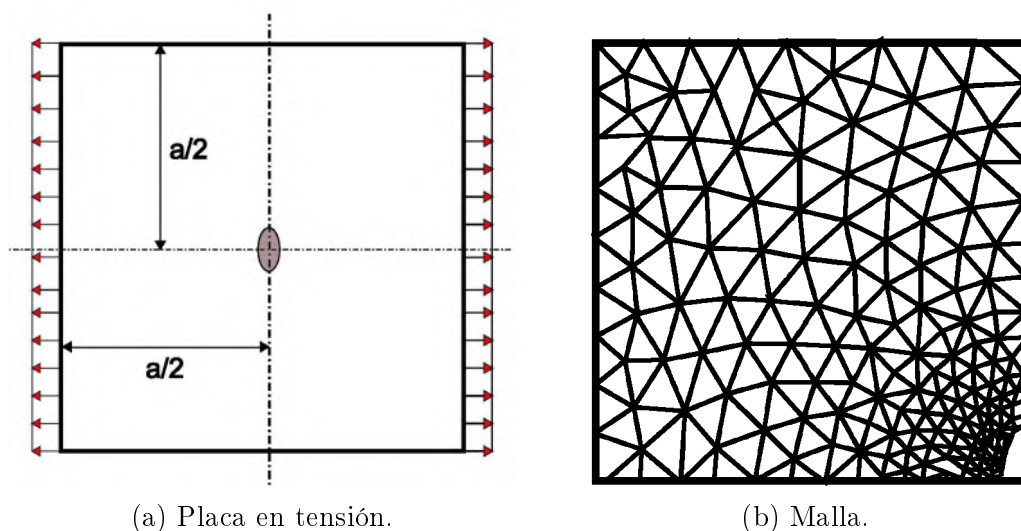


Figura 20: Ejemplo de placa con agujero elíptico (adaptado de Clough et al. [26]).

IV.2. Método variacional

Antes de entrar en materia con el FEM analicemos el método variacional el cual es principalmente utilizado para resolver sistemas continuos, pero también puede ser usado para resolver sistemas discretos definiendo el sistema global de ecuaciones algebraicas a partir de la discretización del modelo. El método consiste en calcular un funcional o potencial de la ecuación diferencial que se desea resolver. Consideremos el siguiente caso

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = -x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (34)$$

con variacional

$$\delta J = \int_0^1 \left(-\frac{d^2u}{dx^2} + u - x \right) \delta u dx + \left[\frac{du}{dx} \delta u \right]_0^1, \quad (35)$$

donde el primer término representa la ecuación diferencial y el segundo las condiciones de frontera, con δ como operador variacional. Aplicando integración por partes tenemos

$$\delta J = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \frac{d(\delta u)}{dx} + u \delta u - x \delta u \right) dx, \quad (36)$$

considerando la propiedad conmutativa del operador variacional,

$$\delta J = \delta \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 - xu \right\} dx, \quad (37)$$

con lo que el funcional queda definido como

$$J = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 - xu \right\} dx. \quad (38)$$

La solución de la ecuación diferencial se obtendrá al minimizar el funcional. Es importante remarcar que en un gran número de casos en aplicaciones de ingeniería, J representa la energía del sistema [66, 11].

IV.2.1. Rayleigh-Ritz

El método de Rayleigh-Ritz utiliza el funcional para obtener una aproximación a la solución de la ecuación gobernante del problema para condiciones de frontera previamente definidas. Inicialmente, se propone una solución que satisfaga las condiciones de frontera de Dirichlet con coeficientes constantes no definidos. El siguiente paso consiste en sustituir la solución propuesta en el funcional para determinar los coeficientes que minimicen el funcional [66, 11]. Si usamos como ejemplo la ecuación (34) y proponemos una solución de la forma $u = ax(1 - x)$, al sustituir en J obtenemos

$$J = \frac{1}{2} a^2 \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1) dx - a \int_0^1 (-x^3 + x^2) dx,$$

y minimizando el potencial

$$\frac{dJ}{da} = a \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1) dx - \int_0^1 (-x^3 + x^2) dx,$$

donde si resolvemos para a obtenemos $a = \frac{5}{22}$, con lo que la solución propuesta u quedaría definida como

$$u = \frac{5}{22}x(1-x).$$

Ahora, si consideramos un dominio el cual se divide en n subdominios (elementos finitos) y usamos funciones continuas a trozos para aproximar la solución, entonces el funcional queda definido como

$$J = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 - xu \right\} dx, \quad (39)$$

donde x_i y x_{i+1} representan las coordenadas inicial y final del elemento correspondiente de los n elementos que conforman el dominio. Si desarrollamos el funcional J y lo minimizamos se obtiene un sistema de ecuaciones algebraico de la forma

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\}. \quad (40)$$

Al desarrollar y resolver la ecuación (39) se observa que la misma representa una equivalencia del método Rayleigh-Ritz al FEM como ya se demostrará en la siguiente sección [66].

IV.3. FEM 1D

En problemas mecánicos, el objetivo principal del método de los elementos finitos es discretizar una ecuación diferencial gobernante de un fenómeno a fin de determinar los efectos que causan las fuerzas que actúan sobre un sistema. Para determinar estos efectos el FEM discretiza los elementos del sistema en estudio, dividiendo cada uno en n componentes más pequeños a los que llamamos elementos finitos. El método se puede resumir de manera muy somera en 10 pasos [35, 88]:

1. Discretizar el dominio en un conjunto de elementos, que consiste en dividir al mismo en pequeños componentes llamados elementos finitos, en donde cada una de las intersecciones de sus lados forma un punto al que llamamos nodo.
2. Seleccionar el modelo, patrón y forma adecuada de los elementos de acuerdo a la naturaleza del problema. Una distribución de nodos adecuada facilita la solución del sistema y brinda resultados más precisos.
3. Seleccionar la ley constitutiva más adecuada al problema de análisis.
4. Formular la forma débil de la ecuación diferencial gobernante.
5. Elegir las funciones de interpolación más adecuadas de acuerdo con el problema en estudio.
6. Calcular y ensamblar las matrices correspondientes de los elementos para obtener un sistema global de ecuaciones algebraicas.

7. Agregar las condiciones de frontera.
8. Resolver el sistema de ecuaciones algebraico para las incógnitas principales (que en problemas de elasticidad generalmente son los desplazamientos).
9. Resolver el sistema para las incógnitas secundarias. Información adicional que se desee obtener de acuerdo con el problema (fuerzas, esfuerzos, presiones, etc.).
10. Interpretación de resultados.

Para mostrar las capacidades del método comenzaremos analizando el caso unidimensional, considerando la ecuación diferencial que corresponde al problema de una barra elástica con carga axial y las condiciones de frontera definidas a continuación:

$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad u(0) = u_0 \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} = Q_L, \quad (41)$$

para $0 \leq x \leq L$. La metodología para resolver el problema consiste en reemplazar la variable dependiente u , por una aproximación u_h , la cual podemos definir según convenga. Se desea que u_h esté tan cercana a u como sea posible, lo cual significa reducir al mínimo el error o el residual R definido como

$$R(x, u_h) \equiv -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du_h}{dx} \right) - f(x) \neq 0, \quad (42)$$

para $x_a \leq x \leq x_b$. Implementando el método de los pesos ponderados podemos minimizar la función residual integrando el producto de R por las funciones de un conjunto linealmente independientes conocidas como funciones de peso $\omega_i(x)$

$$\int_{x_a}^{x_b} \omega_i(x) R(x, u_h) dx = \int_{x_a}^{x_b} \omega_i \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du_h}{dx} \right) - f(x) \right] dx = 0. \quad (43)$$

Se observa que la ecuación anterior contiene segundas derivadas de la variable dependiente, lo cual sugiere que para resolver el problema necesitamos una aproximación que sea al menos de clase C^2 . Aplicando integración por partes podemos reducir el orden de la ecuación diferencial para poder utilizar funciones de clase C^m como aproximación de la solución. A esta última expresión se le conoce como *forma débil* de la ecuación diferencial, y al aplicarla en la ecuación (43) obtenemos

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[a \frac{d\omega_i}{dx} \frac{du_h}{dx} - \omega_i f_i \right] dx - \omega_i a \frac{du_h}{dx} \Big|_{x_a}^{x_b} = 0 \quad (44)$$

donde,

$$\omega_i a \frac{du_h}{dx} \Big|_{x_a}^{x_b} = Q_b - Q_a \quad (45)$$

representa las condiciones de frontera Q_i .

Para lograr una buena aproximación, la solución propuesta u_h debe cumplir con las siguientes características:

- La función u_h debe ser suficientemente diferenciable de acuerdo con el planteamiento de la forma débil.
- Si la función u_h es un polinomio, éste debe ser un polinomio completo que incluya desde los terminos de bajo orden hasta los de alto orden deseado.
- La función u_h debe ser continua, si u es continua.

De acuerdo con la ecuación (44) es necesario que u_h sea al menos de clase C^1 . Se propone como una posible solución

$$u_h = c_1 + c_2x \quad (46)$$

considerando un elemento con coordenadas x_a y x_b en cuyos extremos se tienen los desplazamientos u_1 y u_2 (Figura 21), y evaluando la función propuesta se obtiene

$$\begin{aligned} u_h(x_a) &= c_1 + c_2x_a = u_1 \\ u_h(x_b) &= c_1 + c_2x_b = u_2. \end{aligned} \quad (47)$$



Figura 21: Elemento barra 1D.

Expresando en forma matricial y resolviendo para determinar c_1 y c_2

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_a \\ 1 & x_b \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

obtenemos la solución

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{h}(u_1x_b - u_2x_a) \\ c_2 &= \frac{1}{h}(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (49)$$

donde $h = x_b - x_a$, cuando $x_a \neq x_b$. Sustituyendo c_i en ecuación (46)

$$u_h(x) = c_1 + c_2x = \frac{1}{h}(u_1x_b - u_2x_a) + \frac{1}{h}(u_2 - u_1)x \quad (50)$$

o reescribiendo,

$$u_h(x) = \psi_1(x)u_1 + \psi_2(x)u_2 = \sum_{j=1}^2 \psi_j(x)u_j \quad (51)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son conocidas como funciones de forma (Figura 22)

$$\psi_1(x) = \frac{x_b - x}{h} \quad \psi_2(x) = \frac{x - x_a}{h}. \quad (52)$$

Las funciones de forma tienen algunas propiedades que las hacen muy útiles para aproximar la solución de la ecuación diferencial, tales como

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv u_h(x_a) = \psi_1(x_a)u_1 + \psi_2(x_a)u_2 \\ u_2 &\equiv u_h(x_b) = \psi_1(x_b)u_1 + \psi_2(x_b)u_2 \end{aligned} \quad (53)$$

lo cual implica que $\psi_1(x_a) = 1$, $\psi_2(x_b) = 1$, $\psi_1(x_b) = 0$, $\psi_2(x_a) = 0$, o de forma general

$$\delta_{ij} = \psi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j, \end{cases} \quad (54)$$

esto es, las funciones de forma son interpolantes de los nodos.

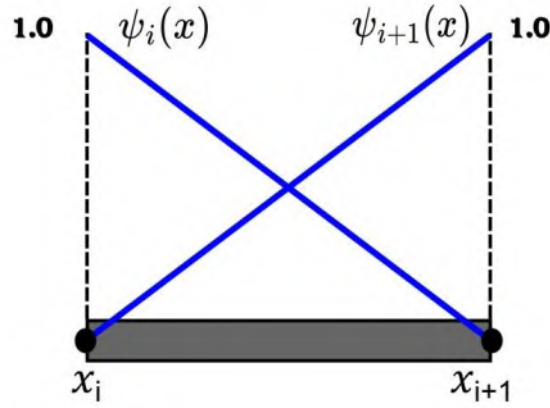


Figura 22: Función de forma de grado 1.

Usando un procedimiento similar se pueden determinar la función de forma de grado n si se cuenta con suficientes nodos de soporte. Por ejemplo para una aproximación cuadrática se tiene (ver Figura 23)

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right) \\
\psi_2(x) &= \frac{4\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \\
\psi_3(x) &= -\frac{\bar{x}}{h} \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right)
\end{aligned} \tag{55}$$

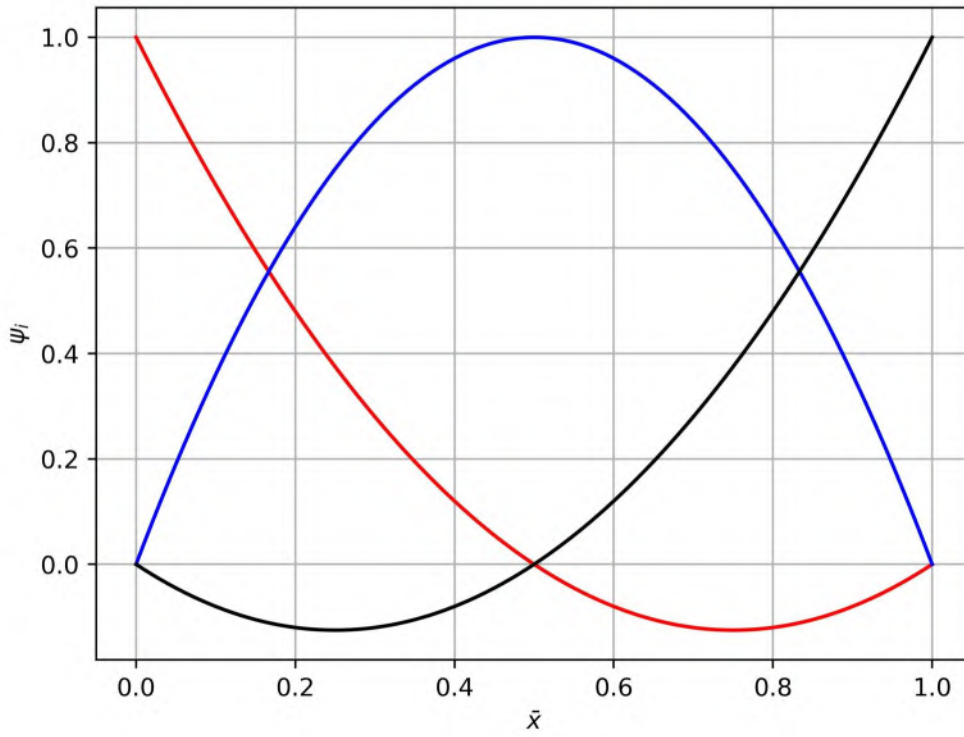


Figura 23: Funciones de forma de grado 2 con $h = 1$.

donde $\bar{x} = x - x_a$. De forma general, sin importar el grado de la aproximación, podemos expresar u_h como

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x). \tag{56}$$

El siguiente paso consiste en elegir la función de peso más adecuada. Con el método de Galerkin se propone una función de peso tal que $\omega_i = \psi_i$. Sustituyendo en la ecuación (44) tenemos

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[a \frac{d\psi_i}{dx} \sum_{j=1}^n u_j \frac{d\psi_j}{dx} - \psi_i f_i \right] dx - Q_i = 0 \quad (57)$$

$$\sum_{j=1}^n \int_{x_a}^{x_b} \left[a \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} \right] u_j dx = \int_{x_a}^{x_b} \psi_i f_i dx + Q_i \quad (58)$$

lo cual se puede expresar como

$$B(\omega_i, u_h) = l(\omega_i), \quad (59)$$

donde la parte izquierda representa la forma bilineal y la parte derecha la forma lineal del problema variacional asociado a la ecuación diferencial correspondiente. De forma simplificada la ecuación (58) también se puede escribir

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = F_i + Q_i \quad (60)$$

donde,

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \left(a \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} \right) dx \quad (61)$$

$$F_i = \int_{x_a}^{x_b} f_i(x) \psi_i(x) dx \quad (62)$$

y Q_i representa la condición de frontera del nodo i . En forma matricial la ecuación (60) se puede expresar

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{R}\}, \quad (63)$$

lo cual es un sistema no homogéneo donde de manera general $[\mathbf{K}]$ es conocida como la matriz de rigideces, $\{\mathbf{u}\}$ es el vector de desplazamientos, $\{\mathbf{F}\}$ es el vector de fuerzas internas y $\{\mathbf{Q}\}$ es el vector que incluye las condiciones de frontera.

En el método de Galerkin la matriz de rigideces tiene propiedades distintivas:

1. La matriz es simétrica $[K_{i,j}] = [K_{j,i}]$.
2. La matriz $[K_n]$ es rala. La mayoría de sus componentes son cero cuando n es grande. Por ejemplo $[K_{100}]$ tiene 10,000 elementos, pero sólo $100 + 99 + 99$ son diferentes de cero.
3. $[K_n]$ es una matriz tridiagonal.
4. La matriz $[K]$ tiene diagonales constantes, y está definida por tres coeficientes $(-1, 2, -1)$ cuando utilizamos funciones lineales para aproximar la solución.
5. La matriz $[K]$ es invertible.
6. La matriz $[K]$ es definida positiva.

IV.4. FEM 2D

Para el problema bidimensional usaremos como ejemplo la ecuación de Poisson. El procedimiento para el planteamiento del FEM 2D es similar al caso 1D, pero agregando la posibilidad de considerar problemas con dominios no rectangulares. Partiendo de la ecuación de Poisson se tiene

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = f(x, y), \quad (64)$$

o reescribiendo,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y). \quad (65)$$

Aplicando nuevamente el método de los pesos ponderados y multiplicando la ecuación por ω_i

$$-\int_{\Omega} \omega_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy - \int_{\Omega} \omega_i f(x, y) dx dy = 0, \quad (66)$$

ahora si consideramos que

$$F_1 = k \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad F_2 = k \frac{\partial u}{\partial y}$$

entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\omega F_1) = \omega \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_1 \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

o reescribiendo,

$$\omega \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\omega F_1) - F_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (67)$$

del mismo modo, desarrollando para F_2 ,

$$\omega \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\omega F_2) - F_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (68)$$

sustituyendo las ecuaciones (67) y (68) en ecuación (66)

$$\int_{\Omega} \left[F_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} + F_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\omega F_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega F_2) \right) \right] dx dy - \int_{\Omega} \omega_i f(x, y) dx dy = 0. \quad (69)$$

De acuerdo con el teorema de la divergencia de Green

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (70)$$

Aplicando el teorema de Green y sustituyendo F_1 y F_2 en ecuación (69) se obtiene,

$$\int_{\Omega} \left[k \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + k \frac{\partial u_h}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] dx \, dy - \oint_{\Gamma} \omega \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} \omega f(x, y) \, dx \, dy = 0. \quad (71)$$

De acuerdo con la ecuación (71) para aproximar la solución necesitamos funciones de forma que sean cuando menos de clase C^1 para x y y . En este caso la función aproximación depende de la configuración geométrica del elemento y la discretización planteada. Si consideramos un elemento triangular, entonces, se utilizará una función lineal de la forma

$$u_h(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y, \quad (72)$$

donde c_i son constantes, y el conjunto $\{1, x, y\}$ es linealmente independiente.

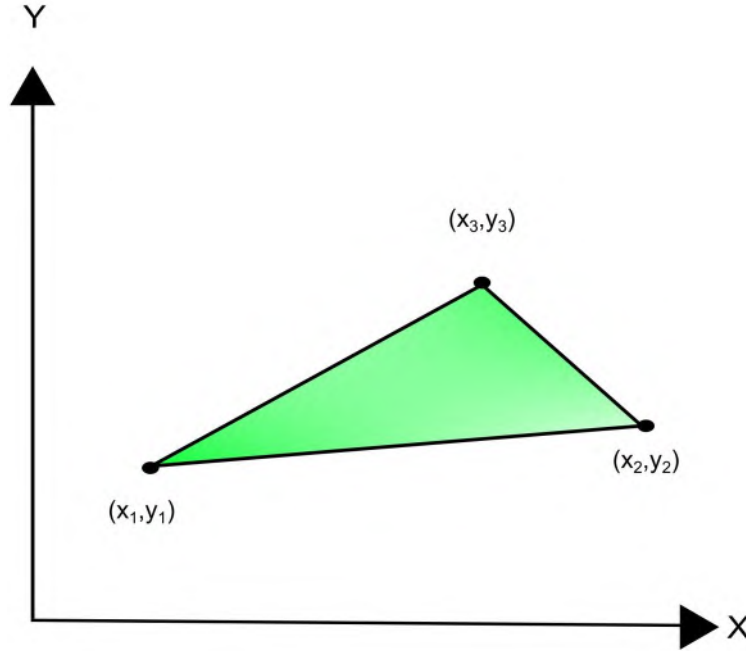


Figura 24: Elemento finito triangular.

Evalutando la ecuación (72) para las coordenadas x_i y y_i

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv u_h(x_1, y_1) = c_1 + c_2x_1 + c_3y_1 \\ u_2 &\equiv u_h(x_2, y_2) = c_1 + c_2x_2 + c_3y_2 \\ u_3 &\equiv u_h(x_3, y_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3y_3, \end{aligned} \quad (73)$$

resolviendo el sistema para c_i se tiene,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) \\ c_2 &= \frac{1}{2A}(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3) \\ c_3 &= \frac{1}{2A}(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3) \end{aligned} \quad (74)$$

donde los parámetros α_i , β_i , γ_i se obtienen de las coordenadas de los nodos del elemento a partir de

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= -(x_j - x_k) \end{aligned} \right\} (i \neq j \neq k), \quad (75)$$

y A se calcula con $2A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Sustituyendo en la ecuación (72) y reordenando

$$u_h^e(x, y) = \frac{1}{2A}[(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y)u_1^e + (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y)u_2^e + (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y)u_3^e], \quad (76)$$

donde el superíndice e representa el número de elemento y cobra relevancia durante el ensamble, principalmente en problemas bidimensionales y tridimensionales. Al igual que en el caso 1D, la aproximación u_h se puede representar como

$$u_h^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \psi_i^e(x, y) \quad (77)$$

donde,

$$\psi_i^e(x, y) = \frac{1}{2A_e}(\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (78)$$

De manera análoga a las funciones de interpolación 1D, estas funciones tienen las siguientes propiedades:

$$\sum_{i=1}^3 \psi_i^e = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} = 0. \quad (79)$$

Si utilizamos un elemento cuadrilátero (Figura 25) y proponemos una aproximación de la forma

$$u_h(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy \quad (80)$$

obtendremos,

$$u_h^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 u_i^e \psi_i^e, \quad (81)$$

donde las funciones de forma ψ_i^e quedan definidas por

$$\begin{aligned} \psi_1^e &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \psi_2^e &= \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \psi_3^e &= \frac{x}{a} \frac{y}{b} \\ \psi_4^e &= \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right). \end{aligned} \quad (82)$$

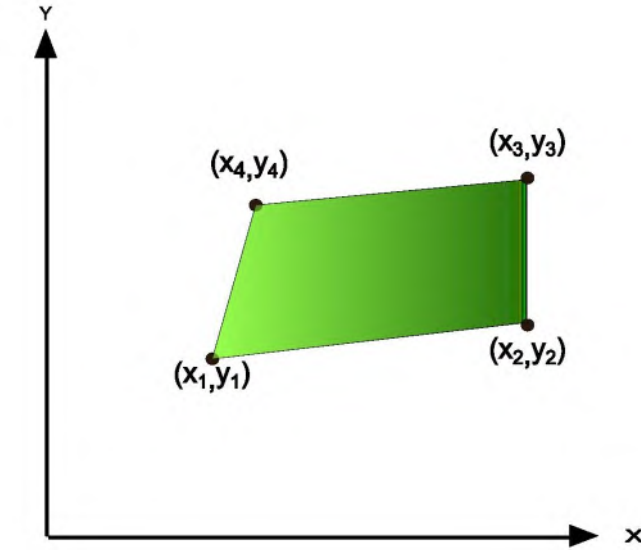


Figura 25: Elemento finito cuadrilátero.

Retomando la solución de la ecuación de Poisson proponiendo elementos triangulares para definir la función u_h , y al sustituir en la ecuación (71) aplicando Galerkin, esto es, con $\omega_i = \psi_i$

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega} \left[k \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + k \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right] dx dy \right\} u_j - \oint_{\Gamma} \psi_i q_i \cdot n ds - \int_{\Omega} \psi_i f_i(x, y) dx dy = 0 \quad (83)$$

o en forma matricial

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{Q}\}, \quad (84)$$

con lo cual obtenemos una solución con una estructura natural, similar a la obtenida en el desarrollo del planteamiento del problema 1D, con la diferencia que ahora tenemos dos variables independientes. La ecuación (84) representa un problema de mínimos cuadrados en n dimensiones. Para analizar la forma de la solución, considere la función cuadrática $P(u)$,

$$P(u) = \frac{1}{2}u^T K u - u^T f = (u_1^2 - u_1 u_2 + u_2^2) - u_1 f_1 - u_2 f_2, \quad (85)$$

derivando e igualando a cero para encontrar el mínimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u_1} &= 2u_1 - u_2 - f_1 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial u_2} &= -u_1 + 2u_2 - f_2 = 0, \end{aligned} \quad (86)$$

escrito en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (87)$$

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (88)$$

Si $[\mathbf{K}]$ es definida positiva, entonces $[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\}$ representa un mínimo (Figura 26). Esto significa que la ecuación (84) representa un mínimo del funcional de Ritz previamente definido (ver sección IV.2).

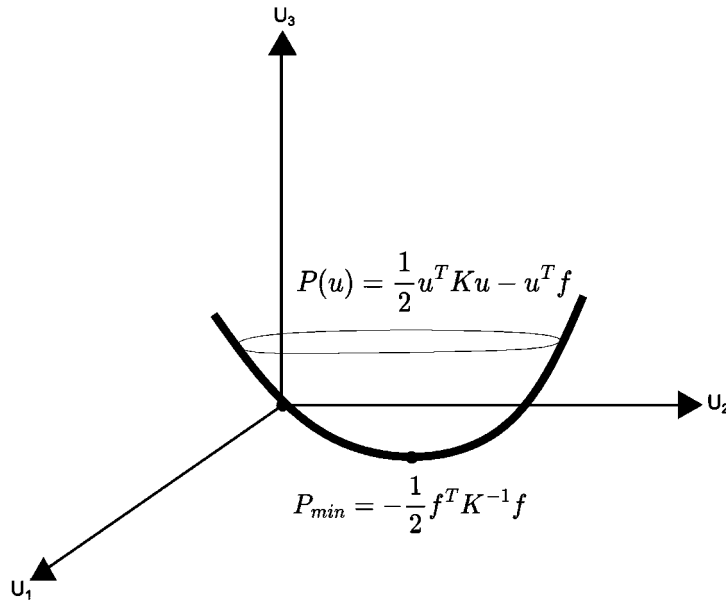


Figura 26: Representación gráfica de un problema de mínimos cuadrados.

IV.5. FEM 3D

Para ejemplificar el caso del FEM tridimensional, al igual que en el caso 2D, usaremos la ecuación de Poisson

$$-\nabla \cdot (\nabla u) = f(x, y, z) \quad (89)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = f(x, y, z), \quad (90)$$

y aplicando el método de los pesos ponderados tenemos,

$$-\int_{\Omega} \omega_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz - \int_{\Omega} \omega_i f(x, y, z) dx dy dz = 0. \quad (91)$$

Para desarrollar la forma débil de la ecuación diferencial utilizamos la primera identidad de Green definida por,

$$\int_V \omega \nabla^2 u \, dV = \int_{\partial V} \omega (\nabla u \cdot \hat{n}) \, dA - \int_V \nabla \omega \cdot \nabla u \, dV \quad (92)$$

y sustituyendo en la ecuación (91)

$$\int_V \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right] dV - \int_{\partial V} \omega_i (\nabla u \cdot \hat{n}) \, dA - \int_V \omega_i f_i(x, y) \, dV = 0. \quad (93)$$

Si proponemos una aproximación de la forma

$$u_h^e(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i^e \psi_i^e(x, y) \quad (94)$$

entonces,

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_V \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right] dV \right\} \{u_j\} - \int_{\partial V} \psi_i (\nabla u \cdot \hat{n}) \, dA - \int_V \psi_i f_i(x, y) \, dV = 0 \quad (95)$$

o de forma matricial

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{Q}\}, \quad (96)$$

donde $\{\mathbf{u}\}$ es el vector de desplazamientos en los nodos, con $[\mathbf{K}]$, $\{\mathbf{F}\}$ y $\{\mathbf{Q}\}$ determinados a partir de

$$[\mathbf{K}] = \sum_{j=1}^n \int_V \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right] dV, \quad (97)$$

$$\{\mathbf{Q}\} = \int_{\partial V} \psi_i (\nabla u \cdot \hat{n}) dA, \quad (98)$$

$$\{\mathbf{F}\} = \int_V \psi_i f_i(x, y) dV, \quad (99)$$

se puede observar que estas ecuaciones son análogas a la de los casos 1D y 2D.

Para definir nuestra función de forma elegimos un elemento tetrahédrico de 4 nodos (Figura 27), e implementamos el procedimiento descrito para los casos 1D y 2D para determinar las funciones de forma

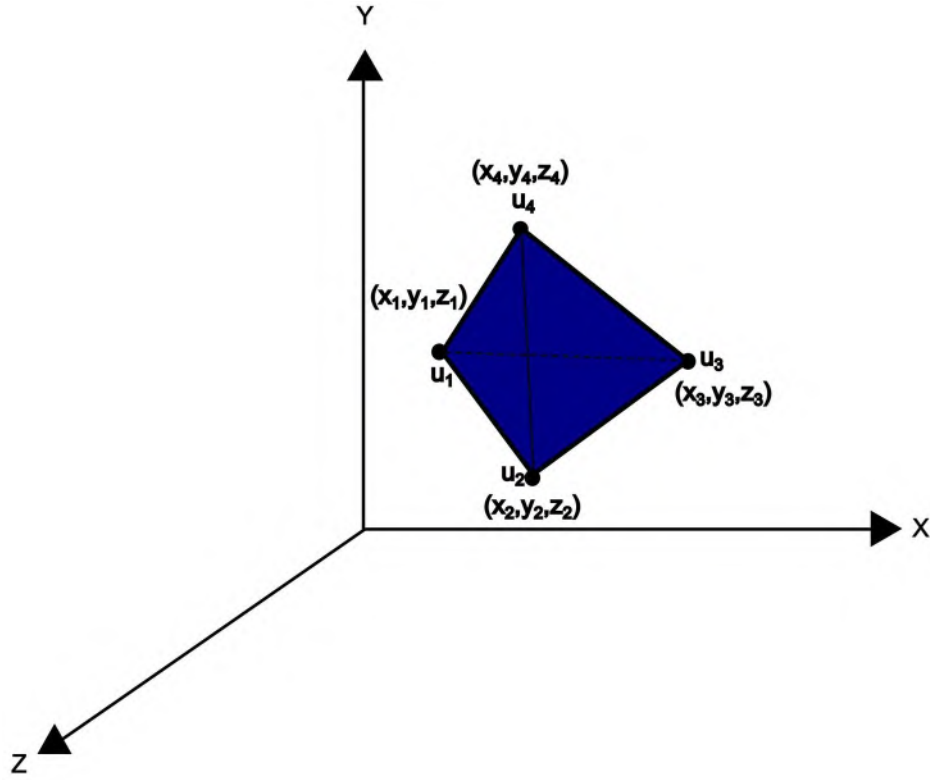


Figura 27: Elemento finito tetrahedro de 4 nodos.

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{1}{6V}(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1 z) \\
\psi_2 &= \frac{1}{6V}(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2 z) \\
\psi_3 &= \frac{1}{6V}(\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y + \delta_3 z) \\
\psi_4 &= \frac{1}{6V}(\alpha_4 + \beta_4 x + \gamma_4 y + \delta_4 z)
\end{aligned} \tag{100}$$

donde V es el volumen del elemento y está definido por

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{101}$$

y los parámetros α_i , β_i , γ_i y δ_i se determinan a partir de las ecuaciones (102) a (105), y los puntos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , que representan las coordenadas de los nodos del elemento, son no colineales

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \alpha_2 &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
\alpha_3 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \alpha_4 &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \beta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
\beta_3 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \beta_4 &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \gamma_2 &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
\gamma_3 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \gamma_4 &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \delta_2 &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
\delta_3 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & \delta_4 &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{105}$$

IV.6. Cuadratura

Uno de los aspectos más importantes en la solución de problemas numéricos es la precisión y números de puntos de integración necesarios en cada elemento, considerando que cada uno de ellos es integrado de manera individual. Esencialmente, la integración numérica de $\int_a^b F(r)dr$ consiste en ajustar un polinomio $\psi(r)$ a la curva $F(r)$ y resolver $\int_a^b \psi(r)dr$ como una aproximación a la solución real. La precisión con la que $\psi(r)$ se aproxima a $F(r)$ depende directamente de la posición y el número de puntos de prueba colocados en el intervalo de a a b . Tomando esto en consideración, uno de los métodos de integración numérica más importantes es la cuadratura de Gauss, en la cual se optimiza la ubicación de los puntos de evaluación r_i , así como los pesos α_i [11]

$$\int_a^b F(r)dr = \alpha_1 F(r_1) + \alpha_2 F(r_2) + \dots + \alpha_n F(r_n) + R_n, \tag{106}$$

donde R_n es el residual. La cuadratura de Gauss requiere n puntos de evaluación para integrar de manera exacta polinomios de grado $(2n - 1)$ o menor. La Tabla IV.1 muestra los puntos de evaluación para la integración numérica y sus correspondientes pesos para $n = 1$ a $n = 6$, considerando que el intervalo de integración es de -1 a 1 . Para intervalos de integración diferentes los coeficientes r'_i y α'_i se determinan a partir de

$$r'_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}r_i \quad y \quad \alpha'_i = \frac{b-a}{2}\alpha_i. \tag{107}$$

Tabla IV.1: Cuadratura de Gauss, puntos de evaluación y pesos (intervalo de -1 a 1).

n	r_i	α_i
1	0.00000	2.00000
2	± 0.57735	1.00000
3	± 0.77459	0.55555
	0.00000	0.88888
4	± 0.86113	0.34785
	± 0.33998	0.65214
5	± 0.90617	0.23692
	± 0.53846	0.47862
	0.00000	0.56888
6	± 0.93246	0.17132
	± 0.66120	0.36076
	± 0.23861	0.46791

Consideremos el caso en donde se desea resolver la siguiente integral usando la cuadratura de Gauss con $n = 2$,

$$\int_0^3 (2^r - r) dr = \alpha_1 F(r_1) + \alpha_2 F(r_2)$$

usando la ecuación (107) y la Tabla IV.1 obtenemos

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}(1); \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}(1)$$

$$r_1 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad r_2 = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

con $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735$. Evaluando,

$$F(r_1) = 0.91786; \quad F(r_2) = 2.78916$$

y

$$\int_0^3 (2^r - r) dr = 5.56054.$$

La cuadratura de Gauss es quizás la más utilizada en la solución de problemas numéricos. En el caso del FEM ésta se usa para determinar los coeficientes de la matriz de rigideces.

IV.7. Problema de elasticidad

Utilizando lo discutido sobre la ecuación de Laplace, la cual corresponde a un problema elíptico, podemos resolver el problema de elasticidad que trata del análisis de la relación entre cargas, esfuerzos, deformaciones y desplazamientos. Para determinar la ecuación gobernante del problema considere el caso de una partícula localizada en el plano $x - y$ sometida a un

vector de fuerzas $\{\mathbf{f}\}$ que genera un cambio en el esfuerzo, como se presenta en el diagrama de cuerpo libre (Figura 28).

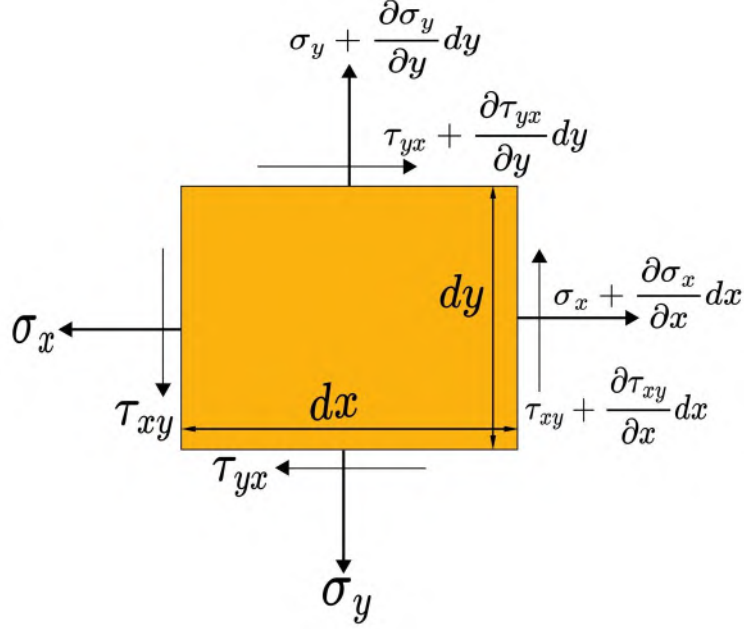


Figura 28: Diagrama de cuerpo libre de una partícula en 2D.

Realizando el equilibrio de fuerzas en ambos ejes se tiene,

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 \\
 -\sigma_x dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \tau_{xy} dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx + f_x dx dy &= 0 \\
 \sum F_y &= 0 \\
 -\sigma_y dx + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{xy} dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right) dy + f_y dx dy &= 0,
 \end{aligned} \tag{108}$$

simplificando obtenemos el sistema de ecuaciones gobernantes del problema de elasticidad bidimensional

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y &= 0
 \end{aligned} \tag{109}$$

De forma análoga, se determina el sistema de ecuaciones gobernantes para el problema de elasticidad tridimensional definido por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - f_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - f_y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - f_z &= 0,
\end{aligned} \tag{110}$$

el cual se puede representar como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f} = 0, \tag{111}$$

donde a su vez

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}, \tag{112}$$

con $\boldsymbol{\sigma}$ representando el tensor de esfuerzos definido por

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^T = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\} \tag{113}$$

y $[\mathbf{B}]$ es una matriz que contiene las derivadas parciales

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{114}$$

Como sabemos, la ley constitutiva que relaciona esfuerzos y deformaciones para un material elástico está definida por

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{115}$$

donde $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ representa el tensor de deformaciones unitarias (ecuación (116)), y $[\mathbf{D}]$ es la matriz elástica, la cual depende de las propiedades mecánicas del material como lo son el módulo de elasticidad, E , y el coeficiente de Poisson, ν

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\} \tag{116}$$

Para un material isotrópico la matriz elástica se puede calcular a partir de

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}. \quad (117)$$

La relación entre deformaciones y desplazamientos está definida por

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}\} \quad (118)$$

donde,

$$\{\mathbf{u}\}^T = \{u_x \ u_y \ u_z\}. \quad (119)$$

Usando las relaciones establecidas entre esfuerzo-deformación y deformación-desplazamiento podemos modificar la ecuación gobernante con la finalidad de aplicar el método de los elementos finitos usando el planteamiento descrito para el caso tridimensional. Sabemos que,

$$[\mathbf{B}]^T\{\boldsymbol{\sigma}\} - \mathbf{f} = 0 \quad (120)$$

que sustituyendo ecuación (115) en (120),

$$[\mathbf{B}]^T[\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \mathbf{f} = 0 \quad (121)$$

y sustituyendo la relación entre deformaciones y desplazamientos (ecuación (118)), obtenemos

$$[\mathbf{B}]^T[\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\mathbf{u}\} - \mathbf{f} = 0. \quad (122)$$

La ecuación (122) depende del vector de desplazamientos $\{\mathbf{u}\}$ el cual reemplazaremos por la aproximación $\{\mathbf{u}_h\}$ (ecuación (94)). Definiendo el residual y multiplicando por las funciones de peso correspondientes se obtiene

$$\int_V \boldsymbol{\omega} R \, dV = \int_V \{\boldsymbol{\omega}\} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}_h\} \, dV - \int_V \{\boldsymbol{\omega}\} \cdot \mathbf{f} \, dV = 0. \quad (123)$$

Aplicando la forma débil y utilizando la primera identidad de Green

$$\int_V [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\omega}\} [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}_h\} \, dV = \int_V \{\boldsymbol{\omega}\} \cdot \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial V} \{\boldsymbol{\omega}\} (\nabla u \cdot \hat{n}) \, dA \quad (124)$$

de acuerdo con Galerkin y expresando de forma matricial obtenemos la solución previamente presentada en el caso FEM 3D, la cual es de la forma

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{Q}\}. \quad (125)$$

IV.7.1. Ejemplos de aplicación

Para ejemplificar la aplicación del FEM analizaremos dos de los problemas clásicos en elasticidad: el primero corresponde al caso de una barra con carga axial, el cual se analiza como un problema unidimensional; el segundo caso, es el análisis de una placa delgada a tensión, que representa un problema de esfuerzo plano.

Inicialmente, considere una columna de concreto que se usa de soporte para un puente. De manera idealizada la columna se puede analizar como una barra unidimensional con carga axial (Figura 29). La carga de 20 kN/m^2 representa el peso del puente más una carga estática generada por el tráfico. La columna está hecha de concreto con peso volumétrico de 25 kN/m^3 y módulo de elasticidad $E = 28 \text{ GPa}$ [88].

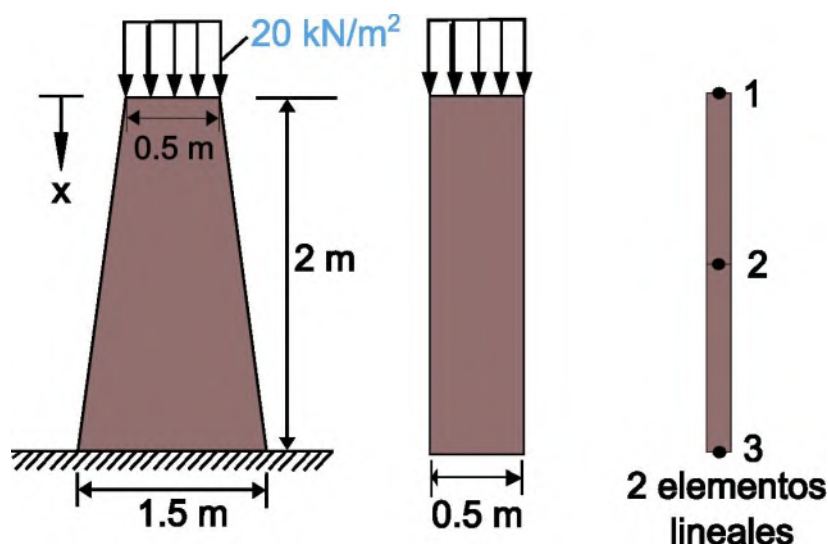


Figura 29: Columna de concreto.

Como el modelo se analizará como una barra lineal, la carga deberá actuar como carga puntual. Ésta se calcula multiplicando la carga superficial por el área de la sección transversal, $P = 20 \text{ kN/m}^2 (0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}) = 5000 \text{ N}$. Por su parte, el peso de la columna de concreto se debe representar como una función que depende de la longitud del elemento, x , debido a que la sección transversal de la columna no es constante

$$W(x) = 6250x(1 + 0.5x) \quad (\text{N})$$

y la función $f(x)$, que representa las cargas internas en el elemento por unidad de longitud está definida por

$$f(x) = \frac{dW}{dx} = 6250(1 + x) \quad (\text{N/m}).$$

La ecuación gobernante del problema es la previamente definida al inicio del capítulo

$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad u(L) = u_0 \quad \left(a \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = Q_0,$$

donde el parámetro a representa la rigidez axial de la columna ($a = EA$), E es el módulo de elasticidad y A es el área de la sección transversal, la cual es variable y depende de x , y se determina con

$$A(x) = \frac{1}{4}(1+x) \quad (\text{en } m^2).$$

Sustituyendo a en la ecuación gobernante del problema obtenemos

$$-\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{4} E(1+x) \frac{du}{dx} \right] = 6250(1+x)$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$-\left[\frac{1}{4} E(1+x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_{x=0} = 5000, \quad u(x=2) = 0.$$

Para analizar la columna su dominio se discretiza en 2 elementos, cada uno con longitud de $1m$, lo que genera un total de 3 nodos en el sistema, que es equivalente a tener tres grados de libertad dado que solo se tomará la deformación axial (Figura 29). Para calcular los coeficientes $[K_{ij}]$ de la matriz de rigideces es necesario realizar el ensamble entre los dos elementos, lo que nos da como resultado

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0.0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ 0.0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix},$$

los coeficientes $[K_{ij}]$ se determinan con la ecuación (61), utilizando funciones de forma lineales, ecuación (52), y los coeficientes del vector F se determinan con la ecuación (62). Evaluando y sustituyendo en ecuación (63) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$10^9 \begin{bmatrix} 10.5 & -10.5 & 0.0 \\ -10.5 & 28.0 & -17.5 \\ 0.0 & -17.5 & 17.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4167 \\ 12500 \\ 8333 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}.$$

Aplicando las condiciones de frontera, donde sabemos que para la barra 1, $Q_1^1 = F = 5000N$ y $Q_2^1 = 0$; y para la barra 2, $Q_1^2 = 0$. Adicionalmente, sabemos que la base de la columna está restringida al movimiento, por lo que $u_3 = 0$. Aplicando las condiciones de frontera y reduciendo el sistema de ecuaciones

$$10^9 \begin{bmatrix} 10.5 & -10.5 \\ -10.5 & 28.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9167 \\ 12500 \end{Bmatrix}$$

$$Q_2^2 = -17.5 \times 10^9 u_2 - 8333$$

que al resolver obtenemos

$$u_1 = u_h(0) = 2.1111 \times 10^{-6} m$$

$$u_2 = u_h(1.0) = 1.2381 \times 10^{-6} m$$

$$Q_2^2 = -30000 N.$$

El signo en los desplazamientos indica que los nodos se desplazan hacia abajo, lo que indica que la columna trabaja a compresión, y el valor de Q_2^2 representa la reacción en la base. A partir de este valor podemos calcular el esfuerzo en el empotramiento que representa el esfuerzo máximo en la columna con

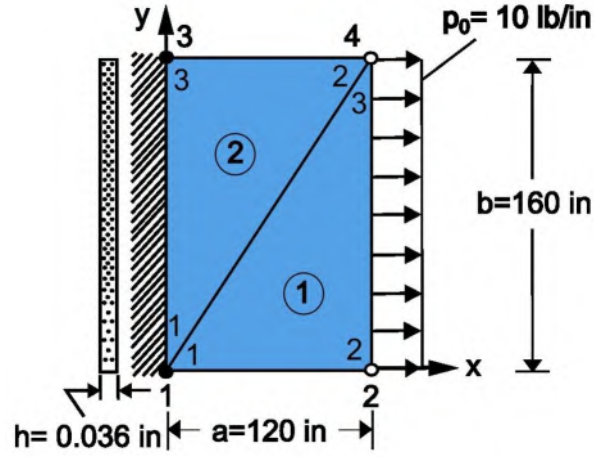
$$\sigma_x = \frac{Q_2^2}{A_{base}} = \frac{-30000}{0.75} = -40000 \text{ (en } N/m^2 \text{)}.$$

Con el objetivo de determinar la precisión de nuestra aproximación determinamos la solución exacta de la ecuación diferencial, la cual es

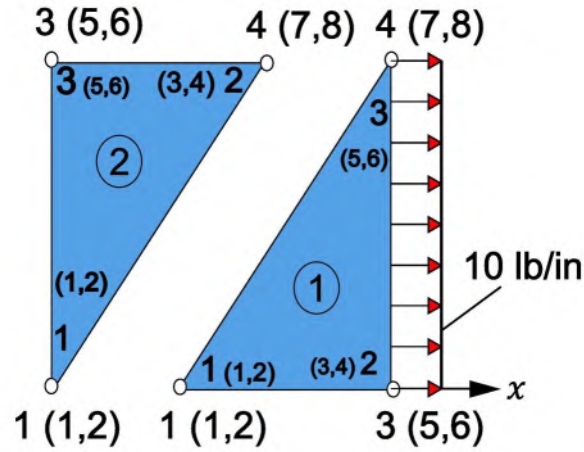
$$u(x) = \frac{1}{E} \left[56250 - 6250(1+x)^2 - 7500 \ln \left(\frac{1+x}{3} \right) \right].$$

Al evaluar la solución exacta obtenemos $u(0) = 2.0800 \times 10^{-6} m$, $u(1.0) = 1.2247 \times 10^{-6} m$, $u(2.0) = 0.0$, $R_2 = -30000 N$. Como se observa, los resultados determinados con la aproximación u_h presentan un error, pero este no excede de 1.5 %. El error se presenta debido a que la sección transversal del elemento no tiene área constante. Para este caso en particular se puede mejorar la aproximación refinando la malla o usando funciones de forma cuadráticas [88].

El segundo caso de análisis corresponde a un problema de elasticidad en el plano, en el cual se analiza una placa delgada con dimensiones $a = 120 in$, $b = 160 in$, $h = 0.036 in$ y propiedades mecánicas $\nu = 0.25$ y $E = 30 \times 10^6 lb/in^2$. La placa está fija en el extremo izquierdo y tiene una carga distribuida en el extremo derecho $p_0 = 10 lb/in$ (Figura 30). Por simplicidad despreciaremos el peso propio del elemento ya que no actúa en la dirección de la fuerza y su magnitud es despreciable. El objetivo es usar FEM para calcular los desplazamientos en los nodos [88].



(a) Placa en tensión.



(b) Malla.

Figura 30: Problema de elasticidad en el plano.

La Figura 30a muestra la discretización utilizada en la placa para resolver el problema. La placa se analizará usando dos elementos triangulares, enumerados entre círculos en su parte interior. El sistema cuenta con 4 nodos, enumerados en el exterior de la placa (sistema global), y a su vez cada elemento tiene tres nodos (sistema local), enumerados en su interior de 1 a 3 (ver Figura 30a). Como el análisis es en el plano, cada nodo tiene dos grados de libertad (GL) o desplazamientos, u_x, u_y , por lo que el sistema global tiene un total de 8 GL, nombrados entre paréntesis en el exterior de la Figura 30b, y localmente cada nodo tiene 6 GL, nombrados entre paréntesis en el interior de cada elemento (ver Figura 30b). Esta nomenclatura es importante para poder ensamblar la matriz de rigideces y obtener el sistema de ecuaciones lineales y determinar los desplazamientos. De acuerdo con la Figura 30a, en los nodos 1 y 3 se localiza una restricción al desplazamiento (empotramiento), por lo que $u_1 = 0, u_2 = 0, u_5 = 0, u_6 = 0$, lo que reduce a 4 el número de grados de libertad del sistema. Considerando que la solución del problema se obtiene a partir de

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{Q}\}.$$

Debemos de calcular los coeficientes de la matriz $[\mathbf{K}]$ y el vector $\{\mathbf{Q}\}$ para resolver el sistema de ecuaciones para $\{\mathbf{u}\}$. La Tabla IV.2 muestra de manera detallada como se ensambla la matriz de rigideces del sistema global en función de las submatrices de rigideces de cada elemento triangular. La primer columna nos indica el número de nodo en el sistema global y entre paréntesis sus grados de libertad. La segunda columna nos identifica que nodos de cada elemento triangular están conectados en el correspondiente nodo del sistema global, y entre paréntesis se especifican los grados de libertad locales. La tercer columna nos enlista las submatrices de rigideces que necesitamos calcular para ensamblar la matriz $[\mathbf{K}]$ del sistema global, y a su derecha, en la columna 4, se especifica las submatrices K_{ij}^l del sistema local necesarias para calcular la correspondiente K_{ij} del sistema global. En todos los casos, los subíndices i y j corresponden a los grados de libertad locales o globales, y el superd índice l corresponde al número de elemento.

Tabla IV.2: Correspondencia entre los coeficientes de la matriz de rigideces global y local.

Correspondencia de los nodos		Correspondencia de las rigideces	
Nodo Global	Nodo Local	K Global	K Local
1(1,2)	nodo 1, elem 1 (1,2)	K_{11}	$K_{11}^1 + K_{11}^2$
		K_{22}	$K_{22}^1 + K_{22}^2$
	nodo 1, elem 2 (1,2)	K_{12}	$K_{12}^1 + K_{12}^2$
2(3,4)	nodo 2, elem 1 (3,4)	K_{33}	K_{33}^1
		K_{44}	K_{44}^1
		K_{34}	K_{34}^1
		K_{55}	K_{55}^2
3(5,6)	nodo 3, elem 2 (5,6)	K_{66}	K_{66}^2
		K_{56}	K_{56}^2
	nodo 2, elem 2 (3,4)	K_{77}	$K_{55}^1 + K_{33}^2$
4(7,8)	nodo 3, elem 1 (5,6)	K_{88}	$K_{66}^1 + K_{44}^2$
		K_{78}	$K_{56}^1 + K_{34}^2$

De forma expandida y descartando los grados de libertad donde $u_i = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} K_{33}^1 & K_{34}^1 & K_{35}^1 & K_{36}^1 \\ K_{43}^1 & K_{44}^1 & K_{45}^1 & K_{46}^1 \\ K_{53}^1 & K_{54}^1 & K_{55}^1 + K_{33}^2 & K_{56}^1 + K_{34}^2 \\ K_{63}^1 & K_{64}^1 & K_{65}^1 + K_{43}^2 & K_{66}^1 + K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix}$$

donde al no haber cargas sobre la placa en la dirección y , $Q_4 = Q_8 = 0$ y

$$Q_3 = Q_7 = \frac{p_0 b}{2} = 800 \text{ lb.}$$

Al determinar los coeficientes de la matriz de rigideces $[K_{ij}]$ con la ecuación (124) obtenemos el sistema

$$10^4 \begin{bmatrix} 93.0 & -36.0 & -16.2 & 14.4 \\ -36.0 & 72.0 & 21.6 & -43.2 \\ -16.2 & 21.6 & 93.0 & 0.0 \\ 14.4 & -43.2 & 0.0 & 72.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 800.0 \\ 0.0 \\ 800.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos los desplazamiento del sistema global

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.291 \\ 1.964 \\ 10.113 \\ -1.080 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \text{ in.}$$

Debemos de considerar que una malla de dos elementos triangulares no produce los resultados más precisos, pero el objetivo del problema es ejemplificar el procedimiento del FEM en un problema de elasticidad en el plano. Refinar la malla incrementaría el número de grados de libertad y mejoraría la aproximación de los resultados. La solución a este problema y una solución alternativa considerando una malla con sólo un elemento rectangular, puede ser encontrada en el libro de J. N. Reddy [88].

Capítulo V

Análisis no lineal

V.1. Introducción al análisis no lineal

Antes de definir el significado de no linealidad es necesario entender que es linealidad. Un sistema lineal es aquel en el que existe una relación lineal entre los datos de entrada y los resultados obtenidos [62]. Pensemos en una estructura a la que se le aplica una carga P y como resultado obtenemos un desplazamiento, d , si la carga se duplica, $2P$, entonces obtendremos como resultado un desplazamiento igual al doble del desplazamiento inicial, $2d$. Las cantidades físicas que representan los sistemas estructurales lineales y la relación entre ellas se pueden ejemplificar con el diagrama de flujo de la Figura 31. De inicio al elemento estructural se le aplica una carga localizada en el sistema global, generando esfuerzos locales. Para que estos esfuerzos se desarrollen es necesario que el elemento cambie de forma produciendo deformaciones locales, cuando estas deformaciones se acumulan en los nodos se producen los desplazamientos en el sistema global. Si todas estas relaciones entre cargas, esfuerzos, deformaciones y desplazamientos permanecen lineales, entonces decimos que el sistema estructural es lineal [62].

Aunque una buena parte de los sistemas tienen un comportamiento no lineal, en algunas ocasiones es necesario aproximarlos mediante sistemas lineales. Si analizamos un edificio o un puente, no se asume que se presenten grandes deformaciones en condiciones de operación estándar, por lo que al resolver estos sistemas como sistemas lineales obtendremos una respuesta prácticamente igual a si resolvemos los mismos como sistemas no lineales. En resumen, podemos afirmar que mientras las deformaciones en un sistema sean pequeñas, en relación al tamaño del sistema, es posible aproximar su solución mediante sistemas lineales, siempre y cuando no se excedan los límites de resistencia elástica del material [62]. En general, la elección del tipo de análisis dependerá de la precisión deseada, las condiciones de frontera, el comportamiento mecánico del material, etc. [62]. A continuación se describen de manera más específica los tipos de no linealidad presentes en problemas mecánicos.



Figura 31: Diagrama de flujo de un sistema lineal.

V.1.1. No linealidad geométrica

El caso de no linealidad geométrica se refiere a cuando no existe una relación lineal entre desplazamientos, rotaciones y deformaciones. Este tipo de no linealidad se presenta principalmente cuando las deformaciones son relativamente grandes. Como ejemplo observemos la viga en voladizo de la Figura 32a en la cual se mide el desplazamiento en el extremo. Inicialmente se aplica un momento C_0 que prácticamente no deforma al elemento, y de forma sucesiva, se aplican los momentos $C_1 > C_0$, $C_2 > C_1$, $C_3 > C_2$, incrementando la flexión y haciendo visible que no existe una relación lineal entre la carga aplicada y el desplazamiento en el extremo de la barra (ver Figura 32b) [62].

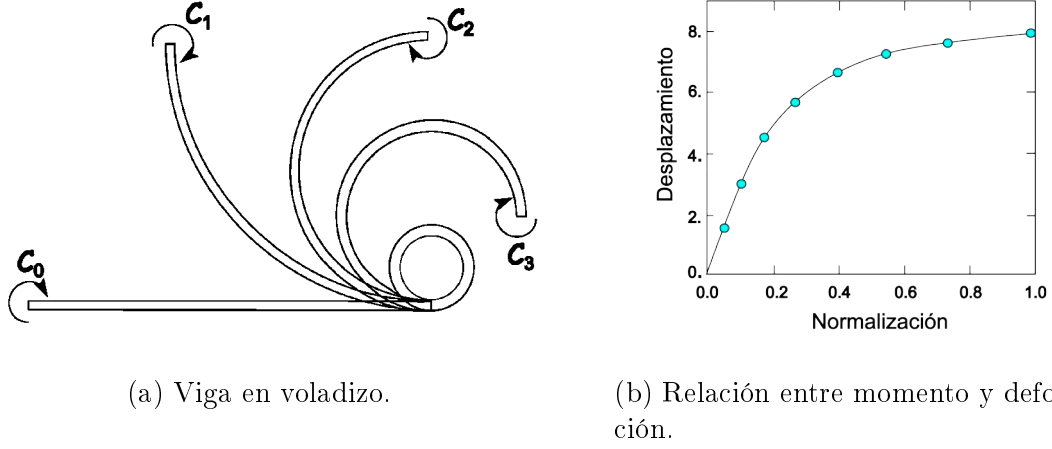


Figura 32: Viga en voladizo con grandes deformaciones (adaptado de Kim [62]).

Para el caso de un elemento tipo barra 1D, la deformación en la dirección longitudinal de la barra se puede representar con la siguiente ecuación

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}, \quad (126)$$

considerando que el comportamiento del elemento es lineal, siendo únicamente válido para desplazamientos pequeños. Esto quiere decir que la posición inicial y final de cualquier partícula es prácticamente la misma. Si los desplazamientos se incrementan la relación se vuelve no lineal y es necesario introducir un segundo término que define la no linealidad. Considere un elemento de longitud inicial dX paralelo al eje x que se deforma hasta alcanzar una longitud ds ,

$$ds^2 = \left(dX + \frac{du(x)}{dX} dX \right)^2. \quad (127)$$

Por definición la deformación de Green es igual a

$$\varepsilon_2(x) = \frac{ds^2 - dX^2}{2dX^2}, \quad (128)$$

sustituyendo ds en la deformación de Green

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{2dX^2} \left[\left(dX + \frac{du(x)}{dX} dX \right)^2 - dX^2 \right], \quad (129)$$

desarrollando obtenemos la deformación para el caso no lineal

$$\varepsilon_2(x) = \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2, \quad (130)$$

si $(du/dx) \ll 1$ entonces, $\varepsilon(x) \approx \varepsilon_2(x)$, y por lo tanto podemos suponer un comportamiento lineal [13].

V.1.2. No linealidad cinemática

La no linealidad cinemática se refiere al caso en el que existe no linealidad en las condiciones de frontera, por lo que éstas dependen directamente de la deformación del sistema. Al momento de resolver un sistema estructural, cuando las condiciones de frontera están en función de los desplazamientos, tanto los desplazamientos como las condiciones mismas se vuelven incógnitas. Principalmente, se tienen dos casos de no linealidad cinemática: el primero se refiere a cuando se conocen los elementos definidos como frontera pero no se tiene un valor asignado a los mismos; el segundo caso se refiere a cuando se desconocen cuales son los elementos de la frontera y también su valor. El ejemplo más común es el de dos cuerpos en contacto, en donde por lo menos uno de ellos sufre deformaciones considerables. Al inicio se tiene una superficie de contacto definida, y conforme la deformación se incrementa, la superficie de contacto también se incrementa y se convierte en incógnita al modificarse las condiciones de frontera. Esto puede observarse en la Figura 33, en donde un cilindro de caucho es comprimido contra una superficie rígida. Inicialmente, el contacto entre los dos cuerpos es en un punto y conforme la deformación se incrementa la superficie de contacto cambia modificando las condiciones de frontera [62].

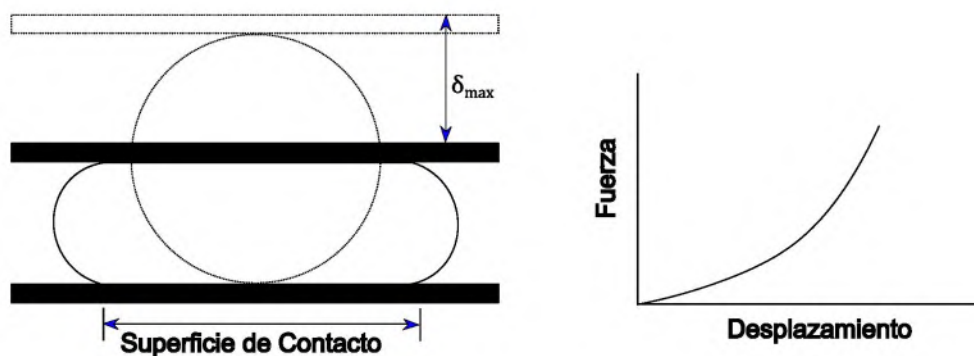


Figura 33: Modelo con no linealidad cinemática (adaptado de Kim [62]).

V.1.3. No linealidad de la fuerza

La no linealidad en la fuerza se presenta cuando las fuerzas aplicadas dependen de la deformación. Sabemos que las fuerzas son vectores, por lo que su magnitud y dirección puede ser dependiente de la deformación de la estructura. La mayor parte de los casos de no linealidad en la fuerza están ligados a casos de no linealidad geométrica. El caso más común se observa en problemas donde intervienen fuerzas de presión de un fluido. La Figura 34 muestra una viga en voladizo con carga de presión uniformemente distribuida. Como la carga está diseñada para seguir la geometría de la viga, cuando las deformaciones son relativamente grandes, la dirección y por tanto las condiciones de carga también cambian, y no existe una

relación lineal entra las deformaciones de la viga y la fuerza aplicada [62]. Otros ejemplos de no linealidad en la fuerza son las bolsas de aire de los vehículos y prácticamente cualquier problema que involucre fluidos y estructuras flexibles.

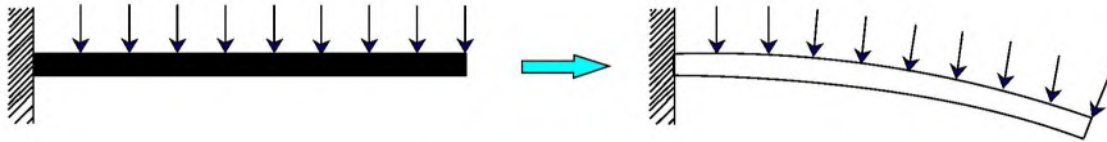


Figura 34: Modelo de viga con grandes deformaciones y carga de presión (adaptado de Kim [62]).

V.1.4. No linealidad del material

Este tipo de no linealidad se refiere al caso en el que la relación esfuerzo-deformación no es lineal. Como se estableció en el capítulo anterior, la ley constitutiva que establece la relación entre esfuerzo σ , y deformación ε es

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (131)$$

Si la matriz elástica $[D]$ está definida como una matriz constante, entonces el comportamiento del material es elástico lineal. Cuando los esfuerzos en el material sobrepasan el límite de fluencia la ecuación (131) no es válida, ya que el material tendrá un comportamiento no lineal. En estos casos la matriz elástica depende del estado actual de deformaciones o del historial de deformaciones. La Figura 35 muestra algunos de los tipos más representativos de no linealidad que pueden presentarse en los materiales. El primer caso corresponde al de un resorte con longitud y sección transversal de área unitaria, donde se observan las diferencias entre comportamiento elástico lineal y no lineal (ver Figura 35a). Otro caso típico de no linealidad es el comportamiento plástico, característico de los metales. El material tiene un comportamiento elástico hasta que se alcanza un cierto límite al que llamamos esfuerzo de fluencia (σ_y), una vez excedido dicho límite, las deformaciones se incrementan sin que necesariamente lo haga el esfuerzo, por lo que al retirar la carga que actúa sobre el elemento existirán deformaciones permanentes (ver Figura 35b). Si se desea modelar materiales como polímeros o vidrio, se puede implementar el modelo viscoelástico, en el que el material tiene un comportamiento que depende del tiempo (ver Figura 35c) [62]. Dado que uno de los objetivos del proyecto es incluir la no linealidad del material (aleación de aluminio), en la siguiente sección se describe a mayor detalle la teoría de la plasticidad, que es la que mejor describe el comportamiento no lineal de los metales.

V.2. Plasticidad

La teoría de la plasticidad nos ayuda a describir el comportamiento de materiales sólidos sujetos a cargas que han producido en ellos deformaciones permanentes (deformaciones

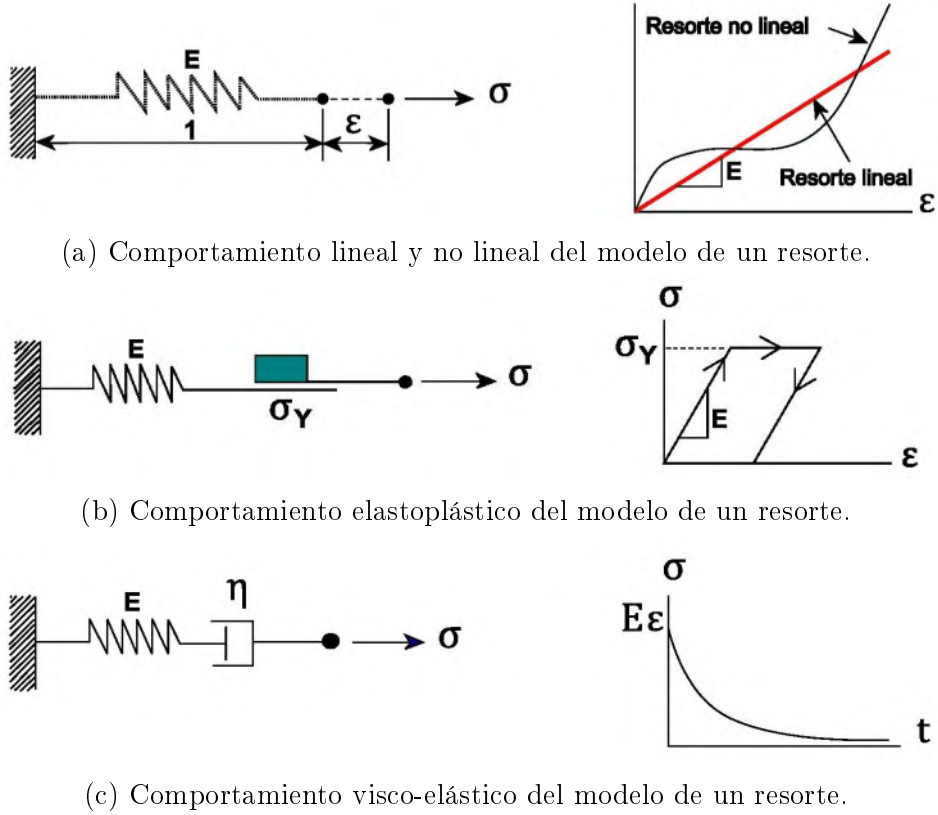


Figura 35: Tipos de no linealidad en el material (adaptado de Kim [62]).

plásticas). Principalmente en los casos en que las deformaciones plásticas no dependen de la velocidad de aplicación de la carga [33]. Los componentes básicos del modelo constitutivo elastoplástico son:

- Representar la deformación elastoplástica como una suma de su componente elástica más su componente plástica.
- Definir una ley constitutiva que relacione esfuerzos y deformaciones.
- Establecer un criterio de fluencia y su correspondiente función de fluencia.
- Definir una relación de flujo plástico.
- Establecer una ley de endurecimiento por deformación.

De acuerdo con el modelo elastoplástico, el tensor de deformaciones, ϵ , es la suma de su componente elástica, ϵ^e , y su componente plástica, ϵ^p [96]. El comportamiento del material está definido por la ley constitutiva, la cual establece la relación entre esfuerzos y deformaciones, y para un material elástico tenemos

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \quad (132)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (133)$$

donde el simbolo, $:$, representa el doble producto punto, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ es el tensor de deformaciones elásticas de segundo orden y $\mathbf{C}$ es el tensor elástico de cuarto orden que se obtiene a partir de

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad (134)$$

o en función de su componente volumétrica y desviadora

$$\mathbf{C} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}_{dev}, \quad (135)$$

donde el simbolo, $\otimes$, representa el producto tensorial, λ y μ son las constantes de Lamé (ecuación (137)), $\mathbf{1}$ es el tensor identidad ($\mathbf{1} = \delta_{ij}$), $\mathbf{I}$ es un tensor unitario simétrico de rango 4, definido como $I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$, con $\mathbf{I}_{dev}$ obtenido a partir de

$$\mathbf{I}_{dev} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (136)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (137)$$

V.2.1. Criterios de fluencia

Para determinar si el comportamiento del material es elástico o no es necesario establecer un criterio de fluencia que debe ser elegido de acuerdo al tipo de material y al modelo numérico que se va a analizar. Los criterios de fluencia más implementados son el criterio de Tresca, Von Mises, Mohr-Coulumb y Drucker-Prager [33]. El criterio de Mohr-Coulumb está diseñado para modelar materiales granulares como suelo, roca y concreto. Este modelo considera que la fluencia que ocurre a nivel macroscópico es el resultado de la fricción entre las partículas del material, y que el comportamiento plástico inicia cuando en cierto plano sobre el elemento se alcanza una combinación crítica entre el esfuerzo cortante y el esfuerzo normal. Por su parte, el modelo de Drucker-Prager es una aproximación suavizada del criterio de Mohr-Coulumb basada en una modificación al modelo de Von Mises en la que se incluye la sensibilidad del material a la presión, lo que es fundamental para modelar materiales granulares. Debido a sus características, diseñadas para modelar materiales granulares, los modelos de Mohr-Coulumb y Drucker-Prager no serán considerados para la presente investigación. A continuación se presenta una descripción más detallada de los modelos de Von Mises y Tresca.

V.2.1.1. Criterio de fluencia de Von Mises

El criterio de fluencia de Von Mises es adecuado para describir el comportamiento de materiales isotrópicos, como lo son algunos metales y aleaciones. De acuerdo con el modelo, las deformaciones plásticas se presentan cuando el esfuerzo equivalente, σ_e , definido en función de la segunda invariante del desviador de esfuerzo, J_2 , excede un cierto límite establecido en función del esfuerzo de fluencia, σ_y . Este esfuerzo equivalente se obtiene a partir de

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S : S} \equiv \sqrt{3J_2}, \quad (138)$$

donde J_2 se determina con

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2, \quad (139)$$

entonces la función de fluencia queda definida como (ver Figura 36)

$$f(\sigma) \equiv \sigma_e^2 - \sigma_y^2 = 3J_2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (140)$$

o reescribiendo,

$$f(\sigma) = \|S\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y = 0, \quad (141)$$

donde S es el desviador de esfuerzos (ecuación (142)) que depende del esfuerzo promedio ($\sigma_m = \text{tr}(\sigma)/3$), y $\|S\| = (S : S)^{\frac{1}{2}}$ es la norma del desviador de esfuerzos

$$S = \sigma - \sigma_m I. \quad (142)$$

V.2.1.2. Criterio de fluencia de Tresca

Otro de los criterios más utilizados para modelar el comportamiento de metales isotrópicos es el de *esfuerzo cortante máximo* (*Tresca*). El criterio se basa en el esfuerzo cortante máximo definido por el radio máximo obtenido al graficar el círculo de Mohr,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (143)$$

donde σ_1 , σ_2 y σ_3 representan los esfuerzos principales, ordenados de forma que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. El criterio de Tresca considera que la plasticidad inicia cuando el valor de τ_{max} iguala al esfuerzo cortante de fluencia (τ_y) de un elemento sometido a la prueba de tensión

$$\tau_{max} \leq \tau_y \quad \left(= \frac{1}{2} \sigma_y \right). \quad (144)$$

El criterio de fluencia queda definido por la función de fluencia $f(\sigma)$

$$f(\sigma) = \tau_{max} - \tau_y = 0. \quad (145)$$

La Figura 36 muestra la representación gráfica de las superficie de fluencia para los modelos de Tresca y de Von Mises. Se puede observar que para el caso de esfuerzo uniaxial ambas metodologías convergen a un mismo límite de fluencia, y también para el caso donde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_Y$.

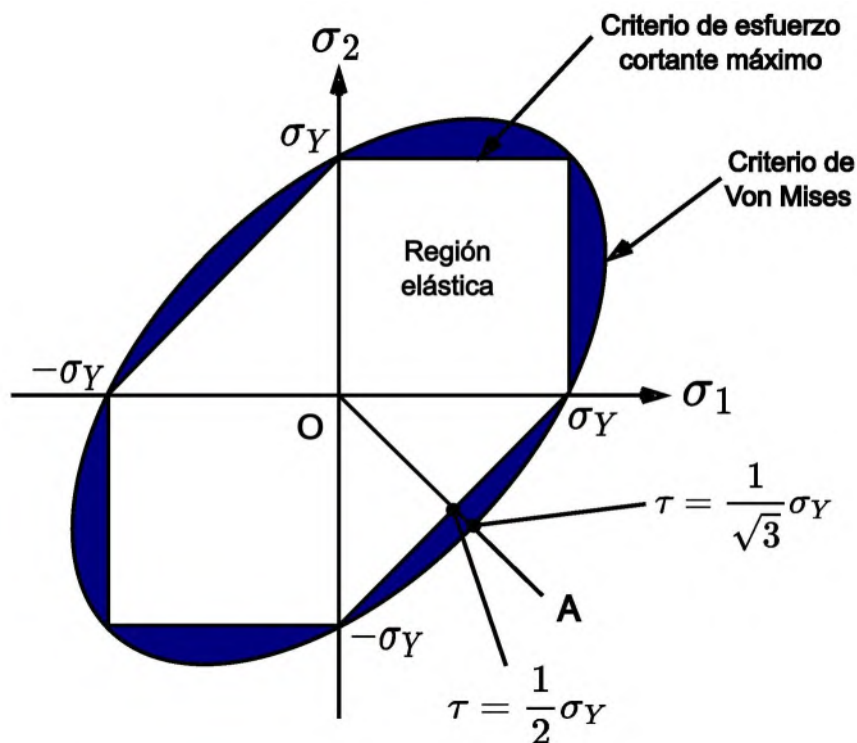


Figura 36: Criterios de fluencia.

V.2.2. Modelos de endurecimiento

Los modelos de endurecimiento determinan el comportamiento del material después de que éste excede su límite de fluencia y se presentan deformaciones permanentes. Dependiendo del tipo de material su comportamiento plástico se puede englobar en tres casos definidos en función del módulo plástico H que representa la pendiente de la curva esfuerzo-deformación (ver Figura 37):

- El esfuerzo se incrementa de manera proporcional a las deformaciones plásticas (endurecimiento por deformación, $H > 0$).
- El esfuerzo permanece constante sin importar cuanto crezcan las deformaciones plásticas (plasticidad perfecta, $H = 0$).
- El esfuerzo disminuye conforme las deformaciones plásticas se incrementan (ablandamiento por deformación, $H < 0$).

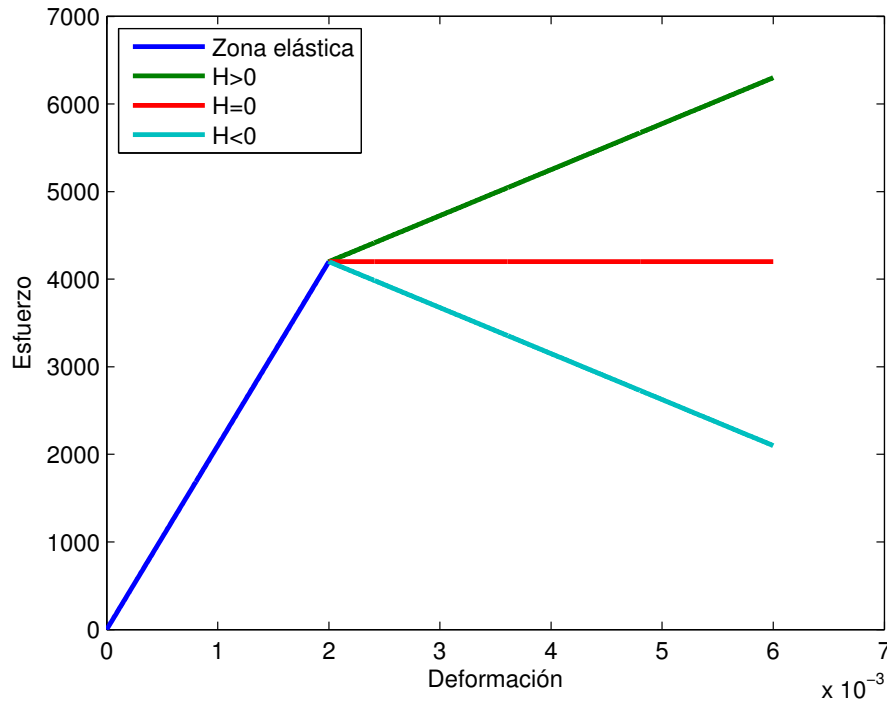


Figura 37: Tipos de comportamiento plástico.

El caso de ablandamiento por deformación se presenta principalmente en materiales como polímeros. Por su parte, el modelo de plasticidad perfecta es una aproximación al modelo de endurecimiento por deformación y puede ser utilizado cuando el incremento del esfuerzo debido a las deformaciones plásticas no es considerable. El modelo que mejor representa el comportamiento plástico de metales y aleaciones es el de endurecimiento por deformación, que puede ser descrito utilizando un modelo de endurecimiento isotrópico, endurecimiento cinemático o endurecimiento combinado.

V.2.2.1. Modelo de endurecimiento isotrópico

En el modelo de endurecimiento isotrópico el incremento en el esfuerzo depende directamente de la acumulación de las deformaciones plásticas, y éste se determina con

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + H e_p, \quad (146)$$

donde σ_y^0 es el esfuerzo de fluencia, e_p es la deformación plástica acumulada y H es el modulo plástico que relaciona la razón de cambio entre esfuerzos y deformaciones plásticas

$$H = \frac{\Delta \sigma}{\Delta e_p}. \quad (147)$$

Si H es constante, entonces se presentará uno de los casos descritos anteriormente (Figura 37). En resumen en el modelo de endurecimiento isotrópico la superficie de fluencia crece conforme la deformación plástica e_p se incrementa (Figura 38).

V.2.2.2. Modelo de endurecimiento cinemático

A diferencia del modelo de endurecimiento isotrópico, en el modelo cinemático la superficie de fluencia no cambia pero la ubicación de su centroide sí. Este desplazamiento en la superficie de fluencia ($\Delta\alpha$) se determina con

$$\Delta\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} H \Delta e_p \frac{\eta}{\|\eta\|}, \quad (148)$$

donde Δe_p es el incremento en la deformación plástica, η se determina en función del desviador de esfuerzos S y la ubicación actual del centroide de la superficie α . La principal diferencia en el comportamiento de ambos modelos ocurre cuando el material es sometido a ciclos de carga, ya que el modelo cinemático sí considera el efecto de degradación de Bauschinger y el isotrópico no (Figura 38),

$$\eta = S - \alpha, \quad (149)$$

con lo que la función de fluencia queda definida como

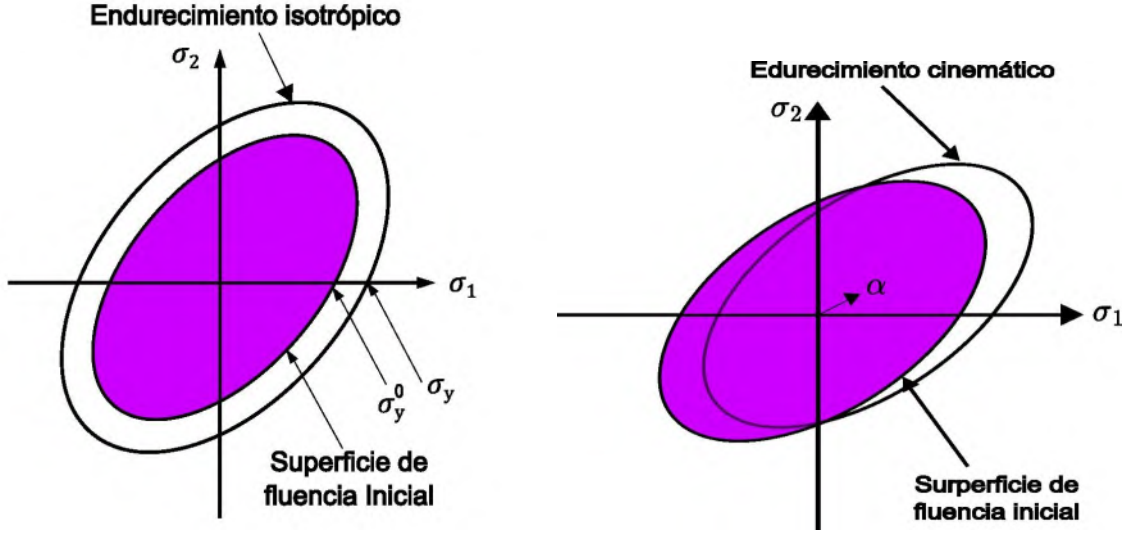
$$\|\eta\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y = 0. \quad (150)$$

V.2.2.3. Modelo de endurecimiento combinado

Mientras que el modelo isotrópico incrementa el tamaño de la superficie de fluencia y el modelo cinemático modifica la ubicación del centroide de la superficie, algunos materiales muestran un comportamiento combinado, en el que la superficie de fluencia se incrementa debido a las deformaciones plásticas, pero cuando la carga cambia de dirección el material fluye para un esfuerzo menor. En el caso de endurecimiento combinado se tiene una combinación de los modelos anteriores, donde se incorpora un parámetro β que controla la influencia de uno u otro modelo. Si $\beta \neq 0$ y $\beta \neq 1$ tenemos endurecimiento combinado, si $\beta = 1$ se obtiene endurecimiento cinemático, y para $\beta = 0$ obtenemos el modelo isotrópico

$$\|\eta\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_y^0 + (1 - \beta) H e_p] = 0 \quad \beta \in [0, 1], \quad (151)$$

$$\Delta\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \beta H \Delta e_p \frac{\eta}{\|\eta\|}. \quad (152)$$



(a) Modelo de endurecimiento isotrópico. (b) Modelo de endurecimiento cinemático.

Figura 38: Modelos de endurecimiento.

V.2.3. Flujo plástico

La función de flujo plástico define la evolución de las deformaciones plásticas. En el caso de análisis multidimensional $\mathbf{e}^p$ es un tensor y se debe definir su magnitud y dirección. De manera general la función de flujo plástico es de la forma

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), \quad (153)$$

donde $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\alpha}, e_p)$ representa las variables plásticas, γ es el parámetro de consistencia plástica, y la función $\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ depende del potencial plástico. Reescribiendo,

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \mathbf{N}, \quad (154)$$

con $\mathbf{N}$ como el desviador del tensor unitario normal a la superficie de fluencia, determinado a partir de

$$\mathbf{N} = \frac{\boldsymbol{\eta}^{tr}}{\|\boldsymbol{\eta}^{tr}\|}, \quad (155)$$

donde $\boldsymbol{\eta}^{tr}$ es el esfuerzo de prueba, que se utiliza para evaluar la función de fluencia y determinar si el material presenta un comportamiento plástico

$$\boldsymbol{\eta}^{tr} = S + 2\mu\epsilon_d, \quad (156)$$

tomando ϵ_d como el desviador del tensor de deformaciones, el cual se determina a partir del tensor de variación de deformaciones $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ y la deformación promedio $\epsilon_m = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})/3$,

$$\epsilon_d = \Delta\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_m \mathbf{I}. \quad (157)$$

Utilizando el esfuerzo de prueba se evalúa si se excede el límite elástico o no. Si el material permanece en el rango elástico el problema se resuelve con un sistema de ecuaciones lineales y no es necesario calcular las variables plásticas. En caso contrario se debe determinar el flujo plástico γ ,

$$\gamma = \frac{2\mu N : \Delta\varepsilon}{2\mu + \frac{2}{3}H}. \quad (158)$$

Una vez determinado el flujo plástico se determina el tensor de esfuerzos σ para el paso $n + 1$ con

$${}^{n+1}\sigma = {}^n\sigma + D : \Delta\varepsilon - 2\mu\gamma N, \quad (159)$$

y posteriormente se determina el desplazamiento del centroide de la superficie de fluencia α , y la deformación plástica e_p para el paso $n + 1$

$${}^{n+1}\alpha = {}^n\alpha + \frac{2}{3}\beta H\gamma N, \quad (160)$$

$${}^{n+1}e_p = {}^ne_p + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma. \quad (161)$$

El problema del flujo plástico se puede describir como uno de optimización con restricciones que satisface las condiciones necesarias de primer orden mejor conocidas como condiciones de *Karush Kuhn Tucker* (KKT), que para problemas mecánicos también se les conoce como condiciones de carga y descarga. Las condiciones KKT establecen:

1. Estacionariedad (Ley de flujo normal). El flujo plástico $\dot{\varepsilon}^p$, actúa en dirección normal a la superficie de fluencia.
2. Admisibilidad (Condición de fluencia). El estado de esfuerzos debe ser admisible, esto quiere decir que $f(\sigma) \leq 0$.
3. No negatividad del multiplicador (tasa de plastificación). El parámetro de consistencia plástica debe garantizar un incremento irreversible, esto es $\gamma \geq 0$.
4. Complementariedad (consistencia). Se debe garantizar que si el material fluye, lo hace exactamente sobre la superficie de fluencia $\gamma f(\sigma) = 0$.

Resumiendo, si el material tiene un comportamiento elástico (no hay deformaciones plásticas) $\gamma = 0$, lo que implica que el material permanece dentro de la superficie de fluencia $f(\sigma) < 0$. Si el material tiene un comportamiento plástico entonces, $\gamma > 0$ y $f(\sigma) = 0$, con lo cual se satisface las condiciones KKT [14, 71, 72, 74, 83]

$$\gamma \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \gamma f(\sigma) = 0. \quad (162)$$

Para describir como funciona el modelo plástico consideremos el caso de una barra en tensión axial donde conocemos que para un tiempo determinado t_n el esfuerzo axial es $\sigma_{11} = 300 \text{ MPa}$. Inicialmente el comportamiento del material era elástico. Para un tiempo

t_{n+1} se presenta un incremento en la deformación $\Delta\varepsilon_{11} = 0.1$. El material tiene las siguientes propiedades: $E = 2.4 \text{ GPa}$, $\nu = 0.2$, $\sigma_Y = 300 \text{ MPa}$, $\mu = 1.0 \text{ GPa}$, $H = 100 \text{ MPa}$. Considerando un modelo de endurecimiento combinado ($\beta = 0.3$) calcularemos el esfuerzo y las variables plásticas [62]. El estado de esfuerzos inicial y su desviador son

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$

con

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 100 \text{ MPa}.$$

El tensor de deformaciones, considerando la influencia del coeficiente de Poisson ($\Delta\varepsilon_{11} = 0.1$, $\Delta\varepsilon_{22} = \Delta\varepsilon_{33} = -\nu(0.1)$), con su correspondiente desviador quedan definidos como

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\varepsilon_m \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 & 0 \\ 0 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{bmatrix},$$

con

$$\Delta\varepsilon_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = 0.02.$$

Dado que el material inicialmente tiene un comportamiento elástico, entonces ${}^n\alpha = 0$, ${}^n e_p = 0$, ${}^n\eta = {}^n S - {}^n\alpha = {}^n S$. Calculando el esfuerzo de prueba

$${}^{tr}\eta = {}^{tr}S = {}^n S + 2\mu\varepsilon_d = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} + 2(1000) \begin{bmatrix} 0.08 & 0 & 0 \\ 0 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{bmatrix}$$

$${}^{tr}\eta = \begin{bmatrix} 360 & 0 & 0 \\ 0 & -180 & 0 \\ 0 & 0 & -180 \end{bmatrix}$$

con norma $\|{}^{tr}\eta\| = 180\sqrt{6} \text{ MPa}$, con lo que podemos determinar el tensor unitario

$$\mathbf{N} = \frac{{}^{tr}\boldsymbol{\eta}}{\|{}^{tr}\boldsymbol{\eta}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora utilizamos el esfuerzo de prueba para evaluar la función de fluencia $f(^{tr}\eta, \sigma_Y^0)$ y determinar si el elemento permanece en el rango elástico

$$f(^{tr}\eta, \sigma_Y^0) = ||^{tr}\eta|| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y^0 = 180\sqrt{6} - \sqrt{\frac{2}{3}}(300) = 195.96 > 0,$$

lo que implica que se presentarán deformaciones plásticas y es necesario determinar el parámetro de consistencia plástica ($\gamma = 0.0948$, ecuación (158)) y actualizar el tensor de esfuerzos ($^{n+1}\sigma$, ecuación (159)), el centroide de la superficie de fluencia ($^{n+1}\alpha$, ecuación (160)), y la deformación plástica ($^{n+1}e_p$, ecuación (161))

$$^{n+1}\sigma = ^n\sigma + D : \Delta\varepsilon - 2\mu\gamma N,$$

$$^{n+1}\sigma = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 154.808 & 0 & 0 \\ 0 & -74.404 & 0 \\ 0 & 0 & -74.404 \end{bmatrix},$$

$$^{n+1}\sigma = \begin{bmatrix} 385.2 & 0 & 0 \\ 0 & 77.4 & 0 \\ 0 & 0 & 77.4 \end{bmatrix},$$

$$^{n+1}\alpha = ^n\alpha + \frac{2}{3}\beta H\gamma N,$$

$$^{n+1}\alpha = 0 + \frac{2}{3}(0.3)(100)(0.0948)\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.548 & 0 & 0 \\ 0 & -0.774 & 0 \\ 0 & 0 & -0.774 \end{bmatrix},$$

$$^{n+1}e_p = ^ne_p + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma,$$

$$^{n+1}e_p = 0 + \sqrt{\frac{2}{3}}(0.0948) = 0.0774,$$

como se puede observar debido a las deformaciones plásticas el tensor de esfuerzos ya no es uniaxial.

V.3. FEM no lineal

Dependiendo del tipo de no linealidad el procedimiento de análisis debe ser ajustado. En este caso se considerará no linealidad en el material. De manera general, en un análisis estructural, las incógnitas son los desplazamientos en los nodos y a diferencia de cuando se tiene un comportamiento lineal, en este caso el procedimiento nos lleva a un sistema de ecuaciones no lineales. Para resolver estos sistemas es necesario implementar un método iterativo en los que el paso más importante es determinar el incremento del desplazamiento en cada iteración para actualizar el desplazamiento total hasta lograr la convergencia. Para

lograr la convergencia es necesario garantizar el equilibrio reduciendo la función residual a una tolerancia aceptable. Las fuerzas externas aplicadas en los nodos deben ser iguales pero en sentido opuesto a las fuerzas internas generadas por los esfuerzos producidos en el material. La implementación del FEM en sistemas no lineales se puede resumir de manera somera en los siguientes pasos:

1. Inicia los datos para el primer valor de la carga. Establece $\Delta u_0 = 0$.
2. Calcula el nuevo vector de fuerzas externas $f_{ext}^{t+\Delta t}$.
3. Calcula la matriz de rigideces $[\mathbf{K}]$, también conocida como matriz de rigideces tangente.
4. Hacer el ajuste tomando en cuenta los desplazamientos prescritos, si existiera alguno.
5. Resolver el sistema lineal $[\mathbf{K}]_j du_{j+1} = f_{ext}^{t+\Delta t} - f_{int,j}$.
6. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones para du_{j+1} , actualizamos el vector de incremento de desplazamientos para cada punto de integración, $\Delta u_{j+1} = \Delta u_j + du_{j+1}$.
7. Calcular el vector de incremento de deformaciones $\Delta \varepsilon_{i,j+1}$ para cada punto de integración a partir de Δu_{j+1} .
8. Calcular el vector de incremento de esfuerzo $\Delta \sigma_{i,j+1}$ para cada punto de integración a partir de $\Delta \varepsilon_{i,j+1}$.
9. Actualizar el valor del esfuerzo en cada punto de integración, $\sigma_{i,j+1} = \sigma_{i,j} + \Delta \sigma_{i,j+1}$.
10. Actualizar las fuerzas internas $f_{int,j+1}(\sigma_{i,j+1})$.
11. Revisar convergencia. Si $\|f_{ext}^{t+\Delta t} - f_{int,j}\| < \delta$, donde δ representa la tolerancia especificada, debemos continuar con el siguiente incremento de carga. En caso de que no haya convergencia es necesario repetir el procedimiento a partir del paso 3.

V.3.1. Método de Newton-Raphson

Newton-Raphson es uno de los métodos más utilizados para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. En general, gran parte de los métodos de solución funcionan proponiendo una estimación inicial $\mathbf{u}^0$ y determinando un incremento $\Delta \mathbf{u}$ para actualizar la aproximación, $\mathbf{u}^0 + \Delta \mathbf{u}$, de manera que se acerque a la solución. El sistema de ecuaciones no lineales se resuelve aproximándolo mediante un sistema de ecuaciones lineales con el que se determina el incremento. El proceso se repite hasta que se obtiene una solución satisfactoria, entendiendo por esto, que no siempre se obtendrá la solución exacta, y en un gran número de casos se tomará como solución aquella establecida mediante una tolerancia aceptable [62]. Supongamos que proponemos una solución $\mathbf{u}^i$ para la iteración i , la iteración $i + 1$ puede ser aproximada utilizando una aproximación de primer orden de la serie de Taylor

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}^{i+1}) \approx \mathbf{P}(\mathbf{u}^i) + \mathbf{K}_T^i(\mathbf{u}^i) \cdot \Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{f} \quad (163)$$

donde, $\mathbf{K}_T^i(\mathbf{u}^i) \equiv (\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}})^i$ es la matriz Jacobiana, también conocida en problemas de análisis estructural como matriz de rigideces, o matriz de rigidez tangente. Ahora si reescribimos la ecuación (163) obtenemos

$$\mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{u}^i). \quad (164)$$

La ecuación anterior representa un sistema de ecuaciones no lineales dado que $\mathbf{K}_T^i$ depende de $\mathbf{u}^i$. No debemos perder de vista que al resolver el sistema de ecuaciones lo que se obtiene es un incremento, $\Delta \mathbf{u}^i$, a la solución $\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u}^i$, y que el lado derecho de la ecuación (164) representa la diferencia entre las fuerzas aplicadas y las fuerzas internas, mejor conocido como residual $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{R}^{i+1} = \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{u}^{i+1}). \quad (165)$$

En la mayoría de los casos no se obtendrá la respuesta exacta del sistema, por lo que siempre es necesario establecer una tolerancia que permita que la solución, $\mathbf{u}^{i+1}$, sea aceptada como solución cuando $\mathbf{R}^{i+1}$ sea menor al valor establecido. Para esto se establece un criterio de convergencia normalizado definido por

$$conv = \frac{\sum_{j=1}^n (R_j^{i+1})^2}{1 + \sum_{j=1}^n (f_j)^2}, \quad (166)$$

y la solución se obtiene cuando el parámetro de convergencia, $conv$, se vuelve menor que la tolerancia establecida. En problemas de análisis estructural, dada la relación entre fuerzas, esfuerzos y desplazamientos, también se puede utilizar un parámetro de convergencia que depende de los desplazamientos,

$$conv = \frac{\sum_{j=1}^n (\Delta u_j^{i+1})^2}{1 + \sum_{j=1}^n (\Delta u_j^0)^2}. \quad (167)$$

La Figura 39 muestra la representación gráfica del método de Newton-Raphson, en donde se observa que para llegar a la solución desde un desplazamiento u^i hasta un desplazamiento u^n se requiere un total de n iteraciones, en donde en cada una de ellas es necesario calcular la matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T^i$, la cual representa la pendiente de la recta tangente para el caso de sistemas con un grado de libertad.

Una de las complicaciones del método de Newton-Raphson es la necesidad de recalcular la matriz de rigidez tangente (o matriz Jacobiana) en cada iteración y posteriormente resolver el sistema de ecuaciones para el incremento del desplazamiento. Una alternativa es utilizar el método Newton-Raphson modificado en donde la matriz de rigidez tangente permanece constante en cada iteración o por un número determinado de ellas, y dado que el cálculo de la matriz Jacobiana es uno de los procesos más costosos del método, el costo computacional se reduce. La Figura 40 muestra la representación gráfica del método Newton-Raphson modificado. A diferencia de la Figura 39 se observa que la pendiente de la recta tangente, $\mathbf{K}_T^i$, permanece constante en cada iteración [62]. La Figura 41 muestra el diagrama de flujo del método de Newton-Raphson.

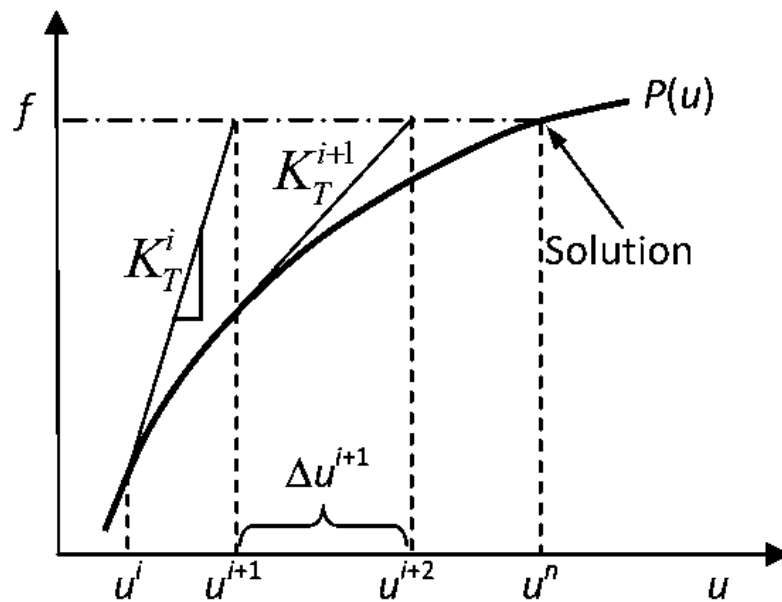


Figura 39: Método de Newton-Raphson (Tomado de Kim [62]).

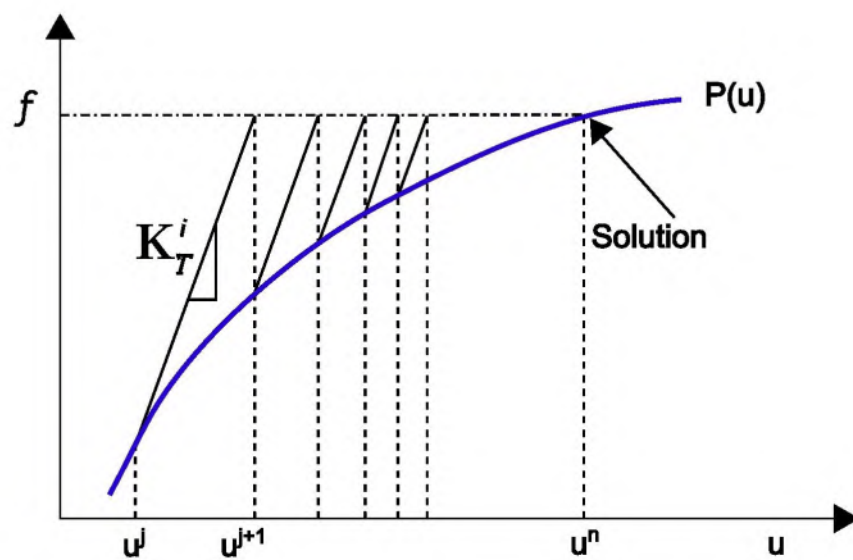


Figura 40: Método de Newton-Raphson modificado (Adaptado de Kim [62]).

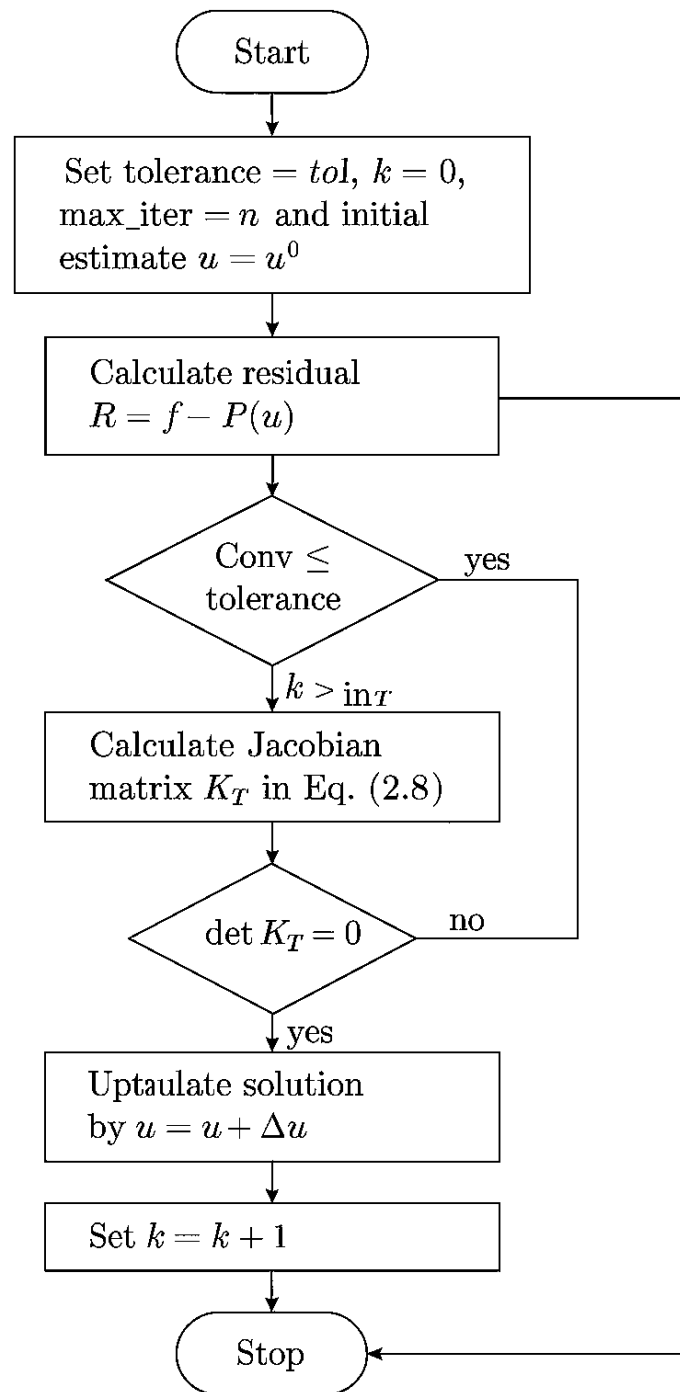


Figura 41: Diagrama de flujo del método de Newton-Raphson [62].

Capítulo VI

Análisis estructural del álabe de una turbina Francis 99

A continuación se presenta la descripción de las características físicas y mecánicas de los modelos numéricos desarrollados en la presente investigación. Inicialmente se describen los materiales implementados, características geométricas, condiciones de frontera, y todos los criterios y parámetros que se consideraron en los análisis. En la segunda parte del capítulo se muestran los resultados del análisis CFD y del análisis estructural de cada modelo.

VI.1. Definición del modelo numérico

Se construyeron tres modelos numéricos para el análisis estructural:

1. Perfil hidrodinámico construido a partir de la extrusión de la sección transversal del álabe de la turbina Francis 99. Modelado usando aleación aluminio 5456 cuyas propiedades están definidas en la Tabla VI.1.
2. Perfil parametrizado a partir del álabe de la turbina Francis 99. Modelado usando aleación aluminio 5456 cuyas propiedades están definidas en la Tabla VI.1.
3. Perfil parametrizado a partir del álabe de la turbina Francis 99. Modelado usando aleación aluminio 5456 cuyas propiedades están definidas en la Tabla VI.2.

En las secciones subsecuentes se describen las características específicas de cada modelo.

VI.1.1. Materiales

Para el modelo computacional se consideró la geometría parametrizada del álabe de una turbina Francis 99 hecha de aleación de aluminio, con designación técnica *Aluminium 5456*. Las características mecánicas del material fueron tomadas de Elsherif *et al.* [38] y se describen en la tabla VI.1.

Tabla VI.1: Propiedades mecánicas del material.

Propiedad	Magnitud	Unidades
Módulo de elasticidad (E)	71000	MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0.33	
Densidad (ρ)	2770	kg/m^3
Esfuerzo de fluencia (σ_y)	280	MPa
Esfuerzo último de tensión (σ_{tu})	310	MPa
Módulo volumétrico (k)	69608	MPa
Módulo de rigidez al corte (G)	26692	MPa
Esfuerzo último (σ_u)	669	MPa

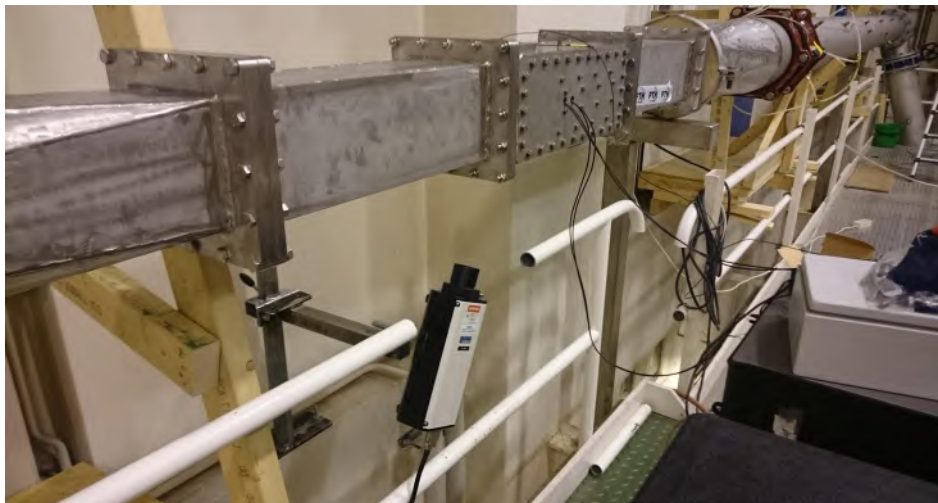
Los valores de la tabla VI.1 fueron implementados para los primeros modelos de prueba. Posterior a esto, se realizó la prueba de tracción en dos probetas de aleación de aluminio 5456 con la finalidad de determinar de manera más precisa algunas de las propiedades mecánicas del material. Los resultados obtenidos se presentan en la tabla VI.2 (ver Apéndice A).

Tabla VI.2: Actualización de propiedades mecánicas del material, obtenidas con la prueba de tracción.

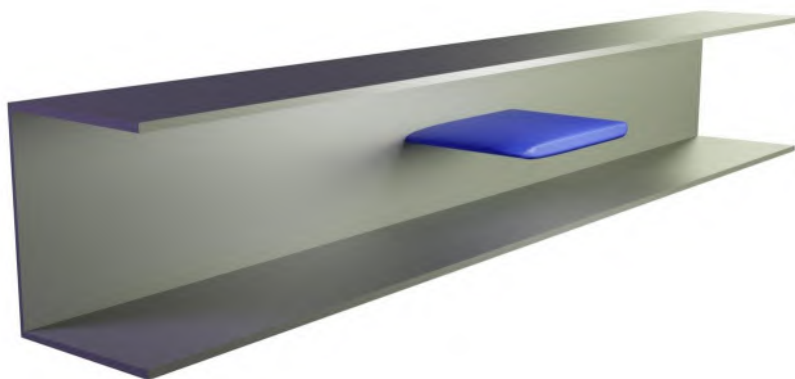
Propiedad	Magnitud	Unidades
Modulo de elasticidad (E)	70000	MPa
Esfuerzo de fluencia (σ_y)	248	MPa
Esfuerzo último de tensión (σ_u)	377	MPa

VI.1.2. Caso de prueba

El primer caso de prueba consiste en la elaboración de un modelo computacional que intenta reproducir la prueba de laboratorio nombrada *Hydrofoil Test Case* (HTC) desarrollada por el Centro Hidroeléctrico de Noruega (NVKS). El experimento consiste en colocar el álabe en una tubería cerrada de sección transversal cuadrada con dimensiones interiores de $0.15\text{ m} \times 0.15\text{ m}$ (Figura 42a). El álabe incluido en el HTC tiene una geometría similar a la de los álabes divisores de la turbina Francis 99, con un espesor de 0.012 m y longitud de 0.25 m. En cuanto a las condiciones de frontera del álabe, éste está empotrado en las paredes laterales de la tubería (Figura 42b). Durante la prueba, la tubería es inundada con agua y posteriormente la velocidad del fluido es incrementada de manera lineal de 0 a 25 m/s en intervalos de 5 m/s, de forma que el flujo impacta axialmente el borde de ataque del álabe en todo momento [1].



(a) Tubería para la simulación de la prueba (Tomado de [1]).



(b) Esquema del corte longitudinal de la tubería.

Figura 42: Experimento, Hydrofoil Test Case.

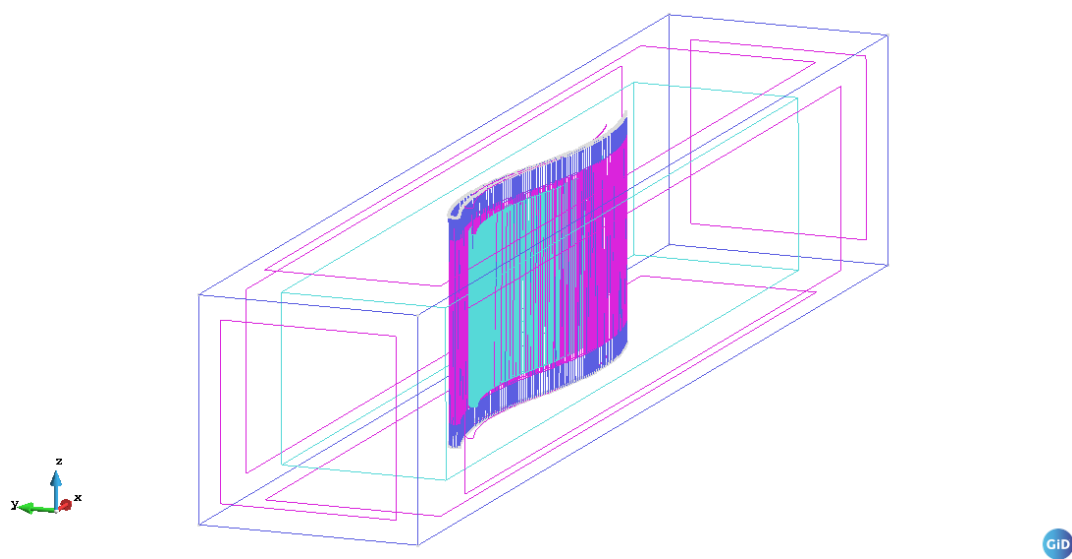
Para el modelo numérico se tomaron las mismas condiciones de velocidad de flujo que las de la prueba experimental. El experimento inicia con el flujo en reposo (velocidad inicial igual a 0 m/s) y la velocidad del flujo se incrementa linealmente hasta alcanzar una velocidad final de 25 m/s . El objetivo del modelo CFD es determinar la distribución de presiones máximas sobre la superficie del álabe. Debido a que las dimensiones del álabe no corresponden con las de la tubería de la prueba experimental, las dimensiones de la tubería del modelo computacional fueron ajustadas en función de la geometría parametrizada del álabe. Inicialmente, se consideraron dos casos de estudio cuyas características se presentan a continuación:

- Modelo 1. Álabe con sección transversal constante generado a partir de una extrusión de la sección transversal del álabe principal de la turbina Francis 99. Para este caso, la tubería se modeló con una longitud de 0.80 m y sección transversal cuadrada de $0.15 \text{ m} \times 0.15 \text{ m}$ (Figura 43a). Esta geometría es similar a la propuesta en el experimento original.

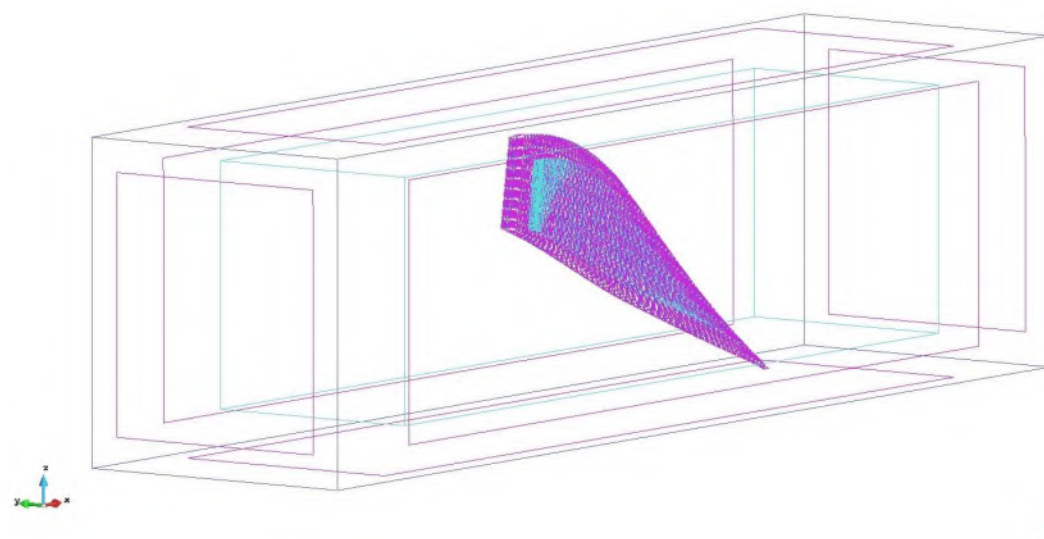
- Modelo 2. Álabes de una turbina Francis 99 cuya geometría fue creada mediante la metodología de parametrización descrita en el capítulo III. Debido a la complejidad de la geometría del álabes y a la diferencia en las dimensiones con respecto a las del modelo experimental, las dimensiones de la tubería fueron ajustadas a 0.80 m de longitud, y sección transversal rectangular de $0.20\text{ m} \times 0.22\text{ m}$ (Figura 43b).

El análisis CFD se realizó implementando el software *KratosMultiphysics*® desarrollado por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE). Kratos es un programa multifísica con la capacidad de realizar análisis de dinámica de fluidos, análisis estructurales, análisis térmicos, análisis de interacción fluido-estructura, etc. El software está enfocado en la implementación de métodos numéricos para la solución de problemas en diferentes ramas de la ingeniería. Para ambos modelos se implementó el módulo de flujo 3D para generar la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando el enfoque monolítico en conjunto con el método de Bossak [107, 10, 52, 12]. Para la turbulencia se usó el modelo de simulación de grandes remolinos (LES) [111, 27, 28, 29]. Como interprete para el pre y pos proceso se utilizó GiD Simulation v16.0.3 desarrollado por CIMNE [90]. Dado que el volumen de ambos modelos es diferente se obtuvieron discretizaciones distintas. El modelo 1 quedó discretizado en 22060 elementos triangulares y 54032 tetraedros, y el modelo 2 en 12026 elementos triangulares y 55950 tetraedros. Para ambos casos se utilizó el software GiD Simulation.

La Figura 44 muestra las condiciones de frontera del modelo numérico. En ambos casos se tomaron condiciones de no deslizamiento (No-slip) en las superficies de las paredes de la tubería y la superficie del álabes, lo que equivale a considerar que el fluido no se desliza sobre la pared de la tubería ni sobre el álabes, igualando la velocidad del fluido a la de las superficies de contacto ($velocidad = 0$) [106, 77, 79]. En ambos modelos la tubería está inicialmente vacía, el objetivo es hacer pasar el fluido a través de la misma, por lo que se define una de las caras laterales como entrada y la otra como salida. Para estos modelos la entrada del flujo se encuentra en la cara izquierda y la salida en la cara derecha de la tubería, y al igual que en el HTC la velocidad del flujo se incrementa de manera lineal de 0 m/s a 25 m/s. Adicionalmente, en la salida de la tubería se establece una condición inicial de presión igual a cero [80, 42, 79].

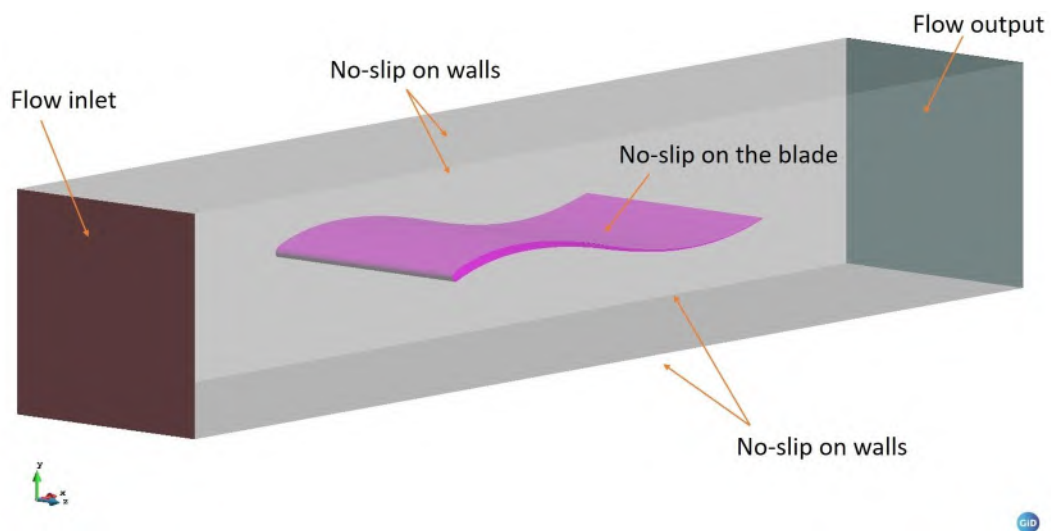


(a) Modelo 1.

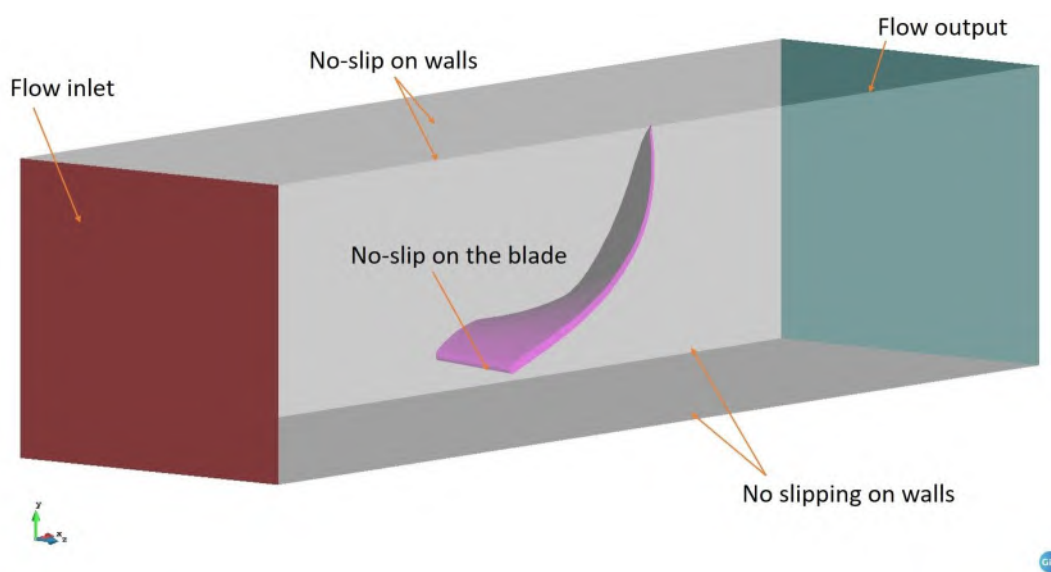


(b) Modelo 2.

Figura 43: Modelos para el análisis CFD.



(a) Tubería modelo 1.



(b) Tubería modelo 2.

Figura 44: Condiciones de frontera del modelo CFD.

VI.1.3. Modelo FSI

El modelo de interacción fluido-estructura se diseñó como un caso de estudio adicional para mejorar los resultados obtenidos del primer modelo de prueba (modelo 2). Las propiedades mecánicas se tomaron de la Tabla VI.1 actualizando los correspondientes valores obtenidos de la prueba de laboratorio (Tabla VI.2). Al igual que en los modelos anteriores, el modelo FSI se analizó utilizando *Kratos*. El problema se resuelve por etapas, ya que se tienen dos ecuaciones gobernantes: la ecuación gobernante del problema de dinámica de fluidos, ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles (ecuaciones (168) y (169)), y la ecuación gobernante del problema estructural (ecuación (111)). Inicialmente se determina la velocidad y la presión resolviendo la ecuación de Navier-Stokes utilizando el método *ALE* (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian method* [95, 18]), una vez obtenidas las presiones (P_i) y las componentes de la velocidad para el primer intervalo de tiempo éstas se utilizan para resolver el problema mecánico, las presiones se utilizan como carga y con ello se determinan los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos. Al terminar esta etapa el tiempo se incrementa y se vuelve a repetir el proceso. Esta descripción de la metodología es muy general ya que cada paso del tiempo implica realizar n iteraciones

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (168)$$

y su correspondiente ecuación de continuidad para fluidos incompresibles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (169)$$

en donde $\mathbf{V}$ es el vector de velocidad, y u , v , w son sus componentes, P es la presión, ρ es la densidad, g es la gravedad y μ es la viscosidad cinemática.

Respecto a las condiciones de frontera, se consideraron las mismas que en la prueba HTC. Las caras laterales del álabe están empotradas en las paredes de la tubería, además, se asignaron condiciones de no deslizamiento tanto en las paredes de la tubería como en las superficies del álabe. En cuanto a las condiciones iniciales, se definió una presión de entrada y salida igual a cero, y se estableció una función de velocidad para hacerla variar linealmente de 0 m/s a 12.33 m/s (velocidad de operación estándar, ver Tabla II.2).

VI.2. Resultados del análisis

VI.2.1. Resultados del análisis CFD, caso de prueba

De acuerdo con los resultados del análisis CFD se observa que las presiones máximas y mínimas se generan en el borde de ataque (LE) y borde de salida (TE) según lo esperado. Del modelo 1 podemos observar que las trayectorias de las partículas del flujo sufren cambios de velocidad y dirección generados por la geometría del álabe, produciendo incrementos en la velocidad del fluido en la cara de succión del álabe (Figura 45a). Bajo las mismas condiciones el modelo 2 exhibe un comportamiento diferente, las presiones extremas se siguen generando en LE y TE, sin embargo, como era de esperarse las trayectorias de las partículas

del flujo se ven fuertemente alteradas por la geometría del perfil produciéndose cambios bruscos de dirección en la zona media del álabe, los cuales están directamente relacionados con la geometría menos hidrodinámica del perfil (Figura 45b). En la Tabla VI.3 podemos observar las presiones máximas obtenidas en el hidrofoil test reportadas por el NVKS, estas presiones fueron medidas en el LE. Con la finalidad de evitar cavitación durante el hidrofoil test, se estableció una presión inicial de 659.5 kPa, sin embargo, como nuestro modelo numérico no incluye el efecto de cavitación y el objetivo es determinar la distribución de presiones máximas a la velocidad de flujo máxima, se tomó una presión inicial igual a cero. De acuerdo con la aparente similitud entre la geometría del modelo 1 y la del hidrofoil test se esperaba que las presiones máximas fueran similares pero claramente se observa una marcada diferencia generada por la condición de presión inicial, no obstante, la presión máxima en el modelo 2 (773 kPa) sólo difiere 2.7 % respecto a lo obtenido en el laboratorio (794.2 kPa) (ver Tabla VI.3). Es importante remarcar que nuestro caso de estudio se centra en el modelo 2 y que el modelo 1 sólo se diseñó para tener un parámetro de referencia, ya que al ser un perfil más hidrodinámico se espera que el comportamiento del mismo sea más dócil, entendiendo por dócil que las presiones y esfuerzos en el álabe sean menores y que las trayectoria de las partículas del flujo sean más uniformes, lo que corresponde con los resultados obtenidos.

Tabla VI.3: Presiones máximas en el borde de ataque.

Tiempo (s)	Hydrofoil test (kPa)	Modelo 1 (kPa)	Modelo 2 (kPa)
0.0	659.5	0.0	0.0
1.0	666.8	13.5	31.7
1.6	675.2	31.1	80.0
2.0	683.7	46.6	123.7
3.0	710.0	97.4	278.5
4.0	747.3	163.9	504.5
5.0	794.2	244.7	773.0

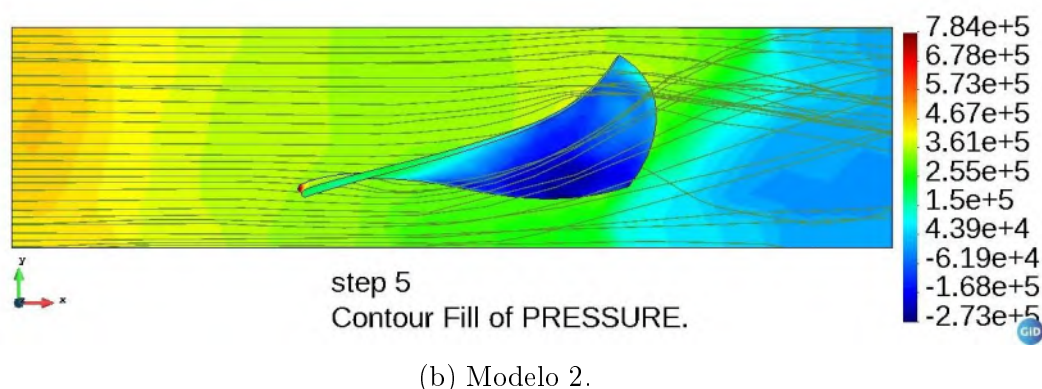
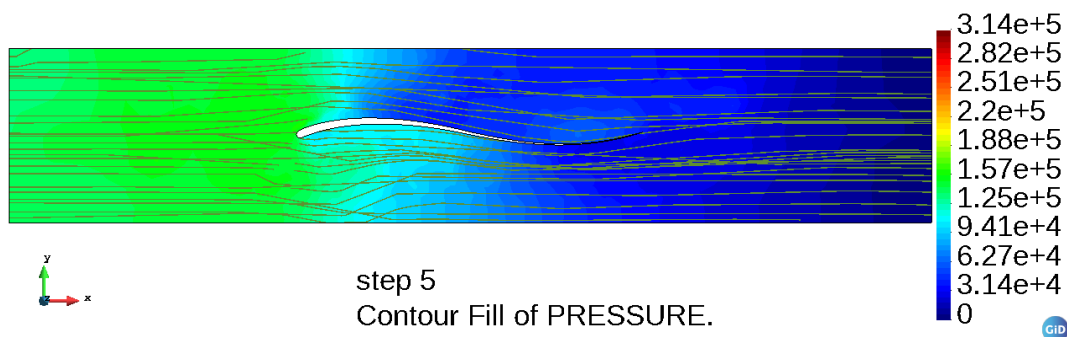


Figura 45: Trayectorias del flujo y distribución de presiones máximas (Pa).

En la Figura 46 se muestra el patrón de las trayectorias de velocidad de las partículas del modelo 1. Se observa que se generan ligeros cambios en la trayectoria del flujo a partir de que el mismo entra en contacto con el borde de ataque del perfil produciendo incremento en la velocidad del fluido. En contraste con el modelo 1, debido a la curvatura pronunciada y geometría más compleja, en el modelo 2 se presentan cambios abruptos en las trayectorias de velocidad del flujo, generando velocidades máximas en el borde de salida (Figura 47), esto es consistente con lo observado en el comportamiento de álabes de turbinas reales.

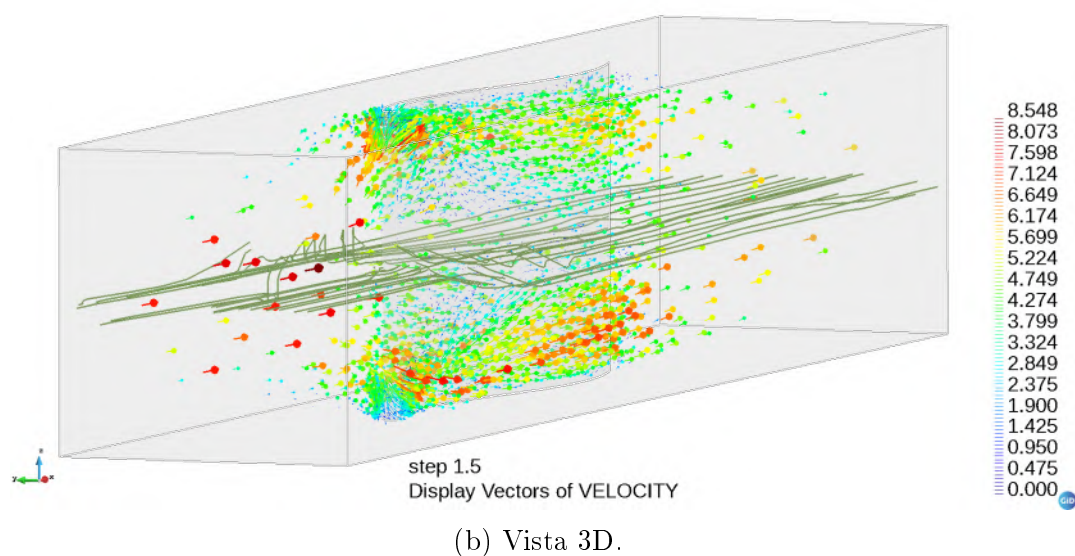
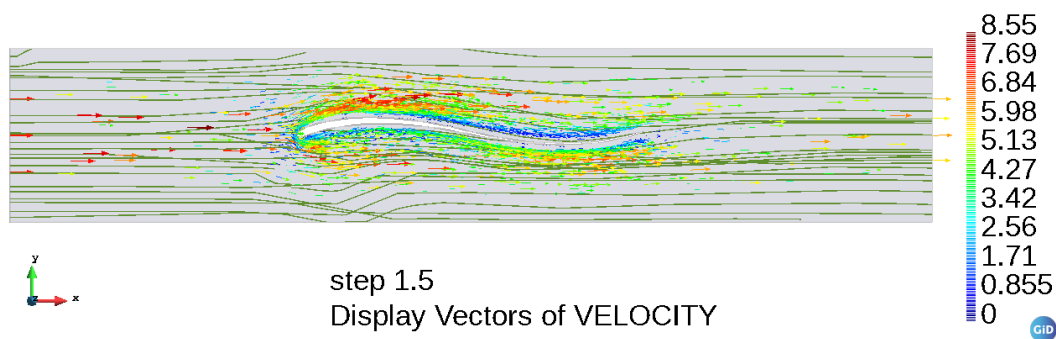


Figura 46: Campo de velocidades del flujo (m/s), modelo 1.

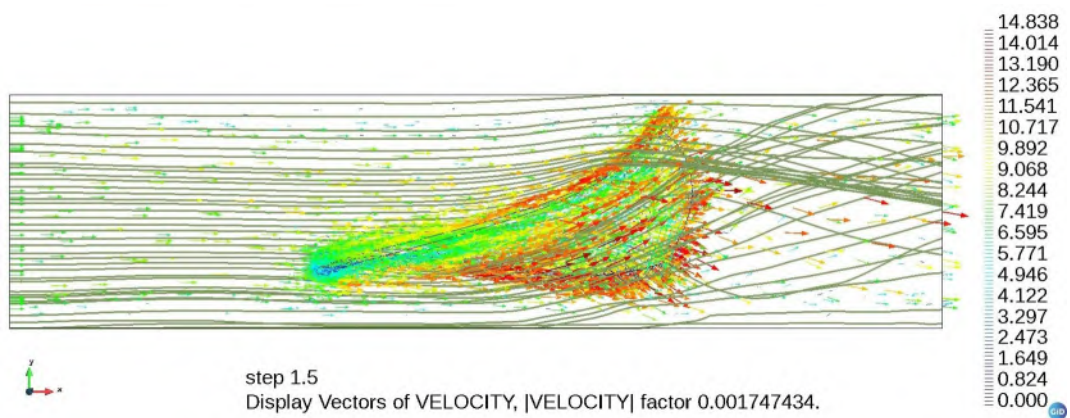
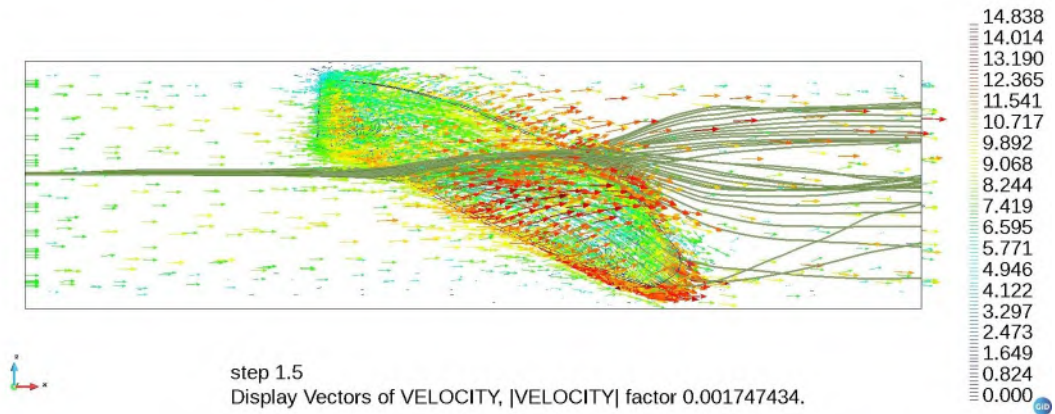
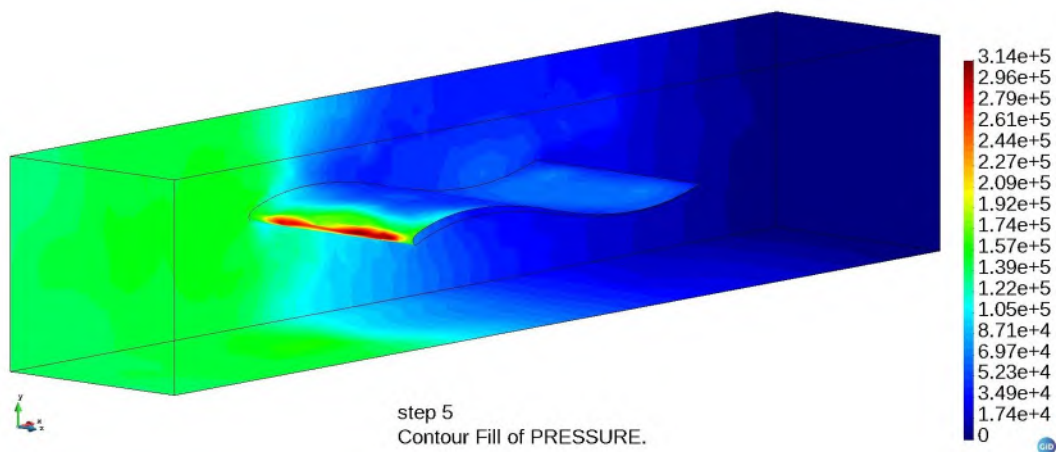
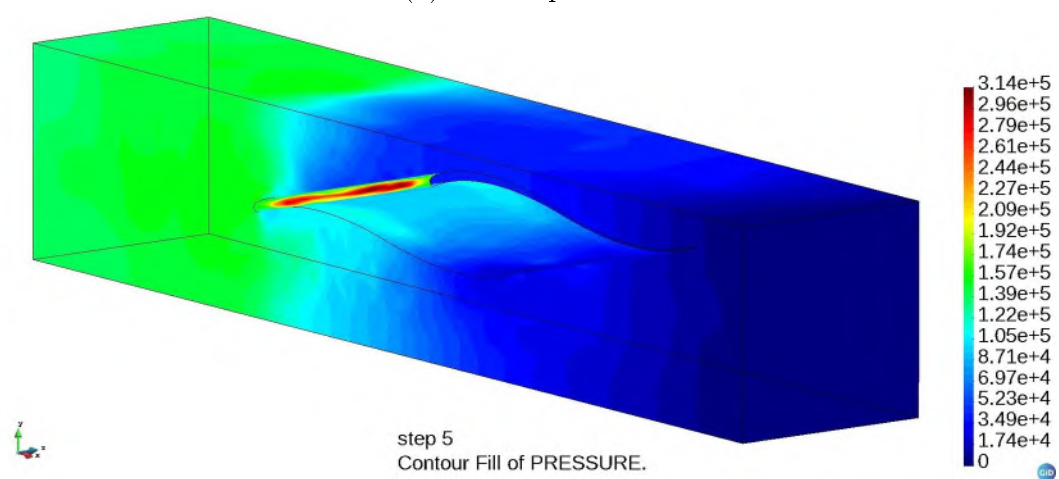


Figura 47: Campo de velocidades del flujo (m/s), modelo 2.

Los resultados del CFD muestran una concentración de presiones máximas en el borde de ataque. En el modelo 1 la distribución de presiones cambia de positiva (presión) en el LE a negativas (succión) en el TE (Figure 48), mientras que en el modelo 2 se tiene prácticamente una cara del álabe a presión y la otra a succión (Figura 49) lo cual es congruente con los resultados esperados.

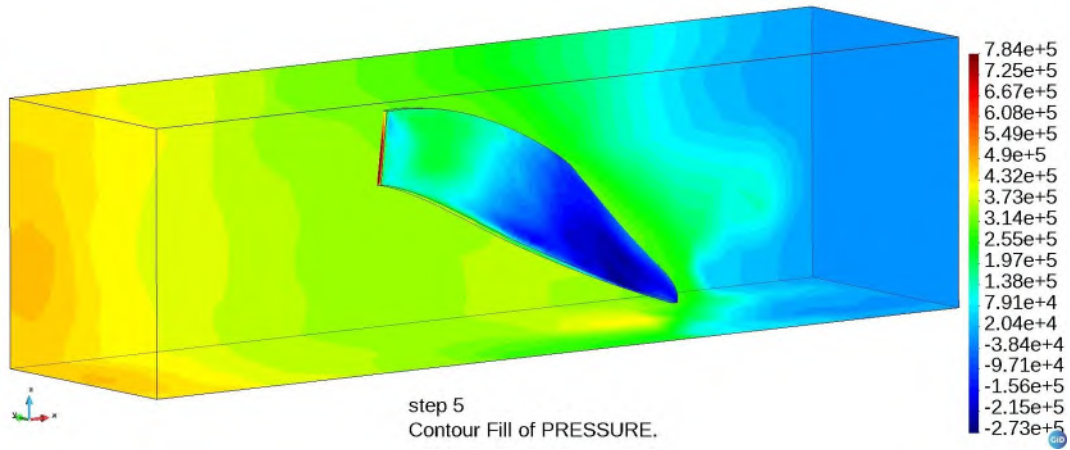


(a) Cara superior.

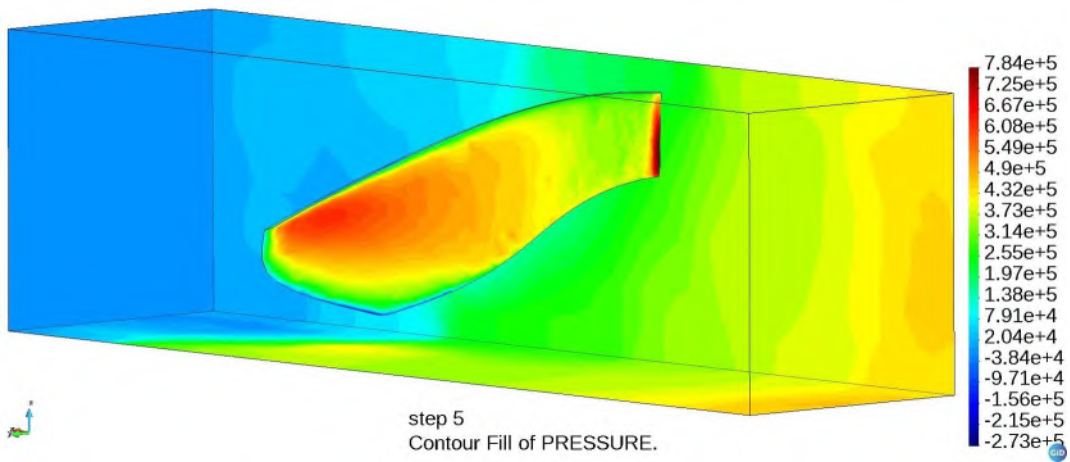


(b) Cara inferior.

Figura 48: Distribución de presiones (Pa), modelo 1.



(a) Cara de succión.



(b) Cara de presión.

Figura 49: Distribución de presiones (Pa), modelo 2.

VI.2.2. Resultados del análisis estructural, caso de prueba

Las figuras 50a y 50b muestran un par de vistas de la malla utilizada para discretizar el modelo 1 y las figuras 50c y 50d presentan las correspondientes al modelo 2. Ambas mallas están formadas por aproximadamente 70000 elementos tetraédricos. El análisis estructural se realizó con el software *KratosMultiphysics*® bajo las consideraciones de la sección VI.1 y tomando como cargas la distribución de presiones obtenidas en el análisis CFD.

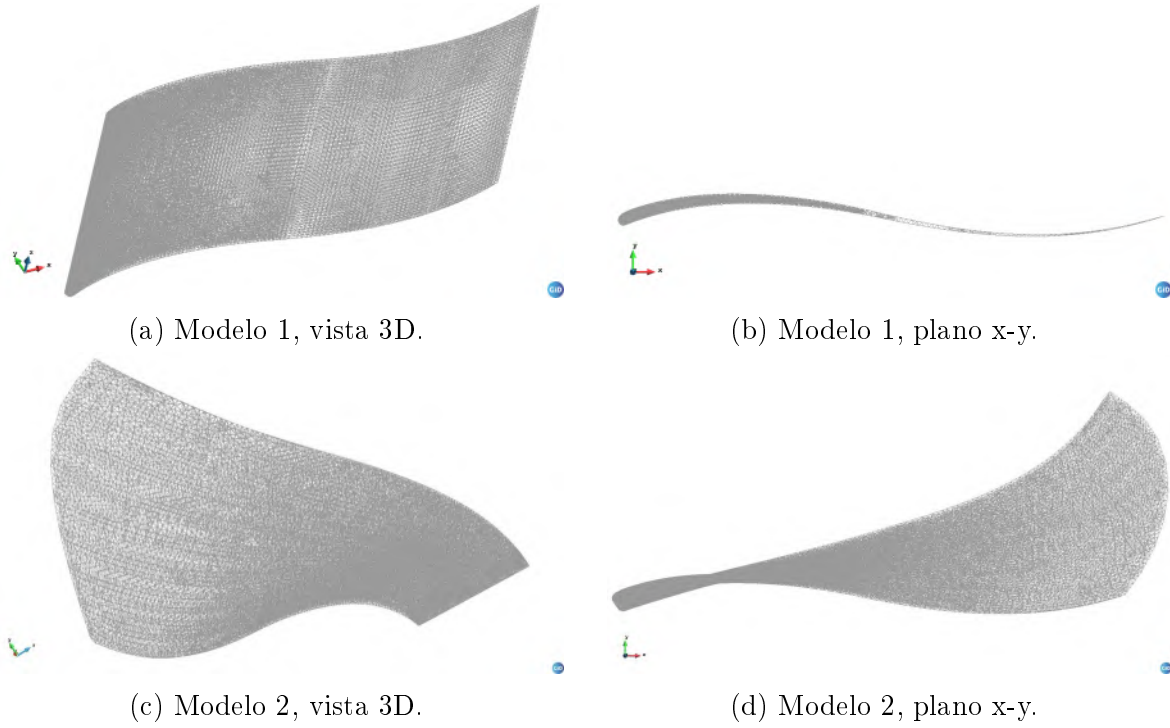


Figura 50: Malla del modelo estructural.

El análisis estructural se realizó de manera independiente del análisis CFD. Para economizar el costo computacional el problema se trabajó como un caso desacoplado. Como primer paso se resolvió el problema dinámico con el que se obtuvo la distribución de presiones sobre la superficie del álabe, y posteriormente esta distribución se utilizó como valores de entrada en el análisis estructural.

Entre los resultados obtenidos del análisis se muestra el esfuerzo de Von Mises que representa una energía de distorsión y es una medida escalar que se deriva del tensor de esfuerzos de Cauchy. El esfuerzo de Von Mises representa el límite de fluencia en materiales dúctiles y se obtiene a partir de

$$\sigma_{vm} = \sigma_e \quad (170)$$

donde, σ_{vm} es el esfuerzo de Von Mises y σ_e es el esfuerzo equivalente previamente definido en la sección V.2.1.1. Cuando $\sigma_{vm} < \sigma_y$ el material tiene un comportamiento elástico, y para $\sigma_{vm} \geq \sigma_y$ se considera que el material fluye y se generan deformaciones plásticas [91, 109]. Para describir el estado de esfuerzos en cualquier punto sobre el álabe utilizaremos el tensor de esfuerzos de Cauchy, el cual es un tensor de segundo orden que representa los esfuerzos cortantes y normales que actúan sobre las caras de cualquier elemento finito que conforme el álabe. El tensor está definido como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (171)$$

y a partir de éste se determinan los esfuerzos principales utilizando la ecuación característica

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (172)$$

donde, $\mathbf{1}$ representa el tensor identidad, y λ es el vector solución que contiene los esfuerzos principales, $\sigma_i \geq \sigma_{ii} \geq \sigma_{iii}$, que representan los esfuerzos normales máximos y mínimos actuantes sobre cualquier elemento finito en un plano de esfuerzo axial puro. Estos valores extremos nos sirven de parámetro para determinar si se excede el esfuerzo último del material, produciendo una falla local [75, 49, 13]. Para verificar las deformaciones determinaremos el tensor de deformaciones de Green-Lagrange, $\mathbf{E}$, que nos ayuda a definir el estado de deformaciones de estructuras flexibles, principalmente cuando éstas presentan un comportamiento no lineal. Éste tensor de segundo orden mide el cambio de longitud y la rotación de una configuración deformada respecto a la original describiendo deformaciones finitas [49, 13], y se determina a partir de

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (173)$$

con $\mathbf{F}$ definido como el gradiente del tensor de deformaciones $\mathbf{F} = \nabla\{\mathbf{u}\}$.

En las Figuras 51 a 60 se muestran los resultados del análisis estructural obtenidos para los modelos 1 y 2. Las Figuras 52 y 54 presentan el estado de esfuerzos principales de Cauchy para ambos modelos, y por su parte en las Figuras 51 y 53 se muestra el tensor de esfuerzos de Cauchy correspondientes. Para todos los casos se observa que existe una concentración de esfuerzos en el borde de ataque y de salida, con un esfuerzo máximo de 92.66 MPa para el modelo 1, y 340.60 MPa para el modelo 2, y mínimos de -181.36 MPa y -656.07 MPa, respectivamente. De estos resultados podemos resaltar que los esfuerzos máximos y mínimos generados en el modelo 1 son menores al esfuerzo de fluencia por lo que el material permanece en el rango elástico. Sin embargo, en el modelo 2, los valores extremos del esfuerzo sobrepasan el punto de fluencia exhibiendo un comportamiento plástico y alcanzando magnitudes cercanas al esfuerzo último. La diferencia obtenida en los esfuerzos es congruente con la diferencia de presiones reportadas en el análisis CFD, se observa una clara relación entre las magnitudes de los esfuerzos y la complejidad de la geometría.

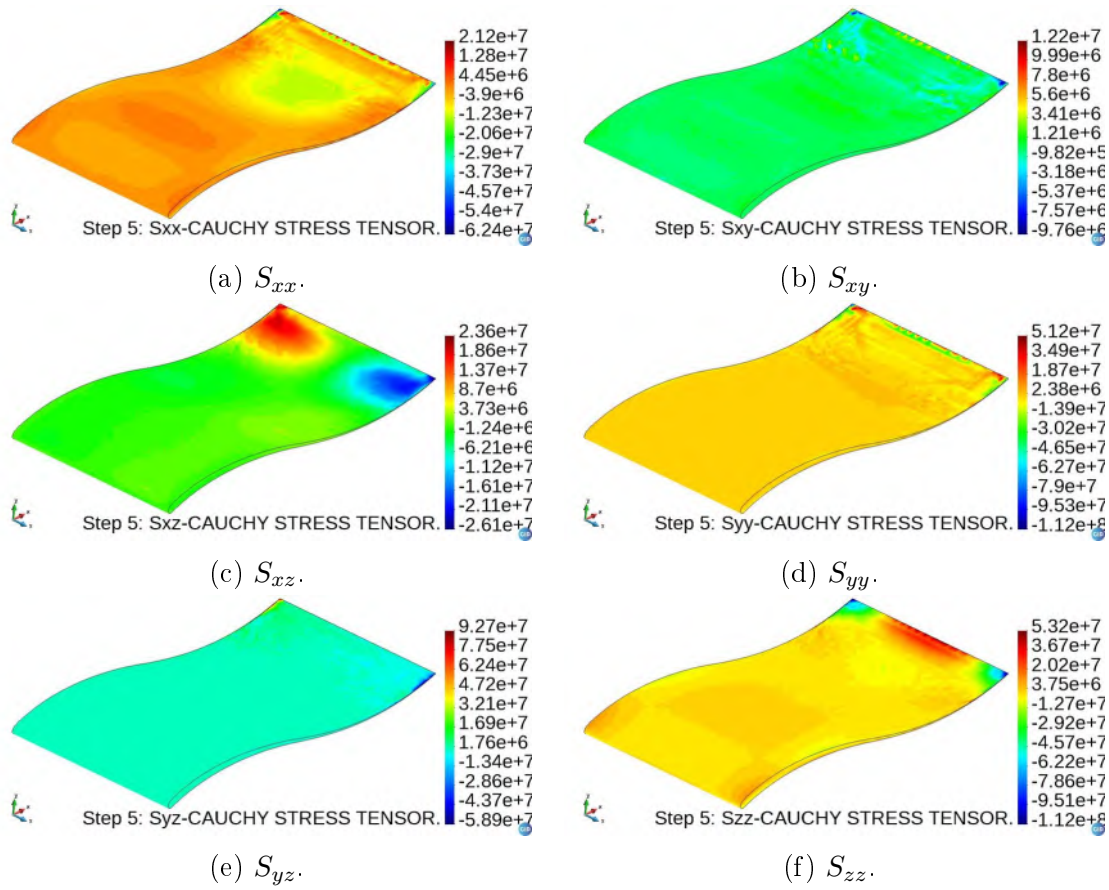


Figura 51: Tensor de esfuerzos de Cauchy (Pa), modelo 1.

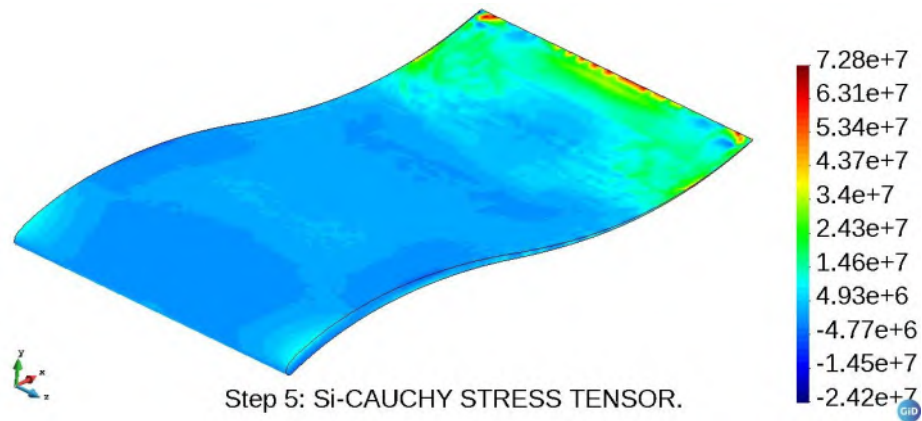
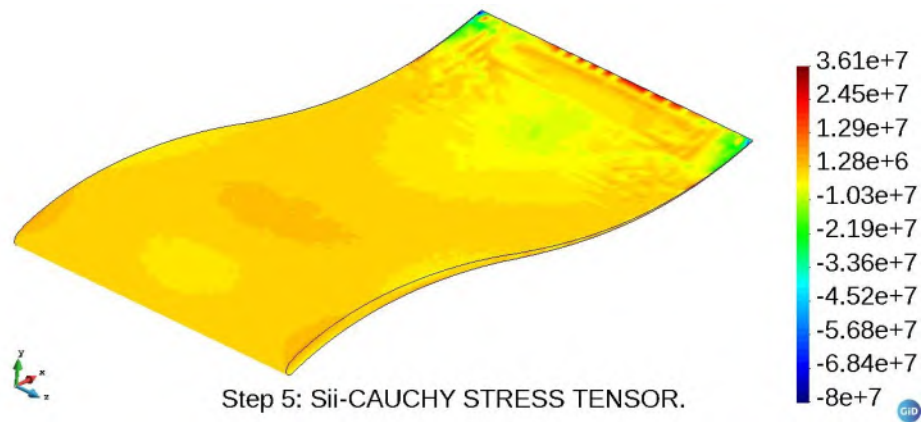
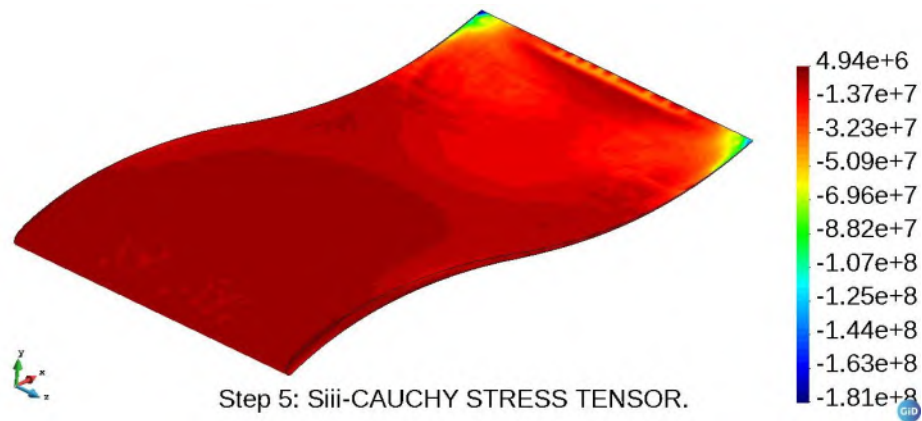
(a) S_i .(b) S_{ii} .(c) S_{iii} .

Figura 52: Estado de esfuerzos principales de Cauchy (Pa), modelo 1.

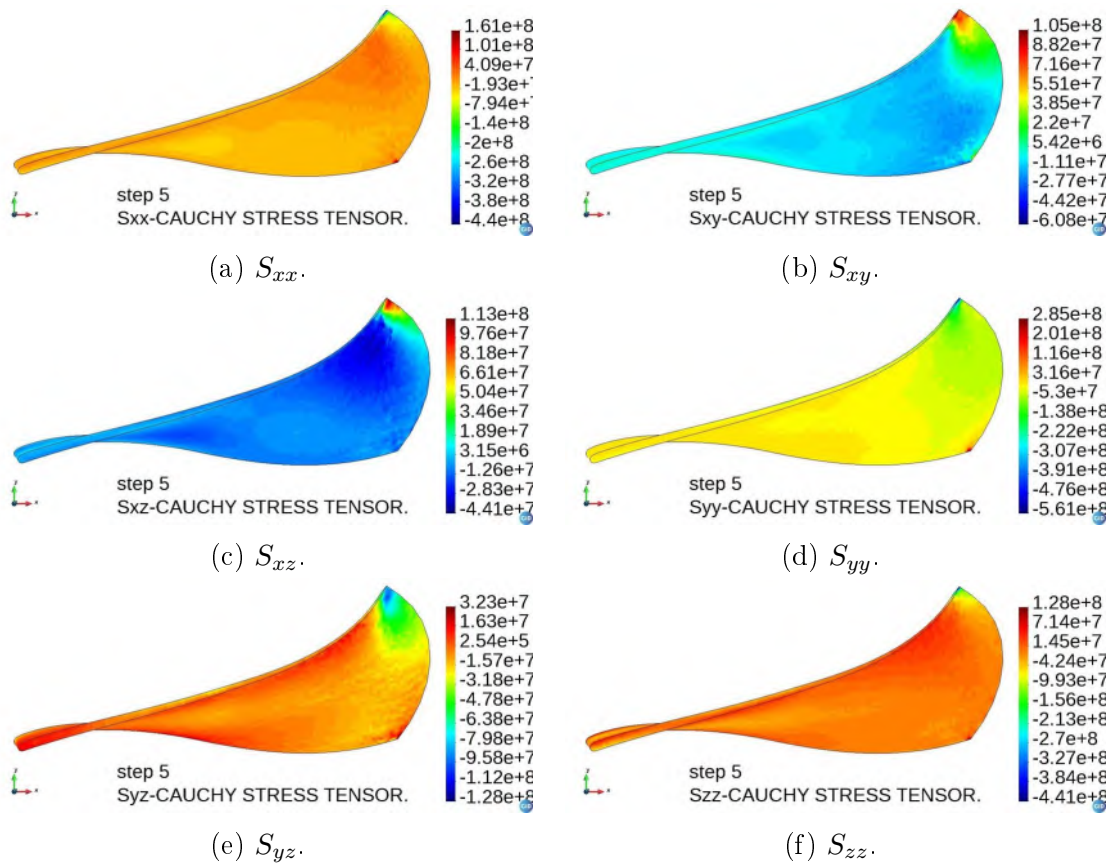


Figura 53: Tensor de esfuerzos de Cauchy (Pa), modelo 2.

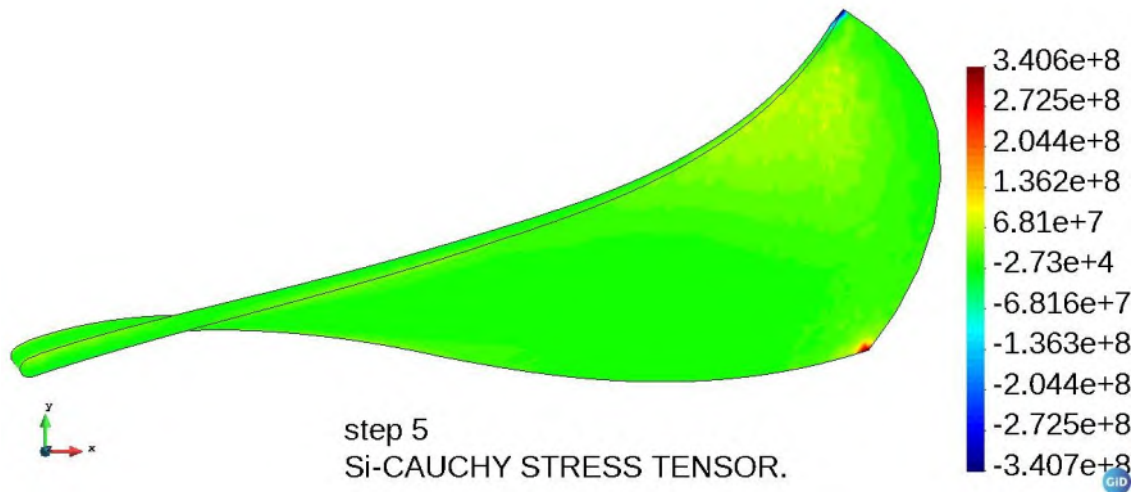
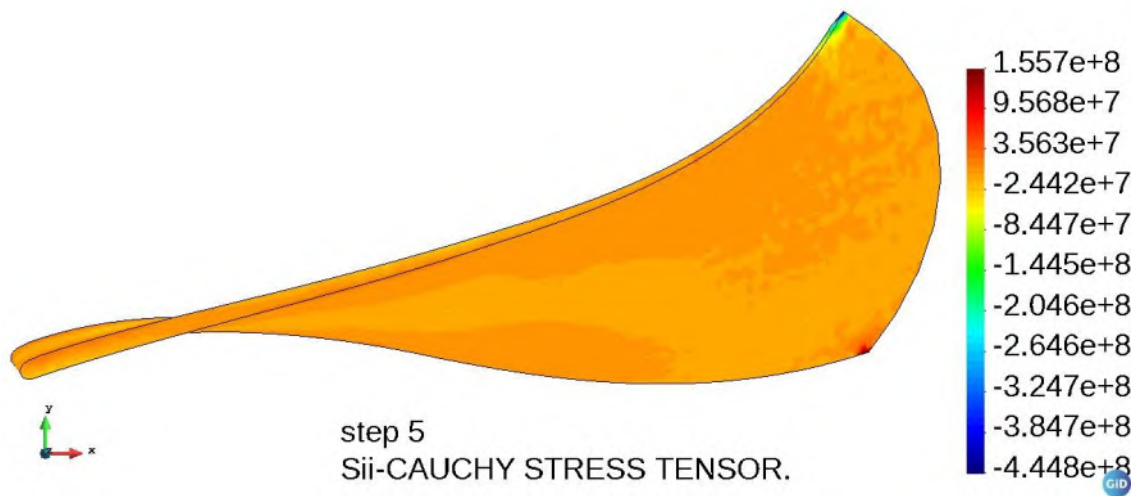
(a) S_i .(b) S_{ii} .(c) S_{iii} .

Figura 54: Estado de esfuerzos principales de Cauchy (Pa), modelo 2.

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange (Figures 55 y 56) y el estado de deformaciones principales de Green-Lagrange (Figures 57 y 58) muestran una distribución de valores máximos similar a la obtenida en la distribución de esfuerzos de Cauchy, con deformaciones absolutas máximas de $2.2734 \times 10^{-3} \%$ para el modelo 1, y $1.7484 \times 10^{-2} \%$ para el modelo 2. Ambos máximos se presentan en el TE. Se observa que las deformaciones obtenidas en el modelo 1 nos sugieren un comportamiento elástico, mientras que las deformaciones máximas del modelo 2 indican un comportamiento plástico, y sus valores extremos señalan la posibilidad de que se presenten fallas locales en el elemento ya que exceden la deformación última reportada para aleaciones de aluminio ($0.012 - 0.015 \%$) [51, 78].

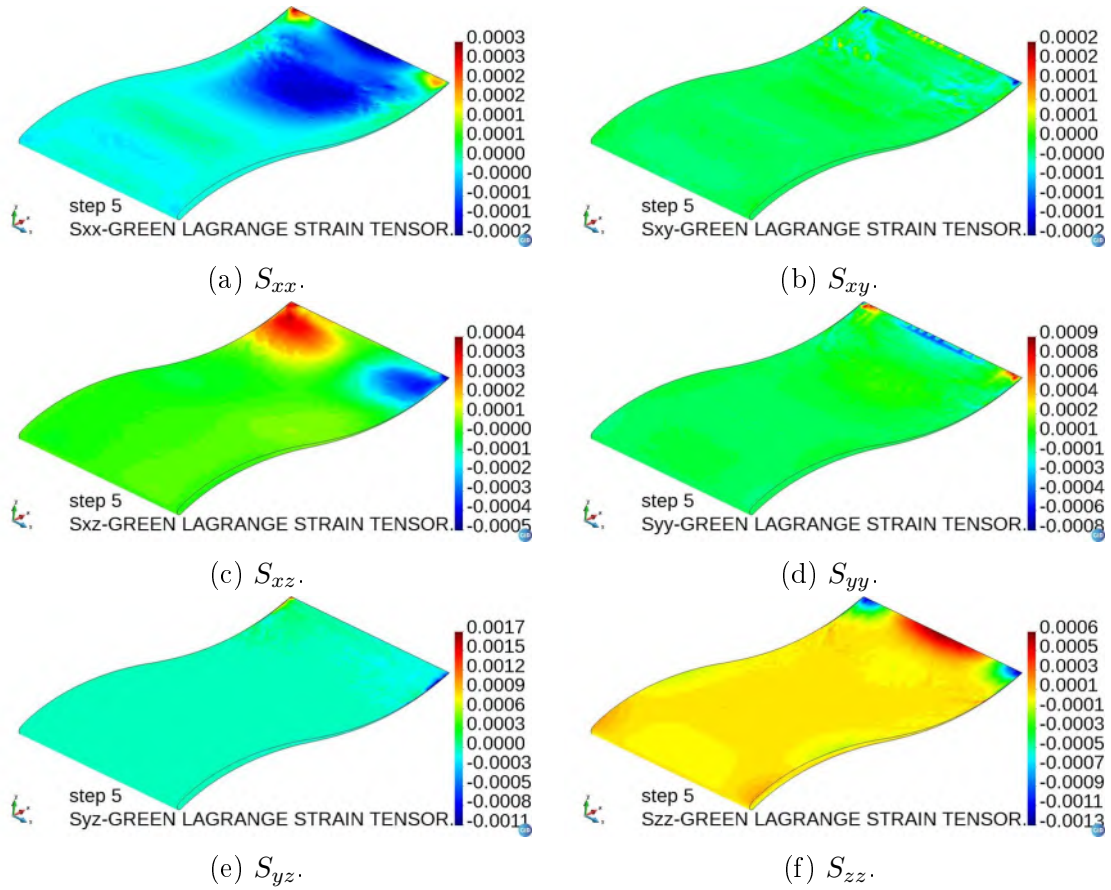


Figura 55: Tensor de deformaciones de Green-Lagrange, modelo 1.

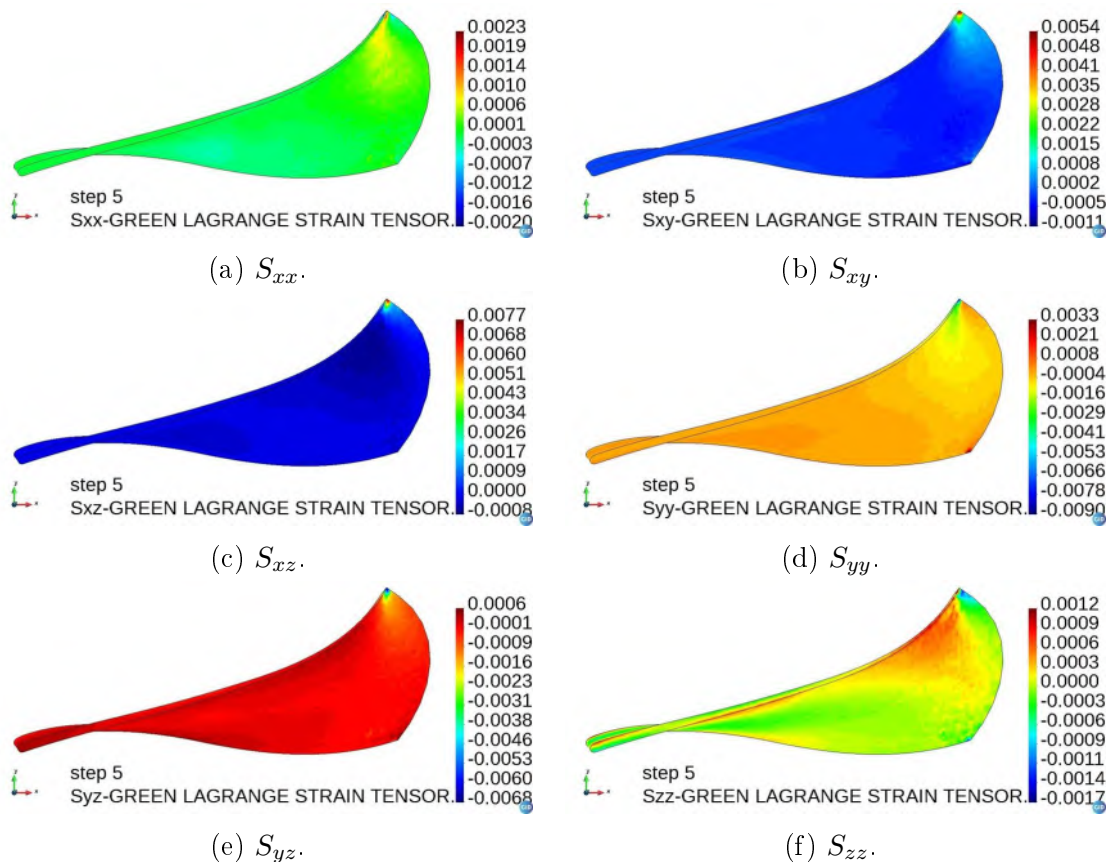


Figura 56: Tensor de deformaciones de Green-Lagrange, modelo 2.

Las Figuras 59a y 59b muestran el estado de esfuerzos de Von Mises y la distribución de desplazamientos para el modelo 1, respectivamente. El máximo esfuerzo en el álabe es de 169.80 MPa, y una deformación máxima de 4.36×10^{-4} m. En las Figuras 60a y 60b se observan los resultados correspondientes al estado de esfuerzos de Von Mises y distribución de deformaciones del modelo 2. En este caso los esfuerzos máximos son iguales al esfuerzo de fluencia del material, 280 MPa; y la deformación máxima en el perfil es 1.317×10^{-3} m.

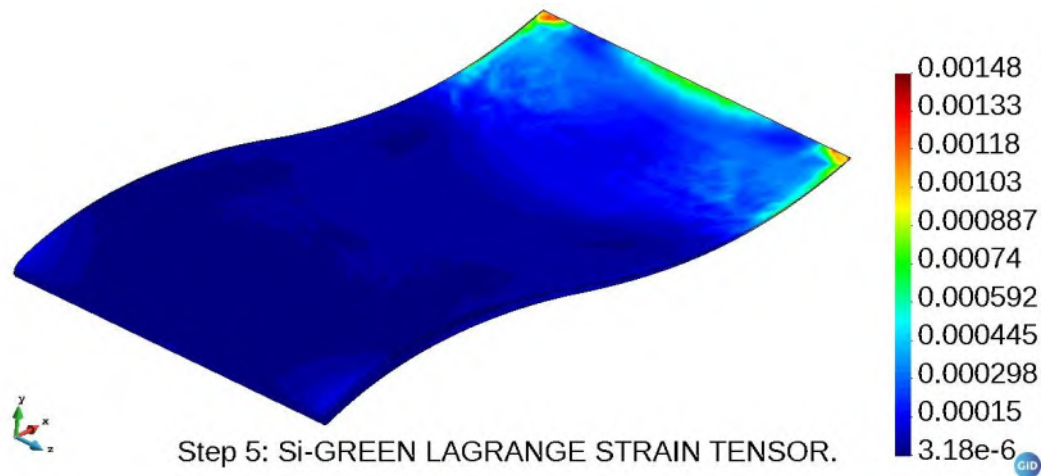
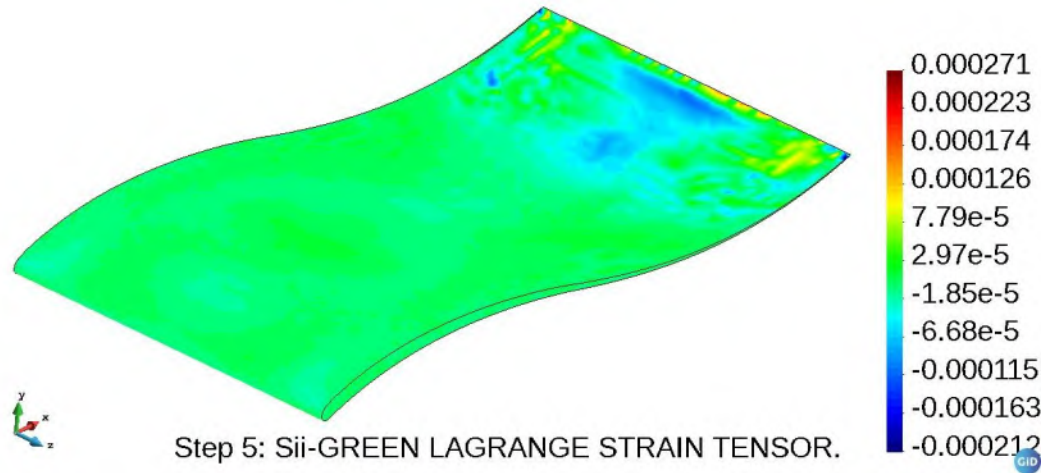
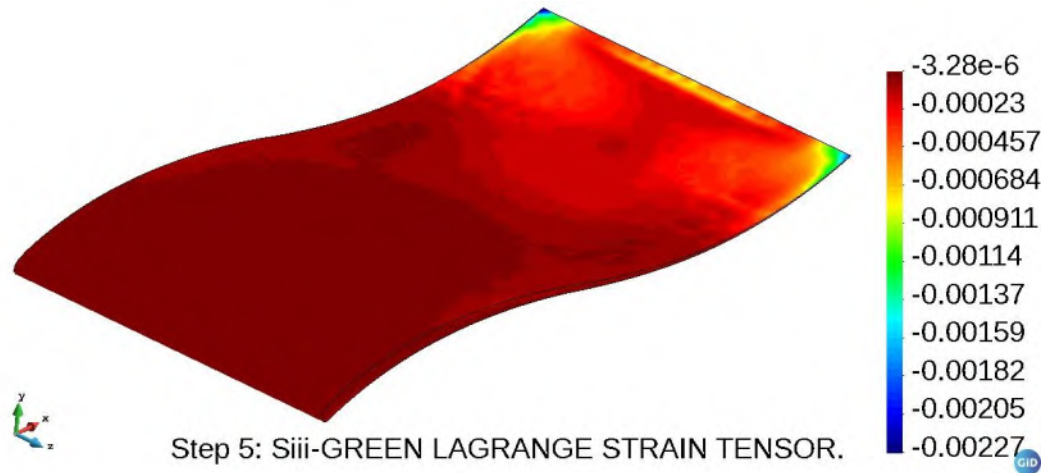
(a) S_i .(b) S_{ii} .(c) S_{iii} .

Figura 57: Estado de deformaciones principales de Green-Lagrange, modelo 1.

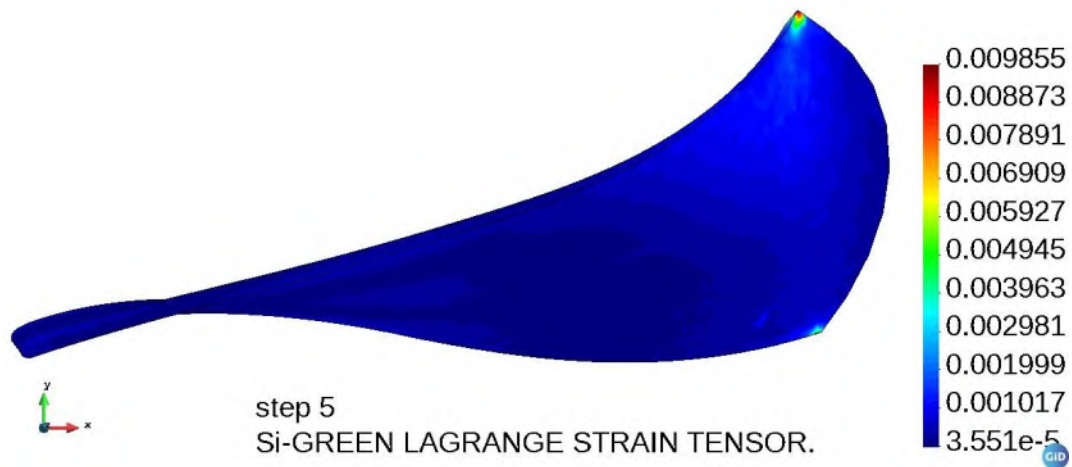
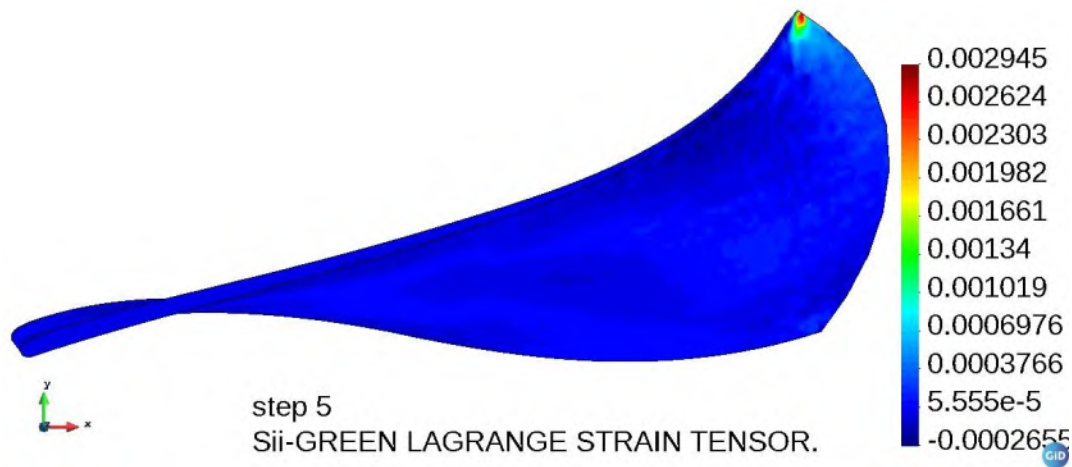
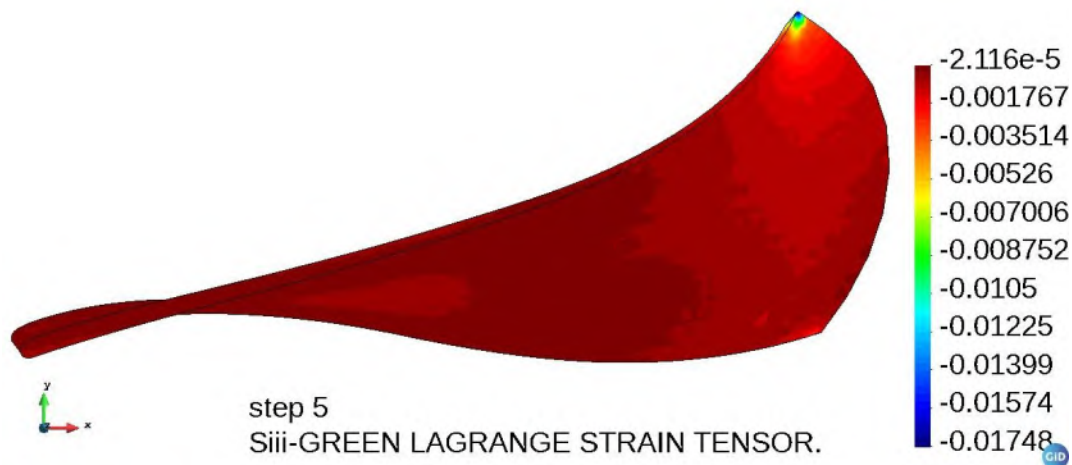
(a) S_i .(b) S_{ii} .(c) S_{iii} .

Figura 58: Estado de deformaciones principales de Green-Lagrange, modelo 2.

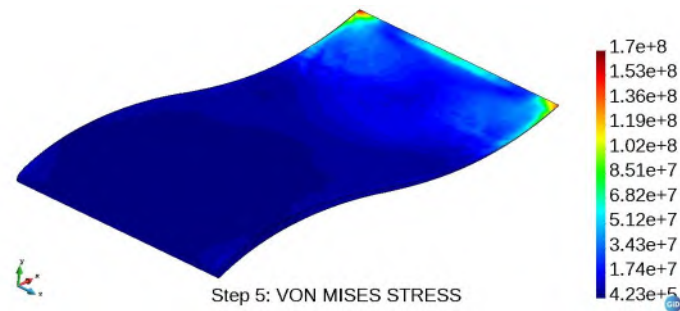
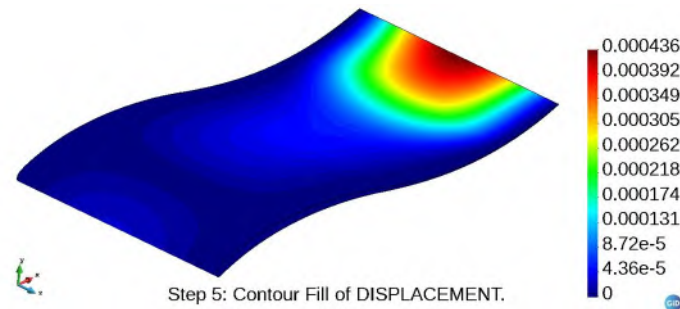
(a) σ_{max} (Pa).(b) Δ_{max} (m).

Figura 59: Estado de esfuerzos de Von Mises y deformaciones máximas, modelo 1.

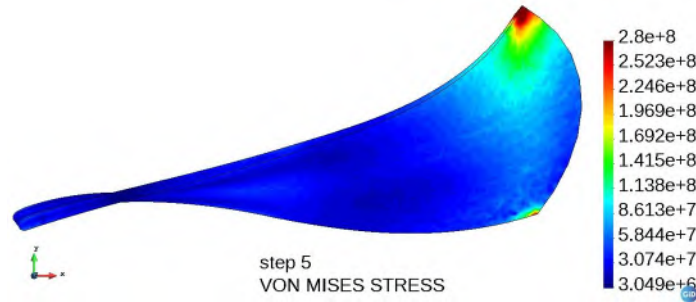
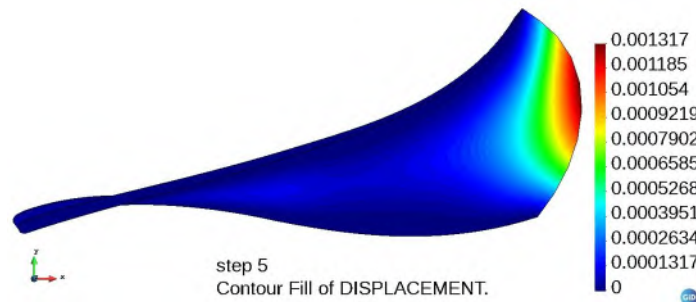
(a) σ_{max} (Pa) modelo 1.(b) Δ_{max} (m) modelo 2.

Figura 60: Estado de esfuerzos de Von Mises y deformaciones máximas, modelo 2.

VI.2.3. Resultados del análisis FSI

Como se mencionó anteriormente el análisis FSI se resuelve en etapas. Para cada intervalo de tiempo primero se resuelve el problema de dinámica de fluidos para determinar las componentes del vector de velocidad y la presión, y posteriormente usar las presiones como cargas para realizar el análisis estructural. En las Figuras 46 y 47 se presentan el campo de velocidades del flujo y las trayectorias de las partículas, respectivamente. Se observa que las trayectorias del flujo se ven fuertemente alteradas por la geometría del perfil produciéndose cambios bruscos de dirección del fluido en la zona media del álabe, los cuales están directamente relacionados con la geometría compleja del perfil. Además, al analizar los resultados, estos muestran congruencia con los obtenidos en el análisis CFD del modelo 2.

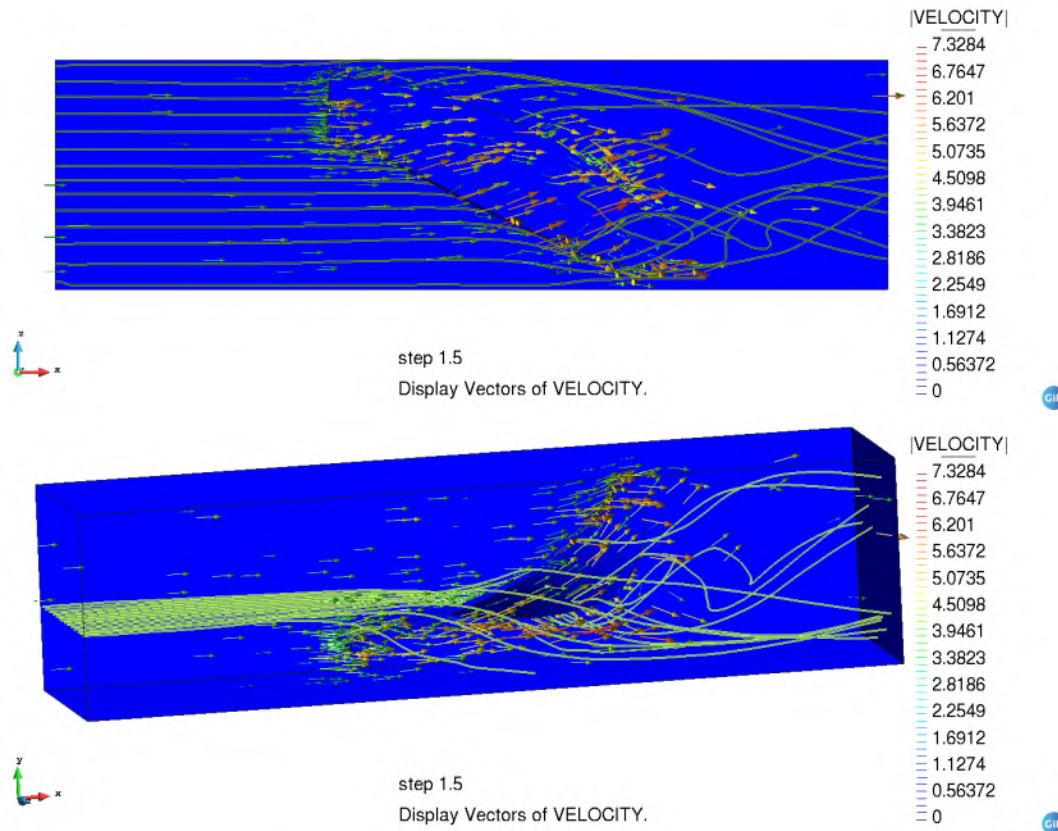


Figura 61: Campo de velocidades del flujo (m/s).

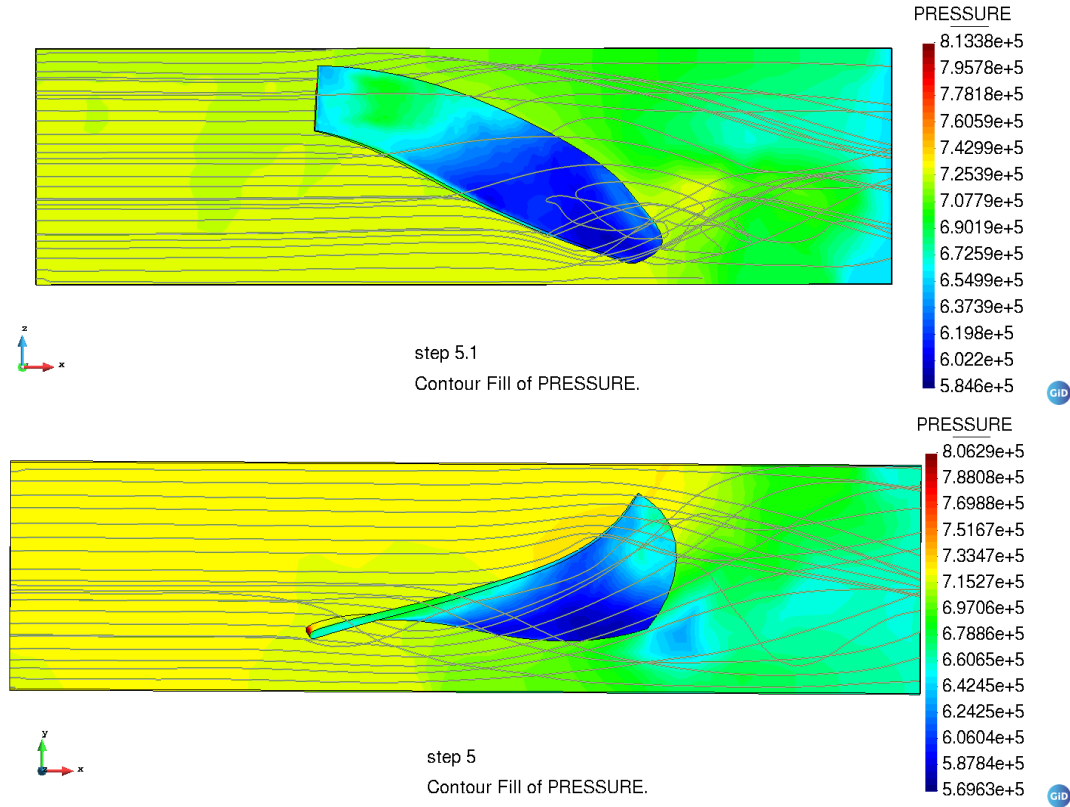
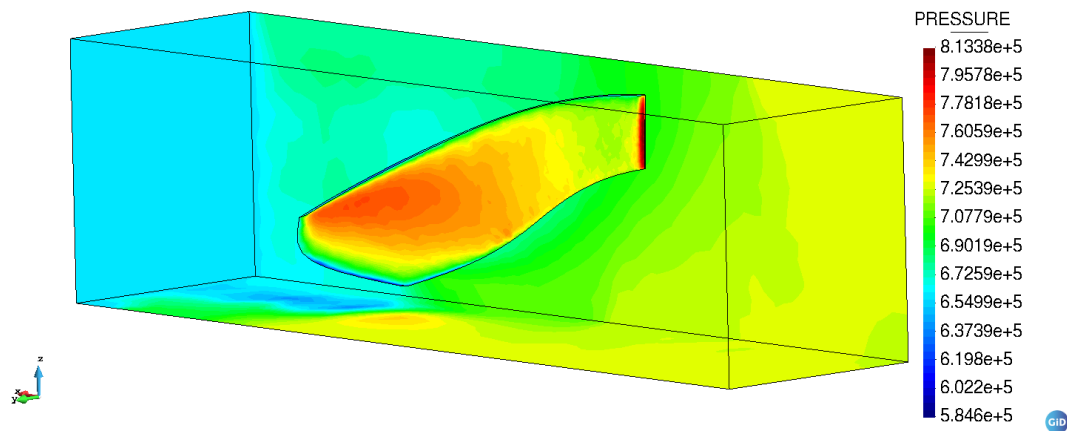
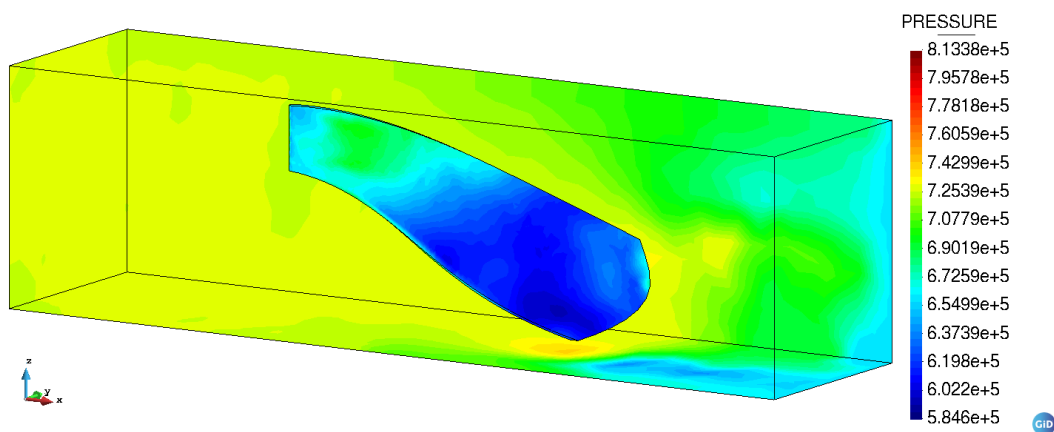


Figura 62: Patron de trayectorias del flujo, modelo FSI.

De acuerdo con los resultados del análisis CFD se observa que las presiones máximas y mínimas se generan en el borde de ataque (LE) y borde de salida (TE) (Figure 63). Asimismo, se puede identificar una clara similitud entre los patrones de la distribución de presiones del análisis CFD realizado en el modelo FSI y el del problema desacoplado para el modelo 2.



(a) Cara de presión.



(b) Cara de succión.

Figura 63: Distribución de presiones (Pa), modelo FSI.

En las Figuras 64 a 68 se muestran los resultados del análisis estructural obtenidos con el modelo FSI. La Figura 64 muestra los resultados del tensor de esfuerzos de Cauchy para el modelo FSI, se observa que existe una clara concentración de esfuerzos en el borde de salida del álabe, zona en la cual comúnmente se presentan daños estructurales en álabes de turbinas. Por su parte, la Figura 65 presenta el estado de esfuerzos principales de Cauchy correspondiente, con esfuerzo máximo de 161 MPa, y mínimo de -29.9 MPa. De estos resultados podemos resaltar que los esfuerzos máximos y mínimos son menores al esfuerzo de fluencia por lo que el material permanece en el rango elástico. También se observa que la distribución de esfuerzos es congruente con la distribución de presiones reportadas en el análisis CFD y los resultados previamente presentados.

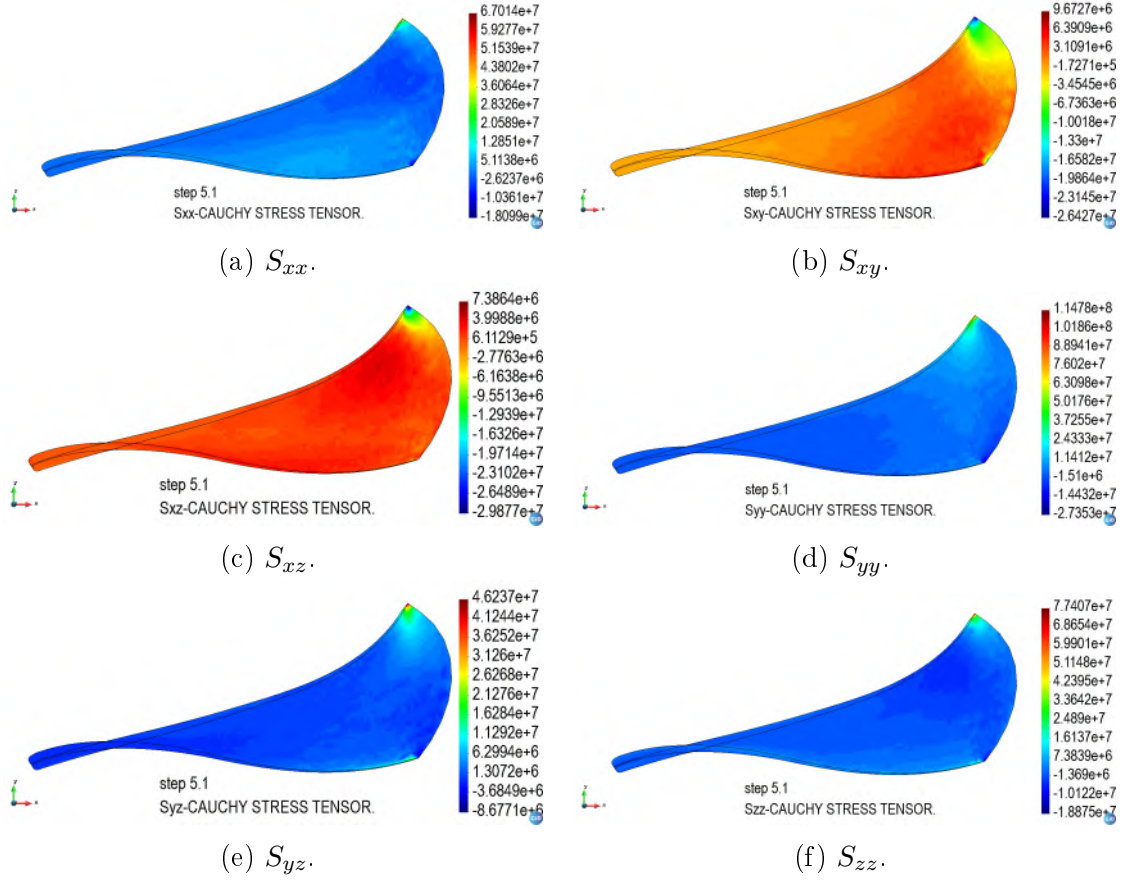


Figura 64: Tensor de esfuerzos de Cauchy (Pa), modelo FSI.

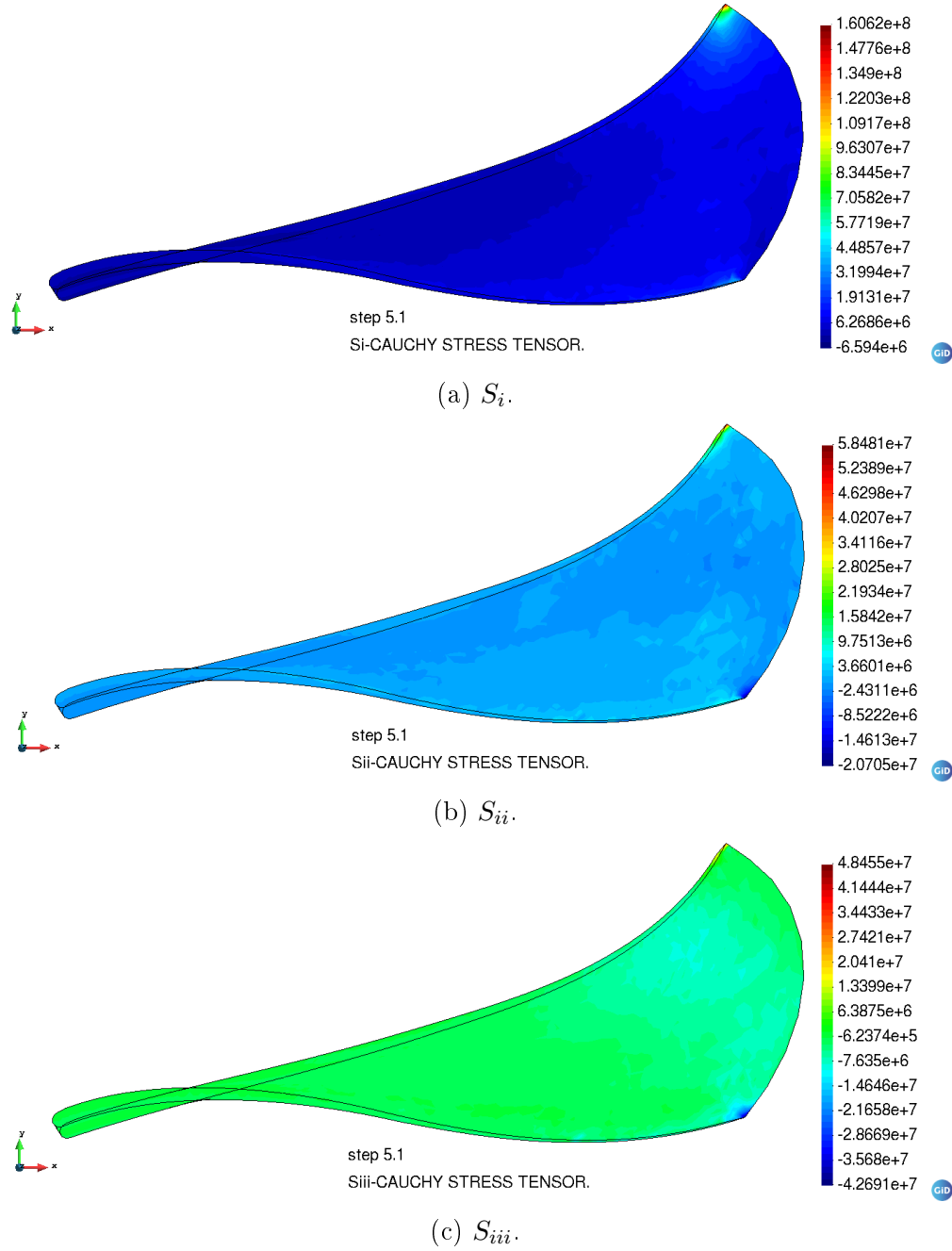


Figura 65: Estado de esfuerzos principales de Cauchy (Pa), modelo FSI.

En correspondencia con los resultados previos, se observa que en el tensor de deformaciones de Green-Lagrange (Figura 66) existe una concentración de deformaciones en el TE. Asimismo, el estado de deformaciones principales (Figura 67) nos muestra las deformaciones máxima de $1.88 \times 10^{-3} \%$ y mínima de $-5.84 \times 10^{-4} \%$, las cuales se encuentran por debajo de los límites en los cuales un material como el aluminio deja de tener un comportamiento elástico (alrededor de $5.0 \times 10^{-3} \%$ promedio para aleaciones de aluminio [51, 78]). Ambos valores extremos se presentan en el TE del álabe.

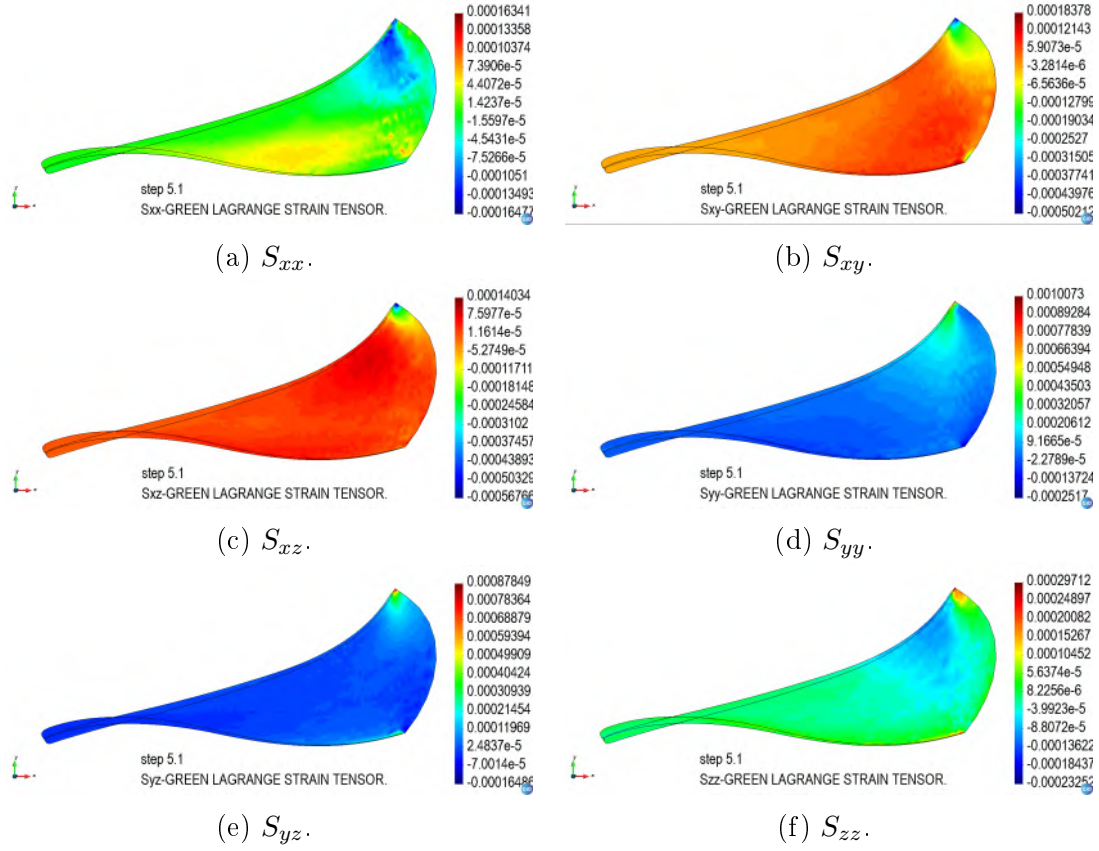


Figura 66: Tensor de deformaciones de Green-Lagrange, modelo FSI.

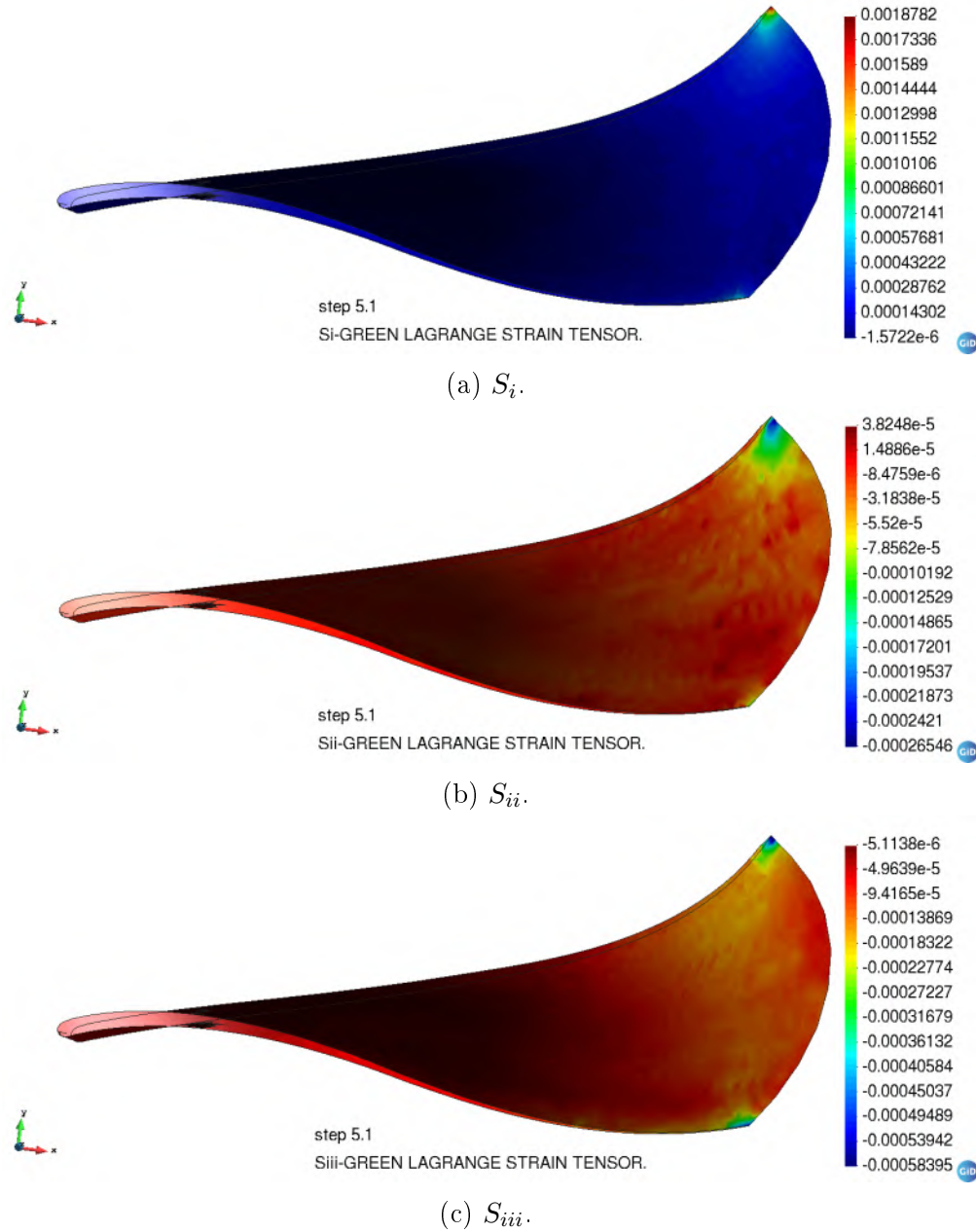


Figura 67: Estado de deformaciones principales de Green-Lagrange, modelo FSI.

Las Figuras 68a y 68b muestran el estado de esfuerzos de Von Mises y la distribución de desplazamientos para el modelo FSI, respectivamente. El esfuerzo de Von Mises máximo en el álabes es de $\sigma_{vm} = 119 \text{ MPa} < \sigma_y = 248 \text{ MPa}$, lo que nos indica que el comportamiento del álabes es elástico. Los desplazamientos máximos se localizan en el borde de salida, con un máximo de $1.78 \times 10^{-4} \text{ m}$. Además, se observa que existe una concentración de deformaciones en el TE, considerada la zona más flexible del álabes debido a la reducción de espesor del mismo. Estos resultados muestran congruencia con los previamente presentados para el modelo 2.

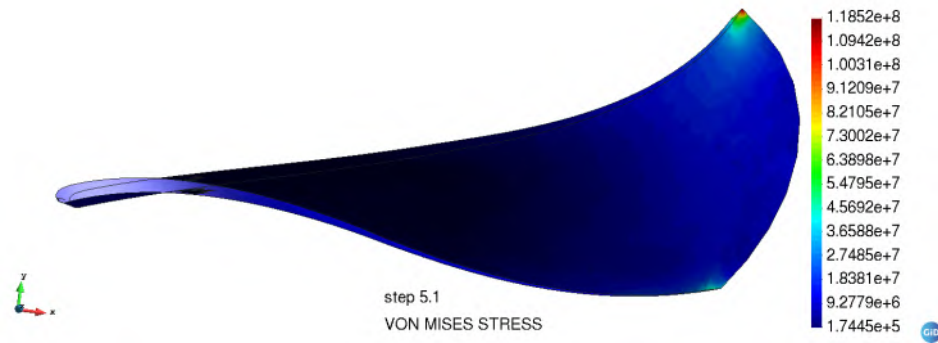
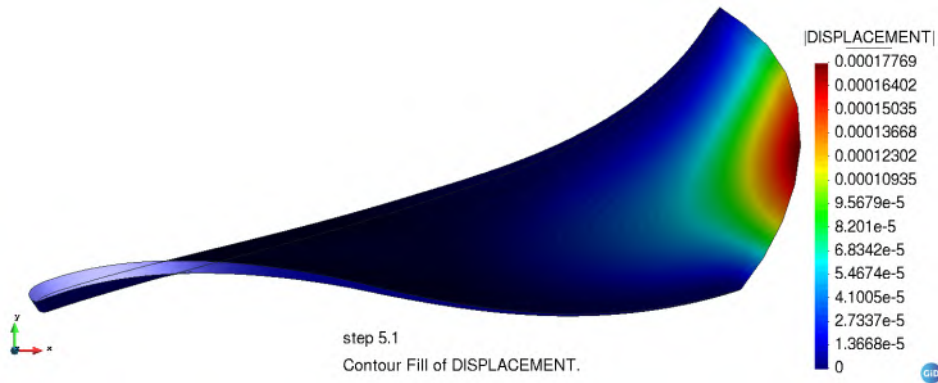
(a) σ_{max} (Pa) modelo FSI.(b) Δ_{max} (m) modelo FSI.

Figura 68: Estado de esfuerzos de Von Mises y desplazamientos máximos, modelo FSI.

Capítulo VII

Conclusiones

La presente investigación se enfocó en mostrar la implementación de la metodología de aproximación por secciones usando polinomios de Bernstein para la parametrización de formas geométricas complejas, y en particular de álabes de turbinas. Se ha demostrado que con el uso de polinomios de Bernstein a trozos como base fundamental para reconstrucción de la geometría de álabes de turbinas Francis se puede llevar a cabo parametrizaciones precisas. Los polinomios de Bernstein muestran ser una opción viable y adecuada, relativamente fácil de implementar. Los resultados obtenidos son muy satisfactorios, y la versatilidad con la que los polinomios se adaptan a la geometría compleja sugiere que esta metodología puede ser implementada para parametrizar álabes de diferentes tipos de turbina, hélices o cualquier otra geometría compleja.

Una vez generada la geometría del álabe, la siguiente tarea fue comprobar su integridad estructural en condiciones de prueba estándar. Se desarrollaron 3 modelos de prueba, los modelos 1 y 2 se modelaron utilizando análisis por etapas; la etapa 1 que consiste en el análisis de dinámica de fluidos computacional, y la etapa 2 del análisis estructural. La simulación de la dinámica de fluidos desarrollada mostró que el cambio de gradiente de velocidad causado por la geometría compleja del modelo 2 (que representa la forma de un álabe Francis real), aumentó la presión, las tensiones y la deformación en su superficie en comparación con las de modelo 1. Los resultados muestran que existe una gran sensibilidad en los resultados del CFD respecto a la geometría del elemento. Como se esperaba, el análisis estructural muestra una concentración de esfuerzos en el TE para ambos modelos. Además, debe tenerse en cuenta que estos valores exceden el límite elástico de la aleación de aluminio considerada para las simulaciones, lo cual justifica la implementación del modelo plástico. Sin embargo, estos valores se encuentran dentro del límite dado por la resistencia última, de acuerdo con las características del material utilizado en ambos modelos. También se observó que los valores máximos de deformación se alcanzan en el TE, lo que es consistente con el daño observado en álabes reales. Los resultados del análisis de los modelos 1 y 2 nos dan una idea de la capacidad última del perfil, aunque inicialmente no fueron diseñados con ese propósito.

El modelo 3 se realizó utilizando un análisis de interacción fluido-estructura, y se modificaron las propiedades del material, de acuerdo con los resultados experimentales, así como la velocidad máxima del flujo, con la finalidad de representar de manera más adecuada el com-

portamiento mecánico del material y sus condiciones de operación estándar. Los resultados obtenidos del modelo 3 (presiones, esfuerzos, deformaciones y desplazamientos), muestran que cuando el álabe trabaja en condiciones de operación estándar el material tiene un comportamiento elástico lineal, lo cual es ideal para garantizar el funcionamiento estructural de la turbina por un elevado número de ciclos de vida. Las distribuciones de presiones, esfuerzos, deformaciones y desplazamientos obtenidas en el análisis FSI muestran correspondencia con lo presentado en el modelo 2. Las distribuciones exhiben una concentración de acciones y efectos máximos en el borde de salida, zona en la que suelen presentarse daños estructurales en álabes reales. Estos resultados alentadores sirven como parámetros para validar los modelos numéricos.

La visión general del desempeño de los modelos describe una adecuada reconstrucción de la geometría utilizando la reparametrización propuesta, que, dada la versatilidad de la técnica de interpolación aplicada, se convierte en una metodología prometedora incluso para tareas más desafiantes, como la potenciación de toda la turbina. Sin embargo, debido a la compleja dinámica de las turbomáquinas, aún es necesario realizar varios estudios del rodete completo para su eventual fabricación.

Por su parte, los resultados del análisis estructural mostraron que el comportamiento del álabe es elástico lineal para condiciones de operación estándar, lo que sugiere que estructuralmente el álabe es adecuado para utilizarse en la turbina. Aunque los resultados son positivos, estos análisis no son totalmente concluyentes, son sólo una estimación inicial de lo que esperamos sea el comportamiento del álabe en la turbina. Como futuro proyecto de investigación se analizará el caso de un análisis FSI del rodete completo en condiciones de operación estándar. Es importante remarcar que el análisis estructural es sólo una de las etapas de un proceso de diseño que involucran el diseño de la geometría (proceso de parametrización), el análisis estructural, el análisis de eficiencia, y que culmina con el diseño de un proceso constructivo.

Apéndice A

Prueba de tensión

Para actualizar el modelo estructural se realizó un ensayo mecánico (prueba de tracción) en dos probetas de aleación de aluminio 5456 con la finalidad de obtener propiedades mecánicas del material. Ambas probetas tienen una longitud de 17.8 cm, ancho de 2.0 cm y espesor de 0.622 cm. La Figura 69 nos muestra una representación gráfica de la probeta. Entre los resultados obtenidos destacan: modulo de elasticidad, $E = 70$ GPa, esfuerzo de fluencia, $F_y = 248$ MPa, y esfuerzo último, $F_u = 377$ MPa, los cuales se presentan en el informe de la Figura 71. Los resultados que se obtuvieron difieren un poco de los valores utilizados en los modelos 1 y 2. Estos datos se implementaron para actualizar el modelo FSI y obtener nuevos resultados (ver la sección VI.2.3).

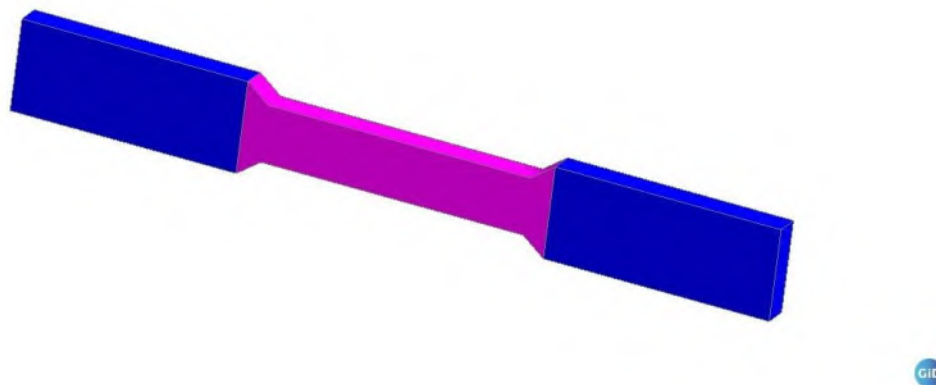


Figura 69: Esquema de probeta para prueba de tracción.

La Figura 70 muestra la máquina universal de ensayos *ZwickRoell* en la cual se realizó la prueba de tracción y las probetas al momento del experimento, además, se incluye una imagen de la falla de una de las probetas, en donde se observa que la falla ocurre a un plano de 45° , lo que indica que esta ocurre debido al esfuerzo cortante producida por la carga de tensión sobre el elemento. A continuación se incluyen los enlaces en donde se puede observar el video de ambas pruebas experimentales: **Prueba de tracción, probeta 1**; **Prueba de tracción, probeta 2**.



(a) Máquina universal.



(b) Probeta A.



(c) Probeta B.



(d) Falla de probeta.

Figura 70: Prueba de tracción.

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo LABORATORIO DE ENSAYOS MECÁNICOS IIMM

Resultado de los Ensayos de Tensión de dos probetas de aluminio 5456 planas de 12.50x6x60 mm el día 18 de octubre de 2023 a las 13:09 hrs. Dr Arnoldo Bedolla Jacuine / Dr. Francisco Domínguez Mota.

1 Tabla de Resultados:

Nr	Specimen ID	E _{mod} GPa	F at 0.2% plastic strain MPa	F _{max} MPa	F _{Break} N	dL at break %	a _u mm	b _u mm	Z %	a ₀ mm	b ₀ mm	S ₀ mm ²
1.1	T-1	62.0	246	377	-	-	5.78	11.89	12	6.22	12.5	77.75
1.4	T-2	70.0	248	377	-	-	5.73	11.61	14	6.22	12.38	77.00

2 Gáfica de las Curvas:

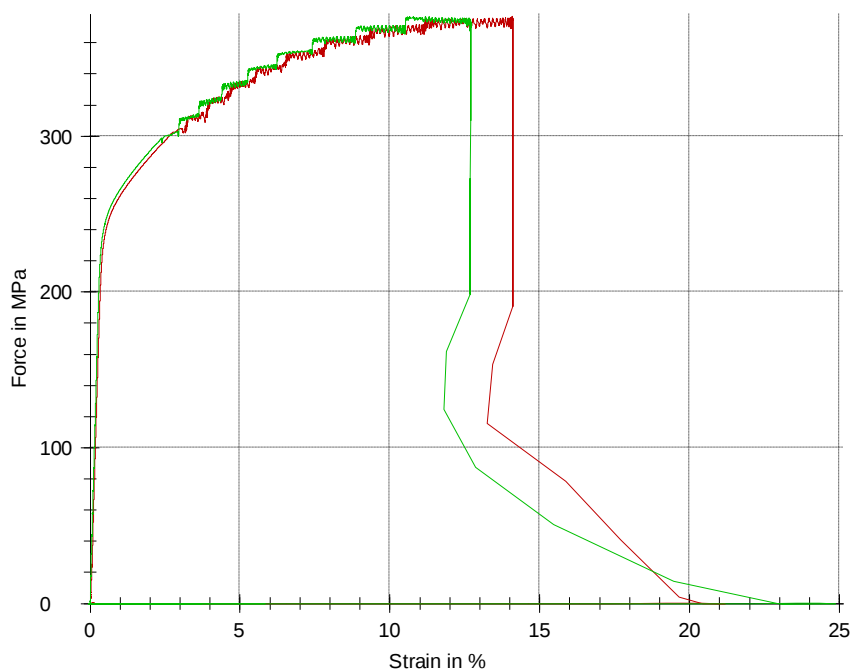


Figura 71: Resultados de la prueba de tracción.

Referencias

- [1] *Norwegian Hydropower Centre*, 2016. Available online: <https://www.ntnu.edu/nvks/norwegian-hydropower-center>. (Accessed on 16 March 2023).
- [2] I. H. Abbott and A. E. Von Doenhoff. *Theory of wing sections: including a summary of airfoil data*. Courier Corporation, USA, 1 edition, 2012.
- [3] R. Agromayor, N. Anand, J.-D. Müller, M. Pini, and L. O. Nord. A unified geometry parametrization method for turbomachinery blades. *Computer-Aided Design*, 133:102987, 2021.
- [4] R. Agromayor and L. O. Nord. Preliminary design and optimization of axial turbines accounting for diffuser performance. *International Journal of Turbomachinery, Propulsion and Power*, 4(3):32, 2019.
- [5] S. H. Ahmed, G. Husain, and M. A. Abdulrazaq. Theoretical stress analysis of gas turbine blade made from different alloys. *Al-Rafidain Engineering Journal (AREJ)*, 24:10–18, 2019.
- [6] N. Anand, S. Vitale, M. Pini, and P. Colonna. Assessment of ffd and cad-based shape parametrization methods for adjoint-based turbomachinery shape optimization. *Proceedings of Montreal*, 7:9th, 2018.
- [7] C. S. Angel. Verificación numérica del modelo de dfc del rodete tokke para ser incorporado a un proceso de optimización. Master’s thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2018.
- [8] H. Arias-Rojas, M. A. Rodríguez-Velázquez, Á. Cerriteño-Sánchez, F. J. Domínguez-Mota, and S. R. Galván-González. A fem structural analysis of a francis turbine blade parametrized using piecewise bernstein polynomials. *Computation*, 11:1–23, 2023.
- [9] R. E. Arndt. Fundamentals of hydraulic turbine design. *International Energy Journal*, 3, 1981.
- [10] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.
- [11] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

- [12] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, and K. Elkhodary. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & sons, 2014.
- [13] J. Bonet and R. D. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge university press, 1997.
- [14] S. P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [15] P. Brandão, V. Infante, and A. Deus. Thermo-mechanical modeling of a high pressure turbine blade of an airplane gas turbine engine. *Procedia Structural Integrity*, 1:189–196, 2016.
- [16] L. Cai, Y. He, S. Wang, Y. Li, and F. Li. Thermal-fluid-solid coupling analysis on the temperature and thermal stress field of a nickel-base superalloy turbine blade. *Materials*, 14:3315, 2021.
- [17] R. Carlisle. Scientific american inventions and discoveries (hoboken, new jersey, 2004).
- [18] A. Castorrini, A. Corsini, F. Rispoli, K. Takizawa, and T. E. Tezduyar. A stabilized ale method for computational fluid–structure interaction analysis of passive morphing in turbomachinery. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 29(05):967–994, 2019.
- [19] A. Castorrini, A. Corsini, F. Rispoli, P. Venturini, K. Takizawa, and T. E. Tezduyar. Computational analysis of wind-turbine blade rain erosion. *Computers & Fluids*, 141:175–183, 2016.
- [20] A. Castorrini, A. Corsini, F. Rispoli, P. Venturini, K. Takizawa, and T. E. Tezduyar. Supg/pspg computational analysis of rain erosion in wind-turbine blades. *Advances in Computational Fluid-Structure Interaction and Flow Simulation: New Methods and Challenging Computations*, pages 77–96, 2016.
- [21] Y. Cengel and J. Cimbala. *Ebook: Fluid mechanics fundamentals and applications (si units)*. McGraw Hill, 2013.
- [22] A. Cerriteño, G. Delgado, S. Galván, F. Dominguez, and R. Ramírez. Reconstruction of the francis 99 main runner blade using a hybrid parametric approach. In *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, Lausanne, Switzerland*, volume 774, page 012074. IOP Publishing, 21-26 March 2021.
- [23] T. Chirag, M. J. Cervantes, G. Bhupendrakumar, and O. G. Dahlhaug. Pressure measurements on a high-head francis turbine during load acceptance and rejection. *Journal of Hydraulic Research*, 52:283–297, 2014.
- [24] H. Chung, H.-S. Sohn, J. S. Park, K. M. Kim, and H. H. Cho. Thermo-structural analysis of cracks on gas turbine vane segment having multiple airfoils. *Energy*, 118:1275–1285, 2017.

- [25] R. Claudio, C. Branco, E. Gomes, and J. Byrne. Life prediction of a gas turbine disc using the finite element method. *8AS Jornadas de Fractura*, pages 131–144, 2002.
- [26] R. W. Clough and E. L. Wilson. Early finite element research at berkeley. In *Fifth US national conference on computational mechanics*, pages 1–35, 1999.
- [27] R. Codina. Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 170:112–140, 2001.
- [28] R. Codina. A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190:2681–2706, 2001.
- [29] R. Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191:4295–4321, 2002.
- [30] K. Cox and A. Echtermeyer. Structural design and analysis of a 10mw wind turbine blade. *Energy Procedia*, 24:194–201, 2012.
- [31] P. Čupr, D. Štefan, V. Habán, and P. Rudolf. Fsi analysis of francis-99 hydrofoil employing sbes model to adequately predict vortex shedding. In *Journal of Physics: Conference Series, Trondheim, Norway*, volume 1296, page 012002. IOP Publishing, 28–29 May 2019.
- [32] S. De. Verification and validation in computational mechanics. *Mechanical Engineering, Preprints*, 2022020121, 2022.
- [33] E. A. de Souza Neto, D. Peric, and D. R. Owen. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2011.
- [34] G. Delgado, S. Galván, F. Dominguez-Mota, J. García, and E. Valencia. Reconstruction methodology of a francis runner blade using numerical tools. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 34:1237–1247, 2020.
- [35] C. S. Desai and T. Kundu. *Introductory finite element method*. Crc Press, 2017.
- [36] P. Drtina and M. Sallaberger. Hydraulic turbines—basic principles and state-of-the-art computational fluid dynamics applications. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 213:85–102, 1999.
- [37] J.-F. Dubé, F. Guibault, M.-G. Vallet, and J.-Y. Trépanier. Turbine blade reconstruction and optimization using subdivision surfaces. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, pages 13–27, 2006.
- [38] D. M. Elsherif, A. A. Abd El-Wahab, and M. H. Abdellatif. Factors affecting stress distribution in wind turbine blade. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Cairo, Egypt*, volume 610, page 012020. IOP Publishing, 9-11 April 2019.
- [39] L. Eriksson. Generation of boundary-conforming grids around wing-body configurations using transfinite interpolation. *AIAA journal*, 20:1313–1320, 1982.

- [40] L.-E. Eriksson. Three dimensional spline-generated coordinate transformations for grids around wing-body configurations. *NASA. Langley Research Center Numerical Grid Generation Tech.*, 1980.
- [41] G. Farin. *Curves and surfaces for computer-aided geometric design: a practical guide*. Elsevier, USA, 3 edition, 2014.
- [42] M. Farouk, K. Kriaa, and M. Elgamal. Cfd simulation of a submersible passive rotor at a pipe outlet under time-varying water jet flux. *Water*, 14:2822, 2022.
- [43] R. T. Farouki. The bernstein polynomial basis: A centennial retrospective. *Computer Aided Geometric Design*, 29:379–419, 2012.
- [44] M. Farrashkhalvat and J. Miles. *Basic Structured Grid Generation: With an introduction to unstructured grid generation*. Elsevier, 2003.
- [45] L. Ferrando, J.-L. Kueny, F. Avellan, C. Pedretti, and L. Tomas. Surface parameterization of a francis runner turbine for optimum design. In *22nd IAHR Symposium on hydraulic machinery and systems*, pages 1–11, 2004.
- [46] F. Gagliardi and K. C. Giannakoglou. Rbf-based morphing of b-rep models for use in aerodynamic shape optimization. *Advances in Engineering Software*, 138:102724, 2019.
- [47] W. J. Gordon and C. A. Hall. Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:461–477, 1973.
- [48] D. A. Griffin. Blade system design studies volume ii: preliminary blade designs and recommended test matrix. Technical report, Sandia National Laboratories (SNL), Albuquerque, NM, and Livermore, CA, 2004.
- [49] M. E. Gurtin, E. Fried, and L. Anand. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge university press, 2010.
- [50] V. Hasmatuchi, S. Roth, F. Botero, F. Avellan, and M. Farhat. High-speed flow visualization in a pump-turbine under off-design operating conditions. In *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 25th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, 'Politehnica' University of Timișoara, Timișoara, Romania*, volume 12, pages 1–8. IOP Publishing, 20–24 September 2010.
- [51] R. W. Hertzberg, R. P. Vinci, and J. L. Hertzberg. *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*. John Wiley & Sons, 2020.
- [52] T. J. Hughes, R. L. Taylor, J. L. Sackman, A. Curnier, and W. Kanoknukulchai. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 8:249–276, 1976.
- [53] I. Iliev. Francis turbines for variable speed operation. 2020.

- [54] A. Jacomet, A. Khosravifardshirazi, I. Sahafnejad-Mohammadi, M. Dibaj, A. A. Javadi, and M. Akrami. Analysing the influential parameters on the monopile foundation of an offshore wind turbine. *Computation*, 9:71, 2021.
- [55] A. John, S. Shahpar, and N. Qin. Novel compressor blade shaping through a free-form method. *Journal of Turbomachinery*, 139(8):081002, 2017.
- [56] K. I. Joy. Bernstein polynomials. *On-Line Geometric Modeling Notes*, 13:1–11, 2000.
- [57] O. Kauss, H. Tsybenko, K. Naumenko, S. Hütter, and M. Krüger. Structural analysis of gas turbine blades made of mo-si-b under transient thermo-mechanical loads. *Computational Materials Science*, 165:129–136, 2019.
- [58] A. Kayastha. Study of vortex generators on francis turbine runner for variable speed operation. 2025.
- [59] H. Keck and M. Sick. Thirty years of numerical flow simulation in hydraulic turbomachines. *Acta mechanica*, 201:211–229, 2008.
- [60] R. Kelisky and T. Rivlin. Iterates of bernstein polynomials. *Pacific Journal of Mathematics*, 21:511–520, 1967.
- [61] J. Khalesi, S. Modaresahmadi, and G. Atefi. Sem gamma prime observation in a thermal and stress analysis of a first-stage rene’80h gas turbine blade: numerical and experimental investigation. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 43:613–626, 2019.
- [62] N.-H. Kim. *Introduction to nonlinear finite element analysis*. Springer Science & Business Media, 2014.
- [63] Y. Kim, H. Cho, S. Park, H. Kim, and S. Shin. Advanced structural analysis based on reduced-order modeling for gas turbine blade. *Aiaa Journal*, 56:3369–3373, 2018.
- [64] R. R. Kumar and K. Pandey. Static structural and modal analysis of gas turbine blade. In *IOP Conference series: materials science and engineering, Narsimha Reddy Engineering College, India*, volume 225. IOP Publishing, 3-4 July 2017.
- [65] J. O. Kverno. Flexible operation of francis turbines. 2023.
- [66] Y. W. Kwon and H. Bang. *The finite element method using MATLAB*. CRC press, USA, 2 edition, 2000.
- [67] E. Lengyel. *Mathematics for 3D game programming and computer graphics*. Course Technology Press, 2011.
- [68] B. Lewis, J. Cimbalá, and A. Wouden. Major historical developments in the design of water wheels and francis hydroturbines. In *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, volume 22, page 012020. IOP Publishing, 2014.

- [69] G.-R. Liu and S. S. Quek. *The finite element method: a practical course*. Butterworth-Heinemann, United Kingdom, 2 edition, 2013.
- [70] X. Liu, Y. Luo, and Z. Wang. A review on fatigue damage mechanism in hydro turbines. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 54:1–14, 2016.
- [71] J. Lubliner. *Plasticity theory*. Courier Corporation, 2008.
- [72] D. G. Luenberger, Y. Ye, et al. *Linear and nonlinear programming*, volume 2. Springer, 1984.
- [73] J. E. Marsden and A. Tromba. *Vector calculus*. Macmillan, 2003.
- [74] S. A. J. Marsden, L. S. S. Wiggins, L. Glass, R. Kohn, and S. Sastry. *Interdisciplinary applied mathematics*. 2002.
- [75] G. T. Mase, R. E. Smelser, and G. E. Mase. *Continuum mechanics for engineers*. CRC press, 2009.
- [76] C. Mataix. *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*. MADRID, 2 edition, 1986.
- [77] J. Matouq, R. Al-Waked, M. Al-Rashdan, D. Bani Mustafa, and M. S. Nasif. Computational fluid dynamics analysis of slip flow and heat transfer at the entrance region of a circular pipe. *Applied Sciences*, 14:6528, 2024.
- [78] D. B. Miracle, S. L. Donaldson, S. D. Henry, C. Moosbrugger, G. J. Anton, B. R. Sanders, N. Hrivnak, C. Terman, J. Kinson, K. Muldoon, et al. *ASM handbook*, volume 21. ASM international Materials Park, OH, 2001.
- [79] O. D. Monsalve-Cifuentes, S. Vélez-García, D. Sanín-Villa, and J. D. Revuelta-Acosta. Fluid-structure numerical study of an in-pipe axial turbine with circular blades. *Energies*, 17:3539, 2024.
- [80] P. F. Mushumbusi, A. Chaudhari, J. Leo, and V. G. Masanja. Cfd analysis of flow characteristics and diagnostics of leaks in water pipelines. *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 14:16272–16280, 2024.
- [81] O. Mykhaskiv, M. Banović, S. Auriemma, P. Mohanamurthy, A. Walther, H. Legrand, and J.-D. Müller. Nurbs-based and parametric-based shape optimization with differentiated cad kernel. *Computer-Aided Design and Applications*, 15(6):916–926, 2018.
- [82] S. Nekahi, K. Vaferi, M. Vajdi, F. S. Moghanlou, M. S. Asl, and M. Shokouhimehr. A numerical approach to the heat transfer and thermal stress in a gas turbine stator blade made of hfb2. *Ceramics International*, 45:24060–24069, 2019.
- [83] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, 1999.
- [84] P. T. Østby, E. Agnalt, B. Haugen, J. T. Billdal, and O. G. Dahlhaug. Fluid structure interaction of francis-99 turbine and experimental validation. In *Journal of Physics: Conference Series, NTNU, Trondheim, Norway*, volume 1296, page 012006. IOP Publishing, 28–29 May 2019.

- [85] P. T. Østby, J. T. Billdal, K. Sivertsen, B. Haugen, and O. G. Dahlhaug. Dynamic stresses in high head francis turbines. *Int. J. Hydropower Dams*, 23:88–92, 2016.
- [86] L. D. Pérez Rubio, S. R. Galván González, F. J. Domínguez Mota, A. Cerriteño Sánchez, M. A. Tamayo Soto, and G. Delgado Sánchez. Reconstruction of a steam turbine blade using piecewise bernstein polynomials and transfinite interpolation. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Virtual, Online*, volume 85017, pages 1–7. American Society of Mechanical Engineers, 7-11 June 2021.
- [87] D. Platonov, A. Minakov, and A. Sentyabov. Numerical investigation of hydroacoustic pressure pulsations due to rotor-stator interaction in the francis-99 turbine. In *Journal of Physics: Conference Series, NTNU, Trondheim, Norway*, volume 1296, page 012009. IOP Publishing, 28–29 May 2019.
- [88] J. N. Reddy. *Introduction to the finite element method*. McGraw-Hill Education, 2019.
- [89] T. S. Reynolds. *Stronger than a hundred men: a history of the vertical water wheel*, volume 7. JHU Press, 1983.
- [90] R. Ribó, M. Pasenau, E. Escolano, A. Coll, A. Melendo, A. Monros, J. Gárate, and M. Peyrau. Gid reference manual. Technical report, CIMNE, Barcelona, España, 2022.
- [91] M. H. Sadd. *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Academic Press, 2009.
- [92] K. Sagmo and P. Storli. A test of the v2-f k- ϵ turbulence model for the prediction of vortex shedding in the francis-99 hydrofoil test case. In *Journal of Physics: Conference Series, NTNU, Trondheim, Norway*, volume 1296, page 012004. IOP Publishing, 28–29 May 2019.
- [93] L. Schwerdt, T. Hauptmann, A. Kunin, J. R. Seume, J. Wallaschek, P. Wriggers, L. Panning-von Scheidt, and S. Löhnert. Aerodynamical and structural analysis of operationally used turbine blades. *Procedia CIRP*, 59:77–82, 2017.
- [94] U. Seidel, C. Mende, B. Hübner, W. Weber, and A. Otto. Dynamic loads in francis runners and their impact on fatigue life. In *IOP conference series: earth and environmental science, Montreal, Canada*, volume 22, page 032054. IOP Publishing, 22-26 September 2014.
- [95] M. Simão, J. Mora, and H. M. Ramos. Fluid–structure interaction with different coupled models to analyse an accident occurring in a water supply system. *Journal of Water Supply: Research and Technology—AQUA*, 64:302–315, 2015.
- [96] J. C. Simo and T. J. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer Science & Business Media, USA, 2 edition, 1998.
- [97] K.-G. Steffens. *The history of approximation theory: from Euler to Bernstein*. Springer, 2006.
- [98] S. Steinberg. *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press, 1993.

- [99] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International journal for numerical methods in engineering*, 48:1549–1570, 2000.
- [100] X. Tang, J. Luo, and F. Liu. Adjoint aerodynamic optimization of a transonic fan rotor blade with a localized two-level mesh deformation method. *Aerospace Science and Technology*, 72:267–277, 2018.
- [101] E. O. Tengs. Numerical simulation of fluid-structure interaction in high head francis turbines. 2019.
- [102] J. F. Thompson, B. K. Soni, and N. P. Weatherill. *Handbook of grid generation*. CRC press, 1998.
- [103] C. Trivedi, E. Agnalt, and O. G. Dahlhaug. Investigations of unsteady pressure loading in a francis turbine during variable-speed operation. *Renewable energy*, 113:397–410, 2017.
- [104] C. Trivedi, M. J. Cervantes, and O. G. Dahlhaug. Experimental and numerical studies of a high-head francis turbine: A review of the francis-99 test case. *Energies*, 9(2):1–24, 2016.
- [105] B. Vasilyev. Stress-strain state prediction of high-temperature turbine single crystal blades using developed plasticity and creep models. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Düsseldorf, Germany*, volume 45769. American Society of Mechanical Engineers, 16–20 June 2014.
- [106] J. Wedel, M. Štrákl, J. Ravnik, P. Steinmann, and M. Hriberšek. A specific slip length model for the maxwell slip boundary conditions in the navier–stokes solution of flow around a microparticle in the no-slip and slip flow regimes. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 36:723–740, 2022.
- [107] F. M. White et al. *Fluid mechanics*. McGraw-hill New York, 2011.
- [108] S. A. Yousefi and M. Behroozifar. Operational matrices of bernstein polynomials and their applications. *International Journal of Systems Science*, 41:709–716, 2010.
- [109] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier, 2005.
- [110] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier, USA, 6 edition, 2005.
- [111] R. Zorrilla Martínez. Fsi procedures for civil engineering applications. Master’s thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2016.
- [112] Z. Zuo, S. Liu, Y. Sun, and Y. Wu. Pressure fluctuations in the vaneless space of high-head pump-turbines—a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 41:965–974, 2015.

Heriberto Arias Rojas

Análisis estructural del álabe de una turbina Francis 99, parametrizado usando polinomios de Bernstein.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:490469824

Fecha de entrega

2 sep 2025, 11:45 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

2 sep 2025, 11:57 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

Análisis estructural del álabe de una turbina Francis 99, parametrizado usando polinomios de Be....pdf

Tamaño del archivo

17.1 MB

134 páginas

30.344 palabras

150.961 caracteres

11% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 10 palabras)

Fuentes principales

- 11%  Fuentes de Internet
- 7%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
286 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Doctorado en Ciencias en Ingeniería Física	
Título del trabajo	Análisis estructural del álabe de una turbina Francis 99, parametrizado usando polinomios de Bernstein.	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Heriberto Arias Rojas	heriberto.arias@umich.mx
Director	Francisco Javier Domínguez Mota	dmota@umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Gonzalo Viramontes Gamboa	doc.cs.ingenieria.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	si	Revisar ortografía y reescribir algunas frases propias.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	no	
Traducción a otra lengua	no	
Revisión y corrección de estilo	no	
Análisis de datos	no	
Búsqueda y organización de información	si	Recomendación de referencias para temas específicos.
Formateo de las referencias bibliográficas	no	
Generación de contenido multimedia	no	
Otro	no	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Heriberto Arias Rojas 
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, a 15 de agosto de 2025.